

---

Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

# FEDERIGO ENRIQUES

---

ENRIQUES, FEDERIGO

**Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni**

Boll. Mathesis **III** (1911), pp. 87-105.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

---

*Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"*

*promosso dal*

*Ministero per i Beni e le attività Culturali*

*Area 4 – Area Archivi e Biblioteche*

*Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

devono incessantemente aiutarsi e completarsi. Questa reciproca penetrazione è il pegno d'un sicuro progresso. Essa impedirà ai matematici di perdere i loro sforzi in lavori di speculazione pura, di fare un'opera sterile, come lo fu in passato, per buona parte, quella dei filosofi greci; essa arresterà gli sperimentatori sulla via dell'empirismo e li obbligherà a sottomettersi al severo controllo dell'analisi.

Così, signori, applicando ad uso nostro, la bella divisa della nostra ospite, la nazione belga, troveremo insieme la Forza nell'Unione.

C. BOURLET.

---

## Sui numeri non archimedei e su alcune loro interpretazioni <sup>(1)</sup>

### § 1.

#### I numeri non archimedei.

1. Riassunto delle proprietà dei numeri reali. — Riassumiamo le principali proprietà dei numeri reali:

1. OPERAZIONI. — I numeri reali costituiscono un *corpo* di enti trasformato in se stesso dalle operazioni di *somma* e *prodotto*:  $a + b$ ,  $a b$ .

2. PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE OPERAZIONI. — La somma e il prodotto soddisfano alle proprietà commutativa e associativa,

$$a + b = b + a, a b = b a \\ (a + b) + c = a + (b + c), (a b) c = a (b c),$$

e il prodotto anche alla proprietà distributiva

$$(a + b) c = a c + b c$$

---

(1) Questo scritto è una parte dell'articolo « Sui numeri reali » che vedrà prossimamente la luce presso l'editore Zanichelli nei *Collectanea*: « Questioni riguardanti le Matematiche elementari », rifacimento del volume pubblicato nel 1900.

3. PROPRIETÀ DELLO ZERO. — Esiste un numero ben determinato « lo zero (0) », che, per qualunque valore di  $a$ , soddisfa alla condizione:

$$a + 0 = a \\ (a - a = b - b \dots)$$

Si ha, qualunque sia  $a$ ,

$$a \cdot 0 = 0$$

Si ha, se

$$a \cdot b = 0, \\ a = 0, \text{ o } b = 0.$$

4. OPERAZIONI INVERSE. — I numeri reali costituiscono un corpo rispetto all'operazione inversa della somma, cioè è sempre possibile la *sottrazione*:  $a - b$ . I numeri reali, *tolto lo zero*, costituiscono pure un corpo rispetto all'operazione inversa della moltiplicazione, cioè è sempre possibile la *divisione*:  $\frac{a}{b}$ .

5. ORDINAMENTO. — I numeri reali formano una serie ordinata, cioè: se

$$a = b, \text{ o } a > b \text{ o } b > a \text{ (} a < b \text{)}, \\ \text{e se } a > b, b > c, \text{ anche } a > c.$$

6. CONTINUITÀ. — La serie ordinata dei numeri reali è *continua*, nel senso di Dedekind, cioè: se la serie stessa è divisa in due parti (classi contigue) per modo che ogni numero appartenga ad *una* delle due parti, ed ogni numero della prima parte sia minore di ciascun numero della seconda, allora esiste un *massimo* della prima parte o un *minimo* della seconda. (Segue che la serie dei numeri susseguenti ad un dato, o quella dei numeri susseguenti ad un dato e precedenti ad un altro, sono pure serie continue).

7. NUMERI POSITIVI. — I numeri reali susseguenti allo 0 (positivi,  $a > 0$ ) formano un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione.

8. CONDIZIONE DI DISEGUAGLIANZA O DI SOTTRAZIONE. — Se  $a, b$  sono due numeri reali e positivi, ed

$$a > b,$$

esiste fra i numeri reali e positivi la differenza:

$$c = a - b \text{ (ossia } a = b + c \text{);}$$

viceversa se — essendo  $a, b, c$  positivi —

$$c = a - b \text{ (} a = b + c \text{),}$$

si ha

$$a > b.$$

9. L'UNITÀ. — Esiste un numero positivo ben determinato « l'unità (1) » tale che, qualunque sia il numero reale  $a$ ,

$$a \cdot 1 = a,$$

$$\left( \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \dots \right).$$

10. GLI INTERI. — I numeri somme di unità (*interi positivi* o « numeri naturali ») formano entro la serie ordinata dei numeri reali una serie *bene ordinata* (in cui ad  $n$  succede  $n + 1$ ) (1).

I numeri interi e positivi formano un corpo rispetto alla somma, e soddisfano alla *condizione di disegualianza*, cioè: se  $a$  e  $b$  sono interi positivi ed  $a > b$ ,  $a - b$  è un numero intero positivo.

11. PROPOSIZIONE D'ARCHIMEDE. — Dati due numeri reali e positivi  $a, b$ , esiste sempre qualche intero positivo  $n$  per cui

$$n a > b.$$

Queste proprietà dei numeri reali si riattaccano al duplice aspetto in cui essi si presentano, cioè al fatto che la totalità dei numeri reali nasce dall'estensione dei numeri naturali ordinali ed i numeri reali positivi nascono come estensione dei numeri naturali cardinali; per esempio sono essenzialmente *proprietà cardinali* le prop. 7), 8), 11).

L'insieme delle proprietà cardinali dei numeri reali e positivi, risponde alla condizione che questi numeri si possano riguardare come « rapporti di grandezze » o come « trasformazioni di un sistema di grandezze in se stesso (moltiplicazioni) »; e ciò per ri-

(1) Una serie dicesi *bene ordinata* (Cantor) se ogni parte di essa ha un primo elemento.

guardo ad un sistema di grandezze caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Sommabilità — somma commutativa e associativa — Ordinamento soddisfacente alla condizione di diseuguaglianza — Proposizione d'Archimede — Continuità o integrità.

Ora poichè queste proprietà delle grandezze sono anche proprietà dei numeri reali e positivi, così può dirsi che « *i numeri reali e positivi formano, essi stessi, un (particolare) sistema di grandezze soddisfacente alle condizioni indicate* ». La maggiore determinazione del sistema dei numeri è in rapporto colla definizione di una seconda operazione oltre la somma: il prodotto, rispetto a cui le grandezze numeriche formano pure un corpo.

La relazione fra numeri e grandezze può anche essere espressa sotto forma geometrica. La serie dei numeri reali si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata coi punti d'una retta. E la serie dei numeri reali e positivi colla serie dei punti d'una semiretta. Allora *le proprietà per cui i numeri reali positivi formano un sistema di grandezze si traducono nei postulati di*: Congruenza fra segmenti, ordine continuo dei segmenti crescenti, postulato d'Archimede. In particolare appare di qui che la prop. d'Archimede (II) è conseguenza della continuità nel senso di Dedekind (prop. 6).

**2. I trasfiniti di Cantor come numeri non archimedei.** — Ci proponiamo ora di estendere il concetto del numero reale lasciando cadere la condizione d'Archimede, per modo che la serie dei nuovi numeri (*non archimedei*) comprenda un *infinito*  $\omega$  o un *infinitesimo attuale*  $\eta$  rispetto all'unità:

$$n < \omega \text{ o } n > \eta$$

per qualunque intero positivo

$$n (n = n \cdot 1).$$

Si tratta di vedere fino a che punto si possono conservare pei numeri non archimedei le proprietà dei numeri ordinari sopra riassunte.

Anzitutto le proprietà dei numeri interi!

Una generalizzazione dei numeri interi positivi è data dai trasfiniti di Cantor

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \dots,$$

comprendenti un infinito attuale  $\omega$ . Ma se si conserva *pei trasfiniti di Cantor il concetto ordinale della somma* (ritenendo che  $n + \omega$  designi « il numero immediatamente successivo alla serie

$$n + 1, n + 2, \dots »)$$

si trova

$$1 + \omega = 2 + \omega \dots = \omega,$$

e quindi *non vale la proprietà commutativa della somma*:

$$1 + \omega \neq \omega + 1$$

Si può togliere questo inconveniente modificando la definizione della somma, e precisamente ponendo:

$$(a \omega + b) + (c \omega + d) = (a + c) \omega + (b + d).$$

Tuttavia questi trasfiniti non soddisfano interamente alle proprietà (10) dei numeri interi positivi: formano una serie ben ordinata, costituiscono un corpo rispetto alla somma, ma *non verificano la condizione di sottrazione* poichè, pur essendo

$$\omega > b \quad (b = 1, 2, \dots),$$

non esiste

$$\omega - b.$$

Se si vuole soddisfatta questa condizione aggiungendo ai *precedenti trasfiniti*

$$\omega - 1, \omega - 2, \dots,$$

*si perde la condizione che i trasfiniti stessi formino una serie ben ordinata*, poichè non esiste un minimo della serie decrescente

$$\omega - 1, \omega - 2 \dots$$

Così la proprietà dei numeri interi positivi di formare una serie ben ordinata appare incompatibile colle altre proprietà (10) dei numeri interi positivi in un sistema non archimedéo.

*Questa incompatibilità di una serie ben ordinata d'interi positivi non archimedei coi postulati delle grandezze numeriche, si riconduce al legame per cui la condizione d'Archimede dipende come conseguenza dalla continuità nel senso di Dedekind.*

Infatti se si considerano i numeri

$$a \omega + b$$

per  $b$  reale  $\geq 0$  e per  $a$  intero e positivo, si ottiene una serie continua nel senso di Dedekind (prop. 6), poichè la partizione in classi contigue

$$a\omega + b (a > 0), b (a = 0),$$

ammette (come ogni altra partizione analoga) un numero limite ( $\omega$ ). Ora se la serie suddetta potesse riguardarsi come una serie di grandezze, soddisfacente alla condizione di diseuguaglianza, si dedurrebbe la prop. d'Archimede, in contrasto coll'ipotesi

$$\omega > n.$$

Una serie di numeri non archimedei positivi a  $\omega + b$ , soddisfacente alla condizione di sottrazione conterrà non solo i numeri corrispondenti a  $b$  positivo, ma anche quelli corrispondenti a  $b$  negativo. Una serie siffatta

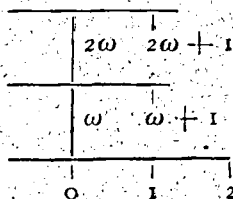
$$a\omega + b (b \geq 0)$$

non sarà più continua nel senso di Dedekind, ma sarà una *serie continua nel senso di Cantor se è continua rispetto a b*. Infatti due successioni una crescente e l'altra decrescente di numeri

$$a_n \omega + b_n, a'_n \omega + b'_n$$

saranno da ritenere convergenti solo nel caso che — per  $n$  assai grande — sia  $a_n = a'_n = a_{n+1} = a'_{n+1} \dots = a$ , e che  $b_n, b_{n+1}, \dots, b'_n, b'_{n+1}, \dots$  formino successioni convergenti, nel qual caso ammettono il numero-limite  $a\omega + \lim b_n$ ; in specie le successioni  $1, 2, 3 \dots \omega; \omega - 1, \omega - 2 \dots$ , non sono convergenti perchè è  $(\omega - m) - n > n$ .

Si noti che il sistema  $a\omega + b$  ove  $a$  percorre valori interi corrisponde al continuo non archimedeo citato da Veronese che si può rappresentare geometricamente con un sistema di rette parallele prese nell'ordine di successione da sinistra a destra e dal basso all'alto.



Si può generalizzare il sistema stesso facendo *variare anche in modo continuo*. Con ciò non cessa di valere la continuità nel senso di Cantor, e si conservano del pari le proprietà delle grandezze numeriche. A questa estensione si è condotti intanto dalla condizione che *esista per a qualunque il prodotto  $a\omega$* .

Ma la condizione che i numeri non archimedei formino un corpo rispetto ad un'operazione avente le proprietà del prodotto porta altre conseguenze che dobbiamo esaminare più da vicino.

**3. Prodotto di numeri non archimedei.** — Prendiamo come punto di partenza il sistema non archimedeo più generale

$$a\omega + b,$$

dove  $a$  e  $b$  percorrono tutti i valori reali, positivi e negativi, e dove

$$a\omega + b > c\omega + d$$

se

$$a > c$$

o se

$$a = c, \quad b > d.$$

Si tratta di vedere se possa definirsi il prodotto  $(a\omega + b)(c\omega + d)$  in guisa che il sistema suddetto formi un corpo, e soddisfacendo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

*Evidentemente una tale definizione dipende dalla posizione*

$$\omega^2 = a\omega + \beta,$$

perchè

$$(a\omega + b)(c\omega + d) = ac\omega^2 + (bc + ad)\omega + bd.$$

Così nella teoria dei numeri complessi ordinari si soddisfa alle condizioni enunciate ponendo

$$\omega^2 = -1.$$

Ma facendo in tal guisa, e in generale se  $a < 0$  o  $a = 0$  e  $\beta < 0$ , non si soddisfa alla condizione (7) che i numeri positivi ( $> 0$ ) formino un corpo rispetto al prodotto.

Poniamo invece  $\omega^2 = a\omega + \beta$ , con  $a > 0$ , o con  $a = 0$  e  $\beta > 0$  e domandiamoci se l'insieme dei numeri positivi  $a\omega + b$  ( $a > 0$ ) può costituire un corpo rispetto al prodotto così definito.

A tal fine si considerino due numeri

$$\omega - x, \quad \omega - y \quad (x > 0, \quad y > 0);$$

si avrà

$$\begin{aligned} (\omega - x)(\omega - y) &= \omega^2 - (x + y)\omega + xy \\ &= \{a - (x + y)\}\omega + (xy + \beta), \end{aligned}$$

e però

$$(\omega - x)(\omega - y) < 0$$

se

$$x + y > a.$$

Dunque in nessun modo i numeri positivi  $a\omega + b$  con  $a > 0$  possono formare un corpo rispetto ad un'operazione che goda delle proprietà del prodotto.

NOTA. — L'ipotesi precedente ( $a \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ) è incompatibile anche con le proprietà dello zero rispetto alla totalità dei numeri  $a\omega + b$ : esistono dei divisori dello zero, cioè dei numeri diversi da 0 il cui prodotto è 0.

Invero perchè sia

$$(\omega - x)(\omega - y) = 0,$$

basta determinare  $x$ ,  $y$  in modo che

$$\begin{aligned} \omega^2 - (x + y)\omega + xy &= 0, \\ \{a - (x + y)\}\omega + (\beta + xy) &= 0, \\ x + y &= a \quad xy = -\beta; \end{aligned}$$

e queste equazioni definiscono dei valori reali di  $x$ ,  $y$ .

**4. Corpo dei numeri non archimedei.** — Abbiamo dimostrato che se si parte da un sistema di grandezze non archimedeo, contenente una sola specie di unità infinite attuali rispetto all'unità principale (1), si ottiene un sistema di numeri  $a\omega + b$  ( $a \geq 0$ ), che non può formare un corpo relativamente ad un'operazione soddisfacente alle proprietà del prodotto. Un corpo di numeri non archimedei positivi (in cui si supponga definito il prodotto) dev'essere più esteso, e precisamente deve contenere una nuova unità  $\omega^2$ , infinita d'ordine superiore rispetto ad  $\omega$ ; ciò è d'accordo con l'intuizione per cui

$$\omega^2 > n\omega, \quad \text{per } n = 1, 2, 3 \dots$$

Ora richiamando le proprietà dei numeri a più unità si ha che un sistema di numeri della forma  $a\omega^2 + b\omega + c$  non può in alcun caso formare un corpo rispetto a due operazioni cui spet-

tino le proprietà della somma e del prodotto: quindi si è condotti a considerare  $\omega^3$  come una nuova unità infinita d'ordine superiore rispetto ad  $\omega^2$ , e così via di seguito.

I numeri della forma

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a,$$

dove  $n$  percorre tutti i valori 0, 1, 2, 3 ..., e, dentro il sistema di questi, i numeri positivi ( $a_n > 0$ ), danno luogo ad un corpo di numeri non archimedei soddisfacente alle proprietà della somma e del prodotto, alla continuità nel senso di Cantor, e alla condizione di diseuguaglianza delle grandezze numeriche.

Ma nel sistema anzidetto non è possibile la divisione.

Per rendere possibile la divisione occorre:

1° aggiungere le serie delle unità infinitesime

$$\eta = \frac{1}{\omega}, \quad \eta^2 = \frac{1}{\omega^2} \dots;$$

2° considerare numeri formati con infinite unità infinitesime, quali risultano p. es. dalla divisione

$$\frac{1}{a + b\omega} = \eta (b + a\eta)^{-1}$$

sviluppando  $(b + a\eta)^{-1}$  con la serie binominale.

In conclusione un corpo di numeri non archimedei positivi entro cui sieno possibili le operazioni di somma, prodotto, e divisione, contiene numeri con un numero arbitrariamente grande (ma finito) di unità infinite e con un numero infinito di unità infinitesime, della forma

$$a) \quad a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \eta^m$$

La condizione di continuità di Cantor non dice più nulla rispetto a numeri di questa forma, ma essa può surrogarsi con la condizione che ogni sistema di numeri formati con un numero finito di unità sia continuo (nel senso di Cantor). Questa condizione importa la continuità rispetto ai coefficienti  $a_0, a_1, a_2 \dots, b_1, b_2 \dots$ , alla quale si perviene egualmente — in base alla possibilità del prodotto — se si suppone che uno solo dei coefficienti vari in modo continuo.

Il sistema corrisponde ai corpi continui di numeri non archimedei, contenenti il *minimo sistema possibile di unità irriducibili*. È possibile ottenere corpi più generali in cui si considerino anche potenze non intere di  $\omega$ ; tali sono i corpi di numeri di Veronese e quelli dei *monosemii* di Levi-Civita.

Ma, tralasciando questa possibile generalizzazione, noi ci proponiamo di vedere ora come si possa effettivamente costruire un corpo minimo di numeri non archimedei.

**5. Numeri funzionali non archimedei.** — Per costruire effettivamente un corpo minimo di numeri non archimedei, soddisfacente alle condizioni indicate innanzi, ricorreremo all'idea genialmente svolta da Hilbert, cui daremo una sviluppo adatto allo scopo che qui viene proposto.

Consideriamo le funzioni razionali fratte del tipo

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0}{b_m t^m + \dots + b_1 t + b_0}$$

Due funzioni siffatte

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}, \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

si possono confrontare per  $t$  assai grande: accade allora che (escluso il caso d'uguaglianza) da un certo punto in poi

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} > 0$$

oppure

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} < 0$$

Nel primo caso scriveremo

$$\frac{f}{\varphi} > \frac{\chi}{\psi}$$

nel secondo

$$\frac{f}{\varphi} < \frac{\chi}{\psi}$$

Con ciò le funzioni anzidette vengono ordinate in una serie di funzioni crescenti. Gli enti di questa serie, cioè le funzioni che succedono alla costante ( $> 0$ ), si possono riguardare come numeri positivi, costituenti un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione, definite ponendo:

$$\frac{f}{\varphi} + \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi + \chi\varphi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} \cdot \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\chi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} : \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi}{\varphi\chi}.$$

L'insieme dei numeri — funzioni  $\geq 0$ , forma anche un corpo rispetto alla sottrazione. Ora i numeri che abbiamo definito sono numeri non archimedei riducibili alla forma

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + \dots,$$

ossia

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots,$$

dove

$$\omega = t, \quad \eta = \frac{1}{t}.$$

NOTA. — Riguardo all'estensione del corpo dei numeri funzionali definito innanzi, avvertiamo che in esso si possono assumere ad arbitrio quanti si vogliano coefficienti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ , ma non la serie infinita  $b_1, b_2, \dots$ .

Si possono generalizzare i numeri funzionali suddetti considerando le più generali serie convergenti:

$$a_n t^n + \dots + a_0 + \sum b_m t^{-m}$$

(anche non nascenti dalla divisione di funzioni razionali fratte) e comparandole nel modo indicato innanzi per le funzioni razionali. Allora la serie dei coefficienti  $b_1, b_2, \dots$ , si può assumere ad arbitrio compatibilmente con certe disuguaglianze.

È lecito del resto togliere questa restrizione, considerando anche le serie divergenti  $\sum b_m t^{-m}$ , purchè si modifichi il modo di confronto di

$$\sum b_m t^{-m}, \sum c_m t^{-m},$$

cercando quale sia il segno della differenza

$$\sum_1^n b_m t^{-m} - \sum_1^n c_m t^{-m},$$

per  $n$  e  $t$  crescenti, dove  $t$  si faccia crescere assai rapidamente rispetto ad  $n$ .

**6. Confronto dei numeri non archimedei coi numeri reali.** — Confrontiamo i numeri non archimedei costruiti testè come numeri funzionali (hilbertiani) coi numeri reali, tenendo presenti le proprietà 1) . . . 11) di questi, enunciate al n. 1. Vediamo allora, che i nostri numeri non archimedei soddisfano come i numeri reali alle condizioni 1) 2) 3) 4) 5) 7) 8) 9), cioè:

L'insieme dei numeri non archimedei forma un corpo rispetto alle operazioni di somma e prodotto (1) e alle loro inverse, sottrazione e divisione (4); quelle operazioni danno luogo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva (2) e alle proprietà dello zero (3) e dell'unità (9). L'insieme dei numeri non archimedei è ordinato per numeri crescenti in guisa che fra due numeri disuguali ne esiste sempre qualcuno maggiore dell'uno e minore dell'altro (5). I numeri non archimedei seguenti allo zero (positivi) formano un corpo rispetto alla somma, al prodotto e alla divisione (7) e soddisfano alla condizione di sottrazione delle grandezze (8).

L'abbandono della condizione d'Archimede 11) ci ha portato a modificare necessariamente le proprietà 6) 10):

Non vale per la serie dei numeri non archimedei la continuità nel senso di Dedekind 6). In luogo di essa si ha che ogni sistema di numeri formato con un numero finito d'unità irriducibili infinite ed infinitesime è continuo nel senso di Cantor e però intero (i coefficienti percorrono tutti i valori reali). La condizione di integrità si può render soddisfatta — come si è detto — anche per il sistema dei numeri formati con infinite unità.

I numeri non archimedei interi e positivi:

$$a_n \omega^n + \dots + a_0 + \sum b_m y^m$$

(con  $a, b$  interi,  $a_n > 0$ ) non formano più una serie ben ordinata (10), ma costituiscono sempre un corpo rispetto alla somma e al prodotto.

In sostanza tutte le proprietà cardinali dei numeri reali (eccezion fatta per la prop. d'Archimede) appartengono ai nostri numeri non archimedei; le proprietà ordinali si estendono solo in parte, modificandosi le 6), 11).

§ 2.

**Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non archimedei.**

**7. Ordini d'infinito di Du Bois Reymond.** — Nella teoria dell'accrescimento delle funzioni di Du Bois Reymond si sogliono confrontare gli *ordini* d'infinito o d'infinitesimo delle funzioni d'una variabile  $t$  crescenti o decrescenti oltre ogni limite (ad es. per  $t = \infty$ ). Essendo  $f(t)$  e  $\varphi(t)$  due funzioni crescenti si cerca se

$$\lim_{t = \infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \infty,$$

$$\lim_{t = \infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \text{cost. } (= \neq 0),$$

$$\lim_{t = \infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0;$$

nei tre casi si dice rispett. che l'ordine d'infinito di  $f$  è maggiore, uguale o minore di quello di  $\varphi$ . Analogamente si dica per gli ordini d'infinitesimo salvo lo scambio delle parole *maggiore* e *minore*.

In particolare gli ordini d'infinito delle funzioni

$$a_1 t + a_0, a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \dots$$

sono rispett. uguali a quelli di

$$t, t^2, \dots,$$

e si lasciano rappresentare coi numeri naturali

$$1, 2, \dots$$

La costante  $a_0$  può considerarsi come un *infinito d'ordine 0*; e gl'infinitesimi

$$\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, \dots$$

come *infiniti d'ordine negativo*

$$-1, -2, \dots$$

Si possono considerare *ordini d'infinito fratti ed irrazionali* corrispondenti a potenze  $t^x$  con  $x$  fratto o irrazionale. Ma i numeri reali non esauriscono la serie dei possibili ordini d'infinito delle funzioni.

Infatti:

1° l'ordine d'infinito di alcune funzioni, p. es. di  $e^t$ , è superiore ad ogni numero reale e positivo  $n$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t^n} = \infty;$$

2° l'ordine d'infinito di alcune funzioni, per es. di  $\log t$ , deve ritenersi  $> 0$  ma inferiore ad ogni numero reale e positivo  $n$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t^n} = 0;$$

3° esistono funzioni crescenti il cui *ordine d'infinito* è incomparabile perchè  $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$  per  $t$  crescente può non tendere ad un limite ed oscillare fra 0 e  $\infty$ .

Supponiamo di aver delimitato un corpo di funzioni comprendente  $t^x$  per  $x$  reale qualsiasi, i cui ordini d'infinito sieno comparabili. Questi ordini d'infinito, in cui si trovano infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ad 1, costituiscono una *classe di grandezze non archimedee*; potranno riguardarsi come numeri soddisfacenti alle proprietà indicate nel prec. § 1.

Si tratta perciò di vedere come possano definirsi la somma e il prodotto di due ordini  $\alpha$ ,  $\beta$ .

La somma si definisce subito:

se

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{ord. inf. } f(t) \\ \beta &= \text{ord. inf. } \varphi(t), \\ \alpha + \beta &= \text{ord. inf. } f\varphi; \end{aligned}$$

e rimangono soddisfatte le proprietà associativa e commutativa.

Postulando ora la proprietà distributiva del prodotto, si avrà per  $n$  intero e positivo

$$n\alpha = \text{ord. inf. } f^n(t),$$

formula che per estensione conduce alla definizione generale del prodotto:

$$\beta\alpha = \text{ord. inf. } \varphi\{f(t)\}$$

Ma il prodotto così definito non gode della proprietà commutativa, giacchè, ponendo p. es.

$$lg = \text{ord. inf. } \log t,$$

si avrà

$$n lg = \text{ord. inf. } \log^n t$$

$$\begin{aligned} lg n &= \text{ord. inf. } \log t^n \\ &= \text{ord. inf. } n \log t, \end{aligned}$$

mentre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log^n t}{n \log t} = 0,$$

sicchè

$$n lg \neq lg \cdot n.$$

**8. Probabilità.** — I numeri non archimedei trovano applicazione in un problema di probabilità che qui citiamo a titolo d'esempio d'una classe più generale.

Si supponga di far cadere un punto  $P$  entro un quadrato, e si postuli che:

1° date nel quadrato due aree equivalenti, vi sia uguale probabilità che  $P$  cada nell'una o nell'altra;

2° date due linee di ugual lunghezza vi sia pure ugual probabilità che P cada sull'una o sull'altra.

Ciò posto si consideri la probabilità che P cada in un luogo  $S + s$  contenuto nel quadrato e costituito da un'area  $S$  (contorno incluso) e da una linea  $s$  fuori di  $S$ ; questa probabilità è espressa da un numero della forma

$$a + b\eta,$$

dove  $0 < a < 1$ , ed  $\eta$  è un infinitesimo. Se  $c + d\eta$  corrisponde alla probabilità che P cada in un luogo analogo  $S' + s'$ , la somma

$$(a + b\eta) + (c + d\eta) = (a + c) + (b + d)\eta$$

corrisponde alla probabilità che P cada entro

$$S + S' + s + s',$$

supposto tuttavia che  $S, S', s, s'$  non abbian parti comuni; questa condizione può sempre soddisfarsi sostituendo ad  $S', s'$  un'area equivalente e una linea d'ugual lunghezza, purchè sia

$$a + c < 1.$$

Il prodotto

$$(a + b\eta)(c + d\eta) = ac + (ad + bc)\eta + bd\eta^2,$$

corrisponde alla probabilità composta che lanciando due punti P, Q questi cadano rispett. in  $S + s$  ed  $S' + s'$ . Analogamente si definiscono i prodotti di più numeri.

*I numeri misuranti le probabilità così definite sono numeri non archimedeei ordinarii compresi fra 0 e 1, ma l'interpretazione diventa difettosa per i numeri con coefficienti negativi*

$$a - b\eta.$$

Infatti si consideri un rettangolo A d'area  $a < 1$ , con un lato 1 di lunghezza 1; si presenta l'idea di misurare con  $a - \eta$  la probabilità che un punto cada entro il rettangolo escluso il lato 1; ma allora sommiamo ad A un rettangolo B d'area  $b (< 1 - a)$  avente

comune con A il lato 1; la probabilità che P cada in A + B viene data da

$$a - \eta + b = a + b$$

NOTA. — Per rimuovere questo inconveniente si sarebbe indotti a porre opportune convenzioni, operando su aree prive di una parte del contorno che possano sommarsi dando luogo ad aree analoghe; ad es. le aree rettangolari con la base orizzontale private di due lati consecutivi (a destra e in alto) soddisfano a tale proprietà.

9. **Angolo di due curve.** — Due curve tangenti, ad es. un cerchio con una sua tangente, formano un angolo che non può dirsi nullo ma è inferiore ad ogni angolo rettilineo (come già osservava Euclide). Questo angolo fu considerato da Giordano (1220) sotto il nome di *angulus contingentiae*, e Campano alla fine del secolo XIII, ebbe ad osservare che esso non è una grandezza della stessa specie degli angoli rettilinei.

Le discussioni intorno alla suddetta grandezza infinitesima, assai vive nel periodo di elaborazione del calcolo infinitesimale, condussero con Newton a comparare fra loro gli angoli di contingenza mercè le derivate d'ordine superiore delle funzioni.

Ora possiamo mostrare che gli angoli di contingenza, considerati accanto agli angoli rettilinei ordinarii, danno luogo ad un concetto più generale dell'*angolo di due linee* (analitiche) come elemento d'una classe di grandezze non archimedee misurabili da numeri della forma:

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots (b_0 \geq 0).$$

A tale scopo si considerino due parabole d'ordine  $n + 1$ , C, C', aventi un contatto d'ordine  $n$  nel punto (0, 0):

$$y = a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1},$$

$$y = a'_1 x + \dots + a'_n x^n + a'_{n+1} x^{n+1},$$

limitandoci agli archi di esse che sono da una parte dell'origine, p. es. per  $y > 0$ . Le due curve C, C' insieme al cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

determinano un'area  $a(r)$  che diventa infinitesima d'ordine  $n+1$  con  $r$ : il

$$\lim_{y=0} \frac{a(r)}{y^{n+1}} = b$$

corrisponderà alla *misura dell'angolo*  $CC'$ , che si assumerà per definizione data da

$$b \eta^n.$$

In particolare si può così esprimere l'angolo di contingenza di una parabola  $C$ :

$$y = a_1 x + a_{n+1} x^{n+1}$$

con la retta:

$$y = a_1 x$$

che ha con essa un contatto d'ordine  $n$ , o l'angolo di contingenza di una parabola  $C$ :

$$y = a_1 x + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$$

con la parabola  $C'$ :

$$y = a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

questa retta o curva  $C'$  venendo considerata come una parabola d'ordine  $n+1$  corrispondente ad  $a'_{n+1} = 0$ .

Ciò posto si può definire in generale l'angolo di due qualsiasi curve analitiche

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$y = a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots,$$

passanti per l'origine  $O$  e considerate da una parte di  $O$  (ad es. per  $y > 0$ ).

Questa definizione si lascia ridurre, mediante somma e differenza, al caso più semplice dell'angolo compreso fra una curva

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

ed una retta

$$y = a'_1 x;$$

il quale si esprime mediante un numero della forma:

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots,$$

determinando

$$b_0, b_1, b_2 \dots$$

nel modo seguente:

1°  $b_0$  è l'angolo delle due rette

$$y = a_1 x, \quad y = a'_1 x;$$

2°  $b_1 \eta$  è l'angolo di contingenza della parabola

$$y = a_1 x + a_2 x^2$$

con la sua tangente

$$y = a_1 x,$$

preso positivamente o negativamente secondoche l'elemento di parabola che si considera si trova da parte opposta della retta

$$y = a'_1 x$$

rispetto alla tangente suddetta; oppure dalla medesima parte;

3°  $b_2 \eta^2$  è l'angolo di contingenza delle parabole osculatrici

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$y = a_1 x + a_2 x^2,$$

preso negativamente o positivamente secondoche esso è contenuto o no nell'angolo determinato dalla seconda parabola con la retta  $y = a_1 x$  ecc.

Con ciò si ha una semplice interpretazione geometrica dei numeri non archimedei

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots$$

come misure delle grandezze di un sistema; ma in questo sistema non vi sono grandezze corrispondenti ai numeri infiniti  $\omega, \omega^2 \dots$  che nascerebbero dalla divisione dei precedenti

$$\left( \omega = \frac{1}{\eta}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\eta^2}, \text{ ecc.} \right).$$