Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO AND AMALDI, U.

Elementi di Geometria [ad uso delle scuole secondarie superiori]

Zanichelli, Bologna, 1911. (V edizione ridotta.)

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

Inv. 179

FEDERIGO ENRIQUES E UGO AMALDI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

QUARTA EDIZIONE RIDOTTA

R. Università di Napoli
Inventario 04088
Istituto di Matematica
LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
FIRENZE - ROMA - MILANO - PISA - R. Bemporad & F.
TORINO - S. Lattes & C. — PALERMO - A. Reber
NAPOLI - Fratelli Treves

PROPRIETÀ LETTERARIA

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - XII-1911.

INDICE

PREFAZIONE . . . . . Pag. IX
INTRODUZIONE . . . . . » XI

I. Gli enti fondamentali: punto, retta, piano.

Punto, retta, piano . . . . . » 1
Proprietà lineari della retta . . . . . » 4
Segmenti uguali . . . . . » 6
Parti del piano - Angoli . . . . . » 12
Angoli uguali . . . . . » 16
Posizioni notevoli di due rette:
a) rette perpendicolari . . . . . » 20
b) rette parallele . . . . . » 23
Figure poligonali . . . . . » 29
Figure uguali . . . . . » 32

II. Figure poligonali.

Triangoli uguali . . . . . » 36
Somma degli angoli di un poligono . . . . . » 44
Proprietà perimetriche . . . . . » 48
Perpendicolari ed oblique . . . . . » 53
Parallelogrammi . . . . . » 59
Rettangolo, rombo e quadrato . . . . . » 63
Distanza di due parallele . . . . . » 66
Divisione di un segmento in parti uguali . . . . . » 66
ESERCIZI . . . . . » 70

III. Il cerchio.

Circonferenza e cerchio . . . . . Pag. 83
Archi e settori . . . . . » 85
Diametri, centri e corde . . . . . » 87
Intersezioni di rette e cerchi . . . . . » 91
Posizione relativa di due cerchi . . . . . » 95
Costruzioni col compasso . . . . . » 100
Angoli nel cerchio . . . . . » 107
Poligoni regolari . . . . . » 110
Esercizi . . . . . » 118

IV. Poligoni equivalenti.

Preliminari . . . . . » 124
Rettangoli equivalenti . . . . . » 127
Parallelogrammi equivalenti . . . . . » 130
Teorema di Pitagora . . . . . » 132
Triangoli equivalenti . . . . . » 136
Trasformazioni di poligoni . . . . . » 138
Esercizi . . . . . » 143

V. Rapporto e misura.

Grandezze geometriche . . . . . » 147
Rapporto di due grandezze . . . . . » 150
Misura delle grandezze . . . . . » 161
Lunghezza dei segmenti . . . . . » 163
Ampiezza degli angoli . . . . . » 164
Area dei poligoni . . . . . » 165
Applicazioni del teorema di Pitagora . . . . . » 170
Esercizi . . . . . » 174

VI. Grandezze proporzionali - Poligoni simili.

Coppie proporzionali di grandezze . . . . . » 178
Grandezze proporzionali e loro misure . . . . . » 180
Proporzioni dedotte da una data . . . . . » 181

Teorema di Talete e sue conseguenze . . . . . Pag. 183
Parallelogrammi e segmenti proporzionali . . . . . » 194
Segmenti proporzionali e rettangoli equivalenti . . . . » 196
Costruzione del pentagono, decagono e pentadecagono regolari . . . . . » 199
Poligoni simili . . . . . » 203
Esercizi . . . . . » 212

VII. Lunghezza della circonferenza ed area del cerchio.

Lunghezza della circonferenza . . . . . » 221
Area del cerchio . . . . . » 227
Esercizi . . . . . » 231

VIII. Rette e piani nello spazio.

Parti di spazio e intersezione di due piani . . . . . » 236
Retta e piano perpendicolari . . . . . » 239
Diedri uguali . . . . . » 246
Piani perpendicolari . . . . . » 247
Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali . . . . » 252

IX. Angoloidi e poliedri.

Triedri . . . . . » 255
Triedri uguali . . . . . » 257
Angoloidi . . . . . » 261
Poliedri . . . . . » 262
Esercizi . . . . . » 265

X. Rette e piani paralleli - Prismi.

Rette parallele . . . . . » 268
Retta e piano paralleli . . . . . » 270
Piani paralleli . . . . . » 273
Trasversali a più piani paralleli . . . . . » 277
Prisma . . . . . » 280
Parallelepipedo . . . . . » 282
Esercizi . . . . . » 285

XI. Equivalenza di poliedri.

Preliminari . . . . . Pag. 287
Parallelepipedi equivalenti . . . . . » 288
Prismi equivalenti . . . . . » 291

XII. Regole di misura sui poliedri - Poliedri simili.

Area delle superficie poliedriche . . . . . » 293
Diagonale del parallelepipedo rettangolo . . . . . » 295
Volume dei poliedri . . . . . » 296
Volume del prisma . . . . . » 297
Volume della piramide . . . . . » 299
Poliedri simili . . . . . » 305
Esercizi . . . . . » 309

XIII. Cilindro, cono e sfera.

Cilindro circolare . . . . . » 315
Area della superficie cilindrica . . . . . » 316
Volume del cilindro . . . . . » 318
Cono circolare . . . . . » 320
Area della superficie conica . . . . . » 322
Volume del cono . . . . . » 324
Sfera . . . . . » 326
Area della superficie sferica . . . . . » 331
Volume della sfera . . . . . » 334
Esercizi . . . . . » 337

PREFAZIONE

Un' accurata revisione di questo nostro trattato ci suggerì numerosi ritocchi, diretti a chiarirne e a semplificarne la redazione. Qualche modificazione sostanziale recammo negli sviluppi sull' equivalenza di poligoni e poliedri (Cap. IV e XI) e sulla misurazione della circonferenza e del cerchio (Cap. VII) e delle superficie e dei solidi cilindrici, conici, sferici (Cap. XIII). — Accrescemmo altresì notevolmente la raccolta degli esercizi.

Ci furono preziose le osservazioni, che parecchi colleghi delle Scuole medie ebbero la cortesia di comunicarci dopo l' esperienza del nostro testo nelle Scuole; e porgiamo qui cordiali ringraziamenti a tutti, e in particolare alle Prof. Teresa Tasso e Lia Predella-Longhi *e ai Prof.* Alberto Conti, Paolo Cattaneo, Tommaso Vannini, *che ci hanno indicato alcuni miglioramenti accolti con piacere in questa o nelle precedenti edizioni.*

Bologna-Modena, novembre 1911.

Federigo Enriques - Ugo Amaldi

INTRODUZIONE

Negli oggetti, o *corpi fisici*, noi possiamo considerare le sole proprietà di *forma* e di *estensione*, prescindendo da quelle altre proprietà che dipendono dalla materia di cui sono costituiti.

La Geometria è la scienza che studia appunto le proprietà di forma e di estensione dei corpi (proprietà geometriche).

I corpi, in quanto idealmente si considerano dotati di sole proprietà geometriche, si sogliono designare col nome di « figure geometriche » o semplicemente di « figure ».

Così, per esempio, un *dado di avorio* ci fornisce un modello di quella figura geometrica che si chiama *cubo*.

Le prime proprietà geometriche delle figure sono *evidenti*, cioè vengono suggerite in modo immediato dall'*osservazione* sensibile dei corpi reali, che hanno fatto nascere in noi il concetto di quelle figure.

Da codeste proprietà intuitive si possono dedurre poi per via di soli ragionamenti *(dimostrazioni)*, e

senza più ricorrere alla osservazione sensibile, altre proprietà che sono in generale meno evidenti e talvolta addirittura imprevedibili.

Noi, nel I Capitolo, dichiareremo i **concetti fondamentali,** cioè le *figure* e le *relazioni* più semplici che assumeremo dall' osservazione, analizzando i dati della nostra esperienza, sia direttamente colla vista, sia ricorrendo al *movimento* di modelli fisici e all' uso di particolari strumenti (*riga, riga graduata, squadra, compasso a punte fisse,* ecc.).

Enumereremo così i *postulati,* cioè le proposizioni che esprimono le più elementari proprietà geometriche delle figure, quali ci sono rilevate dalla osservazione; e ai postulati che man mano enunceremo andremo ravvicinando le prime loro conseguenze logiche.

Poi nei capitoli successivi, tutto verrà dedotto per via di puro ragionamento dai postulati del I Capitolo; e quando si presenterà la necessità o la opportunità di far nuovamente ricorso alla osservazione sensibile per ricavarne qualche nuovo postulato, ciò verrà esplicitamente avvertito.

Le proposizioni che si deducono successivamente per mezzo di ragionamenti, a partire dai postulati (cioè le proposizioni che si dimostrano), si chiamano *teoremi* (**Teor.**).

Le conseguenze più immediate di un teorema (o anche di un postulato) si dicono *corollari* di

esso (**Cor.**). E talvolta una proposizione, che non ha importanza di per se stessa, ma viene premessa allo scopo di dimostrare un successivo teorema, si dice *lemma.*

Spesso l' osservazione di una figura ci conduce a supporre delle proprietà non evidenti di essa, suggerendoci di porre delle domande (*problemi;* **Probl.**) e segnandoci la via per ottenere la risposta (*risoluzione*).

LETTERE GRECHE

usate nel presente trattato

SEGNO	DENOMINAZIONE	SIGNIFICATO
α	alfa	a
β	beta	b
γ	gamma	gh
δ	delta	d
ε	epsilon	e
π	pi greca	p

ELEMENTI DI GEOMETRIA

I.

GLI ENTI FONDAMENTALI: PUNTO, RETTA, PIANO

Punto retta, piano.

1. Se sul foglio di disegno noi posiamo la punta bene acuminata di una matita, otteniamo l'immagine di un **punto.**

Noi generalmente designeremo i punti colle lettere maiuscole dell'alfabeto *A*, *B*, *C*,....

Talvolta, ritornando col lapis sopra una traccia già segnata, saremo condotti a designare un medesimo punto con due diverse lettere, p. es. *H* e *K*; diremo in tal caso che i punti *H* e *K coincidono.*

2. Un insieme di punti si dice *figura;* e l'insieme di tutti i punti si dice **spazio.**

3. Sono figure fondamentali costituite di infiniti punti:

1) La **retta** o **linea retta.**



Un filo teso, sottilissimo, un raggio di luce ci danno l'idea di una retta.

Si *segna una retta sul foglio* facendo scorrere la punta di un lapis lungo l' orlo di una RIGA. La traccia del lapis rappresenta solo una parte della linea che pensiamo indefinitamente proseguita.

Per designare le rette si usano le lettere dell' alfabeto latino minuscolo: *a, b, c....*

2) Il **piano** o **superficie piana.** Il foglio del disegno, la superficie delle acque stagnanti, la parete di un muro, ecc. sono altrettanti modelli che rappresentano una parte del piano, il quale si immagina indefinitamente proseguito.

4. Fra due punti quali si vogliano *A, B,* si può immaginare di tendere un filo, e variando i punti si possono ottenere infinite posizioni diverse del filo; se, per altro, fra i medesimi punti si tendono due fili tenuissimi, questi non si distinguono l' uno dall' altro.

Questa osservazione ci mostra che

Vi sono infinite rette. Due punti appartengono ad una retta e ad una sola (loro *congiungente*).

Ciò esprimeremo anche dicendo che, *se due rette hanno comuni due punti, esse coincidono,* o che *una retta è determinata da due suoi punti qualsiansi.*

5. Di qui risulta che, tracciata sul foglio del disegno una retta con una riga, lo spigolo di questa deve coincidere con la traccia così ottenuta, anche quando si adagi la riga sul foglio dalla parte opposta.

Si ha così modo di *verificare la riga*, cioè di assicurarsi se il suo spigolo sia veramente rettilineo.

6. La retta *a* contenente due punti *A, B,* in quanto è determinata da questi due punti, si chiama anche retta *AB*; e si suol dire che *a congiunge* i due punti *A, B.*

Se due rette (distinte) *a, b* hanno un punto comune *A*, questo è determinato dalle *a, b,* perchè queste non hanno altri punti comuni; perciò il punto *A* si può designare anche con *ab.*

7. Se *A, B, C,* sono tre punti, non in linea retta, possiamo portare un foglio a contenere *A*, e poi, tenendo fermo questo punto, muovere il foglio fino a farlo passare anche per *B*, da ultimo, facendo ruotare il foglio intorno ai punti *A, B* tenuti fissi, possiamo far sì che esso contenga anche il punto *C*. Variando *A, B, C* si fanno assumere al foglio infinite posizioni. Vediamo poi che, se nello stesso modo portiamo un altro foglio a passare per *A, B, C,* i due fogli combaciano in tutti i loro punti.

Queste esservazioni ci mostrano che:

Vi sono infiniti piani. Tre punti, non in linea retta, appartengono ad un piano e ad uno solo.

Ciò equivale a dire che, se due piani hanno comuni tre punti (non in linea retta) hanno comuni anche tutti gli altri, o, come diremo, *i due piani coincidono.* Il piano α passante per tre punti *A, B, C* (non in linea retta) si designa anche con *ABC.*

8. Segnati sul foglio due punti quali si vogliano, possiamo sempre tendere fra di essi un filo. Osservando codesto filo, vediamo che tutti i punti del filo giacciono sul piano.

Questa osservazione ci suggerisce il seguente postulato:

Vi sono in un piano infinite rette. Se una retta congiunge due punti arbitrari di un piano, tutti i suoi punti appartengono al piano.

9. Cor. — *Una retta e un punto non appartenente ad essa giacciono in un piano e in uno solo.*

Se, infatti, A è il punto e a è la retta, si scelgano su a due punti distinti B, C; i tre punti non in linea retta, A, B, C appartengono ad un piano e ad uno solo (n. 7), il quale contiene, insieme con A, la retta a (n. precedente).

Codesto piano si designa con Aa o aA.

10. Cor. — *Due rette aventi comune un punto (cioè segantisi) giacciono in un piano e in uno solo.*

Infatti, se le due rette sono a, b ed è C il loro punto comune, si prenda, p. es. su a, un punto A; il piano Ab, *determinato* dal punto A e dalla retta b, contiene le due rette a, b (n. 8).

Il piano contenente le due rette a, b, aventi un punto comune, si designa con ab.

Proprietà lineari della retta.

11. Osservando più punti di una retta, (pensati come posizioni successive di un punto mobile) vediamo che essi si succedono secondo due **ordini naturali** l'uno inverso dell'altro; ad es. sulla retta a i punti A, B, C, D si succedono secondo l'ordine A, B, C, D, o secondo l'ordine inverso D, C, B, A.

Possiamo precisare il concetto degli ordini della retta col seguente postulato:

I punti della retta sono ordinati secondo due **ordini naturali** o **versi,** *opposti l'uno all'altro.*

In ciascun verso della retta non vi è nè primo nè ultimo punto, e fra due punti di essa vi sono infiniti punti intermedi.

12. Def. — I punti di una retta che seguono un punto O, in un dato verso, presi insieme con O, costituiscono *una semiretta* o *parte della retta rispetto ad* O; O dicesi *estremo* od *origine* della semiretta.

Un punto O di una retta la *divide* in *due parti* o *semirette* (*opposte*) aventi comune l'estremo O, per modo che ogni punto della retta, diverso da O, appartiene all'una o all'altra parte. La semiretta opposta di una data si dice anche il *prolungamento* di essa.

Vi è una semiretta della retta AB che ha per estremo A e contiene B. Essa chiamasi semiretta AB.

13. Def. — Dati due punti A, B su di una retta, i punti comuni alle due semirette AB e BA costituiscono un *segmento*, che si designa indifferentemente con AB o BA. I punti A, B diconsi gli *estremi* del *segmento*, e i punti fra A e B diconsi *interni* ad esso.

I prolungamenti delle semirette BA e AB diconsi anche *prolungamenti* del segmento AB.

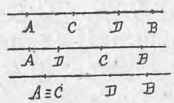
Talvolta indicheremo un segmento con una sola lettera come **a, b, c...**

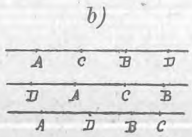
14. I punti del segmento AB possono pensarsi ordinati in due modi opposti, secondo i due versi della retta. Si ha allora da distinguere il *segmento ordinato* AB dal *segmento ordinato* BA.

15. Dati sopra una retta due segmenti AB, CD, il postulato del n. 11 permette di decidere se essi abbiano o no una parte comune. Per ciò basta guardare come si trovino gli estremi dell'uno rispetto all'altro. I criteri che così si hanno sono intuitivamente evidenti e si trovano enunciati nelle seguenti proposizioni:
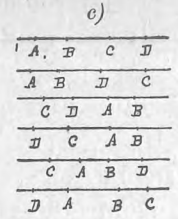
a) Se il segmento AB contiene i punti C, D, ogni punto interno a CD è interno ad AB.

a)



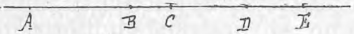


b) Se i punti C, D sono l'uno interno e l'altro esterno al segmento AB, i due segmenti AC, BD contengono un segmento comune.



c) Se due punti C, D della retta AB sono esterni al segmento AB, o i due segmenti AB, CD non hanno punti comuni, oppure il segmento CD contiene AB.

16. Più segmenti di una retta, AB, BC, CD, DE,... si dicono *consecutivi* se ciascuno di essi ha comune col seguente un estremo e nessun altro punto all'infuori di questo.



17. Dati, sopra una retta, due segmenti consecutivi AB, BC, il segmento AC, determinato dal primo e dall'ultimo dei punti estremi dei nominati segmenti dicesi *somma* dei segmenti medesimi, e si designa con



$$AB + BC.$$

Analogamente si può considerare il segmento *somma di più segmenti consecutivi*. Ad es., riferendoci alla figura annessa al n. prec., vediamo che il segmento AE è somma dei segmenti consecutivi AB, BC, CD, DE.

Segmenti uguali.

18. Confrontando due segmenti, pensati anche come ordinati, vediamo che essi possono essere **uguali (congruenti).**

Per designare che due segmenti AB, CD sono

uguali scriveremo

$$AB = CD, \quad \text{o} \quad BA = CD, \text{ ecc.},$$

o, indifferentemente

$$CD = AB, \text{ ecc.}$$

Si verifica sperimentalmente se due segmenti AB, CD sono uguali nel modo seguente. Si costruisca una sottilissima asta rigida, che si possa far combaciare con uno dei due segmenti, p. es. con AB, e si muova quindi l'asta, portando un suo estremo in C e adagiando l'altro estremo sopra la retta CD, dalla parte di D; se i due segmenti sono uguali, compiuta l'operazione suddetta, il secondo estremo cadrà in D; se all'opposto sono disuguali, esso cadrà internamente od esternamente al segmento CD.

In pratica, per confrontare due segmenti nel modo suindicato, si usa una *riga graduata* (a suddivisioni sufficientemente piccole) o *un compasso a due punte.* Le righe graduate usuali sono suddivise in *decimetri, centimetri, millimetri e*, talvolta, *mezzi millimetri* [1]; cosicchè per confrontare due segmenti AB, CD basterà verificare, adagiando successivamente su ciascuno di essi la riga graduata, quanti millimetri (o mezzi millimetri) contenga ciascuno di essi.

Vi sarà incertezza nel caso, in cui, adagiando la riga graduata su AB e CD e facendo successivamente coincidere lo *zero* con A e con C, si troverà che gli estremi B e D

[1] È notorio che l'unità di misura universalmente adottata è il *metro*, il quale è (approssimativamente) la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, e che il *decimetro*, il *centimetro*, il *millimetro* non sono altro che la *decima*, *centesima*, *millesima* parte del metro (cfr. il Cap. V).

vanno a cadere in un medesimo intervallo fra due suddivisioni della riga graduata, senza coincidere nè l'uno nè l'altro con un estremo di codesto intervallo. Si trovi, per es., che tanto B quanto D cadono fra 43 mm. e 43 mm. e $^1/_2$. Per molti usi pratici due segmenti siffatti si possono senza danno considerare come (sensibilmente) uguali; ma per valutarli più esattamente occorrebbe disporre di una riga graduata a suddisioni più piccole, o di un *nonio* o di una *vite micrometrica*.

Ma si può anche semplicemente ricorrere ad un *compasso a due punte*, facendo anzitutto coincidere queste rispettivamente con A e B e portando poi, senza alterare l'apertura del compasso, una punta su C e l'altra sulla retta CD dalla stessa parte di C, da cui cade D. Secondo che questa punta coinciderà o no con D, si avrà che i due segmenti sono uguali o disuguali.

Naturalmente, anche questo secondo modo di verifica sperimentale dà risultati di sola approssimazione; ma se il compasso è solido ed ha le punte assai acuminate, e se i segmenti AB e CD sono rappresentati con tratto nitido e con estremi graficamente ben determinati, si può raggiungere un'approssimazione notevolissima e teoricamente illimitata.

19. Senza ricorrere al confronto diretto, di cui si è discorso sopra, si può riconoscere l'uguaglianza di due segmenti in base ad alcuni evidenti criteri che costituiscono i primi postulati dell'uguaglianza fra segmenti:

Il segmento AB *è uguale al segmento* BA.

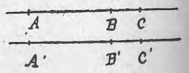
Segmenti uguali ad un terzo sono uguali fra loro.

Segmenti che sieno somme di segmenti consecutivi uguali sono uguali, cioè se

$$AB = A'B', \quad BC = B'C'$$

allora

$$AB + BC = A'B' + B'C'.$$



20. A questi postulati si aggiunge il seguente:

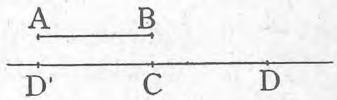
Su di una data semiretta esiste un segmento determinato, avente un estremo nell'estremo della semiretta, ed uguale ad un dato segmento.

Si può determinare graficamente (*costruire*) il segmento proposto colla riga graduata e col compasso.



Questa costruzione equivale ad un *trasporto* del segmento.

21. Cor. — *Sopra una retta vi sono due segmenti uguali ad un segmento dato, ed aventi un estremo assegnato:* essi giacciono da parti opposte di questo.



22. Possiamo ora apprendere a *sommare* segmenti anche non consecutivi.

Def. — Dati più segmenti, si dirà *somma* di essi un qualsiasi segmento che sia somma di segmenti consecutivi ordinatamente uguale ai dati.

La somma di più segmenti AB, CD, EF si indica con

$$AB + CD + EF.$$

Sommare più segmenti vuol dire costruirne la somma.

23. Si possono allora facilmente dimostrare, o direttamente verificare coll'esperienza, le seguenti proprietà fondamentali:

a) *Somme di segmenti rispettivamente uguali sono uguali*, cioè se

$$AB = A'B', \quad CD = C'D', \quad EF = E'F'$$

allora

$$AB + CD + EF = A'B' + C'D' + E'F'.$$

b) *La somma di più segmenti gode della proprietà commutativa*, cioè il segmento somma non muta se si muta l'ordine degli addendi.

c) *La somma di più segmenti gode della proprietà associativa*, cioè ad alcuni addendi si può sostituire la loro somma.

24. Def. — Se un segmento è uguale alla somma di due altri, esso si dice *maggiore* di ciascuno di questi, e ognuno di questi ultimi si dice *minore* del primo.

Se il segmento AB è maggiore di CD, e quindi CD è minore di AB, si scrive

$$AB > CD, \quad CD < AB.$$

25. Discendono dalla definizione precedente e dai postulati enunciati le seguenti proposizioni:

Cor. — a) *Se un segmento è maggiore di un altro, e questo è maggiore od uguale di un terzo, il primo segmento è maggiore dell'ultimo*, cioè se

$$AB > CD \quad \text{e} \quad CD \geq EF, \quad \text{è} \quad AB > EF.$$

b) *Se due segmenti sono disuguali, due segmenti ad essi rispettivamente uguali sono disuguali nello stesso senso*, cioè se

$$AB > CD \quad \text{e} \quad A'B' = AB, \quad C'D' = CD$$

si ha

$$A'B' > C'D'.$$

c) *Dati due segmenti, o essi sono uguali o uno dei due è maggiore dell'altro.*

d) *Se con due segmenti disuguali si sommano segmenti uguali, si ottengono somme disuguali, e di queste è maggiore quella di cui fa parte il segmento maggiore.*

26. Def. — La somma di n segmenti uguali ad un dato segmento, dicesi *multiplo* secondo n del segmento dato.

Se un segmento è multiplo secondo n di un altro, questo dicesi *summultiplo* secondo n di quello, o *parte aliquota ennesima di esso.*

Se $\boldsymbol{a}$ o AB è un segmento, designeremo il suo multiplo secondo m col simbolo $m\boldsymbol{a}$ o mAB, e il summultiplo secondo m col simbolo $\frac{\boldsymbol{a}}{m}$ o $\frac{BA}{m}$ che leggesi « un emmesimo di $\boldsymbol{a}$ o di AB ».

27. Cor. — *I multipli o i summultipli di segmenti uguali, secondo uno stesso numero, sono uguali.*

In particolare, *le metà dei segmenti uguali sono uguali.*

28. Dalle definizioni precedenti discende senz'altro che, se m, n sono numeri interi,

1) il multiplo secondo m di $n\boldsymbol{a}$ è multiplo di $\boldsymbol{a}$ secondo mn;

2) il summultiplo secondo m del summultiplo secondo n di un segmento $\boldsymbol{a}$, è summultiplo di $\boldsymbol{a}$ secondo mn.

29. Def. — Se di due segmentti **a, b** il primo **a** è maggiore del secondo, il segmento **c** tale che sia

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$$

dicesi differenza di **a** e **b**; e si scrive

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b};$$

sarà quindi anche

$$b = a - c.$$

Sottrarre un segmento minore da uno maggiore vuol dire trovare la differenza dei due segmenti.

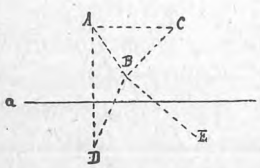
30. Cor. — *Differenze di segmenti uguali sono uguali.*

Se da segmenti disuguali si sottraggono segmenti uguali, dal segmento maggiore si ottiene la differenza maggiore.

Parti del piano. - Angoli.

31. Sul foglio si tracci una retta a, e si segnino quindi dei punti A, B, C, D, E, ... non appartenenti ad essa.

Considerando il segmento che congiunge due dei punti nominati, vediamo che esso può aver comune con a un punto interno, cioè può *segare* a, oppure non può segarla.



Inoltre, vediamo che se, per es., i segmenti AB e BC non segano a, neppure AC la sega; se poi il segmento AD sega a, lo stesso avviene per BC, CD; se ancora AE sega a, DE non la sega, ecc.

Tutti questi fatti vengono riassunti ed espressi dal postulato:

32. *Una retta* a *di un piano lo divide in due parti (dette anche bande, o regioni o semipiani) contenenti ciascuna infiniti punti, per modo che:*

un punto del piano, fuori della retta, appartiene all'una o all'altra parte;

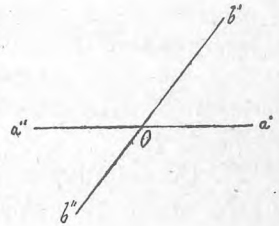
due punti di una medesima parte, fuori di a, *sono gli estremi di un segmento che non sega la retta;*

due punti di parte diversa (opposta) sono gli estremi di un segmento che sega la retta a.

I punti della retta si riguarderanno come comuni alle due bande opposte, e si dirà anche che la retta *limita* ciascuna delle due bande, o che le *separa*.

33. Dal precedente postulato segue che due rette a, b, segantisi in un punto O, dividono il piano in quattro parti, ciascuna delle quali è comune a due semipiani limitati l'uno dalla a, l'altro dalla b.

Codeste quattro parti si dicono *regioni angolari* o *angoli*.

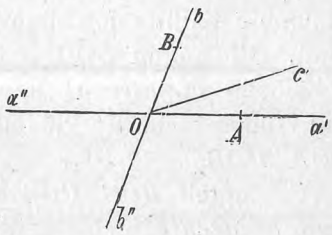


Le due rette a, b restano divise da O in quattro semirette, a', a'' e b', b'': gli angoli suddetti sono *limitati* rispettivamente da a', b'; b', a''; a'', b''; b'', a', che diconsi rispettivi *lati*.

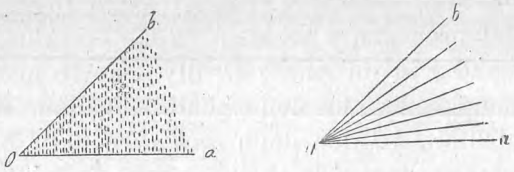
Il punto O si dice *vertice* di ciascuno dei quattro angoli. L'angolo di lati a', b' si designa con $\widehat{a'b'}$ o $\widehat{b'a'}$, od anche, ove A, B siano due punti appartenenti alle semirette a', b' rispettivamente, con $\widehat{AOB}$.

34. Precisando ciò che si è detto al n. prec., abbiamo che l'angolo $\widehat{a'b'}$ è la figura, costituita dai punti comuni a quello dei due semipiani limitati dalla retta di a' che contiene b' e a quello dei due semipiani limitati dalla retta di b' che contiene a'.

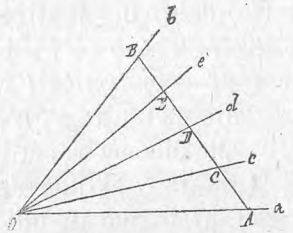
35. Ogni semiretta c' uscente da O appartiene ad uno dei quattro angoli: se appartiene all'angolo $\widehat{a'b'}$ si dice *compreso* fra a', b' od anche semiretta dell'angolo $\widehat{a'b'}$.



36. Si può considerare un angolo come generato in due modi, dall'insieme dei suoi punti o dall'insieme delle sue semirette, le quali si ottengono congiungendo il vertice coi punti di un segmento che abbia gli estremi sui due lati.

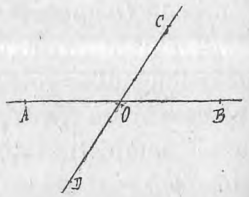


Quando si vuol fare questa distinzione si dà il nome di *regione angolare* alla prima figura, e di *angolo* alla seconda. Ma per noi sarà indifferente il considerare l'una o l'altra generazione.



37. Le semirette di un angolo $\widehat{AOB}$ vengono *ordinate* secondo *due versi*, come i punti in cui incontrano il segmento AB. Vediamo che le semirette dell'angolo, susseguentisi in uno dei due versi, rappresentano posizioni assunte successivamente da una semiretta mobile, che descriva l'angolo movendosi intorno al vertice nel verso considerato.

38. Se le due rette AB, CD si segano nel punto O, gli angoli da esse determinati si distribuiscono in coppie distinte con nomi speciali. Gli angoli $\widehat{BOC}$ e $\widehat{AOD}$ si dicono *opposti al vertice:* tali diconsi pure gli angoli $\widehat{COA}$, $\widehat{DOB}$.



Gli angoli $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ si dicono *adiacenti*, e così si dicono

adiacenti gli angoli $\widehat{COA}$ e $\widehat{AOD}$, $\widehat{AOD}$ e $\widehat{DOB}$, $\widehat{DOB}$ e $\widehat{BOC}$.

39. Due angoli aventi comune un lato (e il vertice) diconsi *consecutivi* quando giacciono da banda opposta del lato comune.

Più angoli, presi in un certo ordine, diconsi *consecutivi*, quando ciascuno è consecutivo rispetto al precedente.

40. Def. — Si dice *somma* di due o più angoli consecutivi l'insieme delle semirette (o dei punti) che appartengono ad essi.

Se un angolo è somma di due altri, ciascuno di questi si dice *differenza* fra l'intero angolo dato e il rimanente.

Nell'annessa figura l'angolo $\widehat{ac}$ è somma dei due angoli *consecutivi* $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$.



41. Volendo che due o più angoli consecutivi si



possano sempre *sommare*, si è tratti ad estendere



il concetto di angolo, considerando *angoli piatti*

(in cui i due lati sono per diritto), *angoli concavi* (in cui i prolungamenti dei lati sono interni all' angolo) ed anche *angoli di un giro o di più di un giro*.

Ma nel seguito, parlando di angoli senz' altro, intenderemo riferirci ad angoli *convessi*, cioè ad angoli nel senso definito dapprincipio (n. 33), ossia non contenenti i prolungamenti dei lati.

Angoli uguali.

42. Confrontando due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ (considerati anche come ordinati) essi possono essere **uguali** (o **congruenti**).

In tal caso si scrive

$$\widehat{ab} = \widehat{cd}, \quad \widehat{ba} = \widehat{cd},$$

o

$$\widehat{cd} = \widehat{ab} \text{ ecc.}$$

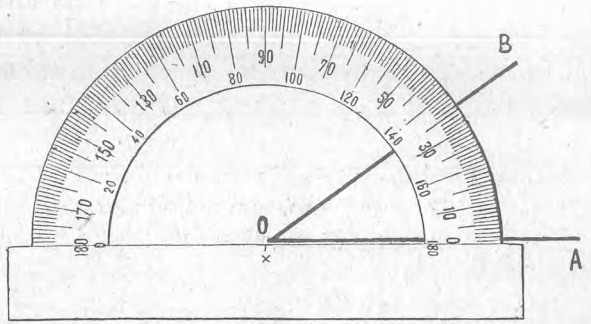
Si può verificare sperimentalmente se due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ sono uguali, sia ritagliando i due angoli dati da un foglio, sia costruendo con asticelle rigide dei modelli dei due angoli e provando se essi siano o no sovrapponibili.

Più tardi noi impareremo a ricondurre il riconoscimento dell' uguaglianza fra angoli a quello della uguaglianza fra segmenti per mezzo del compasso.

43. Nella pratica, pel confronto degli angoli, si usano varie specie di strumenti misuratori (goniometri).

Il più comune e più semplice è il *semicircolo graduato* o *rapportatore*, che in qualche modo corrisponde alla riga graduata.

Esso consiste in una laminetta trasparente (p. es. di celluloide) di forma generalmente semicircolare, su



cui è designato un angolo piatto, suddiviso in 180 parti uguali (gradi) numerate di 10 in 10 (cfr. il Cap. V).

Talvolta il rapportatore è costruito in lamina di ottone, e allora è praticata in esso una apertura semicircolare, il cui centro, segnato con un' intaccatura, è il vertice dell' angolo piatto, e il diametro coincide colla retta dei lati di quello.

44. Il criterio della sovrapponibilità permette di riconoscere i seguenti postulati fondamentali:

L' angolo $\widehat{ab}$ *è uguale all' angolo* $\widehat{ba}$.

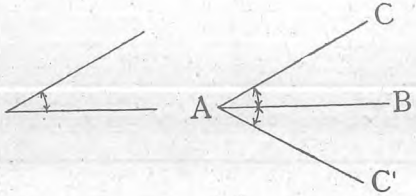
Due angoli uguali ad un terzo sono uguali fra di loro.

Somme o differenze di angoli consecutivi uguali sono uguali.

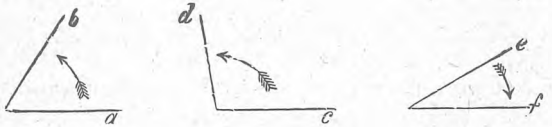
45. A questi postulati si aggiunga il seguente:

Data in un piano una semiretta, si può determinare da una parte assegnata rispetto a questa, e per l' origine di essa, un' altra semiretta che colla prefissata formi un angolo uguale ad un angolo dato.

46. Cor. — *In un piano, dati una semiretta ed un angolo, esistono due angoli uguali all'angolo dato ed aventi come lato comune la semiretta data.*



47. Se si hanno due angoli in un medesimo piano, si possono *confrontare i loro versi:* nell'unita figura gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ hanno *versi concordi,* gli angoli $\widehat{ab}$ ed $\widehat{ef}$ (o $\widehat{cd}$ ed $\widehat{ef}$) *versi discordi.*



Il significato di queste locuzioni (che potrebbero essere definite in modo preciso) riesce sufficientemente spiegato dalle figure annesse.

Allora si può dire che i due angoli di cui si parla al n. prec. hanno nel piano versi opposti, e quindi uno di essi ha lo stesso verso dell'angolo dato.

48. Si verifica agevolmente il seguente postulato: *Tutti gli angoli piatti sono uguali fra loro.*

49. Cor. — *Angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.*

Consideriamo i due angoli $A'\widehat{BC}$, $\widehat{ABC}$: essi sono uguali, perchè si ottengono sottraendo il medesimo angolo $\widehat{ABC'}$ dai due angoli piatti (e quindi uguali) $\widehat{ABA'}$, $\widehat{CBC'}$.



50. Def. — Dato un angolo, ogni angolo uguale all'adiacente del lato dicesi *supplementare* di esso.

51. Cor. — *Angoli supplementari di angoli uguali sono uguali.*

Infatti sono uguali a differenze di angoli uguali.

52. Come pei segmenti, anche per gli angoli si estende il concetto di *somma,* chiamando *somma di più angoli* l'angolo (convesso o piatto o concavo, ecc.) somma di altrettanti angoli consecutivi, uguali rispettivamente ai dati. Si dimostra quindi che valgono per la somma di angoli quali si vogliano la *proprietà associativa* e la *commutativa,* e che somme di angoli uguali sono uguali.

Ed in modo perfettamente analogo a quello tenuto pei segmenti, si definiscono *fra angoli* le relazioni di *maggiore* e *minore* ($<$, $>$) chiamando un angolo $\widehat{a'b'}$ *maggiore* di un altro $\widehat{c'd'}$, quando $\widehat{a'b'}$ è somma di due angoli, di cui uno sia uguale a $\widehat{c'd'}$: e così *pure si definisce la differenza di due angoli* (*qualsivogliano*) (cfr. n. 29).

Anche per gli angoli come pei segmenti useremo i segni $+$, $-$ a indicare, rispettivamente, la somma e la differenza.

53. Estenderemo agli angoli anche le definizioni e le notazioni assegnate al n. 26 per i segmenti, chiamando *multiplo secondo n* di un angolo dato α, l'angolo $n\alpha$ uguale alla somma di n angoli uguali al dato; l'angolo α, alla sua volta, si dirà *summultiplo* secondo n dell'angolo $n\alpha$.

Valgono senz'altro per i multipli e summultipli di angoli le considerazioni fatte pei multipli e summultipli di un segmento.

In particolare, *i multipli o summultipli di angoli uguali secondo uno stesso numero sono uguali* (n. 27).

Posizioni notevoli di due rette.

54. Fra le posizioni particolari che due rette possono presentare in un piano, sono degne di nota quelle:

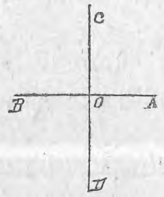
a) di due *rette perpendicolari*, cioè di *rette formanti quattro angoli uguali;*

b) di due *rette parallele*, cioè di *rette* (di un piano) *che non hanno punti comuni.*

Nota. — Noi ci proponiamo qui di studiare le prime proprietà delle perpendicolari e delle parallele, valendoci delle loro più semplici costruzioni mediante *riga* (*graduata*) e *squadra*. Pertanto tutte le costruzioni geometriche che noi svilupperemo in questo capitolo e nel seguente si fonderanno sull'uso di questi semplici strumenti. Nel Cap. III insegneremo a eseguire le medesime costruzioni col compasso; e in vista di ciò aggiungeremo gli sviluppi del n. 38.

a) Rette perpendicolari.

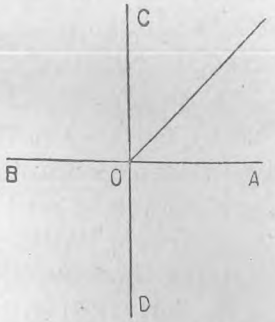
55. *Se due rette segandosi in un punto formano due angoli adiacenti uguali, esse sono perpendicolari.*



Se invero due rette AB, CD segantisi in O, sono tali che sia $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$, risulta dal fatto che $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$ sono uguali ai loro opposti vertici $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOA}$ rispettivamente (n. 48), che i quattro angoli $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{DOA}$ sono uguali.

56. Data una retta AB e su questa un punto O, immaginiamo di far ruotare una semiretta per O in modo che descriva uno dei due angoli piatti $\widehat{AOB}$;

la suddetta semiretta variabile dividerà l'angolo nominato in due parti, una crescente e l'altra decrescente, e però si intuisce che vi è una posizione determinata OC della semiretta, per cui i due angoli $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOC}$ risultano uguali.

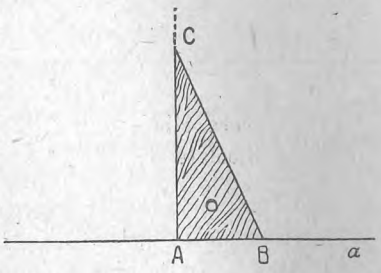


Si vede così che:

Per un punto di una retta si può condurre una ed una sola perpendicolare a questa.

57. Per tracciare sul foglio la perpendicolare in un punto A ad una retta a, passante per esso, basta piegare il foglio nel punto A, in modo che le due semirette in cui la retta a è divisa dal punto A si sovrappongano. Spiegato il foglio, la ripiegatura risulterà perpendicolare alla retta.

Ma nel disegno, per costruire la perpendicolare in un punto A ad una retta a, si suol servirsi della SQUADRA.



È opportuno *verificare* l'istrumento. A tale scopo dopo avere segnato sul foglio la traccia dello spigolo AC, come indica la figura, si verifichi, ribaltando la quadra intorno ad AC, se essa coincida esattamente coll'angolo adiacente a $\widehat{BAC}$, ossia se $\widehat{BAC}$ risulti veramente uguale al suo adiacente.

58. La squadra si può usare anche per condurre per un punto dato A una retta che sia perpendicolare ad una retta data a, non passante per esso.

Basta perciò fare scorrere la squadra sul foglio, lungo la retta a, in modo che uno spigolo vada a combaciare col punto A.

La traccia di questo ultimo spigolo dà la perpendicolare cercata.

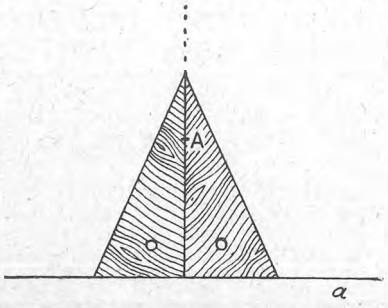
59. Def. — Un angolo i cui lati sono perpendicolari dicesi *angolo retto.*

Un angolo retto si può anche definire come quello che è uguale ai suoi adiacenti, oppure come *metà di un angolo piatto.*

Quindi in forza dei nn. 48, 53 si ha il

60. Cor. *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

Nota. — Riferiamoci ancora alla costruzione del n. 58.



Data l' uguaglianza degli angoli retti, se ribalteremo la squadra intorno alla perpendicolare dianzi tracciata, l' altro spigolo della squadra si adagerà ancora sulla retta a; il che ci assicura che, ripetendo la costruzione suindicata dopo avere ribaltata la squadra, riotterremo la medesima perpendicolare ottenuta prima.

In altre parole, noi verifichiamo in tal modo che *vi è una sola retta passante* A *e perpendicolare alla retta* a.

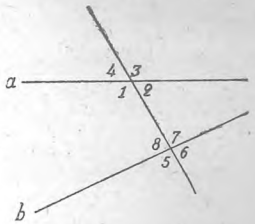
Di questo fatto daremo una dimostrazione al n. 61.

61. Def. — Un angolo che sia minore di un angolo piatto e non sia retto, dicesi *acuto* od *ottuso* secondo che è minore o maggiore di un retto.

Perciò un angolo è minore, uguale o maggiore del suo adiacente secondo che è acuto, retto od ottuso.

*b) **Rette parallele.***

62. In un piano, due rette a, b, intersecate da una terza c (*traversale*) formano otto angoli, che a coppie assumono nomi speciali a seconda delle parti di piano in cui cadono rispetto alle rette date. Riferendoci, per es., alla unita figura, gli angoli 1 e 7, 2 e 8 diconsi *alterni interni;* gli angoli 4 e 6, 3 e 5 *alterni esterni;* gli angoli 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 *corrispondenti;* e infine gli angoli 1 e 8, 2 e 7 *coniugati.*



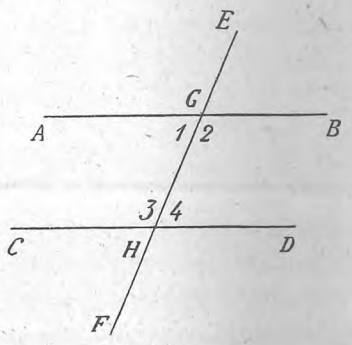
63. Il confronto degli angoli che due rette formano con una traversale ci permetterà di riconoscere il caso in cui due rette di un piano non si incontrano, cioè sono *parallele.*

Qui intanto possiamo notare il risultato seguente.

64. Si hanno *tre criteri di parallelismo:*

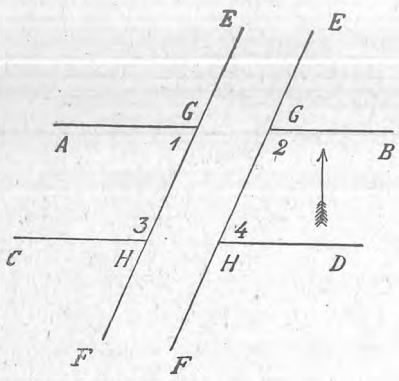
I° criterio. *Due rette sono parallele se intersecate da una terza formano con essa* ANGOLI ALTERNI INTERNI UGUALI.

II° criterio. *Due rette sono parallele se intersecate da una terza formano con essa* ANGOLI CORRISPONDENTI UGUALI.



III° criterio. *Due rette sono parallele se*

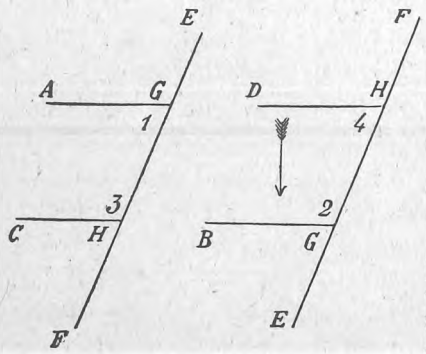
intersecate da una terza formano con essa ANGOLI CONIUGATI SUPPLEMENTARI.



Le due rette *AB*, *CD* siano intersecate dalla trasversale *EF* rispettivamente nei punti *G*, *H* e supponga si (criterio I°) che sieno uguali due angoli alterni interni, p. es. gli angoli 1 e 4.

Per verificare che le due rette sono parallele, notiamo anzitutto che sono uguali anche i due angoli 2 e 3, come supplementari di angoli uguali (n. 51).

Immaginiamo allora di tagliare il piano lungo la *EF*, e di staccare i due semipiani così ottenuti,



come è indicato dalla 1ª fig. di questa pag. Indi si faccia compiere al semipiano destro un mezzo giro su sè stesso in guisa da disporlo come nella fig. 2ª; e infine lo si porti sul semipiano a sinistra, in modo che i vertici degli angoli 2 e 4 vadano a coincidere rispettivamente coi vertici degli angoli 3 ed 1. Poichè l'angolo 2 è uguale all'angolo 3 e l'angolo 4 è uguale all'angolo 1, avremo che le semirette *GB*, *HD* del

secondo semipiano andranno a coincidere rispettivamente colle due semirette *HC*, *GA* del primo semipiano.

Risulta di qui che se, nel semipiano sinistro le due semirette *GA*, *HC* si incontrassero, si dovrebbero pur incontrare le semirette *GB*, *HD* del semipiano destro; e allora nella figura da cui siamo partiti, le due rette *AB*, *CD* si incontrebbero tanto a destra quanto a sinistra della *EF*, e, avendo due punti comuni, coinciderebbero.

Si ha dunque infine che le nostre due rette *AB*, *CD* non si possono incontrare nè da una parte nè dall'altra di *EF*, e sono perciò parallele.

Alla stessa conclusione si perviene, collo stesso procedimento sperimentale, nelle ipotesi del criterio II o III, poichè dall'uguaglianza degli angoli corrispondenti $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$ si deduce quella degli angoli alterni interni $\widehat{AGH}$, $\widehat{DHG}$ (n. 49), e similmente dall'essere supplementari gli angoli coniugati $\widehat{BGH}$, $\widehat{DHG}$ si deduce (n. 51)

$$\widehat{AGH} = \widehat{DHG},$$

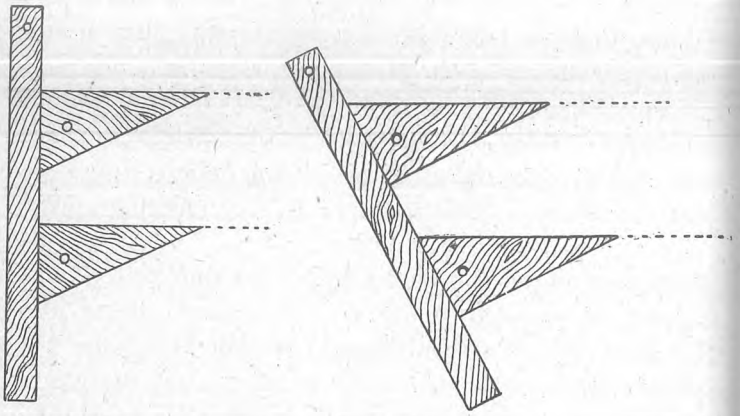
onde si è ricondotti al criterio I°.

65. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che: *In un piano tutte le perpendicolari ad una medesima retta sono parallele.*

Nota. Ciò dimostra il fatto, già enunciato al n. 59, che per un punto non può passare più di una perpendicolare ad una retta data. Infatti due perpendicolari ad una stessa retta sono parallele, cioè non hanno punti comuni.

66. Dalla proposizione del n. 64 discende che se, adagiata sul foglio del disegno la riga, facciamo

scorrere la squadra in modo che un suo spigolo sia sempre a contatto con la riga, uno qualsiasi degli



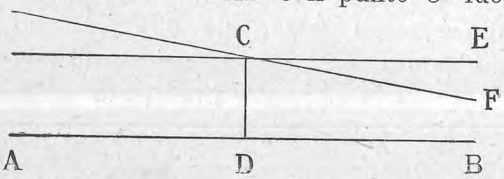
altri due spigoli dà, nelle sue varie posizioni, altrettante rette parallele.

Da ciò segue la *costruzione di una retta passante per un punto dato e parallela ad un retta data* (non passante per esso).

Questa parallela è unica come risulta dall'osservazione seguente.

67. (*Postulato delle parallele*). *Data una retta e un punto fuori di essa, per questo passa una sola parallela alla retta data.*

Dati la retta AB e il punto C fuori di essa, si



conducano da C la CD, perpendicolare alla AB, e la CE perpendicolare alla CD. La CE è parallela alla AB (n. 65). Ogni altra retta CF passante per C, forma da una

parte di CD, con la CD stessa, un angolo acuto, e si intuisce che da codesta parte, essa, ove sia sufficientemente prolungata, incontra la retta AB.

68. Cor. — *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra di loro.*

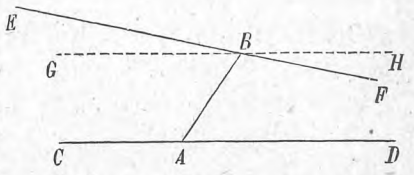
Se, in un piano, le rette a e b, parallele alla medesima retta c, si incontrassero, per il loro punto comune passerebbero due rette parallele alla c, il che è contrario alla proposizione precedente.

69. Cor. — *Se in un piano si hanno più parallele, una retta secante rispetto ad una di queste sega anche tutte le altre.*

Se infatti una retta, che interseca una delle parallele considerate, non ne intersecasse un'altra quest'ultima ammetterebbe due parallele distinte per un medesimo punto.

70. Cor. — *Se due rette formano con una trasversale angoli coniugati non supplementari, le due rette si incontrano da quella parte, da cui la somma dei due angoli coniugati è minore di due retti.*

Le due rette CD, EF formino colla trasversale AB angoli coniugati non supplementari; sia precisamente $\widehat{ABF} + \widehat{BAD}$ minore di due retti. Poichè codesti due angoli insieme con $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABE}$ danno una somma uguale



a quattro retti, avremo intanto che $\widehat{CAB} + \widehat{ABE}$ è maggiore di due retti. Ora se per B, si conduce la retta GH tale che $\widehat{HBA}$ sia supplementare di $\widehat{BAD}$, essa sarà parallela alla CD; onde risulta, pel postulato delle parallele, che la EF, distinta dalla pa-

rallela GH, incontrerà la CD, ed è chiaro che la semiretta BE, che forma colla AB e con AC angoli coniugati la cui somma supera due retti, è esterna alla striscia delle due parallele, cosicchè sarà la semiretta opposta BF quella che incontra la CD.

71. Il postulato del n. 67 ci permette di invertire le proposizioni del n. 64.

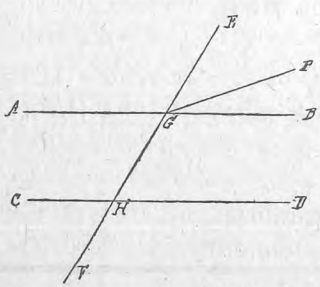
Teor. — *Se due rette sono parallele, esse formano con ogni trasversale:*

1) *angoli alterni uguali;*

2) *angoli corrispondenti uguali;*

3) *angoli coniugati supplementari.*

Siano le due rette parallele AB, CD, intersecate dalla trasversale EF nei punti G, H rispettivamente.



1) Scelti due qualsivogliano angoli alterni, per esempio $\widehat{BGE}$ e $\widehat{CHF}$, diciamo che essi sono uguali.

Supposto che siano disuguali, potremo condurre per G, dalla stessa parte di GB rispetto alla EF, la semiretta GP tale che l'angolo $\widehat{PGE}$ sia uguale a $\widehat{CHF}$. Allora le rette GP e CD, che con la trasversale EF formano angoli alterni uguali sono parallele (n. 63), e pel punto G passano le due rette distinte GB, GP entrambe parallele alla CD, il che è assurdo (n. 66). Abbiamo dunque veramente che gli angoli alterni $\widehat{CHF}$, $\widehat{BGE}$ sono uguali.

2) Diciamo che gli angoli corrispondenti, per esempio $\widehat{BGE}$, $\widehat{DHG}$, sono uguali.

Infatti essendo uguali gli angoli alterni $\widehat{CHF}$, $\widehat{BGE}$,

l'angolo $\widehat{BGE}$ sarà di conseguenza uguale anche all'opposto al vertice di $\widehat{CHF}$, cioè a $\widehat{DHG}$.

3) Diciamo infine che due angoli coniugati, per esempio $\widehat{HGB}$, $\widehat{DHG}$, sono supplementari.

Infatti $\widehat{DHG}$ è uguale al corrispondente $\widehat{BGE}$, e questo è supplementare di $\widehat{HGB}$.

72. Cor. — *Se due rette sono parallele, ogni perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra.*

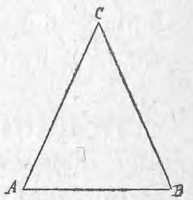
Figure poligonali.

73. Noi abbiamo considerato dianzi alcune classi particolarissime di figure (rette, semirette, segmenti, angoli, ecc.) costituite di punti e rette o parti di retta (segmenti e semirette).

Appartengono a questa stessa categoria le *figure poligonali* (triangolo, quadrangolo....), di cui ora ci dobbiamo occupare.

74. Consideriamo tre punti A, B, C, non in linea retta e i tre segmenti AB, BC, CA.

Gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ (contenenti rispettivamente i segmenti AC, BA, CB) sono tali che ogni punto comune a due di essi è interno anche al terzo.



Sia per es. un punto P comune agli angoli $\widehat{CBA}$ e $\widehat{ACB}$. Siccome P giace in $\widehat{CBA}$ vuol dire (n. 34) che esso si trova in quel semipiano limitato dalla AB in cui cade C; e siccome giace in $\widehat{ACB}$, cadrà anche nel semipiano limitato dalla AC, in cui cade B. Ma i punti comuni ai due semipiani or ora nominati sono precisamente (n. 34) i punti del terzo angolo $\widehat{BAC}$.

75. Def. — Dati tre punti A, B, C, non in linea retta, dicesi *triangolo* ABC la figura costituita dai punti comuni ai tre angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$.

Codesti tre angoli diconsi *angoli del triangolo*, e i loro vertici *vertici del triangolo*.

I tre segmenti AB, BC, CA, chiamansi *lati* del triangolo; l'insieme dei lati dicesi *contorno* e la loro somma *perimetro*.

Infine i punti del triangolo non giacenti sul contorno diconsi *interni* al triangolo.

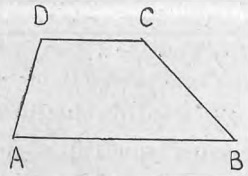
76. I punti non giacenti su di un triangolo ABC (e quindi nemmeno sul contorno) diconsi *esterni* ad esso.

Ad ogni angolo di un triangolo sono adiacenti due angoli, i quali diconsi *angoli esterni* del triangolo. Un angolo esterno di dice *opposto* a ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.

Talvolta, riferendosi tacitamente alla posizione in cui si immagina il triangolo, ad uno dei suoi lati si dà il nome di *base*. Questo nome si usa particolarmente nel caso di un triangolo avente due lati uguali per designare il terzo lato. Un triangolo avente due lati uguali si dice *isoscele*. In un triangolo isoscele gli angoli interni compresi fra la base e i lati uguali si dicono *angoli alla base*. Parlando del *vertice* di un triangolo isoscele, senza nominare di quale si tratti, si intende riferirsi a quello opposto alla base.

77. Il triangolo non è che la prima e più semplice di tutta una serie di figure.

Così dati nel piano quattro punti A, B, C, D di cui tre non in linea retta, tali che ciascuna delle congiungenti AB, BC, CD, DA lasci gli altri due punti dalla stessa parte, la figura costituita da punti comuni ai quattro angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$,



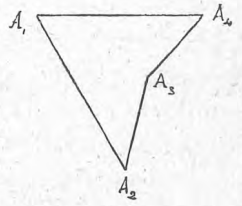
$\widehat{CDA}$, $\widehat{DAB}$ dicesi *quadrangolo* $ABCD$ (di vertici A, B, C, D, di lati AB, BC, CD, DA e così via).

Più in generale, siano dati nel piano n punti A_1, A_2, A_3..., A_n, ($n \leq 3$) tali che, quando si congiungano a due a due nell'ordine in cui sono dati (il primo col secondo, il secondo col terzo..., l'ultimo col primo) ogni congiungente lasci tutti gli altri $n-2$ punti da una stessa parte.

Restano così determinati n angoli $A_1\widehat{A_2}A_3$, $A_2\widehat{A_3}A_4$..., $A_n\widehat{A_1}A_2$: la figura costituita dai punti comuni a codesti n angoli dicesi *poligono a* n *lati* $A_1A_2A_3...A_n$ (*pentagono, esagono, ottagono, ennagono, decagono,..* per $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10,...$)

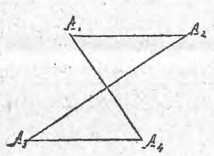
In modo analogo a quello tenuto pei triangoli al nn. 75-76, si definiscono per un poligono qualsiasi i *vertici;* i *lati*, il *contorno* e il *perimetro;* gli *angoli interni* ed *esterni*, ecc.

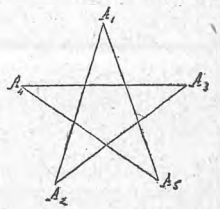
78. Si può estendere il concetto di poligono, quale è stato dato al n. prec., considerando poligoni *concavi*, cioè tali che la retta di qualche lato non lasci tutti i vertici da una stessa parte, mentre tuttavia non accade mai che due lati, non consecutivi, si seghino a vicenda.



Per es. il quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ è concavo perchè la retta A_3A_4 lascia da parte opposte i vertici A_1, A_2.

Un poligono soddisfacente alle condizioni della nostra prima definizione dicesi *convesso*. E noi quando nel seguito parleremo di poligoni, senz'altra indicazione, intenderemo parlare di poligoni concavi.





79. Si possono anche considerare *poligoni intrecciati*, vale a dire tali che due lati non consecutivi si intersecano, cioè hanno qualche punto comune. (Vedi fig. alla pag. prec.).

Un poligono non intrecciato dicesi, per contrapposto, *sciolto*.

80. Un'altra estensione del concetto di poligono è la seguente

Def. — Dati nel piano in un certo ordine n punti A_1, A_2,.... A_n di cui tre consecutivi qualsiansi non siano in linea retta, la figura costituita dagli n punti A_1, A_2...., A_n (*vertici*) e dagli $n-1$ segmenti A_1A_2, A_2A_3, $A_{n-1}A_n$ (*lati*) dicesi *spezzata* o *poligonale*.

La somma dei lati della poligonale dicesi *perimetro* di essa.

I punti A_1 e A_n diconsi *termini* della poligonale.

Se i termini coincidono, o come si suol dire, se la poligonale è *chiusa*, la poligonale dà il contorno di un poligono (convesso, concavo o intrecciato) che ha in generale $n-1$ lati ed $n-1$ vertici.

Figure uguali.

81. Il criterio della sovrapponibilità ci ha condotto ai concetti fondamentali di *segmenti uguali* ed *angoli uguali*.

Lo stesso criterio, applicato, per es. a *figure* disegnate sopra la carta, ci permette in generale di confrontarle, e di decidere se esse sono **uguali.**

Ma l'*uguaglianza* può anche definirsi, per le varie specie di figure, in modo geometrico, ricorrendo esclusivamente al confronto di segmenti e di angoli.

Dalla natura stessa di tali definizioni risulta che sempre:

82. *Figure uguali ad una terza sono uguali fra loro.*

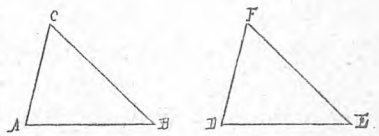
83. L'uguaglianza fra poligoni si può definire, in guisa da soddisfare al criterio sperimentale sopra indicato (n. 76), nel modo seguente:

Def. — Due poligoni $ABC....\ H$, $A'B'C'....\ H'$, presi i loro vertici nell'ordine scritto, si dicono *uguali* se hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli compresi fra i lati uguali, e si scrive:

$$ABC....\ H \equiv A'B'C'....\ H'.$$

In particolare, due triangoli ABC, DEF, presi i loro vertici nell'ordine scritto, si dicono *uguali*, se

$$AB=DE,\ BC=EF,\ CA=FD,\ \widehat{A}=\widehat{D},\ \widehat{B}=\widehat{E},\ \widehat{C}=\widehat{F}.$$



Se i due triangoli ABC, DEF sono uguali quando i loro vertici sono presi nell'ordine indicato, sono pure uguali i triangoli BCA ed EFD, CBA ed FED, ecc., perchè appunto le relazioni

$$BCA = EFD,\quad CBA = FED,\ \text{ecc.}$$

esprimono le stesse uguaglianze di lati e di angoli.

84. Per definizione, si può concludere che due poligoni sono uguali, quando siasi verificato che essi hanno ordinatamente uguali i lati e gli angoli. Ma l'esperienza ci mostra che ad accertare l'uguaglianza di due poligoni ad n lati, non occorre di constatare

proprio l' uguaglianza ordinata di tutte le n coppie di lati e di tutte le n coppie di angoli.

Riferiamoci, per fissare le idee al caso di due triangoli ABC, DEF, (vedi fig. al n. prec.) e supponiamo di avere già constatato che l' angolo $\widehat{ACB}$ è uguale all' angolo $\widehat{DFE}$, e che i lati AC, BC, che comprendono il primo angolo sono uguali rispettivamente ai lati DF, EF che comprendono il secondo.

Portiamo allora ABC su DEF, sovrapponendo l' angolo $\widehat{C}$ all'uguale $\widehat{F}$ in modo che la semiretta CA si disponga sulla semiretta FD. Siccome, per ipotesi, i segmenti CA, CB sono uguali rispettivamente a FD, FE, i punti A, B andranno a coincidere con D, E rispettivamente, e quindi il lato AB e gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ si sovrapporranno esattamente al lato DE e agli angoli $\widehat{D}$, $\widehat{E}$.

Si ha dunque che dalle uguaglianze

$$\widehat{C} = \widehat{F}, \quad AC = DF, \quad BC = EF$$

discendono di conseguenza le

$$\widehat{A} = \widehat{D}, \quad \widehat{B} = \widehat{E}, \quad AB = DE$$

e quindi che i due triangoli ABC, DEF sono uguali.

Possiamo dunque enunciare il seguente postulato:

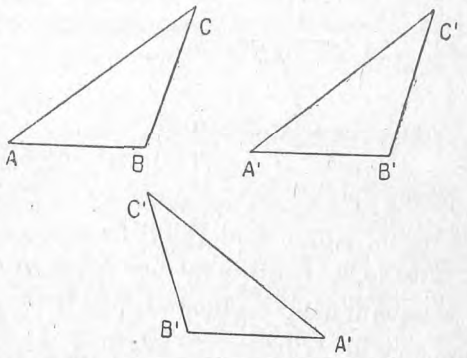
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l' angolo compreso, essi sono uguali, avendo rispettivamente uguali anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati uguali.

85. Supponiamo dati due triangoli uguali ABC, $A'B'C'$; avremo $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$, $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$.

Se due angoli corrispondenti, per es., $\widehat{ABC}$ e $\widehat{A'B'C'}$,

hanno ugual verso, hanno pure ugual verso tutti gli altri angoli corrispondenti; se invece due angoli corrispondenti sono di versi opposti, sono tali anche tutte le altre coppie di angoli corrispondenti.

Nel primo caso noi vediamo come il secondo triangolo si possa portare a coincidere col primo, facendolo *strisciare* sul piano: nel secondo caso invece i due poligoni non si possono sovrapporre se non facendone uscire uno dal piano, per es., ribaltandolo intorno ad un suo lato.

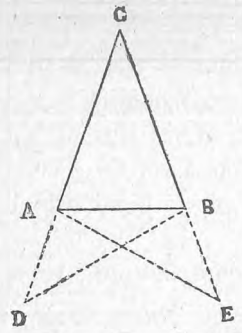


Nel primo caso i due triangoli si dicono *direttamente uguali*, nel secondo *inversamente uguali*.

È di per sè manifesto come possa avere luogo sia la *uguaglianza diretta* che l' *uguaglianza inversa* anche per figure piane non poligonali.

90. Teor. — *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.*

Nel triangolo ABC sia $AC = BC$: diciamo che è $\widehat{CAB} = \widehat{ABC}$.



Prolungati i segmenti CA, CB di due segmenti uguali qualsiansi, AD e BE, si congiungano D con B, E con A. I due segmenti CD, CE saranno uguali come somme di segmenti rispettivamente uguali; e i due triangoli AEC, BDC, aventi in comune l'angolo $\widehat{C}$ e uguali i lati CA e CB, CE e CD, saranno uguali (n. 87). Risulta di qui in particolare

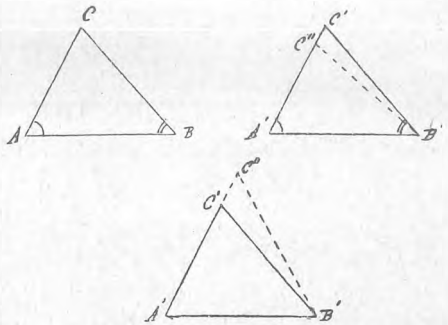
$$\widehat{ADB} = \widehat{AEB}, \quad DB = AE.$$

Ma allora saranno uguali anche i triangoli ABD, BAE, in quanto hanno rispettivamente uguali gli angoli $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ e i lati che li comprendono; onde si conclude che sono uguali gli angoli sotto la base $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABE}$ e quindi ancora i rispettivi angoli adiacenti $\widehat{CAB}$ e $\widehat{ABC}$ (n. 51).

Nota. — Il teorema prec. si può verificare constatando che il triangolo ABC si può ribaltare su sè stesso in modo che il punto C ritorni su sè medesimo, e i punti A e B si scambino fra loro.

91. II° Criterio d'uguaglianza. — Teor. — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli e il lato comune, i due triangoli sono uguali;* cioè sono uguali i terzi angoli e i lati opposti agli angoli uguali.

Dati i due triangoli ABC, $A'B'C'$ tali che sia $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $AB = A'B'$, dico che i due triangoli sono uguali. Per il criterio del n. 87 basta dimostrare che è $AC = A'C'$.



Ragioneremo per assurdo supponendo che AC sia disuguale di $A'C'$.

Se così fosse, esisterebbe sulla semiretta $A'C'$ un punto C'' distinto da C', tale che $A'C'' = AC$. Allora i triangoli ABC, $A'B'C''$ essendo

$$AB = A'B', \; AC = A'C'', \; \widehat{CAB} = \widehat{C''A'B'},$$

sarebbero uguali; onde in particolare risulterebbe $\widehat{A'B'C''} = \widehat{ABC}$, e quindi,

$$\widehat{A'B'C''} = \widehat{A'B'C'}.$$

Ma poichè la semiretta $B'C''$ è distinta da $B'C'$ e i due angoli $\widehat{A'B'C''}$, $\widehat{A'B'C'}$ cadono dalla stessa banda rispetto al lato comune, questa conclusione è assurda, cosicchè rimane stabilito che è $AC = A'C'$ e quindi

$$ABC \equiv A'B'C'.$$

Osservazione. — Il secondo criterio di uguaglianza si verifica anche sperimentalmente portando l'uno sull'altro i due triangoli, in modo che si sovrappongano i lati uguali e gli angoli adiacenti.

II.

FIGURE POLIGONALI

Triangoli uguali.

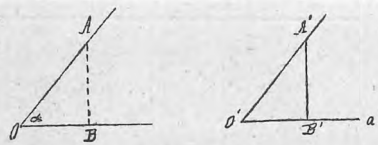
86. Nello studio dell'uguaglianza fra triangoli dovremo sopratutto far uso della proposizione del n. 84 che qui ripeteremo, prima di esporne alcune applicazioni.

87. I° Criterio d'uguaglianza dei triangoli. — *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, essi sono uguali, avendo rispettivamente uguali anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati uguali.*

88. Il prec. criterio di uguaglianza dei triangoli ci conduce ad eseguire alcune *costruzioni* colla SQUADRA.

Probl. — *Costruire* (con la squadra) *sopra una semiretta data, e da una banda assegnata di essa, un angolo uguale ad un angolo dato.*

Dati l'angolo α di vertice O e la semiretta a di origine O', si prenda ad arbitrio sopra un lato di α il punto A, e da esso si abbassi la perpendicolare AB sopra l'altro lato (o sul suo prolungamento; n. 57); poi



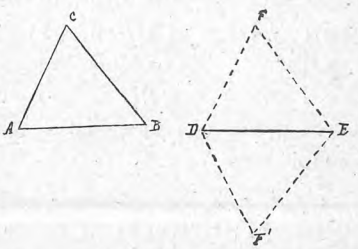
sulla semiretta a (o, rispettivamente, sul suo prolungamento) si prenda il segmento $O'B'$ uguale ad OB, da B' si innalzi la perpendicolare, e su questa, dalla banda prefissata rispetto ad a, si prenda il segmento $B'A'$, uguale a BA. Infine si congiunga O' con A'.

L'angolo $B'\widehat{O'}A'$ è uguale all'angolo α: infatti i triangoli OBA, $O'B'A'$ aventi per costruzione i lati OB, BA uguali rispettivamente a $O'B'$, $B'A'$ e gli angoli compresi uguali, perchè retti (n. 60), sono uguali (n. prec.) ed hanno quindi uguali gli angoli $B\widehat{O}A$, $B'\widehat{O'}A'$.

Nota. — Si può dire che la costruzione precedente permette di effettuare il *trasporto* di un qualsiasi angolo. Essa dà evidentemente il modo di costruire la *somma* di quanti si vogliono angoli dati e la *differenza* di due angoli dati.

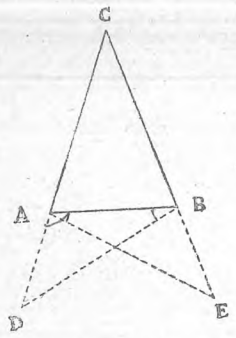
89. Probl. — *Dato un triangolo e un segmento uguale ad un lato di esso, costruire su questo segmento come base, e da una parte prefissata di esso, un triangolo uguale al dato.*

Sia ABC il triangolo dato, e sia DE il segmento dato, uguale ad AB. A partire da E e dalla banda prefissata rispetto a DE, possiamo condurre una semiretta EF, tale che sia $\widehat{DEF} = \widehat{ABC}$ (n. prec.).



Preso sulla semiretta EF, a partire da E, il segmento EF uguale BC, il triangolo DEF è uguale ad ABC, perchè per ipotesi è $AB = DE$ e per costruzione è $\widehat{B} = \widehat{E}$, $BC = EF$.

Ma la semplice dimostrazione per assurdo data dianzi, fa vedere che la proposizione è già insegnata implicitamente dalla esperienza eseguita per ottenere il primo criterio (n. 84).



92. Teor. — *Se un triangolo ha due angoli uguali, i lati opposti ad essi sono uguali,* cioè *il triangolo è isoscele* ed ha per base il lato a cui sono adiacenti gli angoli uguali.

Nel triangolo ABC sia $\widehat{CAB} = \widehat{ABC}$. Prolungati i segmenti CA, CB di due segmenti uguali qualsiansi AD, BE, congiungiamo D con B ed E con A, e consideriamo i due triangoli ABE, BAD. Essi hanno il lato AB comune, i lati BE, AD uguali per costruzione e gli angoli compresi $\widehat{EBA}$, $\widehat{BAD}$ uguali, come adiacenti di angoli uguali (n. 51).

Si conclude (n. 87) che i due triangoli sono uguali e quindi che

$$\widehat{DBA} = \widehat{BAE},\ \widehat{ADB} = \widehat{AEB},\ DB = AE.$$

Dalla prima di queste uguaglianze e dalla

$$\widehat{ABC} = \widehat{CAB}$$

risulta

$$\widehat{DBA} + \widehat{ABC} = \widehat{CAB} + \widehat{BAE}$$

ossia $\widehat{DBC} = \widehat{CAE}$. Allora nei due triangoli DBC, EAC sono rispettivamente uguali i lati DB e AE e gli angoli $\widehat{DBC}$ e $\widehat{CAE}$, $\widehat{CDB}$ e $\widehat{AEC}$; onde si conclude

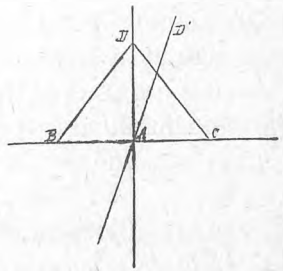
che i due triangoli sono uguali (n. prec.), e in particolare che $AC = BC$.

93. Dal teor. prec. e da quello del n. 90 si può dedurre una costruzione della perpendicolare basata direttamente sulla costruzione di un angolo uguale a un angolo dato, e indipendente dall'uso della squadra. La costruzione di due angoli uguali si suppone allora eseguita mediante il rapportatore o, come impareremo più avanti, col compasso.

Probl. — *Condurre per un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Distinguiamo due casi secondo che il punto appartiene o no alla retta data.

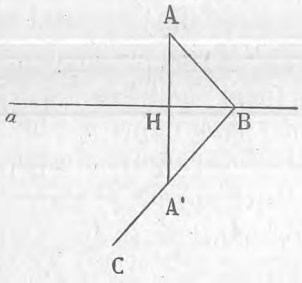
1° Siano dati la retta a e il punto A su di essa. Presi da una parte e dall'altra di A, su a, i due segmenti uguali AB, AC, si conduca per B una semiretta che formi colla semiretta BC un angolo acuto qualsiasi, e per C una semiretta che formi colla semiretta CB un angolo uguale all'angolo acuto dianzi costruito. Le due semirette così condotte si incontreranno in un punto D (n. 70) e il triangolo BCD sarà isoscele sulla base BC (n. prec.).



Diciamo che la retta AD è perpendicolare alla BC.

Infatti i due triangoli ABD, ACD hanno uguali gli angoli $\widehat{DBA}$, $\widehat{DCA}$, i lati AB, AC e i lati BD, CD. Perciò (n. 87) sono uguali, e hanno uguali gli angoli adiacenti $\widehat{DAB}$, $\widehat{DAC}$ i quali sono perciò retti (n. 59).

2° Consideriamo in secondo luogo una retta a e un punto A fuori di essa.



Per condurre da A la perpendicolare alla a, si congiunga A con un punto qualsivoglia B di a, e per questo punto B si conduca, dalla parte opposta di A rispetto alla a, la semiretta BC (non opposta a BA) che formi con a angoli uguali a quelli formati da BA con a.

Sulla semiretta BC si prenda il punto A' tale che sia $BA' = BA$ e si congiungano A ed A'.

La AA' è perpendicolare alla a. Infatti si noti anzitutto che codesta retta, congiungendo due punti A, A' da bande opposte rispetto ad a, interseca la a in un punto H; e i due triangoli BAH, $BA'H$ risultano uguali (n. 87), giacchè hanno comune il lato HB, e uguali gli angoli $\widehat{HBA}$, $\widehat{HBA'}$ e i lati BA, BA'. Saranno quindi uguali gli angoli adiacenti $\widehat{AHB}$, $\widehat{A'HB}$, i quali saranno perciò retti (n. 59).

94. III° Criterio d'eguaglianza. — **Teor.** — *Se due triangoli hanno uguali rispettivamente i tre lati, essi sono uguali:* cioè hanno uguali anche gli angoli opposti ai lati uguali.

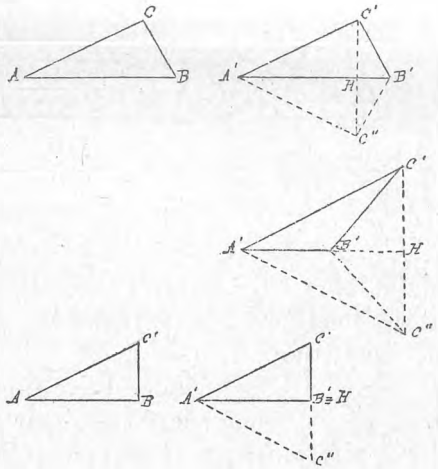
Dati i due triangoli ABC, $A'B'C'$, in cui è

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ CA = C'A',$$

dico che i due triangoli sono uguali.

Infatti sulla base $A'B'$ dalla parte opposta di C'

rispetto alla retta $A'B'$, costruiamo il triangolo $A'B'C''$ uguale ad ABC.



Se noi dimostreremo che gli angoli $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{A'C''B'}$ sono uguali, concluderemo che i triangoli $A'B'C'$, $A'B'C''$, per cui è

$$A'C'' = A'C',\ B'C'' = B'C',\ \widehat{A'C''B'} = \widehat{A'C'B'},$$

sono uguali (n. 87); e dalle uguaglianze fra triangoli

$$A'B'C' \equiv A'B'C'',\ A'B'C'' \equiv ABC$$

dedurremo che veramente i triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali.

Per dimostrare che è $\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C''B'}$, consideriamo il segmento $C'C''$, il quale, congiungendo due punti da parti opposte rispetto alla retta $A'B'$, intersecherà questa retta in un punto H; e distinguiamo

tre casi secondo che H è interno al segmento $A'B'$, o è esterno o coincide con uno degli estremi.

Se H è interno od esterno al segmento $A'B'$, i triangoli $C''C'A'$, $C'C''B'$ avendosi per costruzione

$$A'C'' = A'C',\ B'C'' = B'C',$$

sono isosceli, onde risulta

$$A'\widehat{C'}C'' = A'\widehat{C''}C',\ C''\widehat{C'}B' = C'\widehat{C''}B';$$

e allora concludiamo che gli angoli $A'\widehat{C'}B'$, $A'\widehat{C''}B'$, sono uguali perchè sono rispettivamente somme o differenze di angoli uguali (n. 44).

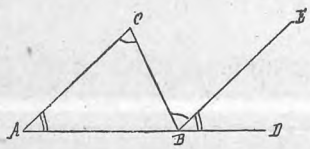
Se poi H coincide con uno degli estremi del segmento $A'B'$, per es. con B', il triangolo $C'C''A'$ è isoscele, perchè per costruzione è $A'C'' = A'C'$, onde risulta

$$A'\widehat{C'}B' = A'\widehat{C''}B'.$$

Somma degli angoli di un poligono.

95. Teor. — *In un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.*

Dato il triangolo ABC e prolungato AB in D, diciamo che l'angolo esterno $\widehat{DBC}$ è uguale alla somma degli angoli $\widehat{ACB}$ e $\widehat{BAC}$.



Condotta invero per B la parallela BE alla AC, avremo che sono uguali gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{EBC}$, come alterni interni formati dalle parallele AC, BE colla trasversale BC (n. 71), e gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DBE}$ come

corrispondenti rispetto alle medesime parallele e alla trasversale AB. Avremo quindi che la somma di $\widehat{ACB}$ e $\widehat{BAC}$ è uguale alla somma di $\widehat{EBC}$ e $\widehat{DBE}$, cioè appunto a $\widehat{DBC}$.

96. Dal numero precedente discende subito il seguente teorema fondamentale.

Teor. — *La somma degli angoli (interni) di un triangolo è uguale a due retti.*

Infatti (fig. prec.), poichè la somma di $\widehat{ACB}$ e $\widehat{BAC}$ è uguale a $\widehat{DBC}$, avremo che la somma dei tre angoli interni $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ è uguale alla somma dei due angoli adiacenti $\widehat{DBC}$ e $\widehat{CBA}$, cioè a due angoli retti.

97. Si ha quindi in particolare, che *se un triangolo ha un angolo retto, gli altri due angoli sono acuti e complementari,* cioè tali che la loro somma è un angolo retto.

Un triangolo siffatto si dice *rettangolo:* i due lati dell'angolo retto si dicono *cateti*, e il terzo lato, opposto all'angolo retto, si dice *ipotenusa.*

Così se un triangolo ha un angolo ottuso ha gli altri due acuti.

98. Cor. — *Se due angoli di un triangolo sono uguali rispettivamente a due angoli di un altro triangolo, anche i rimanenti angoli sono uguali.*

99. Teor. — *Se due triangoli hanno uguali due angoli ed un lato non comune a codesti due angoli, (ed ugualmente disposto rispetto ad essi nei due triangoli) i due triangoli sono uguali.*

Basta infatti notare che, pel n. 96, i due triangoli hanno uguale anche il terzo angolo; e allora si conclude in base al II° criterio (n. 91) che i due triangoli sono uguali.

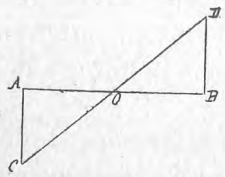
Nota. — Di qui e dal n. 91 discende che si può concludere che *due triangoli sono uguali non appena si sappia che essi hanno uguali due angoli e un lato*, (purchè questi due angoli e questo lato siano ugualmente disposti nei due triangoli).

Si ha in particolare che *due triangoli rettangoli sono uguali se hanno uguali un cateto e l'angolo adiacente, oppure un cateto e l'angolo opposto.*

100. In base al teor. prec. si può risolvere (con la riga graduata e la squadra) il seguente

Probl. — *Dividere un segmento in due parti uguali.*

Si innalzino agli estremi del segmento AB le perpendicolari, e su di esse, da bande opposte rispetto ad AB, si prendano i due segmenti uguali AC, BD. Il segmento CD segherà AB in un punto che diciamo essere tale che



$$AO = OB.$$

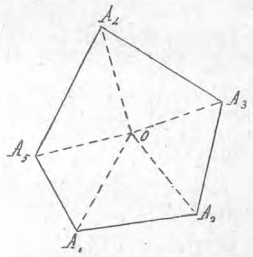
Infatti i due triangoli rettangoli AOC, BOD hanno uguali i cateti AC, BD e gli angoli acuti $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOD}$ (n. 49); perciò sono uguali, ed è appunto

$$AO = OB.$$

Nota. — Dal fatto che le metà di segmenti uguali sono uguali, discende che il segmento AB ammette un unico punto medio.

101. Teor. — *La somma degli angoli (interni) di un poligono (convesso) è uguale alla somma di tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono, diminuita di quattro angoli retti.*

Sia il poligono (convesso) ad n lati $A_1A_2....A_n$ (nella figura si è preso un pentagono): diciamo che la somma dei suoi angoli è uguale alla somma di $2n - 4$ angoli retti, cioè ad $n - 2$ angoli piatti (nel caso della figura a sei retti).



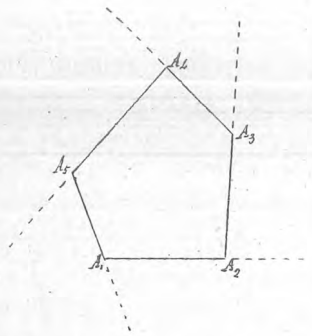
Congiunto, invero, un punto interno qualsiasi O del poligono con ciascuno dei vertici, otteniamo il poligono decomposto in n triangoli (tanti quanti sono i lati). La somma degli angoli di questi n triangoli è, per una parte, uguale ad n angoli piatti (n. 96), e per l'altra è uguale alla somma degli angoli del poligono, aumentata dalla somma degli angoli aventi il vertice comune in O, cioè di due angoli piatti. Quindi la somma degli angoli del poligono è uguale alla somma di tante volte due retti quanti sono i lati, diminuita di quattro angoli retti.

102. Come caso particolare del teorema stabilito innanzi, abbiamo che *la somma degli angoli di un quadrangolo è uguale a quattro angoli retti.*

103. Cor. — *In ogni poligono equiangolo di* n *lati ogni angolo è uguale alla* n^{ma} *parte aliquota di* 2n — 4 *angoli retti.*

Così, in particolare, in un triangolo equiangolo (equilatero) ogni angolo è la terza parte di due retti; in un quadrangolo equiangolo gli angoli sono retti ecc.

104. Proponiamo come esercizio la dimostrazione delle seguenti proposizioni:



a) **Teor.** — *In un poligono, di cui i vertici siano presi nel loro ordine, la somma degli angoli esterni, formati da ciascun lato col prolungamento del precedente, è uguale a quattro angoli retti.*

b) **Cor.** — *Un poligono non può avere più di tre angoli acuti.*

Proprietà perimetriche.

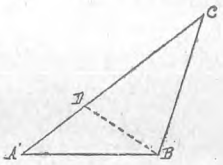
105. Nel teor. del n. 96 è implicita la proposizione seguente: *In un triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.*

Questa proposizione ci permette di dimostrare il teorema seguente, che dà luogo ad alcune notevoli conseguenze.

106. Teor. — *Se in un triangolo due lati non sono uguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore dell'angolo opposto al lato minore; e reciprocamente, se due angoli non sono uguali, il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore.*

In primo luogo, nel triangolo ABC sia $CA > BC$: diciamo che è $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$.

Siccome è $CA > BC$, sulla semiretta CA esiste un punto D, interno al segmento CA, tale che è $CD = CB$.



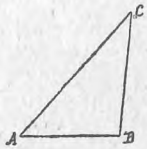
Poichè D è interno a CA, la semiretta BD è interna all'angolo $\widehat{CBA}$, ed è perciò $\widehat{CBA} > \widehat{CBD}$. Ma il triangolo BCD è per costruzione isoscele, onde risulta (n. 90) $\widehat{CBD} = \widehat{BDC}$; e d'altra parte l'angolo $\widehat{BDC}$ è esterno rispetto al triangolo ABD ed è perciò maggiore dell'interno opposto $\widehat{BAC}$ (n. prec.). Abbiamo dunque le tre relazioni

$$\widehat{CBA} > \widehat{CBD}, \quad \widehat{CBD} = \widehat{BDC}, \quad \widehat{BDC} > \widehat{BAC},$$

dalle quali risulta che veramente l'angolo $\widehat{CBA}$, opposto al lato AC maggiore di BC, è maggiore dell'angolo $\widehat{BAC}$, opposto al lato BC.

In secondo luogo nel triangolo ABC sia $\widehat{CBA} > \widehat{BAC}$: diciamo che è $AC > BC$.

Non può essere infatti $AC = BC$, giacchè sarebbe in tal caso (n. 90)



$$\widehat{CBA} = \widehat{BAC}:$$

nè può aversi $AC < BC$, perchè allora avremmo $\widehat{CBA} < \widehat{BAC}$.

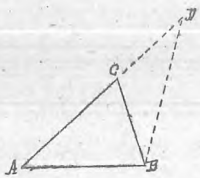
Nota. — Si ha in particolare, che *in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei cateti.*

107. Teor. — *In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.*

Dato il triangolo ABC, diciamo che ogni lato è minore della somma degli altri due, che, p. es., è

$$AB < BC + CA.$$

Si prenda infatti sul prolungamento di AC il segmento $CD = CB$: avremo



$$AD = BC + CA;$$

e siccome BA e BD cadono da parti opposte rispetto a BC, l'angolo $\widehat{DBA}$ sarà maggiore di $\widehat{DBC}$. Ma, per costruzione, il triangolo BDC è isoscele (rispetto alla base BD) cosicchè gli angoli alla base $\widehat{DBC}$, $\widehat{CDB}$ saranno uguali (n. 90). Avremo quindi che nel triangolo ABD l'angolo $\widehat{ADB}$ è minore di $\widehat{DBA}$, e quindi (n. prec.) che il lato AB, opposto al primo è minore del lato AD, opposto al secondo, ossia che è veramente

$$AB < BC + CA.$$

108. Cor. — *In un triangolo ogni lato è maggiore della differenza degli altri due.*

Dato il triangolo ABC, diciamo che, p. es., AB è maggiore della differenza di BC e AC.

Se $BC = AC$ l'asserzione non ha bisogno d'essere dimostrata.

Se BC e AC non sono uguali, supponiamo, per fissare le idee, $AC > BC$. Allora dalla relazione (n. prec.).

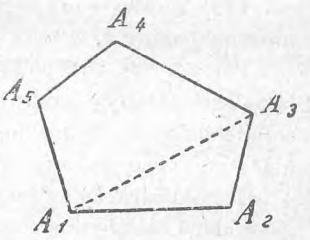
$$AC < AB + BC,$$

deduciamo appunto

$$AC - BC < AB.$$

109. Teor. — *In un poligono ogni lato è minore della somma dei rimanenti.*

Il teorema si è dimostrato pel caso dei triangoli al n. 107; si dimostra in generale, ricorrendo alla cosidetta argomentazione da $n - 1$ ad n (o *induzione matematica o completa*) (1).



Supponiamo p. es. dimostrato il teorema pei poligoni di quattro lati: diciamo che esso è vero anche pei poligoni di cinque lati. Dato il poligono $A_1A_2A_3A_4A_5$, vogliamo mostrare che il lato A_1A_2 è minore della somma degli altri quattro lati. Considerati perciò i tre vertici consecutivi A_1, A_2, A_3, conduciamo la diagonale A_1A_3. Nel triangolo $A_1A_2A_3$, pel n. 107, si ha $A_1A_2 < A_2A_3 + A_1A_3$; e nel poligono a quattro lati $A_1A_3A_4A_5$ si ha per la ipotesi fatta,

$$A_1A_3 < A_3A_4 + A_4A_5 + A_1A_5.$$

Perciò, a più forte ragione, A_1A_2 sarà minore della somma di A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.

---

(1) Si applica cioè il seguente principio:

Se un poligono gode di una certa proprietà, e se si è dimostrato che, ammessa codesta proprietà per un poligono ad un numero qualsiasi n *di lati, essa deve sussistere per il poligono ad* n + 1 *lati, ogni poligono godrà di quella proprietà.*

Questo principio si può applicare ad ogni classe di figure geometriche che sia *numerabile*, cioè tale che ad ogni sua figura corrisponda un numero (intero) ed uno solo e ad ogni numero (intero) una figura ed una sola.

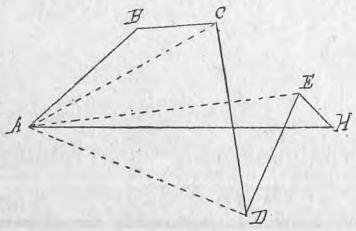
L'indicato principio, nella sua forma generale, prende il nome di « *legge d'induzione* ».

Analogamente si dimostra che se il teorema è vero pei poligoni ad $n-1$ lati è vero anche per quelli ad n; e poichè vale pei triangoli, varrà anche pei poligoni a 4, 5, 6,.... lati.

110. Teor. — *Il segmento congiungente i termini di una poligonale è minore del perimetro.*

Pel caso di una poligonale convessa (cioè tale che ogni lato lasci tutti gli altri vertici da una stessa parte) poichè chiudendola si ottiene un poligono convesso, il teorema è già stato dimostrato (n. prec.).

La dimostrazione data in quel caso si estende al caso generale. Consideriamo infatti, p. es., una poligonale di sei lati *ABCDEH*. Congiunto il termine *A* col vertice *C*, otteniamo una poligonale *ACDEH* il cui perimetro è evidentemente minore di quello della poligonale primitiva, poichè (n. 107) $AC < AB + BC$. Sulla nuova poligonale, avente un lato di meno della primitiva, possiamo ripetere una osservazione analoga: così procedendo troveremo che il perimetro della poligonale primitiva è maggiore del perimetro di una poligonale di due soli lati, *AE*, *EH*.



Ma l'ultima poligonale ha perimetro maggiore di *AH* (n. 107). Ne risulta che *AH* è minore del perimetro della poligonale primitiva.

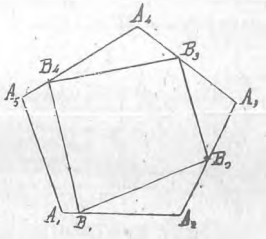
111. Teor. — *Se un poligono è contenuto in un altro* (cioè se i vertici del primo appartengono al secondo) *il perimetro del primo è minore di quello del secondo.*

Consideriamo dapprima il caso in cui il secondo poligono è *iscritto* nel primo, cioè i vertici del secondo appartengono al contorno del primo. Sia p. es. il poligono $B_1B_2B_3B_4$ inscritto nel poligono

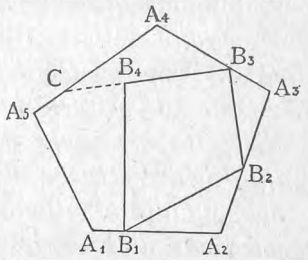
$$A_1A_2A_3A_4A_5.$$

Abbiamo evidentemente, (n. prec.),

$$B_1B_2 < B_1A_2 + A_2B_2,$$
$$B_2B_3 < B_2A_3 + A_3B_3,$$
$$B_3B_4 < B_3A_4 + A_4B_4,$$
$$B_4B_1 < B_4A_5 + A_5A_1 + A_1B_1,$$



Per passare al caso generale, supponiamo dapprima che il secondo poligono abbia un solo vertice interno al primo; per es. consideriamo il poligono $B_1B_2B_3B_4$, di cui i vertici B_1, B_2, B_3 appartengono al contorno di $A_1A_2A_3A_4A_5$ e il vertice B_4 è interno.



Si prolunghi uno dei lati concorrenti in B_4, per es. B_3B_4, fino ad incontrare in *C* il contorno di $A_1A_2A_3A_4A_5$. Otteniamo così un poligono $A_1A_2A_3B_3CA_5$, il quale è iscritto in $A_1A_2A_3A_4A_4$ e, alla sua volta ammette come poligono iscritto il poligono $B_1B_2B_3B_4$. Risulta allora dalla prima parte di questa dimostrazione che

$$\text{perim. di } B_1B_2B_3B_4 < \text{perim. di } A_1A_2A_3B_3CA_5 < \\ < \text{perim. di } A_1A_2A_3A_4A_5$$

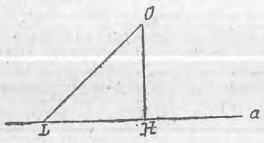
e quindi che veramente il perimetro di $B_1B_2B_3B_4$ è minore di quello di $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Analoga dimostrazione vale nel caso in cui due o più vertici del secondo poligono siano interni al primo.

Perpendicolari ed oblique.

112. Data una retta a e un punto O fuori di essa, il segmento della perpendicolare per O alla a,

compreso fra O e l'intersezione H di essa con a, si suol designare semplicemente col nome di « *perpendicolare* » abbassata da O su A: il punto H si dice *piede* della perpendicolare.



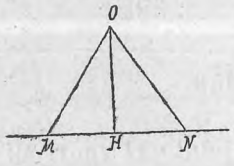
Ogni segmento OL congiungente il punto O con un punto L di a, distinto da H, si suol chiamare *obliqua* condotta da O alla retta a; L dicesi piede dell'obliqua, e il segmento HL si chiama *proiezione dell' obliqua sulla retta* a.

113. Teor. — *Data una retta e un punto fuori di essa, la perpendicolare abbassata dal punto sulla retta è minore di ogni obliqua condotta dal punto alla retta: e di due oblique l' una è maggiore, uguale o minore dell' altra, secondo che la proiezione della prima è maggiore, uguale o minore della proiezione della seconda.*

Data la retta a e il punto O fuori di essa, sia OH la perpendicolare abbassata da O su a.

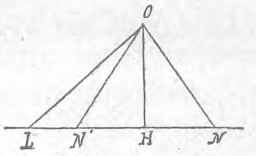
a) Se OL è una qualsiasi obliqua condotta da O alla retta a (vedi fig. al n. prec.) diciamo che OL è maggiore di OH. Infatti il triangolo OHL è rettangolo in H: onde risulta che l' ipotenusa OL, lato opposto all' angolo maggiore, è maggiore del cateto OH, lato opposto all' angolo minore (n. 106).

b) Siano OM, ON due oblique, le cui proiezioni HM, HN, siano uguali. Diciamo che sono uguali.



Infatti i triangoli OMH, ONH, rettangoli in H, hanno perciò uguali i due angoli in H: di più hanno il cateto OH in comune e i cateti HM, HN uguali per ipotesi; onde i due triangoli sono uguali (n. 87) e hanno uguali, in particolare, le ipotenuse OM, ON.

c) Siano in secondo luogo due oblique OL, ON', giacenti entrambi dalla stessa parte della perpendicolare OH.



Diciamo che è maggiore quella obliqua che ha proiezione maggiore, cioè, nel caso della figura, la OL.

Infatti l' angolo $\widehat{ON'L}$, esterno rispetto al triangolo $ON'H$, è maggiore (n. 105) dell' interno opposto $\widehat{OHN'}$, il quale è retto. Perciò l' angolo $\widehat{ON'L}$ è ottuso, e nel triangolo OLN' il lato OL, opposto all' angolo ottuso, è maggiore degli altri due lati, in particolare di ON' (n. 106).

d) Siano, infine, due oblique OL, ON, giacenti da parti opposte della perpendicolare OL, e aventi proiezioni disuguali. Diciamo che è maggiore la OL, avente la proiezione maggiore.

Infatti, essendo $HL > HN$, potremo prendere fra H ed L un punto N' tale che sia $HN' = HN$.

Allora, per il caso *b*), le due oblique ON, ON', aventi proiezioni uguali, saranno uguali.

Ma per quanto si è visto or ora si avrà

$$OL > ON'.$$

Avremo quindi anche

$$OL > ON.$$

114. Def. — Data una retta e un punto fuori di essa, dicesi *distanza del punto della retta* la per-

pendicolare abbassata dal punto sulla retta, od ogni altro segmento uguale a codesta perpendicolare.

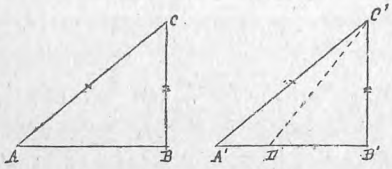
115. Discende di qui la seguente estensione del I° criterio d'uguaglianza pei triangoli rettangoli.

Teor. — *Due triangoli rettangoli aventi rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto sono uguali.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$, rettangoli in B, B' rispettivamente, e tali che sia

$$AC = A'C', \quad BC = B'C'.$$

Diciamo che i due triangoli sono uguali. Basta pel I° criterio di uguaglianza (n. 87) dimostrare che è $AB = A'B'$. Se così non fosse, uno di codesti due segmenti, p. es. $A'B'$, sarebbe maggiore, di modo che fra A' e B' esisterebbe un punto D tale che $B'D = BA$. Condotto $C'D$, i due triangoli ABC, $DB'C'$, che sono rettangoli e hanno i cateti uguali, sono uguali (n. 87), e hanno quindi le ipotenuse AC, DC' uguali. Ma è, per ipotesi, $AC = A'C'$; onde risulta che le oblique $C'A'$, $C'D$ condotte da C alla $A'B'$ ed aventi proiezioni disuguali, sono uguali, il che è impossibile (n. 113).



Abbiamo dunque che veramente è $AB = A'B'$ e che i due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono uguali (n. 87).

116. Segue di qui una risoluzione mediante la riga graduata e la squadra del seguente

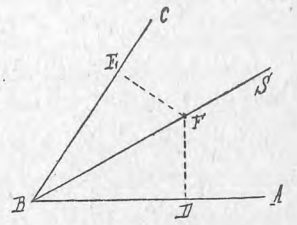
Probl. — *Dividere per metà un angolo.*

Se $\widehat{ABC}$ è l'angolo dato (fig. al n. seg.), si prendano sui due lati, a partire dal vertice, due segmenti

uguali BD, BE, e da D ed E si innalzino le perpendicolari ai due lati BA, BC rispettivamente. Queste due perpendicolari si incontreranno in un punto F; perchè altrimenti sarebbero parallele, e anche le BC, AB, ad esse rispettivamente perpendicolari, sarebbero parallele (nn. 72, 65). Allora la semiretta BF è la *bisettrice* cercata dell'angolo $\widehat{ABC}$, perchè i due triangoli rettangoli BFE, BFD hanno l'ipotenusa BF comune e i cateti BD, BE uguali (n. prec.), cosicchè sono uguali e hanno uguali gli angoli $\widehat{CBS}$, $\widehat{ABS}$.

117. Cor. — *Se un punto di un angolo ha distanze uguali dai due lati, esso si trova sulla bisettrice dell'angolo; e, reciprocamente, tutti i punti della bisettrice sono equidistanti dai due lati.*

In primo luogo, se il punto F ha distanze FE, FD uguali dai due lati dell'angolo $\widehat{ABC}$, i due triangoli FBD, FBE, rettangoli rispettivamente in D ed E, hanno l'ipotenusa comune e i cateti FE, FD uguali, e perciò (n. 115) sono uguali ed è



$$\widehat{ABF} = \widehat{FBC}.$$

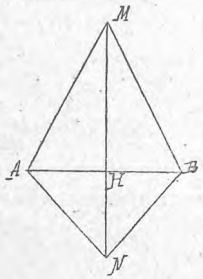
Viceversa, se la BC biseca l'angolo $\widehat{ABC}$, ed F è un suo punto qualsiasi, i due triangoli rettangoli FBD, FBE, ottenuti abbassando da F le perpendicolari sui due lati BA, BC dell'angolo, sono uguali, perchè hanno l'ipotenusa BF comune, e gli angoli $\widehat{DBF}$, $\widehat{EBF}$ uguali (n. 99) onde risulta

$$FD = FE.$$

118. Cor. — *Un punto che abbia uguali distanze dagli estremi di un segmento, si trova sulla perpendicolare al segmento nel suo punto medio* (ASSE *del segmento*); *e, viceversa, ogni punto di codesta perpendicolare ha distanze uguali dagli estremi del segmento.*

In primo luogo il punto M sia tale che

$$AM = BM.$$



Per dimostrare che M si trova sulla perpendicolare ad AB nel suo punto medio, basta mostrare che se si abbassa da M la perpendicolare MH su AB, H dividè per metà il segmento AB.

Abbiamo infatti che i due triangoli rettangoli MHA, MHB hanno le ipotenuse uguali e il cateto HM comune; onde (n. 115) sono uguali, ed è

$$AH = HB.$$

In secondo luogo, sia N un punto della perpendicolare HN condotta al segmento AB nel punto medio. Allora i due triangoli rettangoli AHN, BHN, aventi uguali i cateti, sono uguali (n. 87) ed hanno perciò uguali le ipotenuse NA, NB.

119. Dalla prima parte di quest' ultima dimostrazione risulta che:

In un triangolo isoscele l' altezza (cioè la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base) *divide per metà la base e l'angolo al vertice* (cioè è mediana e bisettrice).

120. Una figura, contenente infiniti punti, si suol dire *luogo geometrico* (o *luogo*) dei punti che godono di una certa proprietà, allorchè:

1) tutti i punti della figura godono della proprietà indicata;

2) ogni punto che gode della proprietà stessa appartiene alla figura suddetta.

Introdotta questa locuzione, le due proposizioni dei nn. 117, 118 si enunceranno nel modo seguente:

a) *Il luogo geometrico dei punti di un angolo equidistanti dai lati, è la bisettrice dell'angolo.*

b) *Il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è l'* asse *del segmento di questi due punti.*

Parallelogrammi.

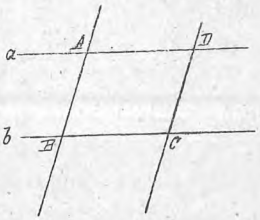
Fra i poligoni ha particolare importanza una classe speciale di quadrangoli di cui ora ci dobbiamo occupare.

121. In un quadrangolo si designano col nome di *opposti* due lati non aventi vertici comuni.

Def. — Un quadrangolo in cui due lati opposti sono paralleli dicesi *trapezio*.

I due lati paralleli diconsi *basi* del trapezio.

122. Date due rette a, b parallele intersecate da una trasversale nei punti A, B rispettivamente, se si conduce per un punto D di a, distinto da A, la parallela alla AB, questa incontra la b in un punto C (n. 69) e si ottiene un quadrangolo $ABCD$, in cui ogni lato è parallelo al lato opposto, e che può quindi conside-



rarsi in due modi come trapezio, prendendo come basi due lati opposti oppure gli altri due.

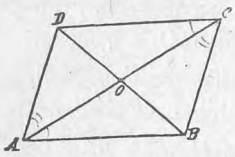
Def. — Ogni quadrangolo in cui i lati opposti sono paralleli dicesi *parallelogramma.*

123. Teor. — *In un parallelogramma:*

1) *gli angoli opposti sono uguali;*

2) *i lati opposti sono uguali;*

3) *le diagonali si bisecano scambievolmente.*



1) Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono uguali, perchè supplementari dello stesso angolo $\widehat{B}$ (n. 71). Analogamente dicasi per $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$.

2) Condotta la diagonale AC, i due triangoli ABC, CDA, col lato AC comune, hanno uguali gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{DCA}$, $\widehat{ACB}$ e $\widehat{CAD}$ come alterni interni rispetto alle parallele AB e DC, BC e AD e alla trasversale AC; essi sono perciò uguali (n. 91) e si ha

$$AB = CD, \quad BC = DA.$$

3) Le due diagonali AC, BD si intersecano in un punto O, perchè B e D cadono da bande opposte rispetto alla retta AD. I due triangoli ABO, CDO, per i quali, come si è ora dimostrato, è $AB = CD$, ed è

$$\widehat{OBA} = \widehat{ODC}, \quad \widehat{BAO} = \widehat{DCO},$$

per il n. 91 sono uguali. Ne risulta

$$AO = CO, \quad BO = DO.$$

124. Nota. — Risulta dalla dimostrazione precedente che: *Un parallelogramma è diviso da ciascuna sua diagonale in due triangoli uguali.*

125. Cor. — *Due parallelogrammi che abbiano rispettivamente uguali due lati consecutivi e l'angolo compreso sono uguali.*

Risulta infatti dal n. prec. che i due parallelogrammi hanno ordinatamente uguali tutti i lati e tutti gli angoli.

Nota. — Segue di qui in qual modo, dato un parallelogramma e un segmento uguale ad uno dei lati di esso, si costruisca su questo segmento, come lato, un parallelogramma uguale al dato.

126. Il teor. del. n. 123 si inverte. Si ottengono così *tre diversi criteri per riconoscere se un quadrangolo è un parallelogramma.*

Teor. — *Un quadrangolo è un parallelogramma:*

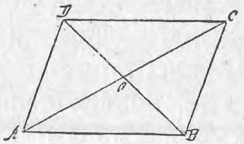
1) *se i lati opposti sono uguali;*

2) *se gli angoli opposti sono uguali;*

3) *se le diagonali si dimezzano scambievolmente.*

1) Nel quadrangolo $ABCD$ i lati AB, BC siano uguali rispettivamente a CD, AD.

Occorre dimostrare che codesti segmenti sono a due a due paralleli. Condotta invero una delle diagonali, p. es. la AC, i due triangoli ABC, CDA sono uguali perchè hanno i tre lati ordinatamente eguali (n. 94). Allora dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DCA}$, alterni interni formati dalle AB, DC colla trasversale AC, e dall'uguaglianza degli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$, alterni interni formati dalle BC,



AD, con la medesima trasversale, concludiamo (n. 64) che le AB, BC sono rispettivamente parallele alle DC, AD.

2) Gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ siano uguali rispettivamente a $\widehat{C}$, $\widehat{D}$.

Si deve provare che, anche in questo caso, i lati opposti AD, BC, e così anche AB, DC, sono paralleli.

Perciò si noti che le somme d'angoli $\widehat{A}+\widehat{B}$ e $\widehat{C}+\widehat{D}$ sono, per le ammesse ipotesi, uguali, e che d'altra parte queste somme, prese insieme, valgono quattro angoli retti (n. 102), onde ciascuna vale due retti. Di qui, in base al n. 64, si conclude che le AD, BC sono parallele. Analogamente per le AB, DC.

3) Se nel quadrangolo $ABCD$ (fig. prec.) il punto O comune alle due diagonali è tale che $AO = OC$, $BO = OD$, i due triangoli ABO, CDO hanno uguali, oltre le coppie di lati or ora accennate, gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ (n. 49), e sono perciò uguali (n. 87). Concludiamo che $AB = CD$.

Analogamente si dimostra che $BC = DA$, onde risulta, per la prima parte del presente teorema, che il quadrangolo è un parallelogramma.

127. Un altro criterio per riconoscere se un quadrangolo è parallelogramma è dato dal seguente

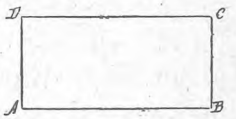
Teor. — *Un quadrangolo è parallelogramma se una delle coppie di lati opposti è costituita da due segmenti uguali e paralleli.*

Nel quadrangolo $ABCD$ i due lati opposti AB, DC siano uguali e paralleli (vedi fig. al n. prec.).

Condotta una delle diagonali, per esempio la AC, i due triangoli ACD, CAB, avendo il lato AC comune, uguali i lati CD, AB per ipotesi e gli angoli $\widehat{DCA}$, $\widehat{BAC}$, come alterni interni rispetto alle parallele DC, AB, e alla trasversale AC, sono uguali (n. 87), e quindi sono uguali i lati AD e CB. Ricadiamo così nel caso 1), del n. prec., onde si conclude che il quadrangolo è un parallelogramma.

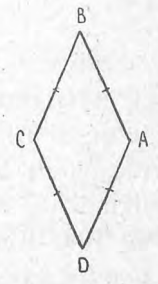
Rettangolo, rombo e quadrato.

128. Se in un parallelogramma $ABCD$ un angolo per es. quello in A, è retto, anche l'opposto, cioè l'angolo in C, che gli è uguale (n. 123), è retto. E gli altri due angoli, in B e D, come supplementari di $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ rispettivamente (n. 71) saranno pur essi retti; cosicchè abbiamo il



Teor. — *Se un parallelogramma ha un angolo retto, ha retti anche gli altri tre.*

129. Similmente dal n. 123 risulta il



Teor. — *Se un parallelogramma ha due lati consecutivi uguali, ha uguali tutti e quattro i lati.*

130. Def. — Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti dicesi *rettangolo*.

Un parallelogramma avente tutti e quattro i lati uguali dicesi *rombo* o *losanga*.

Un parallelogramma avente tutti e quattro gli angoli retti e tutti e quattro i lati uguali dicesi *quadrato*.

Si può costruire un rettangolo dati due suoi lati consecutivi, staccando due segmenti uguali ad essi sopra i lati d'un angolo retto, e mandando per gli estremi le parallele ai lati dell'angolo fino ad incontrarsi.

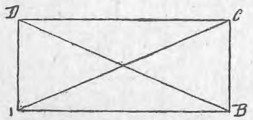
Il rettangolo così determinato dicesi « rettangolo contenuto dai due segmenti » o « rettangolo di essi ».

In particolare il quadrato resta definito, quando ne è dato il lato; il quadrato costruito sopra un segmento, dato come lato, si dice « quadrato di esso ».

131. Dai nn. 126, 128, 129 discende

Teor. *Un quadrangolo equilatero è un rombo; un quadrangolo equiangolo è un rettangolo; un quadrangolo equilatero ed equiangolo è un quadrato.*

132. Un altro semplice criterio per riconoscere se un parallelogramma è o no rettangolo, è dato dai due teoremi seguenti.



Teor. — *Nel rettangolo le diagonali sono uguali.*

Dato un rettangolo $ABCD$, si conducano le due diagonali AC, BD. Allora i due triangoli ABC, BAD rettangoli in B, A rispettivamente, hanno il cateto AB comune e i cateti BC, AD uguali (n. 123). Essi sono quindi uguali (n. 87) ed hanno uguali le ipotenuse AC, BD.

133. Teor. — *Un parallelogramma avente le diagonali uguali è un rettangolo.*

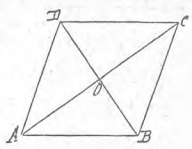
Condotte nel parallelogramma $ABCD$ (fig. del n. prec.) le due diagonali, per ipotesi uguali, i due triangoli ABC, BAD hanno il lato AB comune, $AC = BD$ (per ipotesi), $BC = AD$ (n. 123), onde sono uguali, e $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$. Ma questi angoli sono supplementari (n. 71), onde si conclude che essi sono retti, cioè che $ABCD$ è un rettangolo.

134. Un semplice modo per riconoscere se un

parallelogramma è o no un rombo è dato dai due teoremi seguenti.

Teor. — *Le diagonali del rombo sono fra loro perpendicolari e ne bisecano gli angoli.*

Condotte nel rombo $ABCD$ le due diagonali AC, BD, abbiamo che la AC, congiungente i due punti A, C, equidistanti da B e D è l'asse del segmento BD (n. 118), onde risulta che la CA e la DB sono fra loro perpendicolari. Inoltre i triangoli rettangoli AOB, COB, COD, AOD, aventi a due a due uguali i cateti, sono uguali (n. 87); cosicchè avremo



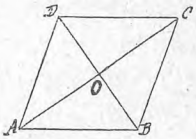
$$\widehat{AB0} = \widehat{CB0},\ \widehat{BC0} = \widehat{DC0},\ \widehat{CD0} = \widehat{AD0},\ \widehat{DA0} = \widehat{BA0}.$$

135. Teor. — *Un parallelogramma è un rombo:*

1) *se le diagonali sono perpendicolari;*

2) *se una diagonale biseca uno degli angoli.*

1) Se nel parallelogramma $ABCD$ le diagonali sono perpendicolari, i triangoli rettangoli BOC, DOC aventi il cateto OC comune e i cateti BO, DO uguali, (n. 123) sono uguali (n. 87) ed hanno uguali le ipotenuse BC, DC: onde risulta che il parallelogramma $ABCD$, avendo due lati consecutivi uguali, è un rombo (nn. 129, 130).



2) Se nel parallelogramma $ABCD$ la diagonale AC biseca l'angolo $\widehat{C}$, ossia se $\widehat{ACB} = \widehat{DCA}$, essendo (per il n. 71) $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$, è anche $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$, e quindi (n. 92) il triangolo ABC è isoscele, cioè $AB = BC$. Il parallelogramma è dunque veramente un rombo (n. 129).

136. Perveniamo ora, in base ai nn. 132-135, ad esprimere semplicemente i criteri per riconoscere se un parallelogramma è un quadrato mediante i seguenti corollari.

Cor. — *Le diagonali del quadrato ne bisecano gli angoli, e sono uguali e perpendicolari fra loro.*

137. Cor. — *Un parallelogramma è un quadrato:*

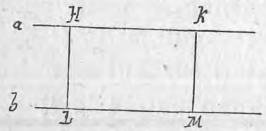
1) *se le diagonali sono uguali e perpendicolari:*

2) *se le diagonali sono uguali, e di una di esse si sa che divide per metà un angolo.*

Distanza di due parallele.

138. Teor. — *Se una retta è parallela ad un'altra, tutti i punti dell'una hanno ugual distanza dall'altra.*

Date le rette a, b parallele, si abbassino da due punti H, K quali si vogliano della prima, le perpendicolari HL, KM alla seconda. Le HL, KM sono parallele fra di loro (n. 65), onde il quadrangolo $HLMK$ è un parallelogramma (rettangolo), ed il segmento HL è uguale al segmento KM (n. 123, 2).



139. Cor. — *Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza uguale ad un segmento dato, è la coppia delle due parallele alla retta data, che giacciono da bande opposte ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato.*

Divisione di un segmento in parti uguali.

140. Al n. 100 abbiamo imparato a dividere un segmento in due parti uguali, e quindi, riapplicando

successivamente la medesima costruzione, in quattro, otto,.... 2^n,...., parti uguali.

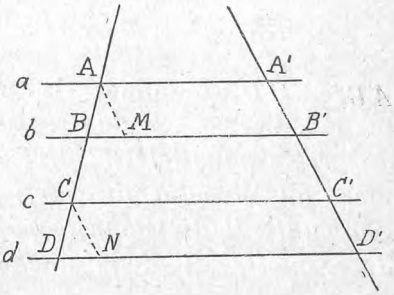
Ora la considerazione delle parallele ci permetterà di giungere alla divisione di un segmento in un numero qualsivoglia di parti uguali, mercè le relazioni che intercedono fra i segmenti che un gruppo di parallele determina sopra due trasversali.

Date più parallele e due trasversali, diremo *corrispondenti* due segmenti di queste, i quali siano intercettati dalle medesime due parallele. Sussiste allora il

141. Teor. *Se più parallele sono segate da due trasversali, a segmenti uguali d'una di queste corrispondono segmenti uguali dell'altra, e a segmenti disuguali segmenti disuguali nello stesso senso.*

Le rette parallele a, b, c, d siano segate da due trasversali rispettivamente nei punti A, B, C, D e A', B', C', D'; e sia per es., $AB = CD$. Diciamo che è

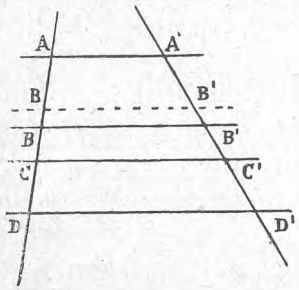
$$A'B' = C'D'.$$



Condotte invero da A, C le parallele alla $D'A'$ fino ad incontrare (n. 69) rispettivamente le BB', DD' nei punti M, N, i due quadrangoli $MB'A'A$, $ND'C'C$ risultano parallelogrammi, onde i segmenti $A'B'$, $C'D'$ sono uguali rispettivamente ad AM, CN (n. 123, 2). D'altra parte nei due triangoli ABM, CDN, aventi i lati AB, CD uguali per ipotesi, sono uguali gli angoli $\widehat{ABM}$, $\widehat{CDN}$, come corrispondenti rispetto alle

parallele b, d e alla trasversale AD, e gli angoli $\widehat{BAM}$, $\widehat{DCN}$ come corrispondenti rispetto alle parallele AM, CN e alla medesima trasversale AD (n. 71). I due triangoli sono perciò uguali (n. 91) ed hanno quindi uguali i lati AM, CN. Se ne conclude che i due segmenti $A'B'$, $C'D'$, uguali a segmenti uguali, sono uguali fra di loro.

Stabilita così la prima parte dell'enunciato, facilmente se ne deduce la seconda. Perchè se invece di essere $AB = CD$, si ha p. es. $AB > CD$, si può staccare da AB un segmento $AB_1 = CD$; e la parallela per B_1, alle a, b, c, d andrà a segare la trasversale $A'D'$ in un punto B_1' interno al segmento $A'B'$, tale che $A'B_1' = C'D'$, e quindi risulterà $A'B' > C'D'$.



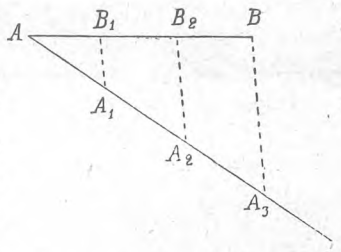
142. Cor. — *Se due segmenti sono compresi fra due rette parallele, e, diviso il primo in un numero qualsivoglia di parti uguali, si conducono pei punti di divisione le parallele alle due rette date, queste dividono anche l'altro segmento in parti uguali.*

143. Come caso particolare della proposizione precedente abbiamo che:

Se, diviso un lato di un triangolo in quante si vogliano parti uguali, si conducono pei punti di divisione le parallele ad un'altro lato, queste dividono il lato rimanente nello stesso numero di parti uguali.

144. La proposizione prec. permette di *dividere un segmento assegnato in un numero dato qualsivoglia di parti uguali.*

Per fissare le idee, proponiamoci di dividere il segmento dato AB in *tre* parti uguali.



Sopra una retta uscente da uno degli estremi, per es. da A, e distinta dalla AB, si portino di seguito tre segmenti AA_1, A_1A_2, A_2A_3 uguali ad un segmento arbitrario e, congiunto A_3 con B, pei punti A_1 e A_2 si conducano le parallele alla retta A_3B, fino ad incontrare (n. 69) la AB nei punti B_1 e B_2.

I tre segmenti AB_1, B_1B_2, B_2B, in cui resta diviso il segmento AB, sono uguali (n. prec.).

La costruzione precedente si può eseguire in innumerevoli modi; ma il risultato è sempre il medesimo perchè il segmento AB_1, terza parte aliquota del segmento AB, è necessariamente unico. Invero, dalle proprietà relative alla somma dei segmenti (nn. 19-28) si deduce facilmente che, dati due segmenti uguali o disuguali, i rispettivi multipli o summultipli secondo lo stesso numero sono rispettivamente uguali o disuguali nello stesso senso.

ESERCIZI

1. Siano A, B, C, tre punti in linea retta e sia M il punto di mezzo di AB. Dimostrare che il segmento CM è uguale alla semisomma o alla semidifferenza dei segmenti CA e CB secondo che il punto C è sul prolungamento di AB o interno al segmento AB.

2. Siano OA, OB, OC tre semirette uscenti da un punto, e OM la bisettrice di $\widehat{AOB}$. Dimostrare che l'angolo $\widehat{COM}$ è uguale alla semisomma o alla semidifferenza degli angoli $\widehat{COA}$, $\widehat{COB}$, secondo che OC è esterna o interna all'angolo $\widehat{AOB}$.

3. Se quattro semirette uscenti da un punto formano quattro angoli consecutivi, tali che il primo sia uguale al terzo e il secondo al quarto, le quattro semirette sono a due a due opposte.

4. Le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

5. Se un raggio di luce è riflesso in un piano da una retta speculare suscettibile di ruotare nel piano intorno al punto di incidenza, quando la retta speculare avrà ruotato di un certo angolo, il raggio riflesso avrà ruotato di un angolo doppio.

6. Se sopra i lati AB, BC, CA di un triangolo equilatero si prendono i tre punti D, E, F per modo che sia $AD = BE = CF$, il triangolo DEF è anch'esso equilatero. (Si confrontino i tre triangoli ADF, BED, CFE).

7. In un triangolo isoscele le mediane relative ai lati uguali (cioè i segmenti congiungenti i punti medi dei lati uguali coi vertici degli angoli opposti) sono uguali.

8. Nel triangolo equilatero le tre mediane (cioè i tre segmenti congiungenti i punti medi dei lati coi vertici opposti) sono uguali.

9. In un triangolo isoscele le biscettrici degli angoli alla base (cioè i segmenti di codeste bisettrici compresi fra i vertici e i lati opposti) sono uguali.

10. In un triangolo isoscele i segmenti delle bisettrici degli angoli sotto la base, compresi fra i vertici e i prolungamenti dei lati opposti, sono uguali.

11. Dato un angolo di vertice O, si prendano su di un lato due segmenti arbitrari OA, OA' e sull'altro lato i segmenti rispettivamente uguali OB, OB'; si congiungano A con B' e A' con B. Dimostrare:

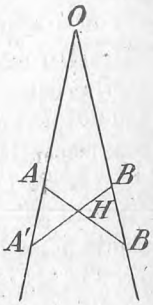
a) che i due segmenti AB', $A'B$ hanno un punto H comune;

b) che $A'B = AB'$;

c) che sono uguali i triangoli $AA'H$, $BB'H$;

d) che $\widehat{BOH} = \widehat{AOH}$;

e) che $\widehat{AHO} = \widehat{OHB}$.



Nota. — Questo esercizio dà luogo ad una costruzione per bisecare un angolo, la quale ove non si disponga di una squadra, nè di un compasso, ma solo di una riga graduata, è assai comoda nei problemi di costruzione.

Def. — Due punti si dicono *simmetrici* rispetto a un punto (*centro di simmetria*) se la loro congiungente è dimezzata da codesto punto.

Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad una retta (asse di simmetria), se appartengono ad una medesima perpendicolare a codesta retta, e ne sono equidistanti.

Due figure si dicono *simmetriche* rispetto ad un punto o ad un asse, se ciascuna è costituita da tutti e soli i punti simmetrici dei punti dell'altra, rispetto al punto o alla retta considerati.

12. Costruire la figura simmetrica di un poligono rispetto ad un punto o ad una retta.

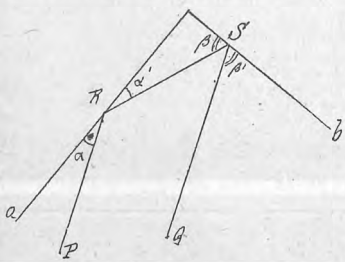
13. Dimostrare che la figura del numero precedente è un poligono uguale al dato.

La uguaglianza è diretta nel primo caso, inversa nel secondo.

14. Date due rette a, b perpendicolari, ed aventi comune il punto O, sia F' la figura simmetrica di una figura F rispetto ad a, e sia F'' la figura simmetrica di F' rispetto a b. Dimostrare che F'' è simmetrica di F rispetto al punto O.

Alla considerazione dei punti simmetrici rispetto a una retta si collegano i seguenti problemi che intervengono nella teoria della riflessione dei raggi luminosi e sonori, e nello studio della deviazione di un punto materiale che urti una superficie elastica (giuoco del bigliardo).

15. Dati, fuori di una retta a, e da una stessa banda rispetto ad essa, due punti B e C, si determini su a un punto X, tale che le due semirette XB, XC formino colle due semirette in cui a è divisa da X due angoli uguali. [Per la costruzione si consideri il simmetrico di uno dei due punti B, C rispetto ad a, e lo si congiunga con l'altro...].



16. Dati entro un angolo $\widehat{ab}$ due punti P, Q, costruire una poligonale $PRSQ$, avente i vertici B, S su a, b rispettivamente, e tale che i due angoli formati da RP, RS con a, siano uguali fra loro, e i due angoli formati da SR, SQ colla b siano pure uguali fra loro.

(Preso il simmetrico P_1 di P rispetto ad a, si cominci col risolvere il problema del numero precedente pei punti P_1, Q e per la retta b).

17. Problema analogo al precedente per il triangolo, pel quadrangolo, pel pentagono....

(Se, dato il triangolo ABC, sono P e Q i termini prefissati della poligonale, si consideri il simmetrico P_1 di P rispetto ad uno dei lati, per es. a BC, e si cominci col risolvere il problema del n. prec. rispetto ai punti P_1, Q e all'angolo $\widehat{A}$.

Così, in ogni caso, il problema or ora proposto per un poligono di un certo numero n di lati si riduce al problema analogo per un poligono ad $n-1$ lati, e, proseguendo, si ricade sul problema del numero prec.).

18. In un triangolo, se si congiunge un punto interno cogli estremi di un lato, l'angolo compreso da codesti due segmenti è maggiore dell'angolo compreso fra gli altri due lati del triangolo. (Si congiunga il punto dato col vertice comune a codesti due lati).

19. In un triangolo, la somma delle distanze di un punto interno da due vertici è minore della somma dei due lati concorrenti nel vertice opposto. (Se ABC è il triangolo e P è il punto interno, congiunto con A e B, si prolunghi, per es. AP fino a incontrare in Q il lato BC, e poi si osservi che $AQ < AC + CQ$, $PB < PQ + QB$ e quindi...).

20. In un triangolo la somma dei tre segmenti, che congiungono un punto interno coi tre vertici è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro. (Congiunto il punto interno P coi tre vertici del triangolo ABC, si osservi per la prima parte che (es. prec.), $PA + PB < AC + BC$, $PB + PC < AC + AB$, $PC + PA < AB + BC$ e quindi.... Per la seconda si ricordi che (n. 107) $PA + PB > AB$, $PB + PC > BC$, $PC + PA > CA$ e quindi...).

21. In un poligono, la somma dei segmenti che congiungono un punto qualsivoglia coi vertici è maggiore del semiperimetro.

22. In un triangolo una *mediana* (segmento congiungente un vertice col punto medio del lato opposto) è minore della semisomma dei lati concorrenti con essa, e maggiore della semidifferenza dei lati medesimi. (Si prolunghi di altrettanto la mediana, e si congiunga l'estremo con uno degli estremi del lato a cui si è condotta la mediana).

23. In ogni quadrilatero il perimetro è maggiore della somma delle diagonali e minore del doppio di codesta somma. (Per la prima parte si osservi che il doppio di ciascuna diagonale è minore del perimetro (n. 107), e quindi...; per la seconda parte si ricordi l'eserc. 21, o si ragioni come nell'eserc. 20).

I seguenti problemi si collegano ordinatamente a quelli dei numeri 15-17.

24. Dati due punti B, C fuori di una retta a, e da una stessa banda di essa, determinare su a un punto tale che la somma delle sue distanze da B e C sia minore della somma analoga relativa ad ogni altro punto di a.

(Cfr. esercizio n. 15).

25. Dato un angolo e due punti interni ad esso, determinare fra le poligonali a tre lati, che hanno come termini i due punti prefissati, e gli altri due vertici sui due lati dell'angolo (poligonali inscritte nell'angolo), quella che ha il perimetro minimo.

(Cfr. esercizio n. 16).

26. Analogo problema per un triangolo, per un quadrilatero, per un pentagono....

(Cfr. esercizio n. 17).

27. Due angoli aventi i lati rispettivamente paralleli sono uguali o supplementari.

28. Due rette parallele segate da una terza formano due angoli coniugati di cui l'uno è i $\frac{3}{7}$ dell'altro. Qual parte di retto è ciascuno degli angoli che fa questa secante colle parallele?

29. Date due coppie di punti A, B, C, D tali che $AB = CD$ trovare un punto O, tale che $OA = OB$, $OC = OD$. Discussione.

30. Dati due segmenti uguali AB, CD (purchè non paralleli e diretti nel medesimo verso) si può sempre trovare un punto O, tale che mediante una rotazione intorno ad O, AB si possa portare a coincidere con CD.

31. In un triangolo isoscele la somma degli angoli sotto la base supera di due retti l'angolo al vertice.

32. La bisettrice e l'altezza condotte da un vertice di un triangolo qualsiasi, formano un angolo uguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo. (Se α, β sono gli altri due angoli, l'angolo che si considera è $= 2$ retti $- \alpha - \beta$ e quindi l'angolo della bisettrice con ciascuno dei due lati sarà...: inoltre gli angoli dell'altezza coi due lati sono uguali rispettivamente a 1 retto $- \alpha$, 1 retto $- \beta$,...) Come si deve modificare l'enunciato se si vuole considerare la bisettrice dell'angolo esterno?

33. In un triangolo isoscele l'angolo che forma colla base la perpendicolare abbassata da un estremo di essa sul lato opposto è uguale alla metà dell'angolo al vertice. (Si abbassi dal vertice la perpendicolare sulla base).

34. In un triangolo rettangolo la differenza degli angoli acuti è uguale all'angolo compreso dall'altezza e dalla mediana relativa all'ipotenusa.

35. Due triangoli ABC, $A'B'C'$ aventi rispettivamente uguali gli angoli e il perimetro sono uguali. (Sui prolungamenti di BC si prendano $BE = BA$, $CF = CA$: eseguite le analoghe costruzioni sull'altro triangolo, i triangoli EAF, $E'A'F'$ sono uguali perchè $\widehat{E} = \frac{1}{2}\widehat{B}$, ecc.).

36. Costruire sopra un segmento dato come base un triangolo isoscele, avente l'angolo al vertice quadruplo dell'angolo alla base. (Quanto vale codesto angolo al vertice? Quanto vale l'angolo delle bisettrici di due angoli di un triangolo equilatero?)

37. Costruire un triangolo rettangolo, date l'ipotenusa e la somma dei cateti. (Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo cercato, rettangolo in B. Prolungato AB di un segmento $BD = BC$, del triangolo ADC si conoscono i lati AD, AC e l'angolo CDA).

38. Costruire un triangolo rettangolo date l'ipotenusa e la differenza dei cateti. (Cfr. esercizio prec.).

39. Costruire un triangolo rettangolo dati il perimetro ed un angolo acuto. (Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo rettangolo in C che ad esso soddisfa. Prolungato BA di $AB = AC$, e AB di $BE = AC$, del triangolo DEC conosciamo il lato DE e gli angoli $\widehat{EDC}$, $\widehat{CDE}$, perchè ecc.).

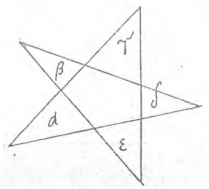
40. Dimostrare che, avuto riguardo agli angoli concavi, ottusi, retti, acuti, si hanno dieci specie di quadrangoli.

41. In ogni quadrangolo convesso: 1° le bisettrici di due angoli consecutivi si tagliano sotto un angolo uguale alla semisomma degli altri due; 2° le bisettrici di due angoli opposti si tagliano sotto un angolo uguale alla semidifferenza dei due altri.

42. Le bisettrici degli angoli di un quadrangolo formano un quadrangolo di cui gli angoli opposti sono supplementari. Se il primo quadrangolo è un parallelogramma, il secondo è un rettangolo le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogramma ed uguali alla loro differenza. Se il primo quadrangolo è un rettangolo, il secondo è un quadrato.

43. In ogni quadrangolo intrecciato, la differenza di due angoli opposti è uguale alla differenza degli altri due.

44. La somma degli angoli acuti α, β, γ, δ, ε di un pentagono stellato è uguale a due retti. Quanto vale la somma degli angoli acuti di un ettagono stellato?

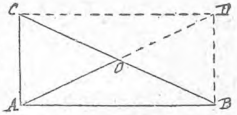


45. Un quadrangolo, in cui le diagonali si dimezzino scambievolmente, è un parallelogramma.

46. Un quadrangolo equilatero è una losanga: un quadrangolo equiangolo è un rettangolo; un quadrangolo equilatero ed equiangolo è un quadrato.

47. In un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici.

[Preso $OD = AO$, si noti che il quadrangolo $ABCD$ è un rettangolo e ha quindi le diagonali uguali; quindi siccome queste si dimezzano scambievolmente ecc.].



48. Un triangolo il cui punto medio di un lato sia equidistante dai vertici è rettangolo, ed ha il lato suddetto come ipotenusa.

49. Condotte in un triangolo isoscele da un punto della base le parallele ai due lati, la somma dei segmenti di queste comprese fra la base e i lati è uguale al lato del triangolo isoscele.

50. Condotte in un triangolo equilatero per un punto interno le parallele ai tre lati, la somma dei segmenti di queste compresi fra i lati è uguale al doppio del lato del triangolo equilatero.

51. Costruire un parallelogramma datine i lati ed una diagonale. (Supposto risoluto il problema, si considerino i due triangoli in cui il parallelogramma è diviso dalla diagonale data).

52. Dimostrare che tutti i parallelogrammi inscritti in un rettangolo, e aventi i lati paralleli alle diagonali di esso, hanno perimetri uguali. (Si dimostri che uno qualsiasi di essi ha perimetro uguale al parallelogramma dato).

53. In un triangolo isoscele, la somma delle distanze di un punto della base dagli altri due lati è costante. (Si confronti codesta somma colla distanza di un estremo della base dal lato opposto).

54. In un triangolo equilatero la somma delle distanze di un punto interno dai tre lati è costante. (Vedi eserc. prec.).

55. Il luogo dei punti che distano di un segmento assegnato da una retta data, e giacciono rispetto ad essa da una banda prefissata, è la parallela alla retta data, che ha da essa una distanza uguale al segmento assegnato e giace dalla banda considerata.

56. Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza uguale ad un segmento dato, è la coppia delle due parallele alla retta data, che giacciono da bande opposte, ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato.

57. Il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza minore di un segmento dato è l'insieme dei punti interni alla striscia compresa fra le due parallele alla retta data, che giacciono da bande opposte, ed hanno da essa una distanza uguale al segmento dato: e il luogo dei punti che hanno dalla retta distanza maggiore del segmento dato è l'insieme dei punti esterni alla striscia or ora indicata.

58. Determinare un punto che abbia da due rette date distanze date. Quante soluzioni si hanno?

59. Il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele è la retta parallela alle prime due ed equidistante da esse (*bisettrice della striscia*).

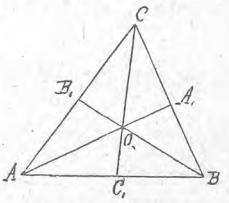
60. Se in un triangolo due lati sono divisi nel medesimo numero di parti uguali, le congiungenti i punti di divisione che, a partire dal vertice comune, occupano ugual posto, sono parallele al terzo lato.

61. Il segmento congiungente i punti di mezzo di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è uguale alla metà di questo.

62. I segmenti che congiungono i punti medi dei lati consecutivi di un quadrangolo formano un parallelogramma, di cui le diagonali si segano nel punto di mezzo del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali del quadrangolo.

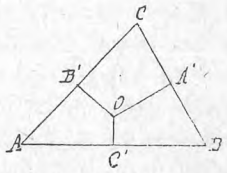
Esaminare sotto quali condizioni il parallelogramma è un rettangolo, una losanga, un quadrato.

63. Le bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto al triangolo, il quale è equidistante dai tre lati. [Si ricordi che la bisettrici di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai due lati (n. 120). Di qui risulta che il punto O, comune alle bisettrici di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, è equidistante dalle rette AB, BC, CA. Ma il luogo dei punti equidistanti dai lati BC e CA è la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$, onde risulta ecc.].

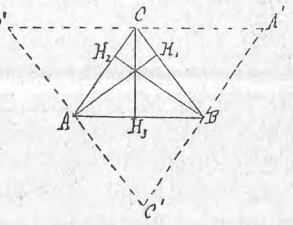


64. Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo, colla bisettrice dell'angolo interno non adiacente, si incontrano in un punto esterno al triangolo pure equidistante dai tre lati. [Cfr. la traccia dell'esercizio prec.].

65. In un triangolo le tre perpendicolari innalzate nei punti medi dei lati si incontrano in un punto equidistante dai tre vertici. [Il punto O, comune agli assi dei due segmenti AB e BC è equidistante da A, B e C. In particolare, O è equidistante da A e C: ma il luogo dei punti equidistanti da A e C è l'asse del segmento AC (n. 120). Dunque ecc.].

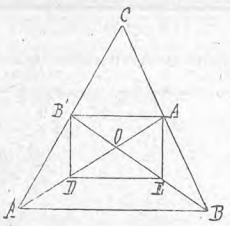


66. In un triangolo le tre altezze passano per uno stesso punto (ortocentro). [Che cosa sono le tre altezze del triangolo dato ABC rispetto al trian-



golo $A'B'C'$ delle tre parallele condotte pei vertici di ABC ai lati opposti?].

67. In un triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto (baricentro), che divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente un estremo nel vertice è doppia dell'altra. [Condotte le due mediane AA', BB', che si incontrino in O, e divisi per metà i segmenti AO, BO in D, E rispettivamente, si conducano i segmenti $B'D$, DE, EA', $A'B'$. I due segmenti $B'A'$, DE come quelli che congiungono i punti di mezzo di due lati dei triangoli ABC, ABO, aventi comune la base AB, sono entrambi paralleli alla AB ed uguali alla metà del segmento AB (eserc. n. 63): essi sono quindi anche paralleli ed uguali fra loro. Allora il quadrangolo $A'B'DE$ è un parallelogramma, ed è $DO = OA'$, $EO = OB'$. Ma $DO = AD$, $EO = BE$; onde risulta $AO = 2OA'$, $BO = 2OB'$. Analogamente si prova che la terza mediana divide una qualsiasi delle altre due, per es. la AA', per modo che la parte avente per estremo A è doppia dell'altra, onde si conclude ecc.].



La riga a due orli (paralleli), oltre l'operazione di congiungere due punti A, B dati ad arbitrio, permette di eseguire la seguente *costruzione fondamentale:*

Condurre da una retta a *la parallela* b, *da una parte assegnata rispetto ad essa, e distante di un segmento uguale alla larghezza* l *della riga* (1).

(1) Per la risoluzione elementare di questi problemi nei casi più semplici cfr. due articoli del prof. C. Marenghi e U. Concina nel *Bollettino di Matematiche* ecc., diretto da A. Conti (Anno II, nn. 5 e 8; 1901).

La riga a due orli si può usare anche ad eseguire un'altra costruzione, cioe: *Dati due punti* A, B *tali che* AB > l, *condurre per* A, B *rispettivamente due rette parallele e distanti fra loro del segmento* l. Usata in codesto modo, la riga a due orli sostituisce completamente il compasso. Cfr. l'articolo di G. Castelnuovo: *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari; contributo della geometria analitica;* nei « Collectanea » di Federigo Enriques.

Colla riga a due orli, usata ad eseguire codesta operazione fondamentale, si può risolvere una gran parte dei problemi risolubili mediante le riga e il compasso, non per altro tutti i problemi che si possono risolvere mediante codesti due strumenti. Fra i problemi risolubili colla riga a due orli, usata come si è detto dianzi, si ha la costruzione dei poligoni regolari costruibili con riga e compasso (cfr. il Cap. seguente). Noi qui ci limiteremo a proporre come esercizio i problemi fondamentali relativi al trasporto nel piano delle figure, e aggiungeremo qualche indicazione sulla via da tenere nella risoluzione. Quando in codesti cenni parleremo di striscie, intenderemo le striscie di larghezza l, che si ottengono mediante la costruzione fondamentale.

Le costruzioni colla riga a due orli si fondano sulle proprietà delle striscie (nn. 138-139 ed eserc. 59, 60, 61) e dei rombi (nn. 134, 135) in quanto la riga a due orli permette di costruire (entro in un angolo acuto qualsiasi) un rombo (di altezza l).

Divideremo gli esercizi in due gruppi dipendenti ciascuno da un problema particolarmente semplice.

Colla riga a due orli:

68. Data una retta a e un punto qualsiasi A fuori di essa, condurre per A la parallela alla a. (Preso su a un punto B ad arbitrio, si costruiscano a partire da AB, e da una stessa parte rispetto ad essa, due striscie contigue, cioè aventi comune un lato e nessun altro punto fuori di questo, e poi, ricorrendo alla considerazione delle diagonali, si completi il parallelogramma contenuto dalle due parallele esterne e dalla a, e che ha per vertice A).

69. Trasportare un segmento AB parallelamente a sè stesso portando l'estremo A in un punto A'. (Condotta per A' la parallela b alla congiungente a di A e B, si determini il punto medio H di $A'B$, ricorrendo alla considerazione del parallelogramma contenuto dalle a, b e dalle due striscie che hanno comune il lato $A'B$; si prolunghi poi la AH, ecc.).

70. Trasportare un angolo parallellamente a sè stesso portando il vertice in un punto prefissato.

Ancora della riga a due orli:

71. Costruire la bisettrice di un angolo. (Si ricordi l' eserc. 11).

72. Ruotare un segmento di un angolo dato intorno ad un suo estremo. (Si bisechi l' angolo, ecc.).

73. Ruotare un angolo intorno al suo vertice, portando un lato a coincidere con una semiretta prefissata pel vertice.

74. Condurre da un punto A la perpendicolare ad una retta a. (Si distinguano due casi a seconda che A appartiene alla a o è esterno ad essa. Se A appartiene alla a, si costrùiscano sulla a due rombi uguali aventi comune il vertice A e un lato per esso, e se ne considerino le diagonali. Poi si applichi il problema precedente).

III.

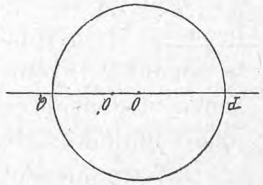
IL CERCHIO

Circonferenza e cerchio.

145. Def. — Il luogo dei punti del piano che hanno da un punto dato O distanze uguali ad un segmento AB dicesi *circonferenza* di *centro* O e *raggio* AB.

Sopra ogni retta per O vi sono, da bande opposte, due punti P, Q della circonferenza (n. 21), e il punto O è punto medio del loro segmento.

Da ciò segue che una circonferenza non può avere due centri O, O', perchè in tal caso il segmento PQ avrebbe due punti medi.



Tutti i segmenti che congiungono O coi singoli punti della circonferenza diconsi genericamente *raggi*. Essi, per definizione, sono uguali.

Ogni segmento passante pel centro di una circonferenza, e avente gli estremi su questa, dicesi *diametro* della circonferenza. Tutti i diametri di una stessa circonferenza sono uguali perchè sono doppi del raggio.

Ogni semiretta uscente dal centro O ha un punto comune colla circonferenza.

146. Nota. — Dalla definizione stessa di circonferenza come luogo, discende che vi è una sola circonferenza la quale abbia un centro dato e passi per un punto dato.

147. Osservazione. — Per generare una circonferenza basta considerare il movimento sul piano di un punto che abbia da un punto fisso una distanza costante.

Nella pratica si usa perciò un COMPASSO, di cui una punta è sostituibile con una matita.

148. Def. — Data una circonferenza di centro O e raggio AB, la figura costituita dai punti della circonferenza e dai punti che hanno da O una distanza minore di AB, dicesi *cerchio* di centro O e raggio AB, o *superficie limitata dalla circonferenza* (contorno).

I punti che hanno da O una distanza minore di AB diconsi *interni*, sia rispetto al cerchio che rispetto alla circonferenza; i punti, la cui distanza da O è maggiore di AB, diconsi *esterni*.

Ogni circonferenza *divide* il piano in *due parti*, la prima delle quali contiene i punti interni (*cerchio*), la seconda i punti esterni. I punti della circonferenza si considerano come comuni alle due parti di piano indicate.

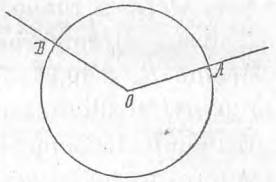
La circonferenza e il cerchio si designano indicandone il centro e il raggio, e, quando non siavi possibilità d'equivoco, indicandone soltanto il centro.

149. Def. — Due cerchi e due circonferenze si dicono *uguali* se hanno raggio uguale.

150. Osservazione. — In armonia col criterio del n. 81, si giustifica codesta definizione, osservando che due cerchi di raggi uguali, tracciati sulla carta, possono sovrapporsi col movimento.

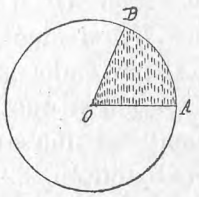
Archi e settori.

151. Dato un cerchio di centro O, ogni angolo convesso o concavo avente il vertice in O dicesi *angolo al cerchio* del cerchio dato.



Questo angolo divide la circonferenza in due *parti*, aventi comuni due punti A e B, l'una interna e l'altra esterna dell'angolo. Codeste due parti diconsi *archi* e i punti A e B loro *estremi*.

Analogamente l'angolo $\widehat{AOB}$ divide il cerchio in due parti che si dicono *settori circolari*.

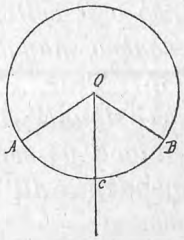


152. Def. — Due archi di una stessa circonferenza o due settori di uno stesso cerchio si dicono *uguali* se sono compresi da angoli al centro uguali.

Per denotare l'uguaglianza di archi o settori di circonferenze o cerchi useremo il segno $=$.

Discende dalla definizione di archi o settori uguali che un diametro divide in due parti uguali tanto la circonferenza quanto il cerchio.

Codeste parti della circonferenza e del cerchio si dicono rispettivamente *semicirconferenze* e *semicerchi*.



153. Probl. *Bisecare un arco dato.*

Dato l'arco AB, si consideri l'angolo che comprende AB. Costruita la bisettrice OC di $\widehat{AOB}$ (n. 117), questa, come interna ad $\widehat{AOB}$, interseca l'arco AB in un punto

interno C, e siccome è $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$ si ha, per definizione, che gli archi AC, CB sono uguali.

Il punto medio C è unico, perchè unica è la bisettrice di $\widehat{AOB}$.

154. Def. — Siano dati due archi AB, BC di una stessa circonferenza, aventi comune soltanto l'estremo B, e nessun altro punto fuori di questo. L'arco AC si dice allora *somma* di AB e BC.

È manifesto come il concetto di somma si possa estendere anche al caso di archi che *si ricoprano* in parte.

Se l'arco AC è somma di due altri AB e BC, il primo si dice *maggiore* di ciascuno di questi, i quali alla loro volta si dicono ciascuno *minore* di AC. Di più l'arco AB si dice *differenza* di AC e BC: così pure BC si dice differenza di AC e AB.

E partendo dal n. 52 si estende poi il concetto di *somma* a due o più archi non consecutivi, appartenenti ad una stessa circonferenza o a circonferenze uguali (cfr. n. 22).

È allora facile dimostrare le seguenti proposizioni:

155. Teor. — *Archi, somme o differenze di archi rispettivamente uguali, sono uguali.*

156. Teor. — *Se in uno stesso cerchio o in cerchi uguali due archi o settori sono disuguali, l'arco o il settore maggiore corrisponde all'angolo al centro maggiore.*

157. Teor. — *Se in uno stesso cerchio o in cerchi uguali due archi o settori corrispondono ad angoli al centro disuguali, l'arco o settore corrispondente all'angolo al centro maggiore è maggiore.*

Diametri, centri e corde.

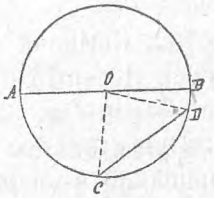
158. Def. — Il segmento congiungente due punti di una circonferenza dicesi *corda* della circonferenza o del cerchio.

I diametri sono corde aventi la particolarità di passare pel centro.

La corda congiungente gli estremi di un arco si dice *sottesa* da esso.

159. Teor. — *Un diametro è maggiore di ogni altra corda*, non passante pel centro.

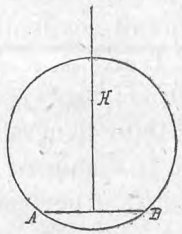
Dati nel cerchio O il diametro AB e la corda CD non passante per il centro, i tre punti C, D, O, determinano un triangolo; e in esso CD è minore della somma degli altri due lati OC, OD (n. 107). Ma i segmenti OC, OD, OA, OB come raggi di uno stesso cerchio sono tutti uguali, onde concludiamo che CD è minore della somma di OA e OB, cioè appunto del diametro AB.



160. Teor. — *In un cerchio la perpendicolare condotta ad una corda nel suo punto di mezzo passa pel centro, cioè è un diametro.*

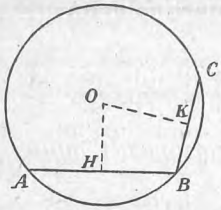
Dato un cerchio e la sua corda AB, diciamo che la perpendicolare innalzata sulla AB dal suo punto medio passa pel centro del cerchio.

Invero codesta perpendicolare è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B (n. 120). Ad essa quindi apparterrà il centro del cerchio, che è equidistante da tutti i punti della circonferenza.



161. Teor. — *Costruire il centro di un cerchio assegnato.*

Si conducano ad arbitrio due corde AB, BC del cerchio aventi un estremo comune, e, determinatine i rispettivi punti di mezzo H, K, si innalzino in essi le perpendicolari. I due diametri che così si ottengono (n. prec.) sono distinti, altrimenti le due rette BA, BC per B sarebbero perpendicolari ad una stessa retta, il che è impossibile (n. 64). Ora i detti diametri passano tutti e due pel centro e perciò si incontrano precisamente in esso.



162. Notiamo, che per costruire nel modo detto dianzi, il centro di un cerchio basta conoscere tre punti della circonferenza.

Allora, se due cerchi hanno tre punti comuni, applicando a codesti tre punti la costruzione indicata, concludiamo che i due cerchi hanno il centro in comune. Ma non v' è che una sola circonferenza la quale abbia un dato centro e passi per un punto prefissato. Possiamo perciò enunciare il

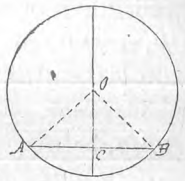
Cor. — *Due circonferenze non possono avere più di due punti in comune senza coincidere.*

163. Il teorema del n. 160 sull'asse di una corda si può invertire in due modi: si ottengono così i due teoremi seguenti.

Teor. — *Il diametro di un cerchio che dimezza una corda è perpendicolare ad essa.*

Dato il cerchio O e una sua corda AB, diciamo che il diametro OC, passante pel punto di mezzo C di AB, è perpendicolare ad AB.

Congiunto, infatti, il punto O con A e B, i triangoli OCA, OCB hanno il lato OC comune, i lati OA, OB uguali per definizione, i lati AC, BC uguali per ipotesi: essi sono quindi uguali e hanno perciò uguali gli angoli $\widehat{OCA}$, $\widehat{OCB}$, i quali sono adiacenti. Si conclude (n. 55) che il diametro OC è perpendicolare alla corda AB.



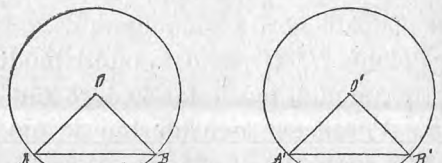
164. Teor. — *Il diametro perpendicolare ad una corda la dimezza.*

Dati il cerchio O e la corda AB, sia OC la perpendicolare abbassata da O su AB (fig. al n. prec.). Diciamo che è $AC = CB$.

Si conducano i raggi OA, OB. I triangoli OAC, OBC, rettangoli per ipotesi in C, hanno il cateto OC comune e le ipotenuse OA, OB uguali per definizione; essi sono perciò uguali (n. 115), onde risulta $AC = CB$.

165. Teor. — *In cerchi uguali o nello stesso cerchio, se due corde sono uguali, gli archi che le sottendono sono uguali, e viceversa.*

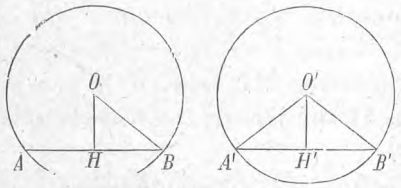
Se le due corde AB, $A'B'$ dei due cerchi uguali O, O', sono uguali, i due triangoli ABO, $A'B'O'$ sono uguali, avendo ordinatamente uguali i lati (n. 94): perciò sono uguali gli angoli al centro $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, e gli archi su cui insistono (n. 152).



Viceversa se sono uguali gli archi AB, $A'B'$, sono uguali gli angoli $A\widehat{OB}$, $A'\widehat{O'B'}$, e quindi i triangoli AOB, $A'O'B'$ (n. 87): onde risulta l'uguaglianza delle corde AB, $A'B'$.

166. Teor. — *In cerchi uguali, o nello stesso cerchio, se due corde sono uguali esse hanno ugual distanza dai rispettivi centri, e viceversa.*

Siano anzitutto AB, $A'B'$ due corde uguali rispettivamente dei cerchi O, O' uguali. Abbassate dai centri O, O' su AB, $A'B'$ rispettivamente le perpendicolari OH, $O'H'$, diciamo che OH, $O'H'$ sono uguali.



Infatti i piedi H, H' di codeste perpendicolari dimezzano le corde uguali AB, $A'B'$ rispettivamente (n. 164), onde sarà $HB = H'B'$. D'altra parte è per ipotesi $OB = O'B'$, cosicchè i due triangoli rettangoli OHB, $O'H'B'$ hanno uguali l'ipotenusa e un cateto. Essi sono perciò uguali (n. 115), e si ha veramente $OH = O'H'$.

Inversamente, siano uguali le distanze OH, $O'H'$ delle corde AB, $A'B'$ dai rispettivi centri. Diciamo che codeste corde sono uguali.

Poichè H, H' sono i punti medi di AB, $A'B'$ rispettivamente, basta far vedere che HB è uguale ad $H'B'$. Perciò si considerino i due triangoli OHB, $O'H'B'$, i quali essendo per costruzione rettangoli in H, H' e avendo per ipotesi uguali i cateti OH, $O'H'$ e le ipotenuse OB, $O'B'$, sono uguali (n. 115), ed hanno quindi uguali i lati HB, $H'B'$.

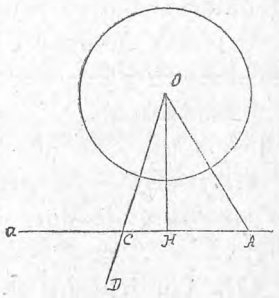
Intersezioni di rette e cerchi.

Una retta non può avere con una circonferenza più di due punti comuni, perchè se ne avesse più di due, i raggi del cerchio passanti per codesti punti darebbero più di due oblique da un punto ad una retta, fra loro uguali, e ciò è assurdo (n. 113). Perciò appaiono possibili tre casi: o che la retta intersechi la circonferenza in due punti, o che abbia con essa un sol punto comune, o che non ne abbia nessuno.

I seguenti criteri ci dimostrano come effettivamente si possano presentare tutti e tre i casi or ora accennati.

167. Teor. — *Se una retta ha dal centro di un cerchio distanza maggiore del raggio, la retta è tutta costituita da punti esterni al cerchio.*

Sia O il centro di un cerchio ed a una retta, tale che la sua distanza OH da O sia maggiore del raggio. Diciamo che ogni punto A della retta a è esterno al cerchio O.



Infatti ogni punto A di a dista da O di un segmento maggiore di OH (n. 113) e quindi anche del raggio, ed è perciò esterno al cerchio.

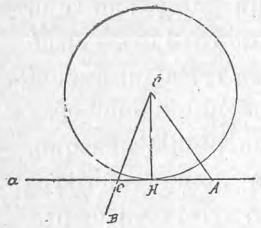
168. Def. — Una retta tutta costituita da punti esterni ad un cerchio si dice *esterna* ad esso.

169. Nota. — Una retta esterna ad un cerchio lo lascia tutto da quella parte dove cade il centro.

170. Teor. — *Se una retta ha dal centro di un*

cerchio distanza uguale al raggio, essa ha comune colla circonferenza un punto ed uno solo, cioè il piede della perpendicolare abbassata dal centro sulla retta, e gli altri suoi punti sono esterni al cerchio.

Sia il cerchio di centro O e sia la retta a, tale che la sua distanza OH da O sia uguale al raggio del cerchio. Ne risulta senz'altro che H appartiene alla circonferenza.



Diciamo che ogni punto A di a, diverso da H, è esterno al cerchio. Preso infatti su a un punto A, diverso da H, l'obliqua OA è maggiore della perpendicolare OH (n. 113), e perciò il punto A è esterno al cerchio.

171. Def. — Una retta avente un sol punto comune con una circonferenza, dicesi *tangente* alla circonferenza o al cerchio.

Il punto comune alla retta e alla circonferenza dicesi *punto di contatto* della tangente.

Osservazione. — Una tangente ad un cerchio O lo lascia tutto da una banda.

172. Cor. — *La perpendicolare ad un raggio di un cerchio nella sua estremità è tangente al cerchio.*

173. Per trattare il caso di una retta, la cui distanza dal centro sia minore del raggio, cominceremo col fare la seguente

Osservazione. — Descritta sul foglio una circonferenza, si segni col lapis, servendosi della riga, il segmento che congiunge un punto interno con un punto esterno al cerchio. Noi vediamo che ad un

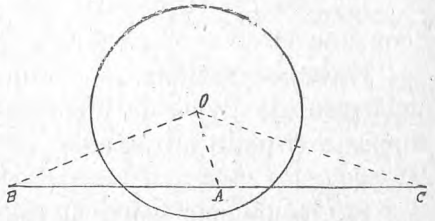
certo istante la punta del lapis traversa la circonferenza e rimane poi esterna ad essa; vediamo cioè che il segmento descritto ha comune con la circonferenza un punto ed uno solo. Enunciamo perciò il seguente.

174. Postulato. — *Il segmento che congiunge un punto interno ed uno esterno ad un cerchio, ha comune con la circonferenza un punto ed uno solo.*

175. Teor. — *Una retta che abbia un punto interno ad un cerchio, interseca la circonferenza in due punti.*

Se la retta passa anche pel centro, si è già notato che essa interseca la circonferenza in due punti (n. 145).

Sia a una retta passante pel punto A interno al dato cerchio O e non passante pel centro. Portati su a, da una parte e dall'altra di A, i segmenti AB, AC uguali al diametro, e congiunto O con B e con C, abbiamo nel triangolo AOB (n. 108)



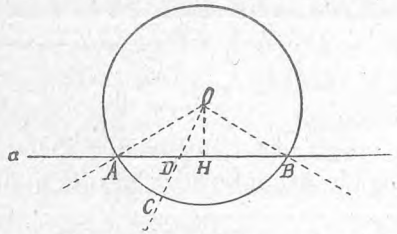
$$OB > BA - OA.$$

Ma essendo AB uguale al diametro, ed OA minore del raggio (n. 148) risulta OB maggiore del raggio del cerchio e, quindi, B esterno ad esso. Analogamente si dimostra che anche C è esterno al cerchio; onde risulta, che ciascuno dei due segmenti AB, AC ha comune colla circonferenza un punto ed

uno solo (numero prec.) e quindi che la retta a interseca la circonferenza O in *due* punti.

176. Ciò premesso possiamo dimostrare il seguente

Teor. — *Se una retta ha dal centro di un cerchio distanza minore del raggio, essa ha comune con la circonferenza due punti.*



Dato il cerchio O, sia a una retta la cui distanza OH da O sia minore del raggio. Il punto H è quindi interno al cerchio O e la a interseca la circonferenza in due punti A, B (n. prec.).

177. Def. — Una retta avente comuni due punti con una circonferenza dicesi *secante*.

178. Osservazione. — I due archi, in cui la circonferenza è divisa da una secante, cadono da bande opposte rispetto ad essa.

179. Indicando con r il raggio del cerchio O e con h la distanza della retta a da O, abbiamo da quanto precede:

Se $h > r$, *la retta* a *è esterna al cerchio* O.
Se $h = r$, *la retta* a *è tangente.*
Se $h < r$, *la retta* a *è secante.*

Di qui risulta che se una retta è esterna ad un cerchio la sua distanza dal cerchio deve essere maggiore del raggio, perchè se fosse uguale o minore di esso la retta sarebbe rispettivamente tangente o secante.

Otteniamo così il teor. del n. 180; e, ragionando analogamente, perveniamo ai teor. dei nn. 181, 183. In tal guisa restano *invertiti* rispettivamente i teor. dei nn. 167, 170, 176.

180. Teor. — *Ogni retta esterna ad un cerchio ha dal centro una distanza maggiore del raggio.*

181. Teor. — *Ogni tangente ad un cerchio ha dal centro distanza uguale al raggio, e quindi è perpendicolare al raggio che va al punto di contatto.*

182. Nota. — Dal teor. del n. prec. e dal n. 56 risulta che *per un punto di una circonferenza passa una sola tangente.*

183. Teor. — *Ogni secante di un cerchio ha dal centro distanza minore del raggio.*

Posizione relativa di due cerchi.

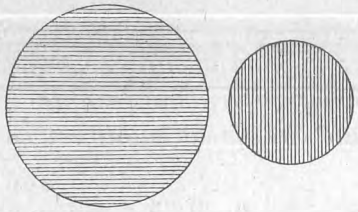
Abbiamo dianzi considerati tutti i casi di intersezione e di posizione relativa di una retta e di una circonferenza. Ora passiamo ad occuparci delle intersezioni e delle posizioni relative di due circonferenze.

Già sappiamo che due circonferenze non possono avere più di due punti comuni (n. 162), e perciò quanto alle loro intersezioni, restano possibili tre casi, cioè che le due circonferenze abbiano comuni due punti, o uno solo, o nessuno.

Per dimostrare che codesti casi si verificano effettivamente tutti e tre e per vedere quando si verifica l'uno piuttosto che l'altro, occorrerebbe una discussione analoga a quella dei nn. 167-178, ma un po' più lunga e difficile.

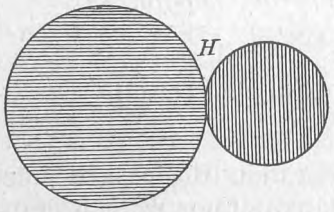
Allo scopo di evitare codesta discussione ricorreremo ad alcune osservazioni dirette sulle figure.

184. Osservazioni. — Ritagliamo due cerchi di carta e posiamoli sul piano.



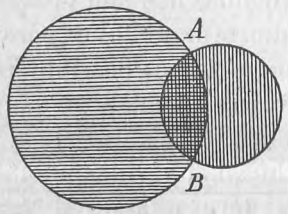
a) Essi possono anzitutto *non avere nessun punto comune* o, come si suol dire, *essere esterni l'uno all'altro.*

Avvicinando i due cerchi possiamo portarli in tale posizione che abbiano comune un solo punto H del contorno e nessun altro all'infuori di questo.



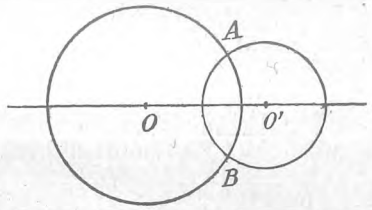
Allora i due cerchi e le due circonferenze si diranno *tangenti fra loro esternamente* nel punto H (punto di contatto).

b) Movendo ancora l'un cerchio verso l'altro avremo dapprima che *essi si ricopriranno fra loro in parte;* ed allora è manifesto che i due contorni, cioè le circonferenze relative si attraversano o, come si suol dire, *si segano l'una con l'altra in due punti* A, B.

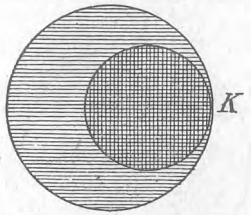


Questi due punti A, B *giacciono da parti opposte della retta* OO′ *che congiunge i due centri.* Infatti se si piega il foglio lungo la retta OO' in modo da far combaciare i due semipiani, le due semicirconferenze da una parte si sovrappongono esattamente alle

altre due e perciò i due punti A, B vanno a coincidere.

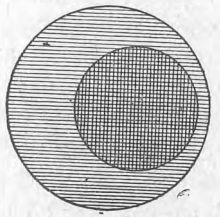


c) Riprendendo i due cerchi possiamo spostarli ancora l'uno verso l'altro finchè il minore sia tutto interno al cerchio maggiore e la circonferenza del primo abbia comune colla circonferenza del secondo un solo punto K.



Allora si dice che il *cerchio* (*e la circonferenza*) *minore è tangente internamente al cerchio* (*e alla circonferenza*) *maggiore* [1].

Da ultimo, spostando ancora un poco il cerchio minore, possiamo far sì che, pur restando il cerchio minore interno all'altro, le due circonferenze non abbiano più alcun punto comune. Allora si dice senz'altro che il cerchio minore è *interno* all'altro.



185. Le osservazioni precedenti ci permettono di concludere che:

Due circonferenze nel piano:

o non hanno punti comuni (e sono l'una esterna all'altra oppure la minore è interna alla maggiore);

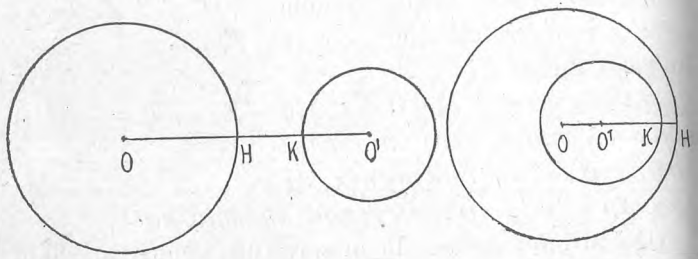
o sono tangenti in un punto (esternamente oppure internamente);

[1] È chiaro che se i due cerchi sono uguali e si portano a toccarsi internamente, si sovrappongono esattamente.

o si segano in due punti situati da parti opposte della retta dei centri.

186. Per le costruzioni che dovremo eseguire in seguito è opportuno aggiungere alcune considerazioni.

Siano due circonferenze O, O', di raggi rispettivamente r, r', e non aventi punti comuni. Allora è



manifesto dalla figura che la distanza OO' dei centri è maggiore della somma dei raggi, se i due cerchi sono l'uno esterno all'altro, perchè

$$OO' = OH + HK + KO' = r + r' + HK,$$

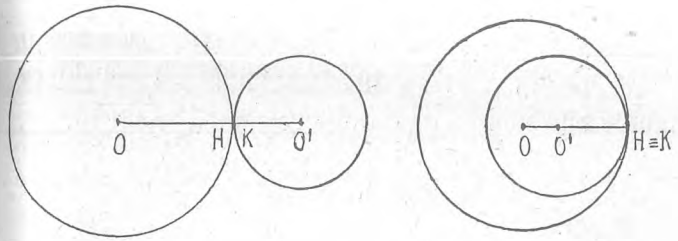
ed è invece minore della differenza dei raggi, se uno dei due cerchi, per es. O', è interno all'altro, perchè allora

$$OO' = OH - O'H = OH - (O'K + KH) = r - r' - KH.$$

Abbiamo cioè il

Teor. — *Se due circonferenze non hanno punti comuni, la distanza dei centri o è maggiore della somma dei raggi o è minore della loro differenza.*

187. Analogamente risulta dalla figura il



Teor. — *Se due circonferenze sono tangenti, la distanza dei centri è uguale alla somma o alla differenza dei raggi.*

E ciò secondo che i due centri sono l'uno esterno all'altro o l'uno interno all'altro.

188. Si considerino infine due circonferenze O, O', aventi comuni due punti A e B (vedi fig. al n. 184, *b*). Questi punti non giacciono sulla retta dei centri, talchè, dal triangolo $OO'A$ ricaviamo, pei nn. 107, 108 che la distanza OO' nei centri è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due lati OA, $O'A$, cioè dei due raggi. Abbiamo cioè il

Teor. — *Se due circonferenze hanno due punti comuni, la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi.*

189. Ora, con ragionamento analogo a quello del n. 179, si deducono, dall'insieme dei tre teoremi dei n. 186, 187, 188, i rispettivi *inversi*. Noi ci limiteremo a invertire il teor. del n. prec., cioè a dimostrare il

Teor. — *Se la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, le due circonferenze hanno co-*

muni due punti (situati da parti opposte della retta dei centri).

Se, infatti, così non fosse, le due circonferenze sarebbero tangenti o non avrebbero punti comuni; e nel primo caso la distanza dei centri sarebbe uguale alla somma o alla differenza dei raggi (n. 187), e nel secondo codesta distanza sarebbe, pel n. 186, o maggiore della somma o minore della differenza dei raggi.

Costruzioni col compasso.

190. Agli strumenti considerati sin qui (riga, riga graduata, squadra) aggiungiamo ora il COMPASSO, di cui una punta mobile si può sostituire con un lapis. Esso permette di effettuare la seguente

Costruzione fondamentale: *Costruire la circonferenza che ha un centro dato e un raggio dato.*

In particolare, il compasso serve, in sostituzione della riga graduata, a *trasportare i segmenti*, in quanto si adopera per tagliare su di una retta data, a partire da un punto di essa e da una banda prefissata rispetto a questo, un segmento uguale ad un segmento dato.

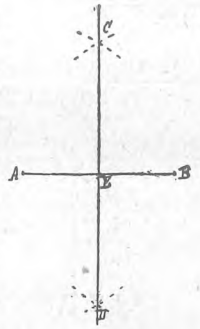
Con la riga e col compasso si risolvono praticamente tutti i problemi incontrati fin qui, e, in particolare, si effettua la costruzione della perpendicolare ottenuta innanzi colla squadra (nn. 57-58).

Cominciamo appunto dal risolvere col compasso e la riga i problemi relativi alla costruzione di perpendicolari.

191. Probl. — *Costruire la perpendicolare ad un segmento dato nel suo punto di mezzo* (asse del segmento).

Si descrivano due circonferenze uguali, di centro

A e B, e di raggio maggiore della metà del dato segmento AB. Poichè la distanza AB dei loro centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza (nulla), le due circonferenze si segano in due punti C, D cadenti da bande opposte rispetto alla AB (n. 189). Diciamo che la CD secante la AB in un punto E, è l' asse del segmento AB.



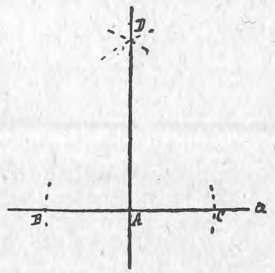
Infatti C e D, poichè le due circonferenze descritte hanno raggi uguali, sono equidistanti dagli estremi del segmento AB, onde (n. 118) appartengono all' asse di questo segmento.

Nota. — La costruzione precedente permette di *bisecare un segmento dato* senza far uso della squadra (cfr. n. 100).

192. Probl. — *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

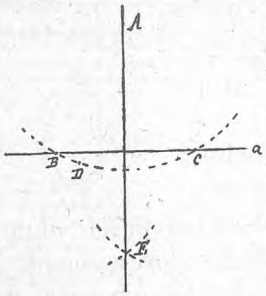
Bisogna distinguere due casi secondo che il punto dato appartiene o no alla retta data.

1) Sia data la retta a e il punto A su di essa. Descritta, centro in A, una circonferenza di raggio arbitrario, questa interseca la a in due punti B, C tali che A è il punto medio del segmento BC. Allora centro in B e in C, si descrivano due circonferenze di raggio uguale ad un segmento maggiore di AB. Codeste due circonferenze si intersecano in un punto D equidistante da B e da C, e in un altro punto dalla parte

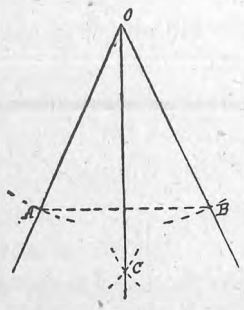


opposta di D rispetto ad a (n. 189). La AD congiungente i due punti A, D equidistanti da B e C, è l'asse del segmento BC (n. 118) cioè è la perpendicolare in A alla BC.

2) Data la retta a e il punto A fuori di essa, si prenda un punto D che cada rispetto alla a da banda opposta di A, e, centro in A, si descriva la circonferenza di raggio AD. Poichè AD è maggiore della distanza di A dalla a, la circonferenza tracciata interseca in due punti B e C la a (n. 176). Le due circonferenze di centri B e C, e di raggio AD, si intersecano oltre che in A in un altro punto E (dalla parte opposta di A rispetto ad a) (n. 189) e la retta AE è perpendicolare alla a.



193. Probl. — *Bisecare un angolo dato.*



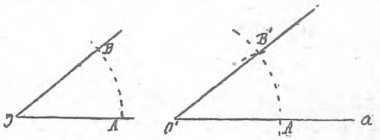
Dato l'angolo $\widehat{O}$, si descriva, centro in O, una circonferenza di raggio arbitrario, la quale intersecherà i due lati di $\widehat{O}$ in due punti A e B.

Facendo centro in A e B, con raggio maggiore della metà di AB, si descrivano due archi di circonferenza, i quali si incontrano in un punto C.

I due triangoli AOC, BOC sono per costruzione uguali, avendo i lati ordinatamente uguali, onde OC è la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ (cfr. il n. 117).

194. Probl. — *Costruire sopra una semiretta data e da una banda assegnata rispetto ad essa, un angolo uguale ad un angolo dato* (trasporto dell'angolo).

Dati la semiretta a' d'origine O' e un angolo di vertice O, con centro in O e raggio arbitrario si descriva un arco che intersechi in A, B i due lati dell'angolo dato. Allora, centro in O', si descriva il cerchio di raggio uguale ad OA, il quale intersechi a' nel punto A', e dal punto A' come centro, e con apertura di compasso uguale ad AB, si tagli sulla circonferenza O' dalla banda prefissata rispetto ad a' la corda $A'B'$. L'angolo $\widehat{A'O'B'}$ è uguale all'angolo dato $\widehat{AOB}$.



Infatti i due triangoli isosceli ABC, $A'B'O'$ hanno uguali per costruzione le basi AB, $A'B'$ e i lati AO, $A'O'$ e quindi sono uguali (n. 94) ed hanno uguali gli angoli al vertice.

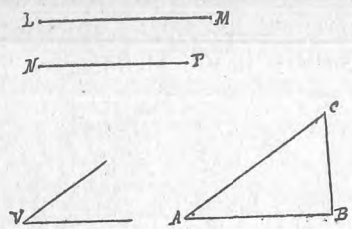
La costruzione or ora indicata permette di *trasportare* un angolo senza ricorrere alla squadra come al n. 88.

195. Poichè due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali sono uguali (n. 87), quando si vorrà costruire un triangolo uguale ad un triangolo dato (*trasportare un triangolo dato*), basterà costruire un triangolo avente due lati e l'angolo compreso uguali ordinatamente a due lati e all'angolo compreso del triangolo dato. Siamo così condotti al seguente

Probl. — *Costruire un triangolo avente due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali a due*

segmenti e ad un angolo dati; ossia, come più brevemente si usa dire: *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso.*

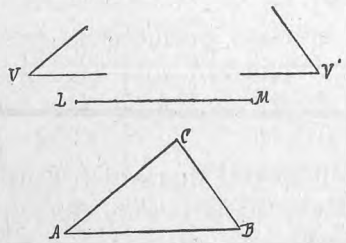
Siano dati i segmenti *LM, NP* e l'angolo $\widehat{V}$.



Costruito un angolo $\widehat{A}$ uguale a $\widehat{V}$, sui lati di questo si prendano i segmenti *AB, AC* eguali ad *LM, NP* rispettivamente. Il triangolo *ABC* soddisfa al problema.

Nota. — Mediante considerazioni analoghe a quelle svolte qui sopra, si vede come i vari criteri d'uguaglianza dei triangoli ci conducano a porre in vari modi il problema di costruzione di un triangolo. Tratteremo i casi seguenti che sono i più importanti.

196. Probl. — *Costruire un triangolo dati un lato e i due angoli adiacenti.*

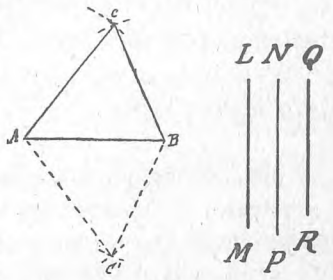


Dati il segmento *LM* e gli angoli $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, per costruire un triangolo avente un lato e i due angoli adiacenti uguali ordinatamente ad *LM*, $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$, si prenda un segmento *AB* uguale ad *LM*, e per *A*, *B* si conducano da una stessa banda rispetto alla *AB*, due semirette le quali formino colle semirette *AB*, *BA* due angoli uguali rispettivamente a $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$. Se codeste due semirette si incontrano in un punto *C*, il triangolo *ABC* soddisfa al problema.

Nota. — Condizione per la risolubilità del precedente problema è, come risulta dal n. 70, che la somma degli angoli dati sia minore di due retti.

197. Prob. — *Costruire un triangolo dati i tre lati.*

Dati i segmenti *LM, NP, QR*, si prenda un segmento *AB* uguale ad uno di essi, per es. ad *LM* e, centro in *A*, *B*, si descrivano le circonferenze di raggi uguali rispettivamente ad *NP, QR*. Se *C* è un punto d'intersezione di codeste due circonferenze, fuori della retta *AB*, il triangolo *ABC* soddisfa manifestamente al problema.



Quanto all'esistenza del punto *C*, osserviamo che se *AB*, distanza dei centri delle due circonferenze descritte, è o maggiore della somma di *NP, QR*, o minore della loro differenza, le due circonferenze non hanno punti comuni, perchè se avessero qualche punto comune la distanza dei centri dovrebbe essere compresa tra la somma dei raggi *NP* e *QR* e la loro differenza oppure uguale a codesta somma o a codesta differenza (nn. 187, 188); perciò non esiste alcun triangolo avente i lati ordinatamente uguali ai tre segmenti dati, d'accordo coi nn. 107, 108.

E pure d'accordo coi numeri citati, se *AB* è uguale alla somma o alla differenza di *NP, QR*, le due circonferenze hanno un sol punto comune (n. 186, 188), appartenente alla retta *AB*, onde, anche in questo caso, non esiste un triangolo avente i lati uguali ordinatamente ai tre segmenti dati.

Se, infine, *AB* è minore della somma e maggiore della differenza di *NP, QR*, le due circonferenze

hanno due punti comuni C, C' da bande opposte rispetto alla AB (n. 189). Allora i due triangoli ABC, ABC' (fra loro inversamente uguali) soddisfano tutti e due al problema.

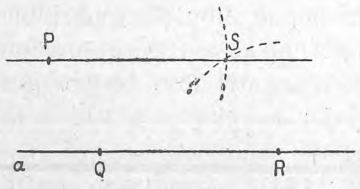
198. Nota. — Risulta in particolare dal numero precedente che esiste un triangolo avente i tre lati uguali ad un qualsiasi segmento dato (*triangolo equilatero*) e, come caso particolare del problema precedente, potremo risolvere il

Probl. — *Costruire un triangolo equilatero di lato dato.*

199. Diamo qui infine un'altra costruzione del seguente

Probl. — *Condurre da un punto* P *la parallela ad una retta data.*

Presi sulla a due punti ad arbitrio Q, R, si descriva la circonferenza di centro P e raggio uguale a QR. Siccome nel triangolo PQR il lato PR è minore della somma degli altri due lati PQ e QR, e maggiore della loro differenza (nn. 107, 108), la circonferenza di centro R e raggio uguale a QP intersecherà in due punti la prima circonferenza da noi tracciata (n. 189). Questi due punti cadranno da bande opposte della PR. Se S è quello che cade dalla banda opposta di Q, la PS è la parallela cercata.

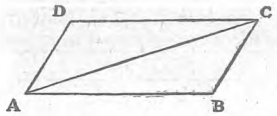


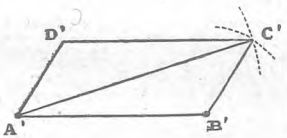
Infatti il quadrangolo $PQRS$ ha, per costruzione, i lati opposti PQ, SR e PS, QR uguali, e perciò è un parallelogramma (n. 126, 1): onde risulta che le rette PS, QR sono parallele.

200. Una costruzione analoga conduce a risolvere il seguente

Probl. — *Dati un parallelogramma e un segmento uguale ad un suo lato, costruire su questo un parallelogramma uguale al dato.*

Se $ABCD$ è il parallelogramma dato ed è $A'B' = AB$,





si descrivano, centro in B', il cerchio di raggio BC, e, centro in A', il cerchio di raggio AC; siccome nel triangolo ABC è

$$AC - BC < AB < AC + BC,$$

le due circonferenze descritte hanno la distanza dei centri maggiore della differenza dei due raggi e minore della loro somma, e perciò si intersecano in due punti (n. 189). Se C' è uno di questi, si congiunga B' con C', e si conducano da C' la parallela a $B'A'$, da A' la parallela a $B'C'$ fino ad incontrarsi in D'. Si ottiene così un parallelogramma $A'B'C'D'$, che diciamo essere uguale ad $ABCD$.

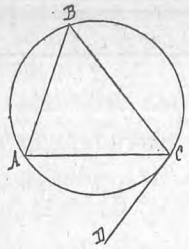
Condotte invero le AC, $A'C'$, si ha $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, onde risulta che sono uguali i triangoli ABC, $A'B'C'$ (n. 94) e quindi in particolare gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$: e i due parallelogrammi, avendo uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 125).

Angoli nel cerchio.

201. Def. — Dato un arco di circonferenza, ogni angolo avente il vertice in un punto interno all'arco

e i lati passanti per gli estremi di esso, dicesi *angolo alla circonferenza iscritto nel dato arco.*

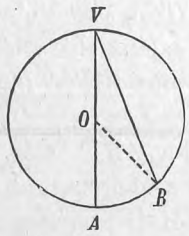
Codesta definizione si generalizza, chiamando angolo alla circonferenza, iscritto nell'arco dato CBA, anche l'angolo formato dalla corda CA e dalla semiretta tangente al cerchio in uno degli estremi di essa, per es. in C, e giacente rispetto alla corda da banda opposta dell'arco considerato. Così si dirà iscritto nell'arco CBA tanto l'angolo $\widehat{ABC}$ quanto l'angolo $\widehat{ACD}$.



202. Un angolo alla circonferenza, iscritto in un dato arco, comprende fra i suoi lati l'altro arco di circonferenza avente i medesimi estremi; dell'angolo dato si dice che *insiste* su questo secondo arco.

203. Teor. — *Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sul medesimo arco.*

Esaminiamo i vari casi possibili.



1° Dato l'angolo $\widehat{AVB}$ alla circonferenza, di cui il lato AV passi pel centro O, consideriamo l'angolo al centro corrispondente $\widehat{AOB}$. Essendo quest'ultimo angolo esterno rispetto al triangolo OVB, abbiamo (n. 95),

$$\widehat{AOB} = \widehat{AVB} + \widehat{VBO};$$

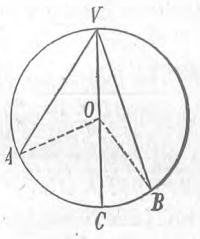
ma nel triangolo OVB, isoscele sulla base VB, è

$$\widehat{AVB} = \widehat{VBO},$$

onde risulta:

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

2° Se l'angolo $\widehat{AVB}$ ha i due lati da parti opposte rispetto al diametro VO, si avrà, congiungendo A e B con O,

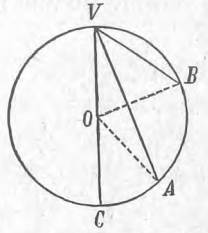


$$\widehat{AOC} = 2\widehat{AVC}, \quad \widehat{COB} = 2\widehat{CVB},$$

e, sommando membro a membro,

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

3° Similmente, se i due lati cadono dalla stessa banda rispetto al diametro VC pel vertice, avremo:



$$\widehat{COB} = 2\widehat{CVB}, \quad \widehat{COA} = 2\widehat{CVA}$$

e sottraendo membro a membro,

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AVB}.$$

Il teorema vale anche nel caso in cui uno dei lati dell'angolo alla circonferenza sia tangente a questa: lasciamo al lettore la dimostrazione come esercizio.

204. Cor. — *Tutti gli angoli iscritti in archi uguali, o in uno stesso arco, sono uguali.*

Infatti sono uguali alla metà del medesimo angolo o di due angoli al centro uguali.

205. Cor. — *In uno stesso cerchio o in cerchi uguali, angoli alla circonferenza uguali insistono su archi uguali.*

Infatti i corrispondenti angoli al centro essendo uguali comprendono archi uguali (n. 152).

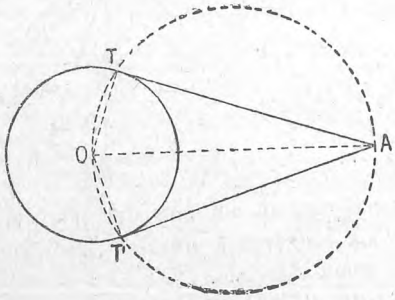
206. Cor. — *Ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retta.*

Infatti l'angolo al centro corrispondente è un angolo piatto.

207. Come applicazione della precedente proposizione possiamo risolvere il

Probl. — *Dato un cerchio, condurre da un punto esterno le tangenti ad esso.*

Se O è il cerchio dato e A è il dato punto esterno, si descriva la circonferenza che ha per diametro il segmento OA. Se T, T' sono le intersezioni di essa con la circonferenza data, le rette AT, AT' sono le tangenti cercate, perchè ciascuno degli angoli $\widehat{ATO}$, $\widehat{AT'O}$, come iscritto in una semicirconferenza, è retto, e sappiamo che la perpendicolare ad un raggio nel suo estremo è tangente al cerchio (n. 172).



208. Dall' uguaglianza dei triangoli OAT, OAT', risulta senz' altro il seguente

Cor. — *Condotte ad un cerchio da un punto esterno le due tangenti, i segmenti di esse, compresi fra il punto esterno e i punti di contatto, sono uguali.*

Poligoni regolari.

209. Def. — Un poligono (o una poligonale) si dice *iscritto* in un cerchio, se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza; la circonferenza in tal caso si dice *circoscritta* al poligono (o alla poligonale).

Un poligono (o una poligonale) si dice *circoscritto* ad un cerchio, se tutti i suoi lati sono tangenti al cerchio; questo si dice *iscritto* al poligono (o alla poligonale).

210. Def. — Un poligono si dice *regolare* se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

Similmente si dice *regolare* una poligonale se ha uguali tutti i lati e tutti gli angoli.

Come esempi di poligoni regolari abbiamo già incontrato il triangolo equilatero e il quadrato.

211. Nota. — Giova avvertire come nella definizione di poligono regolare le due condizioni che il poligono sia equilatero ed equiangolo sono entrambe necessarie.

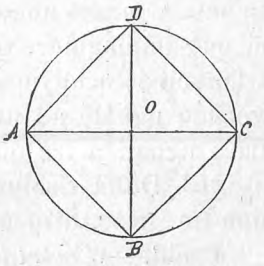
Infatti vi sono poligoni equiangoli, ma non equilateri: e poligoni equilateri, ma non equiangoli.

Così tutti i rettangoli sono equiangoli, ma solo il quadrato è anche equilatero: tutti i rombi sono equi lateri, ma solo il quadrato è anche equiangolo.

Diamo qui anzitutto le costruzioni di alcuni particolari poligoni regolari.

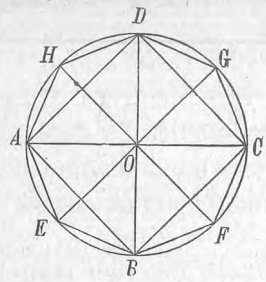
212. Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un quadrato.*

Sulla circonferenza data si assegni ad arbitrio un punto A, come vertice del quadrato, e si conducano il diametro AC passante per A e il diametro BD perpendicolare al primo. I quattro archi AB, BC, CD, DA sono uguali perchè corrispondono ad angoli al centro uguali (n. 152): sono quindi uguali le corde sottese (n. 165), e il quadrangolo $ABCD$ è un parallelogramma (n. 126). Poichè esso ha le



diagonali uguali e perpendicolari, è un quadrato (n. 137).

213. Iscritto nel cerchio dato O il quadrato $ABCD$, si conducano per O i due diametri EG, FH che bisecano gli angoli retti, formati dai due diametri AC, BD. Si ottengono così, intorno al punto O, otto angoli uguali, ai quali corrispondono sulla circonferenza otto archi uguali (n. 152). Ne discende che l'ottagono $AEB...H$ ha i lati uguali (n. 165). Siccome poi gli archi AEB, EBF,... HAE, come doppi di archi uguali sono uguali, concludiamo che gli angoli dell'ottagono $AEB...H$ sono uguali (n. 204) e l'ottagono è regolare.



Abbiamo così iscritto nel cerchio dato un *ottagono regolare*, e, similmente, potremo iscrivere in esso *un poligono regolare* a 16, 32, ..., 2^n,... lati.

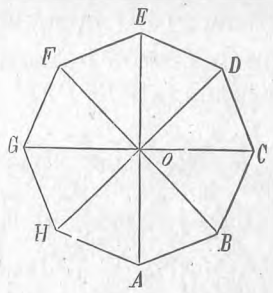
214. — Nota. — Il quadrato $ABCD$ si può immaginare ottenuto costruendo l'uno accanto all'altro intorno ad O i quattro triangoli isosceli uguali ABO, BCO, CDO, DAO, aventi l'angolo al vertice uguale ad un angolo retto e, quindi, gli angoli alla base uguali a mezzo angolo retto. Così l'ottagono $AEB...H$ si può immaginare ottenuto come l'insieme di otto triangoli isosceli uguali ad AEO, aventi l'angolo al vertice uguale ad un mezzo retto e gli angoli alla base uguali a tre quarti di retto. E così via.

215. Dalla risoluzione del problema trattato nei due nn. prec. discende la risoluzione del seguente

Probl. — *Costruire sopra un segmento dato come lato un poligono regolare a* 4, 8, 16,.. 2^n,.. *lati.*

Il caso del quadrato non richiede ulteriore spiegazione.

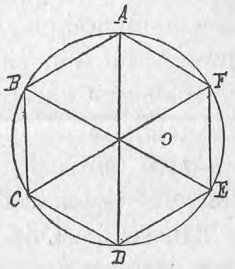
Occupiamoci dell'ottagono. Perciò si costruisca sul segmento dato AB, come base, un triangolo isoscele ABO, avente gli angoli alla base uguali ciascuno a tre quarti di retto (p. es. all'angolo $\widehat{OAE}$ della figura del n. prec.) e, quindi l'angolo al vertice uguale a un mezzo retto (n. 96): e poi da O si conducano le semirette OC, OD tali che gli angoli $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ siano uguali ad $\widehat{AOB}$, e si prolunghino i segmenti AO e BO. Infine su ciascuna delle sei semirette così ottenute, si prendano, a partire da O, i segmenti OC, OD,..., OH uguali ad OA, e si conducano i segmenti BC, CD,..., GH, HA. L'ottagono $ABC....H$, che così si ottiene ha manifestamente uguali tutti i lati e tutti gli angoli, ed è quindi regolare.



Analogamente si procede per costruire sopra un lato dato un poligono regolare a 16, 32..., 2^n,... lati.

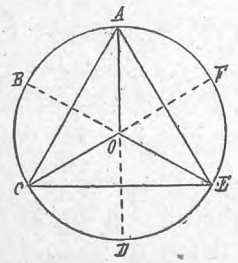
216. Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un esagono regolare.*

Dato il cerchio O, supponiamo già risoluto il problema; e sia $ABCDEF$ l'esagono cercato. Congiunti i vertici col centro O, ciascuno dei triangoli isosceli OAB, OBC,..., OFA ha gli angoli alla base uguali a due terzi di retto, ed è quindi equiangolo (n. 96)



ed equilatero (n. 92), onde risulta che il lato AB dell'esagono è eguale al raggio del cerchio.

Dunque per iscrivere nella circonferenza data O un esagono regolare, basta da un suo qualsiasi punto A (preso ad arbitrio come vertice) condurre le due corde AB, AF uguali al raggio, e dall'altro estremo D del diametro passante per A condurre le altre due corde DC, DE uguali esse pure al raggio, e l'esagono $ABCDEF$ che così risulta è regolare.



217. Cor. — *Il lato dell'esagono regolare iscritto in un cerchio è uguale al raggio.*

218. Divisa una data circonferenza in sei parti uguali AB, BC, CD, DE, EF, FA a partire dal punto A assegnato ad arbitrio, gli archi AC, CE, EA, doppi di archi uguali, saranno uguali, e il triangolo ACE sarà un triangolo equilatero. Resta così risoluto il

Probl. — *Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero.*

219. Iscritto in una circonferenza O un esagono regolare $ABCDEF$ (fig. al n. 216) si conducano i tre diametri che bisecano gli angoli al centro, formati dai diametri AD, BE, CF. Si divide così la circonferenza in dodici archi uguali, le cui corde determinano un dodecagono che si dimostra, come al n. 213, esser *regolare*.

Analogamente con successive bisezioni di angoli al centro potremo *iscrivere nel cerchio dato un poligono regolare di* 24, 48,... $3 \cdot 2^n$,... *lati*.

220. In base ad osservazioni analoghe a quelle del n. 215 si risolva come esercizio il seguente

Probl. — *Costruire sopra un segmento dato come lato un poligono regolare a* 3, 6, 12,... $3 \cdot 2^n$,... *lati.*

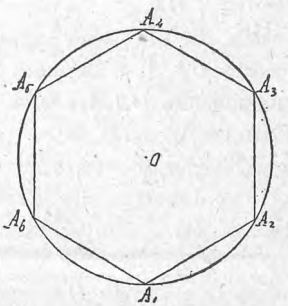
Avvertenza. — Apprenderemo più avanti a costruire anche tutti i poligoni regolari, il cui numero di lati è

5, 10, 20,... $5 \cdot 2^n$,...
15, 30, 60,... $15 \cdot 2^n$,...

221. Risulta dai nn. prec. che quando si iscrivono in un cerchio un triangolo regolare, o un quadrato, o un esagono regolare, la circonferenza resta divisa rispettivamente in tre, quattro, sei parti uguali. Ora sussiste in generale il seguente

Teor. — *Se una circonferenza è divisa in un certo numero di archi uguali, il poligono iscritto che ha per vertici gli estremi di codesti archi* (nell'ordine in cui si susseguono sulla circonferenza) *è regolare.*

La circonferenza O sia divisa, per fissare le idee, in sei archi uguali A_1A_2, A_2A_3,... A_5A_6, A_6A_1. Diciamo che il poligono $A_1A_2 \ldots A_6$ è regolare.



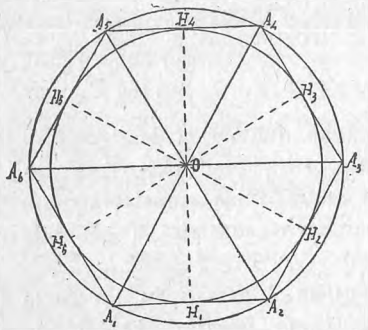
Infatti i lati sono uguali, come corde, sottese da archi uguali (n. 165), e di più, poichè sono uguali gli archi A_1A_3, A_2A_4,...., A_5A_1, A_6A_2 come doppi di archi uguali, saranno pure uguali gli angoli in essi rispettivamente iscritti $A_1\widehat{A_2}A_3$, $A_2\widehat{A_3}A_4$, $A_5\widehat{A_6}A_1$, $A_6\widehat{A_1}A_2$ (n. 204).

222. Si dimostra parimenti che è regolare il poligono circoscritto avente per lati le tangenti al cerchio nei punti di divisione. Lasciamo all'alunno la dimostrazione.

223. Teor. — *Ad ogni poligono regolare si può circoscrivere una circonferenza.*

Sia, per fissare le idee, l'esagono regolare $A_1A_2 \ldots A_6$. Sarà

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_6A_1,$$
$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \ldots = \widehat{A_6}.$$



Le bisettrici di due angoli consecutivi, p. es. di $\widehat{A_1}$ e $\widehat{A_2}$, si incontreranno in un punto O, perchè ciascuno degli angoli $\widehat{A_1}$ e $\widehat{A_2}$ è certamente minore di due retti (n. 96) e perciò la somma delle loro metà sarà minore di due retti (n. 70).

Ora nel triangolo OA_1A_2, essendo uguali gli angoli $O\widehat{A_1}A_2$, $O\widehat{A_2}A_1$, come metà di angoli uguali, saranno pure uguali i lati OA_1, OA_2. Inoltre i due triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, avendo il lato OA_2 comune, i lati A_1A_2, A_2A_3 uguali e gli angoli $O\widehat{A_2}A_1$, $O\widehat{A_2}A_3$ uguali, sono uguali (n. 87); onde risulta l'uguaglianza dei lati OA_2, OA_3.

Ma di più sono uguali gli angoli $O\widehat{A_1}A_2$, $O\widehat{A_3}A_2$; e siccome $O\widehat{A_1}A_2$ è la metà di $\widehat{A_1}$ ed $\widehat{A_1}$ è uguale ad $\widehat{A_3}$, si conclude che $O\widehat{A_3}A_2$ è la metà di $\widehat{A_3}$, cioè che OA_3 è la bisettrice di $\widehat{A_3}$.

Allora, ragionando su OA_2, OA_3, come dianzi su OA_1, OA_2, si dimostra che anchè OA_4 è uguale ad OA_1, OA_2, OA_3, e così continuando si conclude che i punti A_1, A_2,... A_6, sono equidistanti da O, ossia che la circonferenza di centro O e raggio OA_1 passa per tutti i vertici del poligono.

224. Il centro e il raggio del cerchio circoscritto ad un poligono regolare si dicono rispettivamente *centro* e *raggio* del poligono.

225. Proponiamo di dimostrare come esercizio che *ad ogni poligono regolare si può iscrivere sempre un cerchio il cui centro coincide col centro del cerchio circoscritto.*

Il raggio del cerchio iscritto in un poligono regolare si dice *apotema.*

226. Risulta dai teoremi dei nn. prec. che il problema di *iscrivere in un dato cerchio un poligono di* n *lati* equivale al problema *di dividere la circonferenza data in* n *parti uguali.*

Di più risulta che congiungendo il centro di un poligono regolare ad n lati cogli n suoi vertici, si divide il poligono in n triangoli isosceli uguali, il cui angolo al vertice è dato dall'n^{ma} parte di quattro retti.

ESERCIZI

1. I punti simmetrici di un punto P rispetto alle rette uscenti dal punto O, appartengono alla circonferenza di centro O e raggio OP. [Due punti simmetrici rispetto ad una retta per O sono equidistanti da O].

2. Due corde di un cerchio che si dimezzino scambievolmente sono due diametri. [Se il loro punto comune non fosse il centro, la congiungente di esso col centro sarebbe....].

3. Luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti.

4. Costruire un cerchio di dato centro che tagli sopra una retta un segmento assegnato.

5. Fra tutte le corde che passano per un punto interno ad un cerchio, quella che è perpendicolare al diametro passante per quel punto è la minima.

6. Se una retta incontra due circonferenze concentriche, i segmenti di essa compresi fra queste sono eguali.

7. Il diametro perpendicolare ad una corda biseca l'arco che la sottende.

8. Se due seganti di un cerchio sono parallele, gli archi compresi nella striscia sono uguali.

9. Le congiungenti gli estremi di due corde parallele e non uguali di una stessa circonferenza, si intersecano sul diametro perpendicolare alle due corde.

Def. — Se due circonferenze si segano in un punto, le tangenti in esso formano quattro angoli; quello fra questi

che contiene la superficie comune ai due cerchi (fuso) dicesi *angolo* delle due circonferenze.

10. I due angoli di due circonferenze secantisi sono uguali. (Simmetria rispetto alla retta dei centri).

11. Determinare un punto che abbia da un punto e da una retta dati distanze prefissate. Discussione.

12. Costruire un triangolo conoscendone la base, l'altezza e la mediana relativa alla base.

13. Se un segmento si muove parallelamente a sè stesso in modo che un suo estremo percorra una circonferenza, qual è il luogo descritto dall'altro estremo? [Dal centro della circonferenza si conduca il segmento uguale e parallelo al dato, e si congiunga il secondo estremo di questo segmento col secondo estremo del segmento mobile].

14. Costruire un triangolo, dati un lato, un angolo adiacente a questo e l'una o l'altra delle mediane uscenti dai vertici degli altri due angoli.

15. Condurre per un punto una retta la quale abbia una distanza data da un altro punto prefissato.

16. Luogo dei centri dei cerchi iscritti in un angolo (tangenti ai lati dell'angolo).

17. Costruire un triangolo dati due lati e l'altezza relativa al terzo lato.

18. Costruire un triangolo dati un lato e l'altezza corrispondente ad un altro lato. Discussione.

19. Determinare il centro del cerchio tangente ai tre lati di un triangolo ed interno ad esso (cerchio iscritto). (Vedi esercizio n. 16).

20. Determinare il luogo dei punti medi delle corde di una data circonferenza.

21. Determinare il luogo dei punti tali che le tangenti condotte da essi ad una circonferenza data sieno uguali ad un dato segmento.

22. Qual'è il luogo dei punti per cui codeste tangenti

riescono maggiori del segmento dato? e quale quello per cui sono minori?

23. Dati un cerchio e un punto non appartenente alla circonferenza, si considerino i segmenti che vanno dal punto prefissato ai punti della circonferenza. Fra codesti segmenti:

1° quello il cui prolungamento passa pel centro è minimo, e quello che passa pel centro è massimo;

2° Due segmenti sono uguali se i loro estremi sulla circonferenza insieme con l'estremo del segmento minimo *(o massimo)* definiscono archi uguali;

3° Due segmenti sono disuguali se i loro estremi insieme con l'estremo del segmento minimo *(o massimo)* danno archi (minori di una semicirconferenza) disuguali, e precisamente è maggiore quello il cui estremo dà con l'estremo del segmento minimo l'arco maggiore.

Def. — Il minimo dei segmenti condotti da un punto ad una circonferenza si dice *distanza* del punto dalla circonferenza.

24. Luogo dei punti che hanno da una circonferenza data una distanza data. Discussione. (Vedi eserc. prec.).

25. Sopra una retta data trovare i punti che distano di un dato segmento da una circonferenza fissata. Discussione.

26. Determinare i punti del piano dai quali le tangenti condotte a due circonferenze date sono uguali ad un dato segmento. Discussione.

27. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti ad una circonferenza data in un punto dato.

28. Costruire un cerchio di raggio dato tangente in un punto assegnato ad un cerchio dato. Discutere le soluzioni.

29. Costruire un cerchio tangente in un dato punto ad un dato cerchio e che passi per un punto prefissato. Discussione.

30. Luogo dei centri dei cerchi di dato raggio tangenti (internamente od esternamente) ad un cerchio dato.

31. Sopra una retta, o sopra una circonferenza data, determinare i punti che sono centri di cerchi di raggio dato e tangenti ad una data circonferenza. Discussione.

32. Costruire un cerchio di raggio dato, tangente a due cerchi dati. Discussione. (Quali sono le distanze del centro del cerchio cercato dai centri dei due cerchi dati? Cfr. es. 24).

33. In ogni quadrangolo circoscritto ad un cerchio la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due. (Si ricordi il Cor. n. 208).

34. Se in un quadrangolo la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, in esso si può iscrivere un cerchio.

(Si considerino due lati AB, AD consecutivi; la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ da essi formato incontra uno almeno (p. es. BC), dei rimanenti lati. Si provi che vi è un cerchio tangente ai tre lati AB, AD, BC così scelti, ed interno al triangolo da essi formato; poi si ragioni per assurdo).

35. Il segmento di una tangente ad un cerchio intercetto dalle tangenti per gli estremi di un diametro viene veduto dal centro secondo un angolo retto.

36. Condurre le tangenti comuni a due cerchi. (Se O, O' sono i centri delle due circonferenze supposte disuguali, si descrivano dal centro del cerchio minore le circonferenze che hanno per raggio la somma e la differenza dei raggi dei due cerchi dati, e si conducano dall'altro centro le tangenti ai cerchi or ora descritti. Come sono le tangenti comuni ai due cerchi dati rispetto alle tangenti or ora costruite?)

37. In ogni quadrangolo iscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari. [Si considerino gli angoli al centro corrispondenti].

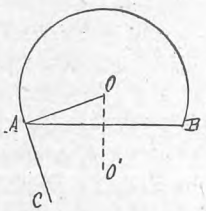
38. Un parallelogramma inscrittibile in una circonferenza è un rettangolo.

39. Ogni angolo avente il vertice nell'interno di un cerchio è uguale alla semisomma degli angoli al centro corrispondenti agli archi compresi dall'angolo stesso e dal suo opposto al vertice.

40. L'angolo di due secanti di un cerchio, uscenti da un punto esterno ad esso, è uguale alla semidifferenza degli angoli al centro corrispondenti ai due archi compresi fra le due secanti.

Def. — Un arco si dice *capace* di un certo angolo, se uno, e quindi tutti gli angoli iscritti in esso, sono uguali all'angolo dato.

41. Sopra un segmento dato come corda, descrivere un arco di circonferenza capace di un dato angolo. [Sia AB il dato segmento; da uno dei suoi estremi, p. es. da A, si conduca una semiretta AC, tale che l'angolo $\widehat{CAB}$ sia uguale all'angolo dato. Il punto O comune alla perpendicolare alla semiretta AC nel punto A, e all'asse del segmento AB è il centro dell'arco cercato: infatti ecc.].



42. Il luogo dei punti che giacciono da una banda rispetto ad un segmento dato, e da cui codesto segmento si vede sotto un angolo dato, è l'arco avente per corda il segmento dato, capace del dato angolo e giacente dalla parte prefissata.

43. Se un quadrangolo ha due angoli opposti supplementari, esso si può iscrivere in una circonferenza.

44. Poligoni iscritti in cerchi uguali aventi i lati ordinatamente uguali sono uguali.

45. Un poligono equilatero iscritto in un cerchio è equiangolo.

46. Iscrivere in un cerchio dato un quadrato di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione cui deve soddisfare il punto perchè il problema sia possibile. (Dato dentro il cerchio O il punto M, si iscriva nel cerchio un qualsiasi quadrato $ABCD$. Se P è un punto in cui la circonferenza di centro O e raggio OM sega uno dei lati di $ABCD$, per esempio AB, si congiunga O con P e con A. Costruito il triangolo $\widehat{MON}$ uguale al triangolo $\widehat{POA}$, si dimostra che la corda del cerchio O, che ha un estremo in N e passa per M, è lato di un quadrato iscritto nel cerchio. — Il metodo qui indicato, consiste, in sostanza, nel costruire una figura uguale a quella richiesta, e nel farla poi *ruotare* intorno ad un punto, fino a portarla nella posiziono particolare voluta. Codesto metodo, che vale a risolvere tutto un gruppo di problemi, si designa col nome di *metodo delle rotazioni*).

47. Iscrivere in un cerchio un ottagono regolare di cui un lato passi per un punto dato intorno al cerchio.

48. Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equilatero di cui un lato passi per un punto prefissato dentro il cerchio. Indicare la condizione di possibilità ed esaminare il caso in cui il punto dato sia esterno.

49. Iscrivere in un cerchio un esagono regolare di cui un lato passi per un punto dato interno al cerchio.

IV.

POLIGONI EQUIVALENTI

Preliminari.

227. Quando due poligoni sono uguali è naturale dire che *essi hanno ugual superficie;* ma si presentano anche dei casi, in cui siamo naturalmente condotti ad affermare che anche poligoni *disuguali* hanno *superficie uguale.*

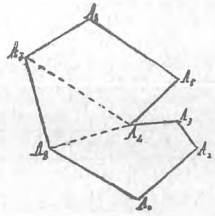
Le seguenti considerazioni hanno appunto lo scopo di spiegare codesto *concetto fondamentale* di **poligoni aventi uguale superficie** o, come noi diremo, di **poligoni equivalenti.**

228. Un poligono P si può immaginare *diviso*, mediante segmenti, in più poligoni P_1, P_2,... P_n a due a due *adiacenti* (cioè aventi in comune uno o più segmenti, parti del contorno) ma *non ricoprentisi* (cioè con aventi comuni punti interni). Allora il poligono P si può ottenere *riunendo* i poligoni P_1, P_2,... P_n, *parti* di P. Il poligono P si dice *somma* delle parti P_1, P_2,..., P_n.

Più in generale diremo « *somma di più poligoni* » la riunione di poligoni, non ricoprentisi, uguali ai dati.

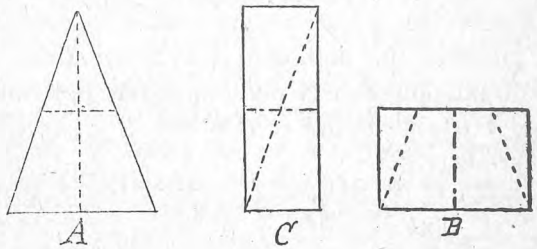
La somma di più poligoni A, B,..., H si designa con

$$A + B + ... + H.$$



Nota. — Considerando la somma di poligoni a due a due adiacenti (ma non ricoprentisi) si può ottenere un poligono concavo.

229. Osservazione. — Dati più poligoni è manifesto che vi sono più modi di costruire un poligono, il quale sia somma dei poligoni dati. Così nell' annessa figura il triangolo A e i due rettangoli B e C, i quali sono disuguali, sono ottenuti sommando parti ordinatamente uguali. Noi tutti riconosciamo che due poligoni siffatti, per es. A e B o A e C, *hanno ugual superficie*, o, come qui diremo, *sono equivalenti*.



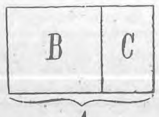
Scriveremo

$$A = B, \quad A = C, \quad B = C,$$

leggendo « A equivalente a B, ecc. ».

È invece manifesto che il poligono somma A o B o C non è equivalente (non ha superficie uguale) ad una delle parti sommate.

230. Se un poligono A è somma di due poligoni B e C, il poligono C si chiama *differenza* di A e B, e si dice ottenuto *sottraendo* B e A.



Si scrive $C = A - B$, leggendo « C equivalente ad A meno B ».

Siccome

$$A = C + B,$$

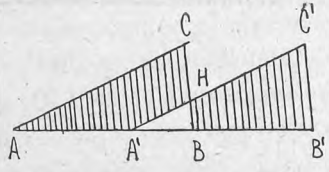
si dirà anche che B è la differenza di A e C, e si scriverà

$$B = A - C.$$

231. Quando un poligono A è equivalente alla somma di un poligono B e di un altro poligono, si dice che A è *prevalente* a B e che B è *suvvalente* ad A e si scrive

$$A > B, \quad B < A.$$

232. Osservazione. — Consideriamo i due triangoli uguali ABC, $A'B'C'$, aventi comune il triangolo $A'CD$. Sottraendo da ABC e $A'B'C'$ il triangolo $A'BH$, otteniamo i due trapezi $AA'HC$, $BB'C'H$ i quali sono disuguali; ma ognuno di noi riconosce senz'altro che essi, in quanto sono differenze di poligoni uguali, *hanno ugual superficie*, o, come qui diremo, *sono equivalenti*.



233. Richiamate colle precedenti osservazioni le prime proprietà intuitive che spettano al *concetto fondamentale* di **poligoni aventi ugual superficie** o

poligoni equivalenti, enunceremo esplicitamente i seguenti *postulati:*

I. *Somme di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti, e la somma di due poligoni non è equivalente ad una delle sue parti.*

II. *Differenze di poligoni uguali o equivalenti sono equivalenti.*

III. *Poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra di loro.*

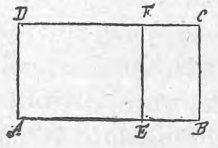
234. Nota. — Il postulato prec. porge tre criteri per riconoscere l'equivalenza di due poligoni.

Ora si dimostra che due poligoni equivalenti (cioè aventi egual superficie) si possono sempre decomporre in parti poligonali a due a due uguali, cosicchè tutta la teoria della uguaglianza di superficie dei poligoni si può svolgere in base al solo criterio I, relativo alla somma dei poligoni uguali, ma per far questo occorrono ragionamenti più lunghi e meno semplici di quelli che occorreranno a noi, che ci serviremo di tutti i criteri del n. prec.

Rettangoli equivalenti.

235. Teor. — *Dati tre segmenti* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *il rettangolo contenuto dal segmento* $\boldsymbol{a+b}$, *somma di due di essi, e dal terzo segmento* $\boldsymbol{c}$, *è equivalente alla somma dei due rettangoli contenuti da* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *e da* $\boldsymbol{b}$ *e* $\boldsymbol{c}$ *rispettivamente.*

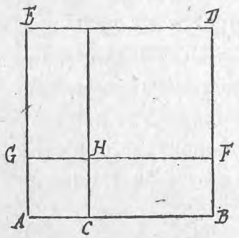
Sia $ABCD$ il rettangolo dei due segmenti $\boldsymbol{a+b}$, $\boldsymbol{c}$, e sia precisamente $AE = \boldsymbol{a}$, $EB = \boldsymbol{b}$, $BC = \boldsymbol{c}$. Se innalziamo in E la perpendicolare alla AB fino a intersecare in F la DC, decomponiamo il rettangolo $ABCD$ nella somma dei due rettangoli $AEFD$, $EBCF$, il primo



dei quali è contenuto da segmenti uguali rispettivamente ad a e c, il secondo è contenuto da segmenti uguali rispettivamente a b e c, come appunto volevamo dimostrare.

236. Teor. – *Se un segmento è diviso in qualsivoglia modo in due parti, il quadrato costruito sull'intero segmento è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle due parti, e di due volte il rettangolo contenuto da codeste due parti.*

Il segmento AB sia diviso in due parti dal punto C. Vogliamo dimostrare che il quadrato costruito sopra AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra AC e CB e di due volto il rettangolo contenuto dai segmenti AC e CB.

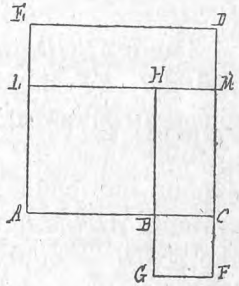


Infatti, costruito su AB il quadrato $ABDE$, si conduca da C la perpendicolare alla AB, e su di essa, a partire da C, e dalla stessa parte rispetto alla AB da cui cade il quadrato, si porti il segmento CH uguale ad AC: infine da H si conduca la perpendicolare alla CH, la quale incontri le AE, BD nei punti G, F rispettivamente.

Le rette AE, CH, BD come perpendicolari ad una stessa retta sono parallele fra loro: così dicasi delle AB, GF, ED. I quattro quadrangoli AH, HD, CF, EH, sono quindi per costruzione rettangoli, e poichè il segmento HC è uguale ad AC, e i segmenti EG, FH sono uguali a CB, i rettangoli AH e HD sono quadrati. Risulta di qui veramente che il quadrato costruito su AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su AC e su CB, e di due volte il rettangolo contenuto da AC e CB.

237. Teor. — *Dati due segmenti, la somma del quadrato costruito sulla loro differenza e di due volte il rettangolo contenuto dai due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due segmenti dati.*

Siano AC e BC i segmenti dati. Costruiti su AC e BC, da bande opposte rispetto alla AB, i corrispondenti quadrati $ACDE$, $BCFG$, si prenda sul prolungamento di GB a partire da B il segmento BH, uguale ad AB, e per H si conduca la parallela ad AC fino ad incontrare in L, M le rette AE, CD rispettivamente. Avremo allora che i segmenti LA, HB, MC, LH sono uguali ad AB, e i segmenti HM, LE, DM, CF sono uguali a BC (per costruzione e per il n. 123).



Di qui risulta anzitutto che il rettangolo $ABHL$ è il quadrato costruito su AB, e che il rettangolo $LMDE$ è contenuto dai segmenti AC, BC. Siccome poi DM è uguale a CF, avremo che MF è uguale a DC ossia ad AC, e quindi $HMFG$ è il rettangolo contenuto da AC, BC.

Risulta di qui che il quadrato $ABHL$, costruito sulla differenza dei due segmenti AC, BC, aumentato di due volte il rettangolo contenuto da essi, cioè aumentato dei rettangoli $LMDE$, $HMFG$, dà il poligono $AEDFGB$, equivalente alla somma dei due quadrati costruiti sui due dati segmenti.

238. Il teor. prec. si può anche enunciare dicendo che *il quadrato della differenza di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due se-*

gmenti dati, diminuito del doppio del loro rettangolo.

Parallelogrammi equivalenti.

239. In un parallelogramma *ABCD* dicesi *altezza* corrispondente al lato *AB*, preso come *base*, la distanza delle due parallele *AB*, *CD*.

240. Teor. — *Parallelogrammi di basi uguali e di altezze corrispondenti uguali sono equivalenti.*

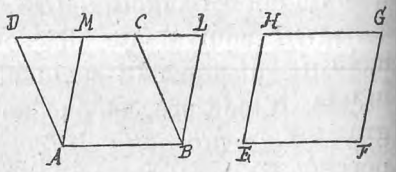
Siano *ABCD*, *EFGH* due parallelogrammi, le cui basi *AB*, *EF* siano uguali, e le cui altezze corrispondenti siano uguali.

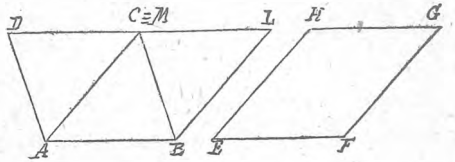
Sulla base *AB* e dalla stessa parte rispetto alla *AB*, da cui cade *ABCD*, si costruisca il parallelogramma *ABLM* uguale ad *EFGH*. Basterà dimostrare che *ABCD* è equivalente ad *ABLM* (n. 233, III).

Anzitutto, poichè le *LM*, *CD* sono parallele alla *AB*, e le due altezze dei due parallelogrammi relative al lato comune *AB* sono uguali, le rette *LM* e *CD* coincidono (n. 139).

Distinguiamo allora tre casi, secondo che i due segmenti *LM*, *CD* hanno comune un segmento o un punto oppure i detti segmenti sono esterni l'uno all'altro.

Consideriamo, per cominciare, il primo caso e supponiamo, per fissare le idee, che il punto *M* sia interno al segmento *CD* e che *C* sia interno ad *ML*. Allora, essendo *CD* uguale a *LM*, saranno anche uguali le differenze *DM*, *CL*: di più l'angolo $\widehat{ADM}$ è uguale a $\widehat{BCL}$, e l'angolo $\widehat{DMA}$ è uguale a $\widehat{CLB}$ (n. 71, 2): se ne conclude che i due triangoli *AMD*, *BLC* sono uguali (n. 91), e quindi che i due parallelogrammi *ABCD*, *ABLM* si ottengono sommando triangoli uguali al medesimo quadrangolo *ABCM* e perciò sono equivalenti.

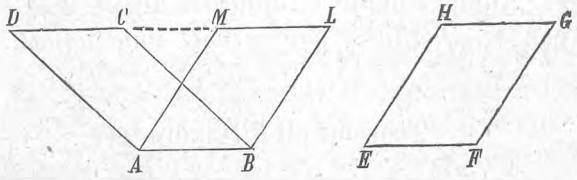




Lo stesso ragionamento vale nel caso particolare in cui il punto *M* coincida con un estremo del segmento *CD*, per esempio con *C*: i due parallelogrammi si ottengono allora sommando triangoli uguali al medesimo triangolo *ACB*.

Consideriamo infine il caso in cui *LM* sia esterno a *CD*: precisamente *LM* appartenga al prolungamento di *DC*.

Confrontiamo i due triangoli *AMD*, *BLC*. Essi sono uguali, perchè hanno i lati rispettivamente



uguali. Invero i lati *AD*, *AM* sono rispettivamente uguali a *BC*, *BL* come lati opposti di parallelogrammi (n. 123, 2); e i terzi lati *DM*, *CL* sono uguali, perchè si ottengono aggiungendo il medesimo se-

gmento CM rispettivamente ai due segmenti DC, ML, che sono uguali fra loro, in quanto sono uguali entrambi al segmento AB (n. 123, 2).

Se allora noi sottragghiamo dal trapezio $ABLD$ prima l'uno e poi l'altro dei due triangoli uguali AMD e BLC otterremo due poligoni equivalenti fra loro, in quanto sono differenze di poligoni uguali (n. 233, II). Ma in codesto modo si ottengono appunto i due parallelogrammi $ABLM$, $ABCD$, che sono in tal guisa dimostrati equivalenti.

241. Dato un parallelogramma, si può costruire un rettangolo ad esso equivalente o, come si suol dire, *trasformare* il dato parallegramma in un rettangolo. Basta considerare il rettangolo che ha base ed altezza uguali al dato parallelogramma.

242. Nota. — Ricorrendo ad una dimostrazione per assurdo, e applicando il Post. del n. 233 (I, 2ª parte), si stabilisce l'inverso del teorema del n. 240; si dimostra cioè il

Teor. — *Parallelogrammi equivalenti e di basi uguali hanno, rispetto a queste, altezze uguali.*

243. Analogamente si dimostra il

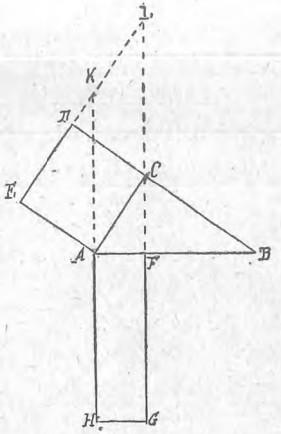
Teor. — *Quadrati equivalenti sono uguali.*

Teorema di Pitagora.

EUCLIDE

244. Teor. — *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra un cateto è equivalente al rettangolo contenuto dall'ipotenusa e dalla proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.*

Sia il triangolo ABC rettangolo in C: abbassata da C la perpendicolare CF sull'ipotenusa, diciamo che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo di AF ed AB.

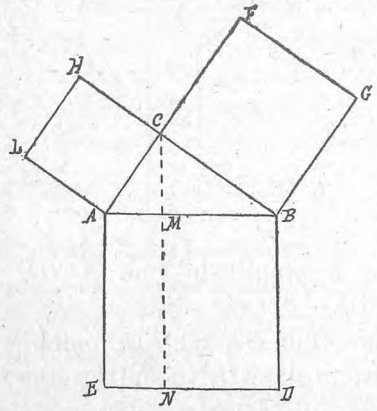


Si costruisca infatti su AC il quadrato $ACDE$; poi sul prolungamento del segmento CF si prenda il segmento FG uguale ad AB, e si conducano per la G la parallela a BA, per A la parallela ad FG. Codeste due rette si incontreranno in un punto H, perchè sono parallele a due rette AB, FG che si incontrano; ed è manifesto che $AFGH$ è il rettangolo di AF e AB.

Ciò premesso, si prolunghino HA ed FC; poichè codeste due rette incontrano la AC, incontreranno anche la retta ED, parallela alla AC, rispettivamente in due punti K, L (n. 69). Allora il parallelogramma $ACLK$, come compreso fra le stesse due parallele fra cui è compreso il rettangolo $AHGF$, ha con questo uguale l'altezza relativa ai lati per diritto AH, AK. Si considerino perciò i due triangoli AKE, ABC, rettangoli in E, C rispettivamente. In essi sono uguali i cateti AE, AC per costruzione, e gli angoli acuti $\widehat{KAE}$, $\widehat{BAC}$, perchè complementari dello stesso angolo $\widehat{CAK}$. Perciò i due triangoli AKE, ABC sono uguali (n. 91) ed hanno uguali le ipotenuse AK, AB; sono quindi uguali anche AK e AH, e il parallelogramma $ACLK$ e il rettangolo $AHGF$ sono equivalenti (n. 240).

Ma il parallelogramma $ACLK$ ha la base comune col quadrato $ACDE$, ed è compreso con esso fra le stesse parallele; concludiamo che il quadrato $ACDE$ è equivalente al parallelogramma $ACLK$ (n. 226) e quindi, per quanto si è visto dianzi, al rettangolo $AHGF$.

245. Teor. (DI PITAGORA). — *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull' ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*



Dato il triangolo ABC rettangolo in C, si costruiscano su AB, BC, CA i quadrati $ABDE$, $BCFG$, $ACHL$, ciascuno da banda opposta del triangolo rispetto alla corrispondente base. Diciamo che il quadrato $ABDE$ è equivalente alla somma dei quadrati $BCFG$, $ACHL$. Abbassata infatti da C la perpendicolare CM sulla ipotenusa AB e prolungatala fino ad incontrare DE in N, abbiamo (n. prec.) che il quadrato di AC è equivalente al rettangolo $AMNE$ della ipotenusa AB e della proiezione su di essa del cateto AC; così il quadrato di BC è equivalente al rettangolo $MBDN$ dell'ipotenusa AB e della proiezione MB del cateto BC su di essa. Concludiamo che la somma dei due indicati rettangoli, cioè il quadrato di AB, è equivalente alla somma dei quadrati di AC e BC.

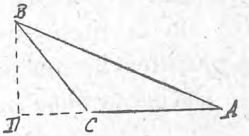
246. Il teorema prec. si inverte in base al n. 243;

sussiste cioè il seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare.

Teor. (inverso del teorema di PITAGORA). — *Se in un triangolo il quadrato costruito sopra un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due l' angolo compreso da questi è retto.*

247. Ci limitiamo del pari ad enunciare i due seguenti teoremi, che generalizzano il teorema di Pitagora.

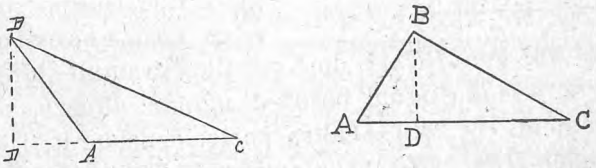
Teor. a) *In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio del rettangolo di uno di questi e della proiezione dell' altro su di esso.*



[Infatti, indicando con $q(AB)$ il quadrato di AB e con r (AB, CD) il rettangolo di AB e CD, abbiamo

$$q(AB) = q(BD) + q(DA),$$
$$q(DA) = q(DC) + q(CA) + 2r(DC \cdot CA)$$

(cfr. n. 236) ecc.].



b) *In un triangolo la somma del quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto, e del doppio del rettangolo contenuto da uno degli altri lati e dalla proiezione su di esso del terzo lato è equivalente alla somma dei quadrati dei due lati che contengono l'angolo acuto.* [Infatti si ha

$$q(AB) = q(AD) + q(BD),$$
$$q(AD) + 2r(AC \cdot DC) = q(AC) + q(CD) \text{ ecc.}].$$

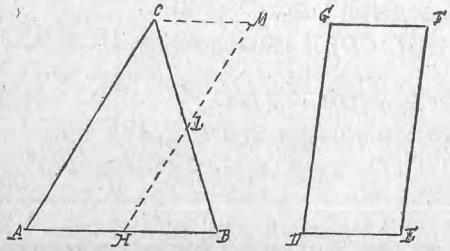
Triangoli equivalenti.

Il teorema sull'equivalenza dei parallelogrammi aventi le basi e le altezze corrispondenti uguali si estende ai triangoli mercè la seguente proposizione.

248. Teor. — *Un triangolo ed un parallelogramma il quale abbia la stessa altezza e la base metà della base di quello, sono equivalenti.*

Sia ABC un triangolo, e sia $DEFG$ un parallelogramma avente la stessa altezza di ABC e tale che DE sia la metà di AB. Diciamo che il triangolo e il parallegramma sono equivalenti.

Divisa la base AB del triangolo per metà in H, si

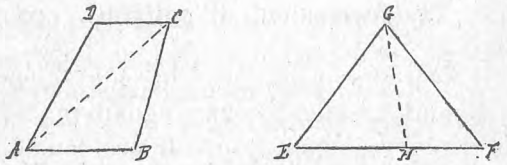


conduca da H la parallela ad AC, e da C la parallela ad AB: sia M il punto di intersezione di codeste due rette e sia L l'intersezione della HM con BC. I due parallelogrammi $AHMC$, $DEFG$, avendo ugual base ed uguale altezza, sono equivalenti (n. 240). D'altra parte, considerati i due triangoli HBL, MCL, abbiamo che LB è uguale ad LC (n. 143), e di più che gli angoli $\widehat{HLB}$, $\widehat{LBH}$ sono uguali agli angoli $\widehat{MLC}$, $\widehat{LCM}$ rispettivamente (numeri 49, 71) cosicchè i due triangoli sono uguali (n. 91). Il triangolo ABC e il parallelogramma $AHMC$ essendo somme di poligoni rispettivamente uguali, sono equivalenti; quindi sono anche equivalenti (n. 233, III) il triangolo ABC e il parallelogramma $DEFG$.

249. Teor. — *Triangoli di ugual base ed uguale altezza sono equivalenti.*

Invero due triangoli siffatti sono rispettivamente equivalenti a due parallelogrammi aventi ugual base (metà di quella dei triangoli) e la stessa altezza (n. prec.) e questi sono equivalenti fra loro (nn. 240, 233).

250. Cor. — *Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza e di base uguale alla somma delle basi del trapezio.*

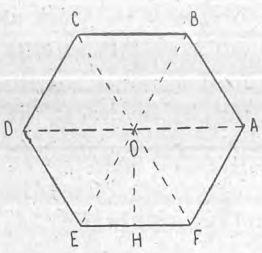


Se la base EF del triangolo EFG è uguale alla somma delle basi del trapezio $ABCD$, prendiamo su EF il punto H tale che sia $EH = AB$ e quindi $HF = DC$. Condotta allora la diagonale AC del trapezio e il segmento HG, avremo che i triangoli ABC, EHG, sono equivalenti perchè hanno basi ed altezze uguali: e che per la medesima ragione sono equivalenti i triangoli DCA, HFG; onde si conclude che veramente il trapezio e il triangolo dato sono equivalenti.

251. Cor. — *Un poligono regolare è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro del poligono e per altezza il suo apotema.*

Infatti, congiungendo il centro del poligono coi suoi vertici, dividiamo il poligono stesso in tanti triangoli quanti sono i lati, e ciascuno di questi

triangoli ha per base un lato del poligono, e l'altezza corrispondente è uguale all'apotema (numeri 208, 209).



252. Il teor. del n. 249 si inverte facilmente, in base al teor. del n. 242, inverso del teor. del n. 240. Si ha così il

Teor. — *Triangoli equivalenti ed aventi basi uguali hanno altezze uguali.*

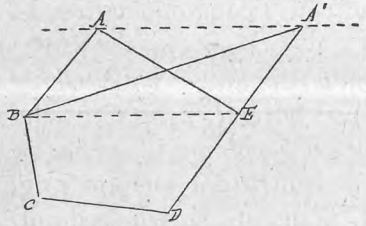
Trasformazioni di poligoni.

253. Il teorema relativo alla equivalenza dei triangoli aventi basi ed altezze eguali (n. 249) permette di risolvere alcuni notevoli problemi di *trasformazione di un poligono.*

Si dice che un poligono *A si è trasformato* in un poligono *B* ogni qual volta si è costruito un poligono *B* equivalente ad *A*.

254. Probl. — *Trasformare un poligono in un triangolo.*

Sia dato il poligono *ABCDE*. Scelti ad arbitrio tre dei suoi vertici consecutivi *E, A, B*, per *A* si conduca la parallela alla diagonale *BE*, e si prolunghi *DE* fino ad incontrare codesta parallela in *A'*. Allora il poligono *A'BCD* ha un lato di meno del primitivo. D'altra parte i due triangoli *ABE*, *A'BE* hanno ugual base ed uguale altezza e sono perciò



equivalenti (n. 249). Ne risulta che i due poligoni *ABCDE, A'BCD*, i quali hanno la parte *BCDE* comune e le parti residue equivalenti, sono equivalenti (n. 233). Abbiamo così ottenuto un poligono equivalente al primitivo, ma avente un lato di meno.

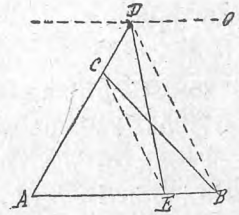
Ripetendo successivamente un numero sufficiente di volte la medesima costruzione, otterremo infine un triangolo equivalente al poligono dato.

255. Nota. — Il probl. prec. non è determinato perchè sono infiniti i triangoli equivalenti ad un poligono dato.

Perciò ad un triangolo equivalente ad un poligono dato si possono imporre altre condizioni. Così è importante il seguente problema.

256. Probl. — *Trasformare un triangolo dato in un triangolo di data altezza.*

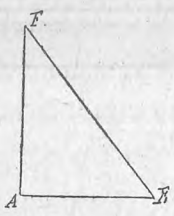
Dato il triangolo *ABC*, per trasformarlo in un triangolo avente un'altezza uguale ad un dato segmento, conduciamo la parallela *o* ad uno dei lati del triangolo, per es. ad *AB*, alla distanza uguale al segmento dato, e sia *D* la intersezione con la *o* di uno degli altri due lati, per es. di *AC*, o del suo prolungamento. Congiunto *D* con *B*, si conduca per *C* la parallela alla *DB* fino ad incontrare la *AB* in *E*.



Diciamo che il triangolo *AED*, il quale evidentemente ha sulla base *AE* l'altezza prefissata, è equivalente ad *ABC*. Invero i due triangoli *ABC*, *AED* ci appaiono come somme dello stesso triangolo *AEC* e rispettivamente dei due triangoli *CEB*, *CED* equi-

valenti (n. 249) per avere la base comune e i vertici opposti sulla medesima parallela alla base.

257. Costruito il triangolo AED, equivalente al dato ABC, e avente l'altezza prefissata, ogni triangolo avente la base AE e il vertice opposto sulla retta o, soddisfa alle condizioni del problema precedente. Fra codesti infiniti triangoli ve n'è uno isoscele e ve ne sono due rettangoli (fra loro inversamente uguali).



Se AEF è uno di codesti triangoli rettangoli, ogni triangolo avente la base AF e l'altezza uguale ad AE è equivalente al dato ABC: onde possiamo dire d'aver risoluto il seguente

Probl. — *Trasformare un triangolo dato in un triangolo avente una base data.*

In particolare si potrà trasformare un triangolo dato nel triangolo isoscele equivalente, che ha una base data.

258. Combinando insieme le costruzioni dei numeri 254, 240, potremo risolvere il seguente

Probl. — *Trasformare un poligono dato in un rettangolo di data base* (o data altezza).

Il poligono dato, si trasforma in un triangolo equivalente (n. 254), e questo alla sua volta in un triangolo avente come base un segmento doppio della base a assegnata (n. prec.), e quindi in un parallelogramma colla stessa altezza, la cui base sia uguale ad a.

Da ultimo, fra tutti i parallelogrammi aventi la stessa altezza di quello ora costruito, e quindi ad esso equivalenti (n. 240), si consideri il rettangolo.

259. Dati due poligoni equivalenti A, A', trasformiamoli in due rettangoli R, R' aventi la stessa base prefissata a.

Codesti due rettangoli, essendo equivalenti a due poligoni fra loro equivalenti, sono pure equivalenti fra loro (n. 233). Poichè essi hanno basi uguali, si conclude che hanno uguali anche le altezze (n. 242) e sono senz'altro uguali.

Abbiamo cioè il seguente

Teor. — *Trasformando poligoni equivalenti in rettangoli di ugual base, si ottengono rettangoli uguali.*

260. In base alla costruzione del n. 258 possiamo *confrontare due poligoni quali si vogliano* A *e* B. Invero trasformati A e B in due rettangoli di ugual base R, R', avremo che, secondo che l'altezza di R sarà maggiore, uguale o minore di quella di R', così rispettivamente sarà A prevalente, equivalente o suvvalente a B.

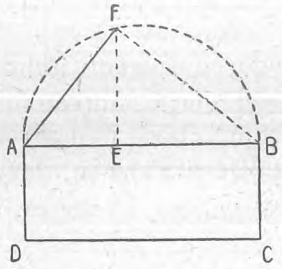
261. La costruzione del n. 258 permette anche di *costruire la somma di quanti poligoni si vogliono.*

Si trasformino infatti codesti poligoni in altrettanti rettangoli aventi tutti una medesima base. Il rettangolo avente la stessa base di codesti rettangoli e l'altezza uguale alla somma delle altezze di essi è equivalente alla somma dei poligoni dati (n. 240).

262. Da ultimo, in base al n. 244, risolviamo il problema seguente, dopo di che potremo trasformare ogni poligono in un quadrato.

Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo $ABCD$, si porti sul lato maggiore AB il lato minore in AE, e descritta su AB, da una banda, la semicirconferenza, si innalzi da E la perpendicolare ad AB fino ad incontrare la semicirconferenza in F.



Diciamo che il quadrato di AF è equivalente al rettangolo dato.

Infatti il triangolo AFB è rettangolo in F (n. 206), e in esso il quadrato del cateto AF è equivalente al rettangolo di AB e della proiezione AE di AF su AB (n. 244), cioè al rettangolo dato.

ESERCIZI

1. Se un segmento è diviso in qualsivoglia modo in tre parti, il quadrato costruito sull'intero segmento è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sulle tre parti e del doppio dei tre rettangoli contenuti da codeste tre parti prese a due a due nei tre modi possibili.

2. Il gnomone (esagono concavo) differenza di due quadrati, è equivalente al rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza dei lati dei quadrati. (Si mettano i due quadrati in modo che abbiano comune un angolo).

3. Se per un punto della diagonale di un parallelogramma si conducono le parallele ai lati, dei quattro parallelogrammi, in cui il primitivo resta così diviso, quelli che non sono attraversati dalla diagonale sono equivalenti.

4. Il dodecagono regolare è equivalente al triplo del quadrato del raggio. (Se A, B, C, D sono quattro vertici consecutivi del dodecagono regolare di centro O, si completi il quadrato $AODE$ del raggio. Basta allora dimostrare che il triangolo OBC è equivalente al pentagono concavo $ABCDE$. Si prenda il simmetrico E' di E rispetto a BC e si congiungano E ed E' con B e C ed E' con O; confrontando i tre triangoli OBE', OCE', BCE' rispettivamente con AEB, DEC, BCE si trova ecc.).

5. Teorema di Pappo. — Un parallelogramma $ABDE$ costruito su di un lato AB di un triangolo ABC, il cui vertice C sia interno alla striscia AE, BD, è equivalente alla

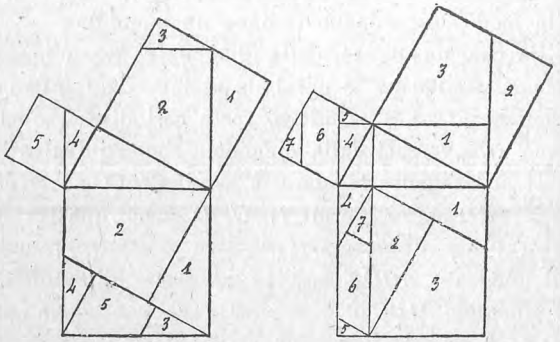
somma di due parallelogrammi qualsiansi, costruiti sui lati AC, BC e i cui lati opposti passino rispettivamente per E, D. (Si prolunghino codesti lati opposti ad AC, BC fino ad incontrarsi in F e si conduca la FC fino ad intersecare le AB, ED, ecc.).

Nota. — Se l'angolo ABC è retto e i tre parallelogrammi sono quadrati, si ha una nuova dimostrazione del teorema di PITAGORA.

6. Trasformare un parallelogramma in un altro di cui sono dati due lati. Discussione. (Il dato parallelogramma $ABCD$ si trasformi anzitutto in un parallelogramma avente un lato uguale ad uno dei segmenti dati, descrivendo, centro in A, una circonferenza di raggio uguale a siffatto segmento, ecc).

7. Trasformare un parallelogramma dato in una losanga di dato lato. Discussione. (Cfr. la traccia dell'es. prec.).

8. Verificare sperimentalmente colla carta le due dimostrazioni del teorema di PITAGORA che sono suggerite dalle annesse figure.



9. Se le diagonali di un quadrilatero si incontrano perpendicolarmente, la somma dei quadrati di due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.

10. Costruire un quadrato equivalente alla somma di più quadrati dati.

11. Costruire un quadrato equivalente alla metà di un altro.

12. Dividere un segmento dato in tre parti, tali che le due estreme siano uguali e che la somma dei quadrati di queste sia equivalente al quadrato della parte di mezzo. (In virtù dell'inverso del teorema di PITAGORA si può enunciare il problema: costruire un triangolo rettangolo isoscele di dato perimetro. Si immagini per ciò risoluto il problema; e prolungata l'ipotenusa da una parte e dall'altra di un segmento uguale al cateto, si congiungano gli estremi di questi segmenti col vertice dell'angolo retto. Nel triangolo isoscele, che così si ottiene, quanto valgono gli angoli alla base? (n. 96)).

13. Il quadrato dell'altezza del triangolo equilatero è triplo del quadrato della metà del lato. (Costruito il quadrato dell'altezza si applichi il teorema di Pitagora).

14. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo isoscele. (Che figura costituisce un triangolo rettangolo isoscele insieme col suo simmetrico rispetto alla base?).

15. Congiungendo un qualsiasi punto interno ad un parallelogramma coi vertici, si ottengono quattro triangoli tali che la somma di due tra essi non adiacenti è equivalente alla somma degli altri due. (Si conducano pel punto le parallele ai lati ecc.).

16. Congiungendo un punto interno ad un trapezio ed equidistante dai lati paralleli coi vertici del trapezio si ottengono quattro triangoli tali che le somme delle due coppie di triangoli opposti sono equivalenti.

17. Il parallelogramma che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrangolo [cfr. es. n. 62 a pag. 79] è equivalente alla metà del quadrangolo. (Si congiungano due vertici opposti del quadrangolo e si confronti ciascuno dei triangoli, in cui il quadrangolo resta diviso, colla parte di parallelogramma da esso contenuto ecc.).

18. In un trapezio i due triangoli che hanno ciascuno

per base uno dei due lati non paralleli e per vertici il punto medio del lato opposto sono equivalenti.

19. Le mediane di un triangolo lo dividono in sei triangoli equivalenti. (Si considerino le coppie di triangoli che hanno come base comune un lato del triangolo e come vertici i punti medi degli altri due).

20. Dato un esagono regolare, i cinque segmenti che congiungono un vertice determinato di esso cogli altri vertici e coi punti medi dei due lati, che formano il vertice opposto al prefissato, dividono l'esagono in sei parti equivalenti. (Se $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ è l'esagono ed A_1 è il vertice prefissato, si osservi che il lato A_2A_3 è parallelo alla diagonale A_1A_4 ed uguale alla metà di essa).

21. La somma di più triangoli aventi la stessa base è equivalente al triangolo, che ha la medesima base e l'altezza uguale alla somma delle altezze dei triangoli dati.

22. La somma delle distanze di un punto interno ad un poligono equilatero dai suoi lati è costante. (Congiunto il punto coi vertici del poligono, questo rimane decomposto in tanti triangoli di ugual base, la cui somma è equivalente per una parte al poligono, e per l'altra ad un triangolo che ha per base il lato del poligono, ecc.). Si esamini quel che accade per un punto esterno.

23. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui è data l'altezza o la base.

24. Trasformare un triangolo dato in un triangolo in cui è dato un lato ed uno degli angoli adiacenti.

25. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui i lati uguali siano uguali a un segmento dato.

V.

RAPPORTO E MISURA

Grandezze geometriche.

263. Pei *segmenti*, per gli *angoli* e per gli *archi* di una circonferenza, abbiamo posto i concetti di *uguaglianza* e *disuguaglianza*, e abbiamo definito la *somma* in modo da riconoscere in ciascuna di codeste classi di figure le proprietà che definiscono l'ordinario concetto della **grandezza.**

Anche pei poligoni abbiamo stabilito il concetto di *somma;* e di più abbiamo introdotto il concetto di *equivalenza* o *uguaglianza di superficie,* il quale conduce al confronto dei poligoni considerati come *grandezze.*

Perciò appunto noi diremo nel seguito che i segmenti, gli angoli, gli archi di una stessa circonferenza, i poligoni costituiscono altrettante classi di *grandezze* (*geometriche*).

Le grandezze di una medesima classe si dicono fra loro *omogenee:* il confronto di uguaglianza o disuguaglianza non è possibile se non fra grandezze omogenee, e perciò, parlando di grandezze che si confrontano, spesso si sottintende la parola « omogenee ».

Le grandezze di cui non sia designata la specie verranno denotate genericamente con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino A, B, C,...; si useranno invece le lettere minuscole, a, b, c,..., quando ci si riferisca, in modo particolare, ai segmenti.

Se la grandezza A è maggiore o uguale o minore della grandezza B (prevalente o equivalente o suvvalente a B, se si tratta di poligoni), scriveremo rispettivamente:

$$A > B \quad \text{o} \quad A = B \quad \text{o} \quad A < B.$$

La somma delle grandezze A, B,..., K si designerà con

$$A + B + \ldots . K$$

e la differenza delle due grandezze A e B, di cui la prima sia maggiore (o prevalente), si designerà con $A - B$.

264. Per ciacuna delle classi di grandezze suindicate i concetti di somma, di uguaglianza e di disuguaglianza assumono un significato geometrico particolare. Per es. pei poligoni la uguaglianza (rispetto alla grandezza) si riduce alla equivalenza.

Ricordando per ciascuna classe il significato fissato, si verificano in ogni caso le proprietà seguenti che si possono considerare come attributi delle grandezze in genere.

1) *Di due grandezze omogenee* A, B,

$$o \quad A > B, \quad o \quad A = B, \quad o \quad A < B.$$

2) *Se* $A > B$ *è* $B < A$ *e viceversa.*

3) *Se* $A = B$ *e* $B = C$ *è anche* $A = C$.

4) *Se* $A > B$ *e* $B > C$, *è* $A > C$.

5) $A + B > A$.

6) *Se* $C > A$ *vi è una grandezza* B *(che si indica con* $C - A$ *e si dice differenza di* C *ed* A*) tale che* $C = A + B$.

7) *Se* $A = A'$, $B = B'$, *è*

$$A + B = A' + B';$$

e se $A > B$ *è anche* $A' > B'$ *e*

$$A - B = A' - B'.$$

8) $A + B = B + A$.

9) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

10) *Se* A *e* B *sono due grandezze omogenee, esiste sempre un intero* m *così grande che sia*

$$mA > B.$$

Quest'ultima proposizione (nota sotto il nome di proposizione di ARCHIMEDE) si ammette come *postulato* pei segmenti e per gli angoli e si può dimostrare agevolmente pei poligoni e per gli archi.

Alle precedenti proposizioni noi qui da ultimo aggiungeremo come ulteriore attributo delle grandezze la proposizione seguente:

11) *Dati una grandezza* A *ed un numero* m *esiste sempre la summultipla* $\frac{A}{m}$ *di* A *secondo* m.

Questa proprietà (*divisibilità* di una grandezza in m parti uguali) è stata stabilita pei segmenti (n. 144) e agevolmente può dedursi pei poligoni; ma essa vale in generale, come ci dà l'intuizione, anche per archi ed angoli.

Rapporto di due grandezze.

265. Date due grandezze A e B, può accadere che la A sia multipla di B secondo un certo numero m, cioè che sia

$$A = mB.$$

Si dice allora che m è il *rapporto* di A a B e si scrive

$$A:B = m.$$

Così si dice che il rapporto di una grandezza A a sè stessa è uguale ad 1.

Se A non è multipla della B, può accadere che esista una certa summultipla di B, p. es. $\frac{B}{n}$, della quale A sia multipla secondo un certo numero m, per modo che sia

$$A = m\frac{B}{n},$$

o, come si suole anche scrivere,

$$A = \frac{m}{n}B;$$

[si legge A uguale agli m n^{mi} di B].

In tal caso si dice che il *rapporto* di A a B è uguale ad $\frac{m}{n}$, e si scrive

$$A:B = \frac{m}{n}.$$

Nota. — Se A è multipla secondo m di $\frac{B}{n}$ essa è anche

multipla secondo $2m$ di $\frac{B}{2n}$, multipla secondo $3m$ di $\frac{B}{3n}$, ecc. Ma il valore che si ottiene pel rapporto $A:B$ in base alla definizione precedente è sempre lo stesso, perchè

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \ldots.$$

266. Discende dalla definizione del n. prec. che che se $\frac{m}{n}$ è il rapporto di A a B, sussistono le seguenti quattro uguaglianze

$$A = m\frac{B}{n}, \quad B = n\frac{A}{m}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n}, \quad nA = mB.$$

Cioè abbiamo:

Se il rapporto di A *a* B *è* $\frac{m}{n}$:

1) *il rapporto di* B *ad* A *è* $\frac{n}{m}$;

2) *l'* m^{ma} *summultipla di* A *è uguale alla* n^{ma} *summultipla di* B, *cioè* A *e* B *hanno una summultipla comune;*

3) *l'* n^{ma} *multipla di* A *è uguale all'* m^{ma} *multipla di* B, *cioè* A *e* B *hanno una multipla comune.*

Viceversa, poichè tanto dall'ipotesi

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n}$$

quanto dall' ipotesi

$$nA = mB$$

discende

$$A = m\frac{B}{n},$$

abbiamo che: *Per concludere che il rapporto di* A *a* B *è* $\frac{m}{n}$ *basta verificare o che l'* m^{ma} *summultipla* A *è uguale all'* n^{ma} *summultipla di* B *o che l'* n^{ma} *multipla di* A *è uguale all'* m^{ma} *multipla di* B.

267. Importa notare esplicitamente come, *data una grandezza* B *e fissato un numero (intero o frazionario)* $\frac{m}{n}$, *esista una grandezza ben determinata, che ha rispetto a* B *il rapporto* $\frac{m}{n}$.

Per costruire questa grandezza, basta dividere la B in n parti uguali e considerare l' m^{ma} multipla di una di queste parti di B; cioè la grandezza cercata è data dagli

$$m\frac{B}{n},$$

ossia, come si è convenuto di scrivere,

$$\frac{m}{n}B.$$

268. In base al n. 265 noi sappiamo assegnare il rapporto $A:B$ di due grandezze, quando conosciamo una certa summultipla $\frac{B}{n}$ di B la quale sia uguale ad una certa summultipla $\frac{A}{m}$ di A, o, ciò che equivale, quando conosciamo una certa multipla mB di B che sia uguale ad una certa multipla nA di A.

Ma non si deve credere, come taluno potrebbe pensare che, scelte due grandezze omogenee qualsiansi A e B, esista sempre una grandezza che sia summultipla tanto di A quanto di B (*summultipla comune* di A e B) o, ciò che è lo stesso, esista sempre una *multipla comune* delle due grandezze date.

Si hanno infatti coppie di grandezze omogenee che non ammettono nessuna summultipla comune e, quindi, nessuna multipla comune.

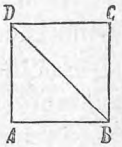
Per esempio, *il lato e la diagonale di un quadrato non hanno nessun summultiplo comune.*

Per dimostrare codesta affermazione consideriamo un qualsiasi segmento AB e, costruito su di esso il quadrato $ABCD$, consideriamone una diagonale, p. es. la BD.

Diciamo che i segmenti AB e BD non hanno summultipli comuni (e quindi nemmeno multipli comuni).

Si supponga, invero, che l' m^{mo} summultiplo di AB sia uguale all' n^{mo} summultiplo di BD, cioè

$$\frac{AB}{m} = \frac{BD}{n}.$$



Si avrà allora che se si divide AB in m parti uguali e BD in n parti uguali, le parti di AB risulteranno uguali a quelle di BD.

Condotte nel quadrato di AB le parallele ai lati per i punti di divisione in m parti uguali di due lati consecutivi, otterremo una decomposizione del q (AB) in m^2 quadrati uguali.

Analogamente si otterrà una decomposizione del q (BD) in n^2 quadrati, uguali fra loro e a quelli in cui è decomposto il q (AB). Ma, poichè il triangolo ABD è rettangolo ed isoscele, il q (BD) è equivalente (n. 245) al doppio del q (AB);

ed essendo il q (BD) e il q (AB) decomposti rispettivamente in n^2, m^2 quadrati tutti uguali fra loro, concludiamo che deve sussistere l'identità aritmetica.

$$n^2 = 2m^2,$$

la quale è manifestamente assurda, perchè mentre il secondo membro contiene il fattore primo 2 una volta o un numero dispari di volte, il primo membro non lo può contenere che un numero pari o nullo di volte.

Resta così dimostrato che il lato e la diagonale di un quadrato non hanno nessun summultiplo comune.

Perciò non è applicabile al lato e alla diagonale di un quadrato la definizione di rapporto, data al n. 265.

269. In generale due grandezze si dicono *commensurabili* o *incommensurabili* secondo che ammettono o no sottomultiple comuni (e, quindi, multiple comuni).

Così, p. es., il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili.

La definizione di rapporto del n. 265 è applicabile soltanto nel caso di due grandezze commensurabili.

In uno stadio più avanzato di studi si definisce anche il rapporto di due grandezze incommensurabili; e a ciò si giunge *estendendo* il concetto di *numero* e introducendo i così detti numeri *irrazionali*. [Si dicono *razionali* i numeri interi e frazionari i quali esprimono, come sappiamo, i rapporti di grandezze commensurabili].

Ma non entra nel nostro piano di studi l'occuparci di ciò, tanto più in quanto noi ora, occupandoci della ricerca del rapporto di due grandezze, vedremo che *se una grandezza* A *è incommensurabile con la* B, *si può sempre considerare al posto della* A *una grandezza che sia commensurabile con la* B, *e differisca dalla* A *di una grandezza praticamente trascurabile.*

270. È ora necessario che ci occupiamo della ricerca effettiva del rapporto di due grandezze A, B.

Se A è maggiore di B, sottragghiamo B da A successivamente una, due, tre,.... volte.

Possono allora verificarsi due casi. In primo luogo può accadere che sottraendo B da A un certo numero m di volte la grandezza A si esaurisca completamente, che, cioè, sia

$$A = mB;$$

e allora il rapporto di A a B è precisamente il numero intero m (n. 265).

Se invece non si verifica questo caso, avremo che dopo aver sottratto B da A un certo numero m di volte, si otterrà, come *residuo* o *resto*, una grandezza R minore di B e avremo

$$A = mB + R;$$

il che noi esprimeremo dicendo che il numero m è il *quoziente* di A per B: l'operazione, per cui si determina m, si dirà *divisione* e le grandezze A, B, R si chiameranno rispettivamente *dividendo*, *divisore* e *resto*.

Supposto dunque che m sia il quoziente di A per B e che sia R il resto, dividiamo B per R. Se R è contenuto un numero esatto n di volte in B avremo insieme

$$A = mB + R$$
$$B = nR$$

e quindi

$$A = mnR + R$$
$$= (mn + 1)R.$$

Di qui si conclude che R è summultipla comune di A e B, ed è precisamente summultipla di A secondo $mn + 1$, di B secondo n; onde risulta che il rapporto di A a B è $\frac{mn+1}{n}$ (n. 265).

Se invece R non è summultipla di B, per modo che la divisione di B per R dia un resto R',

$$B = nR + R',$$

si divida R per R'. Se R' è summultipla di R secondo un certo numero p avremo

$$A = mB + R$$
$$B = nR + R'$$
$$R = pR'.$$

Di qui risulta

$$A = m(nR + R') + R$$
$$= m(nR' + R') + pR'$$
$$= (mnp + m + p)R'$$

e

$$B = npR' + R'$$
$$= (np + 1)R';$$

onde si conclude che R' è summultipla comune di A e B, e che il rapporto di A a B è (n. 265)

$$\frac{mnp + m + p}{np + 1}.$$

Se poi R' non è summultipla di R, si continuerà nel procedimento suindicato (*procedimento di* EUCLIDE o *delle divisioni successive*) e potrà accadere che dopo altre due, tre, quattro.... operazioni si giunga ad una divisione che non dia resto (divisione esatta). Si otterrà allora una summultipla comune di A e B e si potrà senz' altro assegnare il rapporto delle due grandezze date.

Nota. — Il procedimento delle divisioni successive non finisce mai (cioè non conduce mai ad una divisione esatta) solo nel caso in cui le due date grandezze sono incommensurabili. Ma noi qui non ci fermeremo a dimostrare questa affermazione.

271. Un altro metodo pratico per la determinazione del rapporto di due grandezze è il seguente.

Riferiamoci, per semplicità, al caso di due segmenti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Se $\boldsymbol{b}$ non è summultiplo di $\boldsymbol{a}$, si divida $\boldsymbol{b}$ in un certo numero di parti uguali, per es. in 10 o 100 o 1000,... parti uguali, come appunto si fa nel caso in cui $\boldsymbol{b}$ sia il *metro;* e si veda se la decima, o centesima o millesima.... parte aliquota di $\boldsymbol{b}$ sia contenuta esattamente in $\boldsymbol{a}$.

Se, per es., $\boldsymbol{b}$ è appunto il *metro* e si trova così che $\boldsymbol{a}$ è multiplo secondo un certo numero m di 1 mm., avremo senz' altro che il rapporto di $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ è

$$\frac{m}{1000}.$$

Ma anche se $\boldsymbol{a}$ non è multiplo di 1 mm., potremo in ogni caso determinare quale sia il massimo numero di millimetri contenuto in $\boldsymbol{a}$, e se questo è m, avremo che $\boldsymbol{a}$ supera m millimetri di un se-

gmento minore di un millimetro e perciò praticamente trascurabile; cosicchè potremo nella pratica sostituire al segmento a il multiplo secondo m di 1 mm., e assumere come rapporto (approssimato) di a ad un metro il numero $\frac{m}{1000}$.

Le considerazioni precedenti non solo conducono ad un procedimento pratico per la determinazione (approssimata) del rapporto di due grandezze; ma mettono in luce come *data una grandezza* A *incommensurabile con un' altra* B, *si possa considerare al posto della* A *una grandezza che sia commensurabile colla* B *e abbia dalla* A *una differenza praticamente trascurabile.*

Resta così giustificata dal punto di vista pratico la convenzione, che noi facciamo al n. seguente.

272. NEL SEGUITO, PARLANDO DI DUE GRANDEZZE OMOGENEE E DEL LORO RAPPORTO INTENDEREMO SEMPRE TACITAMENTE CHE ESSE SIANO COMMENSURABILI.

Tuttavia i teoremi che noi dimostreremo sotto questa ipotesi valgono in generale, il che si potrebbe dimostrare quando si fosse esteso il concetto del rapporto come è indicato al n. 269.

273. Teor. — *Date tre grandezze omogenee* A, B, C, *se* A *è maggiore di* B, *il rapporto di* A *a* C *è maggiore del rapporto di* B *a* C.

Se infatti è $\frac{m}{n}$ il rapporto di A a C e $\frac{p}{q}$ è il rapporto di B a C avremo (n. 266)

$$nA = mC, \quad qB = pC.$$

Di qui, prendendo le multiple q^{me} di nA, mC e le multiple n^{me} di qB, pC, ricaviamo

$$nqA = mqC; \quad nqB = npC.$$

Ma, essendo per ipotesi

$$A > B$$

avremo anche

$$nqA > nqB,$$

e quindi

$$mqC > npC.$$

Ciò vuol dire che il numero mq è maggiore di np, e da questa disuguaglianza

$$mq > np$$

ricaviamo, dividendo ambo i membri per nq,

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q},$$

cioè il rapporto di A a C è maggiore del rapporto di B a C.

274. Cor. — *Il rapporto di* A *a* B *è maggiore, uguale o minore di* 1 *secondo che* A *è maggiore, uguale o minore di* B.

275. Teor. — *Date tre grandezze omogenee* A, B, C, *il rapporto di* A + B *a* C *è uguale alla somma dei rapporti di* A *a* C *e di* B *a* C; *e, se* A *è maggiore di* B, *il rapporto di* A — B *a* C *è uguale alla differenza dei rapporti di* A *a* C *e di* B *a* C.

Dimostriamo la prima parte.

Se

$$A : C = \frac{m}{n}, \quad B : C = \frac{p}{q},$$

avremo

$$nA = mC, \quad qB = pC.$$

Di qui prendendo le multiple q^{me} di nA, mC e le multiple n^{me} di qB, pC, concludiamo

$$nqA = mqC, \quad nqB = npC$$

e, sommando membro a membro,

$$nqA + nqB = mqC + npC$$

ossia

$$nq(A + B) = (mq + np)C.$$

Ora quest'uguaglianza ci dice che il rapporto di $A + B$ a B è dato da

$$\frac{mq + np}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q},$$

cioè appunto dalla somma dei rapporti di A a C e di B a C.

Analogamente si dimostra la seconda parte del teorema.

276. Teor. — *Date tre grandezze* A, B, C, *il rapporto di* A *a* B *è uguale al quoto dei rapporti di* A *a* C *e di* B *a* C.

Se invero $\frac{m}{n}$ è il rapporto di A a C e $\frac{p}{q}$ è il rapporto di B a C avremo (n. 266),

$$nA = mC, \quad qB = pC,$$

e quindi

$$pnA = pmC, \quad qmB = pmC$$

e

$$pnA = qmB.$$

Di qui risulta (n. 266) che il rapporto di A a B è dato da

$$\frac{mq}{np} = \frac{m}{n} : \frac{p}{q},$$

cioè appunto dal quoto dei rapporti di A a C e di B a C.

Misura delle grandezze.

277. Le considerazioni svolte in questo capitolo ci permettono ormai di *misurare* le grandezze, cioè di rappresentarle per mezzo di numeri.

A tale scopo, presa a considerare una classe di grandezze (i segmenti, o i poligoni,...) si fissi in codesta classe una grandezza di paragone U, che si dirà *unità di misura*. Scelta un'altra grandezza qualsiasi A della classe considerata, si dirà *misura* di A rispetto all'unità U il rapporto di A ad U.

Così ad ogni grandezza (commensurabile con U) si fa corrispondere un numero (intero o frazionario) ben determinato, che è la sua misura; in particolare la misura dell'unità U è 1.

Viceversa, per ogni numero (intero o frazionario) $\frac{m}{n}$ vi è una grandezza ben determinata $m\frac{U}{n}$, che ammette, rispetto all'unità U, la misura prefissata $\frac{m}{n}$ (n. 267).

Grandezze uguali hanno (rispetto alla medesima unità) *misure uguali e viceversa.*

Le misure di grandezze disuguali sono disuguali nello stesso senso e viceversa (n. 273).

La somma (o la differenza) di due grandezze

ha per misura la somma o la differenza delle misure rispettive (n. 275).

278. Teor. — *Il rapporto di due grandezze è uguale al quoto delle rispettive misure* (rispetto ad una qualsiasi unità).

Le misure delle due grandezze A e B rispetto all'unità U siano ordinatamente $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$. Avremo per definizione,

$$A : U = \frac{m}{n}, \quad B : U = \frac{p}{q}.$$

Risulta allora dal n. 276 che il rapporto

$$A : B$$

è dato appunto dal quoto

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q}$$

delle misure di A e B.

279. Occorre, talvolta, specialmente nelle applicazioni, di dover cambiare l'unità di misura. Siamo così condotti a cercare *la relazione che passa fra le misure di una medesima grandezza rispetto a due diverse unità, di cui sia noto il rapporto.*

Data una grandezza A, di cui sia $\frac{m}{n}$ la misura rispetto all'unità U, si voglia determinare la misura della stessa A rispetto ad un'altra unità U', di cui si conosca il rapporto alla U. Sia precisamente

$$U' : U = \frac{p}{q}.$$

Allora dalle due uguaglianze

$$A : U = \frac{m}{n}, \quad U' : U = \frac{p}{q},$$

ricaviamo (n. 276)

$$A : U' = \frac{m}{n} : \frac{p}{q};$$

cioè *la misura di* A *rispetto all'unità* U′ *si ottiene dividendo la misura di* A *rispetto ad* U *per la misura della nuova unità* U′ *rispetto alla primitiva* U.

Lunghezza dei segmenti.

280. La misura di un segmento (rispetto ad un determinato segmento preso come unità) si dice più particolarmente *lunghezza.*

Come unità di misura delle lunghezze si può assumere un segmento arbitrario; ma è ben noto che nella pratica si usa il *metro* (1 m.), il cui *campione* è segnato sullo spigolo di un regolo di platino, che si conserva negli Archivi dello Stato Francese a Parigi ed è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, secondo le determinazioni della Commissione geodetica francese, nominata dall'Assemblea nazionale nel 1791. Veramente le determinazioni posteriori di archi di meridiano assodarono che il metro-campione differisce dalla 40000000ma parte aliquota del meridiano terrestre per circa $\frac{1}{5000}$ di essa.

Il metro si suddivide in 10, 100, 1000, 10000,.... parti uguali che si dicono rispettivamente *decimetri, centimetri, millimetri, decimillimitri,....* e un se-

gmento si misura cercando, col solito procedimento, quanti metri, quanti decimetri, quanti millimetri,.... esso contiene.

È anche noto come, per abbreviare la rappresentazione di grandi numeri di metri, si siano introdotti dei nomi speciali per indicare i multipli del metro, secondo le potenze di 10 (*decametro* [1 dam.], *ettometro* [1 hm.], *chilometro* [1 km.], *miriametro*).

Ampiezza degli angoli.

281. Per *misurare* gli angoli occorrerà fissare come unità un certo angolo determinato, che del resto si potrà scegliere ad arbitrio. Ad esso si farà corrispondere come misura il numero 1; e come misura di un altro angolo qualsivoglia si assumerà il *rapporto* dell'angolo considerato all'angolo-unità.

Nella pratica si adotta solitamente come unità fondamentale degli angoli la 90^a parte aliquota dell'angolo retto, che si dice *grado* e si scrive « 1° »; e si assumono come unità ausiliari il *minuto* che è la 60^a parte aliquota del grado, e il *secondo* che è la 60^a parte aliquota del minuto, e i summultipli decimali del secondo. Un minuto si scrive « 1′ » e un secondo « 1″ ».

La misura di un angolo in gradi, minuti, secondi,.... si dice anche *ampiezza* dell'angolo.

Nel disegno per trovare l'ampiezza degli angoli si usa il SEMICIRCOLO GRADUATO O RAPPORTATORE.

282. La Commissione del metro propose un sistema decimale di misurazione dell'angolo, in cui l'angolo retto vien diviso in 100 minuti, il minuto in 100 secondi, ecc.

Ma, per varie ragioni pratiche, codesto sistema di misurazione non ha avuto diffusione nelle applicazioni.

Area dei poligoni.

283. La misura di un poligono (e più in generale di una superficie) si dice più particolarmente *area*.

Come unità di misura delle aree si potrebbe assumere un qualsiasi poligono ben determinato: ma è noto che per semplicità si sceglie come unità il quadrato dell'unità delle lunghezze, cioè il *metro quadrato* (1 m^2).

Come unità ausiliari si assumono allora il *decimetro quadrato* (1 dm^2), il *centimetro quadrato* (1 cm^2), il *millimetro quadrato* (1 mm^2), e così pure il *decametro quadrato* (1 dam^2), l'*ettometro quadrato* (1 hm^2), il *chilometro quadrato* (1 km^2), cioè i quadrati che hanno per lato rispettivamente un decimetro, un centimetro, un millimetro o un decametro, un ettometro, un chilometro (1).

È pur noto come il metro quadrato contenga esattamente 100 dm^2, 10000 cm^2, 1000000 mm^2, ecc.

284. *Poligoni equivalenti hanno area uguale e*, viceversa, *poligoni aventi area uguale sono equivalenti* (n. 277).

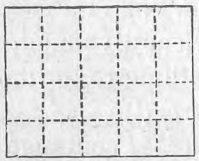
285. Per trovare l'area di un poligono P qualsivoglia, si trasformi codesto poligono nel rettangolo R, avente per base l'unità di misura delle lunghezze: è allora manifesto che la misura di R, e quindi di P, è uguale alla lunghezza dell'altezza di R.

---

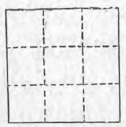
(1) Per misurare la superficie dei terreni si usano come unità il decametro quadrato e l'ettometro quadrato, che si chiamano, in tal caso, rispettivamente, *ara* (1 *a.*) ed *ettara* (1 *ha.*).

Ma, per alcuni poligoni, senza ricorrere alla trasformazione or ora indicata, si possono stabilire agevolmente alcune regole pratiche pel calcolo diretto dell' area.

286. AREA DEL RETTANGOLO. — Sia R un rettangolo, di cui i lati (consecutivi) siano commensurabili coll' unità: siano precisamente $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ le rispettive misure ridotte a denominatore comune (nella figura esse sono $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$). Se dividiamo i lati dell' unità U in n parti uguali, un segmento uguale ad una qualsiasi di queste si potrà riportare esattamente m volte sull' uno dei due lati di R e p volte sull' altro. Condotte allora tanto in U quanto in R dai punti di divisione dei lati le perpendicolari ad essi fino ad incontrare i lati opposti, veniamo a decomporre l' unità U in n^2 quadrati uguali e il rettangolo R in mp quadrati, uguali fra loro e ai precedenti. Abbiamo cioè che R è multiplo secondo mp del summultiplo secondo n^2 dell' unità (nella figura R è uguale a 20 volte la 9ª parte aliquota di U). Ne risulta che l' area di R è data da (n. 66)



R



U

$$\frac{mp}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n};$$

(nel caso della figura da

$$\frac{20}{9} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3};$$

possiamo quindi enunciare la seguente:

Regola. — *Per trovare l' area di un rettangolo si moltiplicano fra loro le lunghezze dei lati* (dimensioni dei lati).

Nota. — Nell' applicare la regola prec. bisogna, naturalmente, badare che le due dimensioni siano misurate rispetto alla stessa unità cioè tutte e due in *metri*, o tutte e due in *decimetri* e così via. E l' area risulta allora misurata rispettivamente in *metri quadrati* o in *decimetri quadrati* ecc.

287. Dalla regola del numero prec. risulta quest' altra

Regola. — *Data l' area di un rettangolo e una sua dimensione per trovare l' altra si divide l' area per la dimensione che si conosce.*

288. Supponiamo di non conoscere le lunghezze esatte dei lati di un rettangolo ma di averle misurate *con una certa approssimazione.* Con quale approssimazione si può determinare l' area del rettangolo? Riferiamoci per semplicità ad un esempio e supponiamo che le misure approssimate a meno di 1 mm. *per difetto* dei lati del nostro rettangolo R siano

m. 1,256 e m. 6,934.

Ciò vuol dire che uno dei lati è compreso fra m. 1,256 e m. 1,257 e l' altro fra m. 6,934 e m. 6,935; talchè il nostro rettangolo R sarà compreso fra il rettangolo R' avente i lati di

m. 1,256 e m. 6,934

e il rettangolo R'' avente i lati di

m. 1,257 e m. 6,935.

Ora l'area di R' e quella di R'' sono date rispettivamente (n. 286), da

$$m^2\ 8{,}709104 \text{ e } m^2\ 8{,}717295\ ;$$

e quindi l'area di R sarà compresa fra codesti due numeri, cosicchè la parte esatta della misura di R è data dalle cifre comuni ai due numeri suindicati cioè da

$$m^2\ 8{,}7.$$

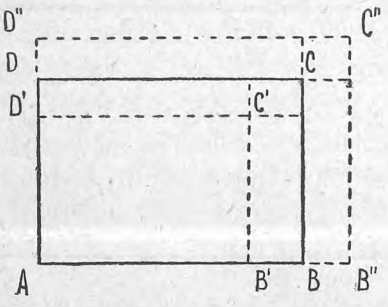
Abbiamo così l'area approssimata di R a meno di 10 dm^2 per difetto. Ma sarebbe *illusorio* il conservare le altre cifre di

$$m^2\ 8{,}709104$$

in quanto non si può assegnare il limite dell'approssimazione che esse danno.

289. L'esempio precedente mette in luce in qual modo si determinino le cifre esatte dell'area: inoltre esso mostra come partendo dalle misure dei lati approssimate a meno di 1 mm., l'area risulti determinata non già coll'approssimazione di 1 mm^2, ma con una approssimazione molto minore (nel nostro esempio di 10 dm^2).

Per renderci conto geometricamente di questo fatto, consideriamo il rettangolo $ABCD$ e supponiamo di sostituire ai lati AB, AD di esso rispettivamente certi segmenti minori AB', AD', come appunto si fa quando nelle misure di AB, AD ci fermiamo ad una certa approssimazione. La differenza fra il rettangolo $ABCD$ e il rettangolo $A'B'C'D'$ è data dall'esagono concavo (*gnomone*) $B'C'D'DCB$; e se a_1, a_2 sono le misure



di AB', AD' (*misure approssimate* per difetto di AB, AD) ed e_1, e_2 sono le misure di $B'B$, $D'D$ (*errori* commessi nella misurazione di AB, AD) l'area di codesto esagono (*errore* che si commette nella determinazione dell'area) è data da

$$a_1e_2 + a_2e_1 + e_1e_2$$

(e non già soltanto dal prodotto e_1e_2 dei due errori lineari).

Analogamente per l'approssimazione per eccesso.

290. Avvertiamo infine che osservazioni analoghe si possono ripetere ogni qual volta si calcoli praticamente un'area (o un volume).

291. QUADRATO. — Il quadrato è un rettangolo avente le due dimensioni uguali. Abbiamo quindi la

Regola. — *Per trovare l'area di un quadrato si moltiplica per sè stessa la lunghezza del lato* o, come si dice, *si fa la seconda potenza o quadrato della lunghezza del lato.*

292. Inversamente avremo la

Regola. — *Data l'area di un quadrato, per trovarne la lunghezza del lato si estrae la radice quadrata dell'area.*

293. PARALLELOGRAMMA. — Poichè un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo, avente la stessa base e la stessa altezza (n. 241), avremo la

Regola. — *Per trovare l'area di un parallelogramma si moltiplicano le lunghezze della sua base e della sua altezza,* o, come si dice brevemente, *si moltiplicano fra loro la base e l'altezza.*

294. Abbiamo di qui quest'altra

Regola. — *Date l'area e la base (o l'altezza) di un parallegramma, per trovare l'altezza (o la base) si divide l'area per la base (o per l'altezza).*

295. TRIANGOLO. — Sappiamo che un triangolo è equivalente ad un parallelogramma, avente la stessa altezza e la base metà (n. 248): risulta di qui la

Regola. — *Per trovare l'area di un triangolo, si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) della base e dell'altezza.*

296. Dalla regola del numero prec. ricaviamo la seguente

Regola. — *Data l'area di un triangolo e la sua altezza (o la sua base) si trova la base (o l'altezza) moltiplicando per 2 l'area e dividendo il risultato per la base (o per l'altezza).*

297. POLIGONO REGOLARE. — Risulta dal n. 251 la

Regola. — *Per trovare l'area di un poligono regolare si divide per metà il prodotto (delle lunghezze) del perimetro e dell'apotema.*

298. TRAPEZIO. Sappiamo infine che il trapezio è equivalente ad un triangolo avente per base la somma delle basi e per altezza l'altezza del trapezio (n. 250). Avremo quindi la

Regola. *Per trovare l'area di un trapezio si divide per 2 il prodotto (della lunghezza) dell'altezza per la somma (delle lunghezze) delle basi.*

Lasciamo enunciare per esercizio le regole (inverse) per il calcolo dell'altezza o di una base quando sono date l'area e le basi o l'area, l'altezza e una delle basi.

Applicazioni del teorema di Pitagora.

299. Applicando il teorema di PITAGORA (n. 245) si può trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscano le lunghezze dei due cateti; come

pure, note le lunghezze della ipotenusa e di un cateto, si può trovare la lunghezza dell'altro cateto.

Risulta infatti dal teorema di PITAGORA e dalla regola del n. 291 che *in un triangolo rettangolo il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei cateti.*

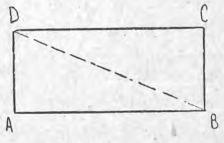
Discendono di qui le due regole seguenti:

Regola. — a) *Per trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) i cateti, si estrae la radice quadrata della somma dei quadrati (delle lunghezze) dei cateti.*

b) *Per trovare (la lunghezza di) un cateto di un triangolo rettangolo, di cui si conoscono (le lunghezze de) l'ipotenusa e (de) l'altro cateto, si estrae la radice quadrata della differenza dei quadrati (delle lunghezze) dell'ipotenusa e del cateto noto.*

Le regole precedenti tornano assai spesso utili nelle applicazioni. Qui ci limiteremo a indicare alcuni facili problemi, in cui si trae profitto da esse.

300. DIAGONALE DEL RETTANGOLO. — Un rettangolo $ABCD$ è diviso da una sua diagonale, per es. la BD, in due triangoli rettangoli (uguali), aventi per cateti due lati consecutivi del rettangolo e per ipotenusa comune la diagonale considerata,



cosicchè indicando con (AB), (AD),.. le lunghezze dei segmenti AB, AD,..., avremo

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2.$$

Discende di qui il

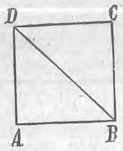
Teor. — *La lunghezza della diagonale di un rettangolo è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni.*

301. Analogamente riceviamo dalla regola *b*) del n. 209 che:

Teor. — *In ogni rettangolo, una delle due dimensioni*

è uguale alla radice quadrata della differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato dell' altra dimensione.

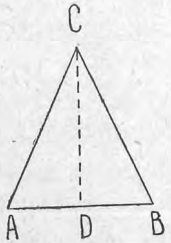
302. DIAGONALE DEL QUADRATO. — I triangoli rettangoli in cui un quadrato $ABCD$ è diviso da una diagonale sono isosceli; cosicchè come casi particolari dei nn. prec. avremo, per trovare la lunghezza d della diagonale di un quadrato quando è dato il lato a, oppure il lato quando è data la diagonale, le due formole seguenti:



$$d = \sqrt{2}a = 1{,}4142... \times a$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} d = 0{,}7071... \times d$$

303. LATO, ALTEZZA E BASE DEL TRIANGOLO ISOSCELE. — Un triangolo ABC isoscele sulla base AB è diviso dall' altezza CD in due triangoli rettangoli uguali, aventi un cateto uguale alla metà della base AB e l' altro uguale all' altezza CD di ABC. Potremo allora valerci delle regole del n. 299 per trovare il lato o l' altezza o la base quando si conoscano gli altri due elementi.



Posto

$$(AB) = b, \quad (AC) = l, \quad (CD) = h,$$

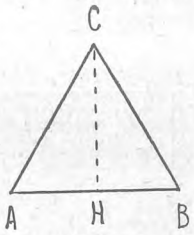
avremo

$$l = \sqrt{\frac{b^2}{4} + h^2}, \quad b = 2\sqrt{l^2 - h^2}, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

304. Se in un poligono regolare si congiunge il centro con due vertici consecutivi si ottiene un triangolo isoscele, che ha per *base*, *lato* ed *altezza* rispettivamente il *lato*, il *raggio* e l' *apotema* del poligono regolare.

Perciò ricordando il n. prec., avremo che *basterà conoscere due dei tre elementi di un poligono regolare: lato, raggio ed apotema, per trovare il terzo.*

305. LATO E ALTEZZA DI UN TRIANGOLO EQUILATERO. — Un triangolo equilatero ABC è diviso dall' altezza CH in due triangoli rettangoli uguali, in cui l' ipotenusa è doppia di uno dei cateti. L' altro cateto è l' altezza del triangolo equilatero.



Il quadrato di CH sarà equivalente alla differenza dei quadrati di AC e AH. Ma poichè AH è metà di AC il suo quadrato sarà la quarta parte del quadrato di AC: cosicchè avremo che: *In ogni triangolo equilatero il quadrato dell' altezza è equivalente ai* $\frac{3}{4}$ *del quadrato del lato, e quindi il quadrato del lato è equivalente ai* $\frac{4}{3}$ *del quadrato dell' altezza.*

Posto, cioè,

$$AB = a, \quad CH = h,$$

avremo

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 0{,}1692.... \times a$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} h = 1{,}1546.... \times h.$$

306. Siccome l' altezza del triangolo equilatero avente un lato dato è uguale all' apotema dell' esagono regolare che ha il medesimo lato, così *dato il lato di un esagono regolare potremo calcolarne l' apotema e viceversa.*

ESERCIZI

1. Il perimetro di un rettangolo è di m. 52 e la base è tripla dell'altezza. Qual'è l'area del rettangolo?

2. Di due rettangoli equivalenti l'uno è lungo m. 117 e largo m. 35, l'altro è lungo m. 65: quanto è largo questo secondo rettangolo?

3. Un giardino rettangolare di m. 28,4 di lunghezza e m. 15,8 di larghezza è traversato parallelamente ai lati da una strada nel senso della lunghezza, larga dm. 11,5 e da due sentieri nel senso della larghezza, larghi cm. 95. Qual'è l'area delle strade? Quale quella del terreno coltivato?

4. Una piazza lunga m. 54 e larga m. 36 si vuol selciare con lastre di granito lunghe m. 1,20 e larghe m. 0,90. Quante lastre occorreranno?

5. Si sono spese L. 131,04 per pavimentare di mattonelle di cemento una camera rettangolare lunga m. 5,20 e larga m. 4,80. Quanto costano codeste mattonelle al m^2?

6. Si vuol tappezzare in carta una stanza rettangolare lunga m. 6,50, larga m. 5 e alta m. 4, lasciando scoperto uno zoccolo alla base delle pareti alto m. 0,70 e una fascia in alto di cm. 30. Nella stanza vi sono due finestre di m. 0,90 per m. 1,95 e due porte di m. 1 per m. 2. Quanti rotoli di carta occorrono se ogni rotolo è lungo m. 12 e largo m. 0,50?

7. Qual'è l'area di una fascia larga cm. 35 intorno ad una porta rettangolare larga m. 1,20 e alta m. 2,50?

8. Lungo la facciata lunga m. 24 di una casa a pianta rettangolare e lungo i due fianchi lunghi ciascuno m. 17 si

vuol costruire un marciapiedi largo 1 metro con mattonelle quadrate di cemento di cm. 20 di lato. Quanto si spenderà se codeste mattonelle costano (mano d'opera compresa) L. 4,50 al m^2? Quante mattonelle occorreranno?

9. Quale lunghezza si dovrà dare al lato di una tavola quadrata perchè la sua area sia uguale a quella di una tavola rettangolare lunga m. 2,30 e larga m. 1,20?

10. Se la funicella che dà il perimetro di un quadrato si allunga di m. 2, il quadrato che essa può esattamente circondare supera il quadrato primitivo di dm^2 225. Quant'era lunga dapprima la funicella? [Di quanto il lato del nuovo quadrato supera il lato del quadrato primitivo? Il quadrato della somma di due segmenti di quanto supera il quadrato di uno di essi? Cfr. n. 236].

11. Se il lato di un quadrato si diminuisce di cm. 5 la sua area diminuisce di cm^2 255. Qual'era il lato del quadrato considerato? [Cfr. la traccia dell'es. prec.].

12. Calcolare l'area di un parallelogramma la cui base è dm. 25,9 e l'altezza dm. 4,37.

13. L'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto dei due cateti.

14. L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle due diagonali.

15. L'area di un quadrangolo è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

16. Un appezzamento di terreno di forma triangolare avente una base di m. 200 e l'altezza di m. 115 è stato pagato L. 5 il m^2 ed è costato quanto un altro appezzamento di terreno, rettangolare e avente un lato di m. 120, il quale è stato pagato L. 6 il m^2. Qual'è l'altra dimensione di quest'ultimo terreno?

17. Calcolare l'area di un triangolo di cui la base è di cm. 28,5 e l'altezza è uguale ai $\frac{5}{3}$ della base.

18. L'area di un triangolo è mq. 325,85 e l'altezza è m. 38. Qual'è la base?

19. Trovare la base e l'altezza di un triangolo di m^2 0,98 di area, sapendo che esse sono uguali.

20. L'altezza di un triangolo di dm^2 0,54 di area è uguale ai $\frac{3}{4}$ della base. Trovare le lunghezze della base e dell'altezza.

21. Calcolare l'area di un trapezio avente l'altezza di m. 36,20 e le basi di m. 75,70 e m. 85,80.

22. Determinare l'altezza di un trapezio, la cui area è mq. 223,875 e i cui lati paralleli sono rispettivamente di m. 13,5 e di m. 6,4.

23. Determinare le aree dei due trapezi, in cui il trapezio dell'eserc. prec. è diviso dalla congiungente dei due punti medi dei due lati non paralleli.

24. L'area di un trapezio è mq. 542,5, l'altezza è m. 21,7 e la differenza dei due lati paralleli è m. 11,2. Quali sono codesti due lati?

25. Qual'è il perimetro di un triangolo rettangolo isoscele di m^2 2,88 di area? [Siffatto triangolo si può riguardare come un mezzo quadrato....].

26. In un quadrato $ABCD$ di dm. 3,37 di lato si prendono sui lati i quattro punti E, F, G, H in modo che dia

$$AE = BF = CG = DH = \text{cm. } 2{,}5.$$

Qual'è l'area del quadrato $EFGH$?

27. Costruito un triangolo OAB isoscele e rettangolo in A, di 1 cm. di lato, si innalzi in B, dalla parte opposta di A, la perpendicolare alla OB e si prenda su di esso il segmento $BC = 1$ cm.; poi innalzata in C (da parte opposta di B) la perpendicolare alla OC, si prenda su di essa $CD = 1$ cm. e così via. Quali sono le lunghezze dei lati della poligonale $ABCDE$.... che così si ottiene?

28. Dato un numero, che sia somma di due quadrati (come $5 = 1 + 2^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $10 = 1 + 3^2$, $13 = 2^2 + 3^2$,...), se ne trovi la radice quadrata per mezzo del disegno.

29. Trovare l'altezza (relativa all'ipotenusa) di un triangolo rettangolo, i cui cateti siano di m. 1,6 e m. 6,3. [Qual'è l'area di codesto triangolo? Si ricordino inoltre i nn. 248, 294].

30. Il lato di un quadrato è di mm. 27 [oppure di cm. 3,8 oppure di m. 2,08]: qual'è il lato del quadrato doppio o quintuplo o metà del dato?

31. Una scala è composta di 17 gradini alti ciascuno cm. 12 e larghi cm. 35. Qual'è la distanza degli spigoli del primo e dell'ultimo gradino?

32. Un'antenna alta m. 12,60 è fissata al suolo verticalmente mediante cinque fili di ferro che vanno dalla cima dell'antenna a cinque piuoli infitti nel terreno a m. 3,20 dal piede di essa. Quanto sarà lungo ciascun filo?

33. Dato un quadrato di cm. 24 di lato, si costruisce su ciascun lato di esso come base un triangolo isoscele avente i lati uguali di cm. 37. Qual'è l'area della stella a quattro punte che così si ottiene?

34. Qual'è l'area di un rombo avente una diagonale di cm. 26 e il perimetro di m. 3,40?

35. Il tetto di una torre a base quadrata è formato da quattro triangoli isosceli di m. 7,20 di base e il vertice del tetto è a m. 10,50 dal piano del cornicione. Quale sarà la superficie di codesto tetto?

36. Quanto distano i lati opposti di un esagono avente un perimetro di dm. 15^2?

37. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area il numero $\frac{3}{5}a^2$?

VI.

GRANDEZZE PROPORZIONALI - POLIGONI SIMILI

Coppie proporzionali di grandezze.

307. Def. — Se due grandezze omogenee hanno rapporto uguale al rapporto di altre due grandezze pure omogenee fra loro, si dice che le quattro grandezze sono *in proporzione* o che le due *coppie* date sono *proporzionali.*

Se si indicano con A, B e C, D le due coppie considerate di grandezze (A omogenea a B, C omogenea a D), la loro proporzionalità si esprimerà scrivendo:

$$A : B = C : D.$$

Si legge: « A sta a B come C sta a D ».

Per verificare se due coppie A, B e C, D di grandezze sono in proporzione, dobbiamo, per definizione, determinare il rapporto di A a B; se (supposto che A e B siano commensurabili) è $\frac{m}{n}$ il loro rapporto, ossia si ha

$$A = \frac{m}{n} B,$$

dovrà essere anche

$$C = \frac{m}{n} D.$$

308. Nella proporzione

$$A : B = C : D$$

le quattro grandezze A, B, C, D si dicono *termini;* A e C si dicono gli *antecedenti,* B e D i *conseguenti,* ed A e D, B e C si dicono rispettivamente *estremi* e *medi.*

309. Se

$$A : B = C : D$$

D si dice *quarta proporzionale* dopo A, B, C.

Date due grandezze A, B il cui rapporto sia $\frac{m}{n}$, e presa una terza grandezza C qualsivoglia, si costruisce in modo determinato la quarta proporzionale dopo A, B, C; essa invero è data da $\frac{n}{m} C$, cioè dalla multipla secondo n della summultipla m^{ma} di C.

310. La proporzione

$$A : B = B : C,$$

in cui i medi sono uguali (per il che si richiede che le tre grandezze A, B, C, siano omogenee) si dice *proporzione continua.* In tal caso C si dice *terza proporzionale* dopo A e B, e B si dice *media proporzionale* fra A e C.

311. Abbiamo, dalla definizione del n. 307, che se A, B, C, D sono quattro grandezze in proporzione, ed è $A > B$, onde il rapporto di A a B sarà maggiore dell'unità (n. 274), sarà tale anche il rapporto di C a D, e avremo quindi $C > D$.

Si vede similmente che, secondochè è $A = B$ o $A < B$, sarà rispettivamente o $C = D$ o $C < D$.

Discende ancora dalla definizione che in una proporzione si può sostituire ad una qualsiasi delle quattro una grandezza uguale.

Da ultimo abbiamo che, se due coppie di grandezze sono proporzionali ad una terza, sono anche proporzionali fra loro, cioè se

$$A : B = E : F \quad \text{e} \quad C : D = E : F$$

si ha ancora che

$$A : B = C : D.$$

Grandezze proporzionali e loro misure.

312. È noto che quattro numeri, in un dato ordine, si dicono in proporzione, quando il quoziente del primo e del secondo è uguale al quoziente del terzo e del quarto. Allora, ricordando il resultato del n. 278, otteniamo subito il

Teor. — *Se le due coppie di grandezze* A, B *e* C, D *sono proporzionali, le misure di* A *e* B *rispetto ad una qualsiasi unità, e le misure di* C *e* D *rispetto ad una qualsiasi unità, sono anch' esse in proporzione e viceversa.*

Invero se sono a e b le misure di A e B rispetto ad una unità U e c, d sono le misure di C e D rispetto ad una qualsiasi unità U', abbiamo (n. 278)

$$A : B = \frac{a}{b}, \quad C : D = \frac{c}{d};$$

e quindi la proporzionalità di A, B, C, D equivale senz' altro alla proporzione numerica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ossia

$$a : b = c : d.$$

Viceversa, se supponiamo verificata quest' ultima proporzione numerica, ne ricaviamo senz' altro l' uguaglianza dei due rapporti

$$A : B \quad \text{e} \quad C : D$$

Nota. — Nel caso particolare in cui le quattro grandezze proporzionali A, B, C, D siano tutte omogenee, potremo misurarle rispetto ad una medesima unità di misura, e le quattro misure così ottenute saranno in proporzione.

Proporzioni dedotte da una data.

313. Insieme con una proporzione sussistono, fra le medesime quattro grandezze, altre proporzioni che si dicono « dedotte » dalla data.

Si hanno cioè i teoremi seguenti:

Teor. — *Se*

$$\text{A} : \text{B} = \text{C} : \text{D},$$

sussistono, insieme colla data, le proporzioni che si ottengono nel modo seguente:

1) invertendo, *cioè,*

$$\text{B} : \text{A} = \text{D} : \text{C};$$

2) componendo, *cioè,*

$$\text{A} + \text{B} : \text{B} = \text{C} + \text{D} : \text{D};$$

3) dividendo, *cioè (sotto l' ipotesi* $\text{A} > \text{B}$ *e, quindi,* $\text{C} > \text{D}$)

$$\text{A} - \text{B} : \text{B} = \text{C} - \text{D} : \text{D}.$$

Siano infatti a, b le misure di A e B rispetto ad una unità di misura U; c, d le misure di C e D rispetto ad una qualsiasi misura U'. Dalla supposta proporzionalità di A, B, C, D discende (n. prec.) la proporzione numerica

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

e di qui, in base a noti teoremi di Aritmetica, si ricavano le proporzioni numeriche

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

le quali, pel n. prec., ci dicono appunto che valgono le proporzioni fra grandezze geometriche 1), 2) e 3).

314. Teor. — *Se*

$$A : B = C : D$$

e queste quattro grandezze sono omogenee, sussistono, insieme con la data, le proporzioni che si ottengono permutando i medi e gli estremi, *cioè*,

$$A : C = B : D,$$
$$D : B = C : A.$$

Siano invero a, b, c, d le misure di A, B, C, D rispetto ad una determinata unità (omogenea alle quattro grandezze date).

Avremo, per la supposta proporzionalità di A, B, C, D (n. 312) la proporzione numerica

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

dalla quale discendono, per noti teoremi di Aritmetica, le proporzioni

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

e

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a};$$

e queste due ultime uguaglianze ci dicono appunto (n. 312) che sussistono le proporzioni fra grandezze geometriche

$$A : C = B : D$$
$$D : B = C : A.$$

315. Cor. — *Se due proporzioni fra grandezze omogenee hanno uguali i conseguenti, gli antecedenti sono proporzionali.*

Se

$$A : B = C : D, \quad E : B = F : D$$

avremo anche (n. prec.)

$$A : C = B : D, \quad E : F = B : D$$

e quindi

$$A : C = E : F$$

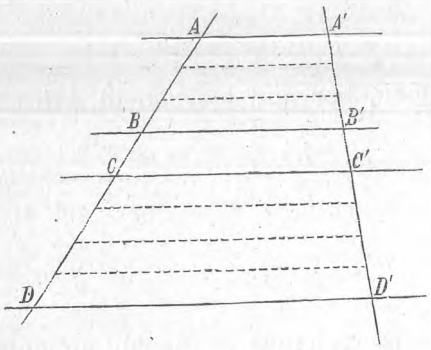
ossia

$$A : E = C : F.$$

Teorema di Talete e sue conseguenze.

316. Teor. (di TALETE). — *Se più parallele sono segate da due trasversali, due segmenti quali si*

vogliano dell' una sono proporzionali ai due segmenti corrispondenti dell' altra.



Date le parallele AA', BB', CC', DD', e le trasversali AD, $A'D'$, diciamo anzitutto che le coppie di segmenti AB, CD e $A'B'$, $C'D'$ sono proporzionali.

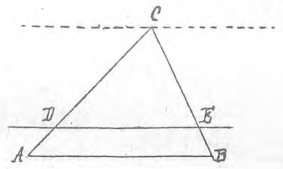
Supponiamo che il rapporto di AB a CD sia $\frac{m}{n}$ $\left(\text{nella figura è } \frac{m}{n}=\frac{3}{4}\right)$.

Allora diviso AB in m parti uguali e CD in n parti uguali, ciascuna parte di AB risulterà uguale a ciascuna parte di CD. Condotta per ogni punto di divisione la parallela alla AA', fino ad incontrare la retta $A'D'$, avremo che i segmenti $A'B'$, $C'D'$ resteranno divisi rispettivamente in m, n parti tutte uguali fra loro (n. 142), onde si conclude che la m^{ma} parte aliquota di $A'B'$ è uguale alla n^{ma} parte aliquota di $C'D'$, cioè il rapporto di $A'B'$ a $C'D'$ è uguale ad $\frac{m}{n}$. Si ha dunque veramente che

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

317. Come caso particolare del teorema precedente abbiamo che *in un triangolo una parallela ad un lato, che incontri gli altri due, li divide in segmenti proporzionali.*

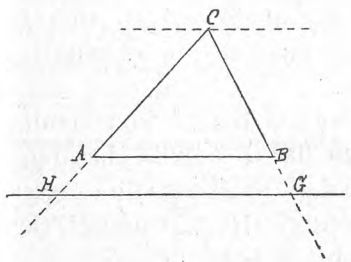
Dato il triangolo ABC e la parallela DE ad AB, la quale intersechi il lato AC in un punto D, e quindi il lato BC in un altro punto E, si consideri il gruppo di parallele formato dalle rette AB, DE e dalla parallela ad esse per C, intersecate dalle AC, BC. Si ha allora (n. prec.) che i segmenti AD, DC, BE, EC sono proporzionali.

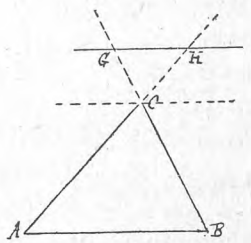


Sono per la stessa ragione proporzionali i segmenti AC, DC, BC, EC.

Proporzioni analoghe si ottengono da una retta parallela ad un lato d' un triangolo che seghi i prolungamenti degli altri due.

Così, p. es., se una retta parallela al lato AB del triangolo ABC interseca rispettivamente in H, G i



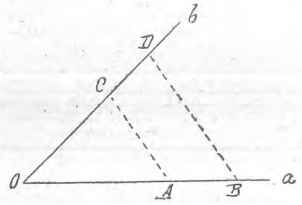


prolungamenti degli altri due lati AC, BC, avremo che

$$AH : AC = BG : BC$$
$$AH : CH = BG : CG.$$

318. Probl. — *Dati tre segmenti, costruire il quarto proporzionale dopo i segmenti dati.*

Prese per un punto O due rette distinte a, b, i segmenti OA, AB, OC siano rispettivamente uguali ai segmenti dati nell' ordine dato. Congiunto A con C, si conduca da B la parallela alla AC fino ad incontrare la b in D.



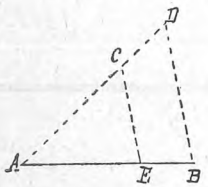
Il segmento CD è il quarto proporzionale in ordine ad OA, AB, OC, perchè, pel teorema di TALETE,

$$OA : AB = OC : CD.$$

319. Come caso particolare della costruzione precedente, se $AB = OC$, si ha la *costruzione del terzo proporzionale dopo tre segmenti dati.*

320. Probl. — *Dividere un segmento dato in parti proporzionali a due segmenti dati.*

Sia da dividere il segmento AB in due parti proporzionali a due segmenti dati $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.



Condotta per A una semiretta distinta da AB e dalla sua opposta, si prendano su di essa due segmenti consecutivi AC, CD uguali rispettivamente ai due segmenti $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Congiunto D con B, la parallela per C alla DB incontrerà il segmento AB in un punto interno E, tale che, pel teorema di TALETE,

$$AE : EB = AC : CD$$

ossia

$$AE : EB = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}.$$

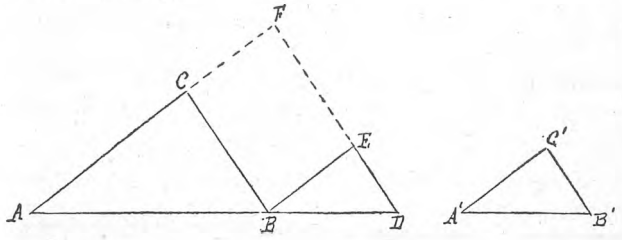
321. Osservazione. — Se si divide il segmento AB in due parti diverse da AE ed EB, esse hanno un rapporto diverso da $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$. Se infatti è $\boldsymbol{h}$ un qualsiasi segmento, è manifestamente

$$AE + \boldsymbol{h} : EB - \boldsymbol{h} > \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$$
$$AE - \boldsymbol{h} : EB + \boldsymbol{h} < \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}.$$

322. Teor. — *Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali (essendo omologhi i lati opposti ad angoli uguali).*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ tali che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ siano ordinatamente uguali ad $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$. Diciamo che sono proporzionali i lati che comprendono angoli uguali, come, p. es., AC, $A'C'$, AB, $A'B'$.

Infatti sul prolungamento del lato AB si prenda, a partire da B, il segmento BD uguale ad $A'B'$, e sopra BD, dalla stessa parte di C rispetto alla AB, si costruisca il triangolo BDE uguale ad $A'B'C'$ (n. 89 o n. 195).



Dall' uguaglianza degli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DBE}$ concludiamo che le AC, BE sono parallele (n. 64, II) e quindi che le rette AC, DE si incontrano in un punto F (n. 69). Così dall' uguaglianza degli angoli

$\widehat{CBA}$, $\widehat{EDB}$ deduciamo che le rette BC, DF sono parallele.

Il quadrangolo $BEFC$ è dunque un parallelogramma, onde risulta (n. 123, 2) che CF è uguale a BE.

Nel triangolo ADF la BC è parallela al lato DF e perciò (n. 317)

$$AB : BD = AC : CF.$$

Essendo $BD = A'B'$, $CF = A'C'$, sussisterà anche la proporzione

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Analogamente si dimostra che

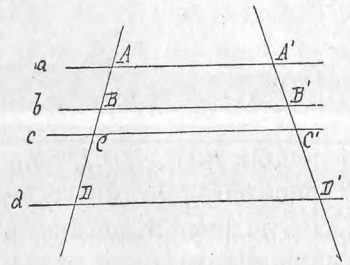
$$AC : A'C' = BC : B'C'$$
$$BC : B'C' = AB : A'B'.$$

Vediamo ora come si possano invertire i teoremi dati nei nn. 316, 317, 322.

323. Il teorema di TALETE, relativo a quattro parallele, esprime la proporzionalità dei segmenti segati dalle quattro parallele sopra due trasversali. Si può invertire questo teorema, considerando quattro rette

$$AA', \quad BB', \quad CC', \quad DD',$$

le quali seghino su due trasversali due coppie di segmenti AB, CD e $A'B'$, $C'D'$ in proporzione, e tali che le prime tre siano parallele fra loro.



Nel caso in cui D, D' cadano dalla medesima parte rispetto alla retta CC' (cioè quando i segmenti AB, CD e $A'B'$, $C'D'$ siano

ugualmente disposti rispetto alle rette a, b, c, d) si dimostra che la d è parallela alle altre tre. Ciò si esprime in parole enunciando il seguente

Teor. — *Se due coppie di rette segano sopra due trasversali coppie di segmenti ugualmente disposti e proporzionali, e delle quattro rette tre sono parallele, anche la quarta è parallela ad esse.*

Le tre rette a, b, c, fra loro parallele, e la quarta d seghino su due trasversali le due coppie di segmenti ugualmente disposti AB, CD e $A'B'$, $C'D'$, tali che

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Diciamo che la retta d è parallela alle altre tre.

Infatti la parallela per D alle a, b, c, interseca la $A'B'$ in un punto D'_1, tale che (n. 316)

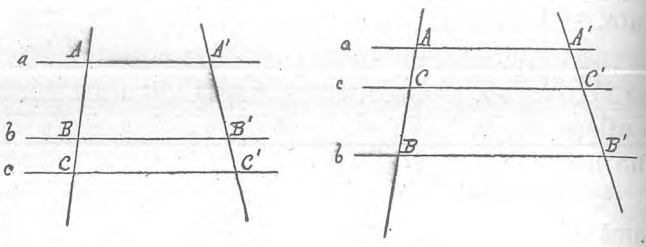
$$AB : CD = A'B' : C'D'_1.$$

Da questa proporzione e dalla supposta risulta, per la unicità della quarta proporzionale (n. 309) che $C'D' = C'D'_1$, e, poichè D' cade rispetto alla c dalla stessa parte di D, e quindi di D'_1, se ne conclude che D'_1 coincide con D', ossia che la d è parallela alle a, b, c.

324. Col medesimo ragionamento si stabilisce la seguente proposizione, che inverte il teorema di TALETE relativo a tre parallele.

Teor. — *Se tre rette* a, b, c, *segano sopra due trasversali segmenti ugualmente disposti e proporzionali, e le rette* a, b *sono parallele, anche la* c *è parallella ad essa.*

325. Immaginando che A coincida con A' abbiamo,



come caso particolare del precedente teorema, la seguente proposizione:

Dato un triangolo ABB', *se una retta ne interseca i lati* AB, AB' *o i loro prolungamenti in due punti* C, C' tali che

$$AB : BC = AB' : B'C',$$

o che

$$AB : AC = AB' : AC',$$

la retta CC' *è parallela al lato* BB'.

326. Il teorema di TALETE relativo al caso di parallele si può anche invertire nel modo seguente, che offre un interesse maggiore di quello del n. 324.

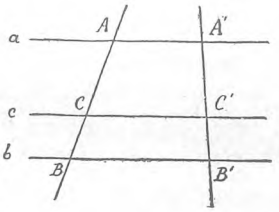
Teor. — *Se i segmenti intersecati da due rette parallele sopra due trasversali sono divisi in parti proporzionali da una terza retta, questa è parallela alle prime due.*

I segmenti AB, $A'B'$ intersecati dalle due parallele a, b su due trasversali, siano divisi da una terza retta c nei punti C, C', in modo che

$$AC : CB = A'B' : C'B'.$$

Diciamo che la c è parallela alle a, b. Infatti, componendo la proporzione data, si ha che (n. 313)

$$AB : CB = A'B' : C'B',$$



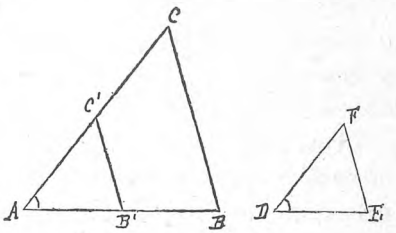
e allora dal n. 324 discende che la c è parallela alle a, b.

327. Immaginando che A, coincida con A', abbiamo, come caso particolare del teorema precedente, che *se in un triangolo una retta divide due lati in parti proporzionali, essa è parallela al terzo lato.*

Invertito il teorema di TALETE, possiamo invertire il teorema che da quello abbiamo dedotto.

Il teorema del n. 322 si può invertire in due modi, che noi enunciamo nei due numeri seguenti.

328. Teor. — *Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, e un lato del primo angolo sta ad un lato del secondo come l' altro lato del primo sta all' altro lato del secondo, i due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali.*



Siano i triangoli ABC, DEF i quali abbiano gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{EDF}$ uguali, e i lati AC, AB, DF, DE tali che

$$AC : DF = AB : DE.$$

Diciamo che gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ sono rispettivamente uguali ad $\widehat{FED}$, $\widehat{DFE}$.

Possiamo supporre che i lati in proporzione siano disuguali, perchè se fosse $AC = DF$, e quindi, per il n. 311, $AB = DE$, i due triangoli sarebbero uguali e il teorema sarebbe dimostrato. Supponiamo $AC > DF$ e quindi (n. ora citato) $AB > DE$.

Si prenda allora su AC il segmento AC' uguale a DF, e su AB il segmento AB' uguale a DF. I triangoli $AB'C'$ e DEF, avendo uguali ordinatamente due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 87).

D'altra parte abbiamo per ipotesi che

$$AC : AC' = AB : AB'.$$

Ne discende che la $B'C'$ è parallela alla BC (n. 325), onde concludiamo che gli angoli $C\widehat{B'}A$, $A\widehat{C'}B'$ sono rispettivamente uguali agli angoli $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$, e quindi che i due triangoli ABC, DEF hanno gli angoli ordinatamente uguali.

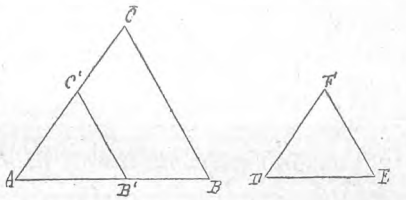
329. Teor. — *Se in due triangoli ad ogni lato dell'uno si può far corrispondere un lato dell'altro, in modo che le coppie di lati corrispondenti siano proporzionali, i due triangoli hanno uguali ordinatamente gli angoli* (essendo uguali gli angoli opposti ai lati corrispondenti).

Dati i due triangoli ABC, DEF supponiamo che sussistano le proporzioni

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD$$

Diciamo che gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sono rispettivamente uguali agli angoli $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$.

Se è $AB = DE$ ne risulta (n. 311) $BC = EF$, $CA = FD$, onde i due triangoli sono uguali e hanno quindi gli angoli ordinatamente uguali.



Supponiamo in secondo luogo $AB > DE$; sarà allora (n. 311) $BC > EF$, $CA > FD$. Si prendano allora su AB il segmento AB' uguale a DE, e su AC il segmento AC' uguale a DF. Congiunto B' con C', la retta $B'C'$ determina sui lati del triangolo ABC i segmenti AB', AC' tali che

$$AB : AB' = AC : AC'.$$

Risulta di qui (n. 325) che la $B'C'$ è parallela alla BC, e quindi gli angoli $C\widehat{B'}A$, $A\widehat{C'}B'$ sono uguali rispettivamente a $C\widehat{B}A$, $A\widehat{C}B$. Allora i due triangoli ABC, $AB'C'$, avendo gli angoli uguali, hanno i lati proporzionali (n. 322), e in particolare

$$AB : AB' = BC : B'C'.$$

Ma per ipotesi

$$AB : DE = BC : EF.$$

Poichè AB' è uguale per costruzione a DE, ricaviamo dalle due ultime proporzioni che $B'C'$ è uguale ad EF (n. 309) e quindi che i due triangoli $AB'C'$, DEF, avendo i lati ordinatamente uguali, sono uguali (n. 94). Concludiamo di qui che i due triangoli ABC, DEF hanno gli angoli ordinatamente uguali.

Parallelogrammi e segmenti proporzionali.

330. Teor. — *Due parallelogrammi di uguale altezza sono proporzionali alle basi e, viceversa, due parallelogrammi che siano proporzionali alle basi hanno altezze uguali.*

Siano in primo luogo P, P' due parallelogrammi di uguale altezza.

Se h è la misura della loro altezza e se b, b' sono le misure delle basi rispettive, le aree di P, P' sono date da (n. 286)

$$hb, \quad hb',$$

cosicchè il rapporto $P : P'$ sarà uguale (n. 278) ad

$$\frac{hb}{hb'}$$

ossia a

$$\frac{b}{b'}.$$

Ma questo è appunto il rapporto delle basi, cosicchè P, P' sono proporzionali alle loro basi.

In secondo luogo supponiamo che due parallelogrammi P, P' siano proporzionali alle loro basi.

Allora il rapporto $P : P'$ sarà uguale a quello delle basi (n. 307), ossia, se b, b' sono le misure di codeste basi, a

$$\frac{b}{b'}.$$

Ma se h, h' sono le altezze di P, P' rispettivamente, le loro aree saranno (n. 286)

$$hb, \quad h'b'$$

e il rapporto $P : P'$ sarà (n. 278)

$$\frac{hb}{h'b'}.$$

Dovendo essere per quanto si è visto or ora

$$\frac{b}{b'} = \frac{hb}{h'b'},$$

concludiamo

$$h = h';$$

cioè i due parallelogrammi debbono avere altezze uguali.

331. Nota. — Il teor. prec. si estende senz'altro ai triangoli.

332. Def. — Due classi di grandezze si dicono *proporzionali* se si possono far corrispondere le loro grandezze in modo che:

1) ad ogni grandezza dell'una corrisponda una grandezza ed una sola dell'altra;

2) due grandezze *quali si vogliano* dell'una classe e le grandezze corrispondenti dell'altra siano proporzionali.

Potremo dunque dire che sono classi di grandezze proporzionali:

1) le due classi di segmenti intersecati su due trasversali dal sistema di tutte le parallele ad una retta data;

2) la classe dei triangoli o dei parallelogrammi aventi una data altezza, e la classe delle rispettive basi.

Segmenti proporzionali e rettangoli equivalenti.

Ci proponiamo ora di mettere in relazione la teoria delle proporzioni fra segmenti colla teoria della equivalenza fra poligoni. Il fondamento di codesta relazione è dato dal seguente teorema, che si dimostra in base al n. 312.

333. Teor. — *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi.*

Viceversa, se quattro segmenti in un certo ordine sono tali che il rettangolo del primo e del quarto sia equivalente a quello del secondo e del terzo, i quattro segmenti formano una proporzione.

Siano a, b, c, d quattro segmenti tali che

$$a : b = c : d$$

e siano a, b, c, d, le misure rispettive (rispetto ad una qualsiasi unità). Avremo allora fra codeste quattro misure l'uguaglianza (n. 312)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

onde risulta

$$ad = bc;$$

e quest'ultima uguaglianza ci dice (n. 286) che l'area del rettangolo di a e d è uguale a quella del rettangolo di b e c; cioè appunto codesti due rettangoli sono equivalenti.

Reciprocamente, se codesti due rettangoli sono equivalenti, le loro aree saranno uguali e avremo (n. 286)

$$ad = bc.$$

Di qui si ricava l'uguaglianza

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e quindi (n. 312) la proporzionalità dei segmenti a, b, c, d.

334. Nota. — Se due classi di grandezze sono riferite fra loro in modo, che:

1) ad ogni grandezza dell'una corrisponda una grandezza ed una sola dell'altra;

2) prese due grandezze *quali si vogliano* A, B della prima classe e le corrispondenti A', B' della seconda, si abbia sempre

$$A : B = B' : A',$$

si dice che le due classi di grandezze considerate sono *inversamente proporzionali* (cfr. n. 332).

Ciò posto, possiamo dire, in base al n. prec., che: *Se si considerano tutti i rettangoli equivalenti ad un dato, le basi di essi sono inversamente proporzionali alle corrispondenti altezze.*

335. Si ha come caso particolare del teorema del n. 333 che *se tre segmenti sono in proporzione continua, il quadrato del medio è equivalente al rettangolo degli altri due. Viceversa, se tre segmenti sono tali che il quadrato del medio è equivalente al rettangolo degli altri due, i tre segmenti sono in proporzione continua.*

336. Nota. — La proposizione del n. 333 fornisce una condizione necessaria e sufficiente, affinchè quattro segmenti siano in proporzione, e quindi dà un modo semplice di verificare la proporzionalità fra coppie di segmenti. Precisamente essa stabilisce: dire che fra quattro segmenti a, b, c, d sussiste la proporzione

$$a : b = c : d,$$

è lo stesso che affermare essere il rettangolo di a e d equivalente al rettangolo di b e c.

Codesta proposizione si estende anche al caso delle proporzioni fra segmenti incommensurabili. E quindi, indipendentemente dalla commensurabilità, può essere assunta come criterio di verifica (o come definizione) di una proporzione fra segmenti, l'equivalenza del rettangolo degli estremi e del rettangolo dei medi.

337. Nota. — In base al numero prec. alcuni teoremi di equivalenza dimostrati nel Cap. IV si traducono in teoremi di proporzionalità, e, viceversa, alcuni teoremi sulla proporzionalità di segmenti dimostrati nel presente Cap., si traducono in teoremi di equivalenza.

Per esempio, il teor. del n. 244 dà il seguente

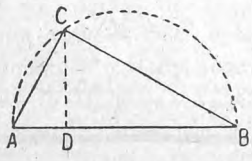
Teor. *In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sulla ipotenusa stessa.*

Così la costruzione del n. 262 permette di *costruire il segmento medio proporzionale fra due segmenti dati.*

Viceversa dimostreremo ora un teorema di proporzionalità, che si traduce in un utile teorema di equivalenza. Giungeremo così ad una nuova costruzione del quadrato equivalente ad un rettangolo dato.

338. Teor. — *In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza.*

Nel triangolo ABC, rettangolo in C, si abbassi da C l'altezza CD. Il triangolo resta così diviso nei due triangoli ADC, CDB, rettangoli entrambi in D, e tali di più che hanno ciascuno un angolo comune col triangolo primitivo ABC; cosicchè i tre triangoli ABC, ACD, CBD hanno gli angoli ordinatamente uguali (n. 98). Allora dal n. 322 discende che



$$AD : DC = DC : DB.$$

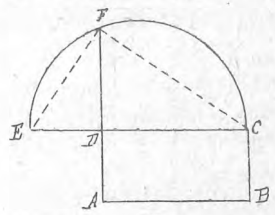
Nota. — Data una semicirconferenza di diametro AB, e abbassata da un punto qualsiasi C di essa la perpendicolare CD su codesto diametro, abbiamo, poichè il triangolo ABC è rettangolo in C, che *la distanza di un qualsiasi punto di una semicirconferenza dal suo diametro è media proporzionale fra i due segmenti in cui codesto diametro è diviso dal piede della detta distanza.*

339. In base al n. 335 il teor. prec. si può enunciare: *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo dei due segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede di codesta altezza.*

340. Risulta di qui una nuova risoluzione del problema seguente, già risoluto al n. 262.

Probl. — *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Dato il rettangolo $ABCD$, si prenda sul prolungamento di CD il segmento DE uguale ad AD, e si descriva una semicirconferenza di diametro EC. Prolungato il lato AD fino a incontrare in F la semicirconferenza, diciamo che il quadrato di DF è equivalente al rettangolo $ABCD$.



Congiunto infatti, F con E e C, l'angolo $\widehat{EFC}$ è retto, perchè iscritto in una semicirconferenza (n. 206), e nel triangolo rettangolo ECF il quadrato dell'altezza DF è equivalente (n. prec.) al rettangolo dei due segmenti ED, DC dell'ipotenusa, cioè al rettangolo $ABCD$.

Costruzione del pentagono, decagono e pentadecagono regolari.

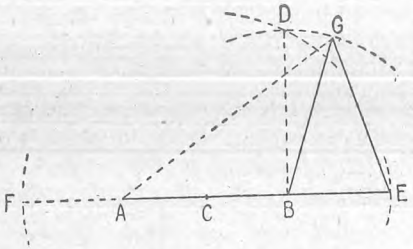
Come prima applicazione della teoria delle proporzioni diamo la costruzione dei poligoni regolari a 5, 10, 15... lati. Cominciamo perciò dal risolvere il

341. Probl. — *Costruire un triangolo isoscele, che abbia i lati uguali ad un segmento dato e gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice.*

Se AB è il segmento dato, si prenda sulla perpendicolare nel suo estremo B il segmento $BD = AB$, e, con centro nel punto medio C di AB, si descriva la circonferenza di raggio CD, fino a tagliare in E, F la retta AB.

Il triangolo cercato è il triangolo BEG, che ha la base BE e i cui due lati BG, EG sono uguali ad AB.

Per giustificare questa asserzione, dobbiamo provare che gli angoli alla base $\widehat{GBE}$, $\widehat{BEG}$ di codesto triangolo sono doppi dell'angolo al vertice $\widehat{EGB}$.



A tale scopo congiungiamo A con G, e notiamo anzitutto che, essendo D un punto della semicirconferenza di diametro FE, sussiste (n. 338) la proporzione

$$FB : BD = BD : BE.$$

Ma dal fatto che è

$$AC = CB, \quad FC = CE$$

risulta

$$FC + CB = AC + CE$$

ossia

$$FB = AE;$$

mentre d'altra parte è, per costruzione,

$$BD = EG$$

cosicchè avremo che

$$AE : EG = EG : BE.$$

E allora, notando che i due triangoli AEG, GBE hanno l'angolo in E comune e i lati intorno ad esso proporzionali, concludiamo che essi hanno gli angoli ordinatamente uguali (n. 328); e, poichè il triangolo BEG è isoscele sulla base BE, risulta anzitutto che il triangolo AEG è isoscele sulla base EG; e in secondo luogo che

$$\widehat{GAE} = \widehat{BGE}.$$

Ma, per costruzione, BG è uguale ad AB: cosicchè nel triangolo ABG, gli angoli $\widehat{GAB}$, $\widehat{AGB}$ sono uguali, e si

conclude che nel triangolo isoscele AEG l'angolo in G (e quindi anche l'angolo in E) è doppio dell'angolo al vertice $\widehat{A}$.

E poichè il triangolo BEG ha gli angoli ordinatamente uguali a quelli di codesto triangolo AEG, abbiamo veramente che nel triangolo isoscele BEG, avente i lati uguali al segmento dato AB, gli angoli alla base sono doppi dell'angolo al vertice.

342. Nel triangolo BEG gli angoli sono tali che

$$\widehat{GBE} = \widehat{BEG} = 2\widehat{BGE},$$

cosicchè, dovendo la loro somma essere uguale a due retti (n. 96), si conclude che

$$5\widehat{BGE} = \text{due retti};$$

cioè l'angolo al vertice è uguale alla quinta parte di due retti, ossia alla decima parte di quattro retti.

Discende di qui (n. 226) che il segmento BE, base del triangolo BEG, è uguale al *lato del decagono regolare di raggio uguale a* BG. Per costruire codesto decagono basterà prendere in un cerchio di raggio uguale a BG, e a partire da un punto preso ad arbitrio, dieci corde consecutive ed uguali a BE.

343. Ma anche nel triangolo isoscele AEG gli angoli alla base sono doppi di quello al vertice, e quindi questo angolo al vertice $\widehat{GAE}$ è uguale alla quinta parte di due retti. Di qui risulta, come al n. prec., che il segmento EG, è il lato del decagono regolare di raggio uguale ad AE.

Possiamo quindi costruire, in base alla costruzione del n. 341 *il decagono regolare di lato uguale ad un segmento* dato AB.

344. Riferendoci ancora al n. 341, ricordiamo che il lato EG e il raggio AE del decagono regolare soddisfano alla proporzione

$$AE : EG = EG : BE$$

ossia, essendo

$$BE = AE - EG$$

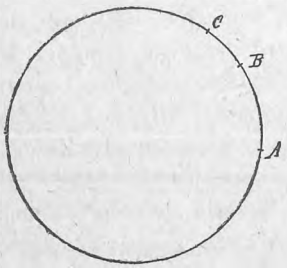
$$AE : EG = EG : AE - EG.$$

In altre parole, il lato del decagono regolare è medio proporzionale fra il raggio di esso e la differenza tra il raggio e il lato medesimo.

Ora di un segmento dicesi *sezione aurea* una parte tale che sia media proporzionale tra l'intero segmento e la parte residua: abbiamo quindi il

Teor. *Il lato di un decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio.*

345. Iscritto in un cerchio dato un decagono regolare $A_1A_2 \dots A_{10}$, il poligono $A_1A_3A_5A_7A_9$, ottenuto congiungendo i vertici di quello a due a due alternativamente, è evidentemente un *pentagono regolare*. E d'altra parte dimezzando gli archi determinati dai vertici del decagono sulla circonferenza, si può costruire un poligono regolare a 20 lati e così via.



Otteniamo così successivamente i poligoni regolari a

$$10,\ 20,\ 40,\dots\ 5.2^n,\dots$$

lati.

Siccome poi

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15},$$

se a partire da un medesimo punto A dividiamo una circonferenza in dieci e in sei parti uguali (n. 216), e AB, AC sono rispettivamente la decima e la sesta parte della circonferenza, l'arco BC sarà la quindicesima parte della circonferenza stessa; e quindi la corda corrispondente è (n. 221) il lato del *pentadecagono regolare* iscritto nella circonferenza data.

E dimezzando successivamente gli archi otteniamo i poligoni regolari di

$$30,\ 60,\dots\ 15.2^n,\dots$$

lati.

Poligoni simili.

Alcuni dei teoremi trovati innanzi (nn. 322, 328, 329) relativamente ai triangoli aventi i lati proporzionali, si possono estendere ai poligoni e danno luogo ad una teoria della *similitudine*, di cui qui raccogliamo i principii.

346. Def. — Due poligoni, aventi gli angoli ordinatamente uguali, e i lati intorno agli angoli uguali in proporzione si dicono *simili*.

Diconsi *corrispondenti* i vertici di angoli uguali e i lati e le diagonali che congiungono vertici corrispondenti.

Si ha similitudine *diretta* o *inversa* secondo che gli angoli corrispondenti (uguali) hanno o no lo stesso verso.

347. Per avere due poligoni simili basta considerare due quadrati quali si vogliano o, più in generale, due poligoni regolari di ugual numero di lati.

Di più noi già abbiamo considerato triangoli simili ai nn. 322, 328, 329.

Si è veduto in quei numeri che affinchè si possa concludere che due triangoli sono simili basta aver verificato:

a) o che danno i lati ordinatamente proporzionali;

b) o che hanno un angolo uguale ad un angolo e i lati intorno agli angoli uguali in proporzione;

c) o che hanno gli angoli ordinatamente uguali.

348. Cor. — *Poligoni simili ad un terzo sono simili fra loro.*

349. Cor. — *Se due poligoni sono simili e hanno due lati corrispondenti uguali sono uguali.*

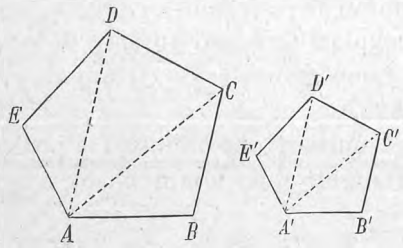
Infatti, poichè i lati corrispondenti sono proporzionali e uno dei lati dell'un poligono è uguale al corrispondente dell'altro poligono, i lati sono uguali (n. 311); e i due poligoni avendo uguali ordinatamente gli angoli e i lati, sono uguali.

350. Cor. — *Se in due poligoni simili da due vertici corrispondenti si conducono tutte le possibili diagonali, i poligoni rimangono divisi nello stesso numero di triangoli ordinatamente simili.*

Siano $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ due poligoni simili. Sarà allora

$$\widehat{A}=\widehat{A'},\ \widehat{B}=\widehat{B'},\ \widehat{C}=\widehat{C'},\ \widehat{D}=\widehat{D'},\ \widehat{E}=\widehat{E'}$$
$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'.$$

Congiunti A con C e D, e A' con C' e D', diciamo che i triangoli ABC, ACD, ADE sono simili rispettivamente ad $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'E'$. I triangoli ABC, $A'B'C'$ sono simili perchè hanno gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ uguali e i lati intorno ad essi in proporzione (n. 328). Ne discende che gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$ sono uguali rispettivamente ad $\widehat{A'C'B'}$, $\widehat{B'A'C'}$ e che il rapporto $AC : A'C'$ è uguale al rapporto $AB : A'B'$ e quindi anche al rapporto $CD : C'D'$. Ma allora nei triangoli ACD, $A'C'D'$ gli angoli

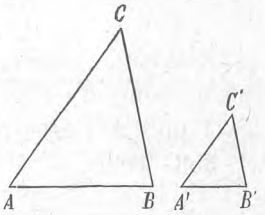


$$\widehat{ACD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCA},$$
$$\widehat{A'C'D'} = \widehat{B'C'D'} - \widehat{B'C'A'}$$

sono uguali come differenze di angoli uguali: e i due triangoli avendo due angoli uguali e i lati intorno ad essi in proporzione sono simili.

Analogamente si dimostra che sono simili anche i triangoli ADE, $A'D'E'$.

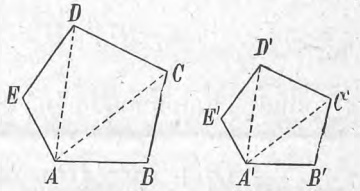
351. Dati un triangolo ABC e un segmento qualsiasi $A'B'$, si può costruire su $A'B'$ un triangolo simile ad ABC. Basta condurre per A', B', da una stessa banda rispetto ad $A'B'$, due semirette che formino colla trasversale $A'B'$ due angoli coniugati interni uguali ad $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ rispettivamente. Siccome la somma di $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è minore di due retti (n. 96), le due semirette si incontrano in un punto C' (n. 70) e il triangolo $A'B'C'$, che ha gli angoli ordinatamente uguali ad ABC sarà simile ad ABC (n. 322).



352. Ciò premesso, possiamo risolvere in generale il seguente

Probl. — *Sopra un lato dato costruire un poligono simile ad un poligono dato.*

Sia $ABCDE$ il poligono e sia $A'B'$ il lato prefissato. Decomposto il poligono in triangoli conducendo per A tutte le diagonali, si costruisca su $A'B'$ il triangolo $A'B'C'$ simile ad ABC; su $A'C'$, dalla parte opposta di B', si costruisca il triangolo $A'C'D'$ simile ad ACD; e su $A'D'$, da parte opposta di C' il triangolo $A'D'E'$ simile ad ADE.



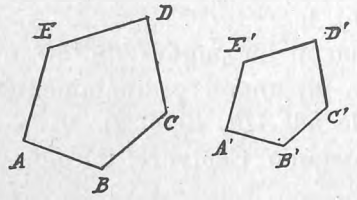
Il poligono $A'B'C'D'E'$ è simile al dato perchè, per costruzione, i rapporti

$$AB:A'B',\quad BC:B'C',\quad CD:C'D',\quad DE:D'E',\quad EA:E'A'$$

sono uguali e gli angoli $\widehat{A'}, \widehat{B'}, \widehat{C'}, \widehat{D'}, \widehat{E'}$, sono uguali rispettivamente ad $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ come somme di angoli uguali.

Passiamo infine a considerare le relazioni che intercedono fra i perimetri di due poligoni simili, e fra i poligoni stessi.

353. Teor. — *I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come due lati corrispondenti qualsiansi.*



Dati i due poligoni simili $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ diciamo che i loro perimetri stanno fra loro come due lati corrispondenti quali si vogliano, p. es., come AB sta ad $A'B'$.

Poichè i lati sono proporzionali, abbiamo che

$$BC : AB = B'C' : A'B'$$

e quindi componendo (n. 313)

$$AB + BC : AB = A'B' + B'C' : A'B'.$$

Ma è anche

$$CD : AB = C'D' : A'B'$$

e di qui e dalla precedente proporzione risulta (n. 315)

$$AB + BC : CD = A'B' + B'C' : C'D';$$

onde, componendo, deduciamo:

$$AB + BC + CD : CD = A'B' + B'C' + C'D' : C'D'.$$

Così continuando otterremo infine

$$AB + BC + ... + EA : EA = A'B' + B'C' + \\ + ... + E'A' : E'A'.$$

Ma

$$AB : EA = A'B' : E'A'.$$

Discende di qui (n. 315)

$$AB + BC + ... + EA : AB = A'B' + B'C' + \\ + ... + E'A' : A'B',$$

e permutando i medi,

$$AB + BC + ... + EA : A'B' + B'C' + \\ + ...E'A' = AB : A'B'.$$

354. Cor. — *I perimetri di due poligoni regolari di ugual numero di lati stanno fra loro come i raggi e gli apotemi rispettivi.*

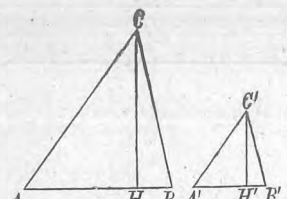
Infatti i due poligoni sono simili, cosicchè i loro perimetri stanno come due lati omologhi: mentre questi ultimi stanno fra loro come i raggi e gli apotemi.

355. Per determinare la relazione che intercede fra due poligoni simili è necessario premettere come *lemmi*, le due seguenti proposizioni:

a) *In due triangoli simili* ABC, A'B'C' *due*

altezze omologhe CH, C'H' *sono proporzionali alle basi rispettive.*

Infatti i due triangoli ACH, $A'C'H'$, rettangoli in H, H' rispettivamente, e aventi uguali gli angoli A ed $\widehat{A'}$ sono simili, onde risulta che



$$CH : C'H' = AC : A'C';$$

ma dalla similitudine dei triangoli dati si ha che

$$AC : A'C' = AB : A'B';$$

cosicchè è dimostrato che

$$CH : C'H' = AB : A'B'.$$

b) *Se quattro segmenti sono in proporzione, anche i loro quadrati sono in proporzione.*

Se a, b, c, d sono le lunghezze dei quattro segmenti, avremo (n. 312)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Di qui risulta anche

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2,$$

ossia

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Ma a^2, b^2, c^2, d^2 sono le aree dei quadrati dei segmenti dati (n. 291) e dalla loro proporzionalità (n. 312) si conclude che anche i quattro quadrati sono in proporzione.

356. Ciò premesso, dimostriamo il seguente

Teor. — *Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.*

Occupiamoci prima del caso dei triangoli. Se ABC, $A'B'C'$ sono due triangoli simili ed a, a', h, h' sono le misure delle basi AB, $A'B'$, e delle rispettive altezze CH, $C'H'$ (figura al n. prec.), sappiamo che

$$h : h' = a : a',$$

ossia

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}.$$

Ora le aree dei due triangoli sono rispettivamente $\frac{1}{2}ah$ e $\frac{1}{2}a'h'$ (n. 295), onde il loro rapporto è uguale a

$$\frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'}.$$

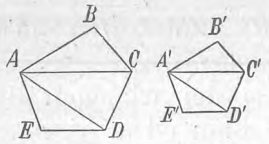
Di qui, sostituendo ad $\frac{h}{h'}$ il numero uguale $\frac{a}{a'}$, ricaviamo che il rapporto della superficie dei due triangoli è dato da

$$\frac{a^2}{a'^2},$$

cioè dal rapporto stesso dei quadrati dei due lati omologhi AB, $A'B'$.

Ed ora passiamo ai poligoni.

Siano dati due poligoni simili a quanti lati si vogliano $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$. Diciamo che essi stanno fra loro come i quadrati $q(AB)$, $q(A'B')$ di due lati corrispondenti AB, $A'B'$.



Nei due poligoni si conducano da A, A' tutte le possibili diagonali; i due poligoni restano così decomposti nella somma di un certo numero di triangoli a due a due simili (n. 350).

Avremo per quanto si è detto or ora

$$ABC : A'B'C' = q(AB) : q(A'B'),$$

e

$$ACD : A'C'D' = q(AC) : q(A'C').$$

Ma per la similitudine dei due triangoli ABC, $A'B'C'$ si ha che

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

e quindi (n. prec.)

$$q(AB) : q(A'B') = q(AC) : q(A'C')$$

Avremo allora che

$$ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D'.$$

Di qui, permutando e componendo, risulta

$$ABC + ACD : ABC = A'B'C' + A'C'D' : A'B'C'$$

Così continuando, si trova che

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = ABC : A'B'C'.$$

Poichè ABC, $A'B'C'$ stanno tra loro come $q(AB)$, $q(A'B')$, concludiamo che

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = q(AB) : q(A'B').$$

ESERCIZI

1. Se tre rette passanti per un medesimo punto vengono segate con due parallele, si ottengono su queste due coppie di segmenti adiacenti che sono in proporzione.

2. Si notino altre due coppie di segmenti in proporzione cui si dà origine colla costruzione dell'es. prec.

3. Una mediana di un triangolo è il luogo dei punti medi dei segmenti paralleli al lato su cui cade la mediana, intercetti dagli altri due lati.

4. I punti di mezzo delle basi di un trapezio, il punto di incontro delle diagonali e quello dei lati non paralleli sono in linea retta.

5. Se sopra due rette parallele si hanno due serie di punti susseguentisi A, B, C e A', B', C', tali che

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

le tre rette AA', BB', CC' passano per un medesimo punto o sono parallele.

6. Si inverta analogamente l'esercizio 2.

7. Se in due triangoli ABC, $A'B'C'$ gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ sono uguali e gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$ sono supplementari, si ha

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

(Portato il triangolo $A'B'C'$ ad avere il vertice B' sul vertice B di ABC e i lati $B'A'$, $B'C'$ su BA, BC rispettivamente, si conduca da A la parallela ad $A'C'$ fino ad incontrare in H la BC, ecc.).

8. Se C, D sono due punti, l'uno interno e l'altro esterno ad un segmento dato AB e sussiste la proporzione

$$AC : BC = AD : BD,$$

da un punto qualsiasi le cui distanze da A, B siano proporzionali ad AC, BC si vede AB sotto un angolo retto.

9. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono proporzionali a due segmenti dati (disuguali fra loro). [Es. prec.].

10. Due lati di un triangolo sono lunghi rispettivamente m. 84, m. 149 e si prende sul primo lato un punto P distante dal vertice comune m. 21: a quale distanza dal vertice comune dobbiamo prendere sul secondo lato il punto Q perchè la PQ risulti parallela al terzo lato?

11. Se in un triangolo rettangolo è iscritto un quadrato (con un lato sull'ipotenusa) l'ipotenusa rimane divisa in ter parti che formano una proporzione continua.

12. In triangoli simili le mediane, le altezze, le bisettrici corrispondenti sono proporzionali ai lati omologhi.

13. Due triangoli che abbiano le mediane proporzionali sono simili.

14. Due triangoli che abbiano le altezze proporzionali sono simili.

15. Se quattro segmenti a, b, c, d sono tali che

$$a : b = b : c \quad \text{e} \quad b : c = c : d$$

e i tre primi a, b, c sono lati di un triangolo, anche b, c, d sono lati di un triangolo e i due triangoli che così si ottengono hanno cinque elementi uguali senza essere uguali [1].

16. La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti che sono proporzionali agli altri due lati.

---

[1] I. Amaldi: *Appunti di geometria.* Pitagora, Anno II, n. 1, n. 1895-96.

17. I lati di un triangolo sono lunghi rispettivamente m. 18, m. 30, m. 36: calcolare i segmenti determinati sui tre lati delle tre bisettrici [Es. prec.].

18. Se un lato di un triangolo è diviso in due parti, le quali siano proporzionali agli altri due lati, la retta che passa pel punto di divisione del lato e per il vertice dell'angolo opposto, biseca quest'angolo.

19. Se in un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il prolungamento del lato opposto, le distanze di codesta intersezione dagli estremi di quel lato sono proporzionali agli altri due lati.

20. Dato un triangolo e sul prolungamento di uno dei lati un punto, le cui distanze dai due vertici che si trovano su di esso siano proporzionali agli altri due lati, la retta che congiunge codesto punto col vertice opposto, biseca il relativo angolo esterno.

21. In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa; e l'altezza abbassata dal vertice dell'angolo retto è media proporzionale fra i due segmenti in cui l'ipotenusa è divisa dal suo piede.

22. Se in un triangolo un lato è medio proporzionale fra uno degli altri due e la sua proiezione su di questo, oppure se una delle altezze è media proporzionale fra i due segmenti che essa determina sul lato rispettivo, il triangolo è rettangolo.

23. Costruire un segmento che sia medio proporzionale fra altri due.

24. Se due corde di un cerchio si intersecano, i loro segmenti sono in proporzione (essendo estremi e medi rispettivamente i segmenti di una medesima corda). [Se sono AB, CD le due corde segantisi in E, si considerino i due triangoli AEC, DEB i quali sono ecc.].

25. Su di una retta a partire da un suo punto O, e da bande opposte rispetto ad esso, si prendano due segmenti OA, OD e su di un'altra retta per O, e sempre

da bande opposte rispetto ad O, si prendano i due segmenti OB, OC. Se

$$OA : OB = OC : OD,$$

i quattro punti A, B, C, D appartengono ad una circonferenza. [Se D' è l'ulteriore intersezione della OA colla circonferenza ABC, avremo (es. prec.) $OA : OB = OC : OD'$, e quindi ecc.].

26. Date per uno stesso punto due secanti di una circonferenza, i segmenti di esse compresi fra codesto punto e le intersezioni con la circonferenza, sono in proporzione, essendo rispettivamente estremi e medi due segmenti appartenenti ad una stessa secante. [Se AB, CD sono le due secanti, uscenti dal punto E, si considerino i due triangoli EBC, EDA i quali sono ecc.].

27. Su di una retta, a partire da un suo punto O e dalla medesima banda rispetto ad esso, si prendano due segmenti OA, OD e su di un'altra retta per O e ancora dalla medesima banda rispetto ad O si prendano due segmenti OB, OC. Se

$$OA : OB = OC : OD,$$

i quattro punti A, B, C, D appartengono ad una medesima circonferenza. [Se D_1 è la ulteriore intersezione della OA colla circonferenza ABC, si ha (es. prec.) $OA : OB = OC : OD_1$, e quindi ecc.].

28. Condotte da un punto esterno ad un cerchio una tangente e una secante, il segmento di tangente compreso tra codesto punto di contatto è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi fra quel punto e le due intersezioni con la circonferenza, ossia come si suol dire brevemente, la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna. [Se AB è la tangente e se ACD è la secante, si considerino i due triangoli ABC, ABD i quali sono ecc.].

29. Presi su d'una retta, a partire da un suo punto O e dalla medesima parte di esso, due segmenti OA, OC e su di

un'altra retta per O il segmento OB, medio proporzionale fra OA e OC, la circonferenza, passante per A, B, C è tangente in B alla OB.

30. Costruire una circonferenza, la quale passi per due punti dati A, B e sia tangente ad una retta c. [Se la AB interseca la c in S, ed X è il punto di contatto su c, il segmento SX rispetto ad AS, SB è ecc.].

31. Costruire una circonferenza, la quale passi per un punto dato C e sia tangente a due rette date a, b. [Se c è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ab}$ (o della striscia ab) e C_1 è il simmetrico di C rispetto a c, la circonferenza passa anche per C_1, onde riferendoci all'eserc. prec. ecc.].

32. Il rettangolo contenuto da due segmenti è medio proporzionale fra i quadrati di questi.

33. In un triangolo i rettangoli dei segmenti, in cui le altezze sono divise dal loro punto di incontro, sono equivalenti.

34. Dividere un segmento dato in due parti il cui rettangolo sia equivalente ad un altro rettangolo assegnato. (Si risolva in base al n. 312).

35. Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell'altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto. [Abbassata dal vertice A di ABC l'altezza AH e condotto il diametro AD del cerchio circoscritto, si confrontino i due triangoli AHC, ABD, ecc.].

36. Teor. (di Tolomeo). — Se un quadrangolo è iscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli dei lati opposti. [Dato il quadrangolo $ABCD$ si conduca il segmento DE in modo che l'angolo $\widehat{ADE}$ sia uguale ad $\widehat{ADC}$: allora i triangoli AED, ECD sono simili rispettivamente a BCD, ADB; onde risulta che $AD : AE = BD : BC$, $CD : EC = BD : AB$, cioè i rettangoli di AD e BC e di CD e AB sono equivalenti ecc.].

37. Costruire un parallelogramma simile ad un parallelogramma dato, e avente una diagonale data.

38. Costruire un triangolo, di cui sono dati due angoli e
- *a)* un'altezza; oppure
- *b)* una bisettrice; oppure
- *c)* la proiezione di un lato su di un altro; oppure
- *d)* il perimetro.

[Si risolve il problema col cosidetto *metodo di similitudine* (1). Tralasciando la condizione *a)* o *b)* o *c)* o *d)*, si costruisca un qualsiasi triangolo simile a quello cercato e fra i triangoli simili a questo se ne determini uno soddisfacente alla ulteriore condizione, di cui non si è tenuto conto].

39. Circoscrivere ad un cerchio dato, una losanga simile ad una losanga data. [Si consideri la circonferenza iscritta nella losanga data; si ottiene così una figura simile a quella che si vuole determinare (*Metodo del problema contrario*)].

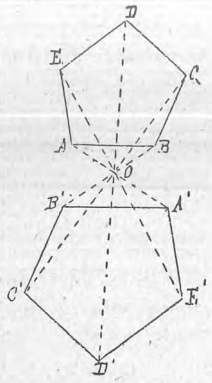
40. Circoscrivere a un quadrilatero dato $ABCD$ un quadrilatero $EFGH$ simile a un quadrilatero $MNPQ$. [Supposto che i lati EF, FG, GH, HE passino rispettivamente pei vertici B, C, D, A, gli angoli $\widehat{BFC}$, $\widehat{DHA}$ sono uguali agli angoli $\widehat{N}$, $\widehat{Q}$; onde si possono costruire i cerchi circoscritti ai triangoli BFC, DHA. Siano R, S i punti in cui la diagonale FH incontra codeste due circonferenze: gli angoli $\widehat{EFH}$, $\widehat{EHF}$ sono uguali rispettivamente agli angoli $\widehat{MNQ}$, $\widehat{MQN}$; onde si conoscono gli archi BR, AS, ecc.].

41. Iscrivere in un quadrilatero dato $MNPQ$ un quadrilatero $M'N'P'Q'$ simile a un quadrilatero dato $ABCD$. [Si adopera il metodo del problema contrario. Circoscritto ad $M'N'P'Q'$ un quadrilatero $A'B'C'D'$ simile ad $MNPQ$, si ottiene una figura simile alla cercata, ecc.].

42. Dato un poligono $ABCDE\ldots$ e un punto O del suo

---

(1) Chi voglia più ampie indicazioni intorno ai metodi cui qui accenniamo, per la risoluzione dei problemi, e intorno alla letteratura che ad essi si riferisce, cfr. l'art. di E. Baroni nei *Collectanea* di F. Enriques (op. cit.).



piano (non appartenente al prolungamento di nessuno dei suoi lati) e considerate le rette OA, OB, OC,.... da un punto A' di OA si conduca la parallela ad AB fino a incontrare in B' la OB, da B' la parallela a $B'C'$ fino a incontrare in C' la OC, ecc. Si dimostri che il poligono così ottenuto è simile al dato.

Def. — Due poligoni siffatti si dicono *omotetici* e in essi chiamansi omologhi o corrispondenti i vertici allineati col punto O: questo punto dicesi *centro di omotetia*. Si può più in generale considerare la figura *omotetica* di una figura qualsivoglia.

43. Iscrivere in un triangolo dato un altro triangolo i cui lati sieno ordinatamente paralleli a tre rette assegnate. (Si adopri il *metodo di omotetia,* rientrante nel metodo di similitudine. Costruito un qualsiasi triangolo che abbia i lati paralleli alle rette assegnate, supposte non parallele fra loro, pei vertici di questo si mandino tre rette parallele ai lati del triangolo dato, quindi si trasformi per omotetia, ricordando l'es. prec.).

44. La figura omotetica di una circonferenza è una circonferenza. Date due circonferenze si può considerare una di esse come figura omotetica dell'altra?

45. Iscrivere un quadrato in un triangolo dato. (Il quadrato dicesi *iscritto* se ha un lato sopra un lato del triangolo, e gli altri due vertici sopra i lati rimanenti. Si costruisca un quadrato che abbia un lato sulla base del triangolo ed un vertice sopra uno degli altri due lati, quindi ecc.).

46. Se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli, e quelli del primo sono doppi dei corrispondenti dell'altro, il primo triangolo è equivalente al quadruplo del secondo.

47. Se quattro segmenti sono in proporzione e i due primi sono lati omologhi di due poligoni simili, e i due

ultimi sono lati omologhi di due altri poligoni simili, i quattro poligoni sono in proporzione.

48. I perimetri di due poligoni simili iscritti in due cerchi stanno fra loro come i raggi dei due cerchi.

49. Se sui tre lati di un triangolo rettangolo, come lati corrispondenti, sono costruiti tre poligoni simili, il poligono costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui due cateti.

50. Se sopra i lati e sopra le diagonali di un parallelogramma si costruiscono sei poligoni simili, la somma dei poligoni costruiti sulle diagonali è equivalente alla somma dei poligoni costruiti sui lati. [Si consideri prima il caso dei quadrati, tenendo conto del n. 247: poi si consideri il caso generale ricordando il n. 356].

51. Se dal vertice di un triangolo si tirano alla base due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: sui tre lati del triangolo primitivo presi come lati corrispondenti si costruiscano tre poligoni simili. Il poligono costruito sulla base sta alla somma degli altri due come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli, che giacciono su di essa. [Si confronti questo teor. con l'eserc. 49] (1).

52. Se, dato un cerchio di raggio r, indichiamo con p_n, P_n le lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari di n lati rispettivamente iscritto e circoscritto al cerchio, abbiamo

$$P_n = \frac{2p_n r}{\sqrt{4r^2 - p_n^2}}$$

$$p_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - p_n^2}}.$$

(1) Cfr. I. Amaldi: *Periodico di matematica.* Anno VII, fasc. III, 1892.

53. Si costruisca un triangolo equilatero di cm. 3 di lato e se ne costruisca un altro, il cui perimetro sia la metà di quello del primo.

54. Disegnato un rombo le cui diagonali siano di cm. 9 e 6, se ne disegni un altro il cui perimetro sia uguale ai $\frac{2}{3}$ di quello del primitivo.

55. Un triangolo ha i lati rispettivamente di m. 12, m. 18, m. 20. Quali saranno i lati del triangolo simile aventi un'area uguale alla quarta parte di quella del triangolo primitivo.

56. Un triangolo abbia i lati $a =$ m. 25, $b =$ m. 29, $c =$ m. 37 e in esso, parallelamente a c, siasi condotta una retta, su cui a e b intersecano un segmento c' di m. 12 oppure 8, oppure 26). Che parte del triangolo primitivo viene segata via da c'?

57. Qual'è il lato di un pentagono regolare equivalente alla somma di due pentagoni regolari aventi rispettivamente il lato di cm. 21 e cm. 28?

58. Qual'è il lato del decagono regolare equivalente alla differenza di due decagoni regolari aventi rispettivamente il lato di cm. 36 e cm. 39?

VII.

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA ED AREA DEL CERCHIO

Le circonferenze (e gli archi di circonferenza) sono grandezze geometriche di specie diversa dai segmenti; e i cerchi (e i settori circolari) non sono grandezze omogenee ai poligoni.

Ma in base a considerazioni, e premettendo opportune convenzioni, che qui rapidamente accenneremo, si può pervenire alla determinazione della *lunghezza della circonferenza* (e degli archi di circonferenza) *rispetto all'unità di misura dei segmenti*, come pure alla determinazione dell'*area del cerchio* (e dei settori circolari) *rispetto all'unità di misura dei poligoni.*

Lunghezza della circonferenza.

357. Data una circonferenza, immaginiamo di averne costruito un modello concreto, p. es. mediante un filo di ottone. Se, dopo averlo tagliato in un punto, noi distendiamo il filo su di una retta, otteniamo un segmento c, che noi chiameremo *circonferenza rettificata.*

Misurando questo segmento, troveremo la *lunghezza della circonferenza data* (1).

Ma per avere questa misura non occorre proprio servirsi come dianzi del filo. Infatti si considerino i perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti alla circonferenza data. Manifestamente i perimetri dei poligoni iscritti sono minori di c e quelli dei poligoni circoscritti sono maggiori. Di più si vede come codesti poligoni, tanto iscritti che circoscritti, ove abbiano un numero di lati molto grande, finiscono quasi col confondersi colla circonferenza stessa.

Risulta di qui come, misurando il perimetro di un poligono iscritto o circoscritto alla circonferenza, avente un numero grandissimo di lati, si ottiene un *valore approssimato* (rispettivamente per difetto o per eccesso) della *lunghezza della circonferenza;* e l' approssimazione è tanto maggiore quanto più grande è il numero dei lati del poligono considerato.

358. Consideriamo, per esempio, una circonferenza C_1 di m. 1 di diametro. Il perimetro p_4 del quadrato iscritto (in quanto la sua diagonale è uguale ad 1) è dato in metri, da (n. 302)

$$p_4 = 2{,}82\ldots\ ;$$

e se cerchiamo successivamente i perimetri p_8, p_{16}, p_{32}, p_{64},... dei poligoni regolari iscritti in C_1 ad 8, 16, 32, 64,... lati (per il che basta applicare il n. 299;

(1) Questa misura si può del resto trovare direttamentte servendosi di un metro a nastro comune o meglio ancora di un metro a nastro metallico flessibile.

cfr. l' es. 52 alla fine del capitolo prec.) troviamo, in metri,

$$p_8 = 3{,}06\ldots$$
$$p_{16} = 3{,}12\ldots$$
$$p_{32} = 3{,}13\ldots$$
$$p_{64} = 3{,}14\ldots$$
$$p_{128} = 3{,}14\ldots,$$

E per quanto si continui a raddoppiare ancora il numero dei lati, si trova sempre che il perimetro del poligono regolare iscritto, calcolato fino ai centimetri, è dato da m. 3,14...; cosicchè possiamo concludere che *la lunghezza della circonferenza del diametro di m. 1 è data, (con l' approssimazione per difetto di un centimetro) da* m. 3,14.

Analogamente, considerando i poligoni regolari circoscritti a 4, 8, 16,... lati, si trova che *la lunghezza della circonferenza di* m. 1 *di diametro è data con approssimazione, per eccesso, di un decimillimetro, da* m. 3,1416.

359. Se, invece della circonferenza C_1 del n. prec. consideriamo una circonferenza C_2 di m. 2 di diametro avremo che i poligoni regolari iscritti a 4, 8, 16,... lati, in quanto sono simili rispettivamente ai poligoni di ugual numero di lati iscritti in C_1, avranno, pel n. 354, perimetri ordinatamente doppi; cosicchè la lunghezza della circonferenza di m. 2 di diametro sarà data, per approssimazione, da

$$\text{m. } (2 \times 3{,}14)$$

o, con approssimazione maggiore, da

$$\text{m. } (2 \times 3{,}1416).$$

In generale sia C una circonferenza qualsiasi, la cui lunghezza del raggio sia r. I perimetri p'_4, p'_8, p'_{16},... dei poligoni regolari iscritti a 4, 8, 16... lati saranno proporzionali ai perimetri p_4, p_8, p_{16},... degli omonimi poligoni iscritti alla circonferenza C_1 di 1 m. di diametro (n. 354), e i rapporti

$$p'_4 : p_4, \quad p'_8 : p_8, \ldots$$

saranno tutti uguali al rapporto dei raggi rispettivi od anche dei doppi di codesti raggi; cioè sarà

$$p'_4 : p_4 = p'_8 : p_8 = p'_{16} : p_{16} = \ldots = 2r : 1;$$

cosicchè avremo

$$\begin{aligned} p'_4 &= 2r \times 2{,}82\ldots \\ p'_8 &= 2r \times 3{,}06\ldots \\ p'_{16} &= 2r \times 3{,}12\ldots \\ p'_{32} &= 2r \times 3{,}13\ldots \\ p'_{64} &= 2r \times 3{,}14\ldots \\ p'_{128} &= 2r \times 3{,}14\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Risulta di qui che *un valore approssimato* (per difetto) *della lunghezza della circonferenza* C *di raggio* r *è dato da*

$$2r \times 3{,}14;$$

cioè si ottiene moltiplicando la lunghezza del diametro pel numero fisso 3,14.

Avremo un valore più approssimato, moltiplicando la lunghezza $2r$ del diametro per 3,1416 o per un altro valore ancor più approssimato della lunghezza della circonferenza C_1 avente il diametro di m. 1.

E se addirittura indichiamo con π (*pi greco*) codesta lunghezza, avremo che *la lunghezza* c *della circonferenza di raggio* r *è data* (esattamente e non più per approssimazione) *da*

$$c = 2r\pi.$$

360. La formola fondamentale del n. prec. si può scrivere

$$\frac{c}{2r} = \pi;$$

e poichè π è un numero fisso, risulta di qui il seguente teorema fondamentale (n. 278):

Teor. — *Il rapporto di una qualsiasi circonferenza* (rettificata) *al rispettivo diametro è* COSTANTE, vale a dire è sempre lo stesso per tutte le possibili circonferenze.

361. Il numero π, che noi abbiamo definito dapprima come il numero che dà la lunghezza della circonferenza, avente per diametro l'*unità*, si può più in generale definire pel n. prec. come il *rapporto di una qualsiasi circonferenza* (rettificata) *al rispettivo diametro.*

È stato dimostrato (dal LAMBERT nel 1770) che *codesto rapporto* π *non è razionale*, ossia che non se ne può assegnare il valore esatto sotto forma di numero frazionario. In altre parole è stato dimostrato che *una qualsiasi circonferenza* (rettificata) *e il rispettivo diametro sono incommensurabili* (n. 269).

Ad ogni modo, di π si può assegnare un valore approssimato quanto si vuole, e vi fu chi, spingendo la determinazione approssimata molto più in là di

quanto occorre pei calcoli pratici anche più delicati, calcolò per π parecchie centinaia di cifre decimali. Le prime 30 sono

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279...$$

Ma per i calcoli pratici comuni sono sufficienti i già ricordati valori 3,14 [approssimato, per difetto, a meno di 0,01] e, tutt'al più, 3,1416 [approssimato, per eccesso, a meno di 0,0001].

362. Dato un arco di circonferenza, si può definire, in modo analogo a quello del n. 357, l'*arco rettificato*; e la misura del segmento così ottenuto sarà la *lunghezza dell'arco*.

È facile trovare la lunghezza dell'arco che su di una circonferenza di dato raggio r è compresa da un angolo al centro di data ampiezza a.

La lunghezza dell'intera circonferenza è

$$2r\pi,$$

cosicchè l'arco corrispondente ad un angolo al centro di 1°, cioè la 360ma parte dell'intera circonferenza, avrà la lunghezza

$$\frac{2r\pi}{360}.$$

Allora, supposto che l'ampiezza a dell'angolo al centro, corrispondente al dato arco, sia espressa in gradi (e, se occorre, in frazioni di grado) la lunghezza dell'arco dato sarà uguale a

$$\frac{2r\pi a}{360}.$$

363. Se l'ampiezza a dell'angolo al centro è espressa in secondi (e, se occorre, in frazioni di secondo) la lunghezza dell'arco è data analogamente da

$$\frac{2r\pi a}{1\,296\,000}.$$

Area del cerchio.

364. Sia C un cerchio, il cui raggio sia di lunghezza r.

Estendendo al caso di un cerchio e di un poligono iscritto o circoscritto le definizioni del n. 231, noi vediamo che ogni poligono iscritto al cerchio è suvvalente ad esso ed ogni poligono circoscritto è prevalente.

Consideriamo per fissare le idee un poligono regolare P iscritto al nostro cerchio C e un poligono regolare circoscritto P'. Noi vediamo che se i due poligoni P, P' hanno un numero di lati grandissimo, il cerchio quasi si confonde coi due poligoni; cosicchè l'area del cerchio sarà approssimativamente data dall'area di un poligono regolare iscritto o circoscritto, e avente un numero grandissimo di lati, l'approssimazione riuscendo per eccesso o per difetto secondo che il poligono considerato è circoscritto o iscritto.

Ma possiamo dire qualcosa di più.

Noi sappiamo che un poligono regolare è equivalente ad un triangolo avente per base il suo perimetro e per altezza il suo apotema (n. 251).

Nel caso del poligono circoscritto P' l'apotema è il raggio del cerchio, mentre il perimetro è un

segmento maggiore della circonferenza rettificata, ma tale che se il numero dei lati di P' è grandissimo, quasi si confonde con essa. Per il poligono iscritto P invece l'apotema è minore del raggio di C e il perimetro è minore della circonferenza rettificata; ma se il numero dei lati è grandissimo, apotema e perimetro quasi si confondono col raggio e con la circonferenza rettificata. Perciò se il numero dei lati di P, P' cresce indefinitamente, l'area di P cresce e quella di P' diminuisce, ma l'una e l'altra si avvicinano sempre di più (o, come si suol dire, tendono) all'area di un triangolo avente per base la circonferenza di C rettificata e per altezza il raggio.

Siccome anche il cerchio è costantemente compreso fra P e P' possiamo enunciare il seguente:

Teor. — *L'area di un cerchio è uguale a quella di un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio del cerchio.*

365. Dal teor. prec. e dal n. 295 ricaviamo che *l'area di un cerchio di raggio* r *è data da*

$$\frac{1}{2} 2\pi r \cdot r = \pi r^2 .$$

Vale dunque, praticamente, la

Regola. — *L'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per 3,14* (o 3,1416).

366. Supponiamo dati due cerchi C_1, C_2, di raggio r_1, r_2 rispettivamente. Indicandone con (C_1), (C_2) le rispettive aree abbiamo

$$(C_1) = \pi r_1^2, \quad (C_2) = \pi r_2^2,$$

onde risulta

$$\frac{(C_1)}{(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Si ha così il

Teor. — *Due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.*

Nota. — Questo teor. va ravvicinato a quello del n. 356.

367. Considerazioni analoghe a quelle del n. 364 conducono a determinare l'*area del settore circolare*. Si dimostra così il

Teor. — *L'area di un settore circolare è uguale a quella di un triangolo, avente per altezza il raggio del settore e per base il corrispondente arco di circonferenza rettificato.*

Se quindi è r il raggio ed l la lunghezza dell'arco, il settore è misurato da (n. 362)

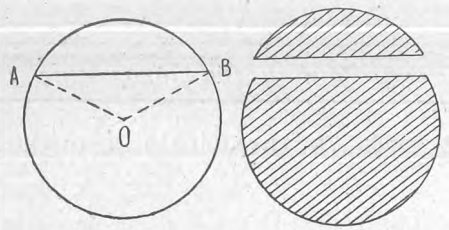
$$\frac{1}{2} rl ;$$

e se l'arco è dato per mezzo dell'ampiezza a (in gradi e frazioni di grado) del corrispondente angolo al centro, l'area del settore sarà

$$\frac{1}{2} r \frac{2r\pi a}{360} = \frac{r^2 \pi a}{360} .$$

368. Def. — Dicesi *segmento circolare* ciascuna delle due parti in cui un cerchio vien diviso da una sua corda.

369. Nota la regola per trovar l'area del settore, si trova agevolmente quella del segmento circolare.



L'area del segmento circolare minore di un semicerchio si trova sottraendo dall'area del settore (convesso) corrispondente l'area del triangolo isoscele ABO.

L'area dell'altro segmento circolare si trova aggiungendo l'area dello stesso triangolo isoscele a quella del settore (concavo) corrispondente.

ESERCIZI

1. Quale cammino descrivono durante un giorno in un orologio gli estremi della lancetta dei minuti e di quella dei secondi, se esse sono lunghe rispettivamente cm. 14 e mm. 25,5?

2. In quanto tempo un cavallo da corsa, che batte m. 12,6 al secondo, percorre un cammino circolare di m. 112 di diametro?

3. Il diametro di una semicirconferenza sia diviso in due parti qualsiansi e su ciascuna di queste si descriva una semicirconferenza. Quale è la lunghezza della somma di queste due semicirconferenze?

4. Se si divide il diametro di una semicirconferenza in tre parti qualsiansi, qual' è la somma delle lunghezze delle semicirconferenze descritte su ciascuna di esse?

Si risponda alla stessa domanda quando si divida il diametro in quattro,... in n parti qualsiansi.

5. Quale è il raggio dell' equatore terrestre se la sua lunghezza è di km. 40000?

6. Se, come si suole, si assume come raggio dell' equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza dell' equatore stesso 5400 miglia geografiche, vi è accordo fra le due cifre?

7. Quale è il cammino percorso in ogni secondo da un punto dell' equatore terrestre per fatto della rotazione della terra? (Il raggio equatoriale terrestre è di km. 6370). Quale è il cammino percorso in un giorno?

8. Quale cammino percorre in un secondo la terra, nella sua rivoluzione intorno al sole, se il suo movimento si riguarda

circolare ed uniforme? (La distanza dalla terra al sole è di 150 milioni di kilometri, e l'anno solare è di giorni 365 e $^1/_4$).

9. Quale deve essere la lunghezza del diametro di una circonferenza, perchè su di essa l'arco di 1′ sia uguale ad 1 mm.?

10. Qual'è il raggio di un arco di circonferenza lungo cm. 23 e compreso da un angolo al centro di 6°25′?

11. Il diametro di una moneta d'oro da 100 lire è di mm. 35. Quale ne è la lunghezza dell'orlo?

12. Trovare la lunghezza dell'orlo di una moneta d'oro da 20 o 10 o 5 lire, sapendo che i diametri rispettivi sono di mm. 21, mm. 19, mm. 17.

13. Quanti chilometri ha percorso un ciclista se le ruote della sua bicicletta, aventi il diametro di cm. 72, hanno compiuto 3250 giri?

14. Qual'è l'area del cerchio che ha m. 7,5 di raggio?

15. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie è di m² 12,64?

16. In una lamina di latta, avente le dimensioni di cm. 80 e cm. 64, quanti dischi si possono ritagliare di cm. 4 di raggio, se le loro circonferenze debbono essere tangenti? Qual'è in decimetri quadrati l'area della superficie restante?

17. Si è fatta costruire una porta, avente la forma di un rettangolo di m. 4,50 di larghezza per m. 6,50 di altezza, sormontata da un semicerchio: e si è convenuto di dare al legnaiolo L. 45 al m² e al verniciatore L. 4,05 al m² per l'esterno, e L. 3 al m² per l'interno. Quanto costa la porta?

18. Calcolare il raggio del cerchio la cui area è di m² 22,8906.

19. Si misuri la superficie della figura racchiusa dalle tre semicirconferenze dell'esercizio n. 3, supposte descritte tutte e tre dalla stessa parte del diametro comune (*Arbelo* = trincetto da calzolaio).

20. Si misuri la superficie racchiusa da due circonferenze di ugual centro e raggi disuguali dati (*Corona circolare*).

21. Qual'è l'area della corona circolare compresa fra due circonferenze concentriche, aventi rispettivamente il raggio di m. 3 e m. 5?

22. Una corona circolare, in cui la circonferenza minore ha m. 12 di diametro, ha un'area di m² 120. Qual'è il diametro maggiore?

23. Intorno ad una circonferenza di m. 11 di lunghezza, si vuol costruire una corona di m² 20 di area. Quale sarà la lunghezza della circonferenza esterna?

24. Calcolare l'area della corona compresa fra le circonferenze iscritta e circoscritta al triangolo equilatero di m. 3,464 di lato.

25. Si calcoli l'area del cerchio, sulla cui circonferenza l'arco lungo m. 27,9 ha l'ampiezza di 115°7′58″. [Si tenga conto dei nn. 201-202].

26. L'autore del papiro *Rhind* (1700 av. Cr.) dice che l'area di un cerchio è uguale a quella del quadrato di lato uguale agli $\frac{8}{9}$ del diametro del cerchio considerato. Che differenza dà questa regola rispetto a quella assegnata nel testo (n. 365) per un cerchio di diametro uguale a m. 1? per un cerchio di raggio r?

27. Dato un triangolo rettangolo l'area del cerchio che ha per diametro la ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei cerchi che hanno per diametro i cateti. [Si ricordi il teorema di Pitagora e si applichi la formola per l'espressione dell'area di un cerchio].

28. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui area è di m² 12,64?

29. Calcolare il raggio dal cerchio la cui area è di m² 22,8906.

30. Una corona circolare, in cui la circonferenza minore ha m. 12 diametro, ha un'area di m² 120. Qual'è il diametro maggiore?

31. Intorno ad una circonferenza di m. 11 di lunghezza, si vuol costruire una corona di m² 20 di area. Quale sarà la lunghezza della circonferenza esterna?

32. Qual' è l'area di un settore di 30° in un cerchio di m. 6,40 di raggio?

33. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual' è la lunghezza dell'arco corrispondente ad un settore di m^2 3,60 di area?

34. In un cerchio di m. 25 di raggio, qual' è l'angolo al centro di un settore di m^2 4,76?

35. L'area di un cerchio è di m^2 2827,44; quella di un suo settore è uguale a quella del triangolo equilatero iscritto nel cerchio. Si calcoli la lunghezza e l'ampiezza dell'arco corrispondente a codesto settore.

36. Qual'è l'area del triangolo a lati curvilinei, determinato da tre circonferenze di cm. 3 di raggio, a due a due tangenti esternamente fra loro?

37. Dato un cerchio il cui raggio sia di m. 3,2, si calcoli l'area del segmento circolare compreso fra un lato di un esagono regolare iscritto nel cerchio e l'arco (minore di una semicirconferenza) che sottende codesto lato.

38. Condotto un diametro AB in un cerchio di raggio uguale a m. 2 e di centro O, si conducono le corde perpendicolari ai raggi OA, OB nei loro punti medi e si calcolino le aree delle tre parti in cui il cerchio è diviso da codeste due corde.

39. Qual'è l'area di un segmento circolare corrispondente ad un angolo al centro di 60° in un cerchio di m. 6 di raggio?

40. In un segmento circolare di m. 2 di raggio e di angolo al centro di 60° si iscriva un cerchio. Qual' è l'area rimanente del segmento?

41. In un quadrato $ABCD$ di m. 3 di lato si descrivano centro in A e C, e con raggio uguale al lato, due archi AC. Calcolare l'area di ciascuna delle tre parti in cui è diviso il quadrato.

42. In un triangolo equilatero ABC di m. 2 di lato si conducano i tre archi che passano per il centro del triangolo e le coppie di vertici. Calcolare l'area del trifolio che così si ottiene. [Si consideri il trifolio come differenza della somma di tre segmenti circolari e il triangolo equilatero].

43. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo come diametro si descriva la semicirconferenza che cade dalla stessa parte del triangolo e similmente si descrivano le semicirconferenze che hanno per diametri i cateti e cadono fuori del triangolo. Calcolare l'area totale delle due *lunule* che così si ottengono (*lunule di Ippocrate*) e confrontarla coll'area del triangolo.

[Si consideri la superficie delle due lunule, come differenza fra la somma della superficie del triangolo e dei due semicerchi minori e la superficie del semicerchio maggiore].

44. Divisa una circonferenza in sei parti uguali, si descriva da ciascuno di essi come centro e con raggio uguale a quello della circonferenza l'arco interno a questa. Si ottiene così una stella a sei raggi. Quale è l'area di questa stella, se r è il raggio della circonferenza?

VIII.

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Nei capitoli precedenti noi abbiamo studiato proprietà di figure, ciascuna delle quali era piana, cioè contenuta tutta in un piano. Notiamo per altro che molte di codeste proprietà riguardano coppie o gruppi di figure, le quali sono piane ciascuna, ma *possono* anche non appartenere tutte al medesimo piano. Così p. es. tutti i casi di uguaglianza di poligoni valgono anche per coppie di poligoni giacenti in due piani diversi.

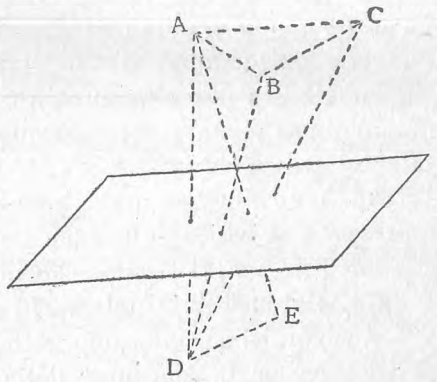
Nel seguito ci occuperemo di figure non contenute ciascuna in un solo piano, cioè di *figure solide*. La parte della Geometria, che studia le proprietà delle figure solide dicesi *Geometria solida* o *Stereometria*.

La Geometria solida si può svolgere in un modo parallelo alla Geometria piana, come appunto faremo nel seguito.

Parti di spazio e intersezione di due piani.

Un'osservazione analoga a quella fatta relativamente alle divisioni in parti del piano per mezzo di una retta (n. 31) ci permette di enunciare il seguente

370. Postulato. — *Un piano α divide lo spazio in due parti* (dette anche bande, o regioni, o semispazi) *contenenti ciascuna infiniti punti, per modo che:*



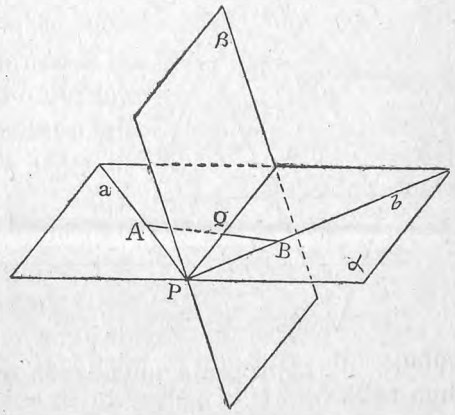
un punto dello spazio fuori di α appartiene all'una o all'altra parte;

due punti di una medesima parte, fuori di α, sono gli estremi di un segmento che non sega il piano;

due punti di parte diversa (opposta) *sono gli estremi di un segmento che sega il piano α.*

I punti del piano α si considereranno come comuni alle due parti opposte di spazio e si dirà anche che il piano *limita* ciascuno dei due semispazi.

371. Se una retta a incontra un piano in un punto A, le due parti in cui la retta è divisa da A appartiene a bande opposte rispetto al piano.



372. Teor. — *Due piani, aventi in comune un punto, hanno in comune una retta* (passante per esso).

Si conducano per P due rette a, b giacenti nel piano α (ma non in β) e su queste si scelgano due punti A, B da parti opposte rispetto al piano β (n. 371).

Il segmento AB incontrerà il detto piano β in un certo punto Q, diverso da P, il quale sarà un nuovo punto comune ai due piani α, β.

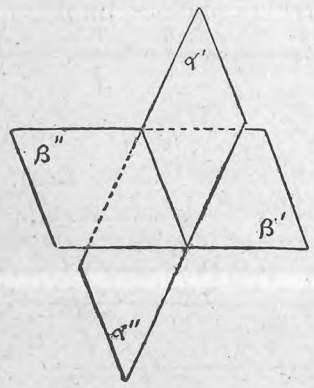
Quindi la retta PQ giacerà contemporaneamente nei nominati piani (n. 8); cioè questi avranno comune tale retta.

373. La retta comune ai due piani α, β dicesi *intersezione* di essi e si designa con $\alpha\beta$: dei due piani si suol dire che *si segano* secondo la retta $\alpha\beta$.

374. Dal postulato del n. 370 segue che due piani α e β, segantisi secondo una retta dividono lo spazio in quattro parti, ciascuna delle quali è comune a due semispazi limitati l'uno da α e l'altro da β.

Codeste quattro parti si dicono *regioni diedriche* o *diedri*.

I due piani α e β sono divisi dalla retta $\alpha\beta$ in quattro semipiani α', α'', β', β'' e i quattro diedri suddetti sono *limitati* da α', β'; β', α''; α'', β''; β'', α', che si dicono rispettive *facce*.



La retta $\alpha\beta$ si chiama *costola* o *spigolo* di ciascuno dei quattro diedri. Il diedro di facce α', β', si designa con $\widehat{\alpha'\beta'}$ o $\widehat{\beta'\alpha'}$. Se poi, A, B sono due punti quali si vogliano dei semipiani α', β' (fuori dello spigolo) e lo spigolo si designa con a o con PQ, il diedro si rappresenta anche con $\widehat{AaB}$ o con $\widehat{APQB}$.

Ogni semipiano uscente dalla retta $\alpha\beta$ (cioè limitato da codesta retta) appartiene ad uno dei quattro diedri: se appartiene al diedro $\alpha'\beta'$ si dice *compreso* fra α' e β'.

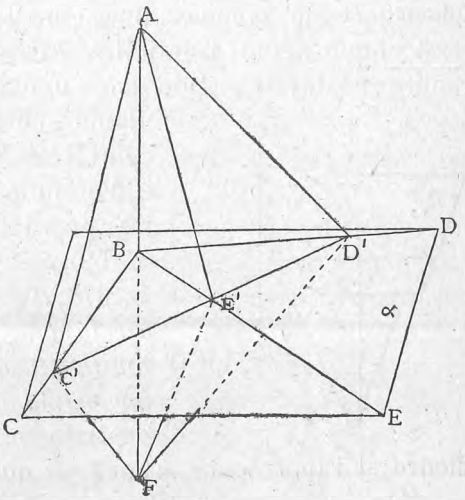
375. Ricordando il n. 38 si comprende da sè che cosa si intenda per *diedri adiacenti* e *diedri opposti allo spigolo*.

376. Ove si consideri la *somma* o riunione di più diedri *consecutivi* (cfr. n. 40), si è condotti ad estendere il concetto di diedro, considerando *diedri piatti, concavi e di uno o più giri*.

Retta e piano perpendicolari.

377. Teor. — *Se una retta incontra un piano ed è perpendicolare a due rette del piano passanti pel punto di intersezione, è pure perpendicolare a tutte le altre rette del piano, passanti per quel punto di intersezione.*

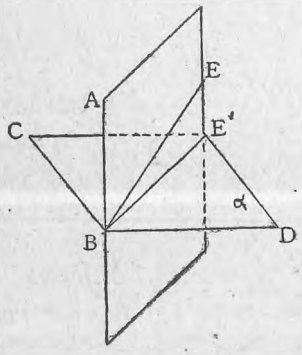
La retta AB incontri il piano α nel punto B e sia perpendicolare alle due rette BC, BD appartenenti ad α. Condotta su α per B un'altra qualsiasi retta BE, diciamo che AB è perpendicolare anche a BE.



Infatti, preso sulla BC un punto arbitrario C', sia D' un

punto della BD, che cada rispetto alla BE da parte opposta di C', e sia E' il punto, cui la $C'D'$ incontra la BE. Presi poi sulla AB da parte opposta rispetto a B i due punti A, F tali che AB sia uguale ad FB, si congiungano A ed F con C', D', E'.

I due triangoli ABC', FBC', rettangoli in B, sono uguali, perchè tanto i cateti AB, FB uguali per costruzione e il cateto BC' comune (n. 87): se ne conclude che sono uguali le ipotenuse AC', FC'. Similmente dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli ABD', FBD', che si dimostra in modo analogo, discende che sono uguali le ipotenuse AD', FD'. Allora i due triangoli $AD'C'$, $FD'C'$ hanno il lato $D'C'$ comune e i lati AC', FC' ed AD', FD' ordinatamente uguali, e perciò sono uguali (n. 94), onde risulta l'uguaglianza degli angoli $\widehat{D'C'A}$, $\widehat{D'C'F}$. Ne discende che i due triangoli $AC'E'$, $FC'E'$, avendo uguali i lati AC', FC', e gli angoli $\widehat{E'C'A}$, $\widehat{E'C'F}$ e comune il lato $C'E'$, sono uguali (n. 87) e hanno uguali i lati AE', FE'. Consideriamo infine i due triangoli ABE', FBE': essi hanno uguali i lati AB, FB, e AE', FE' e comune il lato BE', onde sono uguali (n. 94). Concludiamo che i due angoli adiacenti $\widehat{ABE'}$, $\widehat{FBE'}$ sono uguali, e che quindi la retta AB è perpendicolare alla BE (n. 59).



378. Teor. — *Le perpendicolari ad una retta in un punto giacciono tutte in un medesimo piano.*

Data la retta AB, in un punto B qualsiasi di essa si

conducano due perpendicolari BC, BD, e si consideri il loro piano α. Diciamo che ogni altra perpendicolare alla BA in B appartiene a codesto stesso piano.

Sappiamo già (n. prec.) che ogni retta giacente nel piano α e passante per B è perpendicolare alla AB. Per dimostrare che le perpendicolari alla AB in B giacciono tutte in α, basterà far vedere che ogni retta BE per B, non giacente nel piano α, non è perpendicolare alla AB.

A questo scopo si consideri il piano ABE: esso avendo comune con α il punto B, intersecherà α secondo una retta BE' distinta da BE e la BE' sarà, pel teor. prec., perpendicolare alla AB. Poichè nel piano ABE' non vi è che una sola perpendicolare alla AB pel punto B (n. 56), concludiamo che la BE non è perpendicolare alla AB.

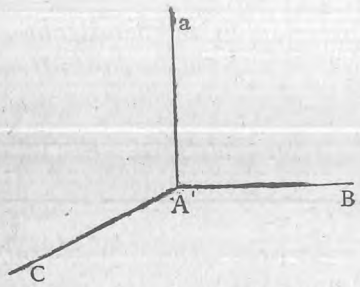
379. Def. — Una *retta* ed un *piano*, aventi un punto comune, si dicono *perpendicolari* se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.

Il piano si dice perpendicolare alla retta e la retta al piano.

Il punto comune alla retta e al piano si dice *piede* della perpendicolare.

Nota. — Secondo quanto è stato dimostrato al n. 377, per verificare che una retta, avente un punto O comune con un piano, è ad esso perpendicolare, basta verificare che essa è perpendicolare a *due* rette del piano, passanti per O.

380. Teor. — *Per un punto dato passa un piano ed uno solo perpendicolare ad una retta data.*

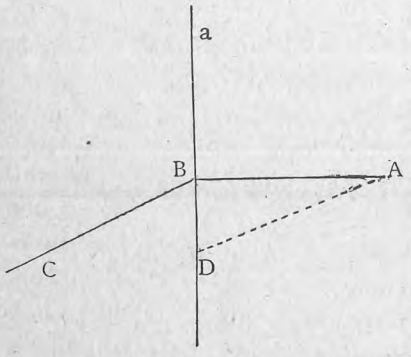


Distinguiamo due casi secondo che il punto dato appartiene alla retta data o è esterno ad essa.

1° Se il punto dato A giace sulla retta data a, per avere un piano perpendicolare alla a pel punto A, basta considerare il piano di due rette AB, AC, perpendicolari alla a in A (n. prec.).

E poichè *tutte* le perpendicolari alla a in A giacciono nel piano ABC (n. 378), questo è l'unico piano perpendicolare alla a in A.

2° Se il punto dato non giace sulla retta a, si abbassi da A la perpendicolare AB sulla a nel piano Aa, e da B si conduca un'altra retta BC perpendicolare ad a. Il piano ABC è perpendicolare alla a perchè contiene le due rette BA, BC perpendicolari alla a (n. prec.).

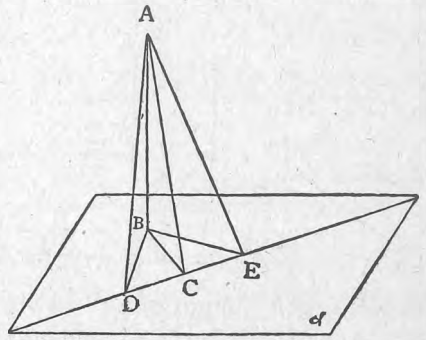


Se poi si avessero per A due piani perpendicolari alla a, questi non potrebbero incontrare la a in un medesimo punto per quanto si è notato nel primo caso: e d'altra parte essi non possono incontrare la retta a in due punti distinti B, D, perchè altrimenti per A passerebbero due rette AD, AB perpendicolari entrambe alla stessa retta a, il che è impossibile (n. 65).

381. Teor. — *Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce in esso una retta, ogni altra retta del piano, la quale sia perpendicolare a quest'ultima, è perpendicolare al piano delle due prime.*

La retta AB sia perpendicolare al piano α in B; condotta in α la BC, diciamo che tutte le perpendicolari alla BC appartenenti ad α sono perpendicolari al piano ABC.

La retta di α che è perpendicolare alla BC e passa per B è perpendicolare alle due rette AB e BC e quindi al loro piano (n. 379).



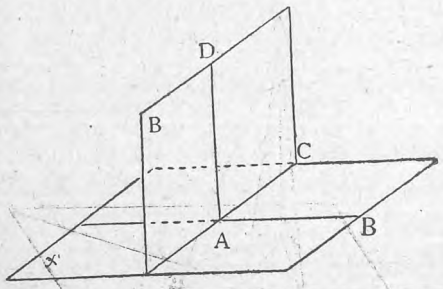
Si consideri allora in α una retta perpendicolare alla BC e passante per un punto C diverso da B. Presi su di essa, da parti opposte, rispetto a C due segmenti uguali CD, CE, si congiungano i punti D, C, E con B e con un altro punto A arbitrario di AB. Per dimostrare che la DE, la quale è già per ipotesi perpendicolare alla CB, è perpendicolare al piano ABC, basta provare (n. 379) che essa è perpendicolare alla CA. Per ciò si osservi che la BC è perpendicolare al segmento DE nel suo punto di mezzo, onde risulta che i due segmenti BD, BE sono uguali (n. 118). Si considerino allora i due triangoli ABD, ABE, rettangoli in B, i quali hanno il cateto AB comune e i cateti BD, BE uguali. Essi sono perciò uguali (n. 87) ed hanno uguali le ipotenuse AD, AE.

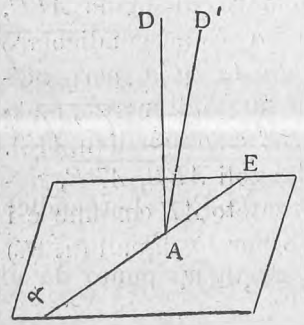
Allora nel piano ADE, la AC come congiungente il punto medio del segmento DE col punto A equidistante da D ed E è perpendicolare alla DE (n. 118), come appunto volevamo dimostrare.

382. Teor. — *Per un punto passa una retta ed una sola perpendicolare ad un piano.*

Distinguiamo anche qui due casi, secondo che il punto appartiene al piano o è esterno ad esso.

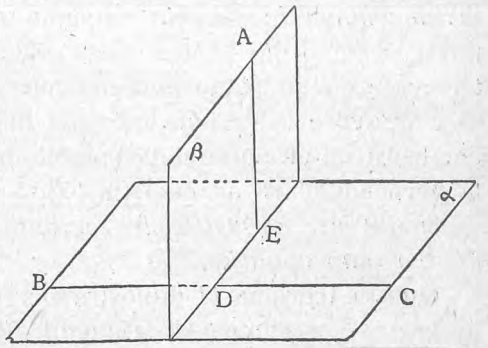
1°. Dato il piano α e il punto A giacente in esso, si conduca per A in α la retta AB arbitraria, e in A si costruisca il piano β perpendicolare alla AB (n. 380). I piani α, β aventi il punto A comune, si intersecheranno secondo una retta AC (n. 372). Nel piano β per A si conduca la perpendicolare AD alla AC. Codesta retta AD, come appartenente al piano β perpendicolare alla AB, è perpendicolare essa stessa alla AB, ed essendo perpendicolare alla AC è pur perpendicolare al piano α (n. 379).





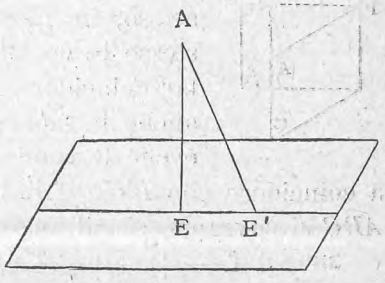
Se poi esistesse per A una seconda perpendicolare AD' ad α, il piano DAD' intersecherebbe α secondo una retta AE (n. 372), alla quale, per definizione, le rette AD, AD', giacenti con la AB in uno stesso piano, sarebbero tutte e due perpendicolari, il che è assurdo (n. 65).

2°. Dato il piano α, sia A un punto esterno, ad esso. Per ottenere una perpendicolare ad α, passante per A, conduciamo nel piano α una retta arbitraria BC e, considerato il piano β passante per A e perpendicolare a BC (n. 380), abbassiamo in esso da A la perpendicolare AE sulla retta intersezione di α e β. La AE è perpendicolare ad α. Se infatti è D l'intersezione di BC e β, abbiamo che pel piede D della perpendicolare BC a β si è condotta in β la DE, e per il punto E nel medesimo piano la perpendicolare EA alla DE.



Pel teorema del n. prec. la EA è perpendicolare al piano di DE e BC, cioè al piano α.

Abbiamo poi che per A non può passare una seconda perpendicolare AE' ad α, perchè se questa esistesse distinta dalla AE il piano AEE' intersecherebbe α secondo una retta EE', alla quale entrambe le rette AE, AE', passanti per uno stesso punto, sarebbero perpendicolari, il che è assurdo (n. 65).



383. Def. — Dicesi *distanza* di un punto da un

piano, non passante per esso, il segmento della perpendicolare abbassata dal punto sul piano, compreso fra il punto stesso e l'intersezione col piano (*piede* della perpendicolare).

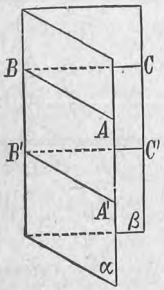
Diedri uguali.

384. Def. — Dato un diedro, dicesi *rettilineo* o *sezione normale* di esso l'angolo delle due semirette, secondo cui le due facce del diedro sono intersecate da un piano perpendicolare allo spigolo.

Per avere la sezione normale di un diedro basta innalzare da un punto dello spigolo in ciascuna faccia la perpendicolare ad esso (n. 379).

385. Teor. — *Tutte le sezioni normali di un diedro sono uguali.*

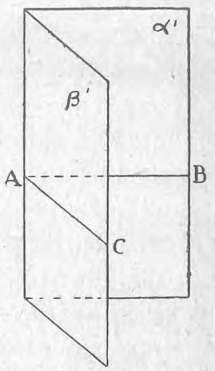
Questo teorema si dimostra per mezzo di uguaglianze di triangoli. Ma noi qui, per brevità, ci limiteremo a verificarlo sperimentalmente. Se $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono due sezioni normali dello stesso diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$, si faccia scorrere questo diedro su se stesso, in modo che scorrano su se stesse la costola e la faccia β fino a far coincidere B con B'. È chiaro che anche la faccia α scorrerà su se stessa e che le semirette BC, BA andranno a coincidere con $B'C'$, $B'A'$. Si ha cioè che l'angolo $\widehat{ABC}$ si sovrapporrà all'angolo $\widehat{A'B'C'}$.



386. Def. — Due diedri si dicono *uguali* se hanno uguali le sezioni normali. (Cfr. n. 81).

387. Probl. — *Costruire un diedro che abbia una faccia assegnata e come sezione normale un angolo dato.*

Si conduca in un punto A della retta o che limita il dato semipiano α' il piano perpendicolare, il quale intersecherà α secondo la semiretta AB, perpendicolare ad o; e in codesto piano si costruisca la semiretta AC, tale che l'angolo $\widehat{CAB}$ sia uguale all'angolo dato. La semiretta AC sarà perpendicolare ad o (n. 379). Allora, se β' è il semipiano, che contiene la retta o e la semiretta AC, il diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$ ha come sezione normale l'angolo $\widehat{CAB}$, uguale al dato, onde risulta che esso soddisfa al problema proposto.



388. In base alla definizione del n. 386 e alla precedente costruzione si stabiliscono pei diedri le proposizioni analoghe a quelle enunciate per gli angoli ai nn. 44 e seguenti, cioè: *Diedri uguali ad un terzo sono uguali fra di loro*, ecc.

Parimenti si dimostra l'uguaglianza dei diedri opposti allo spigolo e dei diedri supplementari di diedri uguali.

Da ultimo, esteso il concetto di somma al caso di più diedri anche non consecutivi, si ha che siffatta somma gode della proprietà *associativa* e *commutativa*.

Piani perpendicolari.

Proseguendo l'analogia col caso degli angoli, passiamo ad occuparci dei diedri retti, cominciando dalla seguente:

389. Def. — Ogni diedro uguale al suo adiacente dicesi *retto*, e due piani formanti un diedro retto diconsi fra loro *perpendicolari*.

390. Cor. — *La sezione normale di un diedro retto è un angolo retto e viceversa.*

Nota. — Risulta allora dal n. 387 come possa costruirsi (in un modo determinato) un diedro retto avente un dato spigolo e una data faccia e giacente da una parte assegnata di questa.

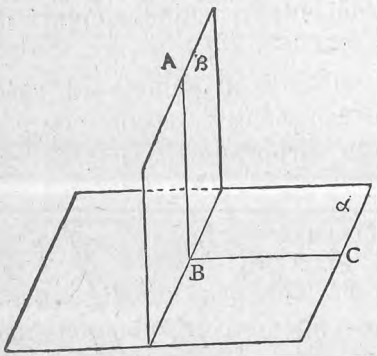
391. Cor. — *I diedri retti sono uguali* (n. 60, 386).

392. Def. — I diedri maggiori di un diedro retto si dicono *ottusi*; i diedri minori di un diedro retto si dicono *acuti*. Le loro sezioni normali sono rispettivamente ottuse e acute.

393. Teor. — *Ogni piano passante per una retta perpendicolare ad un piano è pur esso perpendicolare al piano.*

Dato il piano α e la retta AB perpendicolare ad α in B, sia β un qualsiasi piano passante per AB. Diciamo che β è perpendicolare ad α.

Infatti da B nel piano α si innalzi la perpendicolare BC alla intersezione $\alpha\beta$ dei due piani. Poichè la AB è perpendicolare ad α, essa è perpendicolare alla $\alpha\beta$ e alla BC (n. 379): onde risulta che l'angolo $\widehat{ABC}$ è la sezione normale del diedro formato dai due piani; poichè $\widehat{ABC}$ è

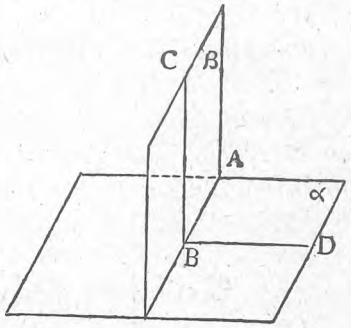


retto, anche il diedro è retto, ossia i due piani α e β sono perpendicolari.

394. Il teorema or ora dimostrato si inverte nei due modi seguenti.

Teor. — *Se due piani sono perpendicolari, ogni retta giacente in uno di essi e perpendicolare alla comune intersezione, è perpendicolare all'altro piano.*

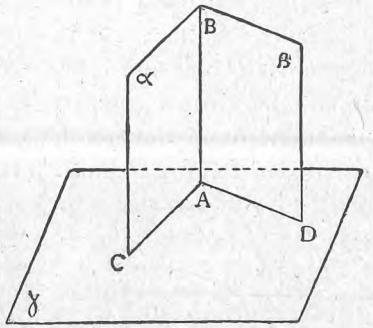
Se α e β sono fra loro perpendicolari, e la retta BC giace in β ed è perpendicolare alla intersezione AB di α e β, diciamo che BC è perpendicolare ad α.



Si conduca infatti su α da B la perpendicolare BD alla AB. Poichè le BD, BC sono perpendicolari alla AB, l'angolo $\widehat{CBD}$ è la sezione normale del diedro $\widehat{CBAD}$, che per ipotesi è retto, ed è perciò retta. Se ne conclude che la BC, perpendicolare alla AB, BD, è perpendicolare anche al loro piano α (n. 379).

395. Teor. — *Se due piani si segano e sono perpendicolari ad uno stesso piano, l'intersezione dei due piani è perpendicolare al terzo.*

Sia AB l'intersezione dei due piani α e β, perpendicolari entrambi al piano γ.



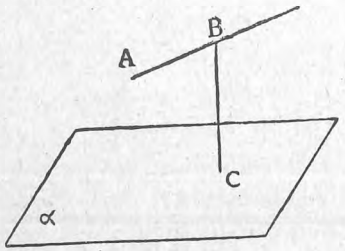
Supposto che sia A il punto comune ai tre piani, siano AC, AD ri-

spettivamente le intersezioni di α e β con γ. Allora la retta giacente in α e perpendicolare alla AC in A coincide, in forza del teor. prec., colla perpendicolare in A a γ.

Ma per lo stesso teor. anche la retta giacente in β e perpendicolare in A alla AD coincide colla perpendicolare in A a γ. Di qui si conclude che la perpendicolare a γ nel punto A è comune ai due piani α e β, cioè è la loro intersezione.

396. Cor. — *Tutti i piani perpendicolari ad uno stesso piano in uno stesso punto passano per la perpendicolare al piano dato nel punto dato.*

397. Teor. — *Per una retta non perpendicolare ad un piano passa un piano ed uno solo perpendicolare al dato.*

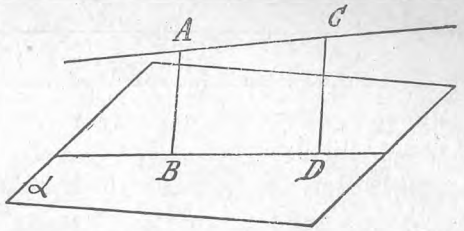


Nel caso in cui la retta giace nel piano, ciò è stato notato al n. 390. La costruzione che qui diamo in generale è una estensione di quella ivi richiamata.

Si abbia un piano α e una qualsiasi retta AB non perpendicolare ad esso. Si abbassi da un punto arbitrario B della retta la perpendicolare BC su α. Il piano ABC passante per BC è perpendicolare ad α (n. 393). D'altra parte per AB non può passare un secondo piano perpendicolare ad α; perchè se questo esistesse, l'intersezione dei due piani, cioè la retta AB, dovrebbe esser, contro l'ipotesi, la perpendicolare ad α (n. 395).

398. Cor. — *Se una retta non è perpendicolare ad un piano, tutte le perpendicolari abbassate dai suoi punti sul piano dato giacciono in un medesimo piano*, cioè nel piano passante per la retta data e perpendicolare al piano dato.

Se infatti le perpendicolari AB, CD abbassate dai due punti A e C di AC su α non giacessero nello stesso piano, avremmo per la retta AC due piani CAB, ACD entrambi perpendicolari ad α (n. 393), il che contraddice al teorema precedente.



399. Cor. — *Se una retta non è perpendicolare ad un piano, i piedi delle perpendicolari abbassate dai punti di essa sul piano appartengono ad una medesima retta*, intersezione del piano perpendicolare ad esso e passante per la retta data.

400. Def. — Codesta retta si dice *proiezione* della retta data sul piano dato.

Dato fuori di un piano α una semiretta AC (vedi fig. del n. 398) si dice proiezione di essa su α la semiretta BD, che ha per origine il piede B della perpendicolare abbassata da A in α, e che contiene i piedi delle perpendicolari ad α abbassate dai punti di AC. Se l'origine della semiretta data appartiene ad α, anche la semiretta proiezione ha la medesima origine.

Si dice poi *proiezione* di un segmento AC su di un piano α, che non lo contiene, il segmento BD che ha per estremi i piedi delle perpendicolari abbassate sul piano dagli estremi del segmento. Se infine il

segmento ha un estremo sul piano, si dice *proiezione* il segmento compreso fra codesto estremo e il piede della perpendicolare abbassata dall'altro estremo.

Sezioni ugualmente inclinate di diedri uguali.

Pel confronto dei diedri abbiamo ricorso a quello delle loro sezioni normali. Pel medesimo fine si può utilmente ricorrere alla considerazione delle altre sezioni dei diedri.

401. Def. — Dato un diedro, ogni angolo avente il vertice sullo spigolo e i lati sulle facce di esso, dicesi *sezione del diedro*.

Due sezioni di due diedri distinti o dello stesso diedro si dicono « a lati ugualmente inclinati sullo spigolo » o più semplicemente « ugualmente inclinate » se gli angoli formati dai lati dell'una con una medesima semiretta dello spigolo sono rispettivamente uguali agli angoli formati dai lati dell'altra con una medesima semiretta dello spigolo rispettivo.

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema fondamentale:

402. Teor. — *In diedri uguali (o nel medesimo diedro) sezioni ugualmente inclinate sono uguali e, viceversa, se due diedri hanno sezioni ugualmente inclinate uguali, sono uguali.*

Questo teorema si può dimostrare in base ai criteri di uguaglianza dei triangoli (nn. 87, 91, 94).

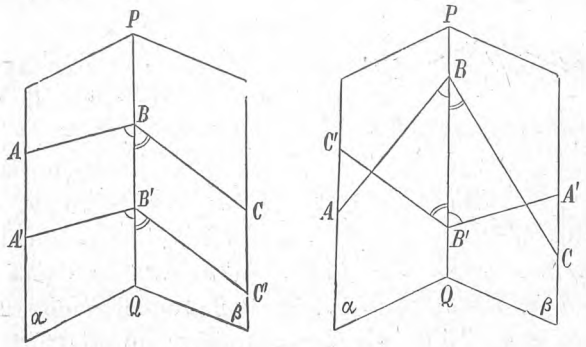
Noi qui ci limiteremo a verificare sperimentalmente la prima parte del teorema, e ci riferiremo al caso di un diedro unico.

Siano $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ due sezioni ugualmente inclinate del diedro $\widehat{\alpha\beta}$.

Riferendoci alla prima figura, sia

$$\widehat{ABQ} = \widehat{A'B'Q}, \quad \widehat{CBQ} = \widehat{C'B'Q};$$

allora è chiaro che, se si fa scorrere il diedro su sè



stesso fino a far coincidere B' con B, la sezione $\widehat{A'B'C'}$ va a sovrapporsi alla $\widehat{ABC}$.

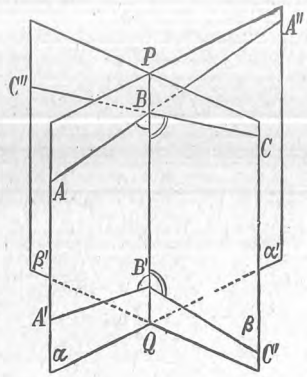
Nel caso della seconda figura, si supponga

$$\widehat{ABQ} = \widehat{A'B'P}, \quad \widehat{CBQ} = \widehat{C'B'P};$$

si vede allora che per sovrapporre $\widehat{ABC}$ ad $\widehat{A'B'C'}$ basta arrovesciare il diedro su sè stesso, portando B in B' e B' in B.

Si consideri in fine il caso della terza figura, in cui si suppone

$$\widehat{ABQ} = \widehat{A'B'P}, \quad \widehat{CBQ} = \widehat{C'B'P}.$$



Si vede allora che nè collo scorrimento nè col ribaltamento è possibile sovrapporre il diedro a sè stesso in modo che $\widehat{A'B'C'}$ vada a coincidere con $\widehat{ABC}$. Considerato per altro il diedro $\widehat{\alpha'\beta'}$ opposto allo spigolo di $\widehat{\alpha\beta}$, e costruita la sua sezione $\widehat{A''BC''}$ opposta al vertice di $\widehat{ABC}$, si faccia ruotare $\alpha\beta$ intorno a PQ fino a farlo coincidere con $\alpha'\beta'$ e allora, poichè

$$\widehat{A'B'P} = \widehat{A''BP}, \quad \widehat{C'B'P} = \widehat{C''BP},$$

se si fa scorrere il diedro su sè stesso dalla sua nuova posizione fino a far coincidere B' con B, è chiaro che $\widehat{A'B'C'}$ va a sovrapporsi ad $\widehat{A''BC''}$; ed è così verificato che $\widehat{A'B'C'}$ è uguale ad $\widehat{A''BC''}$ e quindi ad ABC.

Analogamente si verifica la prima parte del teorema nel caso di due diedri distinti, sovrapponendo uno di essi all'altro con un movimento opportuno.

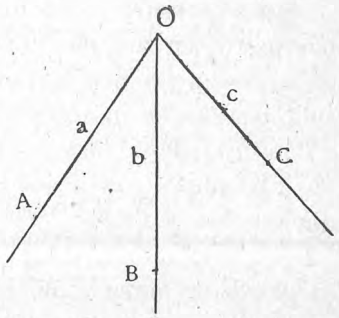
IX.

ANGOLOIDI E POLIEDRI

Triedri.

403. Date per un punto O tre semirette a, b, c non giacenti in un piano, restano fissati tre piani ab, bc, ca, i quali, presi a due a due, determinano tre dietri $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{a}$. Codesti tre diedri sono tali che ogni punto comune a due di essi è interno anche al terzo (cfr. n. 74).

404. Def. — Date tre semirette a, b, c uscenti da un punto O e non appartenenti ad uno stesso piano, dicesi *angolo triedro* o semplicemente *triedro abc*, la figura costituita dai punti comuni ai tre diedri determinati dai tre piani ab, bc, ca presi a due a due.



Le semirette a, b, c si dicono *spigoli*, gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ si dicono *facce*, e il punto O *vertice* del triedro. Se A, B, C sono tre punti dei tre spigoli a, b, c rispettiva-

mente distinti da O, il triedro si designa anche con $O\widehat{ABC}$.

I diedri $\widehat{AbC}$, $\widehat{BcA}$, $\widehat{CaB}$ si dicono *diedri del triedro* e i sei diedri adiacenti si dicono *esterni*.

Se a_1, b_1, c_1 sono i prolungamenti di a, b, c, il triedro a_1, b_1, c_1 si dice *opposto al vertice* del triedro abc.

405. L'insieme delle tre facce del triedro dicesi *superficie* di esso.

I punti del triedro non giacenti sulla superficie diconsi *interni;* mentre i punti che non sono interni nè giacciono sulla superficie si dicono *esterni*.

Nota. — Il triedro abc è la parte di spazio comune ai tre semispazi limitati dai piani ab, bc, ca e contenenti rispettivamente le semirette c, a, b.

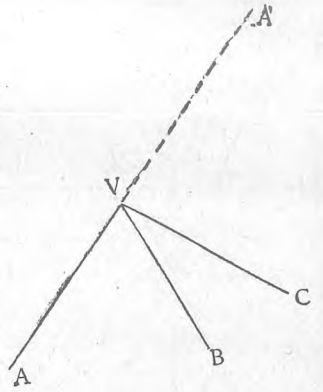
406. Teor. — *In un triedro ogni faccia è minore della somma delle altre due.*

Questo teorema si dimostra in base a proprietà dei triangoli (cfr. nn. 87, 91, 94); ma noi qui, per brevità, ci limiteremo a giustificarlo con la seguente

Osservazione. — Si immagini di aver costruito, per es. in cartoncino, un triedro abc (fig. alla pagina prec.). Se noi tagliamo il cartoncino lungo uno spigolo, per es. lungo b, e facciamo ruotare la faccia $\widehat{ab}$ intorno ad a fino ad adagiarsi su $\widehat{ac}$ e la faccia $\widehat{cb}$ intorno a c (in senso opposto) fino ad adagiarsi anche essa sulla $\widehat{ac}$, noi vediamo che le due facce $\widehat{ab}$, $\widehat{cb}$ nella nuova posizione *si ricoprono* in parte, onde risulta che la faccia $\widehat{ac}$ è minore della somma delle facce $\widehat{ab}$ e $\widehat{cb}$.

407. Teor. — *In ogni triedro la somma delle facce è minore di quattro retti.*

Dato il triedro $\widehat{VABC}$, per dimostrare che la somma delle facce è minore di due angoli piatti, consideriamo la semiretta VA', opposta a VA. Nel triedro $\widehat{VA'BC}$ la faccia $\widehat{BVC}$ è minore della somma delle facce $\widehat{BVA'}$ e $\widehat{CVA'}$ (numero prec.). Avremo allora che la somma delle facce $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$, e $\widehat{CVA}$, è minore della somma delle facce $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVA'}$, $\widehat{AVC}$, $\widehat{CVA'}$, cioè appunto di due angoli piatti ossia di quattro retti.



Triedri uguali.

408. Def. — Due triedri, presi i loro spigoli in un determinato ordine, si dicono *uguali*, quando le facce e i diedri dell'uno sono ordinatamente uguali alle facce e ai diedri dell'altro.

Così i due triedri abc, def, si dicono uguali se

$$\widehat{ab}=\widehat{de},\quad \widehat{bc}=\widehat{ef},\quad \widehat{ca}=\widehat{fd},$$
$$\widehat{a}=\widehat{d},\quad \widehat{b}=\widehat{e},\quad \widehat{c}=\widehat{f}.$$

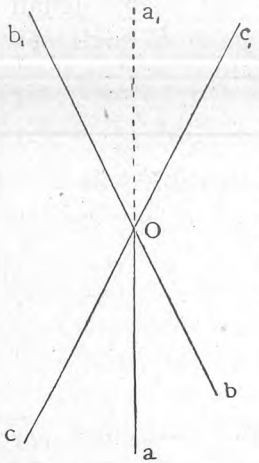
Per designare l'uguaglianza dei triedri abc, def, si scrive

$$abc=def.$$

Le medesime uguaglianze di lati e di angoli sono espresse da ciascuna delle seguenti scritture:

$$bca=efd,\quad cab=fde$$
$$cba=fed,\quad bac=edf,\quad acb=dfe.$$

409. Cor. — *Due triedri uguali ad un terzo sono uguali fra loro.*



410. Cor. — *Due triedri opposti al vertice sono uguali.*

Infatti le facce sono a due a due uguali come opposte al vertice (n. 49), e i diedri sono a due a due uguali come opposti allo spigolo (n. 388).

411. Osservazione. Si può osservare, ricorrendo a modelli fisici, che un triedro non si può sovrapporre al suo opposto al vertice: si potrebbe per altro sovrapporlo alla immagine di esso, riflessa da uno specchio piano.

Questa osservazione c'indurrebbe a distinguere una *uguaglianza diretta* e una *uguaglianza inversa* di due triedri, il primo caso corrispondendo alla sovrapponibilità. Ma noi non ci indugeremo su ciò.

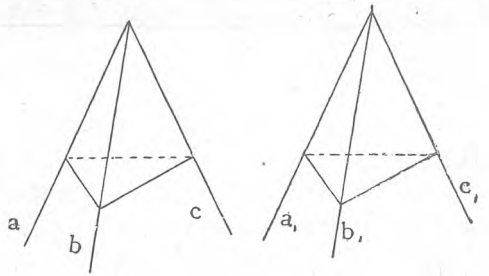
412. Dalla def. del n. 408 discende che per stabilire che due triedri sono uguali occorrerebbe verificare sei uguaglianze tra angoli e tra diedri. Ma alcune di queste discendono dalle altre. Si hanno invero i seguenti criteri di uguaglianza di cui è evidente l'analogia coi criteri di uguaglianza dei triangoli dei nn. 87, 91, 94.

413. I. Criterio di uguaglianza dei triedri.

Teor. — *Se due triedri hanno rispettivamente uguali due facce e il diedro compreso, essi sono uguali, cioè hanno rispettivamente uguali anche le terze facce e i diedri opposti alla facce uguali.*

I due triedri abc, $a_1b_1c_1$ abbiano uguali le facce $\widehat{ab}$, $\widehat{a_1b_1}$ e $\widehat{bc}$, $\widehat{b_1c_1}$ e i diedri $\widehat{b}$, $\widehat{b_1}$.

Le facce $\widehat{ac}$, $\widehat{a_1c_1}$ sono sezioni dei diedri uguali $\widehat{b}$, $\widehat{b_1}$ aventi i lati ugualmente inclinati sugli spigoli; e perciò sono uguali (n. 402).

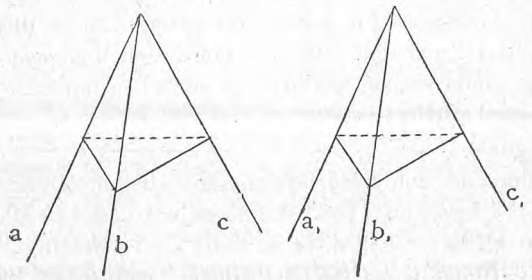


In secondo luogo le facce $\widehat{bc}$, $\widehat{b_1c_1}$, uguali per ipotesi, sono sezioni ugualmente inclinate dei diedri $\widehat{a}$, $\widehat{a_1}$; se ne conclude che codesti due diedri sono uguali (n. 402).

Analogamente si dimostra che sono uguali i diedri $\widehat{c}$, $\widehat{c_1}$, onde risulta l'uguaglianza dei due triedri.

414. II. Criterio di uguaglianza dei triedri.

Teor. — *Se due triedri hanno le facce ordinatamente uguali, essi sono uguali, cioè hanno ordinatamente uguali i diedri opposti alle facce uguali*



Dati i due triedri abc, $a_1b_1c_1$ il primo abbia le facce $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$, $\widehat{ab}$ ordinatamente uguali alle facce $\widehat{b_1c_1}$, $\widehat{c_1a_1}$, $\widehat{a_1b_1}$ del secondo. Diciamo che i diedri $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ sono uguali ai diedri $\widehat{a_1}$, $\widehat{b_1}$, $\widehat{c_1}$ ordinatamente.

Infatti le $\widehat{bc}$, $\widehat{b_1c_1}$ si possono considerare come sezioni dei due diedri, $\widehat{a}$, $\widehat{a_1}$, aventi i lati ugualmente inclinati sugli spigoli di essi. Poichè codeste due sezioni sono uguali, i due diedri sono uguali (n. 402). Allora i due triedri avendo uguali ordinatamente due facce e il diedro compreso, sono uguali (n. prec.).

415. Insieme coi due criteri precedenti sussistono i due criteri, che da essi si ottengono, scambiando le parole « facce » e « diedri », cioè i due criteri seguenti:

a) *Se due triedri hanno rispettivamente uguali due diedri e la faccia comune, essi sono uguali, cioè hanno rispettivamente uguali anche i terzi diedri e le facce opposte ai diedri uguali.*

b) *Se due triedri hanno i diedri ordinatamente uguali, essi sono uguali, cioè hanno uguali le facce opposte ai diedri uguali.*

Questi due nuovi criteri si deducono rispettivamente dai due criteri dei nn. 413, 414, associando a ciascuno dei due triedri che si considerano, il rispettivo *triedro polare*, che si ottiene innalzando su ciascuna faccia, dal vertice, la semiretta perpendicolare, da quella stessa parte da cui cade il terzo spigolo. Ora si dimostra che: 1) se un diedro è polare di un altro, il secondo è polare del primo; 2) se due triedri sono polari l'uno dell'altro, le facce dell'uno sono supplementari delle sezioni normali dei diedri ordinatamente corrispondenti dell'altro; 3) triedri polari di triedri uguali sono uguali.

Allora, se due triedri soddisfano all'ipotesi del criterio a) o b), i loro polari soddisfanno rispettivamente alle ipotesi dei criteri del n. 413 o del n. 414 e sono perciò uguali: onde risulta l'uguaglianza dei due triedri primitivi.

Angoloidi.

416. Il triedro è la prima e più semplice di tutta una serie di figure.

Così date per un punto O quattro semirette a, b, c, d, a tre a tre non giacenti in uno stesso piano e tali che ciascuno dei piani ab, bc, cd, da lasci le altre due semirette da una stessa parte, la figura costituita dai punti comuni ai quattro diedri $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$, si dice *angoloide tetraedro* o *a quattro facce* $abcd$ (di vertice O, di spigoli a, b, c, d e così via).

Più in generale siano date per un punto O n semirette

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ldots,\quad a_n$$

a tre a tre non giacenti in uno stesso piano e tali che ciascuno dei piani a_1a_2, a_2a_3,...., $a_{n-1}a_n$, a_na_1 lasci le altre $n-2$ semirette da una stessa banda.

I piani or ora nominati, presi ciascuno col suo consecutivo, determinano n diedri $\widehat{a_1}$, $\widehat{a_2}$,...., $\widehat{a_n}$; e la figura costituita dai punti comuni a codesti n diedri dicesi *angoloide* ad n facce $a_1a_2a_3\ldots a_n$.

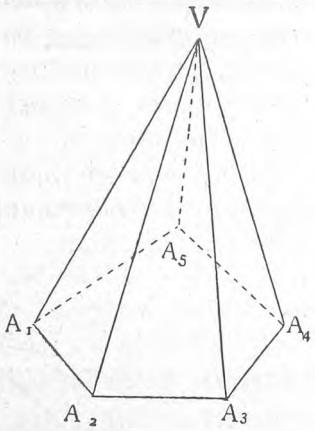
Se A_1, A_2,.... A_n sono n punti giacenti rispettivamente sugli spigoli a_1, a_2,....a_n, l'angoloide si designa anche con $\widehat{OA_1A_2\ldots A_n}$.

417. Agli angoloidi si estende il teorema dimostrato al n. 406 pei triedri, cioè *in ogni angoloide una faccia è minore della somma delle altre.*

418. Def. — Due angoloidi, presi i loro spigoli in un determinato ordine, si dicono *uguali*, se le facce e i diedri dell'uno sono ordinatamente uguali alle facce e ai diedri dell'altro.

Poliedri.

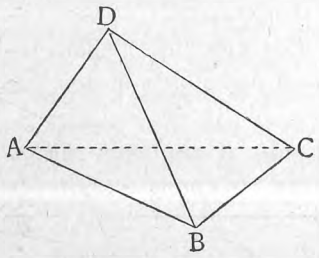
419. Dati un poligono $A_1A_2....A_n$ e un punto V fuori del piano di esso, la figura costituita dai punti dell' angoloide $\widehat{VA_1A_2....A_n}$ che giacciono da quella parte del piano del poligono da cui cade V dicesi *piramide* $VA_1A_2....A_n$, di *vertice* V e *base* $A_1A_2....A_n$.



I triangoli VA_1A_2, VA_2A_3,...., VA_nA_1 diconsi *facce* (laterali) e il loro insieme *superficie laterale* della piramide. Aggiungendo alla superficie laterale la base si ottiene la *superficie totale.*

La distanza del vertice dal piano della base dicesi *altezza* della piramide.

In particolare si ha la piramide a base triangolare o *tetraedro*. Ogni tetraedro si può considerare in quattro modi diversi come piramide, prendendo come base una qualsiasi delle sue quattro facce.



420. Le piramidi sono particolari *poliedri.*

Def. — Dicesi *superficie poliedrica* (convessa) ogni figura costituita da poligoni situati in piani

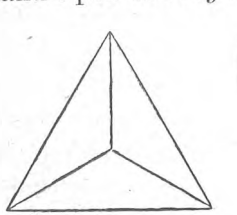
diversi e disposti in modo, che ognuno dei lati sia comune a due di essi, e il piano di ciacuno lasci tutti gli altri da una medesima banda.

I nominati poligoni diconsi *facce* e i vertici, i lati e gli angoli rispettivi diconsi *vertici, spigoli* ed *angoli* della superficie poliedrica.

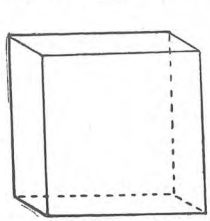
Gli spigoli uscenti da un medesimo vertice determinano un angoloide; e la figura costituita dai punti comuni a tutti codesti angoloidi dicesi *poliedro.*

Un poliedro si designa nominandone i vertici.

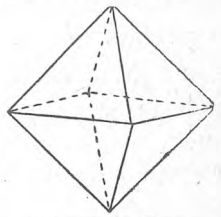
421. Fra i poliedri sono particolarmente interessanti i poliedri *regolari.* Chiamando regolare un angoloide in cui sono uguali tutte le facce e tutti i diedri, dicesi *regolare* un poliedro che abbia



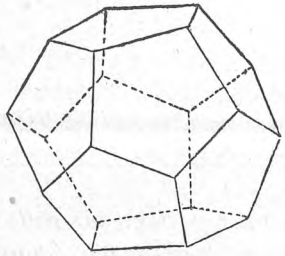
Tetraedro regolare.



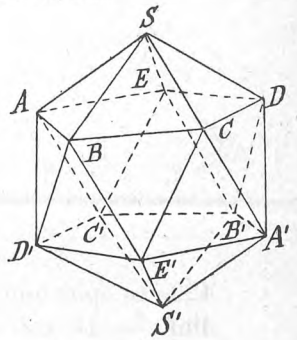
Esaedro regolare o cubo.



Ottaedro regolare.



Dodecaedro regolare.



Icosaedro regolare.

1) regolari tutte le facce e tutti gli angoloidi;
2) uguali tutte le facce e tutti gli angoloidi.

Ora si dimostra che esistono soltanto cinque tipi di poliedri regolari (convessi), dei quali qui ci limiteremo a dare le figure e i nomi (Vedi la pag. prec.).

422. L'insegnante, ove ne abbia i mezzi, può far vedere alla scolaresca qualche esempio di poliedri *archimedei* o *semiregolari*, cioè di poliedri aventi tutte le facce regolari (ma non uguali) e tutti gli angoloidi uguali (ma non regolari).

423. Def. — Due poliedri diconsi *uguali* se hanno ordinatamente uguali gli angoloidi e le facce, cioè gli angoli, i diedri e gli spigoli.

424. Nota. — Se si è verificato che due poliedri sono sovrapponibili si può senz'altro concludere che essi sono uguali. Ma non sempre due poliedri uguali sono sovrapponibili, p. es. un poliedro non regolare è uguale alla sua immagine speculare rispetto ad uno specchio piano, ma non è sovrapponibile ad essa. Si ha in generale che se due poliedri sono uguali, o essi sono sovrapponibili (uguali direttamente), oppure l'uno è sovrapponibile alla immagine dell'altro riflessa da uno specchio piano (sono uguali inversamente).

ESERCIZI

1. I quattro piani di un tetraedro dividono lo spazio in nove parti, per modo che congiungendo due punti fuori di esse appartenenti alla medesima parte si ha un segmento che non sega alcuno dei quattro piani; ed invece congiungendo due punti, fuori di essi, appartenenti a parti diverse, si ha un segmento che sega uno almeno dei piani suddetti.

2. Delle nove parti in cui lo spazio è diviso dai piani di un tetraedro, quante, al più, possono essere attraversate da una retta?

3. Date due rette sghembe, per un punto fuori di esse passa una retta incidente ad ambedue.

4. Se più rette a due a due s'incontrano e non giacciono in uno stesso piano, esse passano per un medesimo punto e viceversa.

5. Luogo dei punti equidistanti da due punti dati.

6. Luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono disuguali in un certo senso.

7. Luogo dei punti equidistanti da due rette secantisi.

8. Luogo dei punti equidistanti dalle tre rette di un triedro.

9. Luogo dei punti le cui distanze da due rette secantisi o dalle tre rette di un triedro sono disuguali in un senso fissato.

10. Luogo dei punti equidistanti da due piani secantisi.

11. Luogo dei punti equidistanti dai tre piani di un triedro.

12. Luogo dei punti le cui distanze da due piani secantisi

oppure dai tre piani di un triedro, sono disuguali in un senso assegnato.

13. In un tetraedro i sei piani bisettori dei diedri passano per un punto, interno al tetraedro [che è centro di una sfera (*iscritta*) tangente alle sue facce].

14. Se una semiretta ha l'origine su di un piano e non giace in esso, l'angolo che essa forma colla sua proiezione è minore dell'angolo che forma con ogni altra semiretta giacente nel piano dato e passante per l'origine della semiretta data.

Codesto angolo che la semiretta forma colla sua proiezione dicesi *angolo della semiretta col piano*.

15. Dati un piano ed un punto fuori di essa, fra gli infiniti segmenti che congiungono il punto dato coi punti del piano:

1° la perpendicolare (*distanza del punto dal piano*) è minima;

2° due oblique aventi, sul piano, proiezioni uguali sono uguali;

3° di due oblique, le cui proiezioni sul piano sono disuguali, quella che ha proiezione maggiore è maggiore.

Alla definizione di punti simmetrici relativamente ad un punto o ad una retta, data a pag. 71, e che qui intendiamo estesa allo spazio, aggiungiamo la seguente

Def. Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad un piano se appartengono ad una medesima perpendicolare a codesto piano e se sono equidistanti da esso. Due figure, i cui punti sieno a coppie simmetrici rispetto ad un piano, diconsi *simmetriche* rispetto a questo.

16. Dati fuori di un piano α e da una parte di esso due punti P, Q si determini sul piano α un punto X, tale che le due semirette XP, XQ formino colla perpendicolare in X al piano due angoli uguali. [Cfr. es. 15 a pag. 72].

17. Dati entro un dietro $\widehat{\alpha\beta}$ due punti P, Q si determinino su α, β due punti X, Y, per modo che gli angoli d'incidenza e di riflessione formati da PX e da XY, YQ coi due piani α, β sieno rispettivamente uguali.

18. Si risolva il problema analogo al precedente per due punti interni ad un triedro o ad un tetraedro.

19. Dati due punti P, Q fuori di un piano α e da una parte di esso, determinare su α il punto X per cui la somma delle distanze $PX + XQ$ riesca minima.

20. Dati due punti P, Q entro un dietro $\widehat{\alpha\beta}$, determinare sui due piani i punti X, Y per modo che la somma dei segmenti $PX + XY + XQ$ riesca minima.

21. Si risolva il problema analogo al precedente per due punti interni ad un triedro o ad un tetraedro.

22. Due tetraedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali tre spigoli uscenti da un vertice e gli angoli da essi compresi.

23. Due tetraedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali i tre spigoli di una faccia e i tre diedri cui essa appartiene.

24. Due tetraedri, aventi gli spigoli ordinatamente uguali sono uguali.

25. Di due piramidi si può concludere che sono uguali, se si sa che hanno uguali:

a) l'angoloide al vertice e gli spigoli di esso;

oppure:

b) la base e i diedri cui essa appartiene.

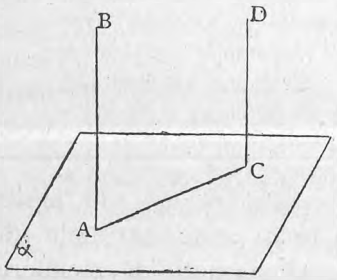
X.

RETTE E PIANI PARALLELI - PRISMI

Rette parallele.

425. Ricordiamo che si sono definite come *parallele* due rette appartenenti al medesimo piano e non aventi nessun punto comune (n. 54). E richiamiamo la proposizione secondo la quale, dati in un piano un punto e una retta non passante per esso, esiste pel punto nel piano una sola parallela alla retta data (n. 67). Poichè vi è un solo piano che contiene una retta ed un punto fuori di essa (n. 9), possiamo concludere che quella proposizione vale anche nello spazio, cioè che *data una retta ed un punto fuori di essa esiste una sola parallela pel punto alla retta data.*

Ed ora passiamo a stabilire nuove proprietà concernenti le rette parallele nello spazio.

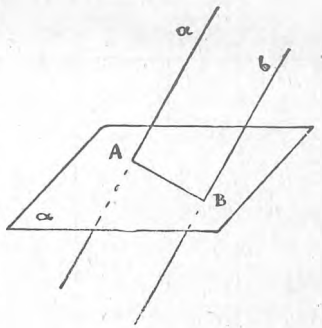


426. Teor. — *Due rette perpendicolari ad un piano sono parallele.*

Se le rette AB, CD sono perpendicolari al piano α in A, C rispettivamente, esse giacciono nel piano perpendicolare secondo AC ad α (nn. 393,

397); e d'altra parte non si incontrano perchè sono perpendicolari alla intersezione AC dei due piani (n. 65).

427. Teor. — *Se un piano interseca una retta, interseca anche ogni parallela alla data.*



Date le due rette parallele a, b, se un piano α interseca la a in un punto A, il piano ab, distinto da α e avente comune con esso il punto A, lo segherà secondo una retta (n. 372), che intersecando la a, intersecherà anche la b in un punto B (n. 69), il quale sarà comune alla b e ad α.

428. Teor. — *Date due rette parallele, ogni piano perpendicolare all' una è perpendicolare anche all' altra.*

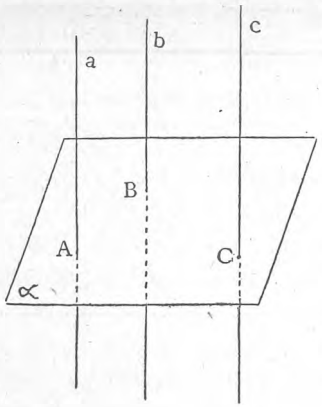
Date le due rette parallele AB, CD il piano α sia perpendicolare alla AB in A (vedi fig. alla pag. prec.). Diciamo che anche la CD è perpendicolare ad α.

Anzitutto il piano α incontrando la AB, incontrerà in un punto C anche la parallela CD (n. prec.). Ma la AB, come perpendicolare al piano α, è perpendicolare alla AC (n. 379), onde risulta (n. 65) che anche la CD sarà perpendicolare alla AC. Abbiamo allora che la retta CD giacente nel piano BAC, perpendicolare ad α (n. 393), è perpendicolare alla intersezione di codesto piano con α, e perciò (n. 394) è anche perpendicolare al piano α.

429. Abbiamo dimostrato al n. 68 che nel piano due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro. Il teorema precedente ci permette di estendere

codesta proposizione a tre rette non giacenti in uno stesso piano. Abbiamo cioè, in tutta la sua generalità, la seguente proposizione.

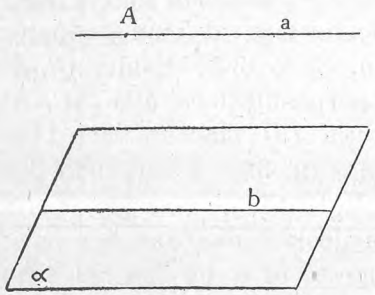
Cor. — *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra di loro.*



Invero se le rette b e c sono parallele ciascuna alla a, il piano α condotto per un punto qualsiasi A della a perpendicolarmente ad essa, sarà perpendicolare tanto alla b quanto alla c (n. prec.); onde si conclude che queste due ultime rette, come perpendicolari ad uno stesso piano α, sono parallele (n. 426).

Retta e piano paralleli.

430. Def. — Un piano ed una retta non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli* fra loro.



Se una retta è parallela ad un piano, essa giace tutta da una stessa banda rispetto ad esso (n. 370).

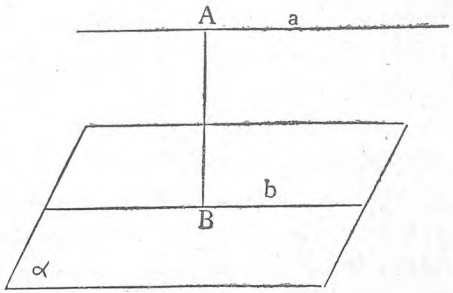
L'esistenza di rette e piani paralleli è provata dal seguente teorema.

431. Teor. — *Una retta passante per un punto esterno ad un piano e parallela ad una retta di esso, è parallela al piano.*

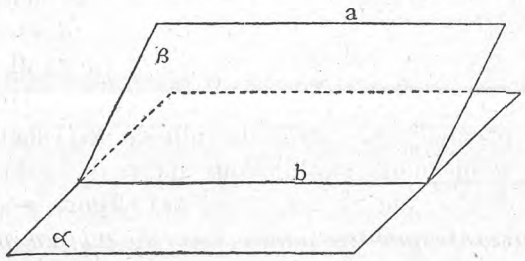
Se la retta a passante pel punto A esterno al piano α, è parallela alla retta b di α, il piano Ab distinto da α e contenente la a, ha comune con α la retta b, la quale non ha con la a nessun punto comune; onde risulta che la a e α non hanno nessun punto comune, cioè sono paralleli.

432. Cor. — *Una retta ed un piano perpendicolari in punti distinti ad una medesima retta sono paralleli.*

La retta a e il piano α siano perpendicolari in A, B rispettivamente alla retta AB. Il piano Ba avente comune con α il punto B, lo intersecherà secondo una retta b, perpendicolare alla AB (n. 379) e quindi (n. 65) parallela alla a. Se ne conclude che la a, parallela alla retta b di α, è parallela al piano α (n. prec.).



433. Teor. — *Data una retta parallela ad un*



piano, l'intersezione di questo con un piano passante per la retta data è parallela ad essa.

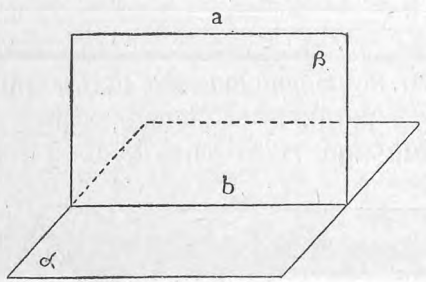
Se infatti la retta a è parallela al piano α, e il piano β per a interseca α secondo la retta b, questa non può avere nessun punto comune con la a, altrimenti la a incontrerebbe, contro l'ipotesi, il piano α. Se ne conclude che la b è parallela alla a.

434. Cor. — *Se un piano è parallelo ad una retta, ogni retta parallela alla data, che passi per un qualsiasi punto del piano, giace in esso.*

Infatti l'intersezione del piano dato col piano che da un suo punto va alla retta data è parallela a questa (n. prec.), e per un punto passa una sola parallela ad una retta data (n. 425).

435. Cor. — *I punti di una retta parallela ad un piano hanno tutti da esso uguale distanza* (distanza della retta dal piano).

Data infatti la retta a parallela al piano α, per abbassare le perpendicolari dai punti di a su α, basta condurre per a il piano β perpendicolare ad α e quindi abbassare in β, da ciascun punto di a, la perpendicolare alla intersezione b di α e β. Ma questa retta b, è pel teorema precedente, parallela alla a ed ha quindi tutti i suoi punti equidistanti da b (n. 138); onde si conclude che i punti di a sono equidistanti da α.



Piani paralleli.

436. Dato un piano α, e condotto per un punto esterno due rette a, b parallele ad esso, il piano ab non può segare α, perchè, se ciò accadesse, entrambe le rette a, b sarebbero parallele all'intersezione dei due piani ab e α (n. 433).

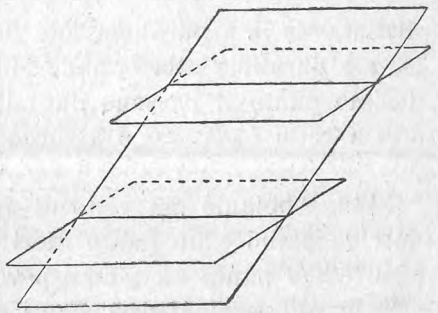
437. Def. — Due piani non aventi nessun punto comune si dicono *paralleli.*

Se due piani α e β sono paralleli, ciascuno di essi giace tutto da una medesima parte rispetto all'altro (n. 370); essi perciò dividono lo spazio in tre parti: la parte rispetto ad α in cui non giace β, la parte rispetto a β in cui non giace α e la parte di spazio che giace simultaneamente dalla stessa parte di β rispetto ad α e dalla stessa parte di α rispetto a β, costituita dai punti che si dicono *compresi* fra α e β.

Quest'ultima parte si dice *strato* limitato dai due piani α, β *(facce).*

438. Ciò premesso, la conclusione del n. 436 si può enunciare sotto la forma seguente:

Cor. — *Se per un punto esterno ad un piano si conducono due rette parallele ad esso, il piano delle due rette è parallelo al piano dato.*



439. Discendono inoltre dalla definizione di piani paralleli le seguenti conseguenze:

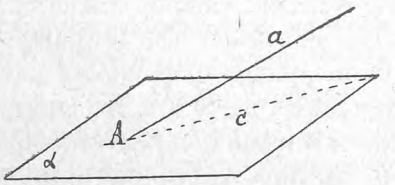
Cor. — *Se due piani sono paralleli, tutte le rette dell' uno sono parallele all' altro.*

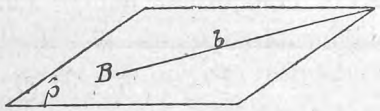
440. Cor. — *Se un piano sega due piani paralleli, le intersezioni sono parallele* (fig. alla pag. prec.).

Infatti codeste due intersezioni appartengono ad un medesimo piano e non hanno nessun punto comune.

441. Cor. — *Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela all' uno è parallela anche all' altro o giace su di esso.*

Dati invero i due piani paralleli α, β, e presa una retta a, parallela a β, questa retta o è parallela anche ad α, oppure incontra questo piano in un punto A almeno. In quest'ultimo caso essa deve giacere su α, perchè se così non fosse, il piano che dalla a va ad un punto arbitrario B di β intersecherebbe il piano β secondo una retta b e il piano α secondo una retta c, distinta da a e parallela alla b (n. prec.). Ma anche la a è parallela alla b, onde si avrebbe che pel medesimo punto A passano due diverse parallele alla stessa retta b, il che è assurdo (n. 425).

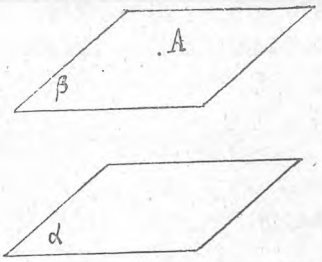




442. Abbiamo già visto al n. 438 in qual modo, dati un piano e un punto fuori di esso, si possa costruire pel punto un piano parallelo al piano dato. Ora le proposizioni precedenti ci permettono di dimostrare l' unicità di un tale piano: abbiamo, cioè, il seguente

Teor. — *Per un punto fuori di un piano passa un solo piano parallelo al dato.*

Dati un piano α e un punto A fuori di esso, se per A si conduce un piano β parallelo ad α, tutte le rette di β passanti per A sono parallele ad α (n. 439), e, viceversa, ogni retta per A parallela ad α appartiene a β (n. prec.). Risulta di qui che non vi può essere per A che un solo piano parallelo ad α.



443. Il ragionamento or ora svolto ci prova anche il seguente

Cor. — *Tutte le rette parallele ad un piano uscenti da un punto esterno ad esso, giacciono nel piano parallelo al dato, passante pel punto dato.*

444. Cor. — *Se due piani sono paralleli, ogni piano parallelo all' uno è parallelo all' altro.*

Altrimenti per uno stesso punto passerebbero due piani paralleli ad un medesimo.

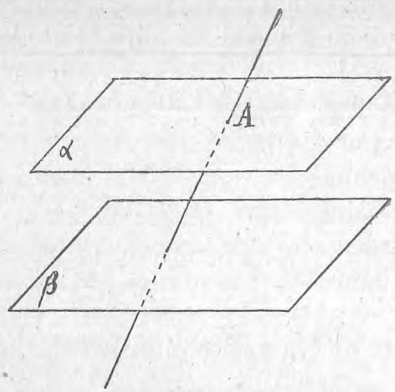
Nota. — Si può enunciare la precedente proposizione anche dicendo che *se due piani sono paralleli, ogni piano che seghi l' uno sega anche l' altro.*

445. Cor. — *Se due piani sono paralleli a due piani segantisi, essi pure si segano, e le due intersezioni sono parallele.*

Anzitutto se quei due piani fossero paralleli, risulterebbero tali anche i dati (n. prec.). Inoltre la intersezione dei due primi piani è parallela a cia-

scuno dei secondi (n. 439) e quindi anche alla loro intersezione.

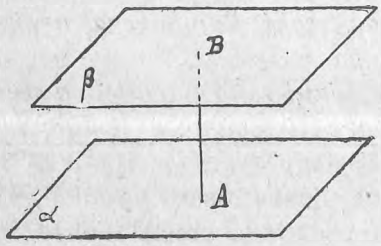
446. Cor. — *Se una retta interseca un piano, interseca anche ogni piano parallelo al primo.*



Se la retta a, intersecante il piano α in A, non incontrasse il piano β, parallelo ad α, la a sarebbe una parallela a β passante per A e non giacente nel piano α parallelo a β, il che è assurdo (n. 441).

447. Se la retta AB è perpendicolare in A al piano α (fig. al n. seg.), sappiamo già che tutte le perpendicolari in B ad AB sono parallele ad α (n. 432) e quindi giacciono nel piano parallelo per B ad α, (n. 443). D'altra parte codesto piano è perpendicolare ad AB (n. 379), onde concludiamo che sussiste il

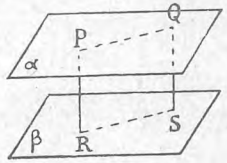
Teor. — *Due piani perpendicolari ad una stessa retta in punti distinti sono paralleli.*



448. Cor. — *Se una retta è perpendicolare ad un piano, è pure perpendicolare ad ogni piano parallelo al primo.*

Se la BA è perpendicolare in A al piano α, incontrerà in un punto B il piano β parallelo ad α (n. 446); e poichè il piano perpendicolare in B ad AB è parallelo ad α (n. prec.), e per un punto passa un solo piano parallelo ad un piano dato (n. 442), concludiamo che il piano β e la retta AB sono perpendicolari.

449. Dati due piani paralleli α e β, due punti quali si vogliono P e Q di α hanno uguali distanze da β, perchè la retta PQ, giacente su α, è parallela a β (n. 439), e perciò tutti i suoi punti sono equidistanti da esso (n. 435). Ma la perpendicolare abbassata da un punto qualsiasi P di α su β è perpendicolare anche ad α (n. prec.), onde si conclude che un qualsiasi punto di α ha da β una distanza uguale a quella di un qualsiasi punto di β da α.



Perciò dicesi *distanza* di due piani paralleli α, β la distanza di un qualsiasi punto di uno di essi dall'altro piano.

Trasversali a più piani paralleli.

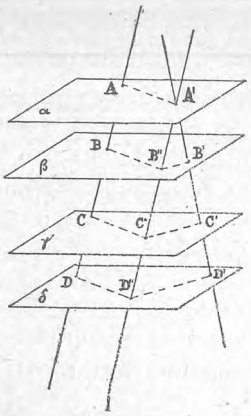
450. Se più piani paralleli sono segati da due (o più) trasversali, diconsi *corrispondenti* due segmenti di queste, i quali siano intercettate dai medesimi due piani.

Sussiste allora il

Teor. — *Se più piani paralleli sono segati da due trasversali, a segmenti uguali dell'una corrispondono segmenti uguali dell'altra e a segmenti disuguali corrispondono segmenti disuguali nello stesso senso.*

I piani paralleli α, β, γ, δ siano segati da due trasversali rispettivamente nei punti A, B, C, D e A', B', C', D' e sia $AB = CD$.

Diciamo che è anche $A'B' = C'D'$.



Possiamo supporre che le due trasversali non giacciano in uno stesso piano, perchè se così fosse, codesto piano segherebbe i piani α, β, γ, δ secondo quattro rette AA', BB', CC', DD' parallele (n. 440) e si ricadrebbe nel caso considerato al n. 141.

Supposto dunque che le due trasversali non giacciano in un piano, si conduca da A' la parallela alla AD: codesta nuova trasversale segherà β, γ, δ in certi tre punti B'', C'', D'' rispettivamente e il piano delle due parallele segherà α, β, γ, δ secondo le quattro rette AA'', BB'', CC'', DD'' che saranno fra di loro parallele (n. 440). Così saranno parallele le rette $B''B'$, $C''C'$, $D''D'$, intersezioni di β, γ, δ col piano delle due rette $A'D'$, $A'D''$.

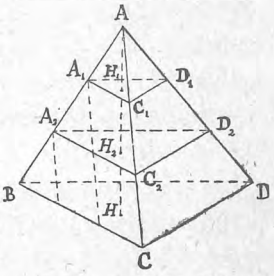
Applicando allora il teorema del n. 141 alle due rette AD, $A'D''$ giacenti in un piano e segate dalle parallele AA', BB'', CC'', DD'', dedurremo dalla ipotesi $AB = CD$, che sarà anche $A'B'' = C''D''$. E di qui, applicando il medesimo teorema alle due rette $A'D'$, $A'D''$, deduciamo che è $A'B' = C'D'$.

Se invece di $AB = CD$ si avesse avuto per esempio $AB > CD$, collo stesso ragionamento se ne sarebbe dedotto che $A'B'' > C''D''$ e quindi che $A'B' > C'D'$.

451. Notiamo il seguente corollario di cui faremo uso nel seguito.

Cor. *Se in un tetraedro si divide l'altezza in n parti uguali e pei punti di divisione si conducono i piani paralleli alla base, si ottengono $n-1$ triangoli sezioni dell'angoloide al vertice, i cui lati sono, partendo dal vertice, uguali rispettivamente ad $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ dei lati paralleli del triangolo base.*

Dato il tetraedro $ABCD$, se ne divida l'altezza AH in n parti uguali AH_1, H_1H_2,... (nella figura è $n = 3$) e siano $A_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$,... i triangoli sezioni dell'angoloide $\widehat{A}$ coi piani condotti pei punti H_1, H_2.... parallelamente a BCD. Pel teorema precedente avremo che ciascuno degli spigoli AB, AC, AD rimane così diviso in n parti uguali. Considerata allora una delle facce laterali del tetraedro, p. es., ABC, dai punti di divisione A_1, A_2,... del suo lato AB si conducano su di essa le parallele al lato AC sino ad incontrare il terzo lato BC. Avremo pel n. 143 che anche BC rimane diviso in n parti uguali e d'altra parte che A_1C_2 è uguale ad $\frac{1}{n}$ di BC, (n. 123), A_2C_2 è uguale a $\frac{2}{n}$ BC, ecc. Analoghe conclusioni si ottengono per le facce ACB e ADB, onde risulta veramente che i triangoli $A_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$,... hanno i lati uguali rispettivamente ad $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ dei lati di BCD che appartengono alla medesima faccia laterale del tetraedro.



Prisma.

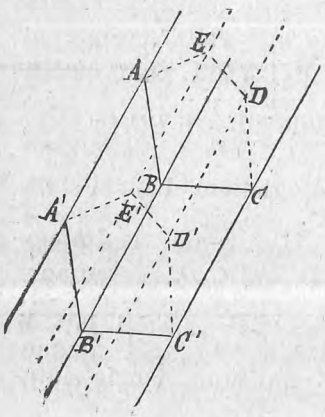
452. Def. — Siano date nello spazio n rette parallele a_1, a_2...., a_n, tali che ciascuno dei piani a_1a_2, a_2a_3...., $a_{n-1}a_n$, a_na_1 lasci le altre $n-2$ rette tutte ad una stessa banda.

Gli n piani or ora nominati determinano, il primo col secondo, il secondo col terzo,...., l'ultimo co primo, n diedri $\widehat{a_2}$, $\widehat{a_3}$,...., $\widehat{a_n}$, $\widehat{a_1}$. La figura costituita dai punti comuni agli n diedri $\widehat{a_1}$, $\widehat{a_2}$,...., $\widehat{a_n}$ dicesi *prisma indefinito* di *spigoli* a_1, a_2,...., a_n.

Per $n = 3, 4, 5,$.... il prisma si dice triangolare, quadrangolare, pentagonale,.... rispettivamente.

453. Le n striscie a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1 diconsi facce del prisma e il loro insieme dicesi *superficie del prisma indefinito* o *superficie prismatica indefinita*.

454. Se un piano interseca uno spigolo di un prisma, interseca anche gli altri (n. 427), ed è chiaro che la figura intersezione del prisma col piano è un poligono (convesso). Un tale poligono dicesi *sezione* del prisma.



Viceversa si dà origine ad un prisma considerando un poligono e conducendo per i suoi vertici altrettante parallele, fuori del piano di esso.

Se un piano è perpendicolare ad uno spigolo di un prisma indefinito, è perpendicolare anche agl altri (n. 428). La sezione del prisma che così si ottiene dicesi *sezione normale* del prisma indefinito.

455. Teor. — *In uno stesso prisma indefinito sezioni parallele sono uguali.*

Infatti i lati delle due sezioni appartenenti ad una stessa faccia del prisma indefinito (vedi fig. alla pag. prec.) sono uguali come lati opposti di parallelogrammi (n. 123, 2) e gli angoli delle due sezioni compresi fra lati uguali sono uguali come sezioni ugualmente inclinate del medesimo diedro (n. 402).

456. Def. — La parte di prisma indefinita compresa tra due sezioni parallele è un poliedro (n. 420) che dicesi *prisma finito* o semplicemente *prisma*.

Questo poliedro ha come facce i due poligoni sezioni (uguali fra loro) che diconsi *basi* e tanti parallelogrammi appartenenti alle facce del prisma indefinito, che diconsi *facce laterali*.

I segmenti di spigoli del prisma indefinito compresi fra le due basi si dicono *spigoli laterali* o semplicemente *spigoli* del prisma, e la distanza dei piani delle due basi dicesi *altezza* del prisma.

457. Cor. — *Gli spigoli laterali di un prisma sono uguali* (n. 123, 2).

458. Teor. — *Due prismi aventi le facce ordinatamente uguali sono uguali.*

Gli angoloidi di un prisma sono tutti triedri, onde per constatarne l'uguaglianza basta verificare l'uguaglianza degli angoli loro facce (n. 414). Poichè appunto nel caso presente codesti angoli sono uguali, gli angoloidi dei due prismi sono uguali e i due prismi, avendo uguali rispettivamente le facce e gli angoloidi sono uguali.

459. Un prisma si dice *retto*, se le basi sono sezioni normali del prisma indefinito, di cui il prisma dato è parte.

Nel prisma retto l'altezza è uguale allo spigolo laterale.

460. Teor. — *Due prismi retti sono uguali, se hanno uguali le basi e le altezze.*

Infatti essi hanno le facce ordinatamente uguali.

Parallelepipedo.

461. Def. — Un prisma le cui basi siano parallelogrammi dicesi *parallelepipedo*.

Il parallelepipedo ha otto vertici, dodici spigoli e sei facce; ad ogni faccia ne sono *adiacenti* quattro.

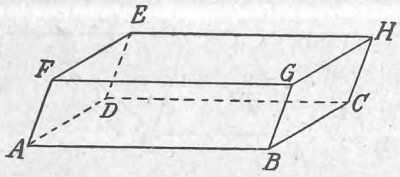
Due facce non adiacenti, cioè non aventi nessuno spigolo comune, si dicono *opposte*. Così diconsi *opposti* diedri o triedri compresi tra facce ordinatamente opposte, e si dicono opposti spigoli di diedri opposti e vertici di driedri opposti.

I segmenti congiungenti due vertici opposti diconsi *diagonali* del parallelepipedo. Ogni parallelepipedo ha quattro diagonali.

462. Teor. — *Le facce opposte di un parallelepipedo sono parallele ed uguali.*

Il prisma quadrangolare *ABCDEFGH*, di base *AC*, sia un parallelepipedo, cioè il quadrangolo *ABCD* sia un parallelogramma.

Poichè le *BC*, *BG* sono parallele alle *AD*, *AF* rispettivamente, il piano della faccia *BCHG* sarà parallelo al piano della faccia *ADEF* (nn. 431, 438),



e l'angolo $\widehat{CBG}$ sarà uguale all'angolo $\widehat{DAF}$ (n. 402).

Allora si conclude che i due parallelogrammi *ADEF* e *BCHG*, aventi uguali due lati e l'angolo compreso, sono uguali (n. 125).

Nota. — Risulta dal teorema precedente che uno stesso parallelepipedo si può considerare come prisma in tre modi differenti, in quanto si possono assumere come basi due facce opposte qualsiansi.

463. Cor. — *Gli spigoli di un parallelepipedo sono a quattro a quattro paralleli ed uguali* (nn. 123, 429).

464. Cor. — *In ogni parallelepipedo sono uguali i diedri opposti e i triedri opposti.*

Infatti i diedri opposti hanno uguali due sezioni ugualmente inclinate sugli spigoli (n. 402), e i triedri opposti hanno ordinatamente uguali le facce (n. 414).

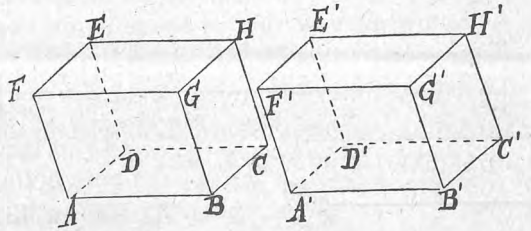
465. Teor. — *Di due parallelepipedi si può conchiudere che sono uguali, se si sa che hanno ordinatamente uguali un triedro e i tre spigoli di esso.*

Nei due parallelepipedi $ABC....H$ $A'B'C'....H'$ sia

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$
$$AB = A'B', \quad AD = A'D', \quad AF = A'F'.$$

Diciamo ora che i due parallelepipedi sono uguali.

Le tre facce che hanno il vertice A comune sono uguali ordinatamente alle tre facce che hanno il vertice



comune A', perchè sono, a due a due, parallelogrammi aventi uguali un angolo e i due lati adiacenti (n. 125).

Le altre tre facce sono uguali, perchè facce opposte a facce uguali (n. 462).

Se ne conchiude che i due parallelepipedi, aventi le facce ordinatamente uguali, sono uguali (n. 458).

466. Un parallelepipedo retto, le cui basi siano rettangoli, dicesi *parallelepipedo rettangolo.*

Un parallelepipedo rettangolo si può considerare in tre modi differenti come prisma retto (nn. 462, 459).

Si può costruire un parallelepipedo rettangolo, dati i tre lati concorrenti in un vertice, prendendo per un punto tre rette a due a due perpendicolari, tagliando su di esse, a partire dal punto comune, tre segmenti uguali ai dati e conducendo per ciascuno estremo il piano parallelo al piano delle altre due *rette.*

Il parallelepipedo così determinato dicesi « parallelepipedo rettangolo contenuto dai tre segmenti dati » o « parallelepipedo rettangolo di essi ».

467. Se in un parallelepipedo sono uguali tre spigoli concorrenti in un punto, sono uguali anche tutti gli altri spigoli (n. 463). Un parallelepipedo siffatto dicesi *romboedro.*

Dicesi poi *cubo* un parallelepipedo rettangolo avente tutti gli spigoli uguali.

Il cubo ha per facce sei quadrati uguali (n. 462), onde si conclude che il cubo è un poliedro regolare (n. 421) anzi esso è il solo parallelepipedo regolare.

Il cubo resta determinato quando ne è dato il lato; e il cubo costruito sopra un segmento dato come lato si dice « cubo di esso ».

ESERCIZI

1. Luogo dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo.

2. Luogo dei punti le cui distanze dai tre vertici di un triangolo sono disuguali in un senso fissato.

3. Luogo dei punti equidistanti da tre rette, lati di un triangolo.

4. Luogo dei punti le cui distanze dai tre lati di un triangolo sono disuguali in un senso fissato.

5. In un tetraedro le tre rette congiungenti i punti di mezzo degli spigoli opposti passano per uno stesso punto (*baricentro*). Questo punto è comune alle quattro rette (*mediane*) proiettanti dai vertici i baricentri delle due facce opposte.

6. Ogni piano che seghi un prisma finito e sia parallelo ai suoi spigoli laterali, lo sega secondo un parallelogramma.

7. Il romboedro (parallelepipedo a spigoli uguali) ha per facce sei losanghe uguali.

8. Le quattro diagonali di un parallelepipedo passano per un punto che le divide tutte e quattro per metà.

9. Condizioni sufficienti perchè un prisma quadrangolare sia un parallelepipedo, sono espresse dalle seguenti proprietà:

a) Le facce opposte sono uguali;

b) I diedri opposti sono uguali;

c) Le diagonali passano per un medesimo punto, nel quale sono divise per metà.

10. Condizione sufficiente perchè un parallelepipedo sia rettangolo è che le sue diagonali siano uguali.

11. Costruire un tetraedro regolare che abbia gli spigoli uguali ad un tetraedro dato. (Si modelli il tetraedro in cartone).

12. Costruire un cubo che abbia gli spigoli uguali ad un segmento dato.

13. Costruire un ottaedro regolare (vedi fig. a pag. 263), che abbia gli spigoli uguali ad un segmento dato. (Si costruiscano due piramidi aventi per base un quadrato il cui lato sia uguale al dato segmento....).

14. Segare un cubo secondo un esagono regolare.

XI.

EQUIVALENZA DI POLIEDRI

Preliminari.

468. Quando due poliedri sono uguali noi tutti riconosciamo che essi *hanno uguale estensione* o *ugual solido*, o, come qui diremo, *sono equivalenti*.

Ma, analogamente a quanto accade pei poligoni, vi sono dei casi in cui ciascuno di noi è naturalmente condotto ad ammettere la *uguaglianza di solido* o *equivalenza* anche fra *poliedri disuguali*; p. es., quando si riuniscono due poliedri uguali in diverso modo (cfr. n. 229 e seg.).

Come pei poligoni, e in un senso analogo, parleremo della *somma* di più poliedri (riunione di essi) e della loro differenza (cfr. nn. 228-230).

Così quando un poliedro A è somma di altri due B e C, si dice che il poliedro A è *prevalente* a B e C, e ciascuno di questi si dice *suvvalente* ad A.

Al concetto fondamentale di **uguaglianza di solido** o **equivalenza** fra poliedri spettano, secondo la nostra intuizione, le proprietà enunciate dai seguenti postulati.

469. Postulato. — I. *Somme di poliedri uguali o equivalenti sono equivalenti, e la somma di due poliedri non è equivalente ad una delle sue parti.*

II. *Differenze di poliedri equivalenti sono equivalenti.*

III. *Poliedri equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra di loro.*

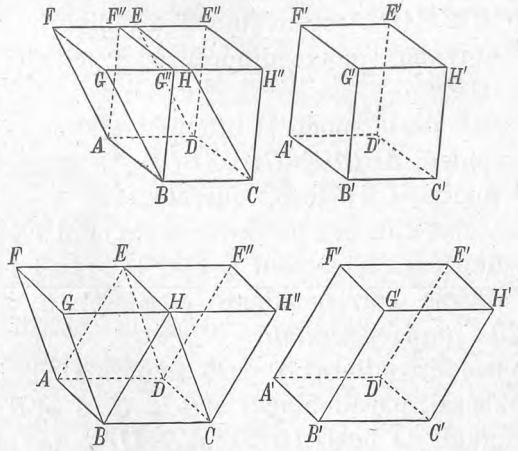
470. Nota. — I tre criteri per riconoscere la equivalenza o uguaglianza di solido di due poliedri, enunciati dal postulato prec. (e riducibili come pei poligoni al primo; cfr. n. 234) permettono di sviluppare la teoria della equivalenza dei prismi in modo analogo a quella dei poligoni, come appunto noi faremo in questo capitolo. Ma per confrontare, rispetto alla estensione o solido, due poliedri quali si vogliano, p. es. due piramidi, occorrerebbe tener conto di altre proprietà intuitive del concetto di *uguaglianza di solido.* Ma noi saremmo così costretti ad uscire dai limiti del nostro programma; onde ci limiteremo, per quanto riguarda le piramidi (e i poliedri in generale) a giustificare direttamente e in modo intuitivo le regole per la determinazione del volume (vedi il Cap. seguente).

Parallelepipedi equivalenti.

471. Teor. — *Due parallelepipedi aventi basi uguali e altezze corrispondenti uguali sono equivalenti.*

I due parallelepipedi $AB....H$, $A'B'....H'$ abbiano uguali le basi $ABCD$, $A'B'C'D'$ e le altezze corrispondenti. Diciamo che essi sono equivalenti. Sulla base $ABCD$ costruiamo il parallelepipedo $ABCDE''F''G''H''$ uguale ad $A'B'C'....H'$. Le facce $EFGH$, $E''F''G''F''H''$ giaceranno in uno stesso piano. Ora se codeste due facce coincidessero, i due parallelepipedi $AB....H$ e $AB....H''$ sarebbero uguali; onde sarebbero uguali anche $AB....H$, $A'B'....H'$ e il teorema sarebbe dimostrato. Escluso dunque codesto caso, i due parallelogrammi $EFGH$, $E''F''G''H''$, giacenti in uno stesso piano, possono essere o no compresi fra le stesse due parallele.

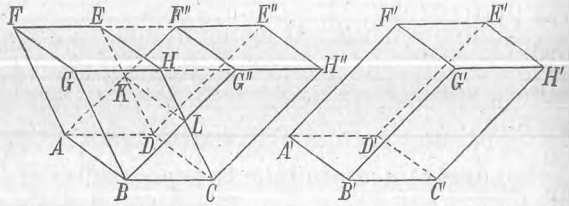
Esaminiamo anzitutto il primo di codesti due casi; cioè, supponiamo che i due parallelepipedi $AB....H$, $AB....H''$ siano contenuti fra i due medesimi piani paralleli. Se i due parallelogrammi $EFGH$, $E''F''G''H''$ hanno comune un parallelogramma $EF''G''H$ (che può anche ridursi ad un solo segmento i due parallelepipedi hanno comune il prisma di base $BCHG''$ e di spigolo laterale BA, e le due parti rimanenti sono due prismi a base triangolare $BG''GFAF''$ $CH''HEDE''$,



i quali avendo uguali ordinatamente tutte le facce sono uguali. È allora dimostrato che i due parallelepipedi, essendo somme di parti uguali, sono equivalenti (n. 469, I).

Si consideri, in secondo luogo, il caso in cui le due facce $EFGH$, $E''F''G''H''$, pur essendo ancora comprese fra le due medesime parallele, non hanno

punti comuni; e si confrontino i due prismi a base triangolare $BG''GFAF''$ e $CH''HEDE''$. Essi hanno

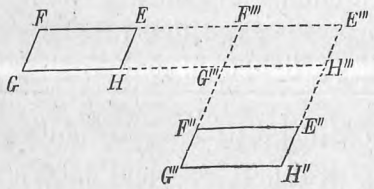


le facce ordinatamente uguali (cfr. la dimostrazione del teor. del n. 240) e perciò (n. 458) sono uguali. Se allora sottragghiamo prima l'uno e poi l'altro di codesti due prismi dallo stesso prisma trapezoidale $BCH''GFADE''$ otterremo due poliedri, che saranno equivalenti come differenze di poliedri uguali (n. 469, II).

Ma in codesto modo si ottengono appunto i due parallelepipedi $ABCDEFGH$, $ABCDE''F''G''H''$, i quali si mostrano così fra loro equivalenti.

Resta così dimostrato che sono in ogni caso equivalenti due parallelepipedi aventi la stessa base, la stessa altezza corrispondente e *compresi fra gli stessi due piani paralleli.*

Si consideri allora il caso generale: dati, cioè, due qualsiasi parallepipedi $ABC....H$ e $A'B'C'....H'$ aventi uguali le basi $ABCD$, $A'B'C'D'$ e le relative altezze, si costruisca ancora sulla base $ABCD$ il parallelepipedo $ABCDE'''F'''G'''H'''$, uguale ad $A'B'C'....H'$.



Le due facce $EFGH$, $E''F'''G''H''$, giacenti ancora su di uno stesso piano, si potranno supporre non più comprese fra le stesse parallele. Esse hanno per altro i lati ordinatamente paralleli, in quanto essi sono ordinatamente paralleli ai lati della base $ABCD$. Di qui discende che se si prolungano in $EFGH$ due lati opposti, p. es., FE e GH e in $E''F''G''H''$ i lati non paralleli a quelli, cioè $G''F''$, $H''E''$, si determinerà un parallelogramma $E'''F'''G'''H'''$ uguale ai due parallelogrammi dianzi considerati, e compreso con ciascuno di essi fra due stesse parallele. Allora i due parallelepipedi aventi la base $ABCD$ comune e come facce opposte i due parallelogrammi $EFGH$, $E''F''G''H''$, sono ciascuno equivalente al parallelepipedo avente la base $ABCD$ e la faccia opposta $E'''F'''G'''H'''$; onde essi stessi sono equivalenti fra loro; e lo stesso accade dei due parallepipedi primitivi $ABC...H$, $A'B'C'D'....H'$.

472. Il teorema prec. permette di *costruire un parallelepipedo rettangolo, equivalente ad un parallelepipedo dato* P (*trasformare* il parallelepipedo P dato in un parallelepipedo rettangolo). Basta considerare anzitutto il parallelepipedo retto P' avente base ed altezza uguale a P, e poi il parallelepipedo rettangolo P'' che ha come base una faccia laterale di P' e come altezza la distanza di cotesta faccia di P dalla faccia opposta.

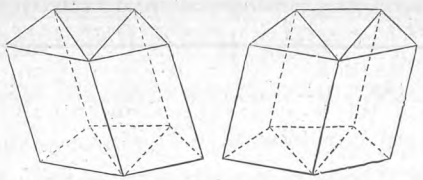
Prismi equivalenti.

473. Teor. — *Due prismi a base triangolare aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti.*

Infatti essi sono la metà di due parallelepipedi di base ed altezza uguali, e quindi equivalenti.

474. Cor. — *Due prismi quali si vogliano aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti.*

Si decompongano le due basi in tanti triangoli a due a due uguali conducendo tutte le diagonali che escono da due vertici omologhi. I piani, che in ciascuno dei due prismi sono determinate dalle coppie di diagonali analoghe, decompongono i due prismi in tanti prismi a base triangolare, aventi a due a due basi ed altezze uguali. I prismi dati sono dunque somme di poliedri equivalenti e sono equivalenti (nn. 473, 469).



475. Nota. — La proposizione del n. prec. si estende anche al caso di due prismi aventi altezze uguali e basi equivalenti.

Basta perciò notare che le due basi si possono decomporre in parti a due a due uguali (n. 234), e che, conducendo per i lati di esse in ciascuno dei due prismi i piani paralleli agli spigoli laterali, questi rimangono divisi in tanti prismi equivalenti (n. prec.).

476. Cor. — *Di due prismi aventi basi uguali e altezze disuguali quello che ha altezza maggiore è prevalente.*

Se P_1 e P_2 sono i due prismi, e P_2 ha altezza maggiore, si seghi P_2 con un piano parallelo alla base e avente da essa una distanza uguale all'altezza di P_1. Il prisma P_2 resterà così diviso in due prismi; uno dei quali, avendo base ed altezza uguali a P_1, è equivalente ad esso (n. 474): onde si conclude che P_1, equivalente ad una parte di P_2, è suvvalente ad esso.

XII.

REGOLE DI MISURA SUI POLIEDRI - POLIEDRI SIMILI

Area delle superficie poliedriche.

477. La superficie di un poliedro si può misurare senz'altro, come somma di più poligoni. A questo proposito ci limiteremo a indicare due casi particolari, in cui si può assegnare una regola molto semplice.

478. Teor. — *La somma delle facce laterali di un prisma retto è equivalente al rettangolo che ha per base il perimetro della base e per altezza l'altezza del prisma.*

Infatti le facce sono rettangoli aventi per altezza comune l'altezza del prisma e per basi i lati della base del prisma.

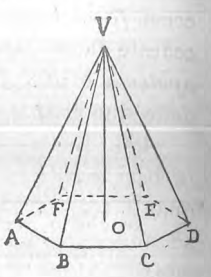
479. Si ha di qui la seguente:

Regola. — *L'area della superficie laterale di un prisma retto è uguale al prodotto del perimetro della base per l'altezza.*

480. Una piramide, di cui la base sia un poligono regolare e il vertice appartenga alla perpendicolare alla base nel suo centro, dicesi *piramide retta a base regolare* od anche semplicemente *piramide regolare.*

Gli spigoli laterali di una piramide retta a base regolare $\widehat{VABCDEF}$ sono tutti uguali, perchè i loro

estremi sul piano della base sono equidistanti dal piede O della perpendicolare abbassata dal vertice. Perciò le facce laterali della piramide sono altrettanti triangoli isosceli uguali. L'altezza comune di essi dicesi *apotema* della piramide. Discende immediatamente da codeste considerazioni il seguente

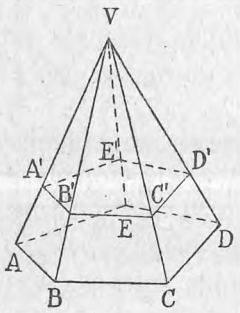


Teor. — *La superficie laterale di una piramide retta a base regolare è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base e per altezza l'apotema della piramide.*

Infatti, divisa la base di codesto triangolo in tante parti uguali quante sono le facce della piramide, e congiunti i punti di divisione col vertice, si ottengono tanti triangoli equivalenti rispettivamente alle facce della piramide (n. 249).

481. Risulta dal teorema precedente e dal n. 295 la seguente:

Regola. — *L'area della superficie laterale di una piramide retta a base regolare è data dal semiprodotto del perimetro della base per l'apotema.*



482. Una piramide $ABCDEV$, è divisa da un piano parallelo alla base e compreso fra questa e il vertice in due parti, di cui quella dalla parte del vertice è una piramide. L'altra dicesi *tronco di piramide* (a basi parallele).

I due poligoni $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$, fra loro simili (nn. 402, 317), diconsi *basi* del tronco, e i trapezi $ABB'A'$, $BCC'B'$,.... $EAAE'$ diconsi *facce laterali*. Se la piramide è retta e a base regolare, codeste facce laterali sono uguali e la loro altezza si dice *apotema* o *lato* del tronco. *Altezza* del tronco è la distanza delle due basi.

483. La superficie laterale di un tronco di piramide (a basi parallele) sarà data da tanti trapezi (facce laterali) quanti sono i lati delle due basi. Se il tronco appartiene ad una piramide regolare tutti i trapezi sono isosceli ed uguali ed hanno per altezza l'*apotema* del tronco.

Ricordando la regola che dà l'area di un trapezio (n. 298) troviamo la seguente

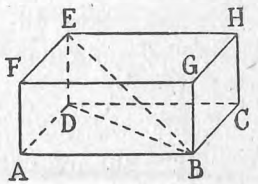
Regola. — *L'area della superficie laterale di un tronco di piramide regolare è dato dal semiprodotto (delle lunghezze) dell'apotema e della somma dei perimetri delle basi.*

Diagonale del parallelepipedo rettangolo.

484. Siano a, b, c le lunghezze di tre spigoli di un parallelepipedo rettangolo $ABCDEFGH$, concorrenti in un vertice (*dimensioni* del parallelepipedo) e sia precisamente

$$DA = a, \quad DC = b, \quad DE = c,$$

Condotta la diagonale BE del parallelepipedo e la diagonale BD della base, i due triangoli EDE, BAD sono rettangoli in D, A rispettivamente: cosicchè, pel teorema di PITAGORA (n. 299) avremo



$$\overline{BE}^2 = \overline{DB}^2 + c^2$$
$$\overline{DB}^2 = a^2 + b^2$$

e quindi

$$\overline{BE}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Risulta di qui la seguente

Regola. — *Per trovare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, si deve estrarre la radice quadrata dalla somma dei quadrati delle dimensioni.*

485. Dalla regola prec. deduciamo il

Cor. — *Le quattro diagonali di un parallelepipedo rettangolo sono uguali.*

Volume dei poliedri.

486. I poliedri costituiscono una *classe di grandezze geometriche* (cfr. nn. 263, 264); perciò si può estendere ad essi la definizione di *rapporto* data al n. 265 del cap. V. Fissato allora un poliedro al quale si fa corrispondere il numero 1, cioè le *unità* di misura dei poliedri, si può definire la *misura* di un qualsiasi poliedro come il rapporto del poligono considerato all'unità di misura. La misura in questo caso prende più precisamente il nome di *volume*.

Valgono anche pei volumi le proprietà dimostrate in generale per la misura delle grandezze ai nn. 266-279.

E analogamente a quanto dicemmo pei poligoni al n. 284, poliedri *equivalenti hanno volumi uguali e viceversa*.

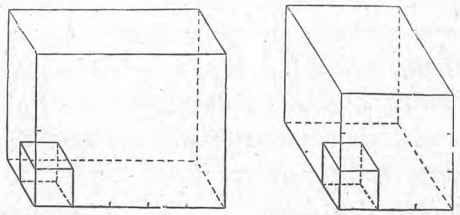
Come *unità di misura dei volumi* si potrebbe assumere un poliedro qualsiasi; ma è noto che per ragioni di semplicità si suol scegliere come unità, il cubo dell'unità dei segmenti, o *metro cubo*.

487. Noi qui ci limiteremo a stabilire alcune regole pel calcolo dei volumi dei poliedri di uso più frequente.

Pei prismi si perviene direttamente al risultato, approfittando della teoria dell'equivalenza tra prismi. Per le piramidi invece occorrerà premettere alcune considerazioni particolari.

Volume del prisma.

488. Cominciamo dal considerare un parallelepipedo P, di cui i lati non consecutivi siano commensurabili coll'unità lineare: siano precisamente $\frac{m}{n}, \frac{p}{n}, \frac{q}{n}$ le rispettive misure ridotte a denominatore comune $\left(\text{nella figura esse sono } \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Se dividiamo gli



spigoli dell'unità dei volumi in n parti uguali, un segmento uguale ad una qualsiasi di queste parti si potrà riportare esattamente m volte su di uno degli spigoli di P, p volte sul secondo, q volte sul terzo. Se allora, tanto in P quanto nell'unità, si conducono pei punti di divisione degli spigoli i piani perpendicolari ad essi fino ad incontrare le facce, veniamo a decomporre l'unità in n^3 cubi uguali e il parallelepipedo in mpq cubi uguali fra loro e ai precedenti. Abbiamo cioè che P è multiplo secondo mpq

del summultiplo secondo n^3 della unità. Ne risulta che il volume di P è dato da

$$\frac{mpq}{n^3} = \frac{m}{n}\frac{p}{n}\frac{q}{n};$$

enunciamo perciò la regola seguente (che vale anche nel caso degli spigoli incommensurabili): *Il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto delle misure degli spigoli* (dimensioni del parallelepipedo), o, come si suol dire brevemente, *dal prodotto degli spigoli.*

In particolare, *il volume del cubo è dato dalla terza potenza* (della misura) *dello spigolo.*

489. Siccome il prodotto delle due dimensioni della base dà l'area di questa, la regola del n. precedente si può anche enunciare dicendo che il *volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto* (*dell'area*) *della base per l'altezza.*

490. Se si ha un parallelepipedo qualsivoglia, si può considerare il parallelepipedo rettangolo equivalente, il quale ha col dato (n. 472) base equivalente ed altezza uguale e allora possiamo enunciare in generale la regola seguente: *Il volume di un parallelepipedo qualsivoglia è dato dal prodotto* (*dell'area*) *della base per l'altezza.*

491. Prendiamo a considerare un prisma, e cominciamo dal caso di un prisma triangolare. Esso è la metà di un parallelepipedo che ha la stessa altezza e base doppia. Poichè il volume del parallelepipedo è il prodotto della base per l'altezza, concludiamo che la medesima regola vale anche pel prisma triangolare.

Considerando allora un prisma qualsiasi, si decomponga, per mezzo dei piani che da uno spigolo laterale vanno agli altri spigoli laterali, in tanti prismi triangolari. Se b_1, b_2, ..., b_n sono le aree delle basi di questi prismi triangolari, e b è l'area della base del prisma primitivo, avremo

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Ma se h è l'altezza comune del prisma dato e dei prismi triangolari, i volumi di questi ultimi sono b_1h, b_2h, ..., b_nh, e il volume del prisma totale sarà

$$b_1h + b_2h + \ldots + b_nh = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\,h = bh.$$

Di qui si trae la regola seguente che contiene come casi particolari quelle enunciate nei nn. precedenti:

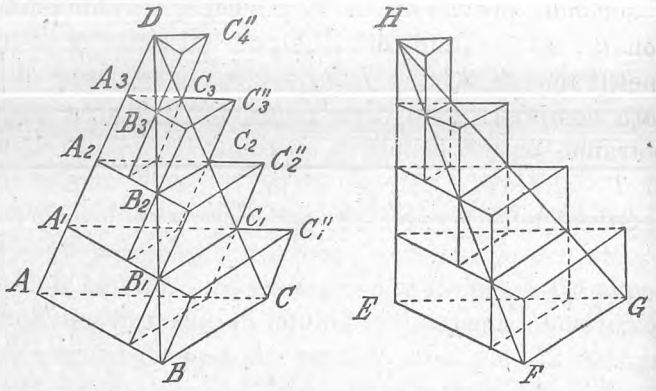
Regola. *Il volume di un prisma qualsivoglia è dato dal prodotto* (dell'area) *della base per l'altezza.*

Volume della piramide.

Per determinare il volume della piramide è necessario premettere alcune considerazioni, in qualche modo analoghe a quelle che ci hanno condotto alla determinazione dell'area del cerchio (n. 364).

492. Cominciamo col procurarci anzitutto dei valori approssimati (per difetto e per eccesso) del volume di un tetraedro qualsiasi $ABCD$, o come per brevità noi diremo, T, di cui indichiamo con h l'altezza relativa alla base ABC.

Divisa codesta altezza, in un certo numero n di



parti uguali, si conducano pei punti di divisione i piani paralleli alla base ABC, i quali intersechino il tetraedro secondo i triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,....: poi per BC si conduca il piano parallelo alla AD fino ad incontrare il piano $A_1B_1C_1$; per B_1C_1 si conduca il piano parallelo alla DA fino ad incontrare il piano ABC e il piano $A_2B_2C_2$; per B_2C_2 si conduca il piano parallelo alla AD fino a segare i piani $A_1B_1C_1$ e $A_3B_3C_3$; e così via.

Otteniamo così due successioni di prismi triangolari

(1) $\quad AC_1, \quad A_1C_2, \quad A_2C_3, \ldots.$

e

(2) $\quad AC_1'', \quad A_1C_2'', \quad A_2C_3'' \ldots.;$

la (1) è costituita da $n-1$ prismi tutti interni al tetraedro dato T, e la (2) da n prismi, di cui ciascuno ha una parte esterna a T. La somma degli $n-1$ prismi interni (1) dicesi *n^{mo} scaloide inscritto a T* e la somma degli n prismi (2) dicesi *n^{mo} scaloide circoscritto a T.*

È manifesto che il primo scaloide è suvvalente e il secondo prevalente a T, cosicchè, se indichiamo con v_n, v_n' i volumi dei due scaloidi considerati (rispettivamente iscritto e circoscritto), il volume di T sarà compreso fra i due numeri v_n e v_n', i quali si potranno perciò assumere come valori del volume di T, calcolati con una certa approssimazione (rispettivamente per difetto e per eccesso).

Ma di più abbiamo che tutti i prismi dei due scaloidi hanno altezze uguali all'n^{ma} parte dell'altezza di T, e ogni prisma dello scaloide iscritto è uguale al prisma immediatamente superiore dello scaloide circoscritto, perchè ha con esso le facce ordinatamente uguali (n. 458).

Perciò la differenza dei due scaloidi è data dal prisma inferiore dello scaloide circoscritto, cioè dal prisma $ABCA_1$, avente la base comune con T, e, come tutti gli altri prismi dello scaloide, l'altezza $\frac{h}{n}$; e se noi prendiamo n abbastanza grande, codesta altezza risulterà piccola quanto vorremo; cosicchè la differenza dei due scaloidi per n grandissimo sarà minore, a piacer nostro, di 1 cm.^{3}, di 1 mm.^{3}, e così via.

Concludiamo quindi che *i volumi* v_n, v'_n *degli n^{mi} scaloidi danno il volume del tetraedro* T *con un'approssimazione* (rispettivamente per difetto e per eccesso) *che è grande a piacer nostro, purchè* n *si prenda abbastanza grande.*

493. Ciò premesso, si consideri un secondo tetraedro $EFGH$; che designeremo con T' avente la base EFG e l'altezza corrispondente uguali rispettivamente ad ABC e ad h; se ne divida l'altezza

nello stesso numero n di parti uguali considerato dianzi, e si costruiscano per esso gli n^{mi} scaloidi iscritto e circoscritto, i quali saranno l'uno suvvalente e l'altro prevalente a T'.

Ma l'altezza di ciascuno dei prismi di codesti due nuovi scaloidi è uguale alla n^{ma} parte dell'altezza di T' e di T, ossia all'altezza di ciascuno dei prismi degli n^{mi} scaloidi iscritto e circoscritto a T; e poichè T e T' hanno anche le basi uguali, e le sezioni parallele alle basi, che vi abbiamo considerato, dividono le altezze nel medesimo numero di parti uguali, avremo che le sezioni dell'un tetraedro sono, a partire dal vertice, ordinatamente uguali a quelle dell'altro (n. 451), cosicchè ogni prisma dello scaloide iscritto o circoscritto a T ha base ed altezza uguali al prisma di ugual posto dello scaloide rispettivamente iscritto o circoscritto a T', ed è perciò ad esso equivalente (n. 473). Discende di qui che gli n^{mi} scaloidi iscritto e circoscritto a T, sono equivalenti agli n^{mi} scaloidi inscritto e circoscritto a T'; cosicchè il volume di T' ammetterà, per ogni valore di n, i medesimi valori approssimati v_n, v'_n del volume di T (n. prec.). E poichè ciò vale per qualsiasi approssimazione (a meno di 1 cm.^{3}, di 1 mm.^{3}, ecc.) possiamo enunciare il seguente

Teor. — *Tetraedri aventi una base e l'altezza corrispondente uguali hanno ugual volume.*

494. Cor. — *Piramidi aventi basi ed altezze uguali hanno ugual volume.*

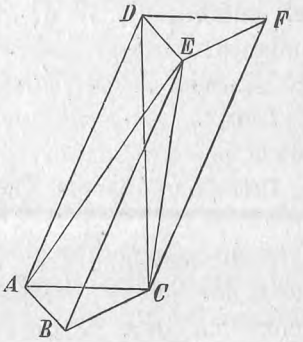
Si decompongano le due basi in tanti triangoli a due a due uguali, conducendo tutte le diagonali che escono da due vertici omologhi. I piani, che in ciascuna delle due piramidi vanno codeste diagonali dal vertice, decompongono le due piramidi in tanti tetraedri aventi a due a due base ed altezza uguali. Se ne conclude, pel n. prec., che le due piramidi sono somme di poliedri di ugual volume ed avranno perciò volume uguale (nn. 469, 486).

495. Nota. — La proposizione del n. prec. si estende anche al caso di due piramidi aventi altezze uguali e basi equivalenti (cfr. il n. 475).

496. Qui possiamo finalmente dimostrare il seguente teorema fondamentale:

Teor. — *Il volume di un prisma è triplo di quello di una piramide avente base ed altezza uguali rispettivamente alla base e all'altezza del prisma dato.*

Considerando dapprima il caso di un prisma triangolare $ABCD$, abbiamo che il piano ABC divide il prisma nella piramide $ABCE$ avente base ed altezza uguali al prisma dato, e nella piramide quadrangolare $ACFDE$. Quest'ultima è divisa dal piano ECD nelle due piramidi triangolari $ACDE$ ed $EFDC$, la seconda delle quali ha base ed altezza uguali al prisma. Di qui discende intanto che le due piramidi $ABCE$, $EFDC$ hanno uguale volume (n. 493). Quanto poi alla terza piramide $ACDE$, essa ha la base ACD uguale alla faccia FCD della piramide $EFDC$ e il vertice opposto comune con essa, onde risulta che anch'essa ha volume uguale a codesta piramide $EFDC$ (n. 493).



Abbiamo dunque veramente che il prisma $ABCD$ è somma di tre piramidi aventi tutte e tre volume uguale a una piramide di base ed altezza uguali al prisma dato.

Se poi il prisma è a base qualsiasi (non triangolare), si decomponga questa in triangoli, e, corrispondentemente, il prisma in altrettanti prismi triangolari. Ciascuno di questi è somma di tre piramidi triangolari, aventi volume uguale al prisma triangolare considerato. Risulta di qui che la somma dei prismi triangolari, cioè il solido del prisma dato, è uguale alla somma delle terne di piramidi triangolari. Ma questa somma è manifestamente uguale alla somma di tre piramidi aventi tutte e tre volume uguale ad una piramide di base ed altezza uguali al prisma dato.

497. Il teorema or ora dimostrato si può enunciare dicendo che *il volume di una piramide è uguale alla terza parte del volume di un prisma avente base ed altezza rispettivamente uguali ad essa.*

Ricordando il n. 491, deduciamo di qui la seguente:

Regola. — *Il volume di una piramide è dato dalla terza parte del prodotto (dell' area) della base per l' altezza.*

498. VOLUME DEL TRONCO DI PIRAMIDE. — Si può dimostrare (ma per brevità noi rinunciamo a farlo) che *il volume di un tronco di piramide (a basi parallele) è uguale alla somma dei volumi di tre piramidi aventi la stessa altezza del tronco, e per basi rispettive le due basi del tronco e la loro media proporzionale.*

Se h è l' altezza del tronco e b_1, b_2 sono le aree delle due basi, il volume del tronco è uguale a

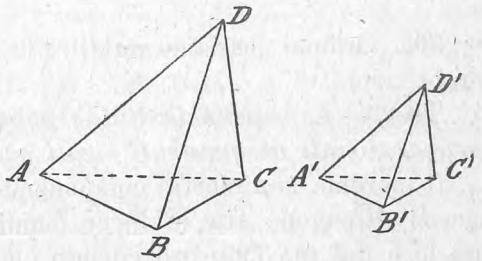
$$\frac{1}{3}hb_1 + \frac{1}{3}hb_2 + \frac{1}{3}h\sqrt{b_1b_2}$$

ossia a

$$\frac{1}{3}h\left(b_1 + b_2 + \sqrt{b_1b_2}\right).$$

Poliedri simili.

Come applicazione della teoria della misura dei poliedri, dimostreremo due proposizioni fondamentali sui poliedri, le quali sono analoghe ai teoremi dimostrati pei poligoni simili ai nn. 353, 356. Ma prima è necessario esporre alcune generalità sui poliedri simili.



499. Def. — Due poliedri si dicono *simili* se hanno rispettivamente uguali gli angoloidi e ordinatamente simili le facce che li comprendono.

Dai due poliedri simili, ad ogni elemento (vertice, spigolo, angolo, diedro) dell' uno *corrisponde* un elemento *(omologo)* dell' altro.

Gli angoli e i diedri omologhi sono uguali. Gli spigoli omologhi sono proporzionali.

Come esempi di poliedri simili si possono considerare due poliedri regolari di uno stesso numero di facce, p. es. due cubi.

500. Cor. — *Due poliedri simili ad un terzo sono simili fra loro.*

501. Cor. — *Due poliedri simili aventi uno spigolo uguale sono uguali* (n. 311, 432).

502. Cor. — *Se in due poliedri simili dai vertici di due angoloidi corrispondenti si conducono i piani che vanno ai lati e alle diagonali delle facce che non appartengono a codesti due angoloidi, i poliedri rimangono divisi nello stesso numero di tetraedri ordinatamente simili.*

Questa proposizione si deduce dalla definizione del n. 499 con un ragionamento in tutto simile a quello con cui abbiamo dimostrato l'analoga proposizione pei poligoni (n. 350).

503. Oramai possiamo stabilire le due annunciate proposizioni.

Teor. — *Le superficie di due poliedri simili sono proporzionali ai quadrati degli spigoli omologhi.*

Il teorema si dimostra componendo le proporzioni che si ottengono tra le facce (simili) e i quadrati dei loro lati (n. 356), procedendo cioè in modo analogo a quello tenuto al n. 353.

504. Per determinare la relazione che intercede fra due poliedri simili, cominciamo col notare che, come si dimostra immediatamente (cfr. n. 355):

a) *In due tetraedri simili due altezze omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi.*

b) *Se quattro segmenti sono in proporzione, anche i loro cubi sono in proporzione.*

Ciò premesso dimostriamo il seguente

505. Teor. — *Due poliedri simili sono proporzionali ai cubi degli spigoli omologhi.*

Si dimostra anzitutto il teorema per i tetraedri.

Dati due tetraedri simili $ABCD$, $A'B'C'D'$, in cui a, a' siano le lunghezze di due lati omologhi AB, $A'B'$, diciamo che

$$ABCD : A'B'C'D' = a^3 : a'^3.$$

Invero, siano b, b' le misure delle basi omologhe ABC, $A'B'C'$ e h, h' quelle delle altezze corrispondenti. Avremo (nn. 278, 497),

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{\frac{1}{3}bh}{\frac{1}{3}b'h'} = \frac{bh}{b'h'}.$$

Ma poichè le due basi ABC, $A'B'C'$ sono simili e i lati a, a' sono omologhi, abbiamo (n. 356),

$$\frac{b}{b'} = \frac{a^2}{a'^2};$$

e per l'osservazione del n. prec. si ha pure

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}.$$

Allora, sostituendo nel valore trovato per il rapporto $ABCD : A'B'C'D'$ a $\frac{b}{b'}$ e $\frac{h}{h'}$ i valori ora trovati, otteniamo appunto, come volevamo dimostrare,

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

Se, passando al caso generale, sono dati due poliedri simili quali si vogliano $ABC....H$, $A'B'C'....H'$, si comincia col decomporli in tanti tetraedri simili, conducendo, come si è detto al n. 502, i piani che vanno da due vertici omologhi A, A' ai lati e alle diagonali delle facce non appartenenti ai due angoloidi $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$. Ciascuna di codeste coppie di tetraedri simili è, per quanto si è dimostrato or ora, proporzionale ai cubi di due lati omologhi dei due poliedri. Ma poichè i lati omologhi dei due poliedri simili sono proporzionali, avremo per la osservazione *b)* del num. prec., che tali sono anche i cubi di codesti lati omologhi, onde si conclude che tutte le coppie di tetraedri simili considerate dianzi e tutte le coppie di cubi di lati omologhi sono proporzionali. Allora, componendo in modo opportuno le proporzioni così ottenute (cfr. n. 356), si trova che veramente i due poliedri stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi.

ESERCIZI

1. Un prisma triangolare retto è alto cm. 12 e gli spigoli della base sono di cm. 15, cm. 9, cm. 8. Si calcoli l'area della superficie laterale.

2. Si calcoli la superficie totale di un prisma alto dm. 1,25 e avente per base un triangolo rettangolo, i cui cateti siano di dm. 2,15 e dm. 1,70.

3. I tre spigoli concorrenti in un vertice di un parallelepipedo rettangolo sono lunghi dm. 8, dm. 11, dm. 13. Calcolare l'area della superficie del parallelepipedo.

4. Calcolare l'area della superficie di un cubo di m. 2,5 di spigolo.

5. Si misuri la superficie di un cubo del quale si conosca

a) un lato a ($a =$ m. 4,7; $a =$ m. 1,6);

b) una diagonale d di una faccia ($d = 2\sqrt{2}$);

c) una diagonale e del cubo stesso ($e = 2\sqrt{3}$);

6. Le lunghezze di tre spigoli concorrenti di un parallelepipedo rettangolo stanno fra loro come $a : b : c$ (dove l'ultimo numero corrisponde all'altezza); e la diagonale della base è uguale a d. Si determini la superficie totale del parallelepipedo. (Esempio:

$$a : b : c = 8 : 15 : 19 \quad \text{e} \quad d = 23{,}8).$$

7. Calcolare l'area della superficie di un tetraedro regolare di dm. 4 di spigolo.

8. Qual'è l'area della superficie laterale di una piramide retta a base triangolare equilatera, in cui lo spigolo di base sia di m. 8 e lo spigolo laterale di m. 10?

9. In una piramide retta a base quadrata lo spigolo di base è di m. 5 e l'apotema è di m. 8: qual'è l'area totale?

10. Qual'è l'area della superficie totale di un tetraedro regolare avente lo spigolo di cm. 4?

11. Una piramide retta a base esagonale regolare ha l'apotema di dm. 26 e lo spigolo di base di cm. 48. Si calcolino le aree della superficie laterale e della superficie totale.

12. Una piramide retta a base esagonale regolare ha lo spigolo laterale di dm. 65 e lo spigolo della base di dm. 39. Si calcoli l'altezza e l'area laterale della piramide.

13. Un tronco di piramide retta a base quadrata è alto m. 4 e ha gli spigoli delle due basi rispettivamente di m. 3 è m. 5. Qual'è la lunghezza degli spigoli laterali del tronco e dell'altezza delle facce laterali?

14. Calcolare l'area della superficie di un ottaedro regolare di m. 1 di spigolo.

15. Calcolare l'area della superficie di un dodecaedro regolare di m. 3,2 di spigolo.

16. Calcolare l'area della superficie di un icosaedro regolare di m. 1,5 di spigolo.

17. In quale rapporto stanno le superficie di un tetraedro e di un ottaedro regolari, aventi spigoli uguali?

18. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro e di un icosaedro regolari, aventi uguale superficie?

19. Calcolare il volume di una cassa avente le dimensioni di

m. 1,10 $\times$ cm. 70 $\times$ cm. 60.

20. Calcolare la capacità della medesima cassa, sapendo che lo spessore delle pareti e del coperchio è di cm. 2.

21. Un'aula scolastica lunga m. 10, larga m. 5 e alta cm. 350 sarà sufficiente per 50 scolari, se l'igiene richiede per ogni scolaro m^3 2,3 d'aria?

22. Si vuol costruire un muro lungo m. 16,38, alto m. 2,40

e avente lo spessore di cm. 24. Quanti mattoni occorrono tenuto conto che il mattone usuale ha le dimensioni di

cm. 28 $\times$ cm. 14 $\times$ cm. 6?

23. Con 100 dm^3 di ferro si deve costruire una sbarra a sezione quadrata di cm. 5 di lato. Quanto sarà lunga la sbarra?

24. Un decimetro cubo di legno di faggio pesa g. 852. Calcolare il peso di una tavola dello stesso legno avente le dimensioni di

m. 4,5 $\times$ dm. 3,7 $\times$ cm. 6,5.

25. Quanto pesa un dado massiccio di avorio di cm. 4 di spigolo? [Peso specifico dell'avorio 1,9].

26. Calcolare il volume di un cubo, la cui superficie sia uguale a quella della superficie di un tetraedro regolare di dm. 8,4 di spigolo.

27. Calcolare la lunghezza dello spigolo di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo avente le dimensioni di

m. 1,40 $\times$ m. 2,8 $\times$ m. 2,5.

28. Un prisma retto ha per base un triangolo equilatero di lato l e d'altezza h. Se ne determinino la superficie totale e il volume. (Esempio: $l = 2$, $h = \sqrt{3}$).

29. L'area della superficie laterale di un prisma retto a base triangolare equilatera è di m^2 3,41; posto che il lato della base è di dm. 13 si calcoli il volume del prisma.

30. Un prisma retto a base esagonale regolare ha il volume di dm^3 975 e l'altezza di cm. 23. Calcolare il lato della base.

31. Qual'è il volume di una piramide triangolare alta m. 2,55, in cui il triangolo di base ha un lato di m. 0,75 e l'altezza relativa di m. 0,80?

32. Calcolare il volume del 4° scaloide iscritto e quello

del 4° scaloide circoscritto alla piramide retta a base quadrata alta cm. 12 e avente il lato della base di cm. 16.

33. Qual'è il volume di una piramide retta a base triangolare equilatera, alta m. 5,4 e avente lo spigolo di base di m. 8?

34. Qual'è il volume di una piramide alta m. 4, la cui base è un trapezio avente le basi di m. 3,72 e m. 5,20 e l'altezza di m. 2,13?

35. La grande piramide di Cheope, in Egitto, ha per base un quadrato di m. 230 di lato. Le facce laterali sono triangoli equilateri. Qual'è il volume?

36. Calcolare il volume di un tetraedro regolare di cm. 4 di spigolo.

37. L'apotema di una piramide retta a base esagonale regolare è di cm. 35 e il lato della base è di cm. 21. Si calcoli il volume della piramide.

38. Un tronco di piramide ha per base maggiore un triangolo rettangolo: i cateti sono di m. 12 e m. 16: il lato della base minore, corrispondente al primo di codesti cateti è di m. 3 e l'altezza è di m. 2,75. Si calcoli il volume del tronco.

39. Le basi di un tronco di piramide retta a base quadrata hanno rispettivamente dm. 9 e dm. 4 di lato e l'altezza del tronco è di dm. 15. Qual'è il volume?

40. Un tronco di piramide retta a base regolare ha per volume 1 dm^3 e per altezza 15 cm. Una delle basi è un quadrato di cm. 6 di lato. Calcolare il lato dell'altra base.

41. Si scava una fossa a forma di tronco di piramide retta a base quadrata, arrovesciata. Il lato dell'apertura è di m. 2,3 e quella del fondo è di m. 1,4 e il volume della terra scavata è di m^3 36,4. Qual'è la profondità della fossa?

42. Calcolare il peso di un blocco di granito avente la forma di un tronco di piramide, avente le basi di dm. m^2 3,55 e m^2 0,78 e l'altezza di m. 2,80. La densità del granito è 2,780.

43. Un obelisco in granito ha la forma di un tronco di piramide retta a base quadrata, sormontato da una piccola

piramide. La base inferiore ha m. 2,42 di lato, la superiore m. 1,50; l'altezza del tronco è di m. 21,60 e quella della piramide è di m. 1,20. Quanto pesa l'obelisco, se la densità del granito è 2,75?

44. Il fumaiolo in muratura di una fornace ha forma di tronco di piramide retta e base quadrata. Le due basi hanno esternamente il lato di m. 1,40 e m. 0,60 rispettivamente, e internamente i lati di m. 0,44 e m. 0,38. Calcolare il volume della muratura, tenendo conto del fatto che l'altezza del camino è di m. 12,50.

TABELLA delle aree delle superficie e dei volumi dei poliedri regolari di spigolo uguale a m. 1.

	Area	Volume
Tetraedro	$m.^2$ 1,7320...	$m.^3$ 0,1178...
Cubo	» 6,0000	» 1,0000
Ottaedro	» 3,4141...	» 0,4714...
Dodecaedro.	» 20,6457...	» 7,6631...
Icosaedro.	» 8,6602...	» 2,1816...

45. Calcolare l'area della superfice di un tetraedro regolare di cm. 7,5 di spigolo.

46. Calcolare l'area della superfice di un ottaedro regolare di cm. 3,2 di spigolo.

47. In quale rapporto stanno gli spigoli di un tetraedro e di un icosaedro regolari aventi uguale superficie?

48. Calcolare il volume di un ottaedro regolare di cm. 7,1 di spigolo.

49. Calcolare il volume di un dodecaedro regolare di dm. 5,2 di spigolo.

50. Quale spigolo deve avere un tetraedro regolare, affinchè il suo volume sia di 1 dm.^{3}?

51. In quale rapporto stanno i volumi di un cubo e di un icosaedro regolari aventi ugual superficie?

52. In quale rapporto stanno le superficie di un ottaedro e di un dodecaedro regolari aventi ugual volume?

53. Quale lato bisogna dare a un cubo, perchè la sua superficie abbia un'area metà di quella di un cubo di cm. 36 di spigolo?

54. Quale sarà l'area della base di un prisma di m. 1 di altezza, simile ad un prisma alto dm. 5,5 e avente una base di cm^2 725?

55. Che errore commetterebbe chi, avendo una scatola in forma di parallelepipedo delle dimensioni di cm. 28 $\times$ cm. 35 $\times$ cm. 42 e volendo costruire una scatola simile e avente lo spigolo minore di cm. 24, diminuisse anche le altre due dimensioni di cm. 4? Quali dovrebbero essere le vere dimensioni?

56. Si vuol costruire un serbatoio di lamiera di zinco, in forma di prisma retto a base quadrata, avente l'altezza doppia del lato della base e la capacità di m.^{3} 4. Quali debbono essere le dimensioni (interne)?

57. A quale distanza dal vertice si deve segare una piramide con un piano parallelo alla base per dividerla in due parti equivalenti?

58. A quali distanze dal vertice si deve segare una piramide con piani paralleli alle base per dividerla in 3 parti equivalenti?

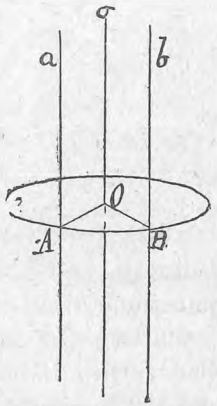
59. Calcolare l'altezza e il volume di due piramidi regolari simili, le cui basi quadrate hanno l'area di m^2 2,025 e m^2 1,681, sapendo che l'apotema delle facce della prime è di m. 2,125.

XIII.

CILINDRO, CONO E SFERA

Cilindro circolare.

506. Def. — Data una retta o, l'insieme delle parallele ad o aventi da essa una data distanza, dicesi *superficie cilindrica circolare* (o *di rotazione*) *indefinita* di *asse* o e di *raggio* uguale alla distanza prefissata delle rette parallele dall'asse.



Ogni piano perpendicolare all'asse sega il cilindro secondo una circonferenza, avente il centro sull'asse e il raggio uguale al raggio del cilindro (*sezione normale* della superficie cilindrica).

507. Indicando con r il raggio del cilindro, le rette parallele all'asse, che hanno da esso una distanza diversa da r, diconsi *interne* o *esterne* al cilindro, secondo che codesta distanza è minore o maggiore di r: e si dicono rispettivamente *interni* o *esterni* anche i punti di codeste rette.

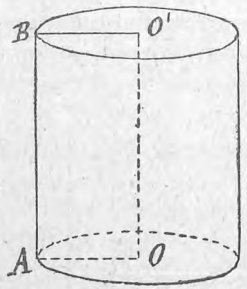
La figura costituita dai punti della superficie ci

lindrica e dai punti interni dicesi *cilindro circolare* (o *di rotazione*) *indefinito*.

508. Def. — Dato un cilindro circolare indefinito, e considerati due piani perpendicolari all'asse, la figura costituita dai due cerchi sezioni normali del cilindro e dalla parte di cilindro compresa fra i due piani dicesi *cilindro circolare retto*, e si dice *finito* per opposizione a quello considerato dianzi.

Le due sezioni normali si dicono *basi*, e la parte di superficie cilindrica indefinita, compresa fra i due piani, si dice *superficie laterale* del cilindro finito.

L'insieme delle due basi e della superficie laterale dicesi *superficie totale* del cilindro retto.



La distanza delle due basi si dice *altezza* del cilindro retto.

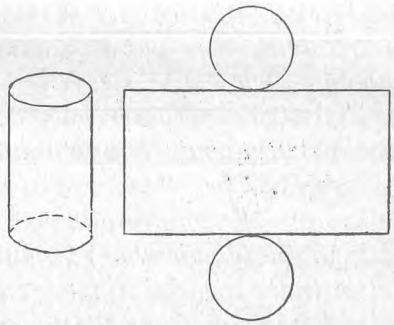
I punti del cilindro non appartenenti alla superficie si dicono *interni*; i punti non appartenenti al cilindro si dicono *esterni* ad esso.

509. Osservazione. — La superficie laterale del cilindro retto si può immaginare descritta dalla rotazione di un segmento AB (*generatrice*) intorno ad una retta OO' ad esso parallela, mentre il cilindro è descritto, in codesto stesso movimento di rotazione, dal rettangolo $ABO'O$, che ha il lato OO' sulla retta fissa.

Area della superficie cilindrica.

510. Per determinare l'area della superficie laterale del cilindro procediamo per via intuitiva.

Si immagini di aver costruito un modello concreto della superficie laterale di un cilindro retto, mediante un foglio od un qualsiasi velo flessibile ed inestensibile. Se, dopo averlo tagliato lungo una generatrice, distendiamo il foglio o il velo, senza ripiegature, sopra un piano, otteniamo un rettangolo che ha per altezza l'altezza del cilindro primitivo e per base quel lembo, che dianzi era disposto secondo la circonferenza base del cilindro.



Si è così condotti ad assumere come *sviluppo della superficie laterale* del cilindro il rettangolo avente per altezza quella del cilindro, e per base il segmento uguale alla circonferenza base del cilindro rettificata.

Ricaviamo di qui e dal n. 286 la seguente:

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cilindro retto di altezza* h *e di raggio* r *è data da*

$$2\pi rh.$$

Perciò *l'area della superficie totale del cilindro è data* (n. 365) *da*

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r).$$

Nella pratica, dunque, *per avere la misura della superficie laterale di un cilindro di cui si conosca*

il raggio della base e l'altezza, si moltiplica per 3,14... *il prodotto del diametro della base per l'altezza; e per avere la misura della superficie totale si moltiplica per* 3,14.... *il prodotto del diametro della base per la somma dell'altezza e del raggio e della base stessa.*

511. Risulta dalla regola del n. prec. che:

a) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per l'altezza si ottiene la lunghezza della circonferenza della base.*

b) *Dividendo l'area della superficie laterale del cilindro per la lunghezza della circonferenza della base, si ottiene l'altezza.*

Volume del cilindro.

512. Prima di passare alla determinazione del solido del cilindro retto (finito) è necessario premettere la seguente

Def. — Dato un cilindro retto (finito), dicesi *iscritto* o *circoscritto* in esso ogni prisma retto (finito) di uguale altezza, le cui basi siano iscritte o circoscritte nei cerchi basi del cilindro.

Dato un cilindro retto (finito) per avere un prisma iscritto o circoscritto ad esso, basta iscrivere o circoscrivere ad una delle basi del cilindro un poligono, e poi considerare il prisma retto che ha per base codesto poligono e per altezza l'altezza del cilindro. Gli spigoli laterali di un prisma inscritto in un cilindro sono generatrici del cilindro, e le facce laterali di un prisma circoscritto hanno ciascuna comune col cilindro una generatrice ed una sola, cioè sono *tangenti* al cilindro lungo quelle generatrici.

513. Dato un cilindro (circolare finito) C, iscriviamo e circoscriviamo al suo cerchio base due poligoni P, P' e consideriamo i due prismi retti (l'uno iscritto e l'altro circoscritto) che hanno per basi P e P' e la stessa altezza di C.

È chiaro che il volume del cilindro è compreso fra i volumi dei due prismi considerati. E se i poligoni P, P' hanno un numero di lati molto grande (così da differire pochissimo dal cerchio base di C) i due prismi hanno ciascuno dal cilindro una differenza piccolissima, cosicchè i volumi dei due prismi danno due valori approssimati (rispettivamente per difetto e per eccesso) del volume del cilindro.

Poichè codesta approssimazione aumenta a piacer nostro se, aumentando ancora il numero dei lati di P e P', facciamo che i due poligoni quasi si confondano col cerchio base di C, resta giustificato in via intuitiva il seguente

Teor. *Il volume del cilindro è uguale a quello di un prisma della medesima altezza, avente per base un poligono la cui area sia uguale a quella del cerchio base del cilindro.*

514. Risulta dal teorema precedente e dai nn. 365, 491 che *il volume di un cilindro retto di raggio* r *e altezza* h *è uguale a*

$$V = \pi r^2 h.$$

Regola. — *Il volume del cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza.*

515. Inversamente abbiamo

$$\frac{V}{h} = \pi r^2$$

e

$$\frac{V}{\pi r^2} = h;$$

cioè: *Dividendo il volume del cilindro per l'altezza si ottiene l'area della base.*

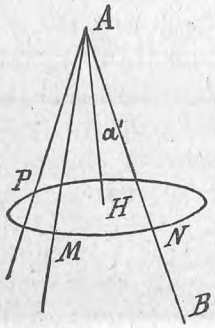
Dividendo il volume del cilindro per l'area della base, si ottiene l'altezza.

Cono circolare.

516. Def. — Dati una semiretta a' di origine A ed un angolo acuto, l'insieme delle semirette uscenti da A e formanti con a' angoli uguali all'angolo dato dicesi *superficie conica circolare* (indefinita) di *asse* a' e di *vertice* A.

L'angolo dato dicesi *angolo d'apertura* del cono.

Il piano perpendicolare all'asse in un suo punto H sega le singole generatrici in punti M, N... tali che i triangoli rettangoli AHM, AHN,... sono uguali, avendo uguali un angolo acuto e il cateto AH (n. 91): onde si conclude che il piano sega la superficie conica secondo una circonferenza avente il centro sull'asse (*sezione normale* della superficie conica).

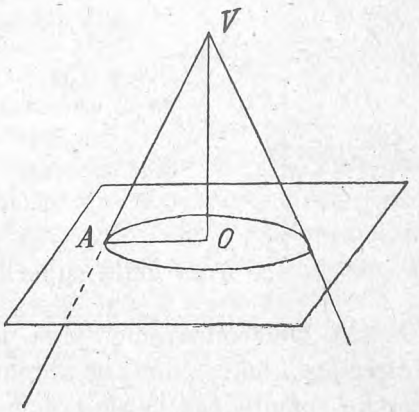


517. Indicato con α l'angolo di apertura, le semirette pel vertice del cono, formanti coll'asse un angolo diverso da α diconsi *interne* o *esterne* secondo che quell'angolo è minore o maggiore di α; e si dicono rispettivamente *interni* o *esterni* anche i punti di codeste semirette.

La figura costituita dai punti della superficie conica e dai punti interni dicesi *cono regolare indefinito*.

518. Def. — Dato un cono circolare ed una sua sezione perpendicolare all'asse, la figura costituita dai punti del cerchio sezione e dai punti della superficie conica, che rispetto al piano della sezione cadono dalla stessa banda del vertice, dicesi *cono circolare retto*, e si dice *finito* in opposizione a quello considerato dianzi.

La nominata sezione del cono indefinito dicesi *base* del cono finito; e la distanza del vertice dal piano di essa dicesi *altezza*. I segmenti uguali compresi fra il vertice e i punti della circonferenza base diconsi *apotemi* (o *generatrici* o *lati*) e l'insieme dei punti appartenenti ad essi dicesi *superficie laterale* del cono.



519. Osservazione. — La superficie laterale del cono retto si può immaginare descritta dalla ipotenusa VA (*generatrice*) di un triangolo rettangolo VAO che ruoti intorno al cateto VO, mentre il cono è descritto, in questo stesso movimento, dal triangolo.

520. L'apotema a del cono, il raggio r della base e l'altezza h sono rispettivamente ipotenusa e

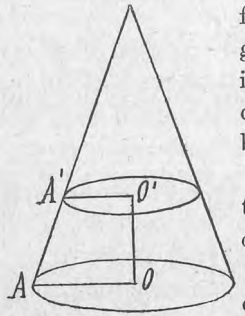
cateti di uno stesso triangolo rettangolo. Perciò abbiamo (n. 299)

$$a = \sqrt{r^2 + h^2},$$

$$r = \sqrt{a^2 - h^2},$$

$$h = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

521. Tronco di cono. — Se, dato un cono, conduciamo un piano parallelo alla base, compreso fra questa e il vertice, il cono vien segato secondo un cerchio e resta diviso in due parti, di cui una è un nuovo cono e l'altra dicesi *tronco di cono* (a basi parallele).



I due cerchi O, O' diconsi *basi* del tronco e la distanza OO' dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

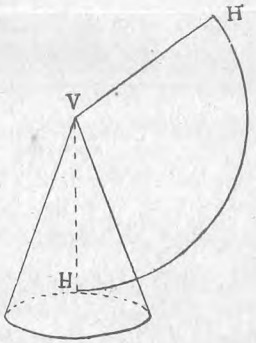
I segmenti AA' di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

Area della superficie conica.

522. Determineremo l'area della superficie conica (circolare, finita) con un procedimento analogo a quello seguito per la superficie cilindrica.

Se mediante un foglio opportunamente ritagliato o mediante un velo flessibile ed inestendibile, noi costruiamo il modello della superficie laterale di un cono retto e poi lo tagliamo lungo una generatrice VH e distendiamo il foglio o il velo su di un piano, otteniamo un settore circolare VHH', il cui raggio VH è uguale all'apotema del cono, e di cui il lato circolare HH' è il lembo che dianzi era incurvato in

modo da formare la circonferenza base del cono. Il medesimo settore VHH' si ottiene facendo ruzzolare il cono su di un piano fino a ricondurre a contatto col piano la generatrice VH, lungo la quale il cono appoggiava sul piano al principio del movimento.



È allora naturale di assumere come *sviluppo della superficie laterale* del cilindro codesto settore circolare, il quale (n. 367) ha la stessa area del triangolo che ha per altezza l'apotema del cono e per base l'arco HH', ossia anche la circonferenza base del cono rettificata.

Si deduce di qui e dai nn. 359, 295 la seguente:

Regola. — *L'area della superficie laterale di un cono è data dalla metà del prodotto della lunghezza della circonferenza di base rettificata per l'apotema; cioè, se* r *ed* a *sono rispettivamente il raggio della base e l'apotema, è data da*

$$\frac{2\pi r a}{2} = \pi r a;$$

perciò la superficie totale è (n. 365) *data da*

$$\pi r a + \pi r^2 = \pi r(a + r).$$

Dunque nella pratica *per avere la misura della superficie laterale di un cono si moltiplica per* 3,14... *il prodotto dell'apotema per il raggio della base; e per avere la superficie totale si moltiplica per*

3,14... *il prodotto del raggio della base per il raggio stesso aumentato dell' apotema.*

523. AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE DI UN TRONCO DI CONO. — Si dimostra (cfr. n. 522) che *l' area della superficie laterale di un tronco di cono è uguale a quella di un trapezio avente per altezza l'apotema e per basi parallele i segmenti uguali alle lunghezze delle circonferenze basi del tronco.*

Se a è l'apotema ed r_1, r_2 $(r_1 < r_2)$ sono i raggi delle due basi, l'area della superficie laterale è data da (nn. 298, 359)

$$\pi a(r_1 + r_2),$$

e quella della superficie totale da (n. 365)

$$\pi[a(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2].$$

Volume del cono.

524. La determinazione del volume del cono si fa con procedimento analogo a quello seguito pel cilindro.

Cominciamo col notare che dicesi *iscritta* o *circoscritta* ad un cono ogni piramide avente come vertice il vertice del cono e come base un poligono rispettivamente iscritto o circoscritto alle basi del cono.

525. Dato un cono (circolare finito) C, iscriviamo e circoscriviamo al suo cerchio base due poligoni P, P' e consideriamo le due piramidi (rispettivamente iscritta e circoscritta a C) aventi le basi P, P' e la stessa altezza di C. Manifestamente il volume del cono è compreso tra i volumi delle due piramidi considerate; e se i poligoni P, P' hanno un numero di lati molto grande, in modo da differire pochissimo dal cerchio base di C, le due piramidi hanno ciascuna una differenza piccolissima dal cono, cosicchè i volumi delle due piramidi danno due valori approssimati (l' uno per difetto, l' altro per eccesso) del volume del cono.

Di più codesta approssimazione cresce a piacer nostro, se aumentiamo il numero dei lati di P e P' in guisa che essi quasi si confondano col cerchio base; e così resta giustificato intuitivamente il

Teor. — *Il volume del cono è uguale a quello di una piramide della medesima altezza, avente per base un poligono di area uguale a quella del cerchio base del cono.*

526. Ricordando la regola per trovare il volume di una piramide (n. 497) abbiamo che il volume V di un cono, di cui siano r e h rispettivamente il raggio della base e l' altezza, è dato da

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

e possiamo enunciare la

Regola. — *Il volume di un cono si ottiene dividendo per 3 il prodotto (dell' area) della base per l' altezza* (1).

527. Inversamente abbiamo

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

$$\pi r^2 = \frac{3V}{h};$$

(1) Siccome 3,141 : 3 è esattamente uguale a 1,047, spesso conviene senz'altro moltiplicare il prodotto r^2h per 1,047.

cioè: *Dividendo il triplo del volume del cono per l'area della base, si ottiene l'altezza.*

Dividendo il triplo del volume del cono per l'altezza, si ottiene l'area della base.

528. VOLUME DEL TRONCO DI CONO. — Ricorrendo a osservazioni analoghe a quelle del n. 525 o considerando il tronco di cono come differenza di due coni, si trova che *il volume del tronco di cono è uguale a quello di un tronco di piramide colla medesima altezza, avente per base due poligoni, le cui superficie siano uguali a quelle dei due cerchi basi.*

Così, se h è l'altezza del tronco ed r_1, r_2 sono i raggi delle basi, il volume è dato da (nn. 365, 498)

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Sfera.

529. Def. — Il luogo dei punti dello spazio che hanno da un punto O distanze uguali ad un segmento dato AB, dicesi *superficie sferica* di centro O e raggio AB.

Sopra ogni retta per il centro O vi sono, da bande opposte, due punti P, Q, della sfera, e il punto medio del loro segmento è il centro O della sfera; onde risulta come pel cerchio (n. 145), che la sfera ha un solo centro.

Ogni segmento che congiunge il centro O con un punto della sfera dicesi genericamente *raggio*. Per definizione tutti i raggi sono uguali.

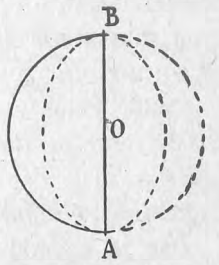
Ogni segmento passante pel centro di una sfera e avente gli estremi su questa dicesi *diametro* della sfera.

Tutti i diametri di una stessa sfera sono uguali perchè tutti sono doppi del raggio.

Infine ogni piano passante pel centro di una sfera dicesi piano *diametrale* di essa. Due piani diametrali si intersecano evidentemente secondo la retta di un diametro, o, come si suol dire brevemente, secondo un diametro.

È poi manifesto dalla definizione stessa che esiste una sola sfera avente un dato centro e un dato raggio.

530. Osservazione. — Una semicirconferenza che ruoti intorno al suo diametro, fino a riprendere la sua posizione iniziale, descrive una superficie sferica di raggio uguale a quello della semicirconferenza.



Il semicerchio descrive nello stesso movimento la sfera.

531. Teor. — *Ogni piano diametrale di una sfera la interseca secondo una circonferenza di raggio uguale al raggio di essa.*

Data la sfera di centro O e raggio AB, e dato il piano α passante per O, la intersezione della sfera con α è il luogo, nel piano α, dei punti aventi da O distanze uguali ad AB, cioè la circonferenza di centro O e raggio AB.

532. Def. — I punti che hanno dal centro di una sfera distanza minore del raggio si dicono *interni* alla sfera, e i punti che dal centro hanno distanza maggiore del raggio si dicono *esterni*.

La figura costituita dai punti di una sfera e dai punti interni ad essa dicesi *sfera* o *solido racchiuso dalla superficie sferica*.

533. Def. — Ogni segmento avente gli estremi su di una sfera dicesi *corda* della sfera.

534. Teor. — *In una sfera ogni corda* (non passante pel centro) *è minore del diametro.*

La precedente proposizione si riporta alla analoga pel cerchio (n. 159) considerando la circonferenza secondo cui è segata la sfera dal piano diametrale contenente la corda data.

535. Def. — Due sfere si dicono *uguali* se hanno ugual raggio.

Vediamo quanti punti una retta può avere comuni con una sfera. Il criterio per decidere tale questione è fornito dal seguente

536. Teor. — *Una sfera ha comune con una retta due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza di essa dal centro della sfera è minore o uguale o maggiore del raggio.*

Se la retta passa pel centro, si è già notato che essa ha comuni due punti colla sfera (n. 529).

Se la retta data non passa pel centro della sfera, si consideri il piano diametrale passante per la retta data.

Questo piano sega la sfera secondo una circonferenza che ha comune colla retta data due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza della retta dal centro, comune alla circonferenza e alla sfera, è maggiore uguale o minore del raggio (n. 179).

537. Def. — Una retta si dice *secante* o *tangente* od *esterna* ad una sfera, secondo che ha comune con essa due punti o uno o nessuno.

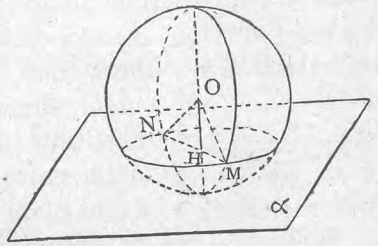
Il punto che una tangente ha comune con una sfera dicesi *punto di contatto.*

538. Similmente, dati una sfera e un piano, per studiarne la posizione reciproca, si considerino i piani diametrali della sfera perpendicolari al piano dato. Si dimostra così il seguente

Teor. — *Un piano ha comune con una sfera una circonferenza, o ha comune con essa un sol punto o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la sua distanza dal centro della sfera è minore, uguale o maggiore del raggio.*

Il piano si dice rispettivamente *secante, tangente, esterno* alla sfera.

539. Si dimostra facilmente, ed è anche manifesto dalla figura, che fra tutte le circonferenze sezioni piane di una sfera, hanno raggio massimo quelle il cui piano passa pel centro (aventi raggio uguale alla sfera).



Perciò le sezioni dei piani diametrali si dicono *circonferenze massime* della sfera: le altre diconsi *circonferenze minori.* I cerchi corrispondenti diconsi rispettivamente *cerchi massimi* e *cerchi minori.*

540. Da ultimo, per studiare la posizione reciproca di due sfere riguardo ai punti che esse possono avere comuni, si considerino i piani diametrali comuni alle due sfere, cioè i piani che passano per i due centri. Si trova così che si deve verificare uno dei seguenti casi (cfr. n. 185):

1) o le due superficie sferiche non hanno nessun punto comune e sono ciascuna esterna all'altra;

2) o hanno un sol punto comune e sono ciascuna esterna all'altra (*si toccano esternamente*);

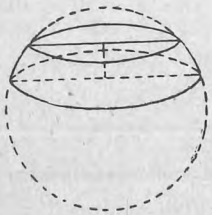
3) o si segano lungo una circonferenza il cui piano è perpendicolare alla retta dei centri delle sfere e il cui centro appartiene a codesta retta;

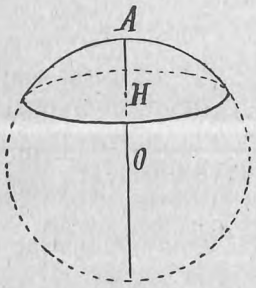
4) o hanno un sol punto comune e una di esse è interna all'altra (*si toccano internamente*);

5) o, infine, non hanno nessun punto comune e una di essa è interna all'altra.

Noi qui non ci indugeremo a indicare le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza fra i raggi delle due sfere e la distanza dei centri, le quali caratterizzano ciascuno di codesti cinque casi. Ne proporremo la ricerca fra gli esercizi in fine al capitolo (pag. 345).

541. Def. — Data una sfera e considerati due piani seganti paralleli, la figura costituita dai due cerchi sezioni e dalla parte di sfera compresa fra i due piani paralleli dicesi *segmento sferico*. I due cerchi sezioni diconsi *basi* e la distanza di esse *altezza* del segmento: la congiungente i centri delle due basi (perpendicolare ad esse) dicesi *asse* del segmento. La parte di superficie sferica compresa fra i due piani si chiama superficie laterale del segmento od anche *zona* sferica.

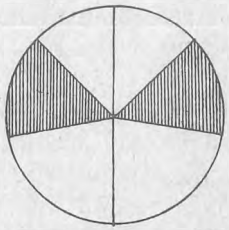




Se, in particolare, si immagina che il piano di una delle basi sia tangente alla sfera, si ha il segmento sferico ad una

sola base, il quale è limitato, oltre che dal cerchio base, da una parte di superficie sferica che si dice *calotta sferica*.

542. — Un'altra figura notevole è il *settore sferico* il quale si ottiene considerando un settore circolare e immaginando che esso ruoti compiendo un intero giro attorno ad un diametro del suo cerchio (che non attraversi il settore). Il solido del settore sferico è costituito da tutti i punti dello spazio, che rappresentano posizioni assunte successivamente, nel movimento suindicato, dai punti del settore circolare considerato.



Se il settore circolare che si considera corrisponde ad un angolo al centro retto e si fa ruotare intorno ad un lato di questo, il settore sferico è un *emisfero*.

La superficie del settore sferico si ottiene come riunione di una zona colla superficie di due coni (o eventualmente colla superficie di un cono e di un cerchio).

Area della superficie sferica.

543. Il problema di misurare la superficie della sfera è più difficile che gli analoghi problemi pel cilindro e pel cono, perchè la sfera, non si può distendere sopra il piano neppure tagliandola opportunamente, come si è fatto pel cilindro e pel cono. Cioè la sfera non è una *superficie sviluppabile*.

Accenniamo sommariamente alle considerazioni che possono condurre al risultato.

Presa una semicirconferenza di raggio r, dividiamola in 2, 4, 8,... parti uguali (nn. 212, 213) e fermiamoci quando ciascuno degli archetti ottenuti è così piccolo da confondersi quasi con la rispettiva corda. Considerata la poligonale (regolare) iscritta alla semicirconferenza che ha per vertici i punti di divisione ottenuti, avremo che, ruotando intorno al diametro, la semicirconferenza descrive una superficie sferica S e la poligonale una *superficie di rotazione* R (che si può dire *iscritta* nella superficie sferica) la quale si ottiene manifestamente per somma di superficie laterali di coni, tronchi di cono, ed, eventualmente, cilindri, cosicchè si potrà determinarne l'area applicando le regole dei nn. 510, 522, 523.

La superficie R quasi si confonde con la superficie sferica S, onde l'area di R si può assumere come *un valore approssimato* (per difetto) *dell'area di S*. E analogamente considerando la *superficie di rotazione* R′ (*circoscritta* ad S) generata da una poligonale (regolare) circoscritta alla semicirconferenza e avente un grande numero di lati, avremo *un valore approssimato* (per eccesso) *dell'area della superficie sferica*.

E' è manifesto che le due superficie di rotazione R ed R' (l'una iscritta, l'altra circoscritta alla superficie sferica S), se le poligonali (regolari) hanno un numero di lati grandissimo, quasi si confondono l'una con l'altra, pur comprendendo sempre tra loro la S.

Ma d'altra parte si dimostra (ma noi rinunciamo qui alle lunghe considerazioni occorrenti) che le aree delle superficie di rotazione R ed R', quando il numero dei lati delle poligonali generatrici va aumentando, si avvicinano indefinitamente, l'una crescendo, l'altra decrescendo, al quadruplo dell'area del cerchio di raggio r; cosicchè resta intuitivamente giustificata la seguente:

Regola. — *L'area della superficie sferica è uguale al quadruplo di quella del suo cerchio massimo.*

Cioè se r è la lunghezza del raggio abbiamo che detta area s è data (n. 365) da

$$s = 4\pi r^2.$$

544. Inversamente abbiamo

$$r^2 = \frac{S}{4\pi}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Regola. — *Il raggio di una sfera è uguale alla metà della radice quadrata del quoziente dell'area della sfera per 3,14.*

545. Ricordando la regola per misurare la superficie laterale di un cilindro (n. 510) e quella per misurare la superficie del cerchio (n. 365) troviamo la proposizione seguente:

Cor. — *L'area di una sfera è uguale a quella della superficie laterale del cilindro, che ha base uguale al suo cerchio massimo e altezza uguale al suo diametro.*

546. Le aree s, s' di due superficie sferiche di raggio r, r' rispettivamente sono date da

$$s = 4\pi r^2, \quad s' = 4\pi r'^2,$$

cosicchè avremo

$$\frac{s}{s'} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Cioè abbiamo il

Teor. — *Le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei raggi.*

Questo risultato va ravvicinato a quelli dei nn. 356, 503.

547. Considerazioni analoghe a quelle del n. 543 conducono alla seguente

Regola. — *L'area di una zona sferica è uguale a quella della superficie laterale di un cilindro che ha per altezza l'altezza del segmento sferico corrispondente e per base il cerchio massimo della sfera cui appartiene la zona (o la calotta).*

Perciò se h è l'altezza del segmento ed r è il raggio della sfera, la superficie della zona (o calotta) sarà misurata (n. 510) da

$$2\pi rh.$$

548. Cor. — *Se due zone (o calotte) di una stessa sfera o di sfere uguali corrispondono a segmenti sferici di altezze uguali, le loro aree sono uguali.*

Volume della sfera.

549. Passiamo infine a indicare brevemente come si possa ottenere il volume della sfera.

Sulla sfera si prenda un pezzetto piccolissimo di superficie limitato da archetti di circonferenza massima. Congiungendo i vertici di questo pezzetto di superficie sferica col centro otteniamo una piramide che è parte della sfera e si può approssimatamente considerare a base piana. Tutta la sfera si può immaginare ottenuta sommando un numero grandissimo di siffatte piramidi; e così appare giustificato intuitivamente il

Teor. — *Il volume della sfera è uguale a quello di una piramide avente per altezza il raggio della sfera e la base di area uguale alla superficie sferica.*

550. In virtù dei nn. 497, 543 avremo che il volume di una sfera di raggio r sarà dato da

$$\frac{1}{3}\,4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Otteniamo così la seguente

Regola. — *Il volume della sfera si ottiene moltiplicando per* 3,14.... *i quattro terzi del cubo del raggio* (1).

551. Inversamente abbiamo la

Regola. — *Dividendo il volume di una sfera pei* $\frac{3}{4}$ *di* 3,14 (*o* 3,1516) *si ottiene il cubo del raggio.*

Per trovare il raggio basterà estrarre la radice cubica del risultato dianzi ottenuto.

552. In virtù della regola precedente se v, v' sono i volumi di due sfere di raggio r, r' rispettivamente, avremo

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad v' = \frac{4}{3}\pi r'^3,$$

e quindi ancora

$$\frac{v}{v'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

Risulta di qui il

Teor. — *Due sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi.*

Questo risultato va ravvicinato al n. 505.

553. Con procedimento analogo a quello del n. 549 si giunge al

Teor. — *Il volume di un settore sferico è uguale a quello di una piramide, in cui la base è di area uguale alla zona corrispondente (o della calotta) e l'altezza è uguale al raggio della sfera, cui appartiene il segmento considerato (o la calotta).*

---

(1) Siccome $\frac{4}{3} \times 3{,}141$ è uguale a 4,188 basta moltiplicare il cubo del raggio per 4,188 o 4,19.

Risulta di qui (nn. 497, 547) che il volume di un settore sferico di raggio r e altezza h è dato da

$$\frac{1}{3} r \cdot 2\pi r h = \frac{2}{3} \pi r^2 h,$$

554. La determinazione del solido di un segmento sferico richiede considerazioni meno semplici di quelle necessarie a stabilire i risultati indicati sin qui. Il teorema, a cui si giunge, è il seguente:

Teor. — *Il volume di un segmento sferico è uguale alla semisomma dei volumi dei due cilindri aventi la stessa altezza del segmento, e per basi rispettive le basi del segmento, aumentata del volume della sfera avente per diametro l'altezza del segmento.*

Se a e b sono i raggi delle due basi, h è l'altezza ed r è il raggio della sfera, il volume del settore è dato, come risulta dal prec. teor., da (nn. 514, 550)

$$\frac{1}{2} \pi h (a^2 + b^2) + \frac{1}{6} \pi h^3 .$$

In particolare il volume di un segmento ad una base, appartenente ad una sfera di raggio r e avente l'altezza h e il raggio della base a, è dato da

$$\frac{1}{2} \pi h a^2 + \frac{1}{6} \pi h^3 = \frac{1}{2} \pi h (a^2 + \frac{1}{3} h^2) .$$

ESERCIZI

1. Qual'è la superficie laterale di un cilindro di m. 4 di diametro e di m. 3,75 di altezza?

2. L'area della base di un cilindro è di m² 12,56. Qual'è la superficie laterale del cilindro se la sua altezza è uguale a $^3/_2$ del raggio di base?

3. Qual'è la superficie totale di un cilindro, in cui il raggio è di m. 0,35 e l'altezza è doppia del diametro della base?

4. Un rettangolo ha le dimensioni di m. 2 e m. 3. In quale rapporto stanno fra loro le superficie laterali dei due cilindri circolari retti generati dal rettangolo, quando ruota intorno all'uno o all'altro di due suoi lati consecutivi?

5. Le superficie sviluppate dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono uguali.

6. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

7. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

8. L'altezza di un cilindro circolare retto è di m. 4 e l'area del rettangolo, che si ottiene segando il cilindro con un piano passante per l'asse è di m² 26,45. Si calcolino il raggio e l'area della superficie laterale del cilindro.

9. Calcolare l'altezza di un cilindro circolare retto, il cui raggio è di m. 0,5 e la superficie laterale di m² 13,27.

10. Calcolare l'altezza e il raggio di un cilindro circolare retto, di cui la superficie totale è di m² 0,758 e la superficie laterale è uguale a $^3/_2$ della base.

11. Calcolare il volume di un cilindro circolare retto alto cm. 9,3 e avente il raggio di cm. 2,5.

12. Qual'è il volume di un cilindro, in cui la circonferenza di base è di m. 3,08 e l'altezza è di m. 1,50?

13. In un pozzo di m. 0,90 di diametro vi è acqua fino a m. 2,50 dal fondo, quanti litri di acqua contiene il pozzo?

14. Un pozzo, compreso il rivestimento in muratura, ha m. 1,86 di diametro e m. 12 di profondità. Qual'è il volume della terra che si è dovuto scavare per costruire il pozzo?

15. In un vaso cilindrico di m. 0,8 di diametro, contenente acqua, si getta una pietra. Qual'è il volume della pietra, se dopo l'immersione, il livello dell'acqua si innalza di m. 0,483?

16. Da un serbatoio cilindrico, avente m. 8,8 di diametro, sgorgano 2 litri d'acqua al secondo. Di quanto si abbassa il livello dell'acqua in tre quarti d'ora?

17. In un pozzo la circonferenza esterna del rivestimento in muratura è di m. 5, la circonferenza interna è di m. 3 e la profondità è di m. 15. Quanto costa il lavoro di muratura, calcolato a L. 18 il metro cubo?

18. Qual'è il peso di un tubo di piombo lungo m. 2,50, avente il diametro interno di m. 0,36 e lo spessore di mm. 8? La densità del piombo è di 11,4.

19. Qual'è la pressione in chilogrammi esercitata sul fondo di una cisterna cilindrica di m. 5,75 di diametro dall'acqua, che ha l'altezza di m. 3,4?

20. Si è scavato un pozzo profondo m. 9 e avente il diametro interno di m. 0,90. Quale sarà la cubatura totale del muro di rivestimento, posto che lo spessore di questo sia di cm. 30?

21. Un tubo barometrico ha un diametro interno di mm. 11 e il mercurio vi raggiunge un'altezza di cm. 76. Quanto pesa il mercurio della colonna barometrica se la densità del mercurio è 13,568? Qual'è la pressione atmosferica per cm.²?

22. Per estrarre l'acqua da un pozzo si fa uso di una pompa, il cui tubo ha un diametro interno uguale a d e il cui stantuffo ha una data corsa h. Il diametro del pozzo è D e la profondità H. Dopo quante corse dello stantuffo si vuoterà il pozzo?

23. I volumi dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

24. Il tubo di una conduttura di acqua ha una sezione di 3 cm² e l'acqua vi scorre colla velocità di m. 1 al secondo, Quanti litri di acqua passano pel tubo in un'ora?

25. Quale sezione ha un tubo per il quale scorrono 300 litri di acqua in un'ora alla velocità di m. 0,6 al secondo?

26. Quale velocità deve avere l'acqua in un tubo cilindrico di cm. 5 di diametro, se in un'ora debbono passare m³ 18?

27. In quanti secondi passano 100 litri di acqua alla velocità di m. 0,9 al secondo per un tubo cilindrico di cm. 2 di diametro?

28. La densità del vapor d'acqua è uguale ai $^5/_8$ di quella dell'aria e un litro d'aria pesa gr. 1,293. Quale sarà il peso del vapore contenuto nel cilindro di una macchina, avente m. 0,50 di diametro e m. 0,80 di lunghezza?

29. Il vapor d'acqua a 100° e alla pressione di una atmosfera occupa un volume 1700 volte maggiore dell'acqua a 0°, che l'ha generato. Quant'acqua a 0° occorre per riempire alla pressione di una atmosfera un cilindro di m. 0,52 di lunghezza su m. 0,52 di diametro?

30. Quanta acqua solleva a ciascun colpo di stantuffo una pompa, in cui il diametro interno del corpo di pompa è di m. 0,16 e l'altezza al di sotto dello stantuffo è di m. 0,46?

31. Qual'è la superficie della base di un cilindro circolare retto, in cui il volume è di m³ 3,60 e l'altezza di m. 1,50?

32. In un recipiente cilindrico di m. 0,10 di diametro interno si versano kg. 4,04481 di latte, la cui densità è 1,03. A quale altezza giungerà il liquido?

33. Una botte cilindrica per inaffiare le strade contiene 1800 litri e ha un diametro di 90 cm. Quanto è lunga la botte?

34. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 gr. quando è vuoto e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è 13,568.

35. Un pluviometro cilindrico ha un diametro di cm. 24. Dopo una pioggia l'acqua di esso, defluendo in un vaso cilindrico di cm. 3 di diametro, vi raggiunge l'altezza di mm. 166. Che altezza avrebbe raggiunto codesta acqua rimanendo nel pluviometro? Quanti ettolitri di acqua sono caduti per chilometro quadrato?

36. Calcolare le dimensioni dei litri per misurare i grani e i liquidi, sapendo che questi due strumenti sono entrambi cilindrici, e che l'altezza nel primo è uguale al diametro della base, nel secondo ne è doppia.

37. Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare all'asse per ottenere, come sezione, una circonferenza, la cui lunghezza sia $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ di quella della circonferenza di base?

38. La superficie laterale di una piramide circoscritta ad un cono retto è equivalente al triangolo che ha per base il perimetro della base della piramide e per altezza l'apotema del cono.

39. Dato un cono circolare retto, a quale distanza dalla base dovremo segare il cono con un piano perpendicolare all'asse per ottenere, come sezione, un cerchio la cui area sia $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{9}$ o $\frac{1}{16}$ dell'area della base? [Si ricordi il n. 366].

40. Il lato di un cono circolare retto è quadruplo del raggio di base e l'altezza è di m. 9. Si calcoli la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio, che si ottengono segando il cono con un piano perpendicolare all'asse, condotto a $\frac{1}{5}$ dell'altezza partendo dal vertice.

41. Qual'è il lato del cono avente per altezza m. 7 e per raggio della base m. 3?

42. Qual'è l'altezza del cono avente il lato di m. 6 e il raggio di base di m. 5?

43. Calcolare l'area della superficie totale di un cono circolare retto, la cui altezza è di dm. 8 e il raggio di base di dm. 3,5.

44. Qual'è la superficie laterale di un cono retto, che ha m. 3 di diametro e m. 5 di lato?

45. Qual'è la superficie laterale di un cono circolare retto che ha m. 9 di raggio e m. 12 di altezza?

46. Qual'è la superficie totale di un cono circolare retto, in cui il lato è di m. 3,75 e il raggio di base è di m. 1,89?

47. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui l'altezza è di m. 4 e il lato di m. 5?

48. Un cono circolare retto, alto m. 12,6, ha la circonferenza della base lunga m. 3,49. Si calcolino il lato e la superficie totale del cono.

49. Qual'è la superficie totale di un cono, in cui il lato è di m. 4,50 e la circonferenza di base è di m. 6,25?

50. Quanto pesa il tetto in lamiera di zinco di una torricella, che finisce con un cono di m. 2,70 di diametro e di m. 3 di lato, supposto che la lamiera abbia lo spessore di un millimetro e ricordando che la densità dello zinco è 6,86?

51. Calcolare l'area della superficie del solido generato da un triangolo equilatero che ruota intorno ad un suo lato, la cui lunghezza è di m. 0,36.

52. Le superficie laterali e i solidi dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

53. Un cono equilatero (cioè tale che le sue sezioni per l'asse sono triangoli equilateri) ha un'altezza h. Se ne determini prima la superficie laterale, poi la superficie totale.

54. Qual'è il volume di un cono equilatero (cfr. eserc. prec.) di cui sia a l'apotema?

55. Qual'è il lato di un cono avente la superficie laterale di m^2 30,8 il raggio di base di m. 2,109?

56. Qual'è la circonferenza della base di un cono, in cui la superficie laterale è di m^2 28 e il lato di m. 7?

57. Qual'è il volume di un cono in cui l'altezza è di m. 5 e il raggio della base di m. 2?

58. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 2,5 e il raggio della base di m. 1,5?

59. Qual'è il volume di un cono, in cui il lato è di m. 4,5 e l'altezza è di m. 3,6?

60. In quale rapporto stanno fra loro i volumi di due coni di uguale altezza, le cui basi hanno rispettivamente i diametri di m. 0,56 e m. 1,12?

61. Qual'è il rapporto dei volumi di un cilindro e di un cono, aventi base ed altezze uguali?

62. Quanto costa un pan di zucchero, avente il diametro di base di m. 0,25 e l'altezza di m. 0,50, se il prezzo dello zucchero è di L. 1,60 al kg. e la sua densità è di 1,20?

63. Una bica di fieno è alta m. 6; la sua parte inferiore è cilindrica ed ha m. 3,80 di altezza e m. 5 di diametro. La parte superiore è conica. Qual'è il volume della bica?

64. Una bica di fieno, di forma conica, misura alla base m. 44 di circuito ed è alta m 15. Quanti quintali pesa se 1 m^3 di fieno pesa due quintali?

65. Un vaso conico, alto cm. 18 e avente il raggio di base di cm. 24 è pieno d'acqua, e quest'acqua si versa in un vaso cilindrico di cm. 10 di diametro. A che altezza giungerà l'acqua?

66. Una lamina quadrata di latta avente il lato cm. 18, si taglia lungo l'arco di circonferenza avente il centro in un vertice e il raggio uguale al lato della lamina; col settore, che così si ottiene, si costruisce un cono. Qual'è l'altezza di questo e quale il volume?

67. Qual'è l'altezza di un cono, in cui il volume è di m^3 4 e la base di m^2 3,60?

68. Qual'è l'altezza di un cono in cui il volume è di m^3 3,077 e il raggio di base di m. 0,35?

69. Qual'è l'altezza di un cono il cui volume è di m^2 0,18865 e la circonferenza di base è di m. 1,54?

70. Qual'è il raggio della base di un cono, il cui volume è di m^3 20,944 e l'altezza di m. 5?

71. Qual'è il diametro della base di un cono di stagno alto m. 0,25 e pesante gr. 19,114? La densità dello stagno è 7,03.

72. L'altezza di un tronco di cono è di cm. 15 e i raggi delle basi sono di cm. 13 e di cm. 33. Si calcoli il lato del tronco.

73. Se in un tronco di cono circolare retto i raggi delle basi sono r_1, r_2 $(r_2 > r_1)$ ed l è il lato l'altezza h è data da

$$h = \sqrt{l^2 - (r_2 - r_1)^2}\,.$$

74. Qual'è la superficie laterale di un tronco di cono avente il lato di m. 3 e i raggi delle due basi di m. 2, e m. 2,08?

75. Qual'è la superficie totale di un tronco di cono avente l'altezza di m. 0,21 e i diametri delle basi di m. 0,19 e m. 0,91?

76. In un tronco di cono circolare retto il lato è di dm. 9,5, l'altezza dm. 6,8 e il raggio della base minore è di cm. 8. Si calcoli l'area della superficie totale del tronco.

77. Le basi di un tronco di cono circolare retto sono di dm^2 42 e dm^2 86; l'apotema del tronco è di dm. 15. Si calcolino l'altezza del tronco e la superficie laterale.

78. Un fumaiolo tronco conico in muratura è alto m. 22;

i raggi interno ed esterno della base sono rispettivamente di m. 1 e m. 1,20; quelli dell'apertura superiore sono di m. 0,30 e m. 0,45 rispettivamente. Calcolare la superficie interna e la esterna della muratura.

79. Il tetto di una torre rotonda è formato anzitutto da un tronco di cono, il cui raggio della base superiore è di m. 2,05 e la cui altezza è di m. 1, mentre poi l'apotema forma col raggio della base un angolo uguale a mezzo retto: e al disopra del tronco di cono appoggia un cono alto m. 5. Qual'è la superficie del tetto?

80. Qual'è il raggio della base inferiore di un tronco di cono, in cui la superficie laterale è di m^2 24,5, il lato è di m. 1,95 e il raggio della base inferiore è di m. 1,4?

81. Qual'è il volume di un tronco di cono, in cui le due basi hanno l'area rispettivamente di m^2 2,25 e m^2 1,41 e l'altezza è di m. 0,90?

82. Qual'è il volume di un tronco di cono, alto m. 2,1, e avente i raggi delle due basi di m. 0,63 e m. 0,42?

83. Calcolare in ettolitri la capacità di un tino alto m. 1,75 e in cui i diametri (interni) del fondo e della bocca sono rispettivamente di m. 1,90 e di m. 1,15.

84. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e l'altezza è doppia della media geometrica dei due raggi. Calcolare il volume del tronco di cono.

85. I raggi delle due basi di un tronco di cono sono di dm. 9 e dm. 4 e il lato è uguale alla somma dei raggi. Qual'è il volume del tronco di cono?

86. Calcolare il volume del tronco di cono circolare retto, che ha il lato di m. 3,75 e l'altezza di m. 2,5, sapendo che il lato del cono che si è tolto per ottenere il tronco è di m. 1,50.

87. Qual'è l'altezza di un tronco di cono di m^3 84, in cui le due basi sono rispettivamente di m^2 4 e m^2 12?

88. Un recipiente a forma di tronco di cono deve avere il diametro superiore di m. 0,24 e quello inferiore di m. 0,20 e deve avere la capacità di litri 12. Quale deve essere la sua profondità?

89. Per un punto esterno a una sfera passano infinite tangenti alla sfera le quali costituiscono un cono circolare avente per asse la retta congiungente il punto dato col centro della sfera, e il luogo dei punti di contatto è una circonferenza, sezione del cono perpendicolare all'asse.

90. Se la distanza dei centri di due sfere è maggiore della somma dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto comune e ciascuna delle sfere è esterna all'altra (cioè i punti dell'una sono esterni all'altra) e se la distanza dei centri di due sfere è minore della differenza dei raggi, le due sfere non hanno nessun punto comune e una di esse è interna all'altra.

91. Se la distanza dei centri di due sfere è uguale alla somma o alla differenza dei raggi, le due sfere hanno comune un punto ed uno solo appartenente alla retta dei centri e nel primo caso le due sfere sono esterne l'una all'altra, nel secondo una delle due sfere è interna all'altra (salvo il punto comune).

92. Se la distanza dei centri di due sfere è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, le due sfere hanno comune una circonferenza, il cui piano è perpendicolare alla retta dei centri delle sfere e il cui centro appartiene a codesta retta.

93. Qual'è il volume del cubo iscritto in una sfera di m^3 0,8 di volume?

94. Una sfera ha m. 3,08 di raggio; si domanda l'area di un cerchio massimo e quella della sfera.

95. Calcolare il raggio di un cerchio la cui area sia uguale a quella della superficie di una sfera di raggio di m. 3,6.

96. Qual'è la misura in miglia quadrate della superficie della Terra, tenuto conto che il suo equatore è lungo 5400 miglia geografiche.

97. Calcolare l'area della superficie interna ed esterna di una sfera cava avente lo spessore di cm. 3,5 e avente il diametro esterno di m. 1,05.

98. Una caldaia di forma cilindrica finisce a ciascuna delle sue estremità con un emisfero di cm. 40 di raggio. Il cilindro, avente lo stesso raggio, ha una lunghezza doppia del diametro. Qual'è l'area della superficie esterna della caldaia?

99. L'area di un cerchio minore di una sfera, la cui distanza dal centro è d, è data da $2\pi^2 a$: qual'è la superficie della sfera?

100. Calcolare l' area della superficie della sfera che passa per i vertici di un cubo la cui superficie totale è di dm^2 53.

101. Calcolare il lato di un cilindro circolare retto equilatero (cioè avente il lato uguale al diametro della base) la cui superficie laterale è uguale a quella di una sfera di m. 0,37 di raggio.

102. Calcolare la differenza fra l'area della superficie totale del cilindro circolare retto equilatero (cfr. es. prec.) circoscritto ad una sfera di dm. 4 di raggio e quella della superficie della sfera.

103. Come stanno fra loro la superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro della sfera e come raggio delle basi il raggio della sfera.

104. In che rapporto sta la superficie della Luna a quella della Terra, tenuto conto che la Luna, alla distanza di 60 raggi terrestri dalla Terra, è veduta da questa sotto un angolo di $\frac{1}{2}$ grado?

105. Qual'è lo spessore di una sfera cava, le cui superficie interna ed esterna hanno l'area di m^2 3 e m^2 3,12 rispettivamente?

106. Qual'è il volume di una sfera di m. 0,84 di raggio?

107. Qual'è il peso di una palla da bigliardo di avorio avente il diametro di cm. 8, se la densità dell'avorio è di 1,9?

108. Qual'è il volume di una sfera la cui superficie ha un'area di m^2 55,44?

109. Qual'è il volume di una sfera in cui la circonferenza massima è lunga m. 4,62?

110. Qual'è il volume di una sfera, in cui l'area del cerchio massimo è di m^2 6,16?

111. In quale rapporto stanno fra loro il volume della sfera di raggio r e quello del cilindro avente l'altezza $2r$ e il diametro $2r$? In quale rapporto stanno la superficie della sfera e la superficie totale del cilindro?

112. La densità media della Terra è di 5,44. Qual'è il peso della Terra in milioni di tonnellate? (Diametro terrestre medio = km. 12735).

113. Qual'è il volume della crosta terrestre, il cui spessore si considera uguale a $\frac{1}{100}$ del raggio?

114. Qual'è il volume dello stato atmosferico che avviluppa la Terra, e che si calcola sia uguale a $\frac{1}{60}$ del raggio terrestre?

115. La Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere, hanno diametri che stanno fra loro come r, $108r$, $0{,}27r$ e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60r$.

Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

116. Qual'è il peso di una palla di legno di m. 0,2 di diametro, per la quale si è verificato che, quando si getta nell'acqua, il livello del liquido segna sulla palla una circonferenza massima?

117. Un cubo ed una sfera hanno entrambi la superficie di m^2 2,4: qual'è il rapporto fra i due volumi?

118. In che rapporto stanno i diametri di due sfere della stessa sostanza, delle quali l'una pesi il doppio dell'altra?

119. Qual'è il raggio di una sfera di dm^3 173 di volume?

120. Qual'è l'area di una sfera di 1 m^3 di volume?

121. Qual'è l'area di uno dei cerchi massimi di una sfera di cm^3 14 di volume?

122. Si determini il calibro di un cannone, i cui proiettili sferici di ferro pesano 6 chilogrammi. (Si ricordi che il peso specifico del ferro è 7,25).

123. In un vaso cilindrico di cm. 68 di diametro, riempito in parte d'acqua, si buttano 80 palline uguali. Il livello dell'acqua si innalza di cm. 20. Qual'è il diametro di ciascuna pallina?

124. Si fondono tre sfere metalliche aventi il diametro di dm. 2, dm. 8, dm. 4 rispettivamente, per costruirne una sfera unica. Quale sarà il diametro di questa?

125. Una sfera cava ha un raggio esterno di cm. 43 e uno spessore di cm. 4. Quale sarà il raggio di una sfera massiccia, avente il medesimo?

126. Con cm^3 125 di metallo si deve costruire una sfera cava, il cui raggio interno sia di cm. 20. Quale sarà la superficie esterna della sfera?

127. Qual'è lo spessore di una bolla di sapone, avente il diametro di cm. 15, ottenuta da una goccia (sferica) di acqua saponata, il cui diametro è di mm. 2?

128. Si è costruita in argento battuto una sfera cava, il cui diametro esterno è doppio dell'interno. Quali sono codesti diametri se il peso della sfera è di kg. $38\,^1/_2$? (Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$ e si assuma per il peso specifico dell'argento battuto il valore di $10\,^1/_2$).

129. Qual'è l'area di una calotta appartenente ad una sfera di m. 2,10 di raggio e avente l'altezza di m. 0,8?

130. Qual'è l'altezza di una calotta di m^2 3 su di una sfera di m. 1 di raggio?

131. La lunghezza della circonferenza della sezione di una sfera in un piano distante dal centro di m. 1,2 è di dm. 5,3. Calcolare l'area della superficie della sfera e della calotta più piccola.

132. Considerando il nostro globo come una sfera di km. 12,735 di diametro, calcolare:

1° l'area della superficie della Terra;

2° l'area della superficie della zona torrida che ha km. 5094 di altezza;

3° l'area della superficie delle zone glaciali, aventi ciascuna km. 509 di altezza;

4° l'area delle due zone temperate.

133. Posto che la pressione dell'aria su ciascun cm^2 è di gr. 1,026, qual'è la forza (calcolata in kg.) necessaria per separare due emisferi di Magdeburgo di cm. 6 di raggio?

134. Su di una stessa sfera o su sfere uguali, zone corrispondenti a segmenti sferici di altezze uguali, hanno superficie uguali.

135. Le zone, che due sfere concentriche intercettano sulle sfere passanti pel centro comune di esse, hanno superficie uguali.

136. L'area di una calotta sferica è di m^2 2,85; si domanda l'area della sfera corrispondente, posto che la calotta è alta m. 0,45.

137. Quale altezza si deve dare ad una zona, appartenente ad una sfera di m. 9 di raggio, perchè la sua area sia m^2 169,6464?

138. Su di una sfera ai m. 1,3 di raggio, si considera una zona la cui base maggiore è alla distanza di m. 0,50 dal centro. Si determinino le aree della zona è di m^2 12.

139. Data una sfera di m. 1,20 di raggio si conducono da una parte e dall'altra del centro due piani paralleli, distanti ciascuno m. 0,90 dal centro. Qual'è il volume del segmento sferico così determinato?

140. L'altezza di una calotta è di m. 0,25 e il raggio della sfera è di m. 0,84. Qual'è il volume del segmento corrispondente?

141. Qual'è il peso di una palla di legno di 36 cm. di diametro, che gettata nell'acqua vi si immerge per 6 cm.?

142. Una sfera il cui raggio è di cm. 28 gettata nell'acqua a 4° vi si immerge per cm. 35. Qual'è il peso specifico del corpo di cui è costituita la sfera?

143. Una cassula, il cui interno ha forma di calotta ed è fondo m. 12, contiene piena 38 gr. di mercurio (peso specifico = 13,6). Qual'è la superficie interna?

144. Un settore circolare avente il raggio di m. 0,60 e l'angolo al centro di 30°, ruota intorno a uno dei suoi lati rettilinei. Calcolare la superficie totale del settore sferico che così si ottiene.

145. Una sfera di m. 1 di raggio è divisa in due calotte da un piano che dista dal centro dm. 4. Calcolare il volume dei segmenti sferici corrispondenti alle due calotte.

Def. — Si dice *fuso sferico* ciascuna delle due parti in cui una superficie sferica è divisa da due semicirconferenze massime, aventi il diametro comune. I due semipiani uscenti da codesto diametro e contenenti le due semicirconferenze massime, definiscono due diedri (uno convesso e l'altro concavo) che si dicono i *diedri del fuso*.

146. L'area di un fuso sferico si ottiene moltiplicando l'area della superficie sferica per il quoziente dell'ampiezza del diedro corrispondente al fuso per 360.

Def. — Si dice *spicchio sferico* la parte di solido sferico compresa fra due semipiani uscenti da uno stesso diametro. Lo spicchio è limitato da un fuso e da due semicerchi massimi. Il diedro dei due semipiani si dice *diedro dello spicchio*.

147. Il volume dello spicchio sferico è dato dal prodotto del volume della sfera per il rapporto dell'ampiezza del diedro dello spicchio a 360.

148. Qual'è il volume di uno spicchio sferico appartenente ad una sfera di dm. 12 di raggio e corrispondente ad un angolo di 51°39′45″?

149. Qual'è il volume di uno spicchio sferico, appartenente ad una sfera di m^3 1 di volume e corrispondente ad un angolo di 25°?