Enriques, Federigo

Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXI** (1912), pp. 14-17.

Ciò posto, eguagliamo le due espressioni (14) ed (11) di M. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $\frac{1}{2}\frac{c^2}{x_2-x_1}$, si ha subito

$$\frac{1}{x_2-x_1}\frac{1}{2}\int_{L'} c^2\beta^2\,dL = \frac{1}{2}c^2\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx - \frac{q}{c}\right\} - \frac{1}{2}c^2\frac{N}{x_2-x_1}.$$

Al crescere indefinito dell'intervallo $x_2 - x_1$, la quantità in parentesi converge verso $\frac{1}{2}c^2\left(h-\frac{q}{c}\right)$, mentre l'ultimo termine ha per limite zero.

Anche il primo membro converge dunque verso un limite ben determinato τ: e questo (ricordando che $\beta^2 c^2$ rappresenta la velocità assoluta) dimostra che esiste un valore medio (in senso asintotico) dell'energia cinetica del moto ondoso per unità di lunghezza (e di larghezza) del canale. Di più sussiste la relazione notevole

$$\tau = \frac{1}{2}c^2\left(h-\frac{q}{c}\right). \tag{15}$$

Nel caso di onde periodiche, τ si identifica naturalmente coll'energia cinetica di un'onda, divisa per la lunghezza d'onda.

Botanica. — *Ricerche sulla morfologia e sull'accrescimento dello stipite delle Palme*. Nota preventiva del Socio A. Borzì e del dott. G. Catalano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*. Nota del Corrispondente F. Enriques.

1. In una Nota, che ho avuto l'onore di presentare all'Accademia nella seduta del 2 decembre 1906 (1) ho dimostrato che le superficie possedenti infinite trasformazioni birazionali in sè contengono in generale un fascio di curve ellittiche, le sole eccezioni appartenendo alla famiglia delle rigate o a quella delle superficie coi generi $p_a = p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 1$. Per contro ho fatto notare che ogni superficie contenente un fascio di curve ellittiche C ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, *purchè esistano due curve secanti le* C *in gruppi di punti i cui multipli non sieno equivalenti*. L'esame delle condizioni a cui conduce siffatta ipotesi (esame ch'io

(1) *Sulle superficie algebriche, che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend., vol. XV, ser. 5ª, pag. 665.

proseseguivo allora in rapporto alla base della superficie considerata dal sig. Severi), fu da me rimandato ad altra occasione. Oggi ritornando sul problema, e limitandomi per ora al caso in cui il fascio delle C sia lineare, sono pervenuto ad una conclusione inaspettata:

Ogni superficie contenente un fascio lineare di curve ellittiche C di ordine n, possiede infinite curve secanti le C in gruppi di n punti non equivalenti ed i cui multipli sono pure non equivalenti; per conseguenza ammette una serie discontinua di trasformazioni birazionali in se stessa.

2. Premettiamo alcune osservazioni sulle curve ellittiche.

Quando sopra una curva ellittica C è *dato* un gruppo di n punti G_n si può costruire razionalmente in funzione di esso:

1) la serie lineare completa g_n^{n-1} a cui il G_n appartiene;

2) un qualsiasi multiplo $g_{rn}^{rn-1} (= rg_n)$ della serie anzidetta.

In generale non è possibile costruire razionalmente altre serie ed in ispecie serie g_m di grado $m < n$. Così le superficie ellittiche di determinante n $(p_a = -1, p_g = 0)$ [1] porgono esempio di superficie contenenti un fascio lineare di curve ellittiche, tutte identiche fra loro, sopra le quali non si può determinare (razionalmente) un gruppo di $m < n$ punti.

Se la curva ellittica C è data proiettivamente come curva d'un certo ordine m, per es. nel piano, la serie g_m segata su di essa dalle rette deve considerarsi come *data*. Allore se è dato anche un gruppo G_n, non appartenente a quella, si possono costruire razionalmente anche

3) le serie

$$rg_n + sg_m,$$

dove r, s ricevono valori positivi o negativi tali che

$$rn + sm > 0.$$

Pertanto se sopra una curva ellittica C si suppone *dato* unicamente un gruppo G_n, bisogna supporre che la curva C stessa sia proiettivamente data mediante una serie multipla di g_n, cioè che la C sia d'un certo ordine rn, con r intero ≥ 1, e che G_n sia il gruppo dei punti di contatto d'una retta (o d'un piano ...) avente n contatti r-punti colla curva.

In particolare quando si parlerà di una curva ellittica su cui è dato razionalmente *un* punto, si dovrà riferirsi a una curva C_n d'un certo ordine n che apparterrà ad uno spazio S_{n-1} o sarà proiezione di una siffatta curva normale, sulla quale il punto dato sia il punto di contatto d'un iperpiano n tangente. Sarà in nostro arbitrio di fissare il valore di n, e — prendendo $n = 3$ — si potrà avere *in funzione razionale del punto dato* una trasformazione della nostra curva in una *cubica su cui è dato un flesso.*

Data una curva ellittica e sopra di essa un punto qualsiasi è sempre possibile trasformarla in una cubica su cui è dato un flesso, *senza aggiunta*

[1] Cfr. F. Enriques, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XX, 5 marzo 1905.

d'irrazionalità numeriche. Invece data una cubica con un flesso, ogni trasformazione di questa che conduca per es. ad una nuova cubica su cui sia dato un punto non di flesso, richiede operazioni irrazionali sui coefficienti dell'equazione della curva e sulle coordinate del punto dato.

Così appare che sopra una curva ellittica su cui è dato un punto non è possibile *in generale* costruire razionalmente un altro punto.

3. Ora suppongasi data una superficie F contenente un fascio lineare di curve ellittiche C, ed una curva K unisecante le C. In base alle osservazioni precedenti si può sempre trasformare le C in cubiche su cui è dato un flesso, e poichè questa trasformazione si compie *razionalmente* per ogni C, *essendo data la* K, così si riesce a trasformare birazionalmente la superficie data in una F_n d'un certo ordine n con retta $(n-3)$pla e con un punto $(n-2)$plo su questa, costituente un flesso per le cubiche C. Si può anche supporre che la retta $(n-3)$pla sia tangente di flesso per tutte le cubiche C.

Dal punto $(n-2)$plo la superficie si lascia proiettare sopra un piano doppio con curva di diramazione D d'un certo ordine $2m$ dotata d'un punto $(2m-3)$plo 0.

Consideriamo, in questo piano, le curve d'ordine p passanti $p-1$ volte per 0; esse formano un sistema lineare di dimensione

$$\frac{p(p+3)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}=2p\,.$$

Una di esse, interseca D nel punto 0 contato $(2m-3)\,(p-1)$ volte e in

$$2mp-(2m-3)\,(p-1)=2m+3(p-1)$$

punti variabili; se p è dispari, e quindi $p-1$ è pari, in 0 non cadono punti di diramazione della curva doppia L. Inoltre per ogni contatto che L abbia con D, spariscono 2 fra i $2m+3(p-1)$ punti di diramazione. Se si hanno $m+\frac{3(p-1)}{2}$ contatti, cioè se la L tocca la D ovunque la incontra, l'immagine di L sulla superficie F_n dovrà spezzarsi in due curve unisecanti le C. La determinazione di una L per cui ciò avvenga importa

$$m+\frac{3(p-1)}{2}$$

equazioni, provenienti dalla bisezione dei periodi delle funzioni abeliane relative a D; a codeste equazioni si può soddisfare certo in un numero finito di modi se si prende

$$2p=m+\frac{3(p-1)}{2}$$

cioè

$$p=2m-3\,.$$

Per tal guisa si determinano dunque sopra F_n due curve unisecanti le C, ed è facile vedere che — considerando una qualunque di esse L_1 — il punto che L_1 determina sopra una C generica è tale che un suo multiplo qualsiasi non è equivalente all'equimultiplo del flesso dato, giacchè in corrispondenza alle tangenti ad L in O si hanno curve ellittiche C su cui i due punti vengono a coincidere, il che importa che la differenza dei valori dell'integrale ellittico C nei due nominati punti non possa essere sempre uguale ad una frazione di periodo, al variare di C.

In conclusione, se una superficie F contiene un fascio lineare di curve ellittiche C ed una curva unisecante le C, si può costruire una seconda unisecante, per modo che i punti segati dalle due unisecanti sopra una C generica sieno disequivalenti insieme coi loro multipli.

4. Si abbia ora una superficie F contenente un fascio di curve ellittiche C ed una curva K secante le C in un certo numero n di punti, per modo che su ogni C venga *data* una g_n^{n-1}.

Siamo in questo caso se per es. le curve C sono d'ordine n.

Consideriamo tutte le g_n^{n-1} di una curva ellittica C. Esse costituiscono gli elementi (punti) d'un ente ellittico C', che può ritenersi come una curva nascente da C per mezzo di una nota trasformazione.

Alla serie g_n che si suppone data sulla C corrisponde un punto razionalmente dato su C'.

Al variare di C, C' varia pure e descrive un ente algebrico a due dimensioni o superficie F', contenente un fascio lineare di curve ellittiche C' ed una curva K' unisecante le C'.

In forza del n. 3 si può determinare su F' una seconda unisecante L', e così si riesce a determinare sopra ogni C *un'altra* serie $\overline{g}_n$ disequivalente alla data g_n, ed anzi tale che due multipli delle anzidette serie non sono equivalenti.

Tanto basta perchè sopra ogni C venga razionalmente determinata una trasformazione birazionale non ciclica

$$A' = A + g_n - \overline{g}_n ,$$

e quindi perchè si ottenga una trasformazione birazionale non ciclica della superficie F. c. d. d.