Enriques, Federigo

Sopra una involuzione non razionale dello spazio

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXI** (1912), pp. 81-83.

tata nel senso del contorno circolare devonsi gli stipiti sottili canniformi di *Chamaedorea*, *Geonoma*, *Bactris*, *Hyospathe*, ecc., come ad una attività preponderante nel senso longitudinale si devono quelli ampiamente articolati dei *Cocos*, delle *Archontophoenix*, delle *Howeae*, dei *Calamus*, ecc.

Il caso singolare della *Sabal Adansonii* che abbiamo testè illustrato, costituisce, a parer nostro, la riprova sperimentale del principio anzidetto, già intravisto per la prima volta dal nostro insigne Delpino, in quanto che con meravigliosa evidenza risalta la origine del rizoma di questa Palma e di simili formazioni in altre specie, origine riferibile a quella di un vero simpodio, di cui le articolazioni sono manifestamente di natura fogliare e precisamente vanno attribuite ad incremento seguito da concrescenza delle basi degli organi di cui è parola. Codesta dimostrazione porge elementi sicuri per la interpretazione del caso comune e normale degli stipiti cilindrici a sviluppo simmetrico; ci sembra quindi di potere affermare che le Palme, queste grandi colonie di foglie, di cui Linneo mirabilmente intuì la natura, definendole: « Mira est singularis ... familia, quae, si ipsam planctam spectes, nec arbor, nec frutex, nec suffrutex, nec herba est » siano l'esempio più bello ed evidente che possa portarsi alla teorica delpiniana del fillopodio.

Matematica. — *Sopra una involuzione non razionale dello spazio.* Nota del Corrisp. FEDERICO ENRIQUES.

1. Un noto teorema del sig Lüroth dice che « *le involuzioni sopra la retta sono razionali* ». Il sig. Castelnuovo ha esteso questo teorema al caso di due variabili, dimostrando la « *razionalità delle involuzioni piane* ».

Si è cercato lungamente di fornire una dimostrazione generale del teorema, applicabile al caso di $n > 2$ variabili; ma i tentativi fatti sono riusciti infruttuosi.

In questa Nota risolvo negativamente la questione costruendo una *involuzione non razionale nello spazio a 3 dimensioni*. Risulta dunque che:

Essendo data un'equazione algebrica

$$f(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n) = 0,$$

con $n > 3$, *e supposto che l'equazione stessa sia risolubile per mezzo di funzioni razionali non invertibili di* $n-1$ *variabili:*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1 \ldots u_{n-1}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \varphi_n(u_1 \ldots u_{n-1}), \end{cases}$$

non è possibile in generale ottenere una nuova risoluzione della $f = 0$ *per mezzo di funzioni razionali invertibili.*

L'esempio che fornisce la prova dell'affermazione precedente mi è porto dalla nota varietà V_6 del 6° ordine di S_5, intersezione di due varietà degli ordini 2, 3.

Già il sig. Fano [1], mediante un'analisi profonda, ha provato che codesta varietà (immagine del complesso cubico di rette) è in generale *non razionale*. Io dimostro qui che essa può essere rappresentata sopra una involuzione dello spazio S_3.

2. Consideriamo la varietà V_6, a 3 dimensioni, dello spazio S_5, intersezione di una quadrica Q e di una varietà cubica. Ci sono sopra V_6 due sistemi ∞^3 di linee piane, cubiche, C, sezioni dei piani appartenenti a Q, i quali formano appunto due sistemi Σ, Σ'.

Consideriamo le C segate dei piani di Σ. Le C di questo sistema passanti per un punto A di V_6 costituiscono una serie razionale, che viene razionalmente rappresentata sopra una retta, senza aggiunta di irrazionalità dipendenti dal punto A, come si vede mercè la rappresentazione kleineiana di V_6 nello spazio rigato, dove ai piani di Σ corrispondono i punti di questo spazio.

Ora sopra ogni C per A si può determinare razionalmente *un* punto, cioè il tangenziale di A; al variare di C questo punto descrive una curva razionale, K, passante per A con una certa molteplicità, che si trova facilmente essere 4. Ripetiamo la costruzione a partire da un punto A variabile su V, e avremo infinite curve razionali K generanti una superficie razionale F. Ripetiamo ancora la costruzione facendo variare A su F, ed otterremo ∞^2 curve razionali K che invaderanno tutta la varietà V_6. Queste K si possono riferire birazionalmente alle rette di una stella data in S_3. Per tal modo ad ogni punto di S_3 corrisponderà *un* punto di V_6, ma viceversa ad un punto di V_6, corrisponderanno *più* punti di S_3, e i gruppi di punti analoghi (al variare del punto corrispondente su V_6) genereranno in S_3 una involuzione.

Dunque la varietà V_6 si può rappresentare sopra una involuzione di S_3, la quale risulta non razionale. c. d. d.

3. Come è stato notato dal sig. Noether (e successivamente da me) la *varietà cubica generale* V_3 di S_4 si può rappresentare sopra una involuzione di coppie di punti in S_3. Il teorema sopra stabilito rende assai probabile che la V_3 *non sia razionale*. A questa convinzione io sono giunto da qualche anno per mezzo di un procedimento che aspetta ancora di essere rigorosamente dimostrato, e che si basa sulle considerazioni seguenti:

1) Se la V_3 è razionale esiste una sua rappresentazione su S_3 che non degenera quando la V_3 acquista un punto doppio.

[1] *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* Atti Accad. di Torino, 1908.

2) In tale ipotesi il sistema delle superficie cubiche di S_3 passanti per una sestica di genere 4, si può considerare come limite di un sistema lineare d'ordine $n > 3$, rappresentativo della V_3 generale, e quindi esiste una superficie (riducibile o irriducibile) d'ordine $n - 3$, che sommata alle cubiche suddette, dà luogo a superficie (connesse) di genere 0. Il che è impossibile.

Chimica. — *Interessante decomposizione di alcune ossime.* Nota del Socio A. Angeli.

Recentemente, nell'eseguire una determinazione di azoto sopra l'ossima del benzofenone, già nota da lungo tempo e che preparammo allo scopo di identificare questo chetone, ho osservato che quando il calore si avvicina a quella parte del tubo dove l'ossido di rame è mescolato alla sostanza, questa d'un tratto si decompone con improvviso sviluppo gassoso. In sulle prime ho creduto che la determinazione fosse andata perduta, ma invece i numeri trovati corrisposero esattamente a quelli richiesti dalla teoria.

Ho voluto perciò esaminare come si comportasse la sostanza da sola, al riscaldamento, ed ho potuto accertare che anche in tubo da saggio, verso la temperatura di 180°, essa si decompone nello stesso modo.

Il gas che si sviluppa è azoto; nello stesso tempo si forma ammoniaca e rimane indietro benzofenone puro. Senza dubbio la reazione si potrà rappresentare per mezzo dell'eguaglianza:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>\!C:NOH = \begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>\!CO + NH$$

ed il residuo NH si scinderà successivamente in azoto ed ammoniaca:

$$3\,NH = N_2 + NH_3\,.$$

Si comprende subito che la trasposizione di Beckmann delle ossime è in stretto rapporto con la nuova trasformazione:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>\!C:NOH = \begin{matrix} C_6H_5\,.\,CO \\ | \\ C_6H_5\,.\,NH \end{matrix}$$

La sola differenza risiede nel fatto che il residuo NH invece di staccarsi dalla molecola, va a porsi fra il carbonile ed un residuo benzolico; in tutti e due però ricompare il carbonile primitivo.