Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili

Atti Acc. Sci. Torino **XLVII** (1912), pp. 300-307.

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
(ANNO 1911-1912)

SUI

MODULI D'UNA CLASSE DI SUPERFICIE ALGEBRICHE

E SUL

TEOREMA D'ESISTENZA

PER LE

FUNZIONI ALGEBRICHE DI DUE VARIABILI

NOTA

del Socio corrispondente
FEDERIGO ENRIQUES
A. BOLOGNA.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei Reali Principi.
1912

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* Vol. XLVII.
Adunanza del 14 Gennaio 1912.

1. Moduli d'una classe di curve di genere p. — I moduli di una classe di curve algebriche di genere p si possono determinare nei due modi che seguono:

1) *Mediante il teorema d'esistenza (di Riemann) per le funzioni algebriche d'una variabile.*

Presi sulla retta (o nel piano d'una variabile complessa) $2n + 2p - 2$ punti di diramazione, si può costruire (in diversi modi il cui numero è stato determinato dal sig. Hurwitz) una superficie di Riemann ad n fogli, a cui corrisponde una *curva* C_p di genere p con una $g_n{}'$. I $2n + 2p - 2$ punti di diramazione danno luogo a

$$2n + 2p - 5$$

birapporti indipendenti. Ma, supposto per semplicità $n > 2p - 2$ si hanno su una C_p ∞^p $g_n{}^{n-p}$ e quindi

$$\infty^{2n-p-2}$$

$g_n{}'$. Perciò la costruzione anzidetta conduce a determinare

$$2n + 2p - 5 - (2n - p - 2) = 3p - 3$$

costanti che, se la C_p non possiede trasformazioni in sè, corrispondono a C_p birazionalmente distinte. Si hanno quindi, per $p > 1$,

$$3p - 3$$

moduli.

Enriques. *

2) *Valutando la dimensione della serie continua delle curve piane di dato ordine con un dato numero di punti doppi.*

Si considerino le curve piane d'ordine n e genere p, aventi

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi. La serie continua di queste determina sopra una di esse, C_n^p, una serie lineare *caratteristica* (nel senso di SEVERI), i cui gruppi vengono segati dalle curve infinitamente vicine a C_n^p. La detta serie è completa e non speciale equivalendo alla serie segata su C_n^p dalle curve aggiunte d'ordine n; la sua dimensione vale dunque

$$n^2 - 2\delta - p = 3n - 2 + p\,;$$

e pertanto la serie delle C_n^p ha la dimensione

$$3n - 1 + p.$$

Ma supposto per semplicità $n > 2p - 2$, ad una C_n^p appartengono ∞^p serie g_n^{n-p}, ognuna delle quali contiene

$$\infty^{3(n-p)-3}$$

$g_n{}^2$; e ciascuna di tali $g_n{}^2$ dà luogo a

$$\infty^8$$

curve piane C_n^p proiettivamente identiche. Se ne deduce che vi sono

$$3n - 1 + p - (p + 3(n-p) - 6 + 8) = 3p - 3$$

costanti che, se le curve C_n^p non possiedono trasformazioni in sè, corrispondono a curve birazionalmente distinte. Così di nuovo si ritrovano i $3p - 3$ *moduli* da cui dipende una classe di curve di genere $p > 1$.

E confrontando i resultati ottenuti per le due vie se ne trae anche una dimostrazione elementare del teorema d'esistenza almeno nel senso che " *esistono funzioni algebriche ad* n *rami, di genere* p, *aventi* 2n + 2p — 2 *punti di diramazione arbitrariamente assegnati* ".

Seguendo la via sopra indicata si può anche fornire una semplice dimostrazione algebrico-geometrica del fatto che: *Le curve di genere* p *formano una sola famiglia irriducibile, che* (*per* p > 1) *è composta di* ∞^{3p-3} *classi distinte.*

Si supponga che la proposizione sia dimostrata per un certo valore di p; si dimostrerà che essa sussiste per le curve di genere $p+1$. Siccome la proposizione si verifica subito per i primi valori di p (e già per $p=1$, salvo che vi sono $3p-2=1$ invece che $3p-3=0$ moduli), così essa sarà stabilita in generale.

Nell'ipotesi che abbiamo ammesso, le curve piane C_{2p}^p d'ordine $2p$ e genere p, formano una serie continua irriducibile Σ_p. Ora questa serie è contenuta in quella, Σ_{p+1}, delle curve piane C_{2p}^{p+1}, d'ordine $2p$ e genere $p+1$, le quali hanno un punto doppio di meno. Se la nuova serie fosse riducibile, cioè composta di un certo numero > 1 di serie distinte. in ciascuna di queste si avrebbero delle curve con un punto doppio di più, e però ci sarebbero diverse serie di C_{2p}^p, contrariamente all'ipotesi fatta.

Invero è facile riconoscere che due serie complete, distinte, di curve piane C_{2p}^{p+1} con $\delta = 2(p-1)^2 - 2$ punti doppi, non potrebbero aver comune la serie, Σ_p, delle C_{2p}^p con $\delta+1$ punti doppi. A tale scopo si osservi che partendo da una C_{2p}^p con $\delta+1$ punti doppi, e scegliendo uno di questi da riguardarsi come virtualmente inesistente, si determina *una* serie completa di C_{2p}^{p+1} a cui C_{2p}^p appartiene; ma due serie così costituite, in corrispondenza a due punti doppi diversi di C_{2p}^p, coincidono, perchè — facendo variare per continuità C_{2p}^p entro il sistema Σ_p — i due punti doppi suddetti si possono far coincidere in un tacnodo e quindi si possono scambiare fra loro.

Ne risulta stabilita la proposizione enunciata.

2. Moduli d'una classe di superficie. — Passo al problema dei moduli per le superficie, del quale problema già mi sono occupato in una Nota del 1908 (*).

In mancanza di un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, è naturale di cercare di estendere il

---

(*) *Sui moduli delle superficie algebriche*, " Rendic. Accad. dei Lincei ", 6 gennaio 1908.

secondo fra i procedimenti indicati innanzi. Anzi quel procedimento non è che l'applicazione al caso delle curve del metodo che fui condotto ad immaginare per il calcolo dei moduli delle superficie, nella mia Nota citata.

L'uso di codesto metodo conduce al resultato che una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$ (non appartenente alla famiglia delle rigate) dipende da

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

moduli; $\theta \geq 0$ ha il seguente significato: essendo $|C|$ un qualsiasi sistema lineare irriducibile, puro, ∞^3, sopra la superficie, vi sono in generale sopra una curva C_j, jacobiana d'una rete contenuta in $|C|$, dei punti neutri, formanti un gruppo G, che sono doppi per ∞' curve C del sistema ∞^3; ora si consideri il sistema completo $|3C + C'|$ che ha come punti base i punti di G; θ designa la sovrabbondanza di questo sistema.

Nel caso di superficie regolari di genere $p_a = p_g = p > 3$, a sistema canonico irriducibile, si ha

$$\theta = p + \theta'$$

con

$$\theta' \geq 0,$$

e però

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta'.$$

Facendo l'ipotesi $\theta' = 0$ si ottiene così il numero dei moduli a cui il sig. Noether (*) fu condotto dall'applicazione delle formule di postulazione; sicchè viene dimostrato che codesto numero vale almeno come un limite inferiore.

3. Moduli dei piani multipli. — Ora *supponiamo* che si abbia un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, il quale assegni le condizioni perchè una curva piana sia curva di diramazione d'un piano multiplo, n-plo. Da questa semplice ipotesi dedurremo di nuovo il calcolo dei moduli

---

(*) *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen*, "Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin", 1888.

da cui dipende una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$; e il confronto col resultato già stabilito innanzi ci permetterà di trarne un' effettiva conclusione intorno allo stesso teorema di esistenza.

Poniamo dunque che una superficie F_n, d'ordine n, senza curve eccezionali, a sezioni piane, di genere π, formanti un sistema regolare $|C|$, venga proiettata sopra un piano n-plo con curva di diramazione K_{2m} d'ordine

$$2m = 2n + 2\pi - 2.$$

Aggiungiamo anzi l'ipotesi semplificativa che $|C|$ contenga il sistema canonico di F. La K_{2m} possiederà in generale δ nodi e h cuspidi, dove

$$\delta = \frac{1}{2}\left[(n + 4\pi + 12p_a - p^{(1)} + 9)^2 - 3n - 78\pi - 84p_a + p^{(1)} - 7\right]$$
$$h = 3n + 18\pi + 3p^{(1)} - 12p_a - 33 \text{ (*)}.$$

Il sistema $|C|$, di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1\,,$$

sarà contenuto in una serie di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari analoghi; in corrispondenza alle reti contenute in siffatti sistemi (ognuna delle quali può essere riferita al piano in ∞^8 proiettività), si otterranno

$$\infty^{3r+2+p_g-p_a}$$

piani multipli, aventi curve di diramazione d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, e appartenenti ad uno stesso sistema continuo $\{K_{2m}\}$ colla K_{2m} suddetta.

Ora cerchiamo di valutare la dimensione del sistema continuo completo $\{K_{2m}\}$, formata dalle curve piane d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, a cui appartiene K_{2m}. Perciò si dovrà considerare la serie caratteristica determinata su K_{2m} dalle curve infinitamente vicine di $\{K_{2m}\}$.

(*) Le espressioni di δ e h risultano da note formule di Zeuthen-Noether e Severi. Cfr. Severi, " Atti Accad. di Torino ", 15 giugno 1902.

Questa serie caratteristica (completa) è definita dalle curve d'ordine $2m$ aggiunte a K_{2m} e toccanti nelle h cuspidi le relative tangenti cuspidali di quella curva; il suo grado vale

$$3n + 6\pi + 12p_a - p^{(1)} + 8.$$

Il genere di K_{2m} essendo

$$x = p^{(1)} + 9\pi - 9 ,$$

la dimensione della suddetta serie sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 16 + \omega ,$$

designando ω l'indice di specialità della serie stessa; e la dimensione del sistema $\}K_{2m}\{$ sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega .$$

Se ogni curva del sistema, soddisfacente ad y condizioni, è curva di diramazione di un piano n-plo, si trova così una famiglia di superficie analoghe ad F, di dimensione

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y ;$$

tra queste ci sono

$$\begin{aligned} 3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y - (3r + 2 + p_g - p_a) = \\ = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \omega - y \end{aligned}$$

superficie birazionalmente distinte.

Cerchiamo di valutare ω! A questo scopo riflettiamo che alla curva K_{2m} corrisponde su F la jacobiana C_j di una rete di sezioni piane (appartenente al sistema $|2C + C'|$), la qual curva C_j è segata su F da una superficie polare; le superficie polari analoghe passanti per i punti cuspidali (*pinch-points*) di F, che sono i punti neutri di $|C|$ su C_j, segano su C_j una serie che viene proiettata in quella segata su K_{2m} dalle curve polari di ordine $2m - 1$; e perciò la serie segata su K_{2m} dalle curve aggiunte d'ordine $2m$ è la proiezione di quella segata in C_j dalle curve di $|3C + C'|$ passanti pel gruppo G dei punti neutri considerati. — Siccome (nelle ipotesi fatte) $|3C+C'|$ sega su C_j una serie non speciale, si deduce che ω equivale alla sovrabbondanza θ del sistema delle curve di $|3C+C'|$ passanti per i punti di G.

Dunque il numero dei moduli della classe di superficie, calcolato per questa via, risulta

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta - y\,.$$

4. Intorno ad un teorema d'esistenza. — Confrontiamo le due espressioni ottenute per il numero M nei n[i] 2, 3; si deduce che

$$y = 0.$$

E pertanto si conclude che: *Se la curva piana* K_{2m} *d'ordine* 2m, *con* δ *nodi e* h *cuspidi, è curva di diramazione di un piano* n*-plo ottenuto per proiezione di una superficie* F *d'ordine* n (sotto le ipotesi semplificative di natura non essenziale adottate riguardo al sistema delle sezioni piane di F), *tutte le curve piane dello stesso ordine* 2m, *fornite parimente di* δ *nodi e* h *cuspidi, e appartenenti con* K_{2m} *ad uno stesso sistema continuo, sono pure curve di diramazione di analoghi piani* n*-pli.*

Questa conclusione suggerisce l'idea che valga un *teorema d'esistenza* enunciabile come segue: " le condizioni perchè una curva piana di un dato ordine sia curva di diramazione d'un piano n-plo (con dati caratteri p_a, p_g, $p^{(1)}$ ...) consistono in ciò che la curva stessa possieda un certo numero di nodi e un certo numero di cuspidi ".

Ad una conclusione siffatta si sarebbe condotti dall'ipotesi che " le curve piane di dato ordine con un dato numero di nodi e di cuspidi formino in generale *una sola* serie continua irriducibile ". Ma approfondendo lo studio della questione si scopre invece che la totalità delle curve piane soddisfacenti alle condizioni indicate si spezza in generale *in più serie continue.* Ciò risulta già indirettamente dall'osservare che: *Le superficie con dati caratteri* p_a, p_g, $p^{(1)}$ *danno luogo in generale a diverse famiglie irriducibili, distinte fra loro per diversi caratteri numerici.*

Infatti si considerino le curve gobbe di dato ordine n e genere p; secondo HALPHEN e NOETHER esse si distribuiscono in generale in diverse famiglie irriducibili C, K... Ora si può determinare un ordine m così elevato che esistano superficie regolari d'ordine m passanti doppiamente per C, K... — Queste superficie avranno gli stessi caratteri $p_a = p_g$, $p^{(1)}$, ma apparterranno a famiglie distinte.

5. Conclusione. — Quale conclusione si può trarre dunque dalle considerazioni che precedono?

Affinchè una curva piana di dato ordine $f(xy) = 0$ sia curva di diramazione d'un piano multiplo n-plo con dati caratteri, occorrerà in generale non soltanto che essa possieda un dato numero di nodi e di cuspidi, ma anche che soddisfi a *certe condizioni di natura aritmetica* che non diminuiscono il numero dei moduli della classe di superficie corrispondente.

Questa conclusione pone in luce il carattere del *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili. A prima vista la ricerca d'un teorema siffatto apparirebbe molto difficile. Ma un esame diretto della questione mostra il modo di superare la difficoltà *mediante l'analisi del gruppo di monodromia della funzione algebrica* y (x). Per questa via si è condotti a stabilire effettivamente il *teorema d'esistenza* di cui sopra si è discorso, come mostrerò in un altro lavoro.