Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XVI** (1912), pp. 70-73.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

FEDERIGO ENRIQUES

Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali

NOTA

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna
nella Seduta ordinaria del 14 Gennaio 1912

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1912

Estratto dal *Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.* — Anno Accademico 1911-12.

Considero le *superficie razionali reali* (*)

$$f\,(x\,y\,z) = 0,$$

che sono realmente rappresentate sul piano mediante formule del tipo

$$\begin{aligned} x &= \varphi\,(u\,v) \\ y &= \psi\,(u\,v) \\ z &= \chi\,(u\,v), \end{aligned}$$

dove φ, ψ, χ designano funzioni razionali a coefficienti reali. Esse constano d' una sola falda, che considereremo dal punto di vista proiettivo, senza distinguere i punti impropri.

A queste superficie si riferiscono le semplici osservazioni che seguono.

L' ordine di connessione di una superficie razionale reale (cioè il numero dei tagli chiusi che occorre fare

(*) Da un altro punto di vista si pone il sig. Comessatti in una Nota interessante recentemente apparsa (*Rendic. Lincei* 1911) dove classifica le superficie razionali reali indipendentemente dalla realtà della rappresentazione piana, incontrando perciò superficie con più falde; la suddetta nota prelude evidentemente ad uno studio più largo.

su di essa per ridurla semplicemente connessa) *è uguale ad* 1 *aumentato del numero dei punti base del sistema rappresentativo*

$$\lambda \varphi + \mu \psi + \nu \chi = 0,$$

e diminuito del numero delle curve eccezionali fondamentali per codesto sistema.

Infatti il piano proiettivo ha l'ordine di connessione 1; ogni punto-base comune a $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ dà luogo ad un ciclo della superficie razionale; viceversa sparisce un ciclo per ogni curva eccezionale del piano a cui corrisponda un punto della superficie.

Si può investigare il carattere di unilateralità o bilateralità delle nostre superficie. Perciò giova partire dall'osservazione seguente:

Una superficie è unilatera se contiene un sistema continuo di curve secantisi a due a due in un numero dispari di punti.

Da ciò risulta (con Staudt) che:

Tutte le superficie algebriche reali, d'ordine dispari, contengono almeno una falda d'ordine dispari, che è unilatera.

Consideriamo ora una superficie razionale reale, F, d'ordine pari.

Alle rette del piano rappresentativo corrispondono su F ∞^2 curve chiuse, C, secantisi in un punto variabile. Ma designando con

$$i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_s$$

gli ordini delle s (≥ 0) curve eccezionali fondamentali, si ha che le C hanno comuni s punti fissi di molteplicità rispettiva

$$i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_s;$$

perciò il numero delle intersezioni di due curve C vale

$$1 + \sum_{1}^{s} i_h^2 .$$

Ove si avverta che $\sum_1^s i_h^2$ ha la stessa parità che $\sum_1^s i_h$, si potrà concludere che:

Una superficie razionale reale d'ordine pari è unilatera se è pari (≥ 0) *la somma degli ordini delle curve eccezionali fondamentali per il sistema piano rappresentativo.*

Si avverta che il teorema non è invertibile, come risulta dagli esempii che seguono.

Esempii - Le quadriche generali sono rappresentate (per proiezione) sul piano da coniche per due punti, reali o no, e c'è sempre una retta eccezionale fondamentale pel sistema di queste coniche; così le quadriche sono superficie bilatere il cui ordine di connessione vale risp. 2 o 0 (quadriche iperboliche e quadriche ellittiche).

Le superficie cubiche generali rappresentate sul piano da linee cubiche reali per 6 punti reali, sono superficie unilatere di ordine di connessione 7.

La superficie romana di Steiner (del 4° ordine) è rappresentata realmente sul piano da un sistema ∞^3 di coniche, senza punti base; perciò essa è una superficie unilatera d'ordine di connessione 1.

La superficie del 4° ordine con conica doppia rappresentata sul piano da un sistema ∞^3 di cubiche reali con 5 punti base reali (e senza curve eccezionali fondamentali), è una superficie unilatera d'ordine di connessione 6.

In generale tutte le superficie razionali a sezioni ellittiche, d'ordine $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, rappresentabili sul piano mediante un sistema di cubiche reali, con punti base reali, o senza punti base per $n = 9$, sono superficie unilatere il cui ordine di connessione è uguale a 10 diminuito dell' ordine n della superficie.

La superficie d' ordine 8 rappresentata sul piano mediante le quartiche con due punti base doppi (reali o no) è bilatera ed ha la connessione di una quadrica. Sono anche bilatere ed hanno la stessa connessione delle quadriche (2 o 0) le superficie d' ordine pari $n = 4, 6$ rappresentate sul piano da un sistema di quartiche con due punti base doppi (reali o no) e 4 o risp. 2 punti base semplici immaginarii; codesto sistema non potendo ridursi a un sistema di cubiche con una trasformazione reale del piano. Se invece uno dei punti base semplici suddetti è reale, le quartiche possono trasformarsi in cubiche facendo sparire la curva eccezionale fondamentale, e però si ricade in superficie unilatere.