Enriques, Federigo

Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes

Comptes Rendus Acad. Sciences Paris **CLIV** (1912), pp. 418-421.

c'est-à-dire la dérivée du logarithme d'un multiplicateur. Enfin,

$$\Delta(\varphi, \Delta_2\varphi) - \frac{1}{2}(\Delta_2\varphi)^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\Delta(\varphi, \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}\right]^2 = 0$$

ne donne que

$$\frac{\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}\right)^2 = 1;$$

l'intégration de (1) est réduite à celle d'un système de deux équations de Riccati.

3. Ce qui est essentiel est l'intervention du groupe $\Phi = \Phi(\varphi)$; on peut appliquer la méthode à une propriété géométrique quelconque du faisceau de courbes $\varphi =$ const. en introduisant les *invariants métriques correspondants*.

Par exemple, si (1) définit des lignes planes, ou sphériques, ou tracées sur des surfaces algébriques de degré connu, on les obtient sans intégration. On connaît $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ pour les lignes telles que la dérivée de φ suivant la direction conjuguée de la tangente à $\varphi =$ const. est une fonction de φ (sauf si cette fonction est nulle); on connaît $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} : \frac{\partial\varphi}{\partial v}$ pour les lignes qui satisfont à $\Delta_2\varphi = 0$, Δ_2 étant construit avec la forme $D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$, etc.

Ce que nous disons des lignes s'applique aux surfaces $f(x, y, z) =$ const., quand f est déterminé par un système jacobien connu à une solution.

4. Enfin les mêmes principes conduisent, *mutatis mutandis*, à de nombreuses conséquences relatives aux équations différentielles des congruences (ou des complexes) de courbes ou de surfaces; les groupes qui interviennent sont alors à deux ou trois variables.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Note (¹) de M. **Federigo Enriques**, présentée par M. Émile Picard.

On sait que le *théorème d'existence* de *Riemann*, joue un rôle essentiel dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable. D'après ce théorème, on peut se donner à volonté, suivant un ordre donné, les

$$2m = 2n + 2p - 2$$

(¹) Présentée dans la séance du 22 janvier 1912.

points de diramation d'une fonction $y(x)$, à n branches, de genre p, et fixer aussi les transpositions correspondant entre les branches $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de façon que ces transpositions forment un groupe transitif et que leur produit soit l'identité ; il existera une classe correspondante de fonctions algébriques $y(x)$, ou si l'on aime mieux une fonction irréductible, définie en faisant abstraction des transformations rationnelles.

Il y a lieu de poser une question analogue pour les fonctions algébriques de deux variables :

$$z(xy).$$

Soit

$$F(xyz) = 0$$

une équation algébrique de degré $n\ (> 1)$ en z et considérons la fonction à n branches $z(xy)$ qui se trouve définie par cette équation. Il y aura en général un *lieu de points de diramation*

$$f(xy) = 0,$$

qu'on peut considérer comme une *courbe* du plan (xy), dans le sens de la géométrie algébrique, ou, si l'on aime mieux, comme une surface appartenant à l'espace à 4 dimensions qui fournit la représentation des points complexes du plan (xy).

La question se pose maintenant de *construire la fonction* $z(xy)$, *étant donnée* a priori *la courbe* de diramation

$$f(xy) = 0.$$

Mais une difficulté se présente qui n'a pas d'analogue dans le cas des fonctions d'une variable. C'est que, *pour* $n > 2$, *une courbe*

$$f(xy) = 0$$

donnée arbitrairement ne saurait constituer la courbe de diramation totale pour une fonction algébrique $z(xy)$ *à* n *branches.*

C'est ce qu'on reconnaît aisément parce que, étant donnés les caractères invariants $(p_a, p^{(1)})$ de l'équation

$$F(xyz) = 0,$$

on trouve en général que la courbe

$$f(xy) = 0$$

a un certain nombre de nœuds qui est > 0 pour $n > 3$, et un certain nombre de points de rebroussement qui est > 0 pour $n > 2$, ces nombres pouvant être calculés à l'aide de formules connues.

En examinant de plus près la question, on trouve même que deux courbes

$$f(xy) = 0, \qquad \varphi(xy) = 0,$$

du même ordre, douées du même nombre de nœuds et de points de rebroussement, pourraient être déterminées de façon que $f = 0$ soit la courbe de diramation d'une fonction algébrique $z(xy)$, tandis qu'il n'existe pas une fonction $z(xy)$ ayant ponr courbe de diramation $\varphi = 0$.

La question de déterminer les conditions d'existence d'une fonction algé brique $z(xy)$ ayant une courbe de diramation donnée

$$f(xy) = 0,$$

peut être résolue par l'analyse du groupe de monodromie de la fonction $y(x)$. On supposera en général que la courbe $f = 0$ soit d'un certain ordre pair $2m$, et qu'elle possède un certain nombre de points doubles, en distinguant les nœuds et les points de rebroussement; on exclura qu'il y ait des singularités plus élevées, et en même temps que la courbe ait une position particulière par rapport à la droite à l'infini ou aux axes x, y du plan (xy). Ce sont là des conditions qui ne diminuent pas, d'une manière essentielle, la généralité du problème.

Ces hypothèses étant satisfaites, il y aura lieu de considérer deux sortes de points de diramation de la fonction $y(x)$:

1° Les points de diramation *simples*, qui correspondent aux droites parallèles à l'axe y qui sont tangentes à $f = 0$ en un point simple;

2° Les points de diramation correspondant aux points de rebroussement de $f = 0$.

S'il existe une fonction algébrique irréductible $z(xy)$, à n (> 2) branches $z_1, z_2, \ldots, z_n$, correspondant à la courbe de diramation $f(xy) = 0$, on aura d'abord

$$2m = 2n + 2p - 2 \qquad (p \geqq 0)$$

et les conditions suivantes se trouveront satisfaites :

I. Les transpositions entre les $2m$ branches de $y(x)$, correspondant aux points de diramation simples (1°), engendreront un *groupe intransitif;* d'une manière plus précise les $2m$ branches $y_1, y_2, \ldots, y_{2m}$ se partageront par rapport à ce groupe en un *certain nombre*

$$\rho \geqq n - 1$$

de systèmes d'intransitivité, comprenant respectivement $+t_1, +t_2, \ldots, +t_\rho$ éléments, où

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_\rho = 2m.$$

II. A ces ρ systèmes d'intransitivité, on pourra faire correspondre ρ couples de nombres entiers (is), compris parmi les nombres

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n,$$

de telle façon que toute transposition entre $y_1, y_2, \ldots, y_{2m}$ correspondant à un point de diramation (2°) amènera une branche y appartenant à un système (is) en une branche appartenant à un système (rh) où les deux couples $(is)(rh)$ ont un élément commun (soit $h = i$ ou $h = s$).

III. Les transpositions (is) correspondant aux $2m$ points $y_1, y_2, \ldots, y_{2m}$ engendreront un groupe transitif par rapport à $1, 2, \ldots, n$ et le produit de toutes les $2m$ transpositions, suivant un ordre convenable, se réduira à l'identité.

Réciproquement, *si les conditions* I, II, III *sont satisfaites, il existera toujours une fonction algébrique $z(xy)$ à n branches, dont $f(xy) = 0$ est la courbe de diramation.*

AÉRODYNAMIQUE. — *Sur la distribution des pressions et des vitesses dans la région troublée autour d'une surface dans un courant d'air uniforme.* Note de M. A. **Lapresle**, présentée par M. L. Cailletet.

L'étude que nous avons entreprise comprend la détermination, pour chaque point de la région troublée autour d'une surface exposée dans un courant d'air uniforme, de la vitesse v en grandeur et direction et de la pression p.

La méthode employée repose sur les propriétés d'un simple tube recourbé à angle droit, dit *tube de Pitot*. Un tel tube, placé en un point où la pression est p et la vitesse v et faisant face au courant, transmet, comme l'on sait, une pression

$$p + k\frac{\delta v^2}{2g},$$

δ étant la densité de l'air dans les conditions actuelles de température et de pression et k un coefficient empirique très voisin de l'unité.