Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

Questioni riguardanti le Matematiche elementari

Zanichelli, Bologna, 1912. ((Di Enriques: Prefazione, pp. V-VI; art. I, Sull'importanza filosofica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria, pp. 1-18; art. II, Sull'insegnamento della Geometria razionale, pp. 19-35; art. IX, I numeri reali, pp. 365-493))



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

VOLUME I

CRITICA DEI PRINCIPII

ARTICOLI DI

U. AMALDI - R. BONOLA - F. ENRIQUES - D. GIGLI - A. GUARDUCCI
G. VAILATI - G. VITALI



BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXII

PROPRIETÀ LETTERARIA

PREFAZIONE

L'opera collettiva che dodici anni or sono presentavamo al pubblico italiano, sotto il titolo di « Questioni riguardanti la Geometria elementare », esce ora in una nuova edizione completamente rifatta ed allargata, col titolo di « Questioni riguardanti le Matematiche elementari ».

Il nuovo disegno dell'opera comprende, accanto alle questioni attinenti alla Geometria, anche le questioni che appartengono più propriamente all'Aritmetica o all'Algebra.

Tuttavia non ci è parso conveniente dividere l'opera stessa in due volumi, consacrati l'uno alla Geometria e l'altro all'Analisi; anzitutto perchè questa vieta distinzione ha perso ormai ogni valore per la Scienza e rimane soltanto nei nostri ordinamenti accademici in omaggio ad una recente tradizione particolaristica, ed in secondo luogo perchè la distinzione suddetta mal corrisponderebbe alla materia trattata, laddove p. es. è questione al tempo stesso di poligoni regolari e di equazioni binomie, oppure della quadratura del circolo e di sviluppi in serie o della trascendenza dei numeri e e π, e via dicendo.

Diciamo di più che l'opera nostra può avère fra gli altri anche lo scopo di mostrare in qual modo lo spirito geometrico e lo spirito aritmetico, cui una certa trattazione puristica delle questioni fa corrispondere due dominii distinti, si uniscano e si compenetrino in una più feconda intuizione matematica, quando si passa a studiare le medesime questioni da un punto di vista più elevato e comprensivo.

Il presente volume, che costituisce la prima parte dell'opera, contiene la critica dei principii della Geometria e dell'Aritmetica. A due articoli sui problemi filosofici e didattici, cui dà luogo la scienza dello spazio, seguono gli articoli 3, 4, 5 dedicati ai concetti della retta e del piano, della congruenza e del movimento, e della continuità; quindi gli articoli 6, 7 sulle teorie dell'equivalenza e delle proporzioni, l'ultimo dei quali è una memoria postuma del compianto GIOVANNI VAILATI, pubblicata finora soltanto nella traduzione tedesca fatta sulla prima edizione di questi collectanea (1).

L'art. 7, scritto da ROBERTO BONOLA (un altro collaboratore ed amico di cui debbo rimpiangere la perdita immatura!), dà un nuovo e più largo sviluppo alle questioni della teoria delle parallele e delle Geometrie non-euclidee. Invece gli art. 8, 9 sono consacrati ai principii dell'Aritmetica; cioè: alla critica del concetto di numero, rinnovata dalle classiche ricerche di GIORGIO CANTOR sugli insiemi; e alla teoria dei numeri complessi, esaminata nelle sue origini storiche e nei successivi sviluppi, fino ai risultati più generali concernenti i campi di numeri a più unità.

Tale è il disegno di questo primo volume, a cui seguirà rapidamente la seconda parte dell'opera. E mi sia concesso frattanto di chiudere queste righe di prefazione, ringraziando i collaboratori ed amici che hanno lavorato con devozione al comune intento di elevare lo spirito filosofico dei nostri insegnanti di Matematiche, e di aprire ai loro occhi una visione più larga delle dottrine e del progresso storico della Scienza.

Bologna, Febbraio 1912.

FEDERIGO ENRIQUES

(1) Grandi amplificazioni ricevettero in codesta traduzione quasi tutti gli articoli del primitivo volume, e tali sviluppi sono recati nella presente edizione.

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LE MATEMATICHE ELEMENTARI

ARTICOLO PRIMO

Sull' importanza filosofica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria di FEDERIGO ENRIQUES a Bologna.

In questo articolo ci proponiamo di lumeggiare l' interesse delle questioni attinenti ai principii della Geometria in rapporto ai problemi d' ordine filosofico e psicologico che vi si riattaccano. Tuttavia limiteremo queste spiegazioni per modo che esse riescano più facilmente comprensibili, rimandando per una trattazione approfondita del tema e per un'esposizione diffusa delle nostre idee ai seguenti lavori:

Prinzipien der Geometrie art. III A, B 1 in « Encyklopädie der Matematischen Wissenschaften ».

Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria in « Rivista filosofica di Pavia » 1901.

Problemi della Scienza (cap. III, IV). Bologna, Zanichelli 1906, 2ª ed. 1910.

§ 1. **Le basi empiriche della Geometria.** — Rivolgiamo la nostra attenzione al complesso delle cognizioni geometriche e cerchiamo un confronto nel dominio delle cognizioni fisiche.

Si sottopongano due enunciati a persona che non abbia alcuna idea dei metodi di dimostrazione matematica: *a*) in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti; *b*) nella caduta dei gravi le velocità sono proporzionali ai tempi.

La supposta persona cercherà di *verificare coll' esperienza* l' esattezza dei due enunciati, procedendo fondamentalmente nello stesso modo; potrà ricorrere ad es. nel primo caso al taglio della carta o all' uso di strumenti di misurazione delle

aree; nel secondo caso alla macchina d' Atwood o al piano inclinato di Galileo.

Stabiliti in questo modo, i due enunciati appaiono ugualmente esprimenti due *verità fisiche*, a noi rivelate dall' esperienza, ossia dalle sensazioni aiutate e corrette dagl' istrumenti.

Ma per chi ha un' idea dell' organismo matematico le cose appaiono diversamente. La dimostrazione sperimentale dell' enunciato *a*) non sembra soddisfacente, se ne vuole la *dimostrazione matematica*, mentre sembra impossibile di accampare la stessa esigenza relativamente all' enunciato *b*).

Dunque, vien fatto di domandare, vi è una *certezza matematica* superiore alla *certezza fisica*, sicchè ciò che sembra rigorosamente dimostrato al fisico si presenta ancora incerto al matematico, come un problema da risolvere? E dove attingerà il secondo questa superiore certezza che al primo non è dato raggiungere?

Per rispondere conviene esaminare in che cosa consista il procedimento di dimostrazione matematica.

Il matematico a cui viene proposta una questione possiede già alcune preliminari cognizioni; sono proprietà che, nel momento, egli ritiene fondate senza discussione, ed il suo modo di procedere è soltanto una *deduzione logica* di nuove conseguenze dalle premesse conosciute. Il suo è essenzialmente un *processo di riduzione.*

Anche nella dimostrazione del fisico c' è una riduzione a cose note; l' uso d' uno strumento più complicato e l' interpretazione delle esperienze cui esso conduce è legato ad un procedimento mentale che si fonda sull' uso d' istrumenti più semplici e sull' interpretazione, già nota, delle relative esperienze; soltanto questo procedimento mentale *non è più soltanto logico, ma è anche empirico*, in quanto trae nuovi elementi dalle sensazioni.

Ora qui è tutta la differenza e tutta la superiorità del metodo matematico. Ogni sensazione, e quindi anche ogni esperienza, racchiude qualche cosa d' incerto o di non bene determinato (1), sicchè la riduzione fisica sembra contenere qualche elemento d' incertezza rispetto alle premesse; al contrario invece la riduzione matematica appare perfetta, sicchè

(1) Veramente sarebbe qui il caso di distinguere tra *esperienze qualitative* e *quantitative* ma non ci dilungheremo su tale distinzione,

alle nuove deduzioni si attribuisce esattamente lo stesso valore di certezza accordato alle premesse.

Ma non dimentichiamo la cosa essenziale, che cioè la dimostrazione matematica e fisica sono soltanto due diversi processi di riduzione, fondati su alcuni dati *noti.* Ora su che si appoggia la conoscenza di questi dati? Generalmente sopra un processo di riduzione analogo, che ci sospinge di passo in passo a dati sempre più semplici.

Ma se anche questa riduzione possa apparire in qualche modo storicamente illimitata, s' incontrano almeno praticamente dei *dati primitivi*, che tanto per il matematico come per il fisico sono accettati in base a *cognizioni comuni* o ad *esperienze elementari.*

Sostanzialmente i dati primitivi della Geometria non appariscono fondati in modo diverso da quelli della Fisica. La ricostruzione storica della nostra scienza ha posto in luce che la Geometria prima di raggiungere lo stadio razionale traversò uno stadio empirico, in cui gli acquisti erano frutto di osservazioni e di esperienze.

Per molti popoli non si procedette oltre questo stadio empirico; ma soprattutto dai Greci si promosse più tardi lo sviluppo di una Geometria razionale, dove le proposizioni vengono dedotte come conseguenza da altre che, senza istituire apposita esperienza, appaiono *evidenti* rispetto all' *intuizione.* E qui è da avvertire che uno sviluppo razionale del tutto analogo si presenta anche nella Fisica moderna e segnatamente nella Meccanica. Sicchè la dimostrazione puramente logica e matematica trova pur posto nello studio dei fenomeni fisici, in ispecie dove si ha una connessione ben determinata coi principii più evidenti della scienza del moto.

§ 2. **Esperienza e intuizione.** — Quando una verità geometrica o meccanica anzichè essere verificata coll' esperienza viene dedotta dalla intuizione, si ha l' impressione che essa abbia una base più certa. Vi è fiducia che le esperienze successive, comparate tra loro eliminando per astrazione certi rapporti, debbano porgere una verificazione sempre più esatta della proprietà che si ha in vista. È dunque il resultato di tali esperienze qualcosa di necessario o a priori? Tale opinione, sostenuta come è noto da KANT, sembra ormai sorpassata. Infatti un' analisi critica del problema mostra che l' intui-

zione non è altro che il prodotto di una elaborazione psicologica di esperienze, le quali vengono idealizzate ed interpretate conforme alla struttura logica della nostra mente, in uno stadio anteriore alla coscienza formata.

Pertanto l' intuizione esprime in modo chiaro e distinto i rapporti di certi concetti rappresentativi, ma, per quel che si riferisce alla esatta rispondenza della rappresentazione alla realtà eterna, non può darci maggior garanzia che una somma di esperienze storiche; sicchè infine un' esperienza, coscientemente proseguita fino ad un grado di approssimazione opportuno, può in certi casi superare l' intuizione stessa od anche correggerlo.

Questa veduta scaturisce dalla riflessione che i processi mentali, mercè cui vengono elaborati i dati fisici, e le leggi che li governano, non possono implicare nulla di necessario che debba loro corrispondere nella realtà, fuori del soggetto.

Ora tali osservazioni portano a considerare come due oggetti di studio distinti:

1) lo *spazio intuitivo*, cioè il concetto che troviamo già formato nella nostra mente a rappresentare, mercè un' astrazione sistematica dalle altre proprietà fisiche, certi rapporti spaziali o di posizione dei corpi;

2) *lo spazio fisico* cioè l' insieme di questi rapporti, quale può resultare definito da una esperienza sui corpi, in un certo ordine di approssimazione illimitatamente proseguibile.

Circa il confronto fra questi due modi d' intendere la Geometria, svolgeremo altre riflessioni più avanti. Qui aggiungiamo come un mezzo di approfondire la ricerca fisica, o come uno scopo psicologicamente interessante di per sè, un terzo oggetto di studio:

3) *gli spazi intuitivi superiori*, cioè i concetti costruiti dalla nostra mente per mezzo di un' astrazione sistematica da alcuni dati dell' intuizione.

§ 3. **La critica dei principii della Geometria dal punto di vista logico.** — Riferiamoci al concetto ordinario dello spazio quale esso si trova formato nella nostra mente. L' intuizione ci porge ad un tempo la definizione psicologica di alcuni oggetti che vi si collegano (punto, retta, ecc.) e la prova di certi rapporti fra di essi, che consideriamo come evidenti.

Ora l' evidenza è suscettibile di gradi ed il progresso

razionale della Geometria porta che alcune proprietà, considerate dapprima come evidenti di per sè stesse, vengano logicamente dedotte da altre più elementari; e parimente che alcuni oggetti di cui pur si ha una facile visione immaginativa vengano definiti per mezzo di altri più semplici (così p. es. il triangolo per mezzo di segmenti ecc.).

Ma in ogni momento dello sviluppo della scienza, il suo ordine logico deve muovere da dati (concetti e proposizioni) esplicitamente presi come non riducibili, per fondarvi definizioni e dimostrazioni; così alla base di una trattazione logica della Geometria si dovrà trovare la dichiarazione dei *concetti primitivi* o *fondamentali*, e dei *postulati*, ossia delle *proposizioni fondamentali*, che ne esprimono i rapporti più elementari.

Pretendere di definire logicamente tutti i concetti che compaiono nella trattazione geometrica sarebbe invero ugualmente assurdo come pretendere di tutto dimostrare, attesochè la definizione come la dimostrazione è soltanto un processo di riduzione.

Ora nelle ricerche critiche inerenti ai principi della Geometria si sono sempre più affermati alcuni criteri che esprimono quasi le norme di una trattazione logica idealmente perfetta, e tendono nel loro insieme ad un avvertimento più chiaro dell' uso che facciamo della intuizione, e ad una separazione di ciò che è logico da ciò che è intuitivo. Tali criteri sono i seguenti:

a) 1). Tutti i concetti che compariscono nella trattazione debbono esser dati esplicitamente come *primitivi* o *fondamentali*, senza definizione, o venir definiti logicamente per mezzo dei concetti primitivi.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nella trattazione se non i concetti primitivi, ed i *concetti puramente logici*, come p. es. i concetti di *appartenenza* (significato dal verbo « essere » o « contenere »), di *ordine*, di *corrispondenza*, ecc.

2) È desiderabile che i concetti primitivi sieno fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che non sia possibile definire logicamente uno qualunque di essi per mezzo degli altri.

b) 1). Tutte le proposizioni che compariscono nella trattazione debbon essere enunciate esplicitamente come *postulati*, o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nel ragio-

namento, se non le premesse contenute nei postulati e gli *assiomi* esprimenti le leggi della logica deduttiva.

2) È desiderabile che i postulati sieno fra loro *assolutamente indipendenti*, per modo che nessuno di essi possa essere dimostrato in base ai rimanenti.

Le condizioni *a*) 1) e *b*) 1) sono essenziali, perchè si abbia una Geometria trattata in modo *rigorosamente* logico. Esse permettono di dimenticare il contenuto dei concetti che vi figurano, considerando la trattazione stessa come una *teoria logica astratta* nella quale entrano soltanto dei simboli non determinati, legati da certe relazioni; e dove pertanto il sistema dei postulati costituisce la *definizione implicita* dei concetti fondamentali, presi nel loro insieme.

Questo modo astratto di concepire la Geometria ha una grande importanza, perchè fissando in varie guise il senso dei simboli indicati, si possono ottenere varie *interpretazioni* di una stessa teoria astratta, riuscendo così a porre un legame fra più teorie geometriche concrete; un tale legame consiste in ciò che « si possono tradurre tutte le proposizioni dell'una teoria in proposizioni dell'altra, sostituendo, in modo determinato, i concetti che figurano nella prima con quelli della seconda ». Un esempio di ciò si ha nella *legge di dualità* della Geometria proiettiva o della Geometria sferica.

Ogni insieme di proposizioni, che soddisfi ai requisiti *a*) 1) e *b*) 1), può considerarsi come una *teoria logica astratta*, capace di ricevere generalmente varie interpretazioni concrete (geometriche o non geometriche), purchè le ipotesi espresse dai postulati sieno *logicamente compatibili*, ossia *non contraddittorie*.

La possibilità di ricevere una interpretazione intuitiva sicchè la teoria possa riguardarsi come esprimente un insieme di rapporti fra concetti nettamente rappresentati, assicura praticamente che la condizione di compatibilità è soddisfatta.

Per la Geometria dunque, in quanto essa è fondata sulla intuizione, non ci domanderemo se i postulati sono compatibili, purchè essi sieno intuitivamente evidenti.

I requisiti *a*) 2), *b*) 2) esprimono piuttosto condizioni di *eleganza* della trattazione, anzichè condizioni di rigore. Vedremo più tardi in qual senso tali requisiti appariscano veramente importanti.

L'indipendenza di più concetti può essere riconosciuta immediatamente coll'intuizione in un senso psicologico (ad es. quando si tratta di concetti rientranti in diverse categorie logiche), ed allora essa può servir di base al riconoscimento della indipendenza di alcuni gruppi di postulati.

Da un punto di vista logico l'indipendenza suaccennata non ha senso finchè non si enuncino i postulati, che nell'intuizione sono supposti, perciò quando si dirà che il *concetto C non può esser definito per mezzo di A, B* (o che è indipendente da essi) bisognerà aggiungere: *rispetto a un dato sistema di postulati (a, b, c....)*, che costituisce la definizione implicita di *A, B, C*.

Per verificare l'indipendenza anzidetta A. PADOA ha proposto il seguente procedimento: si cerchino due interpretazioni della teoria assegnando ad *A, B* significati determinati e a *C* due significati diversi, per modo che una proposizione vera nella prima interpretazione risulti falsa nella seconda; allora è chiaro che *C* non può essere definito per mezzo di *A, B* rispetto ai postulati assegnati.

Si può riconoscere che un postulato *a* è indipendente da altri dati *b, c...*, facendo vedere che l'ipotesi opposta ad *a* è compatibile colle *b, c....* Perciò si presenta naturale il procedimento seguente: si attribuisca convenzionalmente un senso, diverso dal senso originale, ai simboli che entrano nella trattazione a denotare i concetti primitivi, e si cerchi così di *interpretare* la teoria logica basata su *b, c...* e sulla negazione di *a*, in un modo conforme all'intuizione. La possibilità di una siffatta interpretazione serve a stabilire l'indipendenza domandata.

Volendosi l'indipendenza assoluta di un sistema di postulati, occorre anzitutto che essi vengano formulati in modo *non ricorrente*, cioè che ciascuno di essi abbia un senso prescindendo dagli altri. In mancanza di questo requisito si potrà domandare soltanto l'*indipendenza ordinata*, ossia l'impossibilità di dedurre ciascun postulato dai *precedenti*.

L'indipendenza di un sistema di postulati è anche relativa alla *composizione* dei postulati stessi. Quando una proposizione *a* si lasci scomporre in due altre *(più semplici) a', a''*, che prese insieme equivalgono ad *a*, può ben accadere che la *a* non dipenda dalle altre proposizioni date *b, c...*, ma che in base alle *b, c...* si riesca a dimostrare la *a'*; allora è chiaro, che il postulato *a* contiene qualche cosa di superfluo, potendo essere limitato alla proposizione *a''*.

Si può istituire una analoga osservazione relativamente all'indipendenza dei concetti fondamentali, ove si consideri la possibilità di sostituire un dato concetto *A più particolare*, con due altri *B* e *C più generali*, per modo che *A* risulti definito come interferenza delle classi di enti *B* e *C*.

L'indipendenza dei concetti e delle proposizioni fondamentali ha dunque un valore tanto più significativo quanto più sono osservate le condizioni di:

a) 3) *Generalità* dei concetti.

b) 3) *Semplicità* dei postulati.

È possibile considerare concetti assolutamente generali e proposizioni assolutamente semplici, non suscettibili di venire decomposte in più altre?

A questo proposito A. PADOA ha fatto un'osservazione risolutiva. Qualsiasi proposizione si riduce in ultima analisi ad affermare che un oggetto *a* non coincide nè con *b*, nè con *c*..., dove *b*, *c*... sono oggetti particolari ben determinati. Pertanto la sola proposizione assolutamente semplice è quella del tipo: *a* non è *b*.

Ma con proposizioni di questo tipo, prese in numero finito non si arriverebbe mai a postulare quell'insieme di proposizioni che caratterizzano i concetti più comuni della Geometria.

Si può tuttavia attribuire alle condizioni *a)* 3) e *b)* 3) un valore relativo convenientemente precisato, ed *avvicinarsi* così in vari modi ai criteri di perfezione logica sopra indicati. Ma senza spingere più oltre le nostre considerazioni sotto questo riguardo procediamo ad esaminare la questione dell'ordinamento dei principi della *Geometria* da un altro punto di vista.

§ 4. **La critica dei principii della Geometria dal punto di vista dell'intuizione.** — Riferendoci alle ragioni storiche che hanno generato l'analisi logica dei principii, si può dire che questa ha per iscopo principale di:

Avvertire distintamente gli atti che la nostra intuizione compie, ogni qualvolta rileva i rapporti fra oggetti che cadono immediatamente nel suo dominio; e così rendere possibile un controllo regolare del dato intuitivo.

Da questo punto di vista si presentano, quasi in contrapposizione coi criteri logici sopra indicati, alcune osservazioni:

c) 1) I postulati debbono esprimere immediatamente i rapporti fra i concetti primitivi che formano oggetto della nostra visione immaginativa, senza che occorra aggiungere a questi la rappresentazione di qualche altro oggetto. Questa condizione porta talvolta ad assumere concetti primitivi non indipendenti.

Se intendiamo che il concetto *A* venga definito logicamente per mezzo di altri concetti *B*, *C*..., anche le proprietà di *A* dovranno essere dedotte da quelle (che ci vengono rivelate dalla intuizione) di *B*, *C*...; quindi se nella trattazione figura un postulato desunto dal modo con cui *A* viene intuito, questo porta l'implicita considerazione di un nuovo elemento concettuale primitivo, non contenuto in *B*, *C*...

Un esempio di ciò è offerto dalla proposizione fondamentale del piano: se si pensa la *retta* come un ente primitivo, e si vuol *definire* il *piano* colla proiezione della retta da un punto esterno, si deve anche dimostrare che la superficie così costruita contiene ogni retta determinata da due dei suoi punti; se invece si dà questa proposizione come un postulato, si deve riguardare anche il piano come un ente primitivo, in quanto la nominata proposizione non potrebbe essere intuita se ci formassimo soltanto un'immagine mentale della retta e non avessimo una rappresentazione del piano.

c) 2) La rappresentazione intuitiva che ci formiamo dei nostri concetti ci presenta spesso una gerarchia di generi e specie, per modo che i concetti più particolari appaiono definiti per le loro differenze specifiche rispetto ad un concetto più generale.

In tal caso l'intuizione ci porge una serie di postulati ricorrenti, per i quali non si può parlare d'indipendenza assoluta, ma soltanto d'indipendenza ordinata.

L'assoluta indipendenza dei postulati esige dunque la costruzione di diverse gerarchie di concetti, dove i concetti particolari vengano generalizzati in modi diversi.

c) 3) La nostra rappresentazione intuitiva dello spazio incontra prima dei concetti particolari e sale per astrazioni successive ai concetti più generali.

Non diremo per questo che i concetti più generali allorchè sono intuiti abbiano un minor grado di evidenza in confronto ai particolari: ma l'evidenza loro sta in rapporto ad uno stato della mente più progredito, in cui si esercita una facoltà di rappresentazione più astratta.

Dunque dal punto di vista intuitivo la generalità dei concetti che si possono scegliere come fondamentali per la Geometria (e quindi in certo modo anche la semplicità dei relativi postulati) ha un limite nella nostra capacità di rappresentazione dell' astratto.

Ora si presenta qui un secondo scopo dell' analisi logica dei principii. Quest'analisi può soccorrere allo sviluppo della intuizione geometrica e spingere il lavoro di astrazione produttore di concetti più generali, mercè la costruzione logica di oggetti che potranno venire rappresentati più tardi. La logica disseccando in certo modo i dati intuitivi, colla semplificazione dei postulati, ci presenta infinite combinazioni diverse di questi, cui corrispondono infiniti concetti possibili. Ma definire logicamente un concetto significa soltanto indicarne una rappresentazione mediata che può costruirsi con una combinazione opportuna dei dati. In realtà però tale combinazione tende psicologicamente ad essere surrogata da una vera e propria visione immaginativa del concetto definito, non appena a questo si colleghino delle associazioni che gli conferiscono un *interesse*; e solo allora può dirsi che la combinazione logica, arbitrariamente fissata colla definizione, si converte in uno sviluppo duraturo per la scienza.

Queste riflessioni mostrano che, per quanto la Logica possa soccorrere al processo di astrazione costruttivo dei concetti, essa non può da sola surrogare le associazioni psicologiche che costituiscono cotesto processo. Se non si vuole un' astrazione illusoria, bisogna educare la capacità rappresentativa dell'astratto ricorrendo anche a mezzi sperimentali.

Sarà opportuno illuminare le cose dette con qualche esempio. L' idea che comunemente ci si forma della « linea » e della « superficie » ricavata per astrazione da pochi casi particolari è molto meno generale di quella accolta dal geometra. Chi ha avuto sott' occhio soltanto il piano, la sfera, i coni, i cilindri ed altre analoghe superficie a *punti ellittici* o *parabolici* non si rappresenta una superficie (a *punti iperbolici* attraversata in ciascun punto dal piano tangente. E la dimostrazione analitica della possibilità di questo caso non potrebbe riguardarsi che come l' anticipazione di una esperienza, quale ci viene fornita, per esempio, dalla costruzione dell' *iperboloide rigato.*

Lo stesso si può dire per la superficie di *Möbius,* modello

di superficie *unilatera,* per cui si dimostra falso il comune giudizio che ogni superficie abbia due facce ben distinte ed irriducibili per moto continuo.

La conoscenza delle superficie a punti iperbolici e delle unilatere allarga il comune concetto della superficie, permettendoci di abbracciare coll'intuizione un maggior numero di casi. Ma non sembra possibile limitare il progresso di questa intuizione, poichè uno studio ulteriore ci conduce a considerare linee e superficie con infinite oscillazioni, linee senza tangente, superficie senza piano tangente ecc.; e di questi enti si può anche in un certo senso, e fino ad un certo punto, formarsi una rappresentazione, come, per esempio, quando una linea della specie suindicata viene definita per mezzo di una poligonale variabile che tende ad un limite con legge determinata.

Riassumendo le considerazioni svolte innanzi, diremo che: la critica dei principii della *Geometria* fa parte di quel processo di costruzione e di elaborazione di concetti che costituisce lo sviluppo della scienza nei suoi rami più elevati. In ispecie l' ufficio dell' analisi logica in codesto processo è di *distinguere* gli atti d' intuizione, e di soccorrere ad *astrazioni* successive; così si prosegue lo sviluppo della intuizione geometrica, che mette capo a spazi intuitivi superiori, variamente interessanti.

L'esame concreto di alcuni indirizzi di ricerca che hanno una spiccata importanza storica fornirà in proposito esempi istruttivi.

§ **5. I principali indirizzi nelle ricerche relative ai principii della Geometria.** — Nella Geometria elementare compariscono come enti fondamentali, il *punto*, la *retta* e il *piano,* a cui si riferiscono le relazioni di *appartenenza* (per es. « due punti appartengono ad *una* retta ecc. » cfr. art. 3), di *divisione in parti* o di *ordinamento* (art. 3, 5), di *congruenza* o di *movimento* (art. 4).

Questi concetti si presentano all' intuizione in modo ricorrente, sicchè ad es. le proprietà della congruenza o del movimento si esprimono in relazione alla retta e al piano ecc. Ma essi trovano uno sviluppo più generale ed indipendente in alcuni rami elevati della Geometria.

La *Geometria proiettiva* considera i concetti di retta e piano, prescindendo da ogni nozione di eguaglianza e di movi-

mento; essa considera dunque esclusivamente l'insieme delle *proprietà grafiche*, lasciando da parte le *metriche* (che entrano soltanto nelle sue applicazioni). All'opposto invece i concetti metrici trovano uno svolgimento indipendente dalla nozione della retta e del piano, nella *Geometria metrica sopra le superficie* o *le varietà più volte estese* (studiata di solito coi metodi differenziali), dove all'idea dell'*eguaglianza di segmenti o di distanze* si sostituisce l'idea più generale della *ugual lunghezza di archi di linee.*

Ebbene, a questi due rami della Geometria corrispondono due indirizzi principali nelle ricerche concernenti i fondamenti della Geometria, i quali indirizzi pongono in luce l'assoluta indipendenza fra i concetti grafici e metrici, che, risp. in ciascuno di essi, vengono scelti come punto di partenza.

Ma i due rami indicati della scienza geometrica, hanno pur comuni alcune proprietà che insieme costituiscono una teoria distinta. Le proprietà relative alla divisione in parti della retta o del piano, alla continuità ecc., appartengono ad una più ampia famiglia di *linee* e di *superficie*, e lo studio generale di esse dà luogo, si può dire, ad una *teoria del continuo*, che è la Geometria generale delle linee, superficie, varietà a più dimensioni, comune fondamento della proiettiva e della metrica. A questa teoria del continuo si riattaccano alcuni resultati di G. CANTOR sugli *insiemi*, e gli acquisti generali della *teoria della connessione* o *Analysis situs.* E da essa debbono venire illuminati, prima ed indipendentemente dalle nozioni di retta e piano o di congruenza, i concetti fondamentali di linea e superficie, i veri concetti *primi* della Geometria.

Sono dunque tre gruppi di concetti rispondenti a tre rami elevati della Geometria, ed esprimenti:

1) le proprietà generali delle linee, superficie, varietà;
2) le relazioni di appartenenza fra punti, rette e piani;
3) le relazioni di congruenza.

In altre parole si hanno tre forme intuitive superiori « la varietà continua, lo spazio proiettivo, la varietà metrica generale » intorno a cui si svolgono tre indirizzi principali dei moderni studi critici.

E, come nei più alti sviluppi della scienza, tutti i metodi della Geometria e dell'Analisi recano qui il loro contributo; in modo speciale i metodi sintetici-proiettivi, la teoria delle

forme differenziali quadratiche, gli studi sui gruppi di trasformazioni e quelli sui corpi di numeri, concorrono a rischiarare i principii di una luce viva. Resta così confermata nel fatto la relazione che avevamo avvertito dover esistere tra i fondamenti della scienza ed i suoi più lontani sviluppi.

A quel modo che l'osservazione più minuta non sa distinguere le parti costitutive di un embrione nella cellula uovo, mentre esse appariscono differenziate, in ordine alle loro funzioni, nello sviluppo embrionale più avanzato; così, anche nell'organismo geometrico, i rapporti tra i concetti fondamentali mal si disvelano negli elementi, ad una critica istituente fra di essi un paragone immediato, e ricevono invece, ed aspettano ancora, una più chiara spiegazione dal progresso delle elevate teorie.

§ 6. **Il problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali.** — Ora, quali rapporti legano le menzionate ricerche matematiche al problema psicologico dell'origine dei concetti geometrici?

Abbiam detto che tali concetti nascono da un'esperienza idealizzata, la quale si è continuamente ripetuta in uno stato della mente anteriore alla coscienza adulta.

Le condizioni di una siffatta esperienza sono da un lato caratteri degli organi di senso, e d'altro lato *leggi associative* del pensiero, cioè *elementi strutturali* della psiche secondo i quali si compie, per così dire, l'*interpretazione* dei fenomeni sensibili.

Le sensazioni che contengono qualche elemento spaziale sono le *generali sensazioni tattili-muscolari*, appartenenti a tutta la cute; quelle del *tatto speciale*, cioè dell'organo (comunemente la mano) preso come sede di paragone costante, ed infine quelle della *vista.*

Nella *Psicologia fisiologica* (da HELMOLTZ, WUNDT....) si istituiscono esperienze atte a decidere quali proprietà geometriche possano venire acquisite immediatamente dall'una o dall'altra sensazione. Ma nell'interpretare tali esperienze, occorre conoscere profondamente i rapporti fra i concetti a cui le anzidette proprietà si riferiscono, onde si possa separare dalla nozione di un fatto, tutto ciò che non è ad essa indissolubilmente legato.

Allora si arriva ad una prima conclusione generale, cioè che la vista dà, in modo immediato, soltanto le nozioni grafiche

e non le metriche. All' opposto invece dalle sensazioni tattili-muscolari, si acquista la conoscenza immediata delle proprietà (metriche) della congruenza, e solo in via subordinata la conoscenza della retta e del piano.

Questa osservazione, implicitamente contenuta in HELMHOLTZ, viene fatta esplicitamente dal KLEIN.

Si può andare più innanzi tenendo presente la distinzione accennata fra sensazioni tattili-muscolari generali e sensazioni del tatto speciale.

Le prime, fino a che non si sia localizzata per abitudine una sede di paragone, sono incapaci di dare la nozione della congruenza. Il loro contenuto, per quanto riguarda le cognizioni spaziali, si limita alle relazioni più generali inerenti alle linee e alle superficie, relazioni che abbiam detto costituire l' oggetto della teoria del continuo, ed essere comune fondamento delle proprietà grafiche e delle metriche.

Onde: *i tre rami della Geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la Geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all' acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Non entreremo nelle discussioni che occorrerebbero per giustificare questa conclusione, e dovremo pure arrestarci dinanzi ai problemi più particolari che qui si riattaccano: come da ciascun gruppo di sensazioni traggano origine i concetti geometrici fondamentali, e come essi si leghino fra loro secondo le leggi logiche e associative, le quali trovano poi la loro espressione nei postulati.

Rimandando per un' analisi diffusa al nostro articolo « Sulla spiegazione psicologica... » o al cap. IV del libro « Problemi della Scienza », citati nell' introduzione, ci limiteremo qui a richiamare l' attenzione del lettore su questo punto; che vi è differenza tra postulati aventi il loro fondamento in un sol gruppo di sensazioni, e postulati i quali nascono dall' associarsi di sensazioni appartenenti a gruppi diversi. Questi ultimi debbono avere in confronto ai primi un minor grado di evidenza intuitiva.

Si arriva così a spiegare psicologicamente i tentativi, annoverati dalla storia delle Matematiche, per bandire dai fondamenti della Geometria il *postulato delle parallele* (cfr.

art. 8). La sua minore evidenza si spiega osservando che esso è un *postulato d' associazione fra le sensazioni ottiche* da cui scaturiscono i concetti grafici, *e le sensazioni tattili-muscolari o meccaniche*, onde hanno origine i metrici. Infatti, se noi cerchiamo di renderci ragione della repugnanza che proviamo a contraddire l' ipotesi di una unica parallela ad una retta data, passante per un punto dato, riconosciamo che essa dipende dal doppio modo onde siamo soliti rappresentarci le rette parallele, in un dato piano: come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto comune si allontani indefinitamente in un verso determinato; e come linee *equidistanti*. In questo doppio modo di rappresentazione vi è un fatto d' associazione ottico-meccanica, che riposa appunto sulla sensibile validità del postulato delle parallele.

§ 7. **Il problema filosofico della Geometria.** — Riprendiamo ora e spingiamo più innanzi le riflessioni del § 3 intorno al confronto fra lo spazio intuitivo e lo spazio fisico. Teniamo sempre presente che le esperienze possono verificare la rispondenza dell' intuizione ai rapporti spaziali fisicamente dati soltanto con un certo grado di approssimazione; ed osserviamo che essendo fissato questo grado si possono immaginare diversi concetti rappresentativi che corrispondono egualmente all' insieme delle esperienze suddette. Per chiarire questa osservazione togliamo da HELMHOLTZ e CLIFFORD una considerazione suggestiva.

Un essere A a due dimensioni, che possa liberamente muoversi nel piano, acquisterà la conoscenza della Geometria piana ordinaria; ma alla stessa conoscenza perverrà ancora un essere B, mobile sopra una superficie sferica, purchè le dimensioni di questa sieno estremamente grandi rispetto al campo in cui B può muoversi, per modo che il detto campo si confonda approssimativamente col piano tangente alla sfera. Così, l' uno e l' altro avranno la nozione d' una linea tracciata sopra la rispettiva superficie, misurante la minima distanza fra due punti, linea che potranno chiamare *retta*. E questa *retta*, estendendo mentalmente le proprietà di essa osservate nella regione accessibile alle loro esperienze, se la figureranno come una linea indefinitamente estesa ed aperta nei due sensi; ma questa figurazione sarà falsa nella Geometria sferica, dove la linea chiamata retta è un circolo massimo,

cioè una linea chiusa e di lunghezza finita, sebbene grandissima rispetto a *B*.

Senza dilungarci su altri esempii di simil genere, chiaro apparisce, per analogia, come possano immaginarsi varie *forme spaziali* rispondenti solo in parte ai requisiti che attribuiamo ordinariamente allo spazio, ma pur tali che nell'ambiente a noi accessibile dieno luogo a condizioni sensibilmente identiche. Se lo spazio fisico fosse appunto rispondente ad una di queste forme, la nostra intuizione geometrica sarebbe pur la stessa che oggi possediamo, ma estesa al di fuori del campo delle nostre osservazioni potrebbe condurci a conclusioni assolutamente erronee, come abbiam visto nell'esempio ipotetico relativo all'essere *B*. E nulla ci dice a priori che così non sia di fatto.

Per decidere la questione vi è luogo a verificare i postulati che esprimono, secondo l'intuizione, le proprietà dello spazio, sottomettendo al controllo di esperienze più precise tutte le conseguenze che ne dipendono, e cercando così di valutare coscientemente il grado di esattezza della nostra Geometria fisica.

Ma per riguardo al valore delle anzidette esperienze verificatrici, occorre qui ribattere un'obiezione.

Ogni esperienza stabilisce un rapporto complesso che noi concepiamo come resultante da un insieme di relazioni: geometriche, meccaniche, fisiche; il rapporto geometrico è una astrazione che esprime il confronto di esperienze molteplici e l'eliminazione di altri dati più propriamente fisici. Ora dunque si affaccia la veduta che le medesime esperienze, colle quali si vorrebbe determinare la scelta fra diversi sistemi geometrici, possano altrettanto bene interpretarsi in ciascuno di questi sistemi, ove si modifichino corrispondentemente le ipotesi fisiche che vi si accompagnano. Quindi la scelta di un sistema geometrico non costituirebbe più una *questione di fatto* o un'*ipotesi* da confermarsi o negarsi con esperienze più precise, ma dipenderebbe da una *convenzione*.

Questa veduta, che ha avuto il suo sostenitore più autorevole in H. POINCARÉ, è stata da noi confutata minutamente nei citati « Problemi della Scienza ». Qui ci limiteremo a rilevare che il convenzionalismo, rinnovante in qualche modo le dottrine kantiane, suppone una gerarchia assoluta dei concetti scientifici, un ordine lineare delle scienze di cui pone a

capo la Geometria; che invece, vi è luogo a costruire la scienza confrontando ad ogni momento l'esperienza singola coll'insieme di tutte le altre esperienze e dei rapporti che le interpretano, in un certo grado d'approssimazione; e che, da questo punto di vista, può farsi questione soltanto di una difficoltà d'interpretare le esperienze in ordine ai rapporti spaziali, ma non può negarsi in principio che una differente *ipotesi geometrica* va a rispecchiarsi in una serie di differenze *sistematiche* relative alle più varie esperienze fisiche, e può quindi venir decisa (in un certo grado di approssimazione) mercè il confronto di queste.

Ciò che abbiam detto innanzi intorno alla possibilità di diverse ipotesi geometriche, è risultato storicamente da una critica celebre.

Le ricerche intorno al postulato delle parallele (art. 8) hanno appunto condotto alla costruzione di una serie continua di *spazi non euclidei*, dipendente da un parametro k, e contenente lo spazio intuitivo euclideo in rispondenza al valore $k = 0$.

La Geometria non euclidea per $k < 0$ coincide colla ordinaria in tutta quella parte che precede le teorie delle parallele, ma mentre in questa la somma degli angoli di un triangolo è uguale a 2 retti, in quella è minore di 2 retti, la differenza essendo proporzionale a k e all'area del triangolo.

Ora in qual modo si potrà decidere se la Geometria fisica corrisponda piuttosto all'ipotesi euclidea ($k = 0$) o non euclidea ($k < 0$)?

Bisognerà a tal fine misurare la somma degli angoli di un triangolo; se questa risulti sensibilmente minore di 2 retti verrà dimostrato che k supera in valore assoluto un certo limite inferiore e quindi che vale la Geometria non euclidea. Ma se all'opposto l'anzidetta somma risulti sensibilmente uguale a 2 retti, rimane il dubbio fra due ipotesi:

1) Vale fisicamente la Geometria euclidea, per rispetto a misure precise quanto si vuole, cioè $k = 0$;

2) Vale l'ipotesi non euclidea $k < 0$, ma k è così piccolo che la somma degli angoli del nostro triangolo differisce da 2 retti per meno degli errori di osservazione.

Effettivamente le misure che si sono istituite sopra triangoli geodetici (GAUSS) e astronomici (LOBATSCHEWSKY) hanno condotto a dimostrare che l'*ipotesi euclidea è verificata nel-*

l' ordine di approssimazione consentito dai nostri mezzi più delicati di osservazione. Questi raggiungono un grado di esattezza molto alto, in relazione a triangoli aventi come base l'asse maggiore dell'orbita terrestre (300 milioni di km.) e gli altri due lati centinaia di migliaia di volte maggiori, pei quali tuttavia si trova che la somma degli angoli differisce da 2 retti meno di 0″,1.

Non pertanto il resultato dell' osservazione e dell' esperienza ha convalidato praticamente la Geometria che ci è porta dall' intuizione; ma teoricamente permane sempre il dubbio circa il responso di esperienze più precise, e questo dubbio che potrebbe essere risolto in senso contrario all' ipotesi intuitiva euclidea, non potrà mai essere risolto con una convalidazione assoluta di questa.

Le riflessioni precedenti illuminano il problema filosofico dello spazio, e fanno risaltare tutto l' interesse delle ricerche tendenti a distinguere l' intuizione dall'esperienza e a costruire accanto allo spazio intuitivo ordinario altri spazi intuitivi superiori.

Dal punto di vista della teoria della conoscenza la formazione psicologica di quello appare ora come uno sviluppo, non determinato esclusivamente dalle esperienze elementari che esso riesce a rappresentare, ma anche da certe condizioni mentali in cui le immagini sensibili furono associate.

Vi è dunque nei postulati qualcosa d' arbitrario rispetto ai dati fisici, che dati più precisi potrebbero modificare.

Ma vi è di più anche qualcosa di arbitrario distinguente la nostra rappresentazione concettuale dello spazio da altre possibili, che non potendo essere discriminate da esperienze comunque proseguite, debbonsi ritenere fisicamente equivalenti.

Ciò risulta nel modo più chiaro dalla Geometria non archimedea (art. 5), poichè la questione dell' esistenza di un infinitesimo attuale non ha propriamente un senso fisico, trascendendo ogni misura reale per quanto approssimata.

ARTICOLO SECONDO

Sull' insegnamento della Geometria razionale di FEDERIGO ENRIQUES a Bologna.

§ 1. **Sugli ordinamenti scolastici.** — Un largo movimento critico investe oggigiorno gli ordinamenti scolastici tradizionali ed i sistemi pedagogici.

I fattori di codesto moto sono da ricercare, per una parte nelle cresciute e complicate esigenze della vita pratica, portanti con sè il diffondersi e il democratizzarsi della coltura; d' altra parte nella rinnovata concezione della scienza, che riconosce ed apprezza più adeguatamente il posto della osservazione e dell' esperimento, di fronte a quello dei processi logici.

I postulati pedagogici che ne derivano, sono stati efficacemente espressi dalla filosofia inglese, di BAIN, elevante, contro alla scuola classica, l' ideale di una scuola moderna che volga rapidamente i discepoli agli scopi pratici, ed educhi in loro, prima che le facoltà dell' intelligenza quelle del senso.

Questa concezione si regge e difende sui principii dello utilitarismo: per essa cercansi infatti *economia* ed *utilizzazione* del lavoro preparatorio che non vuolsi perduto pel discepolo, utilizzazione in ispecie nelle professioni tecniche, secondo i bisogni del maggior numero.

Di fronte a tali tendenze innovatrici, la scuola classica ha resistito, non tanto facendosi forte della tradizione, quanto trasformandosi e ammodernandosi essa stessa collo sviluppare in un senso più scientifico, conforme ai progressi della critica filologica e grammaticale, lo studio delle lingue antiche (divergendo dunque dall' antico indirizzo umanistico), e meglio ancora col dare un posto sempre più notevole allo studio delle scienze fisiche e biologiche.

Non è nostro proposito discutere qui la vessata questione concernente la scelta fra i due ordinamenti della scuola che si presentano l'uno contro l'altro, tanto più che una equanime valutazione delle ragioni militanti in favore di ciascuno, sembra mostrare esserci motivo piuttosto di sviluppare parallelamente l'uno accanto all'altro sistemi diversi, in rispondenza a bisogni differenziatisi. Questa soluzione del problema di recente adottata (almeno parzialmente) in Francia ed in Germania, presenta anche il vantaggio di costituire una larga ed istruttiva esperienza. Dalla quale, per conto nostro, non dubitiamo che riusciranno raffermati i diritti della scuola classica ad essere integralmente mantenuta (accanto ad altri istituti di carattere prevalentemente educativo) come preparatrice delle intelligenze agli studii più elevati, in un'età in cui non ancora si vede come sostituire l'ammaestramento della grammatica. Diciamo in particolare della grammatica greca, perchè nell'armonica lingua, di cui essa ci rivela l'organismo, si è atteggiato il pensiero limpido e profondo di un popolo, che sopra ogni altro eccelse nell'unire il culto alla verità e alla bellezza.

Noi abbiamo infatti il convincimento, che lo stesso movimento democratico della coltura provvidamente diffondentesi in tutti gli strati sociali, non riuscirà a togliere l'ufficio di una eletta preparazione in rapporto cogli altri studii e con certe più elevate funzioni, il cui buon adempimento nella civile società può riguardarsi come una condizione di durevolezza per una democrazia veramente vitale.

§ 2. **Sui diversi sistemi d'insegnamento della Geometria.** — Nel campo della Geometria, il moto riformatore, venuto dall'Inghilterra, è contrassegnato da una reazione ai metodi d'insegnamento euclidei, promossa in ispecie dal PERRY; per effetto della quale allo svolgimento deduttivo della nostra scienza si tende a surrogare un modo di esposizione piuttosto pratico, dando maggiore sviluppo all'esercitazione di laboratorio. Questo sistema pratico appare poi modificato in un indirizzo d'insegnamento empirico, conosciuto sotto il nome di *metodico*.

La tendenza riformatrice, diffusa, come è noto, nelle scuole tedesche, non è (almeno fin ora) penetrata nel nostro paese, dove l'evoluzione dei metodi, in ispecie nelle scuole secondarie

di grado più elevato, ha proceduto fino a questi ultimi tempi nel senso inverso; così, dopo che BETTI e BRIOSCHI ebbero rimesso in onore l'Euclide nel nostro istituto classico, chiari geometri e valorosi insegnanti [1] hanno dato opera a trattare la Geometria elementare, cercando soprattutto di avvicinarsi ad un assetto logicamente rigoroso.

Ora che cosa diremo della controversia fra codesti sistemi pedagogici che si affacciano come opposti l'uno all'altro? Per un giudice obiettivo i due indirizzi, razionale ed empirico, rappresentano nell'insegnamento della Geometria, due scopi diversi: secondo l'uno confacente all'indole della scuola classica, la Geometria vuole educare e affinare le intelligenze; secondo l'altro, essa vuole insegnare dei fatti, e renderne la conoscenza accessibile e praticamente utilizzabile al maggior numero, coerentemente all'indirizzo della scuola tecnica.

Fra questi due scopi non spetta alla scienza di scegliere, poichè la decisione è rimessa in ultima analisi ad un giudizio di valore, in rapporto a varii interessi. Spetta bensì alla scienza pedagogica studiare relativamente a ciascun fine i mezzi più acconci, illuminare il contenuto dei sistemi proposti misurando la larghezza dei resultati che è lecito ripromettersene, e meglio ancora, se e dove sia possibile e conveniente, comporli in un piano integrale di studii.

La nostra veduta è la seguente:

A prescindere dagli scopi più propriamente tecnici cui mira l'indirizzo di Perry, l'insegnamento sperimentale e metodico della Geometria, opportunamente svolto, si presenta anche dal lato educativo come il più adatto ad un primo grado di studio, e conforme ai bisogni del maggior numero dei discepoli frequentanti le scuole di primo grado.

In un grado successivo, ed in ispecie nelle scuole aventi per oggetto una preparazione a studii più elevati, lo svolgimento razionale della materia trova posto conveniente ad educare le facoltà logiche dell'allievo e a rendere in lui più retta e cosciente la stessa intuizione; tanto più che la facoltà d'astrazione non potrebbe svolgersi convenientemente in una

[1] SANNIA e D'OVIDIO, DE PAOLIS, FAIFOFER, VERONESE, INGRAMI, DE FRANCHIS... In ispecie gli « Elementi » del Veronese presentano una costruzione originale del sistema geometrico, in connessione colle ricerche dello stesso A. di cui si discorre particolarmente negli articoli che seguono.

età troppo matura. Ma pure in codesto indirizzo razionale si possono vantaggiosamente adottare taluni criterii, che si riattaccano alle idee dei pedagogisti inglesi e permettono di stabilire un naturale passaggio fra i due gradi d'insegnamento.

§ 3. **Il metodo sperimentale.** — Il metodo pedagogico di Perry è direttamente rivolto a « *far lavorare* » i discepoli; esso si presenta dunque come una preparazione pratica per le arti. Da questo punto di vista il maneggio degli istrumenti occupa il primo posto; viene invece limitato o omesso del tutto l'ufficio delle definizioni e delle dimostrazioni; queste ultime essendo spesso sostituite da pure verifiche, precedute dall'esame di qualche caso particolare.

Scegliamo due esempii caratteristici:

In luogo di una discussione dei criterii che permettono di definire l'eguaglianza di superficie, si insegna addirittura il modo pratico di misurare (approssimativamente) una superficie colla carta quadrettata o coll'istrumento di RANKINE; l'allievo apprende così l'uso pratico della misura delle aree, senza indugiarsi ad approfondirne il concetto.

In cambio di una dimostrazione del teorema di Pitagora, si presenta prima di tutto allo studioso il semplice esempio in cui i lati del triangolo rettangolo valgono 3, 4, 5, e poi una figura relativa al caso generale, dalla quale (occorrendo mediante il taglio della carta) si desume la certezza fisica della proposizione.

Ora, come accennavamo, il metodo pratico di Perry ha subito una modificazione nel senso educativo. Da questo punto di vista la stessa esercitazione di laboratorio viene concepita, non direttamente per l'utile da raggiungere, ma per lo sviluppo delle facoltà comprensive che vi si collega, e l'esperienza diventa un mezzo di chiarire e di approfondire le idee geometriche. Un illuminato pedagogista danese, T. BONNESEN, sembra aver proceduto molto bene su questa via.

È importante, a nostro avviso, distinguere i caratteri del metodo *sperimentale*, da quelli delle trattazioni *intuitive* e *semirazionali*, adottati ancora in varie scuole.

La superiorità del metodo sperimentale risalta per noi, non soltanto per l'esercizio pratico nel maneggio degli istrumenti, ma anche per due specie di vantaggi, positivi e negativi, nei riguardi di una educazione intellettuale.

L'uso ampio di vere esperienze geometriche vale infatti, molto più delle descrizioni e spiegazioni verbali, a sviluppare l'intuizione dell'alunno, anche perchè a codeste esperienze va unito un interesse pratico che tien desta l'attenzione.

D'altronde stimiamo senz'altro dannoso lasciare un posto nelle trattazioni intuitive a degli sviluppi pseudo-logici, definizioni o dimostrazioni puramente illusorie, le quali non soltanto affaticano e annoiano, ma anche confondono le idee, facendo passare per ragionamenti dei vacui accozzi di parole.

§ 4. **Il metodo razionale deduttivo dell'Euclide.** — Secondo le nostre vedute il metodo sperimentale trova posto quasi esclusivo in un primo insegnamento di Geometria; in un grado ulteriore diventa utile accompagnarvi lo studio razionale, sia per l'educazione intellettuale in genere, sia per la preparazione specifica agli studii scientifici, ed in ispecie fisico-matematici, ai quali codesto studio deve soccorrere, come diremo, per vie dirette ed indirette.

Ma il raggiungimento migliore di questi fini è in rapporto col modo d'intendere codesta razionalità di metodo, e cogli avvedimenti mercè cui si può riuscire a rendere la trattazione più largamente accessibile.

Per acquistare una veduta intorno a ciò, riferiamoci anzitutto al modo di esposizione della Geometria che ci è presentato dall'EUCLIDE.

Questo trattato è giustamente ritenuto come un modello logico; la sua superiorità risalta facilmente a chi se ne proponga l'esame in rapporto ad altri trattati molto più moderni, p. es. a quello del LEGENDRE.

L'esattezza degli enunciati, la precisione e la compiutezza delle dimostrazioni nelle quali vengono analizzati accuratamente tutti i casi possibili della figura, il meraviglioso ordine secondo cui le proposizioni si succedono in una concatenazione logica, costituiscono i pregi più spiccati della trattazione euclidea. Alla perfezione logica di codesto ordine manca soltanto un elenco dei concetti e delle proposizioni fondamentali occorrenti nel testo; le prime definizioni, le nozioni comuni e i postulati posti a base delle elementari costruzioni, sono, dal punto di vista moderno, al di sotto di ogni critica; bensì è da avvertire che codesti principii, non avevano per i greci l'ufficio che oggi si vorrebbe loro attri-

buire, e di più che essi rappresentano probabilmente (almeno nella loro maggior parte) un'aggiunta posteriore al testo originale.

Ma per valutare il testo medesimo sotto l'aspetto didattico, conviene riguardarlo nei rapporti della formazione delle idee geometriche.

Da questo punto di vista si osserva che l'esposizione euclidea presenta come formati, nell'ultima e più compiuta od astratta fase della loro elaborazione, concetti la cui genesi risulta evidentemente da un lungo processo induttivo. E così dicasi per gli enunciati dei teoremi e per le loro dimostrazioni. L'analisi storica recente ha messo in luce i criterii di costruzione del trattato rilevando come il disegno generale sia subordinato al fine di stabilire nel modo più economico certi teoremi fondamentali, come p. es. il teorema di Pitagora, a cui tende il primo libro. La stessa forma così frequente della riduzione all'assurdo, che all'Euclide viene rimproverata come un artificio (tanto più ripugnante ove si è indotti a deformare le figure fuori dell'immaginabile), si giustifica nel suo sistema col criterio di ridurre al minimo gli elementi della deduzione, facendo vedere che la tesi è contenuta indirettamente nelle proposizioni di cui si è già fornito la prova.

La nostra critica si riassume in questo giudizio: la trattazione euclidea presentando coordinati in un sistema deduttivo dei resultati lungamente analizzati nei loro rapporti, nasconde sotto la forma dommatica il cammino della scoperta.

Questo difetto diviene più specialmente notevole nella trattazione delle teorie più elevate, p. es. in quella dell'equivalenza nel libro II, e soprattutto nella teoria delle proporzioni del libro V. La difficoltà e la soverchia lunghezza di codesti sviluppi nell'Euclide, ha veramente delle giustificazioni: per i greci tali teorie avevano infatti un ufficio esorbitante dai puri scopi della Geometria, quell'ufficio che oggi è tenuto da un istrumento più maneggevole, quale è il formalismo algebrico.

Resta nondimeno caratteristica sotto l'aspetto del metodo la definizione generale della « proporzione » fra grandezze, posta in principio del libro V; invero le anzidette ragioni, per cui Euclide doveva ritenere anche praticamente opportuno di far precedere la teoria astratta delle proporzioni fra

grandezze, disgiungendola dalle concrete applicazioni del libro VI, non lo obbligavano ugualmente a collocarsi fin dal principio della trattazione da un punto di vista abbracciante insieme i due casi del rapporto commensurabile ed incommensurabile. Siamo dunque qui in presenza di una nota del sistema euclideo che ne mette in luce spiccatamente il carattere *deduttivo*.

E per l'appunto riscontriamo più manifesti gli svantaggi pedagogici: tutti sanno infatti come il concetto della proporzione così presentato riesca difficile agli alunni, quando non si faccia loro acquistare progressivamente trattando prima il caso più semplice e familiare del rapporto commensurabile e facendo vedere come questo concetto si generalizzi pel caso di grandezze incommensurabili.

§ 5. **Considerazioni generali intorno all'ufficio della deduzione e dell'induzione nella scienza.** — Prima di venire, da queste osservazioni intorno all'EUCLIDE, ad una ulteriore discussione intorno ai metodi d'insegnamento della Geometria, solleviamoci un momento ad una veduta generale del processo costruttivo della scienza, per valutare quale ufficio spetti in esso alla deduzione e all'induzione.

A quel modo che secondo l'evoluzione positiva delle idee gnoseologiche non si può ammettere la netta distinzione fra scienze sperimentali e scienze razionali, così non può ammettersi quella fra scienze induttive e deduttive. Ogni ordine di conoscenze si appoggia nei suoi inizii e nelle sue conclusioni all'osservazione e all'esperienza, i cui dati vengono composti (per quanto è possibile) in una trattazione razionale; ogni trattazione razionale sale induttivamente dalle osservazioni o esperienze preliminari a concetti rappresentativi includenti delle ipotesi, e da queste discende deduttivamente a nuovi fatti cadenti nel dominio dell'esperienza verificatrice; dalla quale riprende poi una spinta verso concetti più generali ed astratti, senza arrestarsi definitivamente nell'una o nell'altra fase del suo moto alternato e progressivo.

Ma da questo schema del processo costruttivo della scienza, la cui adeguatezza si mostra nel confronto di scienze diverse, sembra talvolta allontanarsi una singola scienza considerata isolatamente dalle altre; imperocchè il nuovo sviluppo induttivo, che prende le mosse dalle conclusioni di una teoria scien-

tifica e dalle esperienze verificatrici di essa, ci fa spesso escire dai confini convenzionali di quella che si considera come una scienza autonoma, per estendere in più modi e sotto aspetti diversi la comprensione del fatto che vi appartiene.

Così può dirsi p. es. della Geometria, e sotto un duplice riguardo. Mentre qualche teoria geometrica sembrerebbe in certo modo fermata in un sistema puramente deduttivo, la storia ci mostra che un successivo allargamento della teoria, si ottiene per mezzo di osservazioni o esperienze che intervengono a generalizzarne i concetti fondamentali. Così l' osservazione delle superficie più volte connesse, o quella dei poligoni corrispondenti alle funzioni automorfe, sono da ritenere come capitali per lo sviluppo di alcuni fra i rami più progrediti della nostra scienza.

Ma oltre a ciò l' intera Geometria non può essere separata, se non per astrazione, dalla Statica e dalla Dinamica che ne costituiscono il naturale prolungamento.

Non è qui il caso di prolungare una tale discussione filosofica. Quello che ne abbiam detto era tuttavia indispensabile per acquistare una veduta generale dei metodi che convengono allo studio della Geometria. Noi terremo presente che questi metodi non debbono mirare alla illustrazione di un campo chiuso di conoscenze, ma aprire la via alla comprensione di sviluppi più larghi che balzano fuori dalla sua progressiva estensione.

§ 6. **Metodo razionale induttivo.** — Preparare le intelligenze agli studii scientifici elevati, vuol dire esercitare integralmente quelle facoltà che renderanno più agevole di penetrarne il senso, vuol dire anche anticipare la veduta del processo secondo cui le conoscenze si evolvono. E questo scopo segna nelle sue linee generali la via da seguire nell' insegnamento, che idealmente sarebbe la ricostruzione dello sviluppo storico, conforme all' applicazione psicologica della nota legge biogenetica: essere la ontogenesi una ricapitolazione della filogenesi.

Occorre bensì conciliare questa veduta ideale, coll' esigenza economica, che ci vieta di ripresentare tutti gli sviluppi parziali e spesso erronei precedenti una teoria organizzata, indicandoci come opportuno di fare scaturire nell' allievo la nozione del suo svolgimento, solo in quanto è necessario a compren derne l' assetto attuale.

Veniamo dalle generalità astratte alla visione concreta della materia geometrica. Alla trattazione razionale puramente deduttiva dell' Euclide, preferiamo un insegnamento razionale, che non trascuri l' aspetto induttivo delle teorie [1]. Il sistema che proponiamo non si oppone a quello euclideo, ma piuttosto si affaccia come un' integrazione di esso.

Che cosa vuol dire svolgere induttivamente la Geometria, e come può conciliarsi questo sviluppo colle esigenze di un insegnamento razionale?

Nel primo grado d' insegnamento abbiamo supposto delle lezioni sperimentali.

In queste si lavora attorno alla figura e all' istrumento, raggruppando le più diverse osservazioni di fatto che vi si riferiscono.

Queste stesse osservazioni e nozioni già acquisite dallo alunno (ed anzi le più elementari di esse) sono il punto di partenza dell' insegnamento razionale; occorrerà bensì esprimerle in una forma logica generale, come postulati, e perciò prenderle ciascuna isolatamente dalle altre e ravvicinarle secondo i mutui legami di dipendenza.

Ora si possono enunciare tutti i postulati e porre i concetti fin da principio, nella loro maggiore generalità, svolgendone poi deduttivamente le conseguenze; si può invece riattaccare ad ogni postulato, ad ogni definizione suggerita immediatamente dalla realtà, le proprietà che ne dipendono, e mostrare progressivamente come l' osservazione della figura estendendosi suggerisca dati e concetti nuovi, da cui seguono deduzioni più larghe. Quest' ultimo modo d' ordinare la materia imprime già nelle menti una veduta più chiara della formazione delle idee geometriche. Esso conduce a *dimostrazioni* e *definizioni* che ben possono chiamarsi *induttive*.

Così p. es. invece di presentare dapprima i concetti di linea e di superficie e di ricercarne i postulati più generali,

[1] Ai criterii che seguono cercano di soddisfare, nei limiti delle esigenze imposte dai programmi per le nostre scuole, gli « Elementi di Geometria » di F. Enriques ed U. Amaldi (Bologna, Zanichelli); questo corso di lezioni è diviso appunto in due gradi: i libri per le scuole tecniche, complementari, ginnasii inferiori hanno un' intonazione sperimentale-costruttiva; quelli per le scuole secondarie superiori rispondono ad un indirizzo razionale-induttivo, e ciò in rapporto colle nostre vedute sui principii della Geometria.

per venire poi alla considerazione particolare delle rette, dei segmenti, dei cerchi, degli archi, dei piani, delle sfere ecc., si comincerà invece dall' analisi delle proprietà che spettano a queste figure particolari, riavvicinando tuttavia quelle proprietà che sono comuni al segmento e all' arco in quanto linee aperte terminate ecc. (cfr. Art. 3).

Similmente si cercherà di far nascere progressivamente la nozione della superficie piana limitata da un contorno, mediante l' osservazione dei triangoli, dei poligoni convessi e quindi dei poligoni concavi a lati rettilinei, dei poligoni limitati da segmenti rettilinei e da archi di circolo, notando come tali superficie si lascino definire per riunione e interferenza di parti di piano relative a rette e a cerchi (Art. 3) (1).

Nel medesimo ordine di progressione si potranno illustrare per codeste figure le nozioni di congruenza (Art. 4) e di equivalenza ecc. e le proprietà che vi si riattaccano. Nè è da temersi come un inconveniente, se questi concetti s' introducono così per mezzo di definizioni che occorre successivamente estendere e talvolta modificare per passare a casi più generali, purchè l' estensione e la modificazione sieno (ove occorre) giustificate nel modo più naturale, preparate anche, se è il caso, con apposite osservazioni.

Così p. es. può essere preparato il passaggio dalla teoria dell' equivalenza dei poligoni (definita per mezzo della decomposizione in parti poligonali congruenti) a quella delle superficie più generali, facendo osservare come altri criterii di equivalenza, conformi alla nostra idea intuitiva delle grandezze superficiali, ci riconducano sempre alla definizione più ristretta, come cioè risultino decomponibili in parti poligonali congruenti, i poligoni

1) che sono decomponibili in parti congruenti, non poligonali;

2) o tali che l' uno di essi non sia maggiore (prevalente) all' altro ecc. (cfr. Art. 6).

Parallelamente all'esposizione induttiva delle definizioni deve procedere lo sviluppo delle dimostrazioni. Così p. es., i

(1) Giova rilevare che in tali argomenti il metodo induttivo e genetico si presenta, nello stato attuale della scienza, come una necessità logica, perchè non è stato ancora esaurientemente discusso un sistema di postulati che valga a definire in tutta la loro generalità le linee e le superficie.

teoremi sulle proporzioni lasciandosi stabilire molto semplicemente nel caso del rapporto commensurabile, conviene cominciare sistematicamente da questo; anzi il complemento della dimostrazione nel caso d' incommensurabilità può limitarsi a qualche esempio per non indurre la noia nel discepolo.

È un errore il credere che l' insegnamento razionale importi sempre la compiutezza delle dimostrazioni, o la perfetta generalità delle definizioni; basta che il significato e il bisogno ideale di questa compiutezza e perfezione sia compreso dallo studioso, ed a questo scopo vale spesso assai meglio qualche deficienza voluta e messa in luce, di una precisione pedantesca.

§ 7. **Mezzi di cui dispone l' insegnante.** — Riguardo alla compiutezza di un insegnamento razionale, come pure alla pratica attuazione del programma induttivo, sono da considerare più da vicino i mezzi educativi di cui l' insegnante dispone nella scuola, e dei quali può valersi in modo diverso.

Questi mezzi sono:

1) il libro di testo che si pone nelle mani dei discepoli;

2) la lezione orale;

3) le esercitazioni scritte assegnate agli allievi, nella scuola e a casa.

Se questi tre mezzi debbono essere coordinati ed armonizzati ad uno scopo, non per questo ci deve essere identità nel loro ufficio. In particolare p. es. non si saprebbe comprendere che il libro di testo ripetesse semplicemente la lezione orale... o viceversa. La mobilità propria alla parola le consente assai meglio di rendersi interprete del processo di acquisto delle conoscenze, che un libro deve necessariamente presentare in una forma più fissata e perfetta.

Quando p. es. si tratti della relazione di congruenza fra due triangoli che hanno lati uguali, oppure della disuguaglianza fra i lati di un triangolo, l' insegnante potrà fare scaturire naturalmente questi resultati da un' osservazione circa il modo di costruire il triangolo col compasso, se pure la costruzione suddetta non venga trattata razionalmente che più tardi.

Insistiamo su questo punto, che, mentre conviene allargare nella lezione orale la trattazione induttiva, giova invece che il libro di testo prosegua più diffusamente e completamente gli sviluppi deduttivi. Le parti del libro che verranno

tralasciate dall' insegnante come più difficili o meno interessanti per la generalità degli allievi, avranno sempre un ufficio per riguardo alle minoranze, cui si deve porgere il modo di approfondire la loro coltura; esse gioveranno d' altronde a tutti, come un avvertimento della deficienza che rimane a colmare. Lo stesso è a dirsi in particolare di qualche schiarimento più minuto di un concetto, in vista di illustrarne più rigorosamente i rapporti logici; così p. es. delle osservazioni che avviano a *definire* in generale la superficie di un poligono concavo, nozione intuitivamente familiare a ciascuno.

In quanto alle esercitazioni proposte agli alunni, come necessario complemento della lezione cattedratica, si può in esse anzitutto preparare alla scoperta e coltivare le più attraenti complicazioni pratiche, continuando così più da vicino i primi studii di Geometria sperimentale.

Ma se, almeno in via sussidiaria, si voglia anche abituare i discepoli ad una analisi razionale delle soluzioni ottenute, bisognerà curare massimamente l' ordine delle questioni assegnate, disponendole in guisa che esse si succedano, secondo le loro dipendenze logiche, in una serie induttivamente progrediente.

§ 8. **Intorno al rigore e a certe esagerazioni critiche.** — I nostri criterii pedagogici debbono essere ancora illustrati relativamente a ciò che tocca il *rigore* del metodo razionale.

Accennando ad alcuni esempii abbiamo già messo in vista, in una maniera implicita, l' importanza che accordiamo alla analisi logica dei concetti, e l' altezza a cui pensiamo opportuno di spingerla. Ma all' opposto le osservazioni intorno alla perfetta compiutezza delle dimostrazioni, hanno già palesato come il nostro concetto del rigore si allontani alquanto dalla veduta tradizionale.

Il nostro modo di considerare le cose si lascia comprendere e giustificare, in ordine allo scopo educativo di un insegnamento volto a mettere in luce l' aspetto gnoseologico della scienza. Ed infatti, sotto questo riguardo ha massima importanza la netta distinzione fra l' osservazione empirica o l' intuizione da un lato, e la logica dall' altro.

Il progresso critico nella moderna trattazione dei fondamenti della Geometria consiste appunto in questo: esso è il resultato di una cosciente evoluzione dei mezzi d' investigazione e di prova, che domina in generale le nuove vedute

intorno al metodo scientifico, di cui non si saprebbe disconoscere il valore per riguardo al procedere delle nostre conoscenze teoriche, in ispecie nel campo della Fisica.

In vista appunto di tali ulteriori sviluppi, e della preparazione mentale che essi richiedono, si giustifica il criterio di una razionalità *rigorosa*, la quale non consente mai d' insinuare nascostamente nei ragionamenti, nuovi dati dell' intuizione, che non sieno esplicitamente accettati come tali nelle premesse. In questo modo soltanto si riescirà a *far comprendere* la natura di un *organismo logico*, anche se non si trovi sempre opportuno di seguirne lo sviluppo nei più minuti particolari.

Formuliamo espressamente la condizione di rigore che proponiamo come un' esigenza dell' insegnamento razionale della Geometria: avvertire quali concetti fondamentali vengono presi come primitivi senza definizione, ritenendoli spiegati per mezzo del loro contenuto empirico; enunciare come postulati, nella forma di rapporti logici, le relazioni fra codesti concetti che l' osservazione e l' esperienza ci suggeriscono, mettendo in vista il ricorso che ad esse occorre di fare nelle dimostrazioni. Definire quindi (conformemente ai criteri della definizione logica) ogni altro concetto che si introduca nella trattazione, e dimostrare (o almeno avvertire la necessità di dimostrare) ogni proposizione che non si trovi enunciata fra i postulati.

Non pretendiamo del resto in alcun modo di limitare l' appello all' intuizione, *respingiamo* anzi *come antididattica l' esigenza di introdurre concetti e proposizioni fondamentali indipendenti*. Ed avvertiamo che soltanto da questa esigenza scaturiscono difficoltà veramente insuperabili in un' esposizione razionale della Geometria, adatta alla scuola. Chi non sa quante minute e sottili distinzioni, quanti artifici occorrono talvolta per evitare l' uso dell' intuizione e dedurre da un piccolo numero di principii nuove proprietà che non sono meno evidenti?

Gl' insegnanti, per poco che abbiano appreso dalla pratica della scuola, sono certo persuasi di ciò; essi si rassegnano dunque ad abbandonare una pretesa, la cui rigida applicazione appare loro inattuabile; ma vi si rassegnano spesso di mala voglia come ad un difetto senza rimedio. In ciò hanno torto ai nostri occhi, e non sarà fatica perduta il cercare di dimostrarlo.

Lo sforzo di appoggiare ad un ragionamento deduttivo

l' affermazione di proprietà intuitivamente evidenti, è il residuo della incosciente illusione che la vera base della certezza geometrica sia una base razionale e non empirica. Una volta riconosciuto che i postulati ci sono rivelati immediatamente dall' intuizione, la quale ci rappresenta i dati di una più estesa osservazione ed esperienza, diventa assurdo pretendere che i teoremi, dedotti mediatamente da quei postulati, posseggano un grado di certezza superiore. Eppure questo falso concetto gnoseologico s' insinua nella mente del discepolo, come una giustificazione del lavoro a cui lo si costringe per dimostrargli ciò che egli già vede! La conclusione logica di un tale metodo sarebbe il discredito dell' intuizione, sopra cui pure si fonda tutto l' edificio delle deduzioni, se lo spirito dell' allievo opportunamente ribelle non arrivi per conto proprio a dubitare piuttosto dell' importanza del ragionamento.

Ma vi è ancora di peggio quando si dice che « il postulato è una *verità indimostrabile* accettata in base all' intuizione o all' esperimento ». Anche a prescindere dalla circostanza che non si potrebbe in alcun modo portare nel campo didattico una giustificazione di codesta indimostrabilità, l'affermazione anzidetta reca questo danno di far credere ad una diversa natura del postulato e del teorema, come se la differenza fosse un carattere proprio della proposizione in sè, (indipendentemente dal rapporto con altre premesse, la cui scelta e il cui ordine dipendono dalla nostra volontà), anzichè un carattere del modo che a noi sembra più conveniente adottare per giustificarla.

Appunto per illuminare questa distinzione consigliamo di mostrare, ove se ne porga l'occasione, con semplici esempii, come una stessa proposizione possa talvolta venire giustificata per mezzo dell' osservazione o di un semplice ragionamento. Così il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (un lato e due angoli adiacenti uguali) si deduce subito, per assurdo, dal primo (due lati e l'angolo compreso uguali) o si giustifica analogamente con una ideale esperienza di sovrapposizione.

Alle precedenti osservazioni pedagogiche se ne accompagna un' altra relativa a certe esigenze critiche, accampate recentemente intorno alle definizioni. Si vuole da alcuni che la *definizione non* sia mai *sovrabbondante,* cioè non includa mai una qualche parte che sia conseguenza delle rimanenti. P. es. quando si dice « il rettangolo è un parallelogramma che ha i 4 angoli retti », oppure « il quadrato è un rettangolo che ha i 4 lati uguali » si danno delle definizioni sovrabbondanti: si dovrebbe dire dunque « il rettangolo è un parallelogramma che ha (almeno) un angolo retto », e « il quadrato è un rettangolo che ha due lati adiacenti uguali »!

Ora ognun vede come codesto modo di procedere, suggerito da una cura troppo sottile e formale della Logica, rischi di generare un errore ben più grave di quello contro cui si vogliono mettere in guardia i discepoli. Infatti la definizione di una figura deve risvegliare nettamente all' immaginazione i caratteri fondamentali secondo cui essa si presenta come cosa veduta, ed in ispecie quindi trattare in modo simmetrico ciò che è in essa di simmetrico.

D' altronde l' esigenza logica che ispira la proposta esclusione delle definizioni sovrabbondanti, può essere soddisfatta in altro modo; basta che: *ogni qualvolta si dà una definizione sovrabbondante si facciano notare i rapporti di dipendenza tra le sue varie parti.* P. e. si definirà il rettangolo come « parallelogramma che ha i quattro angoli retti » e si avrà cura di avvertire che « se un parallelogramma ha un angolo retto, anche gli altri tre angoli sono retti ».

Dopo ciò riprendiamo il discorso relativo ai postulati.

§ 9. **Estensione dell' insegnamento nel senso filosofico.** — Per illustrare il nostro criterio pedagico dei *postulati sovrabbondanti*, abbiamo fatto appello al punto di vista superiore della critica gnoseologica.

Da questo punto di vista appare opportuno rilevare, ove occorra, l' ufficio dei varii mezzi d' investigazione e di prova, che sono a base della costruzione scientifica. E nell' insegnamento razionale della Geometria, ove la Logica ha già una parte così grande, sono da desiderare le occasioni di porre in evidenza l' ufficio dei mezzi empirici; onde riesce istruttivo ad es. di mostrare come una semplice osservazione (postulato di De Zolt) conduca ad invertire i teoremi d' equivalenza dei poligoni, sebbene un ragionamento più laborioso permetterebbe di evitare in questo punto ogni ricorso all' intuizione (cfr. Art. 6).

Ma, dal momento che abbiamo fatto appello ad una veduta filosofica superiore, verrà fatto di obiettarci: disconoscete dunque il valore delle ricerche critiche moderne in

rapporto all'indipendenza dei postulati? O in qual modo pretendete che sia preparatore a studii più elevati un sistema d'insegnamento, nascondente questa direzione del progresso scientifico?

Ad una siffatta obiezione la risposta è facile. Il valore delle suddette ricerche critiche non consiste tanto nel constatare dei rapporti di dipendenza, quanto nel riconoscere che certi dati della realtà sono indipendenti da altri già accettati; il loro vero resultato è infatti per la Geometria, come in generale per le scienze fisiche, l'*estensione delle possibilità*, che si ottiene dall'esaminare le conseguenze del tralasciare una qualche ipotesi. Se dunque si vuole aprire alle giovani menti la veduta filosofica dei progressi derivanti dalla moderna critica, ben altro deve farsi che portare nelle scuole, laboriose dimostrazioni di cose evidenti, le quali non varrebbero mai a far sorgere l'idea di una possibile Geometria più generale.

Codesto insegnamento filosofico, se si ritenga che almeno i discepoli più intelligenti possano ritrarne profitto, deve essere oggetto di qualche apposita riflessione sulla natura delle esperienze giustificatrici dei postulati; così può farsi rilevare come il postulato delle parallele non possa direttamente verificarsi in una regione finita dello spazio accessibile ai nostri mezzi d'osservazione, e come talune proposizioni equivalenti ad esso che evitano codesto inconveniente (p. es. la somma degli angoli d'un triangolo uguale a due retti) portino a verifiche *quantitative*, visibilmente approssimate.

Con queste osservazioni noi veniamo a toccare uno di quei punti delicati dell'insegnamento, in cui la lezione elementare si allarga oltre i confini degli elementi, verso le alte regioni della filosofia scientifica. Non è possibile segnare a priori, se ed in quali condizioni convenga all'insegnante di oltrepassare colle sue riflessioni gli stretti limiti impostigli dal grado della scuola, per aprire alle giovani menti la veduta di più larghi orizzonti. Certo è che occasioni di questo genere si presentano talvolta, e che per alunni intelligenti un sobrio accenno a cose superiori può divenire incitamento ad approfondire la propria coltura.

Chi non ha nei propri ricordi dell'adolescenza qualche forte impressione di una cosa intraveduta attraverso poche parole del maestro, divenute così il principio di tutto un corso di pensieri?

Ma guai se si manca in tali casi del senso della misura! Guai se lo sconfinamento dal campo elementare viene ricercato per sistema, soprattutto ove l'insegnante obbedisca al desiderio di sfoggiare una facile erudizione!

In ben altro modo deve mostrarsi la superiorità del maestro. Egli non dimentichi che a nulla vale sapere più di ciò che s'insegna, se questo non fa conoscer meglio le stesse cose insegnate.

Tale affermazione può sembrare così semplice ed evidente da ritenere che sia inutile insistervi. Nel fatto però non è così facile comprendere che cosa significhi « conoscer meglio » delle cose elementari, e in quanti modi diversi cotesta migliore conoscenza possa essere richiesta ad un insegnante.

Tocchiamo qui ad una fondamentale questione: la preparazione degli insegnanti stessi. Ma il vasto tema uscirebbe dai confini segnati al nostro scritto.

Ci arresteremo pertanto, non senza concludere con una raccomandazione. Una comprensione larga ed elevata della materia, una educazione filosofica che ne sviluppi lo spirito di relazione, conferiscono grande valore ed efficacia ad ogni più umile insegnamento, dove il maestro sappia far brillare una luce di quella fiamma che ha accesa nel suo pensiero. Innalzi dunque sè stesso chi vuole riuscire veramente ad innalzare gli altri; il precetto si riassume in questo: coltivare il proprio ramo di studii come un frammento della scienza generale!

ARTICOLO TERZO

Sui concetti di retta e di piano di UGO AMALDI a Modena.

Noi ci occuperemo qui delle questioni relative al modo di introdurre nell'insegnamento della Geometria elementare i concetti fondamentali di *punto, retta, piano.*

La prima soluzione di siffatti problemi logico-didattici ci è fornita dagli *Elementi* di EUCLIDE.

E possiamo dire che i commenti greci e latini al testo euclideo, segnarono l'inizio di quella corrente di indagini sui fondamenti della Geometria che possiamo raccogliere sotto il nome di *critica geometrica.*

Nel suo primo stadio di sviluppo, che nell'ordine storico si può estendere a tutto il primo ventennio del secolo scorso, codesta critica geometrica non si scostò mai sostanzialmente dai semplici criteri logici di ordinamento, che avevano presieduto al suo primo determinarsi.

Ma al principio del secolo scorso, col sorgere della Geometria non euclidea, si aperse nella storia della critica geometrica un'epoca nuova, nella quale le indagini sui fondamenti della Geometria, dai ristretti confini delle questioni logico-didattiche, assursero ad una più ampia ed elevata comprensione di problemi matematici e filosofici. I nuovi resultati positivi così conquistati e le profonde vedute critiche, a cui quelli aprirono l'adito, gettano una viva luce anche sul più modesto problema didattico dell'insegnamento dei principi della Geometria.

Ma noi non intendiamo qui di assumerci l'arduo compito di indagare nel vasto campo della critica geometrica moderna tutto ciò che essa può fornire di utile, di fecondo, di suggestivo per un assetto scientificamente rigoroso e didatticamente opportuno dei primi principi di un trattato di Geo-

metria. A questo potranno provvedere altre fonti, e noi citiamo particolarmente l'articolo di F. ENRIQUES: *Prinzipien der Geometrie* (1).

Il proposito nostro è molto più modesto.

In una prima parte del nostro articolo noi esporremo in via storica quelle definizioni di *retta* e di *piano*, che tennero successivamente il campo nei trattati e nella scuola, e proseguiremo questo esame fino a mettere in luce come nella serie delle deduzioni geometriche convenga assumere le nozioni di *retta* e *piano* quali nozioni primitive, caratterizzate con un opportuno sistema di postulati.

Questi postulati (se ci limitiamo a considerare le prime proprietà *grafiche*) si riferiscono alle relazioni di appartenenza fra *punti, rette* e *piani*, alle proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, nonchè alla proprietà dello *spazio* di avere *tre dimensioni*.

Nella seconda parte del nostro articolo ci occuperemo appunto di codeste proprietà, e, pur non avendo la pretesa di fornire un completo assetto per una fondazione logica della Geometria elementare, abbozzeremo i principali indirizzi, secondo cui quelle proprietà possono essere formulate e svolte, fino ad ottenere una conveniente definizione dei concetti di *segmento*, *angolo*, *diedro*. Ci tratterremo, in particolare, sulle proprietà di partizione del piano (mediante rette, angoli, poligoni) e dello spazio (mediante piani, angoloidi, poliedri) e accenneremo come quest'ordine di considerazioni conduca naturalmente a problemi, che, pur non esorbitando dal dominio della Geometria elementare tradizionale, possono ancora offrire utile materia di riflessione e di indagine.

I.

Le definizioni di retta.

1. Nell'esame, sia pur rapido, delle molteplici forme, sotto cui via via si tentò di introdurre e di caratterizzare le figure

(1) Encyklopädie d. math. Wiss., III, Heft, 1, Leipzig, Teubner, 1907. Di questo articolo, che ci fu noto in parte fin da quando era manoscritto, traemmo largo profitto. Qui ricorderemo ancora il II volume della *Encyclopädie der Elementar-Mathematik* di WEBER-WELLSTEIN, II edizione, Leipzig, Teubner, 1908, e il I volume dello *Handbuch des mathematischen Unterrichts* di KILLING-HOVESTADT, Leipzig, Teubner, 1910.

fondamentali della Geometria elementare, prenderemo le mosse dagli *Elementi* di EUCLIDE, ai cui principî si riattaccano tutte, quale più quale meno direttamente, le formulazioni successivamente ideate.

EUCLIDE nel primo dei suoi ὅροι (il SIMON traduce *Abgrenzungen*) dice che: Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐδέν. Ben si comprende come questa asserzione, che interpretata *ad litteram* implica un assurdo logico, abbia dato luogo a commenti ed interpretazioni. Ma poichè, come è naturale, tanto la definizione euclidea di punto, quanto le varie sue interpretazioni non hanno mai avuto alcuno effettivo influsso sullo sviluppo logico dei singoli sistemi di Geometria, ciascuno dei quali è basato sul semplice presupposto del concetto intuitivo e irreducibile di **punto**, noi non ci tratterremo oltre su ciò, limitandoci ad accennare alla interpretazione del SIMON, il quale vede nell'enunciato di EUCLIDE una definizione per passaggio al limite (1).

2. La seconda « Abgrenzung » euclidea, in base al concetto di **dimensione**, ammesso come fondamentale (2), caratterizza la linea: Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

Dopo di che, nella terza *Abgrenzung*, è data la seguente definizione di retta: Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Di questa definizione sono state date le interpretazioni più varie (3).

Alcuni (facendo reggere direttamente il τοῖς σημείοις da κεῖται) traducono: *La retta è quella linea, che giace sui suoi punti in modo uniforme.* E questa uniformità di giacitura si interpreta in vario senso; così vi è chi la intende nel senso che, fissati due punti quali si vogliano della retta, questa non vi si possa adagiare in più modi differenti. Altri interpretano dicendo che preso un qualsiasi segmento di retta, in tutta la estensione di questa vi sono segmenti uguali a quello.

Ed altri, infine, vedono nella definizione euclidea l'affermazione che la retta è divisa in due parti uguali da ogni suo punto.

Ma, mentre la prima di codeste interpretazioni renderebbe

(1) SIMON, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*. Leipzig, 1901, pag. 25.

(2) SIMON, l. c., pag. 26.

(3) Cfr. SIMON, l. c., pag. 26.

superfluo l'assioma V: *Due rette non comprendono spazio alcuno*, le altre due non assegnano una proprietà che sia caratteristica per la retta, in quanto convengono altresì ad altre linee, come la circonferenza e l'elica.

Ingegnosa, sebbene alquanto ardita, è la interpretazione del SIMON, il quale pur mantenendo la ipotesi sintattica suindicata, traduce κεῖται come una forma passiva di τίθημι, onde la definizione diventerebbe: *Die Gerade ist die Linie, welche gleichmässig durch ihre Punkte gesetzt ist, d. h. die Gerade ist die Linie, auf der kein Punkt vor dem andern ausgezeichnet ist.*

Grammaticalmente e sintatticamente parmi più accettabile l'ipotesi di coloro che fanno reggere il τοῖς σημείοις dall'ἐξ ἴσου come un termine di comparazione, per modo che la definizione andrebbe tradotta: *La retta è quella linea che giace* (o *si distende* o, anche, *è posta*) *in modo uguale ai suoi punti.* E in appoggio di codesta traduzione letterale sta l'opinione di PROCLO, il quale, ad illustrare l'enunciato di EUCLIDE, aggiunge che la retta è l'unica linea, la cui lunghezza compresa fra due suoi punti qualsiansi coincide con la *distanza* di questi. E si potrebbe del pari osservare che la retta è l'unica linea, la cui *direzione* coincida con quella, in cui due suoi punti quali si vogliano si trovano l'uno rispetto all'altro.

Ma già troppo ci siamo indugiati su codeste interpretazioni, delle quali forse nessuna può senz'altro escludere le altre, in quanto presumibilmente ciascuna di esse riflette una faccia particolare del pensiero di EUCLIDE. È una idea preconcetta ed assai discutibile quella che ci induce a identificare la parte che EUCLIDE assegnava, nel suo edificio geometrico, agli ὅροι con l'ufficio che noi oggigiorno, dominati da preoccupazioni critiche, attribuiamo alle *definizioni* della Matematica in generale e della Geometria in ispecie. Par lecito pensare che EUCLIDE negli ὅροι intendesse semplicemente di stabilire la nomenclatura geometrica (1), riserbando ai « postulati » e alle « nozioni comuni » quelle proprietà degli enti fondamentali, che dovevano essere immediatamente applicate nelle successive deduzioni. Così EUCLIDE, dopo avere enunciato la sua definizione di retta, *postula* che sia possibile il condurre da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto una retta ed afferma, tra le *Nozioni comuni*, che due linee rette non comprendono spazio alcuno.

(1) Riportiamo qui, desumendole dal SIMON (l. c., pag. 25), le seguenti parole del LAMBERT (Briefe an Holland [Deutsch. Gelehrt. Briefwechsel I, Bd. IV]): « Dass Euclid seine Definitionen vorausschickt und anhäuft, das ist gleichsam eine Nomenclatur. Er thut dabei weiter nichts, als was z. B. ein Uhrmacher oder anderer Künstler thut, wenn er anfängt seinem Lehrjungen die Namen seiner Werkzeuge bekannt zu machen. Cfr. altresì: ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Kopenhagen, 1896, pag. 115.

3. Le definizioni di retta che, accanto a quella euclidea, ebbero maggior fortuna nella scuola, si riattaccano tutte, quale più quale meno direttamente, al fatto geometrico fondamentale che *la retta è determinata da due suoi punti quali si vogliano.*

Possiamo ripetere col BOLZANO che ponendo due punti si mettono in evidenza due concetti o *predicati: distanza* e *direzione.*

Sul concetto primitivo di *distanza* che già vedemmo comparire nella interpretazione data da PROCLO della definizione euclidea, è fondata la definizione che caratterizza la retta come *la linea più breve compresa fra due suoi punti quali si vogliano.* Codesta definizione, che si fa risalire ad ARCHIMEDE (1), fu ripresa dal LEGENDRE, che precisamente definisce la *retta* come « *il più corto cammino tra due punti* ». Questa definizione ebbe il medesimo largo successo degli « *Éléments de Géométrie* ». Ma sono senz'altro manifesti i difetti che essa presenta, se non è associata ad un opportuno sistema di postulati, i quali determinando, indipendentemente dalla retta, il concetto di lunghezza, rendano possibile il confronto, rispetto alla lunghezza, di linee diverse e stabiliscano l'esistenza e l'unicità del *minimo.* Un siffatto sistema fu stabilito dal BETTAZZI (2), il quale, partendo, in sostanza, dalla nozione di *coppia di punti,* rigidamente connessa e invertibile, giunse a dare così al concetto del LEGENDRE una formulazione logica rigorosa.

Il secondo predicato della coppia dei punti, cioè la *direzione,* fu posto a base di un'altra definizione di retta. È presumibile che codesta idea sia assai antica; ma essa trova per la prima volta una attuazione sistematica nella *Ausdeh-*

(1) Questa definizione si fa risalire ad ARCHIMEDE: ma il KILLING sostiene che l'indicata proprietà non ha in ARCHIMEDE ufficio di definizione.

2) *Il concetto di lunghezza e la retta.* Ann. di Mat. 1892.

nungslehre del GRASSMANN, sulle cui tracce essa fu poi ulteriormente elaborata dallo SCHLEGEL [1]. Questi, dopo aver notata la infinita varietà di movimenti, che si possono imprimere ad un punto al principio della sua variazione di posizione, definisce la *direzione* come il contrassegno del movimento iniziale entro codesta molteplicità di movimenti possibili, e chiama *semplice* il movimento totale (finito) di un punto che continua nel suo movimento iniziale (cioè una *traslazione*). Dopo di ciò lo SCHLEGEL chiama *retta* la traiettoria di un punto in un movimento semplice [3].

A codesta definizione si può ravvicinare quella, che solitamente si attribuisce al LEIBNIZ, sebbene fosse già anteriormente nota, e che si riattacca essa pure al fatto fondamentale della determinazione della retta mediante due suoi punti, cioè la definizione, per cui la *retta* è considerata come la *linea che resta immobile quando si fa ruotare intorno a due suoi punti tenuti fissi* [3].

Tanto la definizione di GRASSMANN-SCHLEGEL, quanto quella del LEIBNIZ non possono manifestamente essere scelte a base di una formulazione logica della Geometria se non è prima caratterizzato, mediante un opportuno sistema di postulati l'insieme (*gruppo*) di movimenti. Un tale risultato non è certamente raggiunto dalle considerazioni, dianzi accennate, dello SCHLEGEL nell'ordine di idee del GRASSMANN [4]; mentre invece un assetto logico rigoroso, in base alla definizione del LEIBNIZ, è stato recentemente assegnato dal PIERI [5].

4. Il succinto esame, che abbiamo così compiuto delle varie definizioni successivamente proposte per la retta, ci mostra come esse tutte (tolta, forse, la definizione assolutamente indeterminata di EUCLIDE) presuppongano altri concetti (*direzione, distanza, movimento*) che (si può notarlo subito) appaiono tutti meno evidenti e più complessi del concetto stesso di retta che si vuol definire. Ad ogni modo, qualunque sia per essere il giudizio che su quest'ultimo punto si vorrà portare, è senz'altro messa in luce la necessità di caratterizzare con opportuni postulati o il concetto stesso di retta o altri concetti fondamentali, a cui quello si possa ricondurre.

[1] *System der Raumlehre.* Leipzig, 1872.

[2] Per una esposizione critica più completa del sistema del GRASSMANN e dello SCHLEGEL rimandiamo all'opera già citata del VERONESE, pagg. 600 e segg.

[3] Il GAUSS ebbe a notare che di codesta proprietà si fa uso quando, mediante il teodolite, si vuol verificare un allineamento rettilineo.

[4] In quest'ordine di idee si veda anche DIXON: *The foundations of Geometry.* Cambridge, 1891.

[5] *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, serie II, t. XLIX, 1899. Cfr. anche la più recente Memoria dello stesso autore citata a pag. 79.

Di ciò avremo ad occuparci fra poco; prima per altro daremo un rapido sguardo alle varie definizioni di piano.

Le definizioni di piano.

5. In generale il concetto di piano si riattacca a quello di retta.

EUCLIDE dopo aver detto che *superficie* è ciò che possiede soltanto lunghezza e larghezza, (Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλατος μόνον ἔχει) aggiunge: Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τᾶις ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Si ritrovan qui la stessa oscurità e la stessa ambiguità, che si incontrano nella definizione euclidea di retta; e ci sembra inutile di indugiarci a esporre le varie possibili interpretazioni, poichè, in sostanza, esse rispecchiano, quasi una per una, quelle che abbiamo enumerato nel caso della retta. Importa soltanto notare che qui nasce una questione nuova, relativa alla moltitudine delle rette che la definizione presuppone giacenti sul piano.

Largo favore ottenne la definizione (che il CRELLE attribuisce a ROBERT SIMSON e altri fa risalire ad ERONE) per la quale il *piano è caratterizzato dalla proprietà di contenere per intero ogni retta di cui contenga due punti.*

Il GAUSS [1] osservò che questa definizione include un postulato (o un teorema), in quanto si ottiene già il piano, proiettandone una retta da un punto ad esso appartenente. Il CRELLE [2] si propose di assumere a definizione di piano la costruzione or ora indicata, cercando poi di dimostrare per una parte, che la superficie ottenuta è indipendente dal punto e dalla retta, scelti a base della costruzione, e per l'altra, che una retta avente comuni con quello due punti vi

[1] Lettera a BESSEL. Göttingen, 27 luglio 1829.

[2] *Zur Theorie der Ebene*, Crelle 's Journal, XLV, 1845.

giace per intero. Ma le deduzioni del CRELLE non sono rigorose e lasciano perciò insoluta la questione.

Se noi vogliamo esaminare quale sia il contenuto logico della asserzione che una retta avente comuni due punti con un piano vi giace per intero, e ci proponiamo, precisamente, di vedere da quali premesse codesta proposizione si possa far logicamente dipendere, dobbiamo anzitutto avvertire che non si ottiene l'intero piano, proiettando da un punto una retta non passante per esso, ma occorre aggiungere la parallela pel punto alla retta data. Ma ad eliminare dapprincipio codesta complicazione, in un certo senso accessoria, ci limiteremo a definire dapprima la regione piana che si ottiene proiettando da un punto un segmento (la cui retta non passi pel punto). E allora nasce il problema di determinare, su quali basi si possa dimostrare che codesta regione piana contiene per intero il segmento congiungente due quali si vogliano suoi punti.

A tale scopo non bastano le proprietà della retta relative all'ordinamento dei suoi punti e alla congruenza dei segmenti, neppure con l'aggiunta della determinazione della retta mediante due punti. Infatti l'ENRIQUES nota che, assumendo come relazione di congruenza segmentaria quella di uguaglianza d'arco, si possono costruire sistemi di linee piane aperte, non terminate (tali quindi che valgano per esse le proprietà di ordinamento dei punti) e determinate da due loro punti generici, per le quali la proprietà suindicata non si verifica.

Risulta di qui, che, ove si voglia stabilire la proposizione fondamentale del piano, è necessario aggiungere alle suindicate premesse, relative all'ordinamento e alla congruenza segmentaria, qualche ulteriore affermazione, che si riattacchi ad altre proprietà della retta.

A questo proposito sono singolarmente interessanti le considerazioni del VERONESE [1], il quale, per giungere alla dimostrazione della proposizione fondamentale del piano, presuppone, accanto ai caratteri di ordinamento e di continuità della retta e alle proprietà della congruenza segmentaria (o corrispondenza per uguaglianza fra due rette), quelle altresì della congruenza (o corrispondenza di uguaglianza) fra le coppie di rette incidenti (concepite, come ben si comprende, indipendentemente dal piano).

[1] *Fondamenti di Geometria*, pag. 240. Cfr. anche PALATINI, *I principii della Geometria esposti secondo il metodo del prof. Veronese*, Giornale di Matematica, t. XLI (10° della 2ª serie), Napoli, 1904.

Precisamente egli stabilisce il seguente *postulato*: *Date due coppie di rette ab, a'b' di vertici A, A', e posta fra a, a'; b, b' una delle due corrispondenze di eguaglianza che possono porsi facendo corrispondere A, A', se il segmento che unisce due punti E, F di a, b è uguale al segmento che unisce i due punti corrispondenti E', F', lo stesso avviene per due qualsiansi segmenti che congiungono E ed E' (oppure F ed F') rispettivamente con due punti corrispondenti di b, b' (a, a').*

Oltre a ciò, il VERONESE, in quanto non si limita a considerare la regione piana, ma si propone senz'altro di definire l'intero piano, onde è condotto a dover considerare la parallela pel punto dato alla retta direttrice, tratta separatamente i tre casi, cui danno luogo le varie possibili ipotesi circa l'esistenza e la molteplicità delle parallele per un punto a una retta prefissata.

Nel caso euclideo della parallela unica, che a noi più interessa, egli, data la necessità di definire la retta indipendentemente dal piano, si scosta dalla definizione tradizionale, e chiama parallele due rette *opposte* (cioè simmetriche) rispetto ad un punto. Dopo di che assume il postulato delle parallele sotto la forma seguente: *Due rette opposte rispetto ad un punto sono pure opposte rispetto al punto medio di ogni loro segmento trasversale* [1].

Allora, ammesso come ulteriore postulato che « *se in un triangolo due lati diventano infinitamente piccoli, anche il terzo lato diventa tale* » si dimostra, in base alla supposta continuità della retta, che « *se da un qualsiasi punto interno (o esterno) di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, essa incontra il terzo lato del triangolo in un punto interno (o, rispettivamente esterno)* ».

Dopo di che si stabilisce agevolmente la proposizione

[1] Veramente basta ammettere che « se due rette sono opposte rispetto ad un punto, preso un punto medio di un qualsiasi segmento trasversale, esistono sulle due rette due punti diversi dagli estremi di codesto segmento, i quali sono opposti rispetto al punto considerato ». Cfr. PALATINI, l. c., pag. 18.

fondamentale del piano, mostrando che *se una retta taglia due lati di un triangolo, essa o taglia anche il terzo o gli è parallela.*

Nel caso ellittico (o riemanniano) il VERONESE per dimostrare la proposizione fondamentale aggiunge una ipotesi ulteriore relativa all'indipendenza del campo finito intorno ad un punto (in un piano) dai campi infiniti e infinitesimi intorno ad esso (1). Mentre poi, per quel che riguarda il caso iperbolico o di LOBATSCHEFSKIJ, si limita a dimostrare indipendentemente dal piano alcune proprietà delle perpendicolari a una retta; ed è degno di nota che il VERONESE in codeste proprietà, le quali sono comuni ai tre sistemi, vide una indicazione della via da tenere per costruire una dimostrazione della proposizione fondamentale del piano, indipendente dal postulato delle parallele, dimostrazione che egli afferma di ritenere possibile (2).

La quale affermazione, forse, non sembra sufficentemente giustificata dagli sviluppi dianzi accennati del VERONESE, in quanto non appaiono ben manifesti il contenuto e la portata della ipotesi, di cui egli si vale nel caso ellittico, mentre, per altra parte, nello stesso caso euclideo non pare senz'altro escluso che il postulato del VERONESE, relativo alle rette opposte rispetto ad un punto, possa contenere qualche cosa di più della pura e semplice ipotesi della unicità della parallela.

Ad ogni modo, sebbene non sia ancora detta l'ultima parola su questa interessante questione della dipendenza fra il postulato del piano e il postulato euclideo delle parallele, spetta al VERONESE il merito di aver fissato pel primo un sistema di premesse, da cui si può rigorosamente dedurre la proposizione fondamentale del piano.

6. Alla obbiezione sollevata dal GAUSS contro la definizione di piano suindicata, era ben naturale che taluno pensasse di ovviare, ricorrendo a un modo diverso di introdurre il piano.

Così già il CRELLE fece ricorso alla definizione (che egli attribuisce al FOURIER) per cui il piano è dato come l'*insieme delle rette ortogonali in un punto ad una retta data*; ma, aggiunge, che sebbene egli trovi codesta definizione preferibile alle altre, non è riuscito a stabilire in modo rigoroso i teoremi, dai quali essa dipende. Invero la nominata definizione presuppone la nozione di rette ortogonali, indipendentemente da quella di piano. A questa difficoltà si propose di ovviare il DEAHNA (1); egli, presupponendo stabilite le nozioni di retta e di sfera, ammette che in ogni movimento dello spazio, che lascia fermo un diametro della sfera, i punti di questa si muovano, descrivendo delle linee chiuse (cerchi). Ciascuno di questi cerchi, in ogni movimento dello spazio intorno al diametro prefissato, scorre su sè stesso, e uno di essi divide la sfera in due parti congrue. Dicesi allora *piano* l'insieme delle rette che dal centro della sfera proiettano i punti di questa circonferenza.

D'altro canto si può notare che, ove, sulle tracce del KILLING, si definisca l'angolo retto indipendentemente dal piano, la concezione del FOURIER può senz'altro ricevere una formulazione rigorosa (2).

7. Le definizioni ricordate sin qui fanno dipendere il concetto di piano da quello di retta. Ma altre ne furono proposte, le quali, inversamente, subordinano la nozione di retta a quella di piano.

Così il LEIBNIZ (3) considerò il *piano* come la *superficie che divide lo spazio in due parti congrue* e la *retta* come *la linea che divide il piano in due parti congrue.*

Queste definizioni richiedono che si assumano come nozioni primitive quelle di *punto* e di *equidistanza* e che si de-

(1) VERONESE, l. c. pag. 361.
(2) VERONESE, l. c. pag. 379.

(1) *Demonstratio theorematis, esse superficiem planam* ecc. Marburg 1837.
(2) *Einführung...* II Bd. S. 183 u. ff.
(3) *Leibnitzens math. Schriften.* G. J. GÉRHARDT. Berlin 1845. Veramente la definizione or ora ricordata di retta si trova già, come mi fu comunicato dal prof. G. VAILATI, nella *Geometria empirica* di JOHACHIM JUNGIUS, il quale, anzi vi risponde anticipatamente all'obbiezione che fu sollevata da GIORDANO VITALE da Bitonto contro la definizione del LEIBNIZ; vale a dire all'obbiezione che anche altre linee diverse dalla retta (come la sinusoide) dividono in due parti il piano. J. JUNGIUS nota, in sostanza, che la retta è l'unica linea che divida il piano in due parti che possano sovrapporsi l'una all'altra tenendo fermo un punto della linea stessa. — Quanto alla disputa fra il LEIBNIZ e GIORDANO VITALE, si vedano le opere matematiche del primo.

terminino, con un opportuno sistema di postulati, le *simmetrie* che esistono sulla retta, nel piano e nello spazio (1).

A codesta concezione del LEIBNIZ si possono riattaccare le definizioni di retta e piano, che fanno dipendere la generazione di codeste figure fondamentali dalla sfera e dal cerchio e che furono per la prima volta applicate sistematicamente dal BOLYAI e dal LOBATSCHEFSKIJ. In vista delle radicali modificazioni che siffatte definizioni implicano nell' assetto dei principi della Geometria elementare, e in ragione anche del particolare interesse storico e scientifico che è dovuto alle concezioni del BOLYAI e del LOBATSCHEFSKIJ, noi ci tratterremo nel seguente paragrafo ad abbozzare *sotto forma puramente intuitiva*, la serie di osservazioni, con le quali sulle tracce di codesti due Geometri si possono introdurre le forme *piano* e *retta*: e intanto noteremo che la concezione, di cui qui si fa parola, si fa risalire al LEIBNIZ (2).

Sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij.

8. Assumiamo come nozione primitiva quella di *coppia di punti, invariabilmente connessa ed invertibile*, quale è suscitata in noi dall' idea di coppie di punti (materiali) appartenenti a corpi sensibilmente rigidi: e sia stabilito in tutta la sua estensione il concetto della *congruenza*, come è dato dal *movimento* dei corpi rigidi.

Due coppie di punti AB, CD si diranno *congruenti*, quando esiste un movimento dello spazio che sovrappone A a C e B a D: esiste allora anche un movimento che sovrappone A a D e B a C. Si esprime lo stesso fatto, dicendo che la *distanza* di A e B è eguale alla *distanza* di C e D. In particolare si dice che due punti B e C sono *equidistanti* da un terzo punto A, se le coppie AB, AC sono congruenti.

Dati due punti O ed A, dicesi *sfera di centro O e passante per A* l' insieme dei punti M, tali che A ed M siano equidistanti da O. La coppia OA (od ogni altra coppia a quella congruente) dicesi anche *raggio* della sfera costrutta. In ogni movimento dello spazio che lascia fermo il punto O la sfera scorre su sè stessa.

La sfera divide lo spazio in due regioni, l' una costituita di *punti esterni*, l' altra di *punti interni*, e tali che non si può passare con un tratto continuo da un punto interno ad uno esterno, o viceversa, senza attraversare, almeno in un punto, la sfera stessa. Dei *punti esterni* dicesi anche che hanno dal centro *distanza maggiore* del raggio; dei *punti interni*, che hanno dal centro *distanza minore* del raggio.

Le sfere, che hanno un medesimo centro O, non possono avere a due a due punti comuni. Il loro insieme (*fascio*) è *ordinato* e *continuo*. Il primo di questi caratteri dipende dal fatto che, nel fascio, se una sfera S_1 è interna ad una sfera S e una terza sfera S_2 è interna ad S_1, si ha ancora che la S_2 è interna alla S; il secondo sta in relazione con la continuità dello spazio.

9. Due sfere S ed S', di centro O ed O' rispettivamente, e tali che la seconda abbia dei punti interni ed esterni alla prima, si intersecano in una linea *continua* e *chiusa* k, che dicesi *cerchio*. In ogni movimento dello spazio, che lascia fermi i punti O ed O', il cerchio scorre su sè stesso; ed esistono due ben determinati movimenti, fra loro *inversi*, per ciascuno dei quali O ed O' restano fermi, ed ogni punto di k, dopo aver descritto l' intero cerchio, ritorna nella posizione primitiva.

Se due sfere S, S' hanno due punti A, B in comune, si può passare da A a B per mezzo di due archi di curva, continui e appartenenti alle due sfere: cioè le due sfere si intersecano in un *cerchio*, passante per A e per B.

Siano due *terne* ABC, $A'B'C'$, tali che le coppie AB, BC, CA che si possono formare coi punti della prima siano ordinatamente congruenti alle coppie $A'B'$, $B'C'$, $B'A'$, formate coi punti della seconda: *le due terne sono allora congruenti.* Si muova infatti la seconda terna nello spazio fino a far coincidere, come è possibile, A' con A e B' con B. Poichè, in questa nuova posizione, la coppia AC è congruente alla AC', e la BC alla BC', le sfere di centro A, B e raggio AC, BC rispettivamente passano anche per C', onde il cerchio, loro comune intersezione, contiene i due punti C e C', ed è quindi

(1) Cfr. BRODÈN, *On geometriens principien.* Sull' ufficio delle simmetrie nella dimostrazione della proposizione fondamentale del piano si veda ENRIQUES: *Sopra le superficie e le varietà a più dimensioni le cui geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari.* Rendiconti della R. Accad. delle Sc. di Bologna, 1902-03.

(2) UYLENBRÖK, *Christiani Hugenii aliorumque saeculi XVI virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae.* Hagae MDCCCXXXIII, fasc. II.

possibile, con due diversi movimenti, sovrapporre C' a C, lasciando fermi A e B.

Assegnato sopra un cerchio k un punto A, esiste su quello un punto B ed uno solo, tale che i due archi AB, in cui il cerchio resta così diviso, siano congruenti (1). Il punto B dicesi *opposto* di A su k.

10. Se due sfere S ed S' di centri O ed O' rispettivamente, si intersecano in un cerchio k, ciascuna di esse è da k divisa in due *regioni sferiche*, delle quali una è costituita di tutti punti interni, l'altra di tutti punti esterni rispetto all'altra sfera. Chiamiamo Z_1, Z_2 le due regioni, in cui S è divisa da k, o, come diremo, le due *regioni* di S, relative a k, e siano la prima interna, la seconda esterna ad S'. Se S_1' è una sfera di centro O', distinta da S' e interna ad essa (o, come si può dire, di raggio minore) e la S_1' interseca S in un cerchio k_1, questo cerchio, dovendo essere costituito di tutti punti appartenenti ad S e interni ad S', apparterrà per intero alla regione Z_1. Se allora nel fascio delle sfere concentriche ad S' consideriamo l'insieme delle sfere intersecanti S, in relazione con l'ordine e la continuità di questo, risulta ordinato e continuo anche l'insieme *(fascio)* dei cerchi, intersezioni di S con le sfere considerate. Esisterà allora nella regione Z_1 della sfera S un punto X ed uno solo *interno* a tutti i cerchi del fascio considerato. La sfera Σ_1 di centro O' e passante per X non può aver comune con S un ulteriore punto, perchè in tal caso intersecherebbe S secondo un cerchio passante per X e appartenente al fascio, di cui ciascun cerchio deve, invece, contenere X al suo interno. Tutti i punti di Σ_1 distinti da X sono esterni ad S. Ogni sfera di centro O' ed interna a Σ_1 non ha con S alcun punto comune.

Analogamente si costruisce una sfera Σ_2 di centro O', maggiore di S' e avente in comune con S un punto Y ed uno solo: ogni punto di S, diverso da Y è interno a Σ_2: tutte le sfere di O' e maggiori di Σ_2 non hanno alcun punto comune con la S.

Le due sfere Σ_1, Σ_2 diconsi *tangenti* ad S: X e Y sono i rispettivi *punti di contatto*.

In ogni movimento dello spazio che lascia fermi i punti O ed O', restano fermi anche i punti X e Y: se, infatti, si

(1) Cfr. Art. 5°.

muovessero, descriverebbero due cerchi che dovrebbero essere comuni ad S e a Σ_1, ad S e a Σ_2 rispettivamente.

11. Siano dati nello spazio tre punti A, B e C. Se consideriamo l'insieme dei movimenti dello spazio che lasciano fermi i punti A e B, il punto C o rimane fermo in ciascuno di essi o in ciascuno di essi si muove in un cerchio k, intersezione delle due sfere di centro A, B e raggio AC, BC rispettivamente. *Escluso il primo caso*, ciascun movimento dell'insieme considerato fa descrivere ai singoli punti di k archi di cerchio congruenti (e in uno stesso verso). Se quindi in un particolare movimento dello spazio, che lascia fermi A e B, anche il punto C sta fermo, codesto movimento farà descrivere un arco nullo a ciascun punto di k, cioè lascierà fermi tutti i singoli punti di codesto cerchio.

Ora vogliamo dimostrare, che il movimento, che lascia fermi A, B e tutti i punti del cerchio k, si riduce al movimento *identico*, che lascia fermi tutti i punti dello spazio.

Consideriamo infatti la sfera S di centro A e passante per C: essa conterrà per intero il cerchio k. Sulla S, in *ogni* movimento che lascia fermi A e B, restano fermi due punti X, Y (punti di contatto con S delle sfere di centro B e tangenti a quella), i quali cadono nelle due diverse regioni sferiche di S relative a k. Se h è il cerchio intersezione con S di una sfera avente il centro in un punto H di k, questo ultimo cerchio intersecherà h in due punti M, N. Nel movimento considerato, che lascia fermi A, B e tutti i punti di k (in particolare M ed N) o tutti i punti di h restano fermi o i due archi MN di h vengono scambiati fra loro. Se si verificasse quest'ultimo caso dovrebbero, nel movimento considerato, essere tra loro scambiate le due regioni di S, relative a k, e ciò non può accadere, giacchè ciascuno dei punti X, Y rimane fermo. Si conclude così che tutti i punti della sfera S restano fermi. Ma allora, considerata un'altra sfera qualsivoglia S', che abbia il suo centro in B e intersechi in un cerchio h' la S, possiamo applicare ad S' lo stesso ragionamento applicato dianzi ad S e concluderne che anche tutti i punti di S' stanno fermi. Così, successivamente, si dimostra che nel movimento considerato restano fermi tutti i punti dello spazio, onde è lecito enunciare il seguente

LEMMA — *Se in un particolare movimento* (non identico), *che lascia fermi due punti A e B, resta fermo un terzo punto C,*

questo punto resta fermo in ogni movimento, che lascia fermi A e B.

12. Premesse queste osservazioni, fissiamo due punti O ed O' qualsivogliano dello spazio, e consideriamo la sfera S di centro O e passante per O' e la sfera S' di centro O' e passante per O.

Poichè S ha punti interni ad S', ed S' ad S, le due sfere si incontreranno in un certo cerchio k: di più tutte le coppie di sfere S_1, S_1' di centro O ed O' rispettivamente e di raggio eguale, ma maggiore di OO', avranno a comune un cerchio, giacchè ogni punto di S interno ad S' è pure interno ad S_1', e ogni punto di S' interno ad S è pure interno ad S_1'. Infine delle coppie di sfere di centro O ed O' e di raggi eguali, ma minori di OO', consideriamo quelle che hanno un cerchio comune. Nei due fasci esisteranno due sfere Σ, Σ', di raggi eguali, tra loro tangenti, e tali che le sfere dei due fasci interne a Σ e Σ', rispettivamente, non hanno alcun punto in comune.

Il sistema π di tutti i cerchi così ottenuti (aggiuntovi il punto di contatto di Σ e Σ') dicesi *piano*: in altre parole *dicesi* **piano** *il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti* (fondamentali).

Il *piano* divide lo spazio in due parti, delle quali la prima contiene quei punti che hanno da O una distanza minore che da O', la seconda i punti che hanno da O' una distanza minore che da O. Dall'una all'altra non si può passare con un tratto continuo, senza attraversare il piano.

Se muoviamo nello spazio l'insieme di tutte le sfere indicate dianzi, in modo che i punti O ed O' si scambino fra loro, il piano π vien sovrapposto a sè stesso.

13. Dati due punti A e B, consideriamo le due sfere di centro A e B e raggio AB, BA rispettivamente; esse avranno a comune un certo cerchio h: su h si prendano due punti P e Q *opposti*. Le terne APQ, BPQ, le cui coppie sono a due a due ordinatamente congruenti, saranno congruenti: quindi è possibile, tenendo fermi A, B, scambiare P e Q; ne discende che sul cerchio k, intersezione delle due sfere di centri P e Q rispettivamente e passanti per A (e quindi per B), i due punti A e B sono *opposti*.

Si costruisca allora il piano, luogo dei punti equidistanti da P e Q, al quale apparterranno, in particolare, i punti A e B: indichiamo con π il sistema fondamentale di cerchi del piano considerato. Dico che nel movimento, dianzi indicato, che lasciando fermi A e B, scambia P e Q, restano fermi su ciascun cerchio di π due punti.

Infatti se è k' un cerchio di π diverso da k ed M un suo punto, che nell'accennato movimento dello spazio non resti fermo, questo dopo il movimento sarà in M': se R ed S sono i due punti, che dividono per metà i due archi MM' di k', gli archi RM ed SM vengono dal movimento indicato sovrapposti a RM' ed SM' rispettivamente: dunque P e Q restano fermi. Resta fermo ancora il punto di contatto di Σ e Σ'. Esiste quindi, nel piano π considerato per A, B, una linea r, la quale passa per questi punti e *gode della proprietà che tutti i suoi punti restano fermi nel movimento che, lasciando fermi A e B,* inverte *il piano* π. Poichè siffatto movimento non è *identico*, risulta dal LEMMA del n. 11, che i punti di r restano fermi *in ogni movimento dello spazio, che lascia fermi A e B.*

Ma osserviamo che il movimento, che, lasciando fermi A e B, inverte il piano π, scambia fra loro le due parti, in cui quel piano divide lo spazio: cioè scambia ogni punto giacente da quella parte di π dove cade P con un punto giacente dalla parte opposta. Ne discende che nel movimento considerato nessun punto dello spazio resta fermo fuori del piano π: onde si conclude che la linea r è il luogo dei punti dello spazio, che restano fermi in ogni movimento che lascia fermi A e B.

Il luogo dei punti dello spazio che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi due punti A e B, dicesi **retta** AB.

La *retta* in relazione col sistema dei due fasci risulta *ordinata in modo continuo:* si ha quindi che ogni punto della retta la divide in due parti, a ciascuna delle quali si dà nome di *semiretta* o *raggio*. Un raggio si designa, indicandone l'origine ed un punto.

La retta è determinata da due suoi punti qualsivogliano.

La retta AB, infatti, è definita come luogo dei punti che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi A e B. Fissato uno qualsivoglia dei movimenti soddisfacenti a codesta restrizione, in esso resterà fermo insieme con A e B un altro qualsiasi C dei punti della retta. Allora, poichè esiste un movimento che lascia fermo, insieme con A e C, anche B, avremo,

per il LEMMA, che in ogni movimento, che lascia fermi A e C, resta fermo anche il punto B. Se ne conclude che le rette BA, AC, coincidono e, più in generale, che sussiste il teorema enunciato dianzi.

14. Diremo *coppia di raggi* l'insieme di due raggi uscenti da un punto O *(vertice della coppia)* e invariabilmente connessi. Due coppie di raggi ab, $a'b'$, si diranno congruenti, quando esiste un movimento dello spazio che permette di sovrapporre il vertice dell'una al vertice dell'altra e i due raggi dell'una rispettivamente ai due raggi dell'altra. Ammetteremo l'*invertibilità* della coppia.

Date due coppie *congruenti*, ab di vertice O, $a'b'$ di vertice O', se A, B, A', B' sono punti di a, b, a', b' rispettivamente, tali che le coppie di punti OA, OB siano congruenti ordinatamente ad $O'A'$, $O'B'$ si verifica col movimento che le due terne OAB, $O'A'B'$ sono congruenti e, quindi, sono congruenti le coppie di punti AB, $A'B'$ e le coppie di raggi AO, AB ed $A'O'$, $A'B'$; BO, BA e $B'O$, $B'A$.

15. Dalla generazione del piano data al n. 12 possiamo ora dedurne un'altra.

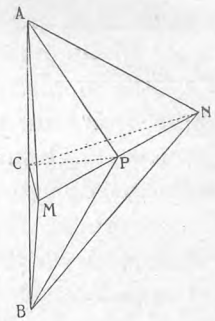
Definita nel piano π la retta r, il piano può immaginarsi generato da quella, nel movimento dello spazio che lasciando fermi i punti P e Q, sovrappone A a sè stesso. In altre parole il piano può essere generato per mezzo della costruzione seguente: Dati un cerchio e due punti A e B di esso, tra loro opposti, i punti C e D dividano per metà, rispettivamente, il segmento di retta AB e uno degli archi di cerchio AB.

La semiretta CD, nel movimento dello spazio che lascia fermi i punti A, B e sovrappone a sè stesso il cerchio ADB, genera il *piano*. La retta AB dicesi *perpendicolare* nel punto C al piano.

La coppia di raggi CD, CB è in ogni posizione del raggio CD congruente alla coppia CD, CA: e, reciprocamente, se per C passa un raggio CE tale che la coppia CB, CE sia congruente alla coppia CA, CE, il raggio CE segna una delle posizioni successivamente assunte dal raggio CD nel suo movimento generatore del piano: quindi il raggio CD appartiene per intero al piano.

Dopo ciò, possiamo dimostrare agevolmente il teorema fondamentale del piano: *Una retta che ha in comune con un piano due punti, vi giace per intero.*

Sia r una retta avente in comune con un piano π due punti M, N. Considerata la perpendicolare a π in un suo punto C qualsivoglia, siano A e B due punti di questa, giacenti da bande opposte del piano, e tali che AC sia congruente a CB. Se P è un qualsivoglia punto della retta MN, basterà far vedere che appartiene a π il raggio CP, o, ciò che è lo stesso, che la coppia di raggi CA, CP, è congruente alla coppia CB, CP. Perciò osserviamo che dalla congruenza delle terne ACM, BCM ed ACN, BCN risulta che AM, AN sono congruenti a BM, BN rispettivamente. Allora le due terne AMN, BMN, le cui coppie sono ordinatamente congruenti, sono congruenti ed hanno congruenti le coppie di raggi MA, MP ed MB, MP. Se ne conclude la congruenza delle terne AMP, BMP e quindi quella delle terne ACP, BCP: onde infine si ha che le coppie di raggi CA, CP e CB, CP sono congruenti, come appunto volevamo dimostrare.



Da questa proposizione fondamentale risulta che l'intero piano si ottiene assegnando due sue rette a e b, che si incontrino in un punto O e proiettando i punti di a da un punto B (distinto da O) di b, e i punti di b da un punto A (distinto da O) di a.

Nella generazione di piano assegnata dapprincipio hanno un ufficio tutto particolare i punti fondamentali, (centri dei due fasci di sfere). Qui vogliamo dare un cenno del modo, in cui si potrebbe dimostrare *la indipendenza della generazione del piano dai due punti fondamentali*. Siano P e Q i punti fondamentali per la costruzione di un piano π e sia k un cerchio di π, intersezione di due sfere di raggi eguali e di centri P e Q rispettivamente. Scelto fuori di π un punto R qualsivoglia, dico che esiste un punto S, tale che, scelti a punti fondamentali R ed S, si ottiene, con la costruzione assegnata, precisamente il piano π. Se infatti A, B, C sono tre punti qualsivogliano di k, si può dimostrare che le tre sfere di centro A, B, C rispettivamente e passanti per R, si incontrano in un ulteriore punto S, unico e determinato. I punti A, B, C sono, ciascuno, equidistanti da R e da S: quindi appartengono al piano π', definito (come luogo dei punti equidistanti) da R e da S. Ma, per la proposizione fondamentale π'

conterrà ancora le rette AB e BC e tutte le rette ottenute proiettando da A i punti di BC e da B i punti di AC. Ma codeste rette appartengono anche a π ed anzi, come abbiamo osservato, esse generano l'intero piano π. Dunque π e π' coincidono, e si può concludere che per ogni punto dello spazio fuori di un piano, esiste un altro punto (*simmetrico* di quello rispetto al piano), che si può assumere insieme col dato a punto fondamentale nella costruzione del piano.

16. Vogliamo da ultimo far vedere che *tre punti, non allineati appartengono ad un piano.*

Siano A, B, C i tre punti. Nel modo indicato sopra, costruisco per A e B un piano π: se il punto C non appartiene ad esso, consideriamo il simmetrico C' di C rispetto a π. Si può in due modi sovrapporre C' a C con un movimento dello spazio che lascia fermi A e B. In questi due movimenti il punto C descrive due archi di cerchio, ciascuno dei quali, congiungendo due punti da bande opposte di π, lo incontra in un punto. Sia C_1 uno qualsivoglia dei due punti così ottenuti: poichè le terne ABC_1, ABC sono congruenti, è possibile con un movimento dello spazio, che lascia fermi A e B, (*inverso* di uno di quelli considerati dianzi) sovrapporre C_1 a C. Eseguendo codesto movimento su π, condurremo questo piano a passare, oltre che per A e B, anche per C.

L'*unicità* del piano passante per A, B, C discende dalla proposizione fondamentale del piano [1].

II.

Postulati di appartenenza.

17. Nei paragrafi precedenti abbiamo passato in rassegna le principali definizioni successivamente proposte, dai geometri greci in poi, per le forme fondamentali *retta* e *piano;* e per ciascuna di codeste definizioni abbiamo indagato quali

[1] Alle concezioni di Bolyai e Lobatschefskij è anche ispirato, in parte, l'*Essai sur les principes fond. de la géométrie et de la mec.*, Bordeaux, 1879 del de Tilly; e si devono qui ricordare anche *I nuovi fondamenti di Geometria*, (Giorn. di Battaglini, vol. XX, 1881) del Cassani, il quale definisce la retta come luogo dei punti equidistanti dai tre punti di una *terna regolare* (equilatera) e il piano come superficie generata da « una retta che si muova intorno a un punto sopra un circolo, appoggiandosi sempre al medesimo ».

altri concetti, implicitamente o esplicitamente, esigesse posti in antecedenza e indipendentemente dai concetti medesimi di retta e piano che si volevano definire.

Da questo punto di vista noi non abbiamo con ciò se non constatato, caso per caso, la impossibilità di risalire indefinitamente nel processo di riduzione logica dei concetti geometrici a concetti via via più semplici.

Questa veduta, pur tanto ovvia da apparire evidente *a priori*, non si affermò nettamente, nell'ordine storico, se non in tempi relativamente vicini a noi; e si può riattaccare direttamente all'inizio di quel movimento critico, che, determinatosi nella prima metà del secolo scorso col sorgere delle *Geometrie non euclidee*, si allargò mano mano, dalle indagini sui fondamenti della Geometria, fino ad involgere i più elevati problemi della Teoria della Conoscenza e della Logica pura.

In base alla accennata veduta noi dovremmo fin d'ora procedere alla indagine comparativa e alla critica dei *concetti primitivi* (che, cioè, si assumono senza ridurne la definizione ad altri più semplici) e dei *postulati* o proposizioni fondamentali (che cioè non vengono dimostrate per mezzo di altre proposizioni più elementari).

Ma se volessimo intraprendere questa indagine, proseguendo, anche solo in via storica, il determinarsi dei vari indirizzi critici nel quadro generale delle moderne ricerche sui principi della Geometria, ci dilungheremmo troppo dal modesto programma elementare, che, con intendimenti prevalentemente didattici, qui ci siamo prefissi. Una trattazione ampia e completa si ricerchi altrove [1]. Qui noi ci limiteremo ad esporre in forma rapida ed evitando sviluppi logici troppo sottili, i principi di quegli indirizzi geometrici, che ci sono sembrati più notevoli in sè stessi, ma anche più consentanei alle esigenze didattiche di uno svolgimento elementare della Geometria.

18. Nella scelta dei concetti primitivi, anche quando non si voglia scostarsi dall'assetto tradizionale della Geometria, vi è una certa arbitrarietà; ma, dal punto di vista della convenienza didattica e fors'anche sotto il rispetto psicologico della genesi intuitiva dei concetti geometrici, conviene as-

[1] Si veda in particolare l'Art cit. di F. Enriques nella *Encyklopädie* ecc.

sumere senz'altro come concetti primitivi il *punto*, la *retta* e il *piano*; ed è a questo partito che noi qui ci appiglieremo.

Pertanto, muovendo dal primo concetto fondamentale di *punto* (concetto capace di varie determinazioni il cui insieme costituisce lo *spazio*), si assumeranno senza definizione i concetti di alcune *particolari classi di punti*, denominate *retta* e *piano*, attribuendo a loro, anzitutto, le seguenti *proprietà di appartenenza* (*Verknüpfungsaxiome* dello HILBERT):

I. *Due punti appartengono ad una retta.*

II. *Tre punti, non in linea retta appartengono ad un piano ben determinato.*

III. *Un piano contiene la retta determinata da due qualsivogliano dei suoi punti.*

Ma a costituire la Geometria in sistema logico deduttivo non bastano codesti tre postulati: è nessario postulare ancora le prime proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, relative alle loro divisioni in parti: in altre parole, è necessario richiedere per postulati le proprietà della *retta* e del *piano*, che si riattaccano ai concetti di *segmento* ed *angolo*; e così pure quelle proprietà delle divisioni in parti dello spazio, che son legate al concetto del *diedro*.

Di codeste proprietà, che generalmente nei trattati di Geometria elementare sono desunte dalla intuizione e applicate tacitamente, ci occuperemo nei paragrafi che seguono.

Si avrebbe poi un terzo gruppo di proprietà geometriche legate al concetto della *congruenza* o del *movimento* (*proprietà metriche*), ma di queste non ci occuperemo, rimandando all'art. 4°. Ci limiteremo pertanto a mettere in luce quelle proprietà (*grafiche*) della retta e del piano (del segmento, dell'angolo e del diedro) che molto opportunamente possono introdursi prima di ogni nozione di congruenza.

Proprietà lineari della retta.

19. Le proprietà *segmentarie* rientrano in quella categoria di proprietà, che l'intuizione attribuisce alla retta considerata in sè stessa, astrazion fatta, cioè, da ogni relazione della retta medesima con lo spazio esteriore: sono quindi proprietà, che la retta ha comuni con tutte le linee intuitive, *aperte* e *non terminate*.

Codeste proprietà possono essere introdotte nel sistema geometrico in due modi ben distinti, ma tra loro equivalenti.

In primo luogo possiamo riferirci alla generazione della retta per mezzo di un punto mobile. Siamo allora condotti a postulare le proprietà inerenti agli *ordini naturali*, in cui vengono disposti i punti della retta. Siffatte proprietà sono logicamente formulate nel seguente postulato:

IV*a*. *I punti della retta sono disposti secondo due* ordini naturali *o* versi, *opposti l'uno dell'altro* (*che si ottengono l'uno dall'altro scambiando le parole* « precede » *e* « consegue ») *per modo che:*

α) *Dati due punti A, B, uno di essi* precede *l'altro, il quale allora* consegue *al primo.*

β) *Se A* precede *B, e B* precede *C, A* precede *C.*

γ) *Se A* precede *B, vi è qualche punto* conseguente *ad A e* precedente *a B.*

δ) *Non esiste alcun* primo *punto (precedente a tutti gli altri), nè alcun* ultimo.

Le proposizioni α) e β) spettano alla retta in quanto è linea *aperta* e illimitata; la γ) stabilisce che tra due punti A e B qualsiansi della retta ve ne sono altri, distinti da A e B; onde risulta poi che codesti punti *intermedi* sono in numero infinito.

Dati due punti A, B, resta determinato sulla retta AB un verso, cioè il verso in cui B segue A e che si può indicare con $\overrightarrow{AB}$. Il verso $\overrightarrow{BA}$ è l'*opposto* di $\overrightarrow{AB}$.

20. Preso sulla retta un punto A e fissato su di essa un verso, i punti che in codesto verso precedono A e quelli che seguono A costituiscono rispettivamente i due *raggi* della retta aventi l'*origine* A, ossia le due *parti*, in cui la retta è divisa da A. Per determinare una di codeste parti basta assegnare un punto B di essa, diverso dall'origine, e allora essa potrà designarsi con « raggio AB ». Dati due punti A, B, si definisce il *segmento* AB come l'*insieme dei punti della retta che sono fra A e B*, cioè dei punti, che in uno qualsivoglia dei due ordini naturali conseguono all'uno e precedono l'altro dei due punti A e B. L'unicità dell'ente, che è così definito in doppio modo, corrispondentemente ai due ordini della retta, è stabilita dal postulato premesso. I punti del segmento vengono così disposti in due *ordini naturali*, l'uno inverso dell'altro, e questi ordini hanno ciascuno un primo ed un ultimo elemento *(estremi del segmento)*.

In base al postulato IV*a* si dimostra che *il segmento AB*

è costituito dai punti comuni al raggio AB e al raggio BA, e si deducono i criteri che permettono di decidere se due segmenti *AB*, *CD* di una stessa retta abbiano o no una parte comune. Si dimostra cioè:

1) *Se il segmento AB contiene i punti C, D, ogni punto interno a CD è interno ad AB.*

2) *Se i punti C, D sono l'uno interno e l'altro esterno al segmento AB, i due segmenti AB, CD contengono un segmento comune.*

3) *Se i punti C, D della retta AB sono esterni al segmento AB, o i due segmenti AB, CD non hanno punti comuni, oppure il segmento CD contiene AB.*

NOTA. A completare le proprietà degli ordini naturali della retta occorre aggiungere il *postulato della continuità* (cfr. art. 5°).

21. Ma anzichè considerare la retta *genericamente*, noi possiamo, in secondo luogo, riguardarla nel suo aspetto *attuale;* ed allora come base intuitiva delle sue proprietà segmentarie si presenta la *divisione in parti.*

Seguendo questo concetto, codeste proprietà si possono postulare sotto la forma seguente:

IV*b* α) *Un qualsivoglia punto A di una retta p la divide in* due parti *(classi di punti), dette anche* semirette *o* raggi, *per modo che ogni punto diverso da A appartiene ad* una *delle due parti.*

β) *A ciascuna delle nominate parti appartengono punti.*

γ) *Siano A* e *B due punti qualsiansi della retta p: delle due parti, in cui essa è divisa da B, quella che contiene A contiene tutti i punti che sono dalla parte di A opposta a B e altri punti ancora.*

La possibilità che la retta sia una *linea chiusa* o *avente termini* è qui esclusa dalle proposizioni α) e β): la proposizione γ) determina quale relazione intercede fra tutte le possibili divisioni in parti della retta, che sono date dai singoli punti di essa: più precisamente ancora stabilisce che tra due punti *A* e *B* qualsivogliano della retta *p* esistono su questa altri punti distinti da *A* e *B* (in numero infinito).

Il *segmento AB* si definirà allora come *l'insieme dei punti comuni alla parte relativa ad A, che contiene B, e alla parte relativa a B, che contiene A.*

22. In base a questa definizione e al postulato IV*b* si

stabiliscono anche qui i criteri, enunciati al numero precedente, relativi agli eventuali punti comuni a due segmenti di una stessa retta.

E d'altro canto è pur facile stabilire, partendo dal postulato IV*b*, l'esistenza sulla retta dei due ordini naturali.

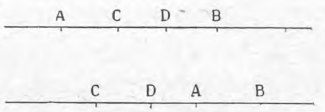
Si fissino invero su di essa due punti *A*, *B* (distinti) e si convenga di dire che:

1° *A precede B* (e *B segue A*);

2° Tutti i punti del raggio *AB* (eccettuato *A*) *seguono A* e tutti gli altri punti (fuori di *A*) *precedono A*;

3° Ogni punto precedente *A* precede anche ogni punto che segue *A*;

4° Se due punti *C*, *D* seguono *A*, *D* segue *C* se *A* e *D* sono da parti opposte rispetto a *C*; e se *C*, *D* precedono *A*, *D* segue *C* se *A* e *D* sono rispetto a *C* dalla stessa parte.



Rimane così determinato sulla retta un *ordinamento* (secondo il verso *AB*), e il postulato IV*b* permette di dimostrare che esso resta inalterato se, anzichè dai due punti *A*, *B*, si parte rispettivamente da due punti *C*, *D*, tali che rispetto alle convenzioni stabilite, *C* precede *D*. Se invece in codeste convenzioni si scambia l'ufficio di *A* con quello di *B* si ottiene sulla retta l'ordinamento secondo il verso $\overrightarrow{BA}$, *opposto* di $\overrightarrow{AB}$.

Dopo ciò e tenuto conto delle considerazioni del numero precedente, possiamo concludere che *i due postulati* IV*a* e IV*b* *sono fra loro equivalenti*, in quanto ciascuno di essi si deduce logicamente dall'altro.

23. NOTA. I due postulati IV*a* e IV*b* caratterizzano ciascuno le proprietà segmentarie delle linee *aperte* (e prive di punti doppi).

Non sarà, forse, inutile l'accennare qui come si modifichino codeste proprietà nel caso delle *linee chiuse.*

Se, anzitutto, adottiamo il punto di vista *genetico*, abbiamo ancora fra i punti di una linea chiusa una *disposizione naturale* avente due *versi*, l'uno opposto dell'altro.

Ma per determinare uno di codesti due versi non bastano più due punti ma ne occorrono tre (in una determinata disposizione). Risulta di qui che due punti *A*, *B* non definiscono un segmento della linea, ma la dividono in due segmenti

(complementari), che insieme costituiscono l'intera linea. Per individuare uno dei due segmenti AB sarà necessario assegnare un terzo punto C, *interno* al segmento (distinto dagli estremi) (1).

Se in secondo luogo si sceglie il punto di vista *attuale*, si debbono prendere ancora le mosse dal concetto di *coppie di punti che si separano;* e come fu messo in luce dal VAILATI (2), le proprietà di ordinamento delle linee chiuse sono caratterizzate dai seguenti postulati:

1° *Se su di una linea chiusa si separano le due coppie di punti AB, CD, si separano altresì le coppie CD, AB e AB, DC, mentre le coppie AC, BD non si separano.*

2° *Dati quattro punti A, B, C, D si verifica necessariamente uno ed uno solo dei tre casi seguenti:* a) *A, B separano C, D;* b) *A, C separano B, D;* c) *A, D separano B, C.*

3° *Se A, B separano C, D e A, C separano B, E, allora A, C separano D, E.*

Proprietà superficiali del piano.

24. Le prime proprietà *superficiali* del piano si riattaccano al concetto di *angolo*. Delle definizioni successivamente proposte per l'*angolo* e delle discussioni che ne derivano si troverà un'ampia e diligente rassegna nel II volume della *Planimetria comparata* dello SCHOTTEN (3). Io qui mi limiterò ad osservare, con lo SCHOTTEN stesso (*l. c.*, pag. 99), che le definizioni di *angolo* si possono classificare in tre gruppi:

1° *Angolo è la differenza di direzione delle rette.* A questa definizione si può ravvicinare quella di EUCLIDE, per cui *l'angolo è l'inclinazione mutua di due linee nel piano che si incontrano e non sono poste sulla medesima retta.*

2° *L'angolo è la grandezza (o la misura) della rotazione di un lato sull'altro nel piano.*

(1) Cfr. ENRIQUES: *Sui fondamenti della Geometria proiettiva.* Rendic. Ist. Lombardo, 1894. Si vedano anche dello stesso autore le: *Lezioni di Geometria proiettiva.* Bologna, Zanichelli.

(2) *Sulle relazioni tra punti di una linea chiusa.* Rivista di Matematica, vol. V, 1895, p. 75. *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* Ibidem, p. 183.

(3) Cfr. anche lo *Zeitschrift für math. Unterricht* dello HOFFMANN, 1889-90 e una Nota dell'Appendice ai « *Fondamenti* ecc. » del VERONESE.

3° *Angolo è la parte di piano racchiusa da due raggi uscenti da un punto.*

Le definizioni del primo gruppo sono vere tautologie in quanto suppongono già, in certo modo, come primitivo il concetto di angolo.

Quelle del secondo gruppo si basano sopra l'idea della rotazione di una retta o d'un raggio del piano attorno ad un punto, idea che, logicamente formulata, può condurre ad una conveniente introduzione dell'angolo.

Importa tuttavia di separare in essa quanto vi è di grafico, cioè di indipendente dal concetto della congruenza, facendo scaturire prima la nozione di angolo per venire poi (subordinatamente) alla nozione di *angoli uguali* (art. 3°).

A questo requisito, di non includere concetti metrici, soddisfano le definizioni del 3° gruppo sopra menzionato; ma esse, come giustamente nota il VERONESE, non corrispondono interamente al concetto intuitivo dell'*angolo*. Quando si danno due raggi a, b, uscenti da un punto O, si definiscono due figure geometriche distinte: 1° la parte di piano *limitata* dai due raggi, o insieme (a *due* dimensioni) dei punti che giacciono fra a e b; 2° la parte del fascio di raggi di centro O, che è *limitata* da a e b o insieme (ad *una* dimensione) dei raggi uscenti da O e compresi fra a e b.

Ora il nostro concetto intuitivo di angolo si identifica piuttosto con quest'ultimo ente ad una dimensione, che non con la ragione piana compresa fra i due raggi, la quale, ad evitare confusioni, si potrà designare, col VERONESE, sotto il nome di *settore angolare* o *regione* (piana) *angolare*.

25. Volendo ora indicare le principali vie che conducono ad una formulazione logica delle prime proprietà superficiali del piano, da cui scaturisca una definizione dell'angolo, possiamo distinguere (come per le proprietà lineari della retta) due punti di vista:

1° un punto di vista *genetico;*

2° un punto di vista *attuale.*

Il primo punto di vista muove dal considerare la generazione del *fascio di rette o di raggi* (insieme di tutte le rette d'un piano passanti per un punto, o, rispettivamente, di tutti i raggi del piano aventi l'estremo in quel punto) mediante il movimento di una retta o di un raggio, nel piano, attorno ad un punto.

Esso conduce a porre pei raggi di un fascio il postulato seguente:

V*a*. *I raggi di un fascio si possono pensare in una disposizione circolare naturale che ha due sensi o versi, l'uno inverso dell'altro,* in modo che:

1° Dato un qualsiasi raggio a del fascio, e fissato uno dei due sensi esiste *un* ordine naturale del fascio, che ha il dato senso ed a come primo elemento. In esso

a) di due raggi b, c, sempre l'uno, per es. b, precede l'altro (e allora c segue b);

b) se b precede c e c precede d, sempre b precede d;

c) tra due raggi b, c esistono infiniti raggi intermedi;

d) non esiste un *ultimo* raggio.

2° I due ordini naturali del fascio che hanno lo stesso primo raggio e senso inverso, sono l'uno inverso dell'altro.

3° Due ordini naturali del fascio che hanno lo stesso senso e diversi primi elementi, p. es. a e b, si deducono l'uno dall'altro con la permutazione circolare che porta a in b.

4° Se più raggi di un fascio susseguentisi in un ordine naturale incontrano una retta (del suo piano), i punti d'intersezione si seguono in uno dei due versi della retta.

In base a questo postulato l'*angolo* di due raggi a, b si definisce come « *l'insieme dei raggi che non seguono b in un ordine del fascio, che ha come primo elemento il raggio a* ». Si ha così (analogamente a quanto succede pei segmenti sulla linea chiusa) che due raggi di un fascio definiscono due angoli diversi talchè a designarne uno determinato bisognerà indicare, oltre i lati, un raggio appartenente ad esso.

Ma l'*indirizzo genetico*, del quale qui si è tenuto parola, conduce a sviluppi non tanto semplici nella Geometria elementare, apparendo invece più utile nella Geometria proiettiva ove (dopo la convenzione relativa al punto all'infinito) i punti della retta appaiono disposti in ordine chiuso come i raggi d'un fascio [1].

26. Passando allora al punto di vista *attuale*, porremo a base della definizione dell'angolo la *divisione del piano in due parti per mezzo della retta.*

Data nel piano una retta p, due punti A e B di quello si dicono *giacenti da parti opposte* o *dalla stessa parte* di p,

[1] Cfr. le citate *Lezioni di Geometria proiettiva* dell'ENRIQUES.

a seconda che il segmento AB interseca o no la retta data. Così nel piano se due rette si incontrano in un punto O, i due raggi, in cui ciascuna di esse è divisa da O, giacciono da parti opposte dall'altra retta; e se nel piano una retta a non segua un'altra retta b, la a è tutta da una stessa parte rispetto a b.

Data, allora, nel piano una retta p ed un punto P, il piano resta diviso in *due parti* (classi di punti), l'una contenente tutti i punti che cadono con P dalla stessa parte di p, l'altra tutti i punti che cadono, rispetto a p, dalla parte opposta di P; i punti della retta si riguardano come *comuni* alle due parti opposte e si dice anche che la retta *limita* ciascuna delle due parti. Ma può nascere il dubbio che questa divisione in parti del piano dipenda in qualche modo dalla scelta particolare del punto P. Un tale dubbio non può esser tolto se non dal seguente postulato:

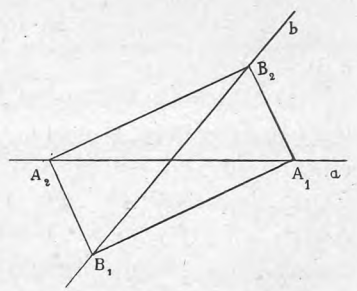
V*b*. *Se in un piano due punti B e C giacciono dalla stessa parte di una retta p, ed il punto A giace da parte opposta di B, A giace pure da parte opposta di C.*

Ammesso questo postulato, si dimostra il seguente teorema fondamentale: *Due rette a, b che si segano, dividono il piano che le contiene in quattro parti o regioni angolari, per modo che:*

1) *Ogni punto del piano fuori di a, b appartiene ad una delle quattro parti e ad una sola.*

2) *Due punti fuori di a, b, appartenenti ad una stessa delle quattro parti sono gli estremi di un segmento che non sega a, b.*

3) *Due punti fuori di a, b, appartenenti a due parti diverse sono gli estremi di un segmento che sega una almeno delle due rette.*

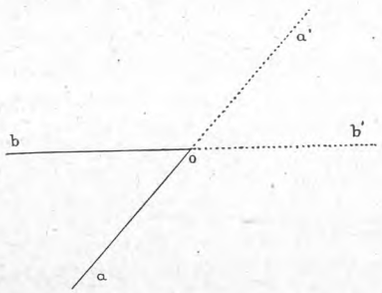


Codeste quattro regioni si ottengono, considerando, nei quattro modi possibili, i punti comuni ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da a (regioni relative ad a) e ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da b (regioni relative a b). Ciascuna delle coppie di regioni che cosi si ottengono ammette punti comuni: infatti se A_1, A_2 sono due punti di a, giacenti da parti opposte di b, e B_1, B_2 due

punti di b, giacenti da parti opposte di a, i segmenti A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_1 danno (esclusi gli estremi) punti dei quattro settori ordinatamente.

I due raggi che limitano un settore angolare si dicono *lati* di esso e i loro punti si considerano (in base alla convenzione fondamentale) come appartenenti al settore.

Ciò posto abbiamo che due *raggi* a, b, aventi l'origine O in comune e non appartenenti ad una stessa retta, definiscono un ben determinato *settore angolare*, contenente tutti i punti comuni a quella delle regioni piane relativa alla retta di a che contiene b e a quella delle regioni piane relative a b che contiene a. Il settore angolare, determinato dai raggi a', b', opposti rispettivamente ad a, b, dicesi settore angolare *opposto al vertice* di ab. Se P e Q sono due punti del settore angolare ab (o dei raggi a, b rispettivamente) l'intero segmento PQ vi appartiene, perchè è tutto costituito di punti che giacciono da quella stessa parte di a (e di b) da cui cadono P e Q. Analogamente appartiene per intero al settore angolare ogni raggio uscente da O e passante per un qualsivoglia punto di esso (raggio *compreso* fra a e b); onde risulta che *ogni punto di un segmento avente gli estremi sui lati di un settore è proiettato dal vertice secondo un raggio appartenente al settore.*

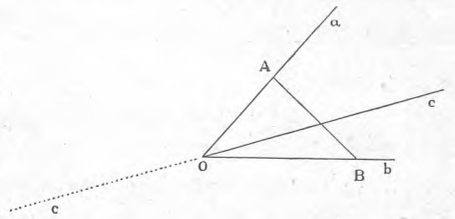


27. Premesse queste considerazioni, si può definire come *angolo ab o ba l'insieme dei raggi uscenti da O e appartenenti al settore angolare che ha per lati a e b.* All'angolo si aggiungono in accordo con le nostre precedenti convenzioni, i lati a e b.

Definito in tal modo l'angolo, importa dimostrare il seguente teorema, il quale enuncia una proprietà dell'angolo, che, come vedremo più avanti, può essere assunta a definirlo: *Dato un angolo ab, ogni punto di un qualsiasi segmento AB, avente un estremo su ciascun lato, è proiettato dal vertice O secondo un raggio appartenente all'angolo, e, viceversa, ogni raggio dell'angolo interseca il segmento AB in un punto.*

La prima parte è implicita in quanto s'è detto dianzi pel settore angolare. Dimostriamo perciò la seconda.

Dato l'angolo ab e congiunto un punto A di a con un punto B di b, si conduca il raggio c appartenente all'angolo. Sarà dimostrato che il raggio c interseca in un punto il segmento AB, quando siasi fatto vedere che i due raggi a, b giacciono, da parti opposte rispetto alla retta del raggio c. Infatti, quando siasi assodato questo fatto, si avrà che il segmento AB interseca o il raggio c o il suo opposto c'. Ma quest'ultima circostanza non può verificarsi, perchè mentre i punti di AB sono interni all'angolo, quelli di c' sono esterni; onde si concluderà che veramente AB interseca il raggio c.



Ora, che i raggi a e b cadano da parti opposte rispetto alla retta del raggio c si dimostra notando che se i raggi a e b cadessero rispetto alla retta del raggio c dalla stessa parte, nessun punto di codesta retta potrebbe appartenere, per definizione, all'angolo ab, mentre, per ipotesi, il raggio c è interno ad esso.

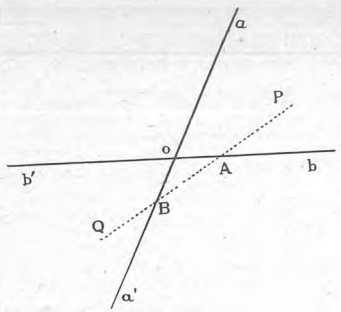
Dal teorema così dimostrato discende come corollario che: *Se due raggi appartengono all'angolo di due altri, l'angolo definito dai due primi è interno* (costituito da raggi *interni*) *all'angolo definito dai due secondi.*

28. La definizione d'angolo del numero precedente e il postulato Vb permettono di sviluppare in forma logicamente rigorosa, quelle considerazioni topologiche di partizione del piano, che stanno alla base della Geometria elementare e che nella grande maggioranza dei trattati vengono di solito desunte tacitamente dalla intuizione. Su questo importante argomento torneremo più avanti; qui intanto ci limiteremo a dimostrare il seguente teorema fondamentale:

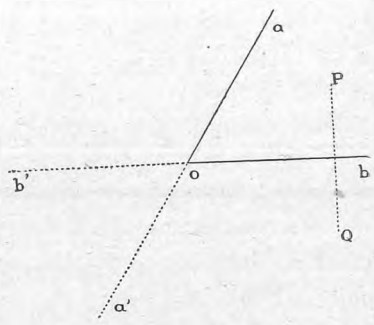
Se P è un punto interno ad un angolo (o settore angolare) ab e Q è un punto esterno, il segmento PQ (se non passa pel vertice), *incontra uno dei lati dell'angolo* (o del settore angolare).

Infatti, dato il punto P interno all'angolo, distinguiamo due casi, a seconda che il punto Q, esterno ad ab, è interno od esterno al settore angolare $a'b'$, opposto al vertice rispetto ad ab.

Nel primo caso P e Q giacciono da parti opposte, tanto rispetto alla retta di a, quanto rispetto alla retta di b; onde il segmento PQ incontra codeste due rette in due punti B e A rispettivamente. Ora non è possibile che simultaneamente B appartenga ad a' e A a b'; giacchè in tal caso, insieme con P anche il punto Q cadrebbe fuori dell'angolo $a'b'$.



Se poi Q è esterno oltre che all'angolo ab, anche all'angolo $a'b'$, esso deve cadere con P da parti opposte rispetto ad una delle rette, p. es. alla retta di b, e dalla stessa parte rispetto all'altra. Il segmento PQ incontrerà quindi la retta del raggio b, e, poichè l'intero segmento cade da quella parte della retta di a, in cui è (P e quindi ancora) il raggio b, esso incontra precisamente il raggio b.



Analogamente si dimostra che: *Se P e Q sono due punti esterni ad un angolo (o settore angolare) ab, il segmento PQ (se non passa pel vertice) o non interseca nessuno dei lati dell'angolo (o del settore angolare) o li interseca tutti e due.*

Si può allora concludere che *due raggi* (non opposti) a e b *uscenti da un punto O, dividono il piano in due parti* (che si dicono *limitate* dalla *linea* costituita dall'insieme dei due raggi) *in modo che, considerati due punti P e Q fuori di a e b, se essi giacciono da parti opposte, il segmento PQ interseca in un punto la linea di limitazione; se essi giacciono dalla medesima parte, il segmento PQ o passa pel punto O comune ai due raggi o li interseca entrambi o non ne interseca nessuno.*

Una di codeste due parti è il settore angolare convesso corrispondente all'angolo $\widehat{ab}$: l'altra si potrà chiamare il *settore angolare concavo* $\widehat{ab}$; dopo di che si potrà anche definire l'*angolo concavo* $\widehat{ab}$ come l'insieme dei raggi appartenenti al settore concavo $\widehat{ab}$.

Come termine di passaggio dagli angoli convessi ai concavi, si ha l'*angolo piatto;* ed una ulteriore estensione del concetto di angolo si ottiene definendo come *angolo*, in qualsivoglia caso, la *somma di più angoli* (convessi) *consecutivi:* con che si è tratti a considerare *angoli di un giro* ed anche più estesi di un giro (1).

I versi di rotazione del piano.

29. A completare gli sviluppi precedenti sul concetto di angolo vogliamo mostrare come le definizioni stabilite in ordine alla concezione attuale del piano, conducano facilmente a definire i versi degli angoli nel fascio (riportandoci così alle proprietà che si presentano come prime dal punto di vista genetico) e più in generale a paragonare i versi di due angoli qualsiansi in un medesimo piano, dando così un assetto rigoroso alla teoria dei *versi di rotazione del piano* (2).

Ci limiteremo per semplicità a considerare *angoli convessi*, qualifica che verrà sottintesa nel seguito.

Stabiliamo anzitutto che:

Gli angoli di un fascio dove si distingua l'ordine dei loro lati, si possono distribuire in due classi, chiamando angoli « di ugual verso » quelli della stessa classe, e angoli di « verso opposto » quelli appartenenti a classi diverse. Questa distribuzione risulta fissata dalle condizioni definitrici seguenti:

1° Gli angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$ hanno versi opposti, ed un angolo che abbia ugual verso di $\widehat{ab}$ ha verso opposto di $\widehat{ba}$.

2° Gli angoli $\widehat{ab}$ ed $\widehat{ac}$, aventi comune il primo lato, hanno versi uguali od opposti secondochè b e c cadono dalla stessa parte o da parti opposte della retta a ($\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ hanno versi uguali od opposti secondochè a e c cadono da parti opposte o dalla stessa parte di b).

(1) Cfr. ENRIQUES-AMALDI. *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori.* I edizione. Bologna, Zanichelli.

(2) Dal punto di vista genetico i versi di due fasci nel piano possono confrontarsi in base al loro carattere proiettivo (cfr. il post V*a* 4° del § 25). Lo sviluppo della teoria dei versi fu posta appunto su queste basi dal VERONESE, *Fondamenti di Geometria;* pag. 347, 374. Cfr. pure dello stesso autore, *Elementi di Geometria*, II edizione (1901), Parte II, pag. 55.

Per la teoria qui sviluppata cfr. ENRIQUES-AMALDI, *Elementi di Geometria*, I ed.

Un altro assetto della teoria fu proposto da B. LEVI, *Sull'uguaglianza diretta ed inversa delle figure.* Periodico di Matematica, vol. XIX (1904).

3° Angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ (collo stesso vertice) hanno versi uguali se i loro versi sono ambedue uguali o ambedue opposti al verso di $\widehat{ac}$; hanno versi opposti se l'uno di essi ha ugual verso e l'altro verso opposto ad $\widehat{ac}$.

Per brevità scriveremo

$$Vab = Vcd$$

e

$$Vab \neq Vcd,$$

per designare rispettivamente l'uguaglianza e l'opposizione di verso di due angoli ab, cd.

Occorre dimostrare che

A. Dati tre raggi a, b, c colla medesima origine i tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ danno luogo ad una coppia di angoli d'ugual verso ed a due di verso opposto, oppure a tre coppie di angoli di ugual verso. Cioè da

$$Vab = Vbc, \qquad Vbc = Vca$$

o da

$$Vab \neq Vbc, \qquad Vbc \neq Vca,$$

si deduce

$$Vab = Vca;$$

ed invece da

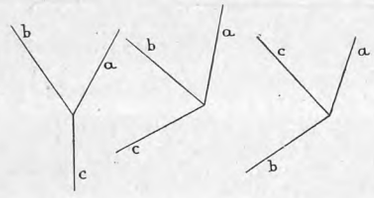
$$Vab = Vbc, \qquad Vbc \neq Vca$$

o da

$$Vab \neq Vbc, \qquad Vbc = Vca$$

segue

$$Vab \neq Vca.$$



Dim. Limitiamoci per brevità ad esaminare una delle ipotesi, p. es.

$$Vab \neq Vca$$

(ossia $Vab = Vac$).

Allora, pel criterio 2°, b, c cadono dalla stessa parte di a, e però b appartiene all'angolo $\widehat{ac}$, oppure c ad $\widehat{ab}$. Nella 1ª ipotesi

$$Vab = Vbc$$

e

$$Vbc \neq Vca \qquad \text{ecc.}$$

Analogamente gli altri casi.

B. Dati 4 raggi a, b, c, d coll'estremo comune, il criterio 3° conduce al medesimo risultato comunque si confrontino gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ all'angolo $\widehat{ac}$ o a uno degli angoli $\widehat{bd}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ad}$ (o ai loro opposti).

Dim. Occorre distinguere varie ipotesi; per brevità esamineremo un sol caso a titolo d'esempio.

Supponiamo dunque che sia

$$Vab = Vac$$

$$Vcd = Vac,$$

e dimostriamo che se

$$Vab = Vbc$$

segue

$$Vcd = Vbc;$$

e se all'opposto

$$Vab \neq Vbc,$$

segue

$$Vcd \neq Vbc.$$

Le ipotesi

$$Vab = Vac \neq Vca, \qquad Vab = Vbc$$

portano (*A*)

$$Vbc \neq Vca$$

cioè a, b cadono dalla stessa parte di c; e l'ipotesi

$$Vcd = Vac$$

significa che a, d cadono da parte opposta di c; quindi b, d sono da parte opposta di c, cioè

$$Vbc = Vcd \qquad \text{ecc.}$$

Se invece adottiamo le ipotesi

$$Vab \neq Vca, \qquad Vab \neq Vbc,$$

segue *(A)*

$$Vbc = Vca,$$

cioè a, b cadono da parte opposta di c; e siccome (essendo $Vcd = Vac$) a, d cadono pure da parte opposta di c, segue che b, d sono dalla stessa parte di c, cioè

$$Vbc \neq Vcd \qquad \text{ecc.}$$

C. Dati 5 raggi a, b, c, d, e coll'estremo comune, se

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd \neq Vde$$

segue

$$Vab = Vde;$$

e se invece

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd \neq Vde$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

segue

$$Vab \neq Vde.$$

Dim. Consideriamo per brevità una sola ipotesi: sia p. es.

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vde.$$

Si avrà *(B)*

(1) $$Vab = Vad, \qquad Vad = Vcd$$

oppure

(2) $$Vab \neq Vad, \qquad Vad \neq Vcd.$$

Ora se sussistono le (1), da

$$Vad = Vcd, \qquad Vcd = Vde$$

segue

$$Vad = Vde,$$

ed essendo

$$Vab = Vad$$

ciò significa *(B)* che

$$Vab = Vde$$ ecc.

Analogamente nel caso (2).

D. Dati 6 raggi a, b, c, d, e, f col vertice comune, se

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd = Vef$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd \neq Vef,$$

segue

$$Vab = Vef;$$

se invece

$$Vab = Vcd, \qquad Vcd \neq Vef$$

oppure

$$Vab \neq Vcd, \qquad Vcd = Vef,$$

segue

$$Vab \neq Vef.$$

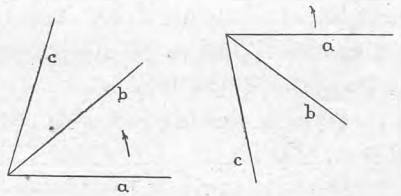
Dim. La dimostrazione procede dal teorema *C* come quella di *C* da *B*.

I teoremi A, B, C, D significano che essendo dati due angoli col vertice comune, i criterii stabiliti permettono di decidere in modo univoco se essi hanno versi uguali od opposti, per modo che angoli aventi ambedue versi uguali od opposti ad un terzo hanno versi uguali fra loro, ed angoli di cui l'uno abbia ugual verso e l'altro verso opposto relativamente ad un terzo hanno fra loro versi opposti.

30. *Nota.* In base al teorema del numero precedente si possono ordinare naturalmente i raggi d'un fascio, a partire da un primo raggio a, in due versi opposti procedendo come segue:

Si fissi anzitutto che i raggi di uno dei due semipiani (1) precedono a quelli dell'altro (2).

Poi, essendo dati due raggi b, c si fissi che:



b precede c se i due raggi appartengono al semipiano (1) e

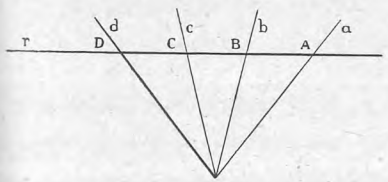
$$Vab = Vbc;$$

b segue c se i due raggi appartengono al semipiano (2) e

$$Vab = Vbc$$

(e oppostamente, se $Vab \neq Vbc$).

È facile provare che se più raggi a, b, c, d,.., susseguentisi nell'ordine stabilito e giacenti da una stessa parte di a intersecano una retta r, i punti d'intersezione A, B, C, D... si susseguono sulla retta r.



Suppongasi p. es. che i raggi nominati cadano nel semipiano (1), avremo:

$$Vab = Vbc,$$

e perciò C da parte opposta di B rispetto (ad a e) ad A;

$$Vcd = Vac$$

e perciò D da parte opposta di C rispetto ad A ecc.

Segue di qui che se a, b, c, d... sono susseguentisi in un

verso del fascio che ha per primo raggio a, anche b, c, d..' situati dalla stessa parte di a, si susseguono pure in un verso che ha come primo elemento b.

La stessa proprietà si verifica per i raggi c, d... interni ad un medesimo angolo formato dalle rette a, b. E se ne deduce facilmente che tutti gli ordini naturali definiti a partire dai diversi raggi in un fascio, danno luogo a due versi di disposizione circolare di questo (n. 25).

Così la definizione attuale dei versi in un fascio si riconduce alla definizione genetica.

31. Ora ci proponiamo di confrontare i versi di due fasci diversi in uno stesso piano. Porremo la seguente

Def. Due angoli di un piano, tali che il primo lato dell'uno ed il primo lato dell'altro appartengano ad uno stesso raggio, si diranno avere versi uguali od opposti secondochè i rimanenti lati sono dalla stessa parte o da parte opposta del raggio suddetto.

Questa definizione estende quella contenuta nel criterio 2) del n. 29.

Occorre quindi dimostrare i due teoremi seguenti:

Teor. A. Se $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ sono due angoli di un piano tali che il raggio a contiene c, e

$$Vab = Vcd;$$

e se b', d' sono due raggi cogli estremi nei vertici dei due angoli, dalle relazioni

$$Vab' = Vab, \qquad Vcd' = Vcd$$

o

$$Vab' \neq Vab, \qquad Vcd' \neq Vcd$$

segue

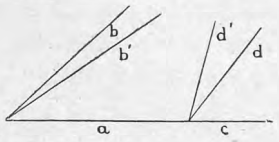
$$Vab' = Vcd';$$

e dalle

$$Vab' \neq Vab, \qquad Vcd' = Vcd$$

o

$$Vab' = Vab, \qquad Vcd' \neq Vcd$$



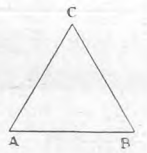
si deduce $Vab' \neq Vcd'$.

Dim. Consideriamo per brevità la prima ipotesi. Allora (n. 29 crit° 2°) b' e d' sono dalla stessa parte di a, c, quindi

$$Vab' \neq Vcd' \qquad \text{ecc.}$$

Cor. Se A, B, C sono tre punti non in linea retta

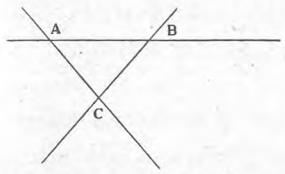
$$V\widehat{BAC} \neq V\widehat{ABC}$$



Infatti

$$V\widehat{BAC} = V\widehat{ABC}$$

Teor. B. In un piano due angoli di verso ambedue uguale od opposto ad un terzo hanno versi uguali fra loro; due angoli di cui l'uno abbia verso uguale e l'altro opposto ad un terzo hanno versi opposti.



Dim. Sieno A, B, C i tre vertici degli angoli suddetti, e poniamo che essi non appartengano alla stessa retta (caso che si esaurisce subito).

Basterà confrontare i versi definiti nei tre fasci paragonando angoli particolari di questi. Ora si ha

$$V\widehat{BAC} \neq V\widehat{ABC}$$
$$V\widehat{CAB} \neq V\widehat{ACB}$$
$$V\widehat{BCA} \neq V\widehat{CBA},$$

cioè

$$V\widehat{ABC} = V\widehat{BCA}$$
$$V\widehat{BCA} = V\widehat{CAB}$$
$$V\widehat{ABC} = V\widehat{CAB},$$

dunque i versi dei fasci B, C uguali al verso di A sono uguali fra loro ecc.

L'indirizzo del Pasch.

32. Noi abbiamo sin qui indicati, per lo svolgimento dei primi concetti della Geometria, diversi schemi, in ciascuno dei quali la *retta* e il *piano* compaiono come enti primitivi, mentre *si definiscono,* per mezzo di quelli, il *segmento* e l'*angolo.*

Il PASCH [1] ispirandosi ad una concezione *empirica* della Geometria trova preferibile di percorrere la via inversa, movendo dai concetti primitivi di *segmento* e di *regione piana* (finita) per giungere alla definizione della *retta* e del *piano.*

L'alto interesse critico dell'analisi compiuta dal PASCH ci induce a riprodurre fedelmente i primi principi delle sue lezioni.

[1] *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig. Teubner 1882.

Il PASCH, assunto, come già si disse, a concetto primitivo quello di *segmento rettilineo*, o, semplicemente, *segmento*, ammette di poter parlare, senza ulteriori schiarimenti, di « un segmento condotto fra due punti » e di « punti giacenti *entro* un segmento »; e stabilisce un primo gruppo di cinque postulati, che conducono alla definizione di « segmento *parte* di un altro »:

1° *Fra due punti si può sempre condurre un segmento ed uno solo.*

2° *Si può sempre assegnare un punto che cada entro un dato segmento.*

3° *Se il punto C giace entro il segmento AB, il punto A giace fuori del segmento BC.*

4° *Se il punto C giace entro il segmento AB, tutti i punti del segmento AC sono anche punti di AB.*

5° *Se il punto C giace entro il segmento AB, un punto, che non appartenga nè ad AC nè a BC non può appartenere al segmento AB.*

In base a questi postulati si può dimostrare che se un punto C è interno al segmento AB, e il punto D è interno a BC, C è interno ad AD.

Allora il segmento CD si dice *parte* di AB e si dimostra che se C e D sono punti di AB, e uno almeno di essi è interno (non è estremo) il segmento CD è parte di AB.

Ciò posto, basta l'aggiunta dei tre postulati seguenti per giungere alla definizione di retta:

6° *Se A, B sono punti qualsiansi, si può sempre scegliere un punto C in modo che B giaccia entro il segmento AC.*

7° *Se il punto B giace dentro i segmenti AC e AD, o il punto C cade dentro il segmento AD, o il punto D cade dentro AC.*

8° *Se il punto B cade dentro il segmento AC e il punto A dentro il segmento BD, e se si uniscono C, D per mezzo di un segmento rettilineo, il punto A cade anche nel segmento CD.*

Ammessi questi tre nuovi postulati, il PASCH conviene anzi tutto di dire che tre punti formano una « successione rettilinea » (o, come noi potremo dire, « sono allineati ») quando uno di essi giace entro il segmento determinato dagli altri due; e dimostra che se sono allineati i punti A, B, C e i punti A, B, D, son pure allineati i punti A, C, D, e B, C, D.

A questo punto, infine, vien definita la retta AB come « l'insieme di tutti i punti C allineati con A e B » e risulta da quanto precede la vicendevole equivalenza delle tre affermazioni: C appartiene alla retta AB, A appartiene alla retta BC, B appartiene alla retta CA.

I postulati 1°-8° dianzi enunciati permettono di dimostrare per la retta tutte le proprietà di ordinamento e di partizione, che furono da noi espresse nei nostri postulati IV*a* e IV*b*; ma noi qui non ci indugeremo su codesta deduzione e rimandiamo senz'altro il lettore desideroso di averne notizia, alle Lezioni del PASCH.

33. Per giungere alla definizione di *piano* il PASCH muove dal concetto primitivo di *regione piana (convessa)* e, parlando, senza ulteriore schiarimento, di « punti di una regione piana » stabilisce i seguenti quattro postulati, relativi, in sostanza, alla possibilità di ampliare, ad arbitrio, una data regione piana:

9° *Per tre punti arbitrari si può far passare una regione piana.*

10° *Se per due punti di una regione piana si conduce un segmento, esiste una regione piana, che contiene tutti i punti della regione piana data e del segmento considerato.*

11° *Se due regioni piane E, E' hanno un punto comune, si può sempre assegnare un altro punto, che sia contenuto in una regione piana contenente tutti i punti di E e in un'altra regione piana contenente tutti i punti di E'.*

12° *Se in una regione piana tre punti A, B, C sono congiunti a due a due per mezzo delle rette AB, BC, CA e si è condotto nella stessa regione piana un segmento DE per un punto interno al segmento AB, il segmento DE o un suo prolungamento passa o per un punto del segmento AC o per un punto del segmento BC.*

In base ai precedenti postulati, il PASCH dimostra che se quattro punti A, B, C, D giacciono su di una regione piana E, ed E' è una qualsiasi regione piana passante per A, B, C, esiste sempre una regione piana contenente tutti i punti di E' e il punto D.

Dopo di che egli stabilisce di dire per definizione che, se esiste una regione piana contenente A, B, C, D, « il *piano* ABC passa per D ».

Risulta da quanto s'è detto dianzi come lo stesso fatto

si possa anche esprimere dicendo indifferentemente o che il piano *BCD* passa per *A*, o che il piano *CDA* passa per *B*, ecc.

A questo punto, partendo dalla data definizione e dai postulati 9°-12°, si stabilisce l'esistenza e la unicità del piano passante per tre punti non allineati, e si dimostra la proprietà fondamentale del piano, per cui esso contiene per intero la retta congiungente due suoi punti qualsiansi.

Ricorderò da ultimo come le proprietà della partizione del piano mediante una sua retta, siano dal PASCH introdotte nel suo sistema mediante il seguente teorema fondamentale: *Se A, B, C sono tre punti non allineati e per un punto D del segmento AB si conduce nel piano ABC una retta non passante nè per A, nè per B, nè per C, questa retta interseca o la retta AC fra A e C o la retta BC fra B e C.*

Noi non ci tratterremo ulteriormente su questi interessanti sviluppi; solo noteremo come i cenni da noi dati dianzi bastino a mettere in luce l'equivalenza logica del sistema di postulati del PASCH coi sistemi da noi abbozzati nei numeri precedenti.

34. Alle *Vorlesungen* del PASCH vanno ravvicinati *I Principi di Geometria logicamente esposti* [1] del PEANO. In essi il PEANO applica la Logica matematica ad analizzare i principi della Geometria, prendendo le mosse dai risultati dell'analisi già precedentemente compiuta dal PASCH. Questi ha, in sostanza, dimostrato la riducibilità di tutte le idee geometriche alle quattro seguenti: *punto*, *segmento*, *regione piana* e *moto*.

Ora il PEANO scompone nei loro elementi i postulati del PASCH [2] ed elimina dal gruppo delle idee primitive quella di *regione piana*. Egli, invero, costruisce ancora la retta per mezzo del segmento; ma, per quel che riguarda il piano, in luogo di assumere la *regione piana*, come un nuovo ente non definito, parte da un triangolo *ABC*, definito come insieme

[1] Torino, Bocca, 1889.

[2] Così, dopo aver notato come nel linguaggio comune l'espressione « due punti » presenta ambiguità (in quanto talvolta indica « due punti qualsiasi », tal altra « due punti distinti », in certi casi si riferisce alla coppia presa in un ordine di successione, in certi altri alla coppia considerata come aggruppamento) fa notare che il 1° postulato del PASCH non è perfettamente determinato. Egli mostra parimenti che il postulato 3° si può decomporre in tre proposizioni distinte, di cui una è dimostrabile.

dei punti appartenenti ai segmenti che congiungono a due a due i punti dei tre segmenti *AB, BC, CA;* e definisce il piano *ABC* come « l'insieme dei punti allineati colle coppie di punti appartenenti al triangolo ».

Questo punto di vista si lascia riattaccare alle nostre considerazioni precedenti sull'*angolo*, qualora si assuma la seguente

Def. Angolo di due raggi *ab* uscenti da un punto *O* è *l'insieme dei raggi proiettanti da O un segmento avente i suoi estremi A, B rispettivamente su a, b.*

Alla quale, perchè l'angolo costruito risulti indipendente dal segmento, occorre aggiungere il *postulato*

Vc. Un raggio dell'angolo ab incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi sui lati a, b.

Cogli sviluppi sopra accennati il PEANO ha messo in luce come la *Geometria di posizione* possa fondarsi movendo da due sole idee primitive: *punto* e *segmento*, e come ad esprimere le idee della *Geometria metrica* basti aggiungere alle due precedenti la idea del *moto* [1].

Mettendosi dal punto di vista formale della *riduzione del numero delle idee primitive* (e dei loro simboli rappresentativi), e lasciando da parte ogni altra esigenza dei postulati in ordine all'intuizione, il PIERI [2] ha indicato come possa ottenersi una riduzione ulteriore; egli analizzando dapprima

[1] Cfr., oltre i citati *Principî* ecc., un articolo del PEANO nella *Rivista di Matematica*, anno 1894, pag. 51 e dello stesso autore: *La Geometria fondata sulle idee di punto e di distanza.* Atti della R. Accad. di Torino, XXXVIII, 1902. Cfr. inoltre: PADOA: *Un nuovo sistema di definizioni per la Geometria euclidea.* II Congrès intern. des Math., Paris, 1900. VEBLEN: *A system of axioms for Geometry.* Trans. of the Amer. Society, V, 1904.

[2] *Principî della Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo.* Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino, vol. $XLVIII_2$ (1898). - *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo.* Ibidem, vol. $XLIX_2$ (1899).

Quanto precede io scrissi nel 1905, preparando il manoscritto di questo articolo per la traduzione tedesca di questi *Collectanea*. Ora, correggendo le bozze di questa retroversione, debbo ricordare la più recente memoria del PIERI: *La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di « punto » e « sfera »* [Mem. della Società dei XL; t. (1908)]. Qui non soltanto il sistema dell'autore è reso più semplice e più perspicace, ma vi è anche completata l'analisi dei fondamenti della Geometria euclidea.

i principi della Geometria proiettiva e in seguito quelli della Geometria elementare, ha dimostrato che tutta la Geometria si può costruire con due sole idee primitive, quelle di *punto* e di *distanza* (1).

A quest'ordine d'idee si possono riattaccare anche gli studii di BEPPO LEVI « *Sui fondamenti della metrica proiettiva* » (2) assai notevoli da vari punti di vista, e la ricerca del KAGAN « *Ein System von Postulaten welche die euclidische Geometrie definieren* » (3), il cui esame non rientra nel quadro del nostro lavoro.

Sulle partizioni del piano.

35. Al n. 26 abbiamo preso le mosse, per lo studio delle proprietà superficiali del piano, dalla divisione in parti del piano mediante una sua retta; e in base alle proprietà così formulate, abbiamo poi caratterizzato la partizione del piano cui danno luogo due raggi uscenti da un punto (n. 28).

Torniamo qui a siffatto ordine di considerazioni per svilupparlo alquanto.

Cominciamo perciò col notare come due figure o luoghi geometrici si possano generalmente combinare in due modi diversi.

Se due luoghi F, F' sono caratterizzati rispettivamente dalle proprietà A, B, possiamo considerare:

1° Il luogo di tutti i punti che godono della proprietà A o della proprietà B.

2° Il luogo dei punti che godono simultaneamente della proprietà A e della proprietà B.

Il primo luogo si dirà ottenuto combinando i luoghi dati *per riunione*, il secondo *per interferenza* (4).

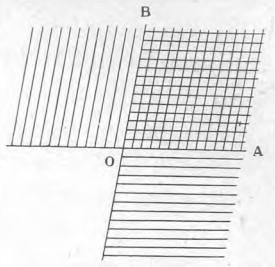
(1) Il PIERI ha anzi messo in luce come non sia necessario assumere l'idea di *distanza* come una relazione fra quattro punti A, B, C, D sotto la forma « la distanza AB è uguale alla distanza CD »; ma basta assumere come primitiva la relazione fra tre punti A, B, C: « i punti A e B sono equidistanti da C » (idea di cui si rinviene una traccia in Euclide e che fu ripresa ai nostri tempi dal Veronese).

(2) Mem. dell'Acc. delle Sc. di Torino, vol. LIV_2 (1904).

(3) Jahresber. der d. Math. Vereinig., 11, 1902.

(4) Ognuno riconosce come questi due modi di combinazione dei due luoghi dati abbiano per corrispondenti, nel campo della Logica deduttiva rispettivamente le operazioni di *disgiunzione* o *addizione logica* e di *congiunzione* o *moltiplicazione logica*.

Così p. es., date per un punto O due rette OA, OB, consideriamo il semipiano relativo ad OA in cui cade B e il semipiano relativo ad OB in cui cade A.



Essi, combinati per interferenza danno il settore convesso $\widehat{AOB}$, e combinati per riunione danno il settore concavo, che si ottiene togliendo dal piano il settore opposto al vertice ad $\widehat{AOB}$.

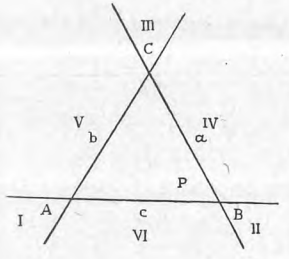
Ciò premesso, passiamo ad occuparci delle partizioni del piano determinate da più di due rette; e consideriamo anzitutto tre punti A, B, C e le tre rette $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, che a due a due li congiungono.

Detto *triangolo* la figura costituita dai tre segmenti (*lati*) AB, BC, CA, notiamo che i tre semipiani aA, bB, cC (cioè i tre semipiani relativi ad a, b, c e contenenti rispettivamente i punti A, B, C) combinati a due a due per interferenza, determinano tre angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ (*angoli* del triangolo).

Ora sussiste il seguente teorema:

Un punto, che sia interno a due angoli del triangolo, è interno anche al terzo.

Infatti se un punto P è interno, p. es. agli angoli $\widehat{bc}$ e $\widehat{ac}$ vuol dire, per definizione, che esso cade rispetto alla b dalla stessa parte di B e rispetto alla a dalla stessa parte di A; in altre parole esso è comune ai due semipiani aA, bB, ossia appunto è interno anche all'angolo $\widehat{ab}$.



Sono allora giustificate le seguenti definizioni: Si dicono *interni* al triangolo tutti i punti comuni ai tre suoi angoli e si dice *superficie* del triangolo l'insieme dei punti interni ad esso e dei punti dei lati (o punti del *contorno*).

I punti non appartenenti alla superficie del triangolo diconsi *esterni*.

36. Risulta da quanto precede che la superficie del triangolo ABC si ottiene combinando *per interferenza* i tre semipiani aA, bB, cC; mentre i punti esterni (insieme col contorno) costituiscono il luogo geometrico, che si ottiene combinando *per riunione* i tre semipiani relativi ad a, b, c ed opposti, rispettivamente, ai tre semipiani che contengono il triangolo.

L'insieme dei punti esterni al triangolo viene diviso dalle rette dei lati in *sei regioni,* tre delle quali sono gli angoli opposti al vertice degli angoli del triangolo (le tre regioni I, II, III della figura); le altre tre si ottengono, ciascuna, combinando per interferenza un angolo del triangolo col semipiano relativo al lato opposto, che non contiene il triangolo.

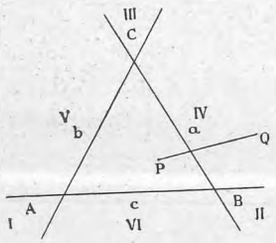
Ciò posto, possiamo oramai caratterizzare la partizione del piano, definita da un triangolo ABC.

Risulta anzitutto dalle definizioni relative al triangolo e dalle proprietà dell'angolo che *il segmento congiungente due punti del contorno o due punti interni di un triangolo appartiene alla superficie del triangolo.*

In secondo luogo abbiamo che *il segmento che congiunge un punto interno ed uno esterno di un triangolo sega il contorno in un punto e in uno solo.*

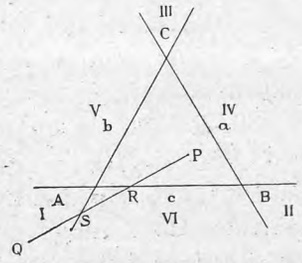
Riferiamoci per la dimostrazione al solito triangolo e siano P e Q i due punti dati, il primo interno, il secondo esterno al triangolo.

Il punto esterno Q può anzitutto cadere in uno degli angoli del triangolo, p. es. nell'angolo di vertice A. Ciò vuol dire che Q cade con P dalla stessa parte tanto rispetto a b che rispetto a c: non così, per altro, rispetto ad a, giacchè Q è esterno ad ABC. Risulta di qui che il segmento PQ incontrerà la retta a in un punto, e, poichè questo punto, come ogni altro di PQ, deve essere interno all'angolo dei raggi AB, AC, esso appartiene al lato BC del triangolo.



Supponiamo, in secondo luogo, che Q non cada in nessuno degli angoli del triangolo: cadrà allora in uno degli angoli opposti al vertice di quelli, p. es. nell'angolo opposto al vertice di $\widehat{BAC}$.

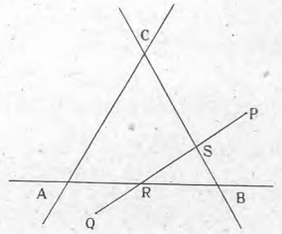
Allora P e Q cadono da parti opposte tanto di c quanto di b e il segmento PQ incontra queste due rette in due punti R, S rispettivamente. Uno di codesti punti appartiene di necessità al contorno di ABC: se, infatti, così non fosse, insieme con Q anche P dovrebbe essere esterno all'angolo dei raggi AB, AC, il che è contro l'ipotesi.



Dopo ciò non resta che considerare il caso di due punti P e Q entrambi esterni.

Escludiamo anzitutto che essi si trovino su di una retta passante per un vertice del triangolo.

Allora il segmento PQ può non segare il contorno ed in tal caso esso è tutto esterno al triangolo, giacchè, se avesse qualche punto dentro il triangolo, intersecherebbe qualche lato. Se poi il segmento PQ interseca un lato del triangolo, p. es. AB in R, vuol dire che la retta PQ lascia da parti opposte i due vertici A e B; e il terzo vertice C, non potendo per ipotesi appartenere alla PQ, cadrà dall'una o dall'altra parte. Se C cade, p. es., dalla parte di A, la retta PQ intersecherà anche il lato BC in un punto S e il segmento RS sarà interno al segmento PQ, perchè altrimenti anche il punto R sarebbe, contro l'ipotesi, esterno al segmento PQ. Se ne conclude che il segmento PQ interseca il contorno del triangolo in due punti.



Tutti i risultati precedenti si possono riassumere nel seguente teorema che caratterizza la partizione del piano definita da un triangolo:

Un triangolo divide il piano in due parti (che diconsi *limitate* dal contorno) *per modo che considerando due punti i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice;*

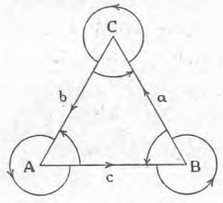
se essi giacciono nella medesima parte, il segmento che il congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti;

se essi giacciono da parte opposta, il detto segmento sega il contorno in un punto.

NOTA. — Delle due parti, una è la superficie del triangolo, la quale si distingue dall'altra per essere *finita,* cioè per la proprietà di contenere soltanto dei segmenti di retta e non intere rette o raggi; per contrapposto la *regione esterna,* che contiene delle intere rette (si considerino le congiungenti di due punti situati sui prolungamenti di due lati del triangolo), si potrà dire *infinita.*

37. Aggiungiamo da ultimo alcune ovvie osservazioni sui versi dei lati e degli angoli del triangolo, il cui interesse potrà poi rilevarsi nelle successive generalizzazioni del concetto di triangolo.

Dato un triangolo ABC, i versi AB, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ dei lati, o i tre versi opposti, combinati insieme, danno rispettivamente luogo a due versi del contorno del triangolo. Fissato sul contorno uno di codesti versi, p. es. il verso ABC, resta determinato in ciascuno degli angoli del triangolo un verso, come proiezione del verso fissato sul lato opposto, ed i tre angoli così ordinati $\widehat{ba}$, $\widehat{cb}$, $\widehat{ac}$ hanno fra loro verso concorde (cfr. § 31). La considerazione del verso del contorno e dei corrispondenti versi degli angoli permette di distinguere, nella teoria della uguaglianza dei triangoli, la *uguaglianza diretta* dalla *uguaglianza inversa* [1].



38. È senz'altro manifesto come possano generalizzarsi le considerazioni dei numeri precedenti.

Dati n punti A_1, A_2, ..., A_n tali che ciascuna delle rette A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ lasci da una medesima parte gli $n-2$ punti che ad essa non appartengono, si dice *poligono convesso* la figura costituita dagli n segmenti (*lati*) A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

Chiamati angoli del poligono gli angoli $\widehat{A_1}$, $\widehat{A_2}$, ..., $\widehat{A_n}$, si dimostra, per induzione completa, che se un punto è interno ad $n-1$ fra codesti angoli è interno anche all'n^{mo}. È allora lecito ripetere qui per i poligoni in generale le definizioni di *punti interni*, di *superficie*, di *punti esterni* e si può anche qui dimostrare che *un poligono divide il piano in due parti* (che diconsi limitate dal contorno ad esse comune) *tali che considerati due punti, fuori del contorno, non appartenenti ad una retta passante per un vertice, se essi giacciono dalla medesima parte, il segmento che li congiunge non sega il contorno o lo sega in due punti;*

se essi giacciono da parti opposte, il detto segmento incontra il contorno in un punto.

Di codeste due parti una è la *superficie* del poligono e si può considerare come ottenuta, combinando per interferenza quei semipiani relativi alle rette dei lati, che contengono il poligono; mentre l'altra regione si ottiene combinando per riunione i semipiani opposti.

Anche qui abbiamo sul contorno due versi opposti e, corrispondentemente a ciascuno di essi, risultano ordinati gli angoli del poligono secondo versi concordi.

39. Se nella definizione di poligono si lascia cadere la restrizione relativa alla posizione dei vertici rispetto alle rette dei lati, si dà luogo ai poligoni *concavi*, i quali sono *intrecciati* o *sciolti*, secondo che accade o no, che due lati non consecutivi si intersechino.

Un poligono concavo ha almeno un angolo concavo.

Per un poligono concavo sciolto si può sempre definire la *superficie* come riunione delle superficie di più poligoni convessi; ma essa si può definire direttamente con un procedimento analogo a quello da noi tenuto pei poligoni convessi: soltanto i semipiani relativi alle rette dei lati vanno combinati in parte per interferenza e in parte per riunione.

Un poligono concavo sciolto determina ancora una divisione del piano in due parti, rispetto alle quali per altro si può avere per la posizione di due punti un numero maggiore di casi, di quanto è possibile pei poligoni convessi. Si ha invero il seguente teorema:

Un poligono concavo sciolto divide il piano in due parti per modo che:

dati due punti del piano, fuori del contorno, i quali non si trovino sopra una retta passante per un vertice, il segmento che li congiunge sega il contorno in un numero pari o dispari di volte, secondochè i punti suddetti giacciono nella medesima parte o in parti diverse rispetto al poligono.

È inteso che se il segmento di cui si discorre nell'enunciato non sega il contorno, il numero delle intersezioni (zero) deve considerarsi come pari e quindi gli estremi del segmento sono nella medesima parte.

I poligoni intrecciati invece non determinano più nel piano una divisione in parti, a meno che non si vogliano considerare come ottenuti per riunione di poligoni sciolti.

Pei poligoni concavi, tanto sciolti quanto intrecciati, importa considerare, in vista delle esigenze della teoria dell'uguaglianza, i due versi del contorno e i versi coordinati degli angoli rispettivi.

[1] Accanto alla terna dei tre angoli convessi (ordinati) *ab*, *bc*, *ca* del triangolo si può considerare la terna dei tre angoli concavi (ordinati) aventi i medesimi lati. La considerazione di questa doppia serie di angoli è utile nella teoria dei poligoni concavi e si impone nella teoria delle poligonali. Cfr. la citata I^a ediz. degli *Elementi* di ENRIQUES-AMALDI.

40. NOTA. — Una ulteriore generalizzazione del concetto di poligono si ottiene considerando poligoni aventi come lati archi di circonferenza e, in particolare, segmenti rettilinei *(poligoni a lati circolari)*. Gli esempi più semplici di siffatti poligoni sono dati dai *settori*, dai *segmenti circolari*, dai *fusi*, dalle *lunule*, ecc.

I poligoni a lati circolari sciolti danno luogo a partizioni del piano, che si possono caratterizzare in base alla proprietà d'intersezione di rette e circonferenze [1].

Ma noi non ci indugeremo ulteriormente su questo punto, basterà di avere richiamato l'attenzione dei lettori su quest'ordine di problemi, che offrono ancora materia di riflessione e di discussione ai cultori della Geometria elementare.

Il diedro.

41. Ad esaurire il programma che ci siamo proposto, non resta più che ad occuparci di quelle proprietà di divisione dello spazio che sono legate al concetto di *diedro*.

Per il *diedro* valgono considerazioni affatto analoghe a quelle svolte sull'*angolo*. Anche qui conviene distinguere il *diedro* come *insieme di semipiani*, o diedro propriamente detto, dall'insieme dei punti di codesti semi-piani, a cui possiamo dare il nome di *settore solido*.

Partendo dalla *concezione genetica* del diedro, si è condotti a riattaccarne la definizione alla generazione dello spazio per mezzo del movimento di un piano (o di una falda di piano) intorno ad una retta. Gli elementi del fascio di semipiani, o di piani completi, vengono così ordinati *a priori* in una *disposizione circolare (naturale)*, che si può porre a base della definizione di diedro. Per porre in relazione le disposizioni circolari di due fasci qualsivogliano è necessario *postulare* il *carattere proiettivo* di codesta disposizione circolare, per il quale i piani susseguentisi in un fascio sono segati da una retta in punti, che, da ogni retta distinta dall'asse del fascio, sono proiettati secondo piani susseguentisi.

Se riguardiamo invece il *diedro* sotto l'aspetto *attuale*, porremo a base della sua definizione la considerazione della

[1] Un primo abbozzo di teoria dei poligoni a lati circolari si troverà nella I^a^ edizione, già più volte citata, degli *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie Superiori*, a cui collaborammo con F. ENRIQUES.

divisione in due parti dello spazio per mezzo di un piano. Definiti due punti A, B come giacenti da parti opposte o dalla stessa parte di un piano α, secondo che il segmento AB incontra o no il piano, è necessario postulare la proposizione:

VI*b*. *Se due punti B, C giacciono dalla stessa parte di un piano, ed il punto A giace da parte opposta di B, A giace anche da parte opposta di C.*

Stabilito quindi il fatto che due piani, intersecantisi secondo una retta, dividono lo spazio in quattro *settori solidi*, dicesi *diedro* di due semipiani α e β uscenti da una retta o, l'insieme dei semipiani appartenenti al settore solido, che è definito da α e β.

Infine, dalla definizione *attuale*, completata dalla proposizione VI*b*, si deduce che ogni semipiano di un diedro $\alpha\beta$ incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi su α, β rispettivamente.

Si presenta così un terzo modo (avente, sotto un certo riguardo, carattere genetico) di definire il diedro: « *Dicesi* diedro *l'insieme dei semipiani che da una retta proiettano i punti di un segmento AB* ».

Qui gli *ordini naturali* nel diedro e nel fascio si *deriveranno* da quelli della retta, *postulando* la proposizione:

VI*c*. *Un semi-piano di un diedro $\alpha\beta$ incontra in un punto un qualsiasi segmento, avente gli estremi sulle facce α, β.*

Le tre vie indicate sono tra loro *equivalenti*. Per ciascuna di esse si incontra un postulato, il cui ufficio si può esprimere chiaramente dicendo che *esso limita a tre le dimensioni dello spazio*. È per mezzo dell'indicato postulato che, in ciascuno dei tre indirizzi, si dimostra quel teorema, per cui il fatto delle tre dimensioni entra in modo immediato nella serie delle deduzioni geometriche: « *Due piani aventi in comune un punto hanno in comune una retta* ».

Reciprocamente, questa proposizione, assunta come primitiva, permette di dimostrare ciascuno degli accennati postulati relativi al diedro, deducendoli dalle proprietà degli angoli sezioni del diedro stesso, e di svolgere, quindi, i tre diversi ordini di considerazioni, che da essi rispettivamente dipendono.

A ciò si perviene, in sostanza, dimostrando sulla base della proposizione or ora enunciata, che i semipiani di un diedro sono segati da ogni piano non passante per l'asse, ma avente comune con esso un punto, secondo i raggi di un angolo.

Possiamo notare che nel sistema geometrico del PASCH la proprietà fondamentale dello spazio compare appunto sotto la forma del postulato 11° del n. 33, che permette di dimostrare che due piani aventi comune un punto hanno comune una retta.

Sulle partizioni dello spazio.

42. Le partizioni dello spazio definite da due o più piani o semipiani danno luogo a considerazioni perfettamente analoghe a quelle da noi svolte sulle partizioni del piano per mezzo di rette.

Quindi noi potremo qui limitarci ad alcuni rapidi cenni.

Un ragionamento analogo a quello del n. 28 permette di stabilire che *un diedro divide lo spazio in due parti per modo che, presi due punti non appartenenti ad una retta incidente all'asse, il segmento che li congiunge interseca una sola faccia se i due punti cadono da parti opposte, le interseca entrambe o non ne interseca nessuna se i due punti cadono dalla stessa parte.*

Una delle due parti è il settore (convesso) relativo al diedro considerato; l'altro si potrà chiamare un *settore concavo,* onde poi si dedurrà la definizione del diedro concavo, avente le stesse faccie del diedro convesso da cui siamo partiti.

Analoghe considerazioni si possono istituire sul *triedro* (o angoloide trispigolo), che, notoriamente si definisce come la figura costituita da tre raggi a, b, c uscenti da un punto O *(spigoli)* e dai tre angoli $\widehat{ab}, \widehat{bc}, \widehat{ca}$ *(facce).* Chiamando *diedri del triedro* i tre diedri determinati dai tre piani $ab, bc, ca,$ presi a due a due, si dimostra (cfr. il n. 35) che *un punto il quale sia interno a due diedri del triedro è interno anche al terzo.*

Ciò posto, si diranno *interni* al triedro i punti interni a tutti e tre i suoi diedri; e l'insieme dei punti interni al triedro e di quelli della *superficie* (costituite dalle tre facce) si chiamerà *solido* del triedro. I punti non appartenenti al solido si diranno *esterni* al triedro.

Il solido del triedro si ottiene combinando per interfenza quei tre semispazi, che sono determinati dalle tre facce e contengono il triedro; mentre l'insieme dei punti esterni delle superficie si ottiene combinando per riunione i semispazi opposti.

Codeste due *parti* in cui lo spazio resta diviso dal triedro (il quale si può considerare come comune ad entrambe) sono caratterizzate dalle solite proprietà; cioè, presi due punti qualsiansi, purchè non appartenenti ad una retta incidente ad uno spigolo del triedro, il segmento congiungente interseca una sola faccia se i due punti cadono da parti opposte; ne interseca due o nessuna se i due punti sono dalla stessa parte.

Tutto ciò si estende senz'altro ad un angoloide (convesso) a quanti spigoli si vogliono, cioè alla figura costituita da n raggi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uscenti da un punto O e dagli n angoli $\widehat{a_1a_2}, \widehat{a_2a_3}, \ldots, \widehat{a_{n-1}a_n}, \widehat{a_na_1}$, sotto la restrizione che ciascuno dei piani $a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n$ lasci da una stessa parte gli $n-2$ raggi che non giacciono in esso.

E più in generale, considerazioni analoghe alle precedenti valgono per un *poliedro,* il quale si definisce notoriamente, come la figura costituita da più poligoni *(facce),* situati in piani diversi e tali che ognuno dei lati sia comune a due di essi, sotto la restrizione che il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una medesima parte.

Si dimostra per induzione che, dato un poliedro ad n vertici, ogni punto interno ad $n-1$ dei suoi angoloidi è interno anche all'n^{mo}; e così si giunge alla definizione del *solido* del poliedro, il quale si può considerare ottenuto combinando per interferenza quei semipiani, che sono determinati dalle facce del poliedro e contengono il poliedro stesso.

Se nella definizione di angoloide si lascia cadere la posta restrizione sulla posizione degli spigoli rispetto ad una faccia qualsiasi, si dà luogo agli *angoloidi concavi,* i quali possono essere *sciolti o intrecciati.* Così, togliendo l'analoga restrizione dalla definizione di poliedro, si è condotti a considerare *poliedri concavi,* ciascuno dei quali avrà almeno un angoloide concavo.

Ora, tanto un angoloide concavo, quanto un poliedro concavo determinano ancora una divisione dello spazio in due parti: ma i casi possibili per la posizione di due punti, rispetto all'angoloide o al poliedro, sono in numero maggiore di quanto accadeva nel caso della convessità. Si ha, cioè, che presi due punti, purchè non appartenenti ad una retta incidente ad uno spigolo, se essi sono da parte opposta il segmento congiungente interseca la superficie un numero dispari di volte;

se i due punti sono dalla stessa parte, il segmento congiungente interseca la superficie un numero pari o nullo di volte.

Il *solido* dell'angoloide o del poliedro concavo si può definire come riunione di solidi di angoloidi o poliedri convessi; ma si può anche ottenere direttamente, combinando semispazi relativi alle facce, alcuni per interferenza, altri per riunione. La parte di spazio esterna si avrà allora, combinando i semispazi opposti, in modo rispettivamente contrario.

NOTA. Per analogia coi poligoni a lati circolari si è condotti a generalizzare i concetti di angoloide e di poliedro, considerando angoloidi e poliedri a facce cilindriche, coniche, sferiche. Esempi notori di questa specie di figure sono il *segmento sferico*, lo *spicchio sferico*, il *settore sferico*, ecc. La considerazione di siffatte figure e delle corrispondenti partizioni dello spazio suggerisce tutto un ordine di questioni, che si innestano naturalmente nello sviluppo della Geometria elementare (1). Noi le segnaliamo al lettore, e ci limitiamo a notare come codesti problemi richiedono, a differenza di quanto accade pei poligoni a lati circolari, metodi che trascendono quelli tradizionali della Geometria elementare, in quanto piani, cilindri, coni e sfere si intersecano secondo rette e circonferenze solo in casi particolari, mentre in generale danno luogo a curve di natura più elevata (*coniche, cubiche gobbe, quartiche gobbe di 1ª specie*).

Versi elicoidali dello spazio.

43. Abbiamo già accennato ai due versi di disposizione naturale, in cui risultano ordinati i semipiani di un diedro, in corrispondenza ai due versi di un qualsiasi segmento, avente gli estremi sulle due facce, o ai due versi dell'angolo, sezione del diedro con un piano non passante per l'asse.

Ma nello spazio, a differenza di quanto accade nel piano pei due versi di un angolo, i due versi di un diedro (o del fascio di piani cui esso appartiene) non sono distinti fra loro rispetto ai movimenti, in quanto il diedro è invertibile cioè sovrapponibile a sè stesso con lo scambio delle due facce.

(1) Si vedano in proposito i più volte citati *Elementi*, ecc. di F. ENRIQUES e nostri (I edizione). In particolare noi vi traemmo profitto dalla considerazione dei poliedri a facce curve nel confronto fra i solidi dei cilindri, dei coni, delle sfere coi solidi dei poliedri a facce piane.

Per separare i due versi di un diedro è necessario associare a ciascuno di essi un determinato verso sull'asse del diedro stesso. Si dà così luogo ai due *versi elicoidali* dello spazio o, ciò che è lo stesso, ai due *versi di rotazione dei triedri o della stella.*

Se si parte dalla concezione genetica del diedro, la nozione dei versi elicoidali si desume direttamente dalla disposizione circolare del fascio, e il giudizio di confronto circa la concordanza o discordanza di verso si istituisce in base al carattere proiettivo di siffatta disposizione circolare. Lo svolgimento completo di siffatte considerazioni si troverà nei *Fondamenti di Geometria* del VERONESE (1), che per primo diede ad essa un assetto rigoroso.

Dal punto di vista attuale, invece, la teoria dei versi dello spazio si potrà svolgere secondo un piano analogo a quello da noi indicato per la teoria dei versi del piano. Ma poichè la trattazione risulterebbe alquanto prolissa, a noi basterà l'avervi accennato (2). E finiremo con l'osservare che la considerazione dei versi elicoidali permette di distinguere, nella teoria della uguaglianza delle figure spaziali, l'*uguaglianza diretta* dall'*uguaglianza inversa* (3).

---

(1) Pag. 412, 443. Si veda anche la Nota di BEPPO LEVI citata alla pag. 69.

(2) Uno schema di siffatta trattazione si troverà nella più volte citata I edizione degli *Elementi di Geometria*, ecc., di F. ENRIQUES e nostri.

(3) Cfr. la Nota di BEPPO LEVI citata alla pag. 69.

ARTICOLO QUARTO

Della Congruenza e del Movimento di ALFREDO GUARDUCCI a Prato.

§ 1. **La trattazione Euclidea.** — In EUCLIDE la *congruenza* (uguaglianza di forma) e l'*equivalenza* (uguaglianza di grandezza) delle figure geometriche non vengono distinte; sotto il nome di uguaglianza, l'Autore considera generalmente la relazione di grandezza, limitandosi ad affermare inoltre la uguaglianza dei segmenti e quella degli angoli che, verificandosi nel caso dei poligoni, servono a caratterizzarne la congruenza.

Volendo staccare dall'Euclide quella parte della teoria dell'uguaglianza che si riferisce alla congruenza, prenderemo in esame il contenuto delle principali proposizioni del Libro I concernenti i triangoli (1). E (tralasciando le costruzioni accessorie) ne distingueremo due gruppi:

Il 1° gruppo, di cui soltanto più tardi rileveremo l'ufficio, comprende le proposizioni 1, 2 e 3.

Il 2° gruppo è costituito dalle proposizioni 4, 5, 6, 7, 8, 16 e 26.

A questi due gruppi di proposizioni se ne può aggiungere un terzo formato delle proposizioni 11, 12, 13, 14, 15 contenenti i principî della teoria delle perpendicolari.

Nel 2° gruppo si trovano tre criteri fondamentali per la congruenza dei triangoli:

triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi eguali (prop. IV);

triangoli che hanno i lati rispettivamente eguali (proposizione VIII);

(1) Abbiamo tenuto sott'occhio il testo edito da Heiberg, Lipsia 1883.

triangoli che hanno due angoli rispettivamente eguali ed un lato eguale ad un lato (prop. XXVI).

La prop. IV è stabilita ricorrendo alla sovrapponibilità delle due figure col movimento.

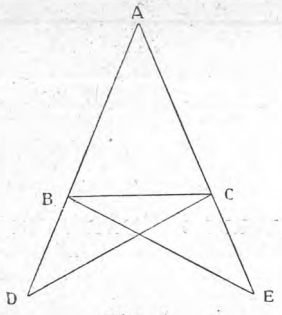


Fig. 1.

Nella successiva è dimostrata la eguaglianza degli angoli alla base nel triangolo isoscele. Se ABC è il triangolo (Fig. 1) e $AB = AC$, si prende sul prolungamento di AB un punto qualunque D, e si fa $AE = AD$ (vedi prop. III). Allora si ha tr.° $CAD =$ = tr.° BAE, $DC = EB$, $\widehat{DCA} = \widehat{EBA}$, $\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$. Quindi ancora tr.° $DCB =$ = tr.° EBC, $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$. E da $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CBE} = \widehat{BCD}$ segue per sottrazione $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

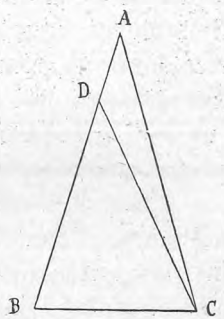


Fig. 2.

La prop. VI è l'inversa della precedente ed è dimostrata per assurdo. Se nel triangolo ABC (Fig. 2) è $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, sia, se è possibile per es. $AB > AC$. Fatto allora (prop. 3) $BD = AC$, il triangolo ABC sarebbe eguale alla sua parte DBC.

Come conseguenza della uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele si dimostra per assurdo nella proposizione VII non potersi costruire sulla stessa base e dalla medesima parte di questa due triangoli aventi respettivamente eguali i due lati concorrenti nell'uno e nell'altro estremo della base comune.

Se ne deduce poi per assurdo nella proposizione successiva, ricorrendo anche qui alla sovrapponibilità delle due figure col movimento, il 2° criterio di congruenza dei triangoli (eguaglianza dei tre lati).

Il 3° criterio (eguaglianza di due angoli ed un lato) è contenuto in tutta la sua generalità nella proposizione XXVI la quale comprende il caso in cui gli angoli respettivamente eguali siano quelli adiacenti al lato eguale e quello in cui gli angoli stessi siano uno adiacente e l'altro opposto al detto lato.

Per il primo caso (Fig. 3), supposto $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$, se fosse p. e. $AB > DE$ si farebbe (prop. III) $BH = ED$ e si troverebbe (prop. IV)

tr.° HBC = tr.° DEF, $\widehat{HCB} = \widehat{DFE}$; quindi $\widehat{ACB}$ eguale alla sua parte $\widehat{HCB}$. Si conclude così $AB = DE$, donde l'eguaglianza dei triangoli dati.

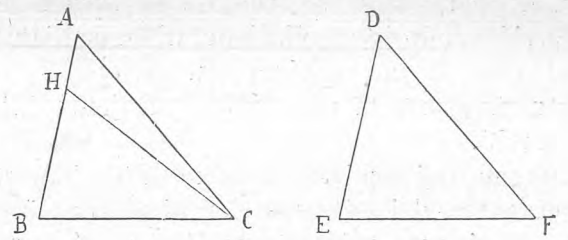


Fig. 3.

Per il secondo caso (Fig. 3), supposto $BC = EF$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, si procede in modo analogo; ammettendo che sia $AB > DE$, si conclude $\widehat{BHC} = \widehat{BAC}$ il che contradice alla prop. XVI.

Gli sviluppi accennati, fatta astrazione dai principî che prenderemo in esame più tardi, danno luogo ad alcune osservazioni che permettono di vedere come, nell'ordine d'idee euclideo, si presentino possibili altri assetti della teoria della congruenza, accolti in diversi trattati scolastici:

1° l'eguaglianza degli angoli alla base nel triangolo isoscele si può dare come corollario immediato del teor. 4°, considerando cioè i due triangoli eguali (sovrapposti BAC, CAB (Fig. 1);

2° la prima parte del 3° criterio di congruenza dei triangoli (eguaglianza di un lato e dei due angoli adiacenti) si può stabilire per sovrapposizione, e di qui dedurre poi la prop. VI;

3° il 2° criterio (prop. VIII) si può dedurre (per assurdo) dalla disuguaglianza data nella prop. XXIV, quando si ammetta il trasporto dell'angolo che Euclide effettua costruttivamente nella prop. XXIII.

Relativamente ai principî utilizzati nel testo Euclideo, si noti:

1° il principio di sovrapponibilità viene adoperato soltanto nella dimostrazione dei due primi criteri d'eguaglianza dei triangoli (Libro I, prop. IV e VIII) e per dimostrare la eguaglianza di due segmenti di circolo simili situati sopra segmenti rettilinei eguali (Libro III, prop. XXIV). A questo principio si dovrebbe però ricorrere anche nella prop. XV

se si volesse giustificare l'eguaglianza degli angoli retti che Euclide accetta come postulato;

2° le proposizioni I, II, III, del Libro I, rivelano un tentativo non completamente riuscito di fare a meno del movimento, riducendosi la relazione di eguaglianza di due segmenti al caso in cui abbiano un estremo in comune e sostituendo al *trasporto* la costruzione mediante intersezione di rette e cerchi.

Accenneremo qui finalmente ad un altro importante criterio di congruenza dei triangoli che, almeno nella sua generalità, non è registrato nel testo euclideo:

« Due triangoli che hanno due lati e l'angolo opposto al « maggiore di essi rispettivamente eguali, sono eguali ».

Il teorema si dimostra facilmente per assurdo riducendolo al primo criterio e basandosi sulla proprietà dell'angolo esterno del triangolo di esser maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti (prop. XV, Lib. I). Se ne deducono subito i corollari seguenti:

1° Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente eguali sono eguali (1).

2° Due triangoli ottusangoli che hanno eguali gli angoli ottusi, i lati opposti a questi angoli, ed altri due lati, sono eguali.

Non è vero in generale il teorema analogo per il caso che gli angoli supposti eguali nei due triangoli siano acuti; basta però aggiungere una condizione restrittiva per gli angoli opposti alla seconda coppia di lati eguali per avere un altro teorema generale la cui dimostrazione è analoga a quella del precedente e che è valido anche per i triangoli acutangoli. Si dimostra cioè che « se due triangoli hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo opposto al primo di questi due lati, essi sono eguali, purchè l'angolo opposto al secondo lato sia in tutti e due i triangoli o acuto, o retto, o ottuso ».

§ 2. **Il significato della congruenza.** — Il tentativo cui abbiamo sopra accennato relativamente alle prop. I, II e III del Lib. I rivela nell'autore degli Elementi la coscienza che

(1) Nel dimostrare la prop. XIV del Lib. III, Euclide ha occasione di dare questo teorema, e stabilisce l'eguaglianza degli altri cateti mediante la teoria dell'equivalenza.

il ricorrere alla sovrapponibilità col movimento delle figure geometriche costituisse un difetto; e tanto più codesto difetto doveva apparirgli saliente, perchè il concetto di eguaglianza, preso da Euclide (senza spiegazione) come un semplice rapporto logico inerente agli oggetti che appartengono alla *categoria delle quantità*, veniva così a legarsi, nella applicazione concreta, ad un'operazione fisica.

Aggiungasi che tale operazione fisica (il *trasporto*) usciva dall'ambito di quelle elementari costruzioni, date dai più semplici istrumenti, che i Greci postulavano come fondamento dell'esistenza delle figure (1).

Nello sviluppo critico della Geometria successivo ad Euclide, avvertita la chiara distinzione fra uguaglianza di forma (congruenza) e uguaglianza di grandezza (equivalenza), si sono manifestate nei riguardi della congruenza due tendenze fondamentali che, ciascuna per un lato, si possono riattaccare alle vedute euclidee:

considerare la uguaglianza (congruenza) come un *puro rapporto logico;*

ritenerla invece come una *relazione fisica* desunta dal *movimento dei corpi solidi.*

La prima tendenza ha avuto la sua più netta espressione in quella veduta che confonde l'uguaglianza colla *identità*, secondo la quale cioè « due figure geometriche sono uguali, se dell'una si può dire tutto ciò che si dice dell'altra ».

In altre parole l'eguaglianza di due figure A, A' consisterebbe in questo, che *tutte* le proprietà di A appartengono anche ad A' e viceversa; mentre come è già stato osservato p. es. dallo Stoltz, due figure congruenti geometricamente hanno proprietà diverse, in relazione alla loro diversa posizione nello spazio nel quale si considerano come contenute (paragonate ad una *stessa* figura).

La definizione precedente non reggerebbe d'altronde neppure quando la si volesse restringere alla identità delle proprietà *interne* delle due figure. In questo caso non si saprebbe invero come distinguere l'uguaglianza dalla similitudine.

La vacuità delle definizioni che attribuiscono alla con-

(1) Cfr. H. G. Zeuthen. *Die geometrische Construction als Existenzbeweis in der antiken Geometrie.* « Mathematische Annalen » 1896.

gruenza il carattere d'un puro rapporto logico, scaturisce d'altronde dalla necessità in cui ci troviamo ad ogni modo di aggiungere alla pretesa definizione logica la nozione di qualche carattere reale, che permetta di riconoscere concretamente l'eguaglianza delle figure.

Le osservazioni precedenti vengono completate dalla più recente critica logica intorno al significato generale delle *relazioni d'uguaglianza.*

Risulta da codesta critica che una uguaglianza fra due oggetti A, B, significa che questi furono *associati* in una classe $(A, B, ...)$ dalla quale si è costruito il concetto astratto O $(= A \text{ o } B \text{ o } ....)$; essere A uguale a B denota appunto la « sostituibilità di A a B rispetto ad O » [1].

Così l'uguaglianza ha sempre un senso relativo ad un'associazione ed astrazione che si suppone eseguita; p. es. si dice

Tizio = Caio *in quanto uomini*

oppure

uomo = cane *in quanto animali* ecc.

Consegue da ciò che ogni eguaglianza è una relazione, soddisfacente a certe proprietà formali (quelle che il PEANO chiama proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*) ed avente un significato fisico, il quale viene determinato assegnando le condizioni sotto cui vengono associati gli oggetti, che si prendono come eguali.

L'eguaglianza geometrica in particolare, ha un significato fisico che emerge dalla similarità delle sensazioni inerenti a certi oggetti per riguardo alle diverse posizioni possibili dell'osservatore; in altri termini, essa resta fisicamente determinata per mezzo della invarianza rispetto al movimento dei corpi solidi. Questa veduta, rispondente alla seconda delle tendenze sopra accennate, ha trovato in HELMHOLTZ il suo illustre sostenitore.

[1] Questo significato dell'uguaglianza risulta indirettamente dall'analisi delle così dette *definizioni per astrazione* di Grassman, Helmholtz, Peano, Vailati, per le quali si determina un concetto astratto (p. e. la temperatura, la direzione, il valore, ecc.) stabilendo quali oggetti siano da ritenersi eguali rispetto ad esso (cioè definendo le frasi « corpi ugualmente caldi », « rette di ugual direzione », « merci equivalenti » ecc.). Uno studio delle questioni logico-psicologiche che si riattaccano al concetto dell'uguaglianza (e in ispecie al rapporto fra le sue proprietà formali e i principî e gli assiomi logici) si trova nel 3° cap. dei *Problemi della Scienza* di F. ENRIQUES, seconda edizione. Bologna, Zanichelli 1910.

§ 3. **Analisi logica del concetto di movimento.** — Resta da vedere in qual modo le osservazioni precedenti possano utilizzarsi per una trattazione rigorosa della teoria geometrica della congruenza.

Alcuni chiari geometri (HOÜEL, DE PAOLIS.....), facendosi forti dell'autorità di HELMHOLTZ, hanno sostenuto la convenienza di definire come uguali o congruenti figure *sovrapponibili col movimento,* postulando esplicitamente che « le figure geometriche si possono muovere portando un loro punto in una posizione prefissata, una retta per il punto, ecc.

Questo modo di esposizione, didatticamente assai semplice, non può, così preso, ritenersi conforme alle esigenze di un assetto logico della Geometria. Infatti l'idea del movimento geometrico in tal modo introdotta come primitiva, non può rigorosamente figurare nei postulati, se non analizzata nei suoi elementi, in guisa che le ipotesi accolte intorno ad essa abbiano un senso formale, adoperabile senza ricorrere, nei ragionamenti, all'interpretazione più o meno nascosta, di esperienze fisiche, effettive o idealizzate.

D'altronde questa analisi del concetto di movimento è stata iniziata da HELMHOLTZ stesso e, proseguita da S. LIE, ha condotto ad una chiara veduta del contenuto logico dei postulati che vi si riferiscono. Citiamo soltanto i resultati.

In quanto si pensi ad una figura idealmente estesa, il movimento di essa, riguardata come solida, pone nello spazio (o in una regione di spazio) una *trasformazione* o *corrispondenza biunivoca puntuale.*

I varî movimenti possibili danno luogo ad un insieme di trasformazioni che gode delle seguenti proprietà fondamentali, per le quali dicesi un *gruppo:*

1° eseguendo successivamente due trasformazioni per movimento, si ottiene una trasformazione per movimento (*composta* delle due prime, o *prodotto* di esse);

2° insieme ad ogni trasformazione per movimento esiste anche la trasformazione inversa.

Resta quindi soltanto da postulare il grado di libertà nella trasformazione delle figure che è consentito dai movimenti. HELMHOLTZ e LIE fanno ciò indipendentemente dai concetti di retta e di piano, che vengono quindi definiti [1],

[1] In un ordine d'idee che si potrebbe riattaccare a quello di Lobatschewsky, Bolyai, (cfr. Art. 3°).

e riescono a mostrare la possibilità di costruire sopra le loro premesse tutto l'edificio geometrico, ricorrendo a sviluppi di analisi superiore.

Quando si prendano come dati i concetti di retta e di piano, la cosa è facilmente trattabile in modo elementare. I postulati da ammettere sono i seguenti:

1° I movimenti dello spazio sono *trasformazioni puntuali costituenti un gruppo.*

2° In un movimento ogni retta si trasforma in una retta (e quindi ogni piano in un piano).

3° Con un movimento si può far corrispondere ad un punto A un punto arbitrariamente assegnato A', ad una semiretta a uscente da A una semiretta a' uscente da A' ad un semipiano α limitato da a un semipiano α' limitato da a'.

4° Se in un movimento restano fermi tre punti non in linea retta, tutti i punti restano fermi (cioè il movimento è *nullo*, o, in altri termini, si riduce alla *trasformazione identica*).

È chiaro come questi postulati contengano le premesse richieste dalla teoria euclidea dell'uguaglianza, ove si assuma la seguente

Definizione. Due figure sono *congruenti* o *eguali* quando si lasciano trasformare l'una nell'altra mediante un movimento.

Osservazione. In tutto ciò che precede abbiamo tenuto in vista la teoria euclidea della congruenza indipendentemente dal postulato delle parallele (Art. 8°).

Ove si accolga fino da principio questo postulato, si ha, entro il gruppo dei movimenti, il *sottogruppo delle traslazioni* caratterizzato dalla *permutabilità,* il quale permette di definire facilmente la retta e di fondare l'edificio geometrico.

§ 4. **La congruenza presa come nozione primitiva.** — All'infuori dell'indirizzo che parte dall'analisi logica del concetto di movimento, un altro indirizzo ugualmente legittimo si presenta per fondare la teoria della congruenza geometrica.

Esso consiste nell'assumere come primitivo (senza definizione) il concetto stesso della congruenza fra figure in generale o fra alcune figure elementari, esprimendo analiticamente, mercè opportuni postulati, le proprietà che alla relazione

stessa competono (desunte dal suo significato fisico) e che valgono anzi a caratterizzarla nei riguardi di trattazione geometrica.

A tale ordine d'idee appartengono i tre modi di trattazione di cui qui vogliamo render conto, quello di PASCH [1], quello di VERONESE [2], quello di HILBERT [3].

§ 5. **Il sistema di postulati di Pasch.** — PASCH considera come data la nozione di *congruenza* o *eguaglianza* per figure qualsiasi composte di un numero finito di punti $A, B, C,\ldots..$, $A', B', C',\ldots..$ Questa relazione fra le due figure può indicarsi colla notazione

$$ABC\ldots \equiv A'B'C'\ldots..$$

I postulati seguenti, a parte l'ordine e qualche lieve modificazione di forma, riproducono il contenuto essenziale di quelli di PASCH:

1) Una figura è congruente a sè stessa.

2) Se una figura è congruente ad un'altra, anche la seconda è congruente alla prima.

3) Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

4) Le figure AB e BA sono congruenti.

5) Se $AB \equiv AC$, le figure BAC e CAB sono congruenti.

6) Se $A, B, C,$ sono tre punti tali che C appartenga al segmento rettilineo AB, e le figure ABC $A'B'C'$ sono congruenti, anche il punto C' appartiene al segmento rettilineo $A'B'$.

7) Se due figure $ABCD\ldots..$, $A'B'C'D'\ldots..$, sono congruenti, fra i punti di esse si può pensare una *corrispondenza* nella quale le figure costituite da gruppi di punti omologhi sono congruenti.

8) Date due figure congruenti F, F', se ad una di esse si aggiunge un punto P, anche alla seconda si può aggiungere un punto P' in guisa che le due nuove figure resultino ancora congruenti, e precisamente:

(1) PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie.* (Leipzig, 1882).

(2) VERONESE, *Fondamenti di Geometria.* Padova, 1891 e *Elementi di Geometria.* Id. 1897, 1904.

(3) HILBERT, *Grundlagen der Geometrie.* Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen. Leipzig, 1899.

9) Sopra una retta a', e da una parte d'un punto A', si può determinare uno ed un solo punto B' tale che sia $A'B' \equiv AB$.

10) Data una terna di punti A, B, C, non in linea retta, e una coppia di punti A', B' tale che sia $A'B' \equiv AB$, in ogni piano per la retta $A'B'$ e da una parte di essa si può determinare uno ed un solo punto C in guisa che sia: $ABC \equiv A'B'C'$.

11) Data una quaterna di punti $ABCD$ non giacenti in un piano, non esiste alcun punto X distinto da D per cui sia:

$$ABCX \equiv ABCD$$

(vale a dire: data una terna di punti $A'B'C' \equiv ABC$, si può determinare in modo unico un punto D' pel quale resulti:

$$A'B'C'D' \equiv ABCD).$$

Allo scopo di mostrare come questi postulati possano servire di base all'ordinaria teoria della congruenza, cominciamo dal definire la congruenza di segmenti e di angoli.

« *Due segmenti AB, CD si diranno congruenti quando sono congruenti le coppie AB e CD* ».

Quanto agli angoli, premettiamo l'osservazione seguente:

Sia (ab) un angolo di vertice O, e sia O' un punto sulla retta a'.

Presi due punti A e B sui raggi a, b rispettivamente, e un punto A' sulla a' in modo che sia $O'A' \equiv OA$, determiniamo (post.° 10) il punto B' in guisa che sia

$$O'A'B' \equiv OAB.$$

Resta così determinato, col punto B', il raggio $O'B'$ che chiameremo b', e l'angolo $(a'b')$ di vertice O'. Se ora sui lati a, a' rispettivamente, prendiamo due punti C, C' in modo che sia $OC \equiv O'C'$, e sui lati b, b' due punti D, D' in modo che sia $OD \equiv O'D'$, è facile vedere che le due figure OCD, $O'C'D'$ sono congruenti. Infatti dal post.° 10 segue subito che alla figura $O'A'B'$ si possono aggiungere i due punti X, Y in guisa da avere

$$O'A'B'XY \equiv OABCD.$$

Ma dai postulati precedenti segue anche che X deve appartenere alla retta $O'A'$, e così pure Y alla retta $O'B'$; e segue che $O'X \equiv OC$ $O'Y \equiv OD$, donde si deduce che i punti X e Y coincidono rispettivamente con C' e D' e perciò $OCD \equiv O'C'D'$.

In base a questa osservazione, definiremo la congruenza di due angoli nel modo seguente:

« *Due angoli (ab) $(a'b')$ di vertici O O', si diranno congruenti se, scelte sui loro lati due coppie di punti A, B e A', B' rispettivamente, in guisa che sia $OA \equiv O'A'$ $OB \equiv O'B'$, ne risulta $OAB \equiv O'A'B'$* » [1].

Da quanto precede si ha subito:

α) Da una parte del raggio a', in un dato piano, vi è uno ed un solo raggio b' pel quale resulta l'angolo $(a'b')$ congruente ad un dato angolo (ab).

L'eguaglianza o congruenza di due triangoli si può definire come congruenza delle terne di vertici, e dedurne che i lati (segmenti o coppie di punti) sono congrui e così pure gli angoli.

Se ne traggono ora facilmente le tre proposizioni fondamentali sulla congruenza dei triangoli. Intanto dalla definizione, data sopra, di congruenza angolare, segue immediatamente che:

I. *Due triangoli sono congrui se sono rispettivamente congrui un angolo e i lati che lo comprendono.*

Dimostriamo ora che:

II. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i due triangoli ABC $A'B'C'$ che abbiano $AB \equiv A'B'$ $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$; $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$; dico che $ABC \equiv A'B'C'$. Infatti essendo $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, determiniamo un punto C'' in guisa che sia:

$$AC''B \equiv A'C'B'.$$

Dalla congruenza di queste due terne di punti, e dalla conseguente congruenza degli angoli da essi determinati, tenendo conto dell'ipotesi e della proposizione α) si conclude

[1] In particolare, prendendo $OA \equiv OB$ su o, b rispettivamente, dal post.° 5 segue l'invertibilità dell'angolo.

che i raggi AC'' BC'' non possono essere distinti dai raggi AC, BC rispettivamente, e che per conseguenza i punti C, C'' coincidono. Rimane dunque dimostrata la congruenza dei triangoli dati ABC, $A'B'C'$.

III. *Sono congruenti due triangoli se i lati dell'uno sono rispettivamente congruenti ai lati dell'altro.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (Fig. 4) che abbiano:

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad BC \equiv B'C';$$

dico che $ABC \equiv A'B'C'$.

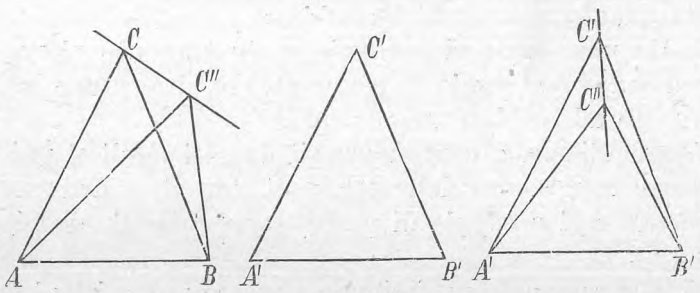


Fig. 4.

Infatti, poichè $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC, e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, si può aggiungere (post.° 10) ad AB un punto C'' in guisa che resulti:

$$ABC'' \equiv A'B'C'.$$

Si avrà allora, tenendo conto anche dell'ipotesi,

$$AC \equiv AC'' \quad BC \equiv BC''.$$

Essendo poi (post.° 5)

$$CAC'' \equiv C''AC,$$

potrà aggiungersi alla figura $C''AC$ un punto B'' in modo che resulti:

m) $$C''ACB'' \equiv CAC''B.$$

Potrà darsi che nella figura $CAC''B$ i due punti A e B giacciano dalla stessa parte della retta CC'', oppure da parti opposte; ma poichè nella figura $C'''ACB''$ i punti A B'' giaceranno anch'essi, nel primo caso, dalla stessa parte di CC'', e nel secondo da parti opposte, avremo che B e B'' giaceranno sempre dalla stessa parte di CC''.

Si ha d'altronde (post.° 5)

$$CBC'' \equiv C''BC$$

e, per la relazione m), anche

$$CBC'' \equiv C''B''C;$$

se ne conclude (post.° 3)

$$C''BC \equiv C''B''C$$

il che significa che i punti B, B'' coincidono. La relazione m) diventa allora:

$$C''ACB \equiv CAC''B$$

da cui

$$ACB \equiv AC''B.$$

Dunque i punti C, C'' coincidono e i due triangoli dati sono congruenti.

Sarebbe facile ora dedurre da queste proposizioni il teorema sulla eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, quello sull'angolo esterno, ecc. nonchè l'eguaglianza degli angoli opposti al vertice, le proposizioni sull'eguaglianza dei poligoni e così via. Ma quanto precede ci sembra sufficiente a dare un'idea dell'indirizzo a cui conducono i postulati di PASCH; e passiamo quindi a trattare brevemente del metodo di VERONESE.

§ 6. **Il sistema di Veronese** [1]. — Uno dei principî fondamentali sui quali il VERONESE fonda l'edificio geometrico è quello di considerare la retta come la figura fondamentale della Geometria per la costruzione delle altre figure.

Egli introduce come primitivo il concetto di *congruenza*

[1] Nel render conto del metodo di VERONESE, oltrechè i *Fondamenti* e gli *Elementi* di questo Autore, abbiamo avuto sott'occhio la Nota di F. PALATINI *I principî della Geometria esposti secondo il metodo di Veronese* (Giornale di Battaglini, 1904, vol. 41).

fra segmenti; ed ecco intanto un primo gruppo di postulati che si incontrano in questo ordine di idee:

1) Un segmento è congruente a sè stesso.

2) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

4) Un segmento non è congruente ad una sua parte.

5) Il segmento AB è congruente al segmento inverso BA.

6) Dato sulla retta un punto A ed un segmento XY qualunque, esistono sulla retta stessa due segmenti AB, AC congruenti ad XY da parti opposte di A.

Questi postulati sono intanto sufficienti a dare le definizioni e le proprietà relative ai concetti di somma, differenza, multipli, ecc. dei segmenti; e insieme col postulato di determinazione della retta per mezzo di due punti, colle proprietà lineari della retta (ordine, continuità) e col postulato d'Archimede, servono, secondo le vedute dell'autore, a caratterizzare la retta considerata in sè medesima.

Ammessa poi l'esistenza di punti fuori della retta, viene introdotto il postulato:

7) In ogni retta esiste un segmento congruente a un segmento qualunque dato.

Ciò posto, si può dare la definizione generale di figure congruenti, la quale (a prescindere dalla nomenclatura speciale dell'autore) si lascia esprimere come segue:

« Due figure si dicono congruenti quando ad ogni punto « dell'una corrisponde uno ed un solo punto dell'altra per « modo che i segmenti congiungenti le coppie di punti omo- « loghi nelle due figure sieno congruenti ».

Dalla definizione segue senz'altro l'eguaglianza di ogni figura con sè stessa, quella di due figure che siano eguali ad una medesima, e la possibilità di stabilire in innumerevoli modi una corrispondenza di eguaglianza fra due rette (nelle quali siano stati o no fissati due versi) essendo arbitraria la scelta dei punti A A' dai quali si parte per stabilirla.

Lo studio delle figure congruenti viene proseguito dal VERONESE negli *Elementi* secondo una via legata al postulato euclideo delle parallele. I postulati ammessi enunciano l'invertibilità della coppia di rette simmetriche (opposte) rispetto a un punto nella Geometria euclidea, cioè:

8) La figura costituita dalle due rette r, s concorrenti in O, è congruente a quella delle due rette stesse considerate in ordine inverso.

9) Se due punti A, B, d'una retta r hanno per simmetrici rispetto ad un punto O due altri punti A, B' d'un'altra retta r', tutti i punti di r hanno sulla r' i loro simmetrici rispetto ad O; e le due rette stesse sono simmetriche rispetto al punto medio di qualunque segmento che congiunga un punto dell'una con un punto dell'altra.

Questi postulati (di cui l'ultimo contiene visibilmente quello delle parallele) permettono, una volta costruito il piano per proiezione da un punto, di dimostrarne la proprietà fondamentale (cfr. art. 3°).

Di più si ottengono nel piano due specie di trasformazioni per congruenza; le simmetrie rispetto a una retta e quelle rispetto ad un punto. Si può dire anzi che la deduzione di codeste trasformazioni dai postulati sopra citati costituisce il passo fondamentale nel sistema di VERONESE. Componendo le simmetrie anzidette, resultano infatti in tutta la generalità i movimenti del piano, resulta cioè stabilito il principio di sovrapponibilità su cui si asside l'ordinaria teoria della congruenza.

Nei *Fondamenti* il VERONESE si occupa anche in generale del metodo di fondare la teoria della congruenza nelle varie ipotesi che si ottengono col prescindere dal postulato delle parallele (cfr. art. 8°). Allora non si ha più il postulato delle rette simmetriche rispetto a un punto, ma il postulato della invertibilità della coppia di rette viene surrogato da un altro più generale che può enunciarsi così:

8′) « Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, e si pren- « dono sui raggi AB, $A'B'$ i punti D, D' in modo che sia

$$AD = A'D',$$

« e su AC, $A'C'$ i punti E, E' in modo che sia

$$AE = A'E',$$

« resulta

$$DE = D'E' \text{ ».}$$

Questi dati non bastano per altro da soli a dimostrare in modo assolutamente generale la proprietà fondamentale del piano che il VERONESE ha in vista di dedurre dalla costruzione

di esso. La discussione delle ipotesi che occorre aggiungere a tale scopo ci condurrebbe un po' fuori dell'ordine d'idee elementare a cui ci atteniamo in questo scritto. D'altronde la questione può essere riguardata come secondaria pel nostro scopo.

Ammettiamo pertanto introdotta cotesta proprietà mediante un postulato di cui preciseremo la forma, e domandiamoci se questi dati siano sufficienti per stabilire i termini fondamentali sulla congruenza dei triangoli, o che cosa occorra aggiungervi. Potremo così giudicare più chiaramente il valore dell'idea fondamentale del VERONESE per riguardo alla teoria che ci occupa indipendentemente dalle altre vedute che ne caratterizzano il sistema.

Prenderemo il postulato accennato sotto la forma seguente:

9′) « Se sopra due raggi OA, OB si prendono rispetti-« vamente due punti A', B', ogni raggio proiettante da O un « punto del segmento AB incontra il segmento $A'B'$ ».

Questo postulato ci conduce immediatamente alle proprietà fondamentali dell'angolo $\widehat{AOB}$, definito come l'insieme dei raggi proiettanti da O i punti del segmento AB (o di $A'B'$ ecc.) (cfr. art. 3°). La congruenza di due coppie di rette OA OB, $O'A'$ $O'B'$ equivarrà, secondo la definizione generale, alla congruenza dei due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$.

Secondo il postulato 8′) due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ saranno congruenti se presi $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, resulterà $AB = A'B'$. In tal caso sarà anche $\widehat{BAO} = \widehat{B'A'O'}$, ecc. Se allora si considera un raggio OC interno ad $\widehat{AOB}$ secante AB nel punto C, e si prende sopra $A'B'$ un punto C' per modo che sia $A'C' = AC$, resulterà $CO = C'O'$, e quindi $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$ come anche $\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}$

Ciò posto, proponiamoci di stabilire i teoremi di congruenza dei triangoli.

Il caso in cui sono respettivamente eguali due lati e l'angolo compreso, e quello in cui sono respettivamente eguali i tre lati, discendono senz'altro dal postulato 8′). Occupiamoci pertanto del caso in cui i due triangoli hanno un lato e i due angoli adiacenti respettivamente eguali. Nei due triangoli ABC, $A'B'C'$ (Fig. 5) sia

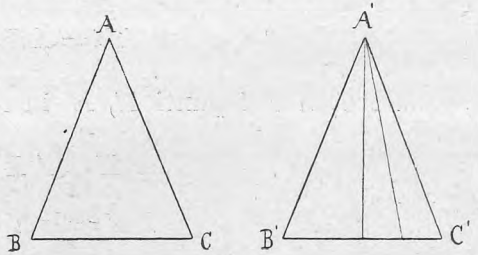


Fig. 5.

$AB = A'B'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Tentiamo una dimostrazione per assurdo.

Perciò, supposte p. es. $B'C' > BC$, prendasi C_1 su $B'C'$ in modo che sia $B'C_1 = BC$; avremo $AC = A'C_1$ e quindi $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$.

Così si ottiene un angolo congruente a una sua parte. Questa conseguenza non sembra veramente in contraddizione colle nostre premesse. Soltanto dovrà essere $A'C_1 \neq A'C'$. In tali ipotesi però potremo costruire entro l'angolo $\widehat{B'A'C_1}$ un raggio intersecante $B'C_1$ in un punto C_2 per modo che sia

$$\widehat{B'A'C_2} = \widehat{B'A'C_1} = \widehat{B'A'C'}$$

e la costruzione potrà proseguirsi indefinitamente.

Se si ammette quindi il *postulato della continuità* (cfr. art. 5°), la successione dei punti C_1C_2.... dovrà avere un punto limite K pel quale non potrà essere

$$\widehat{B'A'K} = \widehat{B'A'C'}.$$

Ma questa conseguenza ne involge un'altra contraria alla nostra intuizione; è facile invero persuadersi che si otterrà in tal caso un triangolo variabile di cui un lato diviene infinitamente piccolo mentre la differenza degli altri due lati si mantiene superiore ad un segmento assegnabile. La possibilità di un siffatto caso può essere negata mediante un postulato che si potrebbe chiamare *di continuità del piano* [1].

In base a questo si riesce dunque alla dimostrazione che ci eravamo proposti, e quindi a fondare tutta l'ordinaria teoria della congruenza.

L'accennato postulato ha effettivamente un ufficio notevole nel sistema esposto dal VERONESE nei *Fondamenti* [2]; soltanto la forma ivi adottata è un po' diversa perchè l'Autore ha in vista una più generale Geometria non archimedea.

Gli sviluppi indicati ci permettono di formarci un giudizio sul valore del sistema di VERONESE.

L'idea fondamentale di ridurre la nozione generale della

[1] Quando è già fondata l'ordinaria teoria della congruenza, questa proposizione consegue dalla continuità della retta.

[2] Cfr. VERONESE, *Fondamenti*.

congruenza al caso dei segmenti realizza evidentemente un progresso teorico sul metodo di PASCH, progresso che appare d'altronde conforme alle vedute di altri autori. Ma lo svolgimento della teoria quando si prendano a punto di partenza i postulati di VERONESE riesce forse più complicato di quello che si ottiene partendo dai postulati di PASCH. È tuttavia una difficoltà didattica comune ai due metodi quella d'introdurre fin da principio il concetto astratto di corrispondenza. Tale difficoltà si può dire eliminata o, per lo meno, attenuata col metodo di HILBERT che ora passiamo ad esporre.

§ 7. **Il sistema di Hilbert.** — Il lavoro di HILBERT che abbiamo sopra citato contiene un nuovo punto di vista sul modo d'introdurre la nozione di congruenza. Mentre il PASCH introduce come primitiva la nozione di *congruenza fra figure qualsiasi,* ed il VERONESE soltanto *fra segmenti,* nel sistema di HILBERT figurano come primitive le nozioni di *congruenza fra segmenti e fra angoli.* È una via che, in un certo senso, sta di mezzo fra quelle degli altri due Autori e che, adottata sistematicamente nell'insegnamento della Geometria (1), ci sembra più delle altre vantaggiosa dal punto di vista didattico. Noi crediamo infatti che sostituendo il concetto intuitivamente chiaro della relazione di congruenza angolare con una definizione (come fanno PASCH e VERONESE) non si riesca a dare un'idea immediatamente comprensibile di tale relazione. E d'altronde è evidente che i postulati stessi, pur formulati indipendentemente dal concetto di congruenza angolare (ad esempio quello di VERONESE per la congruenza fra coppie di rette) si basano in sostanza sull'intuizione di tale concetto.

Notiamo ancora che questa formulazione Hilbertiana si può riguardare come la più vicina alle vedute euclidee che essa asside sopra una base rigorosa rilevando i concetti primitivi di congruenza segmentaria ed angolare che vi sono contenuti e postulandone i rapporti desunti dall'uso, il più limitato possibile, del movimento.

Ecco qui registrati, a meno dell'ordine e di qualche amplificazione fatta allo scopo di rendere più semplice lo svolgimento della teoria, i postulati proposti da HILBERT:

(1) Così è fatto nel volume di F. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di Geometria.* Bologna; Zanichelli, 1903 e 1904.

1) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

2) Se un angolo è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

4) Due angoli congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

5) Ogni segmento AB è congruente a sè stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$AB \equiv AB \equiv BA.$$

6) Ogni angolo (ab) è congruente a sè stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$(ab) \equiv (ab) \equiv (ba).$$

7) Sopra ogni retta r', a partire da un suo punto qualunque A', e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo segmento congruente ad un segmento AB appartenente alla retta r.

8) Dato un raggio a, uscente da un punto O, in ogni piano che lo contiene, e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo raggio b uscente da O, e tale che l'angolo (ab) resulti congruente ad un dato angolo $(a'b')$.

9) Se AB, BC sono due segmenti consecutivi della stessa retta r (cioè aventi un estremo e nessun altro punto comune), $A'B'$, $B'C'$ altri due segmenti consecutivi sulla retta r', e si ha $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, si ha pure $AC \equiv A'C'$.

10) Se (ab), (bc) sono due angoli consecutivi dello stesso piano π (cioè aventi il vertice e un lato in comune), $(a'b')$, $(b'c')$ altri due angoli consecutivi in uno stesso piano π', e si ha $(ab) \equiv (a'b')$, $(bc) \equiv (b'c')$, si ha pure $(ac) \equiv (a'c')$.

11) Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo compreso, hanno rispettivamente congruenti anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati congruenti.

Notiamo subito che dai postulati 6 e 11 segue l'eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, e che i post.i 9 e 10 enunciano, in sostanza, la proposizione:

« Somme o differenze di segmenti, o di angoli, rispettivamente eguali, sono eguali ».

Aggiungiamo che il post.° 11, che lega il concetto di congruenza fra segmenti con quello di congruenza fra angoli, si potrebbe dare, come nel lavoro di HILBERT, sotto forma più semplice, concedendo a priori soltanto la congruenza degli angoli opposti ai lati eguali, e non quella dei terzi lati, che segue immediatamente dalla prima e dal post.° 8; qui si è preferito completarlo anche con questa parte, giacchè essa discende, come l'altra, dalla stessa dimostrazione empirica col movimento.

Definita ora l'eguaglianza di due triangoli come eguaglianza dei lati e degli angoli compresi fra i lati rispettivamente eguali, passiamo ad esporre le altre due proposizioni sulla congruenza dei triangoli.

I. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ che abbiano

$$AB \equiv A'B',\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}\ \widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}.$$

Dico che i due triangoli sono congrui. Basta provare che è $CA \equiv C'A'$, perchè il teorema resulti dimostrato in base al post.° 11.

Se non fosse $CA \equiv C'A'$, si potrebbe determinare sul raggio AC un punto C'' tale che fosse

$$AC'' \equiv A'C'.$$

Dal confronto dei triangoli $C''AB$ $C'A'B'$ si avrebbe allora

$$\widehat{C''BA} \equiv \widehat{C'B'A'}$$

e perciò anche (post.° 4)

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{C''BA},$$

contro il post.° 8.

II. *Due triangoli sono congrui, se i lati dell' uno sono rispettivamente congrui ai lati dell' altro.*

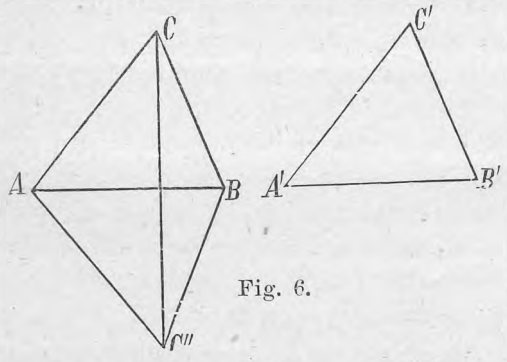


Fig. 6.

Siano i due triangoli ABC $A'B'C'$ (Fig. 6) che abbiano

$$AB \equiv A'B',$$
$$AC \equiv A'C',$$
$$BC \equiv B'C'.$$

Dico che i due triangoli sono congruenti.

Nel piano ABC, e dalla parte opposta a quella dalla

quale si trova il punto C rispetto ad AB, determiniamo l'angolo $\widehat{BAC''} \equiv \widehat{C'A'B'}$ e prendiamo $AC'' \equiv A'C'$. Dai triangoli BAC'', $C'A'B'$ segue allora

$$C''B \equiv C'B' \quad \widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$

Costruito il segmento CC'', si osservi che i triangoli CAC'', CBC'' sono isosceli ed hanno perciò eguali gli angoli alla base. Per l'osservazione fatta sopra, relativa al post.° 10, tanto nel caso che il segmento CC'' incontri il segmento AB, quanto nel caso che incontri il suo prolungamento, si conclude

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{ACB}.$$

Ma si ha:

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

dunque

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

e per il post.° 11, i due triangoli dati sono congruenti.

§ 8. **Principali proposizioni sulle perpendicolari.** — Abbiamo già accennato come in Euclide si fondi la teoria delle perpendicolari sul postulato della eguaglianza degli angoli retti (o piatti), la quale eguaglianza si lascerebbe giustificare col movimento. Vale la pena di vedere come HILBERT riesca a edificare questa teoria senza l'aggiunta di alcun postulato. Incominciamo dal dimostrare il

TEOR. I *Angoli adiacenti* (1) *di angoli eguali sono eguali.*

Siano i due angoli eguali (ab) $(a'b')$ (Fig. 7) di vertici O, O', e consideriamo i loro adiacenti (a_1b), $(a_1'b')$.

Dico che

$$(a_1b) = (a_1'b').$$

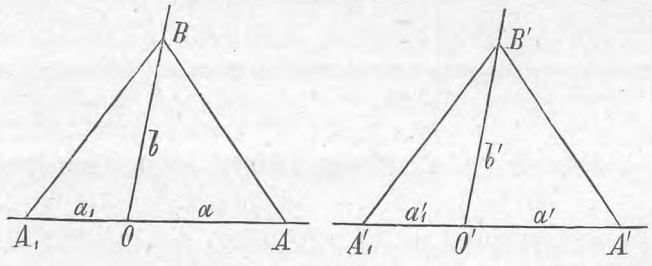


Fig. 7.

(1) Per angolo *adiacente* d'un angolo dato intendiamo, come di ordinario, quello compreso da uno dei lati dell'angolo dato e dal prolungamento dell'altro lato al di là del vertice.

Infatti presi tre punti qualunque A, B, A_1 sui raggi a, b, a_1 rispettivamente, determiniamo sui raggi a', b, a_1' i punti A', B', A_1' in modo che sia

$$OA \equiv O'A' \quad OB \equiv O'B' \quad OA_1 \equiv O'A_1'.$$

Condotti poi i segmenti AB, A_1B, e i corrispondenti $A'B'$, $A_1'B'$, dai triangoli eguali BOA, $B'O'A'$, segue

$$BA \equiv B'A' \quad \widehat{BAO} \equiv B'A'O';$$

quindi sono eguali anche i triangoli BAA_1, $B'A'A_1'$, e si ha:

$$BA_1 \equiv B'A_1'.$$

Considerando allora l'altra coppia di triangoli BOA_1, $B'O'A_1'$, si trova che hanno i tre lati rispettivamente eguali e se ne conclude:

$$(a_1b) \equiv (a_1'b');$$

come si voleva dimostrare.

Cor. Due angoli opposti al vertice sono eguali.

Infatti, due angoli opposti al vertice sono adiacenti del medesimo angolo.

Def. Un *angolo* dicesi *retto*, se è uguale ad uno de' suoi adiacenti [1].

Osserviamo che, pel Cor. precedente, se un angolo è eguale ad uno dei suoi adiacenti, è eguale anche all'altro.

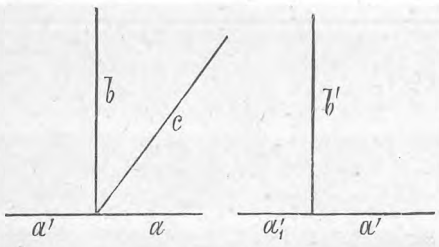


Fig. 8.

Teor. II. *Gli angoli retti sono eguali.*

Siano dati i due angoli retti (ab), $(a'b')$ (Fig. 8). Dico che

$$(ab) \equiv (a'b').$$

Infatti, se non è $(ab) \equiv (a'b')$, si potrà determinare dalla stessa parte di a dalla quale si trova b, un raggio c distinto da b, e tale che

$$(ac) \equiv (a'b').$$

[1] L'esistenza di un angolo retto si desume poi dal Teor. III.

Allora, essendo, pel teor. I,

$$(a_1c) \equiv (a_1'b'),$$

e per definizione

$$(a_1'b') \equiv (a'b') \equiv (ac),$$

resulta:

$m)$ $$(a_1c) \equiv (ac).$$

Ma è anche

$n)$ $$(a_1b) \equiv (ab);$$

ed è facile vedere che le due relazioni $m)$ $n)$ sono in contraddizione l'una coll'altra. Essendo invero non congruenti i due angoli (ac) (ab), sarà, per esempio,

$$(ac) < (ab) \quad \text{e} \quad (a_1c) > (a_1b),$$

e per la $n)$

$$(a_1c) > (ac)$$

che contraddice alla $m)$. I due raggi b, c non possono dunque esser distinti, e il teorema rimane dimostrato.

Teor. III. *Per un punto A, non appartenente a una retta a, passa una, ed una sola retta perpendicolare ad a* (Fig. 9).

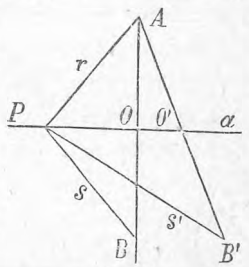


Fig. 9.

Scelto infatti un punto qualunque P su a, uniamo i punti A, P e chiamiamo r il raggio PA. Determiniamo poi nel piano Aa, e dalla parte opposta a quella dalla quale si trova A, il raggio s per P, tale che

$$(ra) \equiv (sa)$$

e il punto B tale che

$$PA \equiv PB.$$

Unito A con B, è chiaro che la AB è perpendicolare alla a perchè dai due triangoli eguali APO, BPO resulta

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}.$$

Questa perpendicolare poi è unica perchè ogni altra retta AB' che incontrasse a in O' e che fosse perpendicolare ad a, quando si fosse fatto dall'altra parte $O'B' \equiv O'A$, e si indicasse con s' il raggio PB' darebbe evidentemente:

$$(ra) \equiv (s'a) \quad PA \equiv PB'$$

donde $(sa) \equiv (s'a) \quad PB \equiv PB'$;

ossia i punti B, B' non sono distinti, e quindi un'altra perpendicolare non può esistere.

TEOR. IV. *Per un punto A di una retta a, passa una ed una sola perpendicolare ad a.*

Questa è infatti la retta per A facente con a un angolo eguale ad un angolo retto; e che sia unica resulta evidente dai postulati e dal teor. II.

§ 9. **Congruenza delle figure in generale.** — Il sistema di postulati di HILBERT, di cui abbiamo discorso, permette di giungere ad una definizione completamente generale della congruenza delle figure, mentre tale nozione è assunta come primitiva nel sistema di PASCH.

La definizione a cui alludiamo è la seguente:

Due figure si dicono congruenti quando ad ogni punto dell'una corrisponde un punto dell'altra ed uno solo, in guisa tale che i segmenti aventi per estremi coppie di punti corrispondenti sono eguali, e gli angoli aventi per lati segmenti corrispondenti sono eguali [1].

HILBERT stesso dimostra che dai teoremi d'eguaglianza dei triangoli si può dedurre la corrispondenza d'eguaglianza dei semipiani (o semispazî) cioè il principio ordinario di sovrapponibilità.

Siccome però la nozione generale di corrispondenza può venire giudicata didatticamente difficile nella sua astrattezza, così vale la pena di vedere come si possa giungere ad una definizione induttiva dell'eguaglianza per le figure che compariscono nella Geometria elementare.

Ci riferiremo qui alle figure piane attenendoci al metodo seguito da F. ENRIQUES e U. AMALDI nel Trattato sopra citato.

Pei poligoni rettilinei in generale (convessi, concavi, intrecciati), analogamente al caso dei triangoli, si definisce l'eguaglianza come eguaglianza dei lati ed angoli dell'uno coi lati ed angoli dell'altro; vale a dire, considerando in ciascuno dei poligoni i lati e gli angoli ordinati in una delle

[1] Qui bisogna aggiungere la condizione della eguaglianza di *verso* (cfr. art. 3°) se ci si vuole limitare alla congruenza *diretta*.

due *serie* (inverse l'una dell'altra) alle quali danno luogo i vertici del poligono stesso, si dirà che i due poligoni sono congruenti allorchè i lati e gli angoli di una serie dell'uno sono ordinatamente uguali ai lati e agli angoli di una serie dell'altro.

L'eguaglianza di due circonferenze (o di due cerchî) si definisce come eguaglianza dei relativi raggi; e quello di due archi (o di due settori) circolari appartenenti a circonferenze (o a cerchî) eguali, si definisce come eguaglianza degli angoli al centro che li comprendono.

Per le figure a contorno circolare o misto, essendo ciascuna di esse determinata da un numero finito di costruzioni elementari (segmenti ed angoli), la definizione dell'eguaglianza si può desumere dall'identità delle costruzioni stesse e dalla eguaglianza degli elementi coi quali sono eseguite. Possiamo perciò assumere la seguente definizione:

Due poligoni a contorno circolare o misto si dicono uguali quando sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:

1) sono uguali i poligoni rettilinei determinati dai loro vortici nell'ordine stesso;

2) sono ordinatamente eguali gli archi che costituiscono i lati dei due poligoni;

3) questi archi sono nei due poligoni *ugualmente posti* rispetto alle loro corde.

§ 10. **Diedri e triedri.** — In ciò che precede ci siamo riferiti alla Geometria piana. Diamo ora un rapido cenno degli sviluppi relativi ai diedri e ai triedri.

Quando si basa la teoria della uguaglianza sul principio della sovrapponibilità col movimento, non si ha alcuna difficoltà a trattare dei diedri uguali ed a riconoscere (con un'esperienza ideale) che « tutti i rettilinei d'un diedro sono uguali » e che « diedri aventi uguali rettilinei sono sovrapponibili ». La prima esperienza (traslazione) contiene però implicitamente il postulato delle paralleli.

Escludendo il principio sperimentale della sovrapponibilità, si presenta spontanea l'idea di definire come « *uguali* » due diedri i cui rettilinei siano uguali, ma si richiede perciò la dimostrazione dell'eguaglianza dei rettilinei d'uno stesso diedro. La quale può darsi, indipendentemente dal postulato delle parallele, nel modo seguente:

Se $\widehat{ABC}$, $\widehat{DEF}$ sono due rettilinei del diedro di costola BE (Fig. 10), si prendano sui prolungamenti dei raggi EF, ED al di là del vertice E i segmenti EK, EH respettivamente eguali ai segmenti BA, BC segnati sui lati del primo angolo. Ciascuno dei segmenti HC, AK incontra allora il segmento EB nel suo punto medio O. Si ha perciò:

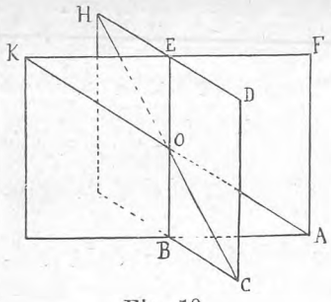


Fig. 10.

$$\text{tr.}^\circ\ KEO = \text{tr.}^\circ\ ABO$$

e

$$\text{tr.}^\circ\ HEO = \text{tr.}^\circ\ CBO$$

donde

$$KO = AO, \quad HO = CO$$

ed anche

$$\text{tr.}^\circ\ HOK = \text{tr.}^\circ\ CAO.$$

Se ne conclude

$$HK = CA \quad \text{e} \quad \text{tr.}^\circ\ HEK = \text{tr.}^\circ\ ABC$$

e quindi l'eguaglianza dei due rettilinei.

Dopo ciò è interessante di vedere come possa fondarsi tutta la teoria dell'eguaglianza dei triedri senza fare uso del principio di sovrapponibilità che ricorre negli sviluppi ordinarî [1].

Consideriamo come congruenti due triedri che hanno rispettivamente eguali i diedri e le faccie, senza distinguere il caso della congruenza diretta (sovrapponibilità) ed inversa (triedri simmetrici), ciò che può farsi in base alla nozione del verso (art. 3°).

Secondo le vedute del VERONESE, la trattazione dovrebbe correre parallela a quella della Geometria piana per i triangoli.

[1] Ordinariamente si riconosce per mezzo della sovrapposizione l'eguaglianza di due triedri nei due casi in cui abbiano respettivamente eguali due faccie e il diedro compreso, oppure due diedri e la faccia compresa. Il terzo caso poi, in cui siano respettivamente eguali le faccie, si giustifica riconducendolo al primo, col dimostrare, mediante facili considerazioni di triangoli eguali, l'eguaglianza dei rettilinei di due diedri corrispondenti.

In Euclide non si trovano gli ordinarî teoremi d'eguaglianza dei triedri; soltanto nella prop.ne XXVI del Libro XI vengono chiamati *eguali* due triedri aventi le faccie respettivamente eguali.

Poste a riscontro le proposizioni fondamentali comuni al piano e alla stella (insieme delle rette, o raggi, e dei piani o fasci di rette o di raggi per un punto) se ne potranno trarre le analoghe conseguenze facendo uso di un *principio di dualità* per cui al « punto » e alla « retta » del piano si sostituiscano la « retta » o il « raggio » e respettivamente il « piano » o il « fascio di rette o di raggi » della stella. La cosa però non è così semplice ed immediata come si potrebbe credere, ed esige considerazioni di un ordine delicato.

Fra la Geometria del piano e quella della stella sussistono infatti delle differenze fondamentali:

1) la retta è una *linea* i cui punti sono disposti in un *ordine aperto*, ed invece gli elementi (rette o raggi) del fascio danno luogo ad un *ordine chiuso*, o, più precisamente, ad una *disposizione circolare*. (Cfr. art. 3°);

2) nel piano si hanno rette non incontrantisi (parallele), mentre due piani nella stella hanno sempre comune una retta (o due raggi opposti se si tratta della stella di raggi).

L'applicazione immediata dell'idea fondamentale del VERONESE esigerebbe dunque che la teoria della congruenza dei triangoli fosse svolta nel piano in modo da porre in evidenza che non ci si appoggia nè al fatto che la retta è linea *aperta*, nè al postulato euclideo delle parallele. Se invece (come nel sistema di VERONESE) si costruisca fin da principio la Geometria piana su questo postulato, si dovrà porgere una nuova dimostrazione per quei teoremi di Geometria della stella i cui correlativi, pur valendo nel piano, sono stati dimostrati in base a tale ipotesi.

Così, per esempio, il VERONESE dimostra il teorema della Geometria del piano « un lato d'un triangolo è minore della somma degli altri due » appoggiandosi alle proprietà della perpendicolare e delle oblique da un punto a una retta. Le proprietà correlative di queste ultime, che valgono nella Geometria della stella, sono poi utilizzate per dimostrare il teorema (correlativo di quello sopra citato) « una faccia d'un triedro è minore della somma delle altre due ». Ma l'Autore ha dovuto dare di esse una nuova dimostrazione perchè le proprietà della perpendicolare e delle oblique da un punto a una retta nel piano furono già dimostrate con un metodo che implica il postulato delle parallele.

In sostanza la cosa essenziale da dimostrare secondo

quest'ordine d'idee è che vale nella stella un principio di trasformazione delle figure ove gli angoli omologhi sono eguali, correlativo del principio di trasformazione per congruenza nel piano. A tal fine occorre stabilire che si può porre nello spazio (in due modi) una corrispondenza puntuale in cui a segmenti uguali corrispondono segmenti uguali, e dove:

1) ad un punto O corrisponda sè medesimo;

2) a due raggi per O, altri due raggi per O stesso formanti un angolo eguale.

È chiaro come, stabilito il principio di trasformazione sopra accennato, si possano dedurre i criterî d'eguaglianza di due triedri che hanno respettivamente eguali due faccie e il diedro compreso, oppure due diedri e la faccia compresa.

Il caso di due triedri aventi respettivamente eguali le tre faccie si deduce poi da questi come, nel piano, il terzo criterio d'eguaglianza dei triangoli dagli altri due.

È noto che agli accennati criterî d'eguaglianza pei triedri se ne aggiunge ordinariamente un quarto, vale a dire quello in cui i due triedri abbiano respettivamente eguali i diedri.

Tale criterio può dirsi correlativo del terzo, secondo una legge di *dualità nella stella* che autorizza lo scambio delle parole *retta* (o raggio) e *piano* (o semipiano) uscenti dal centro della stella. Secondo questa stessa legge di dualità, possono evidentemente anche i primi due criterî d'eguaglianza sopra accennati considerarsi come correlativi l'uno dell'altro.

Tornando alla trattazione generale di cui abbiamo discorso, osserveremo che le difficoltà a cui essa dà luogo appariscono in chiara luce come attinenti al fatto che i teoremi sulla congruenza dei triedri non corrispondono esattamente a quelli dei triangoli (venendo meno l'esistenza di triedri simili diseguali). Ne emerge quindi che il concetto stesso di dare alle due teorie uno sviluppo parallelo può apparire discutibile.

Passeremo ora ad accennare ad un'altra trattazione dell'argomento che s'incontra nel citato libro di ENRIQUES e AMALDI, per la quale si giunge a stabilire i teoremi di congruenza dei triedri indipendentemente dal postulato delle parallele.

I quattro casi d'eguaglianza dei triedri si lasciano ridurre a due, come già abbiamo veduto, deducendosi gli altri due col principio di dualità nella stella, e cioè:

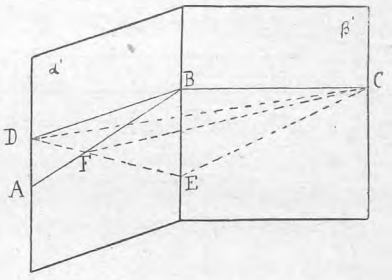
1) il caso in cui si hanno due faccie respettivamente eguali ed il diedro compreso eguale;

2) il caso in cui le tre faccie sono respettivamente eguali.

I due teoremi possono riunirsi nell'enunciato:

« In diedri eguali, due sezioni i cui lati sono ugualmente « inclinati (*sezioni ugualmente inclinate*) sopra lo spigolo, e « precisamente sopra un raggio di esso, sono angoli eguali, « e viceversa ».

Sotto questa forma il secondo teorema appare come l'inverso del primo, e la dimostrazione di esso si ottiene pure invertendo il seguente ragionamento che vale a stabilire il primo:



Si tratta dapprima il caso particolare in cui ciascuna delle due sezioni considerate abbia un lato perpendicolare allo spigolo del respettivo diedro.

Nei diedri eguali $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$, (Fig. 11) siano dunque le due sezioni ABC, $A'B'C'$ tali che gli angoli $\widehat{EBC}$, $\widehat{E'B'C'}$ siano retti, e gli angoli (acuti) $\widehat{EBA}$, $\widehat{E'B'A'}$ siano uguali. Per dimostrare l'eguaglianza delle due sezioni, si conduca nella faccia α' del primo diedro la perpendicolare BD allo spigolo, e si prendano ad arbitrio i segmenti BD, BC; poi sulla costola si segni un punto E arbitrario da tal parte che il raggio BA appartenga all'angolo $\widehat{DBE}$ ed incontri DE in F. Nell'altro diedro si faccia l'analoga costruzione prendendo

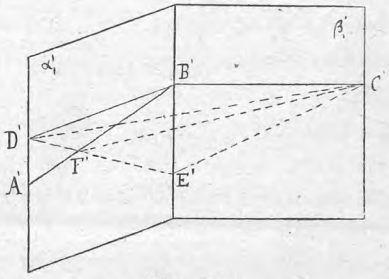


Fig. 11.

$$B'D' = BD, \quad B'C' = BC, \quad B'E' = BE.$$

Essendo i triangoli CBD, DBE, EBC, respettivamente eguali ai loro corrispondenti, sarà

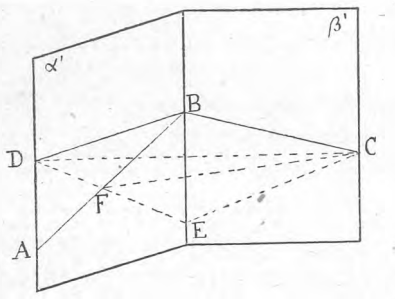
$$CD = C'D', \quad DE = D'E', \quad EC = E'C', \quad \widehat{DEB} = \widehat{D'E'B'}$$

donde ancora

$$\text{tr.}^{\circ}\, BEF = \text{tr.}^{\circ}\, B'F'E', \quad \text{tr.}^{\circ}\, DCE = \text{tr.}^{\circ}\, D'C'E'$$

e perciò

$$BF = B'F', \quad FE = F'E', \quad \widehat{FEC} = \widehat{F'E'C'}.$$



Ne segue

$$\text{tr.}^{\circ}\, FEC = \text{tr.}^{\circ}\, F'E'C'$$

da cui

$$FC = F'C'.$$

I triangoli FBC, $F'B'C'$, avendo i lati respettivamente eguali, danno finalmente

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \quad \text{c.d.d.}$$

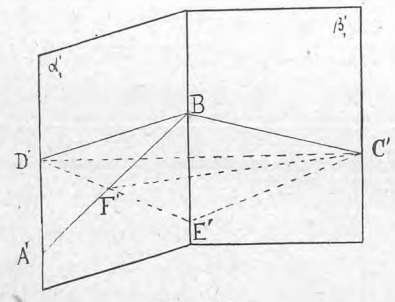


Fig. 12.

Passando ora al caso generale, consideriamo (Fig. 12) nei diedri eguali $\alpha'\beta'$, $\alpha_1'\beta_1'$ le sezioni ABC, $A'B'C'$ tali che $\widehat{ABE} = \widehat{A'B'E'}$, $\widehat{CBE} = \widehat{C'B'E'}$. Per dimostrare l'eguaglianza delle dette sezioni si conducano nelle faccie $\alpha'\alpha_1'$, dei diedri le perpendicolari BD, $B'D'$ alle respettive costole. Per il caso già trattato avremo:

$$\widehat{DBC} = \widehat{D'B'C'};$$

ed ora basterà eseguire anche in questo caso le costruzioni analoghe e quelle eseguite nel caso precedente e ripetere passo passo i ragionamenti fatti pocanzi per concludere l'eguaglianza dei triangoli FBC, $F'B'C'$ e quindi l'eguaglianza delle due sezioni date.

ARTICOLO QUINTO

Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare di GIUSEPPE VITALI a Genova.

§ 1. **Il postulato della continuità.** — Le proprietà che si riattaccano ai nostri concetti intuitivi di retta, piano, segmento, angolo, congruenza, trovano la loro formulazione in un sistema di postulati [1] che (almeno nelle trattazioni ordinarie) non fa appello all'idea che ci formiamo della *continuità* dello spazio.

Vi sono dunque altri fatti intuitivi che non possono dedursi da quelli accennati, di cui citiamo qualche esempio:

1° Se in un segmento di retta due punti si muovono descrivendo il segmento in senso opposto, essi si incontrano in un punto.

2° Nel piano si possono concepire *curve chiuse* C che lo dividono in due *regioni*, l'una di *punti interni*, l'altra di *punti esterni*, in modo che se A, B sono due punti del piano l'uno interno e l'altro esterno, il segmento rettilineo AB che congiunge i due punti A e B abbia sempre un punto (almeno) comune colla curva C.

3.° Se nel piano è data una curva chiusa C, una qualsiasi *curva*, avente un punto interno ed uno esterno a C, ha almeno un punto comune con C.

Queste altre proprietà intuitive analoghe si riattaccano al nostro concetto grossolano della *continuità* dello spazio. Sarebbe certo difficile di precisare tutto ciò che includiamo in questa nozione complessa; ma potremo domandare di desumerne qualche enunciato preciso (suscettibile d'essere introdotto come postulato) dal quale si deducono le fondamentali

[1] Cfr. Articoli 2, 3.

proprietà intuitive che si riattaccano nella nostra mente a quella nozione. A tal fine facciamo la seguente considerazione.

In un segmento di retta AB un punto C determina due segmenti AC, CB. Se si pensa di considerare il punto C come appartenente ad uno solo dei due segmenti AC, CB si ha una *divisione in parti* del segmento AB la quale gode delle seguenti proprietà:

1.ª Ogni punto del segmento AB appartiene ad *una* delle due parti.

2.ª Il punto A appartiene ad una delle parti (che diremo la *prima*) ed il punto B all'altra; il punto C può appartenere indifferentemente all'una o all'altra parte secondo il fissato.

3.ª Ogni punto della prima parte precede ogni punto della seconda nell'ordine AB del segmento.

Per generalità si può considerare anche il caso in cui il punto C cada in A o in B.

Pensando allora il punto C, rispettivamente nei due casi, come appartenente alla prima o alla seconda parte, si ha ancora una divisione in parti che soddisfa alle proprietà enunciate, dove una delle parti è costituita dall'estremo A o B del segmento e l'altra da tutti i punti rimanenti di esso.

Ora, considerando attentamente la reciproca della precedente proposizione, si vede che essa, benchè non discenda logicamente dalle proprietà segmentarie enunciate nell'art. 2, si trova in accordo coll'idea che ci formiamo della continuità della retta. In seguito a ciò noi ammetteremo il seguente *postulato* (1).

Se un segmento di retta AB è diviso in due parti, in guisa che:

1° ogni punto del segmento AB appartenga ad **una** *delle due parti,*

2° l'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda,

3° un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda, nell'ordine AB del segmento:

esiste un punto C del segmento AB (che può appartenere all'una o all'altra parte), tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte, ed ogni punto di AB che

(1) Cfr. R. DEDEKIND « *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ». Braunschweig, 1872.

consegue a C appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita.

Se una delle parti è costituita del solo punto A o B, il punto C è il detto estremo A o B del segmento.

OSSERVAZIONE. Il postulato introdotto si può dire rispondente al primo dei fatti intuitivi sopra menzionati. Invero le due parti in cui il segmento AB è diviso si possono pensare come descritte da due diversi punti che si muovono in senso opposto andandosi incontro. Il punto d'incontro verrebbe qui ad essere contato come appartenente ad ambedue le parti, ma può immaginarsi attribuito ad una sola (e tolto dall'altra) e ciò deve farsi per conservare l'ipotesi posta sulla data divisione in parti. Il postulato enunciato dicesi *postulato della continuità* (o di *Dedekind*).

Dal postulato già posto, il quale enuncia una proprietà dei segmenti di retta, si può dedurre logicamente una proprietà analoga per gli angoli.

Si sa che un angolo si può pensare descritto da un raggio uscente dal suo vertice o come l'insieme dei raggi che rappresentano le diverse posizioni del raggio mobile che lo descrive.

Se noi consideriamo un angolo convesso limitato dai raggi a e b, e conduciamo la retta che congiunge un punto A del raggio a con un punto B del raggio b, vediamo che i punti del segmento finito AB di questa retta vengono a corrispondere biunivocamente ai raggi dell'angolo, quando si consideri come corrispondente di un raggio dell'angolo il punto in cui questo raggio incontra il segmento AB. Ed è da notarsi che, supposto l'angolo ab generato da un raggio mobile partito da a e corrispondentemente il segmento AB generato da un punto mobile partito da A, i punti del segmento AB si susseguono nello stesso ordine che i raggi corrispondenti dell'angolo ab (art. 2).

Ond'è che se si pensa l'angolo ab diviso in due parti, in guisa che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartenga ad una delle due parti,

2° l'estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda,

3° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda,

i punti corrispondenti del segmento AB si trovano anch'essi divisi in due parti tali che:

1° ogni punto del segmento AB appartiene ad una delle due parti,

2° l'estremo A appartiene alla prima parte e B alla seconda,

3° un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda.

Ma allora esiste un punto C del segmento AB (che può appartenere all'una o all'altra delle due parti) tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto di AB che consegue C appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita. Il raggio c corrispondente a C ha, rispetto alla supposta divisione in parti dell'angolo ab, la proprietà che ogni raggio dell'angolo ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che consegue c appartiene alla seconda. Il raggio c apparterrà poi, a seconda dei casi, all'una o all'altra parte.

La proprietà ora dimostrata per un angolo ab convesso, vale manifestamente anche per gli angoli piatti e concavi. Intanto un angolo piatto o concavo si può sempre pensare come l'insieme di due angoli convessi adiacenti.

Ora se ad, db sono due tali angoli convessi, e quindi ab è l'angolo completo che noi supponiamo diviso in parti, in guisa che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartenga ad una delle due parti,

2° l'estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda,

3° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda, si presentano tre ipotesi:

1ª Il raggio d è tale che tutti i raggi che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono appartengono alla seconda.

2ª Il raggio d è seguito da qualche raggio della prima parte. In questo caso l'angolo db si trova diviso in parti colle stesse leggi con cui è diviso in parti l'angolo ab. Ma l'angolo db è convesso e quindi esiste un raggio c dell'angolo db (che può appartenere all'una o all'altra delle due parti) tale che ogni raggio di db che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di db che segue c appartiene alla seconda,

il quale raggio c, poichè nella divisione dell'angolo ab in parti i raggi dell'angolo ad appartengono tutti alla prima parte, è tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che segue c appartiene alla seconda nella divisione stabilita dell'angolo ab.

3ª Il raggio d è preceduto da qualche raggio della seconda parte. In questo caso, con osservazioni analoghe a quelle fatte nel caso precedente (scambiando l'angolo db con l'angolo ad) si arriva ancora alla conclusione che esiste un raggio c dell'angolo ab (che può appartenere all'una o all'altra delle parti in cui è diviso l'angolo ab) tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che consegue c appartiene alla seconda parte.

Una proposizione analoga al postulato introdotto si ha anche per gli archi di cerchio.

Consideriamo infatti su di un cerchio di centro O un arco i cui estremi siano A e B. I punti di quest'arco si possono far corrispondere biunivocamente ai raggi uscenti da O e che passano per essi. Questi raggi riempiono un angolo limitato dai raggi uscenti da O e passanti per A e per B, i quali indicheremo con a e b. E qui pure è da notarsi che, supposto l'angolo ab generato da un raggio mobile partito da a e corrispondentemente l'arco AB generato da un punto mobile partito da A, i raggi dell'angolo ab si susseguono nello stesso ordine che i punti dell'arco AB.

Ond'è che se si pensa l'arco AB diviso in due parti in guisa che:

1° ogni punto dell'arco AB appartenga ad una delle due parti,

2° l'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda,

3° un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda,

i raggi corrispondenti dell'angolo ab si trovano anch'essi divisi in due parti tali che:

1° ogni raggio dell'angolo ab appartiene ad una delle due parti,

2° l'estremo a appartiene alla prima parte e b alla seconda,

3° un raggio qualunque delle prima parte precede un raggio qualunque della seconda.

Ma allora esiste un raggio c dell'angolo ab (che può appartenere all'una o all'altra parte) tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che segue c appartiene alla seconda parte. Il punto C in cui il raggio c incontra l'arco AB ha rispetto alla supposta divisione in parti dell'arco AB la proprietà che ogni punto dell'arco AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto dell'arco AB che consegue C appartiene alla seconda. Il punto C apparterrà poi, a seconda dei casi, all'una o all'altra parte.

Ragionamenti del tutto simili a quelli che precedono condurrebbero a proposizioni analoghe per gli angoli diedri, per le striscie di piano comprese fra due rette parallele e per gli strati di spazio compresi fra due piani paralleli.

§ 2. **Divisibilità del segmento e dell'angolo.** — La prima applicazione che noi faremo del postulato di DEDEKIND sarà la dimostrazione della *divisibilità del segmento in* n *parti uguali*, dimostrazione indipendente dalla ordinaria costruzione che si basa sul postulalo delle parallele.

In modo affatto analogo si dimostrerà la *divisibilità in* n *parti uguali dell'angolo o dell'arco di cerchio*, sostituendo, nel ragionamento relativo al segmento, le parole *punto* e *segmento* colle parole *raggio* e *angolo*, o rispettivamente colle parole *punto* ed *arco*.

Avvertiremo anzitutto che in base ai postulati della congruenza (art. 3) si riesce a dimostrare la divisibilità del segmento, dell'angolo o dell'arco di cerchio in 2, e quindi in 2^e, parti uguali.

La bisezione può infatti ottenersi:

1) Pel segmento AB, costruendo (in un piano per AB) due segmenti AC, BD uguali, perpendicolari ad AB, situati da parti opposte della retta, e considerando l'intersezione del segmento CD con AB.

2) Per l'angolo, prendendo sui due lati, a partire dal vertice, due segmenti uguali, e bisecando la base del triangolo isoscele così determinato.

3) Per l'arco di cerchio riportandosi all'angolo al centro.

Ora dimostriamo la divisibilità del segmento in n parti uguali, dato il postulato della continuità.

Sia AB un segmento di retta ed n un numero intero. Io dico che esiste un segmento tale che il suo n^{uplo} uguagli il segmento AB. Per questo concepiamo il segmento AB ordinato da A verso B, e diviso in due parti in guisa che, essendo H un punto della prima parte si abbia $nAH < AB$, e che, essendo K un punto della seconda parte si abbia $nAK \geq AB$. È manifesto che questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicabilità del postulato di DEDEKIND e quindi esiste un punto M tale che ogni punto di AM appartiene alla prima parte ed ogni punto di MB alla seconda. Io dico che $nAM = AB$.

Supponiamo che sia per esempio $nAM < AB$. In questo caso dentro il segmento AB cadrà un punto C tale che $nAM = AC$. Prendiamo dopo M un punto M' tale che $nMM' < CB$ (il che può farsi manifestamente). Si avrà allora $nAM + nMM' < AC + CB$, ossia $nAM' < AB$, il che è assurdo perchè il punto M' seguendo il punto M deve essere $nAM' > AB$.

Dunque non può essere $nAM < AB$. In modo analogo si esclude che sia $nAM > AB$. Abbiamo perciò senz'altro $nAM = AB$. Come abbiamo avvertito si dimostra analogamente la divisibilità in n parti uguali dell'angolo o dell'arco di cerchio [1]. Dalla possibilità di dividere in n parti uguali un segmento di retta ed un angolo consegue anche la possibilità di dividere in n parti uguali una striscia, uno strato un arco ed un diedro. Manifestamente però a ciascuna di queste figure si potrebbe applicare il ragionamento generale.

§ 3. **Proposizione d'Archimede.** — Una seconda proposizione che si dimostra come applicazione del postulato di DEDEKIND è quella che comunemente si ammette sotto il nome di *Postulato di* ARCHIMEDE. Il suo enunciato è il seguente:

Dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell'uno maggiore dell'altro.

Per dimostrarlo cominciamo col trasportare uno dei se-

[1] Questa divisibilità non si può dimostrare indipendentemente dalla continuità, pur ammettendo tutti i postulati che stanno a base delle ordinarie costruzioni della Geometria elementare, perchè la divisione non è effettuabile cogli strumenti riga e compasso (cfr. vol. II).

gmenti sulla retta dell'altro in guisa che vengano ad avere un estremo in comune e che cadano entrambi dalla stessa banda rispetto a questo estremo. Dopo ciò siano per esempio AB e AC i due segmenti ed $AB < AC$ (Fig. 1). Noi dob-



Fig. 1.

biamo provare che esiste un numero (intero) n per cui si ha $nAB > AC$.

Supponiamo che ciò non sia vero; allora esistono nel segmento AC dei punti B (non coincidenti coll'estremo A) tali che scelto un intero n, comunque grande, $nAB < AC$.

Basiamoci sull'ipotesi precedente per mostrare che essa conduce all'assurdo.

I punti del segmento AC si possono pensare distribuiti in due parti: 1° punti H per cui non esiste un numero (intero) n tale che sia $nAH > AC$; 2° punti K per cui esistono dei numeri n (interi) pei quali è $nAK > AC$. Questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicazione del postulato di DEDEKIND, e quindi esiste un punto M tale che i punti di AM appartengano alla prima parte e quelli di MC alla seconda. Allora, prendendo in MC un punto Y per modo che sia $MY < AM$, il punto medio X di AY cadrà in AM ed apparterrà perciò alla prima parte, mentre esistendo un numero (intero) n per cui $nAY > AC$, si ha $2nAX > AC$.

Questo assurdo dimostra la proposizione d'ARCHIMEDE. La dimostrazione esposta è dovuta a STOLTZ.

Dalla proposizione di ARCHIMEDE consegue il seguente:

COROLLARIO. *Dati due segmenti* AB *e* CD *esiste sempre una parte aliquota dell' uno minore dell' altro.*

Invero esiste un multiplo nCD di CD maggiore di AB. L'n^{esima} parte aliquota di AB è dunque minore di CD.

§ 4. **Di altre forme del postulato della continuità. Continuo non archimedeo.** — Facciamo a questo punto una digressione per discorrere di altre forme che possono darsi al postulato della continuità. In luogo di adottare la formulazione di DEDEKIND si può assumere il postulato seguente:

Se due classi di segmenti di retta sono tali che:

1° *nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda,*

2° *prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ,*

esiste **un** *segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe nè maggiore di alcuno della seconda.*

Esso è una conseguenza del postulato di DEDEKIND ed invero supponiamo di avere due classi di segmenti di retta tali che:

1° nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda,

2° prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ.

Noi potremo considerare un segmento AB della seconda classe e trascurare di questa seconda classe tutti i segmenti maggiori di AB. I segmenti della prima classe e di questa seconda così ridotta si potranno rappresentare con punti del segmento AB: un punto M di AB rappresentando un segmento di una di quelle classi quando quel segmento è uguale al segmento AM.

Così si hanno sul segmento AB due classi di punti le quali ci permettono di dividere il segmento stesso in due parti, attribuendo alla prima parte i punti che precedono, nell'ordine AB del segmento, qualche punto della prima classe ed alla seconda i rimanenti. Questa divisione del segmento AB in due parti soddisfa manifestamente alle condizioni sotto le quali è applicabile il postulato di DEDEKIND e quindi possiamo dire che esiste *un* punto C (che stavolta appartiene certamente alla seconda parte) tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni altro punto rimanente alla seconda.

Il segmento AC è manifestamente non minore di alcun segmento della prima classe data nè maggiore di alcuno della seconda. Ma noi possiamo aggiungere di più che esso è il solo che goda di questa proprietà, poichè se a tale condizione soddisfacesse un altro segmento AD diverso da AC, i segmenti delle due classi non ubbidirebbero alla seconda condizione; ed invero non esisterebbe un segmento della

prima classe ed uno della seconda la cui differenza sia minore della differenza che passa fra AC ed AD.

Così pure il postulato di DEDEKIND consegue da quello enunciato in questo paragrafo se si ammette il postulato di ARCHIMEDE. Invero sia AB un segmento diviso in due parti come è richiesto dal postulato di DEDEKIND. Fissato un segmento σ piccolo a piacere sarà possibile trovare una parte aliquota di AB minore di σ (v. § 3), sia dessa $\frac{AB}{n}$. Dividiamo AB in n segmenti uguali fra loro. Considerando come appartenenti a ciascuno di questi segmenti ambo gli estremi, possiamo facilmente concludere che fra essi ve ne è uno ed uno solo che contiene punti di ambo le parti in cui è diviso AB. Prendendo in tal segmento un punto dell'una ed uno dell'altra parte si vede che questi punti hanno una distanza minore di σ, onde si può concludere che prefissato un segmento σ piccolo a piacere è possibile trovare un punto della prima ed uno della seconda parte la cui distanza sia minore di σ.

Facciamo ora corrispondere a ciascun punto di AB il segmento di retta che lo unisce ad A. Otteniamo in tal modo due classi di segmenti corrispondenti ai punti delle due parti in cui è diviso AB. Queste due classi di segmenti sono tali che:

1° nessun segmento della prima classe è maggiore di qualche segmento della seconda,

2° prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ.

Quindi esiste un segmento δ che non è minore di alcun segmento della prima classe nè maggiore di alcuno della seconda. Sia M un punto di AB tale che $AM = \delta$. Ogni punto di AB che precede M appartiene alla prima parte ed ogni punto che segue M appartiene alla seconda.

Inoltre M è il solo punto che gode di questa proprietà.

Se invece si prescinde dal postulato di ARCHIMEDE, il postulato enunciato in questo paragrafo non è più equivalente a quello di DEDEKIND.

Diffatti sia AB un segmento diviso in due parti in guisa che:

1° ogni punto del segmento AB appartenga ad una delle parti,

2° l'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda,

3° un punto qualunque della prima preceda un punto qualunque dello seconda, nell'ordine AB del segmento.

Noi possiamo a ciascun punto di AB far corrispondere il segmento di retta che lo unisce con A. In tal modo otteniamo due classi di segmenti corrispondenti ai punti delle due parti in cui è diviso AB.

Queste due classi di segmenti sono tali che *nessun segmento della prima classe è maggiore di qualche segmento della seconda*, ma non si può dire che prefissato un segmento σ piccolo a piacere esistano un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza sia minore di σ; quindi non possiamo servirci del postulato enunciato in questo paragrafo per dimostrare quello di DEDEKIND.

Per mettere meglio in evidenza la differenza di valore che passa fra i due enunciati consideriamo due raggi paralleli volti nello stesso senso ed uscenti da due punti A e B la cui congiungente non ha la direzione di quei raggi (v. fig. 2) e più in particolare consideriamo l'insieme dei punti di questi raggi che giacciono a distanza finita.

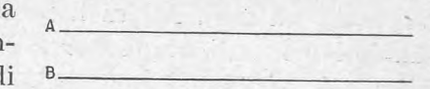


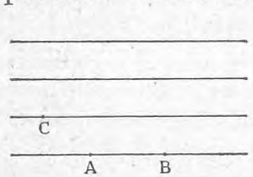
Fig. 2.

Se noi immaginiamo i punti del primo raggio ordinati nell'ordine naturale che va da A all'infinito e quelli del secondo raggio nell'ordine inverso a quello naturale e se infine supponiamo che ogni punto del primo raggio preceda ogni punto del secondo, possiamo concepire l'insieme di questi punti come un segmento ordinato che va da A a B. Per tale segmento vale manifestamente in tutti i casi il postulato della continuità nella seconda forma. Non varrebbe invece sempre il postulato introdotto nel § 1° e precisamente per la divisione di AB in due parti tali che alla prima parte appartengano tutti e soli i punti del primo raggio. Invero per questa divisione non esiste il punto che separa le due parti. Anzi se di più si ammette, come abbiamo fatto tacitamente al § 3, che i punti di un segmento di retta siano tutti a distanza finita, si vede che l'esempio di segmento corrispondente alla precedente figura non è ancora impossibile anche ammesso il secondo postulato della continuità, ma la sua incompatibilità col 1° postulato diventerebbe estrema,

inquantochè non sarebbe possibile toglierla coll'aggiunta di un punto che separi i due raggi.

In ciò che precede abbiamo osservato che il postulato di DEDEKIND equivale alla somma del postulato di CANTOR e di quello di ARCHIMEDE. Ora, modificando lievemente l'esempio dato innanzi, possiamo costruire con VERONESE un continuo non-archimedeo per cui sono soddisfatti gli ordinari postulati dell'ordine e della congruenza.

A tale scopo consideriamo un sistema di infinite rette parallele succedentisi ad intervalli costanti, come nell'annessa figura. Possiamo ordinare i punti di queste rette, riguardate come formanti un unico insieme, per modo che ogni punto B che cada a destra di un punto A sopra una medesima retta si possa considerare come conseguente ad A e che ogni punto C il quale sia più alto di A debba pure considerarsi come conseguente ad esso. Allora il nostro sistema di rette ci porge un insieme ordinato come l'insieme dei punti di una linea aperta, e di più si può definire in esso la congruenza di segmenti (finiti o infiniti) in base alla circostanza che il sistema può essere sovrapposto a sè stesso, con una traslazione del piano, portando un punto in un altro qualsiasi.



Il sistema costruito costituisce un continuo non-archimedeo soddisfacente insieme ai postulati di ordine, di congruenza e al postulato di Cantor.

Si può anche dimostrare l'indipendenza del postulato di Archimede dall'insieme dei postulati di ordine, congruenza ed appartenenza, costruendo invece che una Geometria non-archimedea ad una dimensione, una Geometria non-archimedea del piano e dello spazio. Questa costruzione messa in luce da VERONESE è stata ripresa più recentemente secondo un altro punto di vista da HILBERT, i cui magnifici sviluppi hanno rinnovato le ricerche critiche intorno ai principii della Geometria.

Ma noi non ci inoltreremo in questo campo, e ripigliando ormai il postulato della continuità nella forma di DEDEKIND, ci proponiamo di svolgerne altre conseguenze nel campo della Geometria elementare.

§ 5. **Intersezione di una retta con un circolo.** — Un altro fatto che si dimostra pure coll'applicare il postulato di DEDEKIND è il seguente:

Se una retta ha un punto interno ed uno esterno ad un cerchio, essa ha due punti comuni col cerchio (1).

Prima di svolgere la dimostrazione, notiamo come in base ai postulati della congruenza (art. 3) si possano ritenere note le proprietà relative alle perpendicolari e alle oblique, conseguenze del teorema « se un triangolo ha un angolo retto o ottuso, il lato opposto ad esso è maggiore di ciascuno degli altri due », ed inoltre la proprietà per cui « in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due », e ciò indipendentemente dal postulato delle parallele.

Ora, consideriamo un cerchio C di centro O ed una retta r che abbia il punto A *interno* ed il punto B *esterno* al cerchio e che può supporsi non passante per O. Per definizione, se R è il raggio del cerchio si ha:

$$OA < R, \quad OB > R.$$

Conduciamo da O sulla retta r la perpendicolare OP (fig. 3). Siccome in un triangolo rettangolo un cateto è sempre minore dell'ipotenusa si avrà (se P è diverso da A)

$$OP < OA,$$

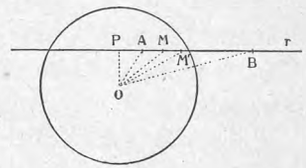


Fig. 3.

e quindi in ogni caso

$$OP < R,$$

ossia P è interno al cerchio.

Fissiamo la nostra attenzione sul segmento finito PB. Esso può essere diviso in due parti, ponendo nella prima i punti H pei quali è $OH < R$ (punti interni a C), nella seconda i punti K pei quali $OK \geq R$ (punti esterni a C o su C).

(1) Questa proposizione compare implicitamente come un postulato negli *Elementi* di EUCLIDE. D'altronde essa non può dedursi dai postulati relativi alla congruenza, i quali corrispondono alle costruzioni effettuabili col *trasportatore di segmenti*, e quindi permettono di stabilire soltanto un caso particolare di essa, cioè il caso in cui la retta passi per il centro del circolo (cfr. vol. II).

Ora, ricordando che di due oblique, condotte da un medesimo punto ad una retta, è maggiore quella che ha proiezione maggiore, possiamo affermare che tutti i punti del segmento PB che precedono un punto interno a C sono interni a C e quelli che seguono un punto posto su C, o esterno a C, sono esterni a C. Ma allora pel postulato della continuità esiste sul segmento PB un punto M tale che tutti i punti che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono alla seconda.

Dico che il punto M è comune alla retta r ed al cerchio C, ossia che

$$OM = R.$$

Supponiamo per esempio che sia $OM < R$. Esisterà un segmento σ minore della differenza fra R e OM. Consideriamo il punto M' susseguente ad M, pel quale

$$MM' = \sigma.$$

È certo

$$OM' < OM + MM'$$

poichè un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma

$$OM + MM' = OM + \sigma < R,$$

dunque

$$OM' < R,$$

il che è assurdo. In modo analogo si cadrebbe in assurdo supponendo che sia

$$OM > R.$$

Bisogna dunque concludere, come si voleva, che

$$OM = R.$$

Dimostrato così che sul segmento finito PB c'è un punto M comune alla retta r ed al cerchio C, si vede subito che c'è un altro punto che gode di questa proprietà, ed è il simmetrico di M rispetto a P, sicchè possiamo concludere che un cerchio ed una retta che passi per un suo punto interno (e per uno esterno) hanno due punti in comune.

§ 6. **Intersezioni di due circoli.** — Una questione analoga alla precedente si presenta per le intersezioni di due cerchi. Si ha che:

Se in un dato piano, un cerchio C ha un punto X interno ed un punto Y esterno ad un altro cerchio C', i due cerchi si tagliano in due punti.

DIMOSTRAZIONE. Siano O ed O' i centri dei due cerchi ed R e R' i loro raggi. La retta OO' incontra il cerchio C in due punti A e B. Manifestamente uno di questi punti è interno a C' e l'altro esterno. Invero essi si trovano sulla retta OO' da banda opposta rispetto ad O. Sia A quello che si trova dalla parte di O'. Il segmento AO' sarà uguale alla differenza dei due segmenti OO' ed R ed invece sarà

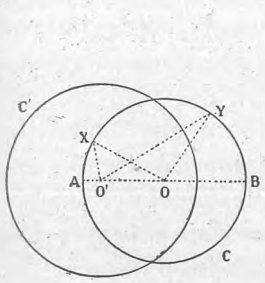


Fig. 4.

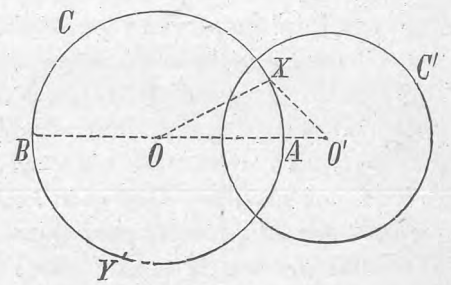


Fig. 5.

$BO' = OO' + R$. Dal triangolo $OO'X$ (v. fig. 4 e 5) si ricava che $O'X$ è maggiore della differenza che passa fra OO' ed R e quindi è maggiore di OA. Ma $O'X$ è minore di R', quindi $O'A$ è minore di R' ed A è interno a C'. Invece dal triangolo $OO'Y$ (fig. 4) si ha $O'Y < OO' + OY$, ossia $O'Y < OO' + R$ e quindi $O'Y < O'B$. Ma $O'Y > R'$ dunque $O'B > R$ e B è esterno a C'. Il cerchio C viene diviso dai punti A e B in due semicerchi (fig. 6). Consideriamone uno qualunque e immaginiamolo (per fissarne un senso) descritto da un punto che si muova da A verso B. Prendiamo poi su di esso due punti distinti P e Q e supponiamo (per fissare

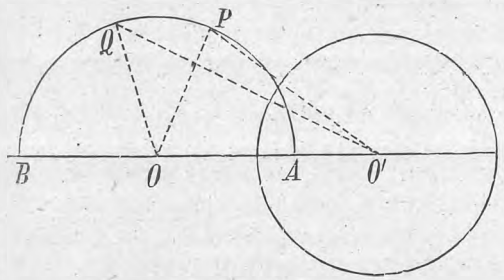


Fig. 6.

le idee) che P preceda Q. Confrontando i due triangoli $OO'P$, $OO'Q$ vediamo che essi hanno a comune il lato OO', che

$$OP = OQ$$

e che infine

$$\widehat{POO'} < \widehat{QOO'}.$$

Ma sappiamo che se due triangoli hanno due lati uguali e l'angolo compreso disuguale essi hanno il terzo lato disuguale e precisamente minore quello che si oppone ad angolo minore, dunque possiamo concludere che

$$O'P < O'Q.$$

Ma allora, concepito il suddetto semicerchio diviso in due parti, in guisa che i punti della prima parte sieno interni a C' e quelli della seconda esterni o su C', si vede che sono soddisfatte le condizioni per l'applicabilità del postulato di DEDEKIND [1] e quindi che esiste un punto M che separa le due parti. Io dico che $O'M = R'$. Supponiamo infatti che sia invece per esempio $O'M < R'$. Allora, indicata con σ la differenza fra R' ed $O'M$, prendiamo sul semicerchio un punto M' che sussegua ad M e tale che la corda MM' non superi σ [2]. Dal triangolo $O'MM'$ si avrebbe

$$O'M' < O'M + MM' < O'M + \sigma$$

e quindi

$$O'M' < R'.$$

[1] Nel § 1 si è dimostrato come il postulato di DEDEKIND enunciato per i segmenti di retta sia vero anche per gli archi di cerchio.

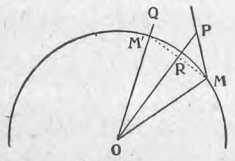


Fig. 7.

[2] Per trovare un tal punto si procederà come segue (Fig. 7): 1° Conduciamo per M una retta diversa da OM e prendiamo su di essa un segmento MP uguale alla metà di σ. 2° Congiungiamo O con P e costruiamo un altro raggio OQ in guisa che l'angolo $\widehat{POQ}$ risulti uguale all'angolo $\widehat{MOP}$.

Il punto M', intersezione del semicerchio col raggio OQ, è tale appunto che $MM' \leq \sigma$.

Infatti la retta MM' incontra ortogonalmente il raggio OP in un punto R, e dal triangolo rettangolo MRP risulta $MR \leq MP$ (il segno d'uguaglianza vale soltanto se R coincide con P) ossia $MR \leq \frac{\sigma}{2}$. Ma MR è la metà di MM', dunque $MM' \leq \sigma$.

Ma allora un punto M' dell'arco MB sarebbe interno a C', il che è assurdo. Si capisce che con un simile ragionamento si proverebbe che non può essere $O'M > R'$. Si deve dunque concludere che $O'M = R'$. Resta così provato che ognuno dei due semicerchi in cui abbiamo diviso il cerchio C incontra in un punto il cerchio C' e che quindi i due cerchi C e C' hanno due punti a comune c. v. d.

OSSERVAZIONE. Un altro modo di dimostrare la medesima proposizione, si avrebbe riconducendo la determinazione delle intersezioni di due cerchi a quella delle intersezioni di uno dei cerchi colla retta, asse radicale dei due (cfr. art. 9).

§ 7. È noto che la convenzione, conforme ad un ovvio processo intuitivo, in base a cui si definisce la lunghezza della circonferenza riposa sopra il teorema;

Per ogni circonferenza esiste un segmento ben determinato maggiore dei perimetri di tutti i poligoni inscritti e minore dei perimetri di tutti i poligoni circoscritti.

Per dimostrarlo si potrà osservare dapprima che, essendo un qualsivoglia poligono inscritto contenuto in ogni poligono circoscritto, il perimetro di uno qualsiasi dei primi è minore del perimetro di uno qualsiasi dei secondi. Resta dunque a provare che per ogni segmento ε piccolo a piacere esiste un poligono inscritto ed uno circoscritto i cui perimetri hanno una differenza minore di ε.

Cominciamo col dimostrare che:

La differenza fra i perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritto e circoscritto ad una circonferenza è minore del doppio dell' altezza del triangolo isoscele avente per base il perimetro del poligono inscritto e gli angoli alla base uguali ciascuno all' n^{ma} parte di 2 retti (v. *Elementi di Geometria* ENRIQUES ed AMALDI, p. 362 e seg.).

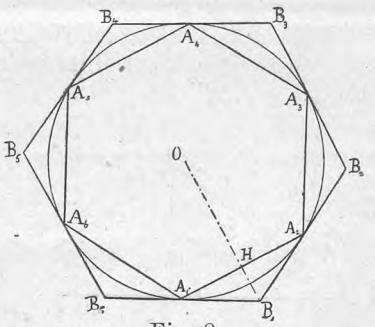


Fig. 8.

Siano $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ i poligoni regolari inscritto e circoscritto al cerchio. I triangoli $A_1B_1A_2$, $A_2B_3A_2$ .... sono uguali. Calata da B_1 l'altezza B_1H su A_1A_2 abbiamo

$$B_1H > A_1B_1 - A_1H, \quad B_1H > A_2B_1 - A_2H$$

e quindi

$$2 \cdot B_1H > A_1B_1 + A_2B_1 - (A_1H + A_2H),$$

ossia

$$2B_1H > A_1B_1 + A_2B_1 - A_1A_2$$

Si sommino membro a membro a questa disuguaglianza le altre $n-1$ disuguaglianze analoghe corrispondenti agli altri $n-1$ triangoli e si avrà che la differenza dei perimetri dei due poligoni è minore di $2 \cdot n \cdot B_1H$.

Ora osserviamo che un triangolo simile ad $A_1A_2B_1$ che abbia per lato omologo al lato A_1A_2 il perimetro inscritto, ossia $n \cdot A_1A_2$, ha l'altezza corrispondente a tale lato uguale ad $n \cdot B_1H$; osserviamo inoltre che l'angolo $A_2A_1B_1$ è l'n^{esima} parte di 2 retti e potremo concludere che la differenza dei perimetri dei due poligoni considerati è minore appunto del doppio dell'altezza del triangolo isoscele che ha per base il perimetro del poligono inscritto e gli angoli alla base uguali ciascuno all'n^{esima} parte di 2 retti. c. d. d.

Il perimetro di un poligono inscritto è sempre minore di 4 diametri perchè di 4 diametri è il perimetro del quadrato circoscritto.

Inoltre di due triangoli simili ha altezze maggiori quello che ha lati maggiori. Vale dunque il

COROLLARIO. *La differenza dei perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritto e circoscritto ad una circonferenza è minore del doppio dell'altezza del triangolo isoscele avente per base 4 diametri e gli angoli alla base uguali ciascuno alla n^{esima} parte di 2 retti.*

Sia AB un segmento uguale a 4 diametri ed ε un altro segmento piccolo a piacere. Costruiamo sopra AB un triangolo isoscele la cui altezza CT sia uguale ad $\frac{\varepsilon}{2}$. Sia n così grande che abbiasi $n \cdot \widehat{BAC} > 2$ retti, ossia $\widehat{BAC} > \frac{2 \text{ retti}}{n}$, il triangolo ASB di base AB e di angolo alla base uguale a $\frac{2 \text{ retti}}{n}$ avrà un altezza minore di CT e quindi minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, e perciò la differenza dei perimetri dei due poligoni regolari

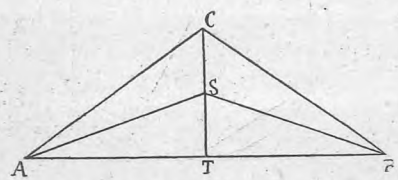


Fig. 9.

di n lati iscritto e circoscritto sarà minore di ε. Così è dimostrato quanto volevasi.

§ 8. **Sulla teoria della misura.** — Il principio della continuità trova infine la sua completa applicazione nella teoria della misura.

Consideriamo una semi-retta r avente una certa *origine O*, e su questa, a partire da O, riportiamo ogni segmento dato.

Fissiamo su r un punto A e conveniamo di assumere il segmento OA come segmento *unitario*. Allora se $\frac{m}{n}$ è un numero frazionario qualunque (m ed n essendo interi e positivi) diremo che il segmento m^{plo} della n^{esima} parte di OA (v. § 2°) ha per *misura* il numero $\frac{m}{n}$.

Ma non tutti i segmenti sono multipli di OA o di una sua parte aliquota. Per esempio se OB è eguale alla diagonale del quadrato di lato uguale ad OA, esso non ammette certo un numero frazionario che si possa chiamare la sua misura nel senso predetto. Però è da notarsi che se OB è un segmento che non ammette per misura un numero frazionario, esistono dei segmenti aventi misura frazionaria, maggiori e minori di OB, i quali differiscono da OB di quanto poco si vuole. Ed invero se MN è un segmento piccolo a piacere, sappiamo che esiste un numero intero e positivo n tale che $nMN > OA$ (v. proposizione di ARCHIMEDE) e che quindi se indichiamo con C un punto tale che OC sia l'n^{esima} parte di OA (§ 2°), è $OC < MN$. Ora indichiamo con m il più grande numero intero e positivo pel quale è

$$mOC < OB,$$

e siano B' e B'' due punti tali che

$$mOC = OB'$$

ed

$$(m+1)OC = OB''.$$

Manifestamente OB' ed OB'' hanno misure frazionarie; sono uno minore e l'altro maggiore di OB, ed hanno fra loro, e quindi da OB, una differenza minore di MN.

Possiamo dunque formare due successioni di segmenti a misura frazionaria, la prima costituita da segmenti minori di OB, l'altra da maggiori, in modo che, fissato un segmento piccolo a piacere, i segmenti delle due successioni, da un certo punto in poi, abbiano da OB una differenza minore di quel segmento.

Le misure dei segmenti di queste due successioni costituiscono manifestamente due *classi convergenti* di numeri *razionali*, le quali definiscono un numero *irrazionale*. Questo numero si assume come *misura* del segmento OB.

In tal modo noi veniamo a far corrispondere ad ogni segmento un numero positivo, razionale, che esprime la sua misura, nel senso definito.

D'altra parte si è visto che ogni numero razionale è la misura di un segmento.

Dimostriamo ora che anche un numero irrazionale positivo è sempre la misura di un segmento determinato, sicchè come ad ogni segmento corrisponde un numero positivo, anche ad ogni numero positivo corrisponde un segmento.

Consideriamo due serie convergenti di numeri razionali, le quali definiscano un numero irrazionale positivo α. Corrispondentemente ai numeri razionali delle due serie avremo dei segmenti, uscenti da O, che li avranno per misura. I punti estremi di questi segmenti saranno tali che quelli corrispondenti ai numeri della serie crescente saranno minori di quelli corrispondenti ai numeri della serie decrescente. Inoltre non vi possono essere due punti distinti M ed N che seguano tutti i punti corrispondenti alla serie crescente e precedano tutti quelli corrispondenti all'altra. Invero, supposto che M preceda N, si può trovare, come è occorso di provare poc'anzi in questo stesso paragrafo, un punto X che segua M e tale che OX abbia misura frazionaria e differisca da OM di meno di MN. Il punto X cade certo fra M ed N. Ma la misura di OX è un numero razionale e quindi θ è minore di qualche numero della classe crescente o maggiore di qualcuno dell'altra, a seconda che è minore o maggiore di α. Dunque, o M precede qualche punto corrispondente alla serie crescente, o N segue qualche punto corrispondente all'altra.

Pertanto, fatta eccezione al più per un sol punto particolare, un punto della nostra semiretta, o precede qualche punto corrispondente alla serie crescente, o segue qualche

punto corrispondente all'altra. Si può quindi dividere la semiretta in parti, in guisa che la prima contenga tutti i punti che precedono qualche punto corrispondente alla serie crescente, e la seconda tutti i rimanenti. Indicato con L un qualsiasi punto della seconda parte, si otterrà in tal modo, nel segmento OL, una divisione soddisfacente alle condizioni richieste pel postulato di DEDEKIND. Si troverà così un punto Y che separa le due parti di OL, e quindi anche le due parti della semiretta r. Questo punto Y non precede alcun punto corrispondente alla serie crescente e non segue alcuno corrispondente all'altra, ed è l'unico che goda questa proprietà.

Questo punto ha per misura (in virtù della definizione data) precisamente il numero α.

Possiamo dunque asserire che anche ogni numero irrazionale positivo è la misura di un determinato segmento.

OSSERVAZIONE. Rileviamo che nel procedimento della misura il postulato di ARCHIMEDE e il postulato di CANTOR che costituiscono come le due parti di DEDEKIND, trovano impiego successivamente:

1) il postulato di ARCHIMEDE porta che ad ogni segmento corrisponda un numero;

2) il postulato di CANTOR che viceversa ad ogni numero corrisponda un segmento.

Ciò posto si può anche dire che il postulato di ARCHIMEDE, aggiunto ai postulati di ordine e di congruenza per un sistema ad una dimensione, esprime la possibilità di considerare questo sistema come parte di un continuo rettilineo ordinario. Il postulato di CANTOR appare così un postulato d'integrità esprimente l'impossibilità di ampliare il sistema conservandone le proprietà fondamentali (HILBERT).

ARTICOLO SESTO

Sulla teoria della equivalenza di UGO AMALDI.

§ 1. **Considerazioni generali sulle grandezze geometriche.** — Nella Geometria elementare si presentano varie classi di figure, cui appartengono le proprietà caratteristiche del *concetto* di *grandezza*, cioè le proprietà relative alla *somma* e alla *uguaglianza* e *disuguaglianza*. Tali sono i segmenti, gli angoli, i poligoni, i poliedri, ecc.

La concezione di siffatte figure come grandezze è pienamente conforme alla nostra intuizione geometrica; quindi le relazioni logiche, inerenti al concetto fondamentale di grandezza, si traducono per esse in proprietà così evidenti, che appariscono una pura espressione di principii logici.

Tale apparenza è per altro illusoria, giacchè *l'assegnare i nominati enti geometrici alla categoria delle grandezze involve tacitamente un postulato, il quale deve essere messo in luce; sia che esso vogliasi, sulla base dell'intuizione, senz'altro concedere, sia che si tenti di ricondurlo con un procedimento dimostrativo ad altri postulati già innanzi concessi.*

La più semplice classe di grandezze geometriche è costituita dai *segmenti*. Due segmenti *congruenti* appariscono come *grandezze uguali* e due segmenti di ugual grandezza sono sovrapponibili, cosicchè pei segmenti le proprietà, che loro spettano in quanto si considerano come grandezze, si identificano colle proprietà fondamentali della congruenza segmentaria (art. 4).

Così, definita la *somma* di segmenti in base all'operazione geometrica consistente nel collocare i segmenti addendi l'uno accanto all'altro su di una retta, la proprietà per cui « *somme di segmenti congruenti sono congruenti* » si traduce in un carattere insito al concetto generale di grandezza « *somme*

di grandezze eguali sono eguali »; così le relazioni inerenti all'ordine dei punti d'una retta e alle proprietà determinative della congruenza (art. 4), danno il criterio di confronto dei segmenti, che serve a stabilire le definizioni di *maggiore* e *minore*, in modo rispondente al concetto di grandezza. È allora implicito in particolare in tali definizioni che, *diviso un segmento in parti, la somma di queste meno una è minore del segmento primitivo*, o, come si può enunciare in forma meno precisa, ma più breve, *il tutto è maggiore di una sua parte.*

Ciò che abbiamo detto dei segmenti si può ripetere degli angoli; e al tipo delle grandezze segmentarie o angolari (o anche dei numeri che le rappresentano) sono immediatamente riferibili altre categorie di figure come l'insieme di tutti i rettangoli di data base o di tutti i parallelepipedi rettangoli (o dei prismi retti) di data base, l'insieme degli angoli diedri, ecc., in quanto si può porre una *corrispondenza biunivoca* fra le figure di ciascuna di codeste categorie e i segmenti o gli angoli (altezze dei parallelogrammi e dei parallelepipedi o prismi o rettilinei dei diedri) per modo che siano conservate le relazioni di *somma*, *uguaglianza* e *disuguaglianza*.

Per ciascuna di tali categorie di figure la *congruenza* (o sovrapponibilità) si identifica colla *uguaglianza di grandezza* (1).

Nuove classi di grandezze geometriche scaturiscono dalla considerazione dei poligoni e dei poliedri e in generale delle superficie e dei solidi.

Anche qui la *somma* trova necessariamente la sua definizione nella operazione geometrica del collocare l'una accanto all'altra le figure (nel piano, se piane, nello spazio, se solide) in modo che abbiano comune soltanto una parte del contorno e nessun punto fuori di questo.

Ma pei poligoni e pei poliedri e in generale per le superficie e pei solidi si presenta il fatto nuovo che le relazioni di *congruenza* e di *uguaglianza di grandezza* sono fra loro ben distinte, essendo la seconda molto più comprensiva.

Ora, quando si voglia definire la uguaglianza di superficie pei poligoni e di solido pei poliedri, bisogna tener conto delle condizioni seguenti, imposte dal fatto che superficie e solido debbono rispondere agli *attributi logici del concetto di grandezza*:

(1) In alcuni trattati elementari tali figure sono raccolte sotto il nome di *grandezze di prima specie.*

1° Poligoni (o poliedri) congruenti debbono essere riguardati come aventi ugual grandezza.

2° Somme (o differenze) di poligoni (o poliedri) di ugual grandezza (e in particolare di poligoni o poliedri congruenti) devono considerarsi come aventi ugual grandezza.

3° Poligoni (o poliedri) aventi ugual grandezza con un terzo debbono avere ugual grandezza anche fra loro.

4° Dati due poligoni (o poliedri), il primo deve *o* avere ugual grandezza del secondo, *o* esserne maggiore, *o* esserne minore.

5° Se un poligono (o poliedro) è maggiore (o minore) di un secondo e questo è maggiore (minore) di un terzo anche il primo dev'essere maggiore (minore) del terzo.

6° Un poligono (o poliedro) deve essere maggiore di una sua parte qualsiasi.

In qual modo si possa definire la uguaglianza di superficie pei poligoni e di solido pei poliedri soddisfacendo alle indicate condizioni, e, in generale, come sia dato stabilire rigorosamente la teoria delle grandezze geometriche, apparirà dal breve cenno storico che segue e dalle ricerche critiche, di cui daremo conto nei successivi paragrafi.

§ 2. **La teoria dell'uguaglianza dei poligoni secondo Euclide.** — Negli *Elementi* di EUCLIDE, della relazione di *eguaglianza* e *diseguaglianza* non è fatta parola nè tra le definizioni, nè tra i postulati; esse vi sono introdotte come relazioni di natura primitiva ed irriducibile, e solo dopo l'enumerazione delle definizioni e dei postulati, posti a fondamento dell'edificio geometrico euclideo, vi sono enunciate esplicitamente quelle volgari proprietà dell'*eguaglianza*, che nel corso delle deduzioni saranno successivamente invocate ed applicate. Di codeste *Nozioni Comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι) quelle che, secondo lo HEIBERG, non si debbono ad apocrifa interpolazione, sono le seguenti:

1) *Enti eguali al medesimo ente sono eguali fra loro.*

2) *Se ad enti eguali si aggiungono enti eguali si ottengono somme eguali.*

3) *Se ad enti eguali si tolgono enti eguali, rimangono resti eguali.*

4) *Enti, che possono essere portati a coincidere, sono eguali.*

5) *Il tutto è maggiore (non uguale) di una sua parte.*

A codeste nozioni è da aggiungere quella che

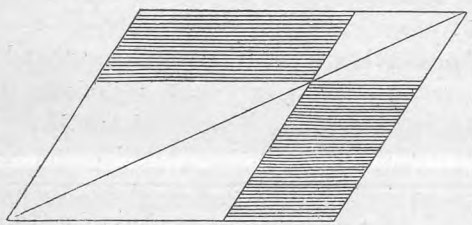
6) « *metà* (o doppi) *di enti uguali sono uguali* »,

cui l'autore ricorre (quantunque ciò non sia strettamente necessario) per dedurre le proprietà dei triangoli di egual base e altezza, dalle analoghe dei parallelogrammi (1).

È interessante di esaminare rapidamente quale uso si faccia di tali criterii di uguaglianza, negli sviluppi dei Libri I e II.

Due teoremi del libro I debbono anzitutto esser messi in vista, per l'ufficio preminente che hanno nella trattazione euclidea; sono due casi di uguaglianza di parallelogrammi: *a*) l'uguaglianza dei parallelogrammi di ugual base ed altezza (prop. 35, 36); *b*) il cosidetto *teorema del gnomone* (prop. 43).

Ora nella dimostrazione del primo teorema sono simultaneamente invocati i 4 criterii 1) 2) 3) 4); precisamente i criterii 2) 4) e 3) 4) sono adoperati nei diversi casi della prop. 35 (parallelogrammi colla stessa base), e il criterio 1) viene applicato per passare da questa alla successiva (basi uguali ma distinte).



Quanto al teorema del gnomone, la uguaglianza dei parallelogrammi che trovansi da parti opposte della diagonale viene immediatamente riconosciuta in base al criterio 3) [congiunto al 4)].

Le applicazioni di codesti teoremi fondamentali, contenute nello stesso libro I, si lasciano ad essi riattaccare come segue:

(1) Considerando le cose dal punto di vista moderno possiamo dire che EUCLIDE assume come primitivo (senza definizione) il concetto di *uguaglianza di superficie* fra poligoni (Art. 2). I postulati che caratterizzano tale relazione potrebbero convenientemente esprimersi, in modo da abbracciare l'estensione della teoria euclidea al caso di superficie a contorno curvilineo, aggiungendo alle nozioni comuni di EUCLIDE la proposizione, se due superficie non sono uguali, una di esse è uguale alla somma dell'altra con una terza (cioè è *maggiore* dell'altra), la quale proposizione (presa insieme alle precedenti) permette di *dimostrare* che « metà di superficie uguali sono uguali ». Si avrebbe pertanto il seguente sistema di postulati su cui si basa tutta la teoria dell'uguaglianza di superficie, secondo il punto di vista euclideo:

1) Poligoni (ed anche figure a contorno curvilineo) congruenti hanno superficie uguali.

2) Superficie uguali ad una terza sono uguali.

3) Somme di superficie uguali sono uguali.

4) Differenze di superficie uguali sono uguali.

5) Una superficie non è uguale ad una sua parte.

6) Se due superficie non sono uguali, una di esse è maggiore dell'altra.

Cfr. F. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di Geometria. Edizione ridotta.*

Dalle prop. 35, 36, si deducono le analoghe pei triangoli (37, 38; cfr. anche 41, 42) usando del criterio 6°, come già si è accennato; e mediante i criterii 1, 2, il teorema di Pitagora (Prop. 47).

Dalla prop. 43 si fa dipendere la trasformazione di un poligono in un parallelogramma uguale di data base e con un angolo dato (Prop. 44, 45).

L'inversione dei risultati sopra citati (Prop. 39, 40, 48) si appoggia essenzialmente al 5° dei ricordati principii. Le dimostrazioni delle prop. 39, 40 sono condotte per assurdo; la negativa dell'enunciato permette di dedurre l'uguaglianza di una superficie ad una sua parte. Quanto alla prop. 48 (inversa del teorema di Pitagora) il principio stesso può riguardarsi indirettamente utilizzato, come implicito nell'asserzione che « quadrati uguali hanno lati uguali ».

Le prop. del libro I, che abbiamo ricordate, contengono, come si vede, la parte essenziale di quella che oggi si studia ordinariamente come teoria dell'equivalenza dei poligoni. Ma nell'assetto euclideo codesta teoria ha uno sviluppo più lungo, tutto il libro II essendo dedicato a completarla.

Senza diffonderci in un esame troppo minuto, ricorderemo soltanto che le prop. 1-10 di questo libro, contengono, sotto veste geometrica, gli elementi del nostro calcolo algebrico, e si applicano quindi al problema della *sezione aurea* (Prop. 11), all'estensione del teorema di Pitagora (Prop. 12, 13), e alla trasformazione di un rettangolo in un quadrato (Prop. 13). I due problemi (11, 13) appariscono soprattutto interessanti, come quelli che stanno a rappresentare la risoluzione geo-

metrica in due casi particolari ($ax = (a-x)^2$, $x^2 = ab$), dell'equazione di 2° grado; risoluzione ottenuta da Euclide in generale e sotto più aspetti colla teoria delle proporzioni (cfr. art. 7).

Noteremo l'ufficio che nella dimostrazione di codeste costruzioni hanno i due teoremi fondamentali sull'uguaglianza di parallelogrammi del libro I (i quali vengono indirettamente applicati attraverso il teorema di Pitagora) e i rispettivi due lemmi (Prop. 6 e 5) che possiamo esprimere colle formule:

$$(a+b)b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2,$$

$$ab-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Ed avvertiremo infine che nella dimostrazione suddetta si ricorre ancora, in modo diretto ai varii criterii d'uguaglianza ed in ispecie al criterio 3) (uguaglianza per differenza).

§ 3. **Cenni storici sull'ulteriore sviluppo della teoria delle grandezze poligonali.** — Riassunto così, nelle sue linee generali, l'assetto euclideo della teoria dell'uguaglianza (di grandezza) dei poligoni, vediamo come si sia affacciata e svolta storicamente la critica, da cui sono uscite le moderne vedute.

In EUCLIDE manca ogni giustificazione della pluralità di criteri stabiliti a riconoscere l'*uguaglianza* geometrica delle figure, perchè la compatibilità di essi è considerata senz'altro consentita, in quanto le proposizioni fondamentali che vi si riferiscono si intendono desunte direttamente dalla *Logica*, fondamento primitivo ed inconcusso di ogni speculazione scientifica. E ciò avviene perchè l'applicazione sistematica, che di codeste *Nozioni Comuni* è fatta in EUCLIDE, nello studio delle figure geometriche, sottintende implicitamente la *assegnazione a priori di queste alla categoria logica delle grandezze.*

Codesto medesimo principio è pur tacitamente messo a base della teoria delle grandezze geometriche nei molti trattati scolastici, che, in tempi a noi vicini, derivarono più o meno direttamente dagli *Elementi* di EUCLIDE. Così, per ricordare quelli universalmente noti, accade nel LEGENDRE, nel BALTZER, nell'AMIOT.

Giova per altro notare che in ciascuno di codesti trattati è opportunamente distinta la relazione di *congruenza* (o uguaglianza per *sovrapponibità*, cfr. Art. 4) alla quale vien riserbato il nome di *uguaglianza*, dalla relazione generale di uguaglianza di grandezza, designata già fin da allora col nome di *equivalenza*. Ma per quell'ultima relazione si trovano in codesti trattati delle definizioni illusorie [1].

Eppure già da tempo il GERWIEN aveva mostrato quale potesse essere il punto di partenza di una teoria rigorosa delle grandezze poligonali. Egli infatti aveva provato con effettive costruzioni la possibilità di spezzare due o più poligoni piani o sferici *di eguale area* nel medesimo numero finito di parti poligonali a due a due *congruenti* [2].

La medesima osservazione, relativa ai poligoni, comparve nel « *Tentamen juventatem studiosam* ecc. » (Maros - Vásárhely: 1832-33) di W. BÒLYAI. Anzi è ivi data una dimostrazione, per superficie qualsivogliano, dei due teoremi:

I) *Le parti non comuni a due superficie congruenti, che in parte si ricoprono, sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

II) *Se da due superficie congruenti si tolgono due parti congruenti, i resti sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

Il teorema II è facile corollario del I: ma la dimostrazione che il BÒLYAI diede del I conduce, in un numero grandissimo di casi, ad un procedimento di suddivisioni successive che non ha mai termine; BÒLYAI stesso avvertì questo difetto della sua dimostrazione e cercò di ovviarvi con alcune osservazioni che per altro non sono sufficienti.

Nelle *Geometrische Untersuchungen* del LOBATSCEFSKIJ è

[1] Il LEGENDRE (*Éléments de Géométrie*, livre III), dice: « J'appellerai figures équivalentes celles dont les surfaces sont égales ».

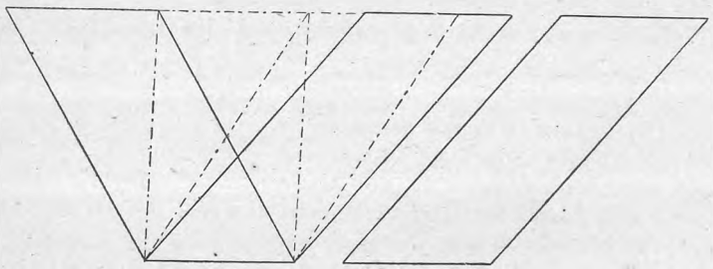
Nel BALTZER è detto: « La grandezza di una superficie si chiama *area* » e « Due parallelogrammi (triangoli) di uguali altezze sono *equivalenti*, cioè hanno aree uguali ».

L'AMIOT infine dice: « On dit que deux figures sont équivalentes lorsqu'elles ont la même étendue, sans avoir la même forme ».

[2] *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen figuren in dieselben Stüchen - Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestaltener figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.* CRELLE'S Journal; X, 1833.

conservata la distinzione introdotta dal LEGENDRE tra *uguaglianza* (*congruenza*) ed *equivalenza:* come criteri di riconoscimento vi sono assunti, per la prima la *Nozione Comune* IV (*sovrapponibilità*), per la seconda le *Nozioni* II e III insieme (*somma e differenza di figure congruenti*).

Tuttavia, sino a questo punto, nessuno ancora aveva rivolto la propria attenzione con intendimenti critico-didattici sulle basi della teoria euclidea dell'*eguaglianza* (*equivalenza* e, come caso particolare, *congruenza*). Il primo ad intraprendere siffatto studio fu il DUHAMEL [1]. Egli, nel suo esame dei principî della scienza dell'estensione, notò anzitutto la necessità di definire, per ciascuna delle classi di figure che si studiano nella Geometria, i concetti di *somma* e di *parte*, e di *maggiore* e *minore*, ed osservò a questo proposito, che dopo siffatte definizioni, la *Nozione Comune* V perde il suo carattere di *verità desunta dall' intuizione* (*verité de sentiment*) per diventare una semplice verità di definizione. Egli, inoltre, mise in luce l'opportunità di ridurre in uno solo i vari criteri, che EUCLIDE introduce a riconoscere l'*eguaglianza*: perciò, riserbando, come già il LEGENDRE e il LOBATSCHEFSKIJ, il nome di *eguaglianza* a designare la sovrapponibilità o *congruenza*, propose di indicare col nome di *equivalenza* la relazione, che intercede tra figure, *somme di figure a due a due rispettivamente uguali*. Sulla base di codesta definizione, il DUHAMEL svolse i primi teoremi di equivalenza tra poligoni (I Libro degli *Elementi*), e in particolare, proibendo a sè stesso l'uso della *Nozione Comune* III (*eguaglianza delle differenze di enti uguali*), sostituì alla dimostrazione euclidea del teo-

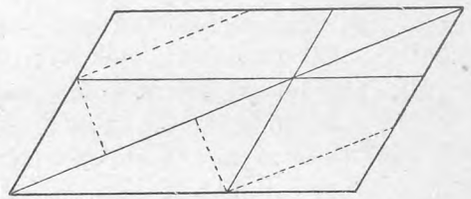


(1) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Deuxième partie, Paris, Gauthier-Villars. Cfr. in particolar modo i capitoli I e V e le *Note sur l'équivalence*, pagg. 445-450.

rema: « *Parallelogrammi di egual base e di eguale altezza sono equivalenti* » una dimostrazione, nella quale i due parallelogrammi vengono decomposti in uno stesso numero di parti congruenti, facendo uso del *postulato* d'ARCHIMEDE (art. 5). Questa dimostrazione viene suggerita dalla figura precedente.

Lo schema di teoria della equivalenza dei poligoni abbozzata dal DUHAMEL, fu svolta per intero da A. FAIFOFER nei suoi *Elementi di Geometria*, la cui prima edizione apparve in luce nel 1880.

In codesti « Elementi » fu data per la prima volta una dimostrazione del teorema del gnomone fondata sul solo criterio dell'equivalenza per somma, in quanto vi è mostrato, come risulta dall'annessa figura, che i due parallelogrammi da bande opposte della diagonale hanno basi ed altezze uguali rispettivamente a due parallelogrammi, che alla lor volta hanno base ed altezza uguali fra loro. E da codesto teorema vengono fatte dipendere direttamente la trasformazione di un rettangolo in un quadrato, e la sezione aurea, modificando il ragionamento euclideo, in guisa da adoprare soltanto il criterio di equivalenza per somma [1].



Ma mentre in tal modo veniva edificata, secondo le vedute del DUHAMEL, tutta la parte diretta della teoria dell'equivalenza dei poligoni, A. DE ZOLT notò che in codesto primo tentativo, pur notevolissimo, la parte inversa della teoria presentava ancora una lacuna.

La dimostrazione apagogica, che il FAIFOFER dava del teorema: « *Se due triangoli sono equivalenti ed hanno lati eguali, anche le altezze relative sono eguali fra loro* » dipende in modo essenziale dalla proposizione che « *due rettangoli aventi basi eguali e altezze diseguali non sono equivalenti* ». Ora il DE ZOLT osservò che, codesta asserzione non si giustifica se non in base ad un principio, che appare evidente in quanto risponde ad una delle proprietà fondamentali del concetto di

(1) Cfr. la 1ª edizione degli *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori* di F. ENRIQUES e U. AMALDI, Bologna, 1903.

grandezza, ma che in una serie rigorosamente concatenata di deduzioni geometriche deve essere o esplicitamente enunciato come postulato o effettivamente dimostrato. Il DE ZOLT enunciò codesto principio nei termini seguenti (1): « *Se un poligono è diviso in parti in un modo qualsivoglia, non è possibile, trascurando alcuna di esse parti, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono* ».

Una dimostrazione geometrica diretta di codesto principio permetterebbe di svolgere rigorosamente tutta la teoria della equivalenza dei poligoni. Ma i tentativi subito fatti in questo senso non condussero a risultati soddisfacenti (2). E da allora in poi nella maggior parte dei trattati scolastici italiani di Geometria elementare fu accolta nelle sue linee generali la teoria dell'equivalenza dei poligoni, quale era stata svolta, sul piano dal DUHAMEL, del FAIFOFER, introdottovi per altro il principio del DE ZOLT, come *postulato* esplicito (3).

Ma codesto principio non è indipendente dai postulati, che usando la terminologia di HILBERT, potremo dire della *Verknüpfung*, dell'*Anordnung* e della *Kongruenz* (Cfr. gli Art. prec.). Lo SCHUR, infatti, dimostrò come la teoria delle

(1) *Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica.* Milano, Briola, 1881. Cfr. ancora: A. DE ZOLT, *Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici.* Milano, Briola, 1883. La necessità di stabilire rigorosamente un tale principio fu riconosciuto anche da O. STOLZ, *Monatshalfte für Math. und Phys.*, 1894.

(2) Il DE ZOLT stesso svolse nel primo dei suoi opuscoli or ora citati alcune considerazioni, che chiariscono e, in certo modo, precisano il contenuto intuitivo del suo principio; ma esse non hanno assolutamente nè carattere, nè valore di effettiva dimostrazione geometrica.

Anche il FAIFOFER, tentò dapprima una nuova dimostrazione (*Periodico di matematica*, I, pag. 13); egli si propose di provare *direttamente e con effettive costruzioni* il teorema del BÒLYAI che « *sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti, che siano congruenti ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti* » e a questo scopo stabilì un procedimento di successive suddivisioni dei due poligoni primitivi. Ma, come osservò il DE PAOLIS (ibidem, pag. 44), la dimostrazione del FAIFOFER, come già quella del BOLYAI, non escludeva il caso che codesto procedimento potesse *prolungarsi indefinitamente.*

E nella stessa obbiezione incorrono alcuni tentativi di dimostrazione di M. GREMIGNI (*Rivista di Matematica*, 1893, ecc.).

(3) Cfr. i trattati di DE PAOLIS, FAIFOFER, SANNIA-D'OVIDIO, VERONESE, ENRIQUES-AMALDI.

grandezze poligonali possa svolgersi in modo rigoroso senza aggiungere nessun postulato a quelli, su cui sono fondate la teoria dell'uguaglianza dei poligoni e la teoria della proporzionalità fra segmenti (1). Precisamente, lo SCHUR, assunta come definizione di uguaglianza delle superficie poligonali la definizione di *equivalenza* quale decomponibilità in parti uguali, mostrò come si possa stabilire fra le superficie poligonali e gli ∞^1 rettangoli aventi una altezza prefissata h una *corrispondenza*, nella quale sono conservate le relazioni di *somma*, di *uguaglianza* e di *disuguaglianza*, per modo che:

a) a due poligoni equivalenti corrisponde un medesimo rettangolo (di altezza h) e viceversa;

b) alla somma di due poligoni corrisponde il rettangolo (di altezza h) somma dei rettangoli corrispondenti ai due poligoni dati.

Codesta corrispondenza permette di *trasportare* immediatamente alle superficie poligonali tutte le proprietà di grandezza dei rettangoli di altezza h, le quali coincidono con quelle dei segmenti, rispettive basi. Così in particolare viene dimostrato il principio del DE ZOLT, e più in generale resta rigorosamente stabilito il *principio fondamentale* che *le superficie poligonali costituiscono una classe di grandezze.*

Quanto ai particolari della dimostrazione, lo SCHUR, dopo aver dimostrato, che se i lati di un rettangolo sono gli estremi, e i lati di un altro rettangolo i medi di una proporzione, i due rettangoli sono equivalenti, chiama *area* di un triangolo il rettangolo, che ha un lato eguale ad un segmento prefissato qualsivoglia h e l'altro eguale alla quarta proporzionale dopo questo segmento h, un lato del triangolo e la metà della corrispondente altezza. Allora, applicando il teorema dianzi enunciato, dimostra che l'area di un triangolo è equivalente ad esso e non dipende dalla scelta del lato, da cui si parte nella costruzione. Di qui risulta che triangoli di area eguale sono equivalenti. Poi all'area dei triangoli dà un segno, il

(1) *Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft.* Jhrg. 1892. Cfr. la traduzione italiana: « *Sull' area delle figure piane limitate da linee rette* » *Per. di Mat.*, VIII, pag. 153. L'esposizione molto concisa di questa Nota è completata dalla Nota del BIASI: « *Ancora sulla equivalenza dei poligoni* » (*Per. di Mat.*, IX, pag. 85), nella quale l'A. espone alcuni dettagli del metodo dello SCHUR, da questi stesso a lui comunicati.

quale è positivo o negativo a seconda che il senso, in cui si intende descritto il contorno, lascia l'interno del triangolo a sinistra o a destra.

Dimostra allora il teorema fondamentale: « *La somma algebrica delle aree dei triangoli che hanno per base i lati di un poligono e per vertice comune un punto del suo piano, è indipendente dalla scelta di questo punto* ». Da ultimo, assunta come *area* di un poligono la somma (algebrica) di rettangoli, precedentemente dimostrata costante, fa vedere che, diviso in qualsivoglia modo un poligono in parti poligonali, *la somma delle aree delle parti è sempre eguale all' area del poligono.*

Sul medesimo concetto fondamentale della dimostrazione dello SCHUR sono costruite tutte le dimostrazioni, che, in seguito, da vari altri autori furono ideate a dimostrare, ancora, che le superficie poligonali costituiscono una classe di grandezze. Di tal natura è la dimostrazione del VERONESE [1], che per la sua semplicità e la sua eleganza abbiamo scelto a riprodurla per intero; e tali ancora sono quelle del RAUSENBERGER [2], del GÉRARD [3], del LAZZERI [4], delle quali daremo un rapidissimo cenno.

La dimostrazione del RAUSENBERGER è in tutto simile a quella dello SCHUR, benchè paia che l'autore non ne avesse avuto notizia. La differenza, di importanza esclusivamente *didattica*, tra le due dimostrazioni, sta in ciò, che il RAUSENBERGER anzichè riferire l'insieme dei poligoni all'insieme dei rettangoli (dotati di segno) aventi una determinata altezza, presuppone nota la teoria della misura dei segmenti, e introduce

(1) *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell' equivalenza delle figure.* Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. VI, s. VII, 1894-95.

(2) *Das Grundproblem der Flächen und Rauminhaltslehre.* Math. Ann. 1893; XLII, 275-284.

(3) *Sur le postulat relatif à l' équivalence des polygones considéré comme corollaire du théorème de Varignon* — Bull. de la Soc. Math. de France, 1895, XXIII, pag. 268-269. Cfr. inoltre l'eccellente *Cours de Géométrie élémentaire* di B. NIEWENGLOWSKI e L. GÉRARD (Paris, 1898-900), dove si trovano citati e riassunti altri articoli del GÉRARD sul nostro argomento.

(4) *Sulla teoria dell' equivalenza geometrica.* Per. di Mat., 1895, fasc. III-IV e V-VI. Il LAZZERI per dimostrare l'unicità del rettangolo (di data altezza) che egli associa a ciascun poligono ricorre al *teorema* di PAPPO o *teorema di Pascal* per la coppia di rette. Vedi la dimostrazione di HILBERT al § 4 di questo Articolo.

l'area *(Flächenwerth)*, come una funzione numerica dei *Bestimmungsstücke* dei poligoni.

Più originale è la dimostrazione del Gérard. Se v ed O indicano un *vettore* ed un punto di un piano qualsivoglia, del quale si consideri una faccia determinata, si designa col nome di *momento del vettore v rispetto al punto O* il prodotto della lunghezza *(tensore)* del *vettore v* per la distanza di O dalla linea d'azione di v, preso positivamente o negativamente, secondo che O cade a sinistra o a destra della linea di azione di v, considerata nel verso di v.

Il GÉRARD, fissato come positivo sul perimetro di un poligono qualsivoglia P (a contorno non intrecciato) il senso che lascia a sinistra l'interno di esso, chiama *momento del poligono P, rispetto ad un punto O* qualsivoglia del piano di P, la somma dei momenti rispetto ad O dei vettori complanari che costituiscono il perimetro di P. Usando allora del *teorema del* VARIGNON (« *il momento del vettore* risultante *è eguale alla somma dei momenti dei vettori* componenti »), che egli presuppone stabilito indipendentemente da ogni considerazione di area, dimostra che il *momento di P non dipende dal punto del piano di P, rispetto al quale è stato preso.* È allora immediatamente chiaro che, quando P sia decomposto in qualsivoglia modo in un numero k di *parti poligonali* $P_1, P_2 \ldots, P_k$, *il momento di P è eguale alla somma dei singoli momenti di* $P_1, P_2, \ldots P_k$. Ottenuto questo risultato, è ovvia la deduzione del *principio del* DE ZOLT.

Carattere più nettamente geometrico di quelle accennate sin qui ha la dimostrazione del LAZZERI, la quale è bensì costrutta sullo schema di quella dello SCHUR, ma ha su di questa qualche vantaggio didattico. In particolare non vi entrano in considerazione le aree negative, e vi è ridotto al minimo (non per altro bandito) l'uso della teoria della proporzionalità.

Qui da ultimo dobbiamo ricordare a parte la dimostrazione di D. HILBERT [1], la quale si riconnette bensì al procedimento dello SCHUR e ancor più a quello del RAUSENBERGER, ma dalle geniali considerazioni critiche, da cui è ispirata e che ne rappresentano lo scopo sostanziale, riceve, rispetto alle altre dimostrazioni suindicate, una luce speciale e un più

(1) *Grundlagen der Geometrie,* II, Aufl., 1903, Kap. IV.

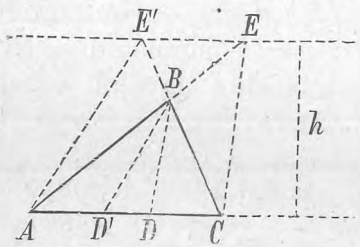
alto interesse; onde converrà poi renderne conto in modo particolare.

§ 4. **Dimostrazione secondo il Veronese del principio fondamentale della teoria delle grandezze poligonali.** — Supponiamo nota la teoria delle proporzioni e teniamo ferma la

DEFINIZIONE. — *Due poligoni diconsi* **equivalenti,** *se sono somme di parti poligonali, ciascuna a ciascuna rispettivamente congruenti.*

E ricordiamo subito come per codesta *equivalenza* si dimostri senz'altro la *proprietà transitiva*, per cui se un poligono è equivalente ad un secondo e questo ad un terzo, il primo è equivalente al terzo.

Ciò premesso, fissiamo un segmento qualsivoglia h e dato un triangolo ABC, *trasformiamo* quest'ultimo in un triangolo equivalente al dato e avente un'altezza eguale ad h. È nota la costruzione che a ciò si richiede. Fissato uno dei lati p. es. AC del dato triangolo, si conduca, da quella banda di AC da cui cade B, la parallela alla distanza h. Si prolunghi uno dei due lati distinti da AC, p. es. AB, fino ad incontrare in E la costrutta parallela. Congiunto E con C, sia BD parallela alla EC. Il triangolo AED soddisfa alle condizioni richieste.



Potevamo, invece di AB, prolungare CB: avremmo così ottenuto un triangolo $D'E'C$. Dico che le basi AD e $D'C$ sono eguali. Si ha infatti:

$$AD : AC :: AB : AE \tag{1}$$

$$D'C : AC :: CB : CE'.$$

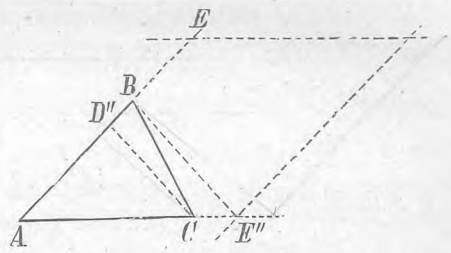
Ma è

$$AB : AE :: CB : CE';$$

onde risulta appunto $AD = D'C$.

Si ottiene ancora come base del triangolo trasformato un segmento eguale ad AD, se nella costruzione suindicata

si conduce la parallela ad un lato del triangolo diverso da AC. Partiamo, infatti, anzichè dal lato AC, dal lato AB: la figura costituita dai due lati AB, AC e dalle due parallele ad essi rispettivamente condotte alla distanza h, danno un rombo: perciò $AE = AE''$. Se AD'' è il segmento, a cui conduce la costruzione fondamentale, eseguita partendo dal lato AB come base, abbiamo



$$AD'' : AB :: AC : AE''.$$

Ma dalla (1) discende

$$AD : AB :: AC : AE$$

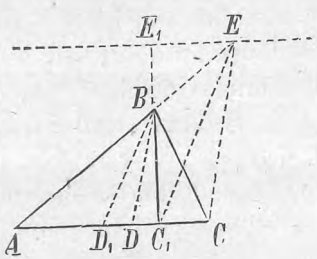
dunque

$$AD = AD''.$$

Premesse queste osservazioni, è legittimo assumere come *segmento associato al triangolo ABC rispetto al segmento h,* il segmento AD. Nel seguito di questo paragrafo sottintenderemo di riferire tutti i *segmenti associati* ad un medesimo segmento h.

Per brevità chiameremo *divisione per trasversali* ogni divisione in parti di un triangolo, ottenuta con segmenti di retta uscenti dai vertici e limitate ai lati opposti del triangolo primitivo o di quelli successivamente ottenuti.

LEMMA I. *Se un triangolo è diviso per trasversali in parti triangolari, il segmento associato al triangolo dato è somma dei segmenti associati ai triangoli ottenuti nel modo anzidetto e di cui il triangolo dato è somma.*



Cominciamo col dimostrare la proposizione nel caso in cui il triangolo dato ABC è diviso in due triangoli per mezzo di una retta passante, p. es., per il vertice B.

Se AD è il segmento associato ad ABC e AD_1 il segmento associato ad ABC_1 abbiamo

$$AD : AC :: AB : AE$$
$$AD_1 : AC_1 :: AB : AE.$$

Ne discende $$D_1D : C_1C :: AB : AE.$$

Ora costruiamo il seguente C_1X associato al triangolo C_1BC: esso sarà tale che

$$C_1X : C_1C :: C_1B : C_1E_1.$$

Ma, poichè

$$C_1B : C_1E_1 :: AB : AE,$$

sarà

$$C_1X : C_1C :: AB : AE$$

e quindi

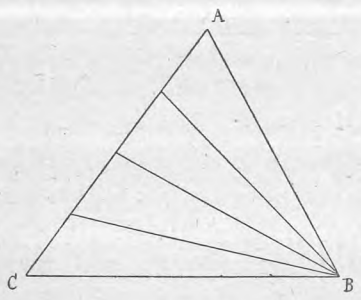
$$C_1X = D_1D.$$

Dunque ai due triangoli ABC_1, C_1BC, la cui somma è il triangolo ABC, sono *associati* i segmenti AD_1, D_1D rispettivamente, che hanno per somma il segmento AD associato ad ABC.

Applicando ripetutamente il risultato ora ottenuto, avremo la dimostrazione del *Lemma* enunciato, il quale, in sostanza, asserisce che l'operazione che consiste nell'associare ad ogni triangolo il corrispondente segmento è *distributiva* rispetto alla somma, *quando* i triangoli parziali sono ottenuti dal triangolo somma con successive divisioni per trasversali.

Ora quest'ultima restrizione si può togliere per mezzo del seguente

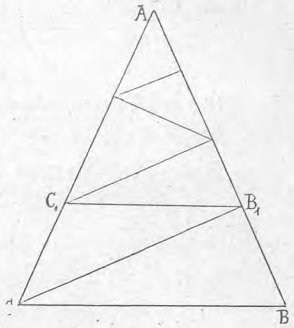
LEMMA II. *Qualsivoglia divisione data di un triangolo in triangoli, o una suddivisione di essa in triangoli, si ottiene mediante successive divisioni per traversali* (1).



Anzitutto è chiaro che si può eseguire con una successione di trasversali ogni divisione di un triangolo, tale che nell'interno del triangolo e sopra un lato di esso non cada alcun vertice di triangoli parziali. Se invero il triangolo ABC è diviso in triangoli in modo che sia soddisfatta codesta condizione ed è BC il lato in cui

(1) La dimostrazione, che di questo *Lemma* dà il VERONESE si potrà dedurre dalla dimostrazione, dovuta dal medesimo autore, dell'analogo *Lemma* relativo ai tetraedri (§ 9). Qui, ad evitare ripetizioni, preferimmo dare la dimostrazione dello HILBERT.

non cadono vertici di triangoli parziali, ne cadranno certamente sui due lati AB, AC. Se ne cadono su uno soltanto di essi, la divisione è ottenuta con sole trasversali uscenti dal vertice opposto. Se poi ne cadono su entrambi i lati AB, AC, siano B_1, C_1 i vertici che su codesti due lati rispettivamente si incontrano primi a partire da B,C. Il segmento B_1C_1 sarà uno dei lati di un triangolo parziale, e il quadrilatero BCC_1B_1, che nella data divisione deve essere decomposto in triangoli, i cui vertici non cadano nè all'interno della superficie, nè all'interno dei lati, sarà necessariamente spezzato in due triangoli mediante una delle sue diagonali, p. es. la B_1C. Allora, considerata nel triangolo ABC la trasversale CB_1, e nel nuovo triangolo AB_1C la B_1C_1, siamo condotti al triangolo AB_1C_1, diviso ancora nel solito modo in triangoli parziali e avente su ciascuno dei lati concorrenti in A un vertice di meno del primitivo. Così continuando si vede che la data divisione di ABC si ottiene per mezzo di successive trasversali.



Passando ora ad una divisione qualsivoglia di un triangolo ABC in triangoli Δ_1, conduciamo da un vertice di ABC, p. es. da A, tutte le trasversali di ABC che passano per i singoli vertici dei triangoli Δ_1. Queste trasversali dividono ABC in un certo numero di triangoli Δ_2 e nello stesso tempo suddividono alcuni dei Δ_1 in triangoli e quadrangoli. Spezzando in due ciascuno di questi ultimi per mezzo di una diagonale, otteniamo una suddivisione dei triangoli Δ_1 in triangoli Δ_3. Ora vogliamo dimostrare che i Δ_3, si ottengono con sole traversali, sia che partiamo dai singoli Δ_1, sia che partiamo dai singoli Δ_2.

Per questi ultimi è chiaro che dei triangoli Δ_3, in cui è diviso ciascun Δ_2, nessuno ha vertici all'interno, e sul lato opposto ad A, e quindi, per quanto si è visto dianzi, l'asserzione è dimostrata.

In secondo luogo, fissato un determinato Δ_1, al suo interno non possono cadere vertici dei Δ_3; perchè le traversali di ABC considerate si incontrano tutte nel vertice A. Di più o una delle trasversali per A contiene un lato del Δ_1 e allora

su questo lato non cadono certamente vertici di triangoli Δ_3; oppure una traversale per A divide il Δ_1 in due triangoli, per ciascuno dei quali il segmento di trasversale contenuto in Δ_1 è un lato, su cui non cadono vertici di Δ_3. Risulta di qui, per l'osservazione fatta dapprincipio, che ciascun Δ_1 e ciascun Δ_2 si può spezzare nei singoli triangoli Δ_3, che lo compongono, con sole trasversali. Poichè ABC è diviso nei triangoli Δ_2 per trasversali, il *Lemma* è dimostrato.

Ora consideriamo i segmenti associati al triangolo primitivo ABC e ai singoli triangoli Δ_3. Poichè questi ultimi si ottengono dal primo con sole traversali, risulta dal *Lemma* I che il segmento associato ad ABC è eguale alla somma dei segmenti associati ai singoli Δ_3. Ma, considerato un qualsivoglia Δ_1, i triangoli Δ_3 che lo compongono, si possono ottenere con sole trasversali, onde la somma dei segmenti associati a questi ultimi è uguale al segmento associato al Δ_1 considerato. Se dunque nella somma di tutti i segmenti associati ai triangoli Δ_3, raggruppiamo i termini corrispondenti ai singoli Δ_1, mettiamo in evidenza che il segmento associato ad ABC è eguale alla somma dei segmenti associati ai singoli triangoli Δ_1. Abbiamo dunque il

TEOREMA. *Diviso in qualsivoglia modo in triangoli un triangolo dato, il segmento associato a quest'ultimo è eguale alla somma dei segmenti associati ai triangoli parziali.*

COROLLARIO. *Se un poligono qualsivoglia si divide in triangoli parziali in due modi diversi, la somma dei segmenti associati ai triangoli della prima divisione, è eguale alla somma dei segmenti associati ai triangoli della seconda.*

Indichiamo infatti con Δ' i triangoli parziali della prima divisione, con Δ'' i triangoli parziali della seconda. Allora, immaginando sovrapposte le due divisioni, ed aggiungendo, eventualmente, nuovi segmenti di divisione, è possibile costruire una suddivisione in triangoli Δ''', tali che aggruppati in un certo modo diano i triangoli Δ', aggruppati in un altro diano i triangoli Δ''. Aggruppando, quindi, corrispondentemente, i termini della somma dei segmenti associati ai singoli triangoli Δ''', possiamo mettere in evidenza una volta l'identità di questa somma con la somma dei segmenti associati ai triangoli Δ', un'altra la sua identità con la somma dei segmenti associati ai triangoli Δ''; e il corollario è dimostrato.

Ciò premesso, assumiamo come *segmento associato* ad un

qualsivoglia *poligono*, la somma dei segmenti associati ai singoli triangoli di una qualsiasi particolare divisione in parti del poligono.

Allora non esiste nessun poligono (a contorno non intrecciato), al quale sia *associato* un segmento nullo, e, se k è il segmento associato ad un dato poligono rispetto ad un segmento h, risulta dalle costruzioni precedenti che ogni triangolo di base k e altezza h si può considerare come ottenuto *trasformando* il poligono primitivo: in altre parole il poligono e il triangolo considerato sono decomponibili in egual numero di parti a due a due rispettivamente congruenti. Se, quindi, due diversi poligoni ammettono, rispetto ad un medesimo segmento h, il medesimo segmento associato k, quei due poligoni, come equivalenti ad un medesimo triangolo, saranno equivalenti tra loro, cioè decomponibili in egual numero di parti a due a due rispettivamente congruenti.

In secondo luogo, se un poligono P è diviso in qualsivoglia modo, in parti poligonali $P_1, P_2, P_3 \dots P_k$, al poligono P è associato un segmento che è somma dei segmenti associati ai singoli poligoni parziali $P_1, P_2 \dots, P_k$.

Resta così stabilita fra i poligoni e i segmenti quella corrispondenza biunivoca che permette senz'altro di affermare che *le superficie poligonali costituiscono una classe di grandezze.*

Di qui risulta in particolare la seguente importante conseguenza (la cui validità è limitata alle superficie poligonali): *Dati due poligoni, o essi sono equivalenti, cioè decomponibili in uno stesso numero di parti congruenti, o l'uno di essi è suvvalente all'altro, cioè equivalente ad una sua parte.*

Infatti due poligoni non equivalenti daranno luogo a due segmenti associati, di cui l'uno è minore dell'altro: onde risulta che uno dei due poligoni è *equivalente ad una parte dell'altro* (1).

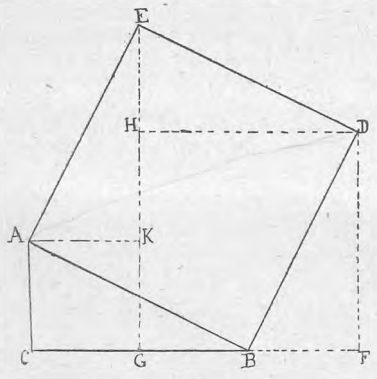
§ 5. **Indipendenza della teoria delle grandezze poligonali dal postulato di Archimede.** — Lo HILBERT alla definizione di poligoni equivalenti o, come egli dice, *zerlegungsgleich*, ag-

(1) Le classi di figure, per le quali, come pei poligoni, l'*uguaglianza di grandezza* coincide colla *decomponibilità in parti congruenti* vengono da alcuni designate col nome di *grandezze di 2ª specie.*

giunge la seguente: « Due poligoni si chiamano *inhaltsgleich* o *von gleichen Inhalte,* se è possibile aggiungere ad essi due poligoni equivalenti in guisa che le somme ottenute siano fra loro equivalenti ».

In altre parole sono inhaltsgleich due poligoni che si possono ottenere come differenze di poligoni zerlegungsgleich o equivalenti. Noi tradurremo la « inhaltsgleichheit » con « equivalenza per differenza » e d'or innanzi diremo « equivalenti per somma » i poligoni « zerlegungsgleich ».

Lo HILBERT, dopo avere stabilito che anche per la equivalenza per differenza come per la equivalenza per somma sussiste la proprietà transitiva, per cui poligoni equivalenti per differenza ad un terzo sono pure equivalenti per differenza fra loro, osserva che la nota dimostrazione euclidea della Proposizione 35ª del I Libro degli *Elementi* vale a stabilire *indipendentemente dal postulato di* ARCHIMEDE il teorema: *Due parallelogrammi (e quindi due triangoli) aventi basi ed altezze uguali sono fra loro equivalenti per differenza.* Per contrario la equivalenza per somma di due parallelogrammi o triangoli siffatti non si può stabilire se non presupponendo, come accade nella dimostrazione del DUHAMEL, il postulato di ARCHIMEDE. Per mettere in luce la necessità di far uso di codesto postulato, HILBERT considera due triangoli ABC, ABD, aventi la base $AB=1$ comune e la medesima altezza 1, e tali inoltre che AC sia perpendicolare ad AB, mentre la proiezione di AD sulla retta AB sia uguale al segmento infinito che egli indica con t [1]. Codesti due triangoli sono, per il teorema enunciato dianzi, equivalenti per differenza, mentre è evidente che essi non sono fra loro equivalenti per somma [2].



(1) L. c., § 12.

(2) Il teorema di PITAGORA, secondo la dimostrazione euclidea, si deduce dall'equivalenza per differenza di parallelogrammi sopra enunciata. Nondimeno l'equivalenza per somma del quadrato costruito sulla ipotenusa alla somma dei quadrati dei cateti d'un triangolo rettangolo, si mette in luce direttamente nel modo che viene suggerito per esempio dall'annessa figura.

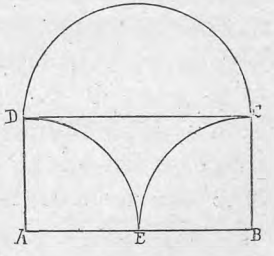
Cionondimeno lo HILBERT dimostra che anche nella Geometria Non-Archimedea, ove si assuma come uguaglianza di superficie dei poligoni la equivalenza per differenza, le superficie poligonali costituiscono una classe di grandezze, in quanto, ricorrendo alla teoria delle proporzioni segmentarie resa indipendente dal postulato di ARCHIMEDE e al calcolo sui segmenti fondato su di essa, è possibile definire l'*area* di un triangolo come prodotto della base per la metà dell'altezza, questo prodotto riuscendo, in virtù del teorema di PASCAL, indipendente dalla base scelta. E allora con procedimenti analoghi a quelli dello SCHUR (§ 2) si stabilisce tra superficie poligonali e numeri (loro aree) una corrispondenza che dimostra il solito principio fondamentale.

Si noti per altro che ove non sussista il postulato di Archimede, le superficie poligonali non formano più una classe *continua* (cfr. Art. 5); cosicchè in particolare poligoni equivalenti per differenza non si possono sempre considerare come limiti di poligoni equivalenti per differenza.

§ 6. **Il cerchio e i poligoni a lati circolari.** — Nella Geometria piana elementare, accanto alle figure a contorno rettilineo o poligoni, entrano in considerazione il cerchio e, più in generale, i poligoni a contorno circolare o misto (settori segmenti circolari, lunule, ecc.) alle cui superficie, non meno che a quelle poligonali, l'intuizione nostra riconosce i caratteri delle grandezze.

Ma è facile dimostrare che la teoria di questa nuova specie di grandezze piane, che pur comprendono come casi particolari le ordinarie superficie poligonali, non si può stabilire con una semplice estensione della teoria delle grandezze poligonali, cui abbiamo dedicato i precedenti paragrafi.

Cominciamo, invero, coll'estendere alle figure a contorno circolare o misto la definizione di *somma,* e chiamiamo equivalenti due figure a contorno circolare o misto se *per mezzo di segmenti e di archi di circonferenza* esse possono dividersi in parti a due a due congruenti.



Si possono agevolmente costruire figure a contorno circolare, le quali siano equivalenti a poligoni. Così, per esempio, dato un rettangolo $ABCD$, di cui la base AB sia doppia dell'altezza AD, si

descriva sul diametro DC la semicirconferenza esterna al rettangolo, e, centro in A e B, si conducano i due quadranti di raggio uguale all'altezza del rettangolo e interni ad esso. Detto E il punto medio di AB, nel quale codesti due quadranti si toccano, è manifesto che il rettangolo $ABCD$ e il triangolo a contorno circolare ECD (caso particolare del cosidetto *drepanoide)* sono equivalenti.

Ma esistono altresì figure a contorno circolare (ed anzi si può dir questo il caso generale, cfr. § 7) le quali non sono equivalenti a nessuna figura a contorno rettilineo. Mentre invece, data una figura a contorno qualsivoglia, noi ci sentiamo certi dell'esistenza di poligoni a lati rettilinei, cui l'intuizione nostra assegna ugual superficie; del che sperimentalmente noi possiamo assicurarci, prendendo una lamina, per esempio metallica, di spessore e densità costanti, e, dopo averne ritagliato la data figura a contorno qualsivoglia, cercando, con una serie opportuna di tentativi, di ritagliarne un poligono a lati rettilinei, il quale, alla stregua di una sensibile bilancia, abbia ugual peso.

L'esempio più semplice, e per noi forse più interessante, di figure a contorno curvilineo non equivalenti a nessun poligono è dato dal cerchio, del quale è facile dimostrare che non è possibile dividere in parti la superficie per mezzo di segmenti e di archi di circonferenza, in modo che codeste parti, disposte in altra guisa l'una accanto all'altra diano un poligono a contorno rettilineo (1).

Dato infatti un cerchio C di raggio r e un poligono P, supponiamo che essi siano divisi per mezzo di segmenti rettilinei e di archi di circonferenza in un numero finito di parti, a due a due congruenti.

Consideriamo le parti in cui resta diviso C. Alle parti contigue al contorno di C i corrispondenti archi di cerchio C volgono la concavità. Ma potrà, in generale, accadere che tra le linee di divisione di C vi siano anche altri archi di cerchio di raggio r, distinti da quelli che costituiscono la circonferenza di C. È certo che ciascuno di questi ultimi, come interno a C, ad alcune parti volgerà la concavità, e ad

(1) Una tale impossibilità nel caso più generale in cui si usino linee di divisione qualsiansi risulta come corollario di un teorema molto comprensivo dovuto al RETHY. Cfr. § 7.

altre la convessità, in guisa che, se indichiamo con Λ la lunghezza di C, con λ la somma delle lunghezze degli archi or ora indicati, le somme degli archi di cerchio di raggio r che volgono alle parti di C, di cui formano contorno, la concavità o la convessità saranno date da $\Lambda + \lambda$ e λ rispettivamente.

Ora P, che è diviso in parti rispettivamente congruenti a quelle di C, ha il contorno rettilineo. Quindi ad ogni sua parte che abbia al contorno un arco di cerchio di raggio r, considerato dalla parte della concavità, saranno contigue una o più altre parti, limitate (parzialmente o totalmente) dal medesimo arco, considerato dalla parte della convessità, e reciprocamente. Perciò le somme degli archi di cerchio di raggio r, che, nella divisione in parti di P, volgono alle parti rispettive la concavità o la convessità, saranno eguali. Ma poichè P è diviso in parti a due a due ordinatamente congruenti a quelle di C, codeste due somme devono essere rispettivamente eguali alle analoghe somme relative a C, onde risulta l'eguaglianza assurda di $\Lambda + \lambda$ e λ.

Si ha dunque che la decomponibilità in parti a due a due congruenti non è per nulla una proprietà intrinseca della relazione di uguaglianza di superficie, ma è semplicemente un carattere contingente dei poligoni a lati rettilinei, aventi la stessa area; e poichè già al passare dalle superficie poligonali a quelle a lati circolari codesto carattere viene a mancare, esso non è più sufficiente a definire la relazione di uguaglianza entro questa nuova classe di grandezza, onde è qui necessario di ricercare un criterio di definizione nuovo e più comprensivo.

Già i Geometri greci, non riuscendo ad acquistare, coi criteri e coi metodi usati nello studio delle superficie poligonali, alcun analogo risultato relativo al confronto tra cerchi e poligoni, idearono un nuovo metodo, non meno geniale che fecondo, il cosidetto *metodo di esaustione.*

ARCHIMEDE nella sua opera *sulla misura del cerchio,* per dimostrare che la superficie C di un cerchio è uguale alla superficie T di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza rettificata di C, osserva che C non può essere maggiore di T, perchè se così fosse, iscrivendo nel cerchio i poligoni regolari di 4, 8, 16,... lati, si arriverebbe certamente a un poligono la cui differenza da T fosse minore di quella di T da C, onde si avrebbe che un tal poligono

inscritto in C sarebbe maggiore di T, il che è evidentemente assurdo. Similmente non può essere T maggiore di C, perchè in tal caso, considerando i poligoni regolari circoscritti a C di 4, 8, 16,.... lati, se ne troverebbe uno, il cui eccesso sul cerchio fosse minore dell'eccesso di T sul cerchio stesso, onde si concluderebbe che un tal poligono circoscritto è minore di T, il che è del pari assurdo. Stabilito così che T non è nè maggiore nè minore di C, ARCHIMEDE, in base al principio intuitivo, che di due superficie piane la prima è necessariamente maggiore o uguale o minore della seconda, conclude che il cerchio e il triangolo considerati hanno superficie uguali.

In base al medesimo metodo di esaustione EUCLIDE dimostra nel Libro XII degli *Elementi* che « *le superficie di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi* » e non è forse inutile notare come egli nel corso di codesta dimostrazione faccia uso esplicito del 1° Lemma del medesimo Libro, il quale in sostanza si riduce alla proposizione di ARCHIMEDE, enunciata per le grandezze in generale.

Nei trattati moderni il processo logico, col quale si giunge ad analoghi risultati è un po' diverso. Nelle sue linee essenziali esso può abbozzarsi nei termini seguenti. Postulata la *continuità della retta* e sviluppatene le prime conseguenze, si *trasportano* codesta proprietà e le annesse considerazioni all'insieme delle superficie poligonali, mediante la corrispondenza che in base alla teoria dell'equivalenza dei poligoni rimane stabilita fra segmenti e superficie poligonali. Si procede quindi alla *rettificazione della circonferenza* [1] e, fissato un cerchio C e indicata con T la superficie di un triangolo avente per altezza il raggio di C e per base la sua circonferenza rettificata, si considera nell'insieme delle superficie poligonali la partizione definita da T, vale a dire si considerano le due classi delle superficie poligonali minori e maggiori di T. Ciò premesso, mediante la considerazione dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a C si dimostra che codesta medesima partizione è pur definita da C, in quanto che ogni poligono maggiore o minore di C è pur maggiore o, rispettivamente, minore di T.

Allora la concezione delle superficie in genere come *grandezze,* o almeno la concezione che le superficie circolari costituiscano *grandezze* confrontabili colle superficie poligonali, esige che chiamiamo *uguali* le superficie del cerchio e del triangolo considerati.

Qui dunque, invece della decomponibilità in parti congruenti, si assume a fondamento della definizione di superficie uguali un fatto nuovo, che ha pur esso un carattere contingente in quanto è legato alla *continuità* della classe di grandezze che stiamo considerando (cfr. il § 4) il fatto, cioè, che *le superficie di ugual grandezza cui riferiamo le nostre considerazioni sono elementi di separazione di una medesima partizione dell'insieme delle superficie poligonali*, o, come si può dire altrimenti, *sono limiti di poligoni equivalenti* [1].

Rispetto a codesti metodi fondati sul concetto di *limite* o sulla considerazione di *partizioni* in classi dell'insieme delle superficie poligonali, il metodo archimedeo di esaustione presenta doti di maggiore eleganza e ha carattere più prettamente geometrico, come quello che si ispira direttamente alla concezione intuitiva del problema. Perciò non sarà inutile far vedere come esso sia suscettibile di una formulazione logica rigorosa [2].

Si conviene di dire che di due figure a contorno circolare (o misto o rettilineo) la prima è *prevalente* alla seconda e questa è *suvvalente* a quella, se per mezzo di segmenti e archi di circonferenza si possono dividere in parti in modo che fra le parti della prima si trovino tutte le parti della seconda e qualche parte residua. Dopo ciò, in base ad ovvie osservazioni sperimentali, si giustifica il seguente **postulato:** *Se di due*

[1] È noto come questa si compia in base al postulato della continuità (art. 5), quando sia accolta, come un nuovo dato dell'intuizione, la nozione della *lunghezza* della circonferenza (o di un arco di circonfrenza). La definizione di questa lunghezza come il limite del perimetro dei poligoni regolari, inscritti (o circoscritti) alla circonferenza, o come limite di separazione tra le due *classi* dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti, si appoggia sopra una constatazione empirica, legata alla flessione senza estensione di un filo; essa, notiamo, non può essere in alcun modo riattaccata alla concezione *a priori* degli archi di circolo come *grandezze*.

[1] Le classi di grandezze, per le quali a definire la relazione di *uguaglianza* è necessario far uso della *continuità* (partizioni, limiti,...) vengono da alcuni trattatisti designati col nome di *grandezze di 3ª specie*.

[2] Cfr. gli « *Elementi di geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori » di F. ENRIQUES e U. AMALDI.

figure a contorno circolare (o misto o rettilineo) la prima non è prevalente alla seconda, questa è prevalente ad ogni parte dell'altra; e si stabilisce la seguente definizione: Se di due figure a contorno circolare (o misto o rettilineo) l'una è prevalente all'altra, la *superficie* della prima si dirà *maggiore* di quella della seconda, e la superficie della seconda *minore* di quella della prima: se invece nessuna delle due figure sia prevalente all'altra si dirà che esse hanno *superficie eguali.* Il postulato precedente permette di dimostrare che, nell'insieme delle superficie da noi considerato, *superficie eguali ad una terza sono uguali fra loro e che di due superficie la prima è necessariamente maggiore o uguale o minore alla seconda;* ed è allora manifesto come basti seguire il procedimento di ARCHIMEDE per avere la dimostrazione dell'uguaglianza delle superficie di un cerchio C e del solito triangolo T.

Qui da ultimo nasce spontanea una domanda: Poichè per le figure a contorno circolare (o misto o rettilineo) abbiamo introdotto delle nuove definizioni di *uguaglianza di superficie,* le quali applicate al confronto tra cerchi e poligoni, conducono a risultati, ad ottenere i quali la definizione di equivalenza era di sua natura insufficiente, non potrà accadere che le nuove definizioni applicate al confronto fra poligoni piani, diano luogo a teoremi di uguaglianza di superficie più generali di quelli ottenuti in base alla definizione primitiva?

Codesta possibilità è senz'altro esclusa dalle considerazioni del § 3, perchè, se due poligoni sono limiti di poligoni equivalenti o sono elementi di separazione della medesima partizione dell'insieme delle superficie poligonali o, infine, sono tali che nessuno dei due sia prevalente all'altro, si conclude dal § 3 che i due poligoni ammettono il medesimo segmento associato e perciò sono decomponibili nelle stesse parti mediante segmenti rettilinei.

§ 7. **Le superficie a contorno qualsiasi.** — Le considerazioni del paragrafo precedente ci inducono ad uscire per un momento dal campo della Geometria elementare per dare un rapido sguardo alla teoria delle superficie a contorno qualsivoglia, considerate come grandezze.

Noi vedemmo pocanzi come sia impossibile ricondurre a considerazioni di spezzamento in parti congruenti il confronto tra cerchi e poligoni. Qui nasce analogamente la questione,

più generale, relativa alle condizioni, cui devono soddisfare due superficie qualsivogliano, affinchè siano decomponibili in un numero finito di parti a due a due congruenti. Siffatte condizioni furono determinate dal RÈTHY.

Egli si era proposto di dimostrare rigorosamente il teorema del BÒLYAI: « *Date due superficie congruenti quali si vogliano, e aventi una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti* (cioè somme di un numero finito di parti a due a due rispettivamente congruenti) ».

Nel § 1 della sua Memoria « *Endlich-gleiche Flächen* » [1] egli propose una dimostrazione di codesto teorema fondata sulla seguente notevolissima proposizione, che ci accontentiamo di enunciare, perchè la dimostrazione, alquanto laboriosa, ci allontanerebbe troppo dallo scopo nostro: « *Affinchè due superficie piane eguali* (nel senso più largo della parola) *siano decomponibili in uno stesso numero di parti rispettivamente congruenti è necessario e sufficiente, che i due contorni si possano dividere in archi, in guisa che per ogni arco dell'uno vi sia sull'altro un arco congruente e avente (rispetto all'interno della corrispondente superficie) il medesimo senso di curvatura; non tenendosi conto degli archi, che nel contorno di una stessa superficie compaiono un egual numero di volte coi due sensi opposti di curvatura (rispetto alla superficie racchiusa)* ».

Come corollario di codesto teorema, il RÉTHY osserva, che non è possibile decomporre in un egual numero di parti a due a due congruenti un poligono e una superficie, per la quale gli archi di curva del contorno volgano *tutti* all'interno o la concavità o la convessità. Tali sono, egli dice, il segmento di parabola e il cerchio.

Nel § 2 della medesima Memoria il RÉTHY volle dimostrare il teorema del BÒLYAI, « limitando gli strumenti di dimostrazione ». Prese, perciò, a considerare le traslazioni e i ribaltamenti del piano, che sovrappongono due figure direttamente o inversamente congruenti, e, col solo sussidio di siffatti movimenti e mediante la considerazione dei contorni delle date superficie, « senza far ricorso neppure alla riga ed al compasso », stabilì un procedimento per suddivisioni, diretto a provare, nella sua generalità, il teorema del BÒLYAI.

[1] *Berichte der ung. Akad. der Wiss.* 1890; Math. Ann. Bd. 38; 1891.

Ma il DOBRINER (1) osservò che codesto procedimento in certi casi (dei quali uno effettivamente egli assegna) conduce, come quello del BÒLYAI, ad una serie indefinita di costruzioni. Inoltre notò che negli sviluppi del § 1 della Memoria del RÉTHY è fatto tacitamente uso di una proposizione, che non è se non quel *principio* che noi abbiamo chiamato del DE ZOLT (§ 2), affermato per le superficie a contorno qualsivoglia. In uno scritto ulteriore (2) il DOBRINER propose una nuova dimostrazione del teorema del BÒLYAI.

Il RÉTHY (3) rispose cercando, con nuove osservazioni, di ovviare alle obiezioni opposte al § 2 della sua Memoria; di più volle giustificare la proposizione (principio del DE ZOLT), che aveva implicitamente ammesso nel § 1; ma a questo scopo fece ricorso alla *V Nozione Comune* di EUCLIDE, riuscendo così soltanto a spostare, con nessun vantaggio, la questione.

Ad ogni modo a noi non giova entrare nei particolari di codesta polemica: ci basterà l'osservare che i risultati del § 1 della Memoria del RÉTHY e in ispecie il teorema enunciato dianzi non vengono infirmati dall'osservazione del DOBRINER, in quanto si può dimostrare direttamente che le superficie a contorno qualsivoglia (sotto opportune restrizioni relative alla rappresentabilità analitica del contorno) costituiscono una *classe di grandezze.*

E qui basterà notare che codesta dimostrazione è fornita senz'altro dai teoremi di calcolo infinitesimale *sull'esistenza e l'unicità dell'integrale*, i quali stabiliscono fra le superficie e i numeri loro aree una corrispondenza soddisfacente alle solite condizioni, ove si assumano come *uguali* superficie, che

(1) *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über « Endlich-gleiche Flächen »* - Math. Ann. - XLII, 1893.

(2) *Der Satz « Congruentes on Congruentem giebt Gleiches » in seiner Anwendung auf Ebene Flächen* - Math. Ann.; Bd. XLII: 1893: p. 285. Cfr. anche la Nota: *Endlich-gleiche Flächen* - ibidem. In quest'ultima Nota il DOBRINER propone una dimostrazione del principio, che in sostanza si riduce a quello del DE ZOLT: « Due superficie, che siano divisibili mediante certe linee in parti a due a due uguali, non possono ammettere un'altra divisione in parti tale, che una delle date superficie contenga tutte le parti dell'altra e qualcuna di più ».

(3) *Ueber endlich-gleiche Flächen* - Math. Ann. - XLII, 1893. Cfr. anche la Nota del RÉTHY; *Zum Beweis des Hauptsatzes über die Endlich-gleichheit zweier ebener Systeme* - Math. Ann. XLII - 1894, in cui egli risponde ad un obbiezione di E. KÖTTER.

siano limiti di poligoni equivalenti o elementi di separazione relativi alla medesima partizione dell'insieme delle superficie poligonali o, infine, tali che l'una non sia nè maggiore nè minore dell'altra. E invero a semplici considerazioni di *Calcolo integrale* si riduce in sostanza la dimostrazione proposta dal KILLING (1).

§ 8. **Poligoni sferici.** — Ritornando nel campo elementare e passando dalla Geometria piana alla solida, consideriamo dapprima alcune classi di figure, per le quali la dimostrazione che esse costituiscono altrettante specie di grandezze è pressochè immediata; e anzi tutto occupiamoci dei poligoni sferici (a lati geodetici).

Abbiamo già ricordato (§ 2) come il GERWIEN abbia dimostrato che, sopra una stessa sfera poligoni sferici di ugual area sono decomponibili per mezzo di archi di circonferenze massime, in un numero finito di parti a due a due congruenti (o simmetriche). Assunta allora come criterio di definizione per la uguaglianza di superficie dei poligoni sferici la decomponibilità in parti a due a due congruenti (o simmetriche), si osservi col RAUSENBERGER (l. c.) che, sommando sulla sfera due poligoni di *eccesso* ε_1 ed ε_2 rispettivamente, si ottiene un poligono il cui *eccesso* è $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Ne risulta che, se si decompone un poligono sferico in quanti altri si vogliono, l'*eccesso* del tutto è uguale alla somma degli *eccessi* delle singole parti. Ma l'insieme degli *eccessi* (angoli) è un insieme di *grandezze:* sono quindi *grandezze* (proporzionali agli eccessi) anche i poligoni sferici (2).

§ 9. **Prismi.** — Si consideri in secondo luogo l'insieme di tutti i prismi retti aventi una data altezza h e si convenga di definire come *equivalenti* due prismi di altezza h, decomponibili mediante piani perpendicolari alla base in prismi di altezza h a due a due congruenti.

(1) Questa dimostrazione abbozzata dal KILLING in « *Nicht-euklidischen Raumformen* - Leipzig, 1885 » fu poi svolta da lui stesso nella « *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* - Paderbon, 1898, II Bd. S. 24 u. ff. ».

(2) A questo proposito vedi anche la nota già citata « *Sulla teoria della equivalenza geometrica* » di G. LAZZERI. I poligoni sferici sono dunque *grandezze di 2ª specie.*

Se allora a ciascun prisma dell'insieme considerato associamo il poligono base, otteniamo fra i solidi dei prismi di altezza h e le superficie poligonali una corrispondenza, tale che a prismi (retti di altezza h) equivalenti (nel senso convenuto) corrispondono poligoni equivalenti (nel senso del § 3) e reciprocamente; e ad un prisma retto di altezza h che sia somma di più prismi siffatti corrisponde la somma dei poligoni corrispondenti alle singole parti. Resta così senz'altro dimostrato, in base al § 3, che anche i prismi retti di altezza h costituiscono una classe di *grandezze*, *purchè* essi si considerino divisibili in parti soltanto per mezzo di piani perpendicolari alla base.

Ma, più in generale, il LAZZERI, con procedimenti analoghi a quelli da lui stesso seguiti pei poligoni, mostrò che, considerando l'insieme di *tutti i prismi*, si può associare a ciascuno di essi un parallelepipedo rettangolo, avente due spigoli consecutivi rispettivamente eguali a due segmenti dati a e b, determinato ed unico, in guisa che a prismi divisibili in *parti prismatiche* a due a due congruenti corrisponda il medesimo segmento e reciprocamente; e, diviso un prisma in *parti prismatiche* quali si vogliano, i parallelepipedi associati ai singoli prismi parziali hanno per somma il parallelepipedo associato al prisma primitivo.

Ora, l'insieme di tutti i parallelepipedi rettangoli, aventi due spigoli consecutivi rispettivamente eguali ad a e b, costituisce un insieme di *grandezze*, come si vede associando a ciascuno dei parallelepipedi considerati il rispettivo terzo spigolo. Discende di qui che anche i prismi formano una classe di *grandezze*, purchè per parti di un prisma si intendano le *parti prismatiche* esclusivamente.

Con ciò la teoria è ancora lontana dell'essere completa, giacchè, in particolare, non resta per nulla escluso che, dato un prisma e divisolo mediante piani in *parti qualsivogliano* (non tutte prismatiche), non si possa, dopo aver trascurato una di codeste parti, disporre le rimanenti le une accanto alle altre, in modo da riottenere il prisma primitivo (1). Che

(1) Nei trattati elementari nei quali si suole senz'altro escludere codesta possibilità in base ad un postulato (principio del DE ZOLT) la teoria della uguaglianza di grandezze dei prismi si esaurisce completamente in base alla definizione di *equivalenza*. In questo senso si dice che i prismi costituiscono una classe di *grandezze di 2ª specie*. Ma ove si voglia eliminare il suindicato postulato, che come si vedrà è inutile (§ 11), si può dire che i prismi costituiscono una classe di grandezze di 2ª specie solo ove si ammetta di poter suddividere un prisma esclusivamente in parti prismatiche.

(1) Ci sia lecito lamentare l'oblio, in cui viene lasciata dalla maggior parte dei trattatisti codesta bellissima costruzione di Euclide.

ciò sia impossibile potrà essere dimostrato soltanto nella teoria delle grandezze poliedriche in generale, cui dedicheremo i seguenti paragrafi.

§ 10. **I poliedri.** — Nè ai Geometri greci, nè ai posteriori riescì di ricondurre il paragone tra piramidi o tra prismi e piramidi a questioni di equivalenza.

EUCLIDE, trattando, nel Libro XI degli Elementi, del confronto di parallelepipedi e di prismi, applica metodi di dimostrazione, che sono la generalizzazione immediata di quelli usati nel Libro I per lo studio dei poligoni. Ma nel Libro XII ravvicina il confronto fra piramidi al confronto fra cerchi e poligoni e per dimostrare (Prop. 5) che « *i tetraedri di uguale altezza stanno fra loro come le basi* » applica il consueto suo metodo di esaustione, ricorrendo ad una ingegnosa ed elegantissima decomposizione di ciascun tetraedro in due prismi equivalenti e in due tetraedri uguali fra loro e simili al primitivo (1).

Nei trattati elementari moderni solitamente per confrontare due tetraedri di ugual base e di uguale altezza si preferisce considerare per ciascun tetraedro la successione dei cosidetti *scaloidi iscritti e circoscritti*, e mediante quelli si dimostra che i due tetraedri sono *limiti* di due successioni di solidi prismatici equivalenti, oppure che i due tetraedri corrispondono alla medesima *partizione* nell'insieme dei volumi prismatici; e in base a ciò si conclude che i due tetraedri hanno volumi uguali.

Noi, anche qui come al § 5, noteremo che ove si vogliano evitare codeste considerazioni aventi carattere non strettamente geometrico, si può dare una forma logicamente rigorosa al procedimento euclideo, assumendo come punto di partenza la seguente definizione: « Due poliedri si diranno avere *solidi uguali* quando nessuno dei due sia prevalente all'altro ».

Quanto al postulato, in base a cui si dimostra per l'uguaglianza di volume così definita la *proprietà transitiva,* basterà riferirci a quello che dicemmo circa la definizione di uguaglianza per le superficie a contorno circolare (§ 5).

Qui piuttosto, circa la definizione di uguaglianza di solido, importa trattare un'altra questione: È qui veramente necessario di ricorrere ai metodi suindicati di esaustione o di passaggio al limite? In altre parole la equivalenza (come decomponibilità in parti congruenti) è veramente, nel campo delle grandezze poliedriche, una relazione meno generale della uguaglianza di solido quale è verificabile coi metodi accennati, o, più semplicemente, quale è data dalla nostra intuizione [1]?

Una risposta a tali domande fu tentata dal BRICARD [2], che ebbe bensì l'intuizione della via che avrebbe poi condotto allo scopo, ma elaborò così poco la sua idea che le sue conclusioni hanno valore piuttosto di affermazioni che di dimostrazioni.

Egli affermò dunque che se due poliedri sono decomponibili in parte a due a due uguali, sussiste fra le misure dei diedri dei due poliedri e la misura del diedro piatto una relazione lineare omogenea a coefficienti interi; e poichè egli assegnò delle coppie di poliedri aventi ugual volume, per cui una siffatta relazione si mostra impossibile, concluse che non tutti i poliedri di volume uguale sono decomponibili in parti a due a due uguali.

Indipendentemente dal BRICARD, anche lo SFORZA battè la medesima via; ma limitandosi a considerare una maniera particolare di divisioni in parti, riuscì a giustificare in modo esauriente i suoi risultati [3].

[1] GAUSS in due lettere al GERLING (Werke Bd. VIII, pagg. 241, 244) esprime il *timore* che certi teoremi di Stereometria e fra questi la citata prop. 5ª del Libro XII di Euclide non si possano dimostrare senza far uso di metodi di esaustione.

[2] « *Sur une question de Géométrie relative aux polyedres* ». Nono. Annales, 1896. Il BRICARD mostra anche in codesta Nota come sia possibile dividere in parti congruenti due poliedri simmetrici. Questo stesso problema era già stato risoluto molto tempo innanzi dal GERLING (Gauss'werke, Bd. VIII, pag. 242).

[3] *Un' osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti.* Periodico di Matematica, t. XII, 1897.

Egli pone anzitutto la definizione: Un poliedro convesso si dirà diviso in parti *annodate* quando esso è diviso in parti poliedriche convesse in modo che se un punto è vertice di una delle parti, esso sia vertice anche di tutte le altre parti cui appartiene.

Ciò posto egli dimostra il

TEOREMA. *Se un poliedro convesso P è diviso in parti poliedriche convesse annodate, la somma degli angoloidi delle parti, aumentata o diminuita di un multiplo di un diedro piatto, eguaglia la somma di convenienti multipli, secondo numeri non minori di 1, dei diedri di P.*

In base a ciò egli, in base all'osservazione che il diedro del tetraedro regolare è incommensurabile col diedro piatto π, constata che *un tetraedro regolare e un tetraedro trirettangolo isoscele non si possono dividere in uno stesso numero di parti annodate rispettivamente simili* (*e quindi neppure congruenti*).

Ma codesti risultati dello SFORZA per quanto assai eleganti lasciavano insoluta la questione generale, la quale nel 1900 fu da D. HILBERT inserita fra i 23 problemi del suo « Pariser Vortrag » [1].

Fu appunto per incitamento dello HILBERT, che prese ad occuparsene MAX DEHN, il quale in modo veramente ingegnosissimo superò ogni difficoltà e diede la dimostrazione decisiva, che noi esporremo per disteso nel seguente paragrafo.

§ 11. **Dimostrazione del Dehn della impossibilità di decomporre in generale due poliedri di ugual volume in parti a due a due congruenti** [2] — *a*) Importa anzitutto di esporre alcune considerazioni sulle divisioni in parti di un qualsiasi poliedro; giungeremo così ad una rappresentazione schematica di tali divisioni, la quale fu dal DEHN posta a base della sua dimostrazione.

Sia P un poliedro qualsivoglia, del quale indichiamo con

[1] Gött. Nochr. 1900, Heft 8.

[2] *Ueber der Rauminhalt.* Math. Annalen, LV Band, 3. Heft. 1903. Cfr. anche *Ueber raumgleiche Polyeder.* Gött. Nachr. 1900. Heft 3. Del teorema del DEHN furono poi date altre dimostrazioni. Cfr. VAHLEN: *Uber endlichgleiche Polyeder.* Math. Ann. Bd. 56, 1903. KAGAN: *Ueber die Transformation der Polyeder,* ibidem, Bd. 57, 1903. VOGT: *Ueber Gleichheit und Endlichgleichheit von Prismen und Pyramiden*: CXXXIX Programm des k. Friedrichs-Gymnasiums zu Breslau, 1904.

s_1, s_2,.... gli spigoli e con σ_1, σ_2,.... i diedri relativi. Eseguita in P una qualsiasi divisione in un numero finito di parti poliedriche, designiamo i diedri di codeste parti, presi in un ordine qualsivoglia con τ_1, τ_2,.... e gli spigoli corrispondenti con t_1, t_2,....; nel caso che un medesimo spigolo sia comune ad $r > 1$ poliedri parziali, la sua misura comparirà nella successione t_1, t_2,.... precisamente r volte.

Per avere una immagine intuitiva di ciascuna coppia (t_i, τ_i) costituita da uno spigolo di poliedro parziale e dal rispettivo diedro, consideriamo col DEHN il *cuneo* che si ottiene innalzando le perpendicolari alla estremità di t_i in ciascuno dei due piani del diedro τ_i rispettivo. Codesto cuneo interseca sopra la superficie del cilindro circolare di raggio 1, che ha per asse la retta di t_i, un quadrilatero curvo, che si sviluppa nel piano in un rettangolo di base t_i e di altezza τ_i.

Ciò premesso, consideriamo, per fissare le idee, un determinato spigolo parziale t_i. La retta r cui esso appartiene può contenere altri spigoli parziali: noi su di essa considereremo il *massimo* segmento AB contenente t_i e ricoperto per intero e senza interruzione di spigoli parziali, per modo che, se A', B' sono due punti dei prolungamenti di AB abbastanza vicini ad A e B rispettivamente, i segmenti AA', BB' non apparterranno a nessuno spigolo parziale. Il DEHN indica un tale segmento col nome di « Kantenzug AB ». Noi diremo « *Catena rettilinea AB di spigoli parziali* » o semplicemente « *catena AB* ».

Considerando successivamente gli altri spigoli parziali non appartenenti alla catena già fissata, giungeremo alla fine a distribuire tutti gli spigoli t_i in tante catene, non aventi a due a due comuni se non dei punti isolati al più [1].

Per il seguito importa assai rendersi conto preciso del modo in cui, intorno a ciascuna catena sono distribuiti i diedri dei rispettivi spigoli parziali. Perciò notiamo anzitutto che fra le catene compariranno in particolare tutti gli spigoli s_j del poliedro dato. Fissata la nostra attenzione sopra uno di essi, p. es. s_l, avremo che su s_l giaceranno in generale più spigoli parziali t, i quali potranno anche ricoprirsi l'un l'altro

[1] A evitare equivoci non sarà inutile notare che su di una stessa retta possono aversi più catene distinte, le quali per altro si susseguiranno sulla retta a intervalli di segmenti, giacchè due catene aventi un estremo comune vanno riunite in una catena unica.

in parte o del tutto. Ma è manifesto, dal fatto che i vari poliedri parziali P_i debbono riempire completamente il poliedro P, che i cunei relativi agli spigoli parziali giacenti sopra s_l debbono riempire *del tutto e una volta sola* il cuneo relativo allo spigolo s_l e al rispettivo diedro σ_l; onde, sviluppando nel piano il corrispondente quadrilatero cilindrico, avremo che la somma dei rettangoli relativi alla catena s_l è equivalente ad un rettangolo di base s_l e di altezza σ_l.

Scelta in secondo luogo, ove esista, una catena giacente su di una faccia del poliedro dato P, vediamo che i cunei relativi agli spigoli sparziali giacenti su di essa determinano sulla solita superficie cilindrica di raggio 1, avente per asse la retta della catena, un mezzo cilindro di altezza uguale alla catena; cosicchè le coppie (t, τ) rispettive danno luogo a tanti rettangoli, la cui somma è equivalente ad un rettangolo di base uguale alla lunghezza della catena e di altezza π.

Si consideri, infine, una catena interna al poliedro P. I cunei relativi agli spigoli parziali giacenti su di essa esauriranno l'intero cilindro di raggio 1, avente per asse la catena, nei tratti in cui questa scorre soltanto lungo spigoli di poliedri parziali, ed esauriranno solamente un mezzo cilindro in quegli altri tratti, in cui la catena scorre eventualmente su faccie (e non su soli spigoli) di poliedri parziali. Risulta di qui, mediante lo sviluppo della solita superficie cilindrica, che i rettangoli rappresentativi delle coppie (t, τ) appartenenti alla catena considerata risultano aggruppati in un certo numero di rettangoli maggiori, la cui somma delle basi è uguale alla lunghezza della catena e dei quali alcuni hanno l'altezza 2π e gli altri l'altezza π.

Concludendo, i cunei intorno ad ogni singola catena esauriscono il relativo cilindro circolare, eccezione fatta:

1° per i tratti che scorrono su facce (e non soltanto lungo spigoli) di poliedri parziali o del poliedro primitivo, e danno così luogo ciascuno ad un mezzo cilindro;

2° per le catene coincidenti cogli spigoli s_l del poliedro dato, per le quali i cunei riempiono solo i relativi diedri σ_l.

Sia allora h la somma di tutte le catene della data divisione in parti di P e siano h_1, h_2,... le lunghezze dei vari tratti di catena, che scorrono non soltanto su spigoli ma anche su facce dei poliedri parziali o del poliedro dato. Considerati gli aggruppamenti di rettangoli (t, τ) corrispondenti alle diverse

catene, quali risultano dallo sviluppo delle rispettive superficie cilindriche, immaginiamoli collocati in un piano lungo un segmento di lunghezza h, l'uno accanto all'altro, e in modo che i lati t siano paralleli al segmento h.

Completato il rettangolo di base h e di altezza 2π, questo rettangolo rimane diviso, per mezzo di segmenti paralleli ai lati in tanti rettangoli minori, i quali sono: 1° i rettangoli di base t_i e altezza τ_i; 2° i rettangoli di base h_i e di altezza π; 3° i rettangoli di base s_l e di altezza $2\pi - \sigma_l$.

Abbiamo dunque la relazione

$$2\pi h = \Sigma t_i \tau_i + \pi \Sigma h_j + \Sigma s_l (2\pi - \sigma_l). \tag{1}$$

L'esistenza di questa relazione è il primo punto essenziale della dimostrazione del DEHN.

Su di essa è necessario svolgere alcune considerazioni, le quali vengono facilitate assai dalla rappresentazione geometrica.

b) Dianzi siamo stati condotti a considerare un rettangolo diviso (per mezzo di segmenti paralleli ai lati) in rettangoli minori. Per evitare la inutile complicazione inerente alla moltiplicità dei simboli, indichiamo per un momento con x_0, y_0 la base e l'altezza del rettangolo dato e con x_1, x_2, x_3,.... le basi dei rettangoli parziali, presi in ordine qualsiasi, e con y_1, y_2, y_3,.... le rispettive altezze. Nei nuovi simboli la (1) diventa

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots . \tag{1'}$$

Ciò posto, sia

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1(x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots) = 0 \\ X_2(x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{2}$$

il sistema di tutte le relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, indipendenti, che passano fra i numeri $x_0, x_1, x_2,\ldots$. Dimostreremo che *ogni sistema di valori* $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2,\ldots$, *soddisfacenti alle* (2), *soddisfa anche alla*

$$\bar{x}_0 y_0 = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots,$$

o in altre parole che *la* (1'), considerate le y come costanti, *è una conseguenza del sistema* (2).

Supponiamo dapprima che la soluzione $\bar{x}_i$ sia abbastanza

vicina alla x_i, perchè anche i numeri $\bar{x}_i$ siano positivi. Allora per dimostrarne l'asserto, basterà far vedere che i rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$, posti l'uno accanto all'altro nella stessa disposizione degli (x_i, y_i), ricoprono senza lacune e una volta sola il rettangolo di base $\bar{x}_0$ e altezza y_0.

Perciò riferiamo la nostra figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, prendendo per semplicità come asse x la retta della base x_0 del rettangolo (x_0, y_0) e come asse y la retta di uno dei due lati ad essa perpendicolari; e indichiamo con x_i', x_i'' le ascisse degli estremi della base x_i del rettangolo (x_i, y_i). Avremo

$$x_i'' = x_i' + x_i,$$

e, siccome i rettangoli parziali sono a due a due contigui, per ogni rettangolo (x_i, y_i) esisterà almeno un altro rettangolo (x_j, y_j) tale che

$$x_j' = x_i'',$$

onde risulta che le ascisse x_i', x_i'' si potranno esprimere ciascuna come somma di alcuni dei numeri $x_1, x_2, x_3,\ldots$; anzi in generale accadrà che una medesima x_i' o x_i'' ammetterà più espressioni (formalmente diverse, ma numericamente identiche) per mezzo delle x_i, e importa notare che ciascuna delle identità fra codeste diverse espressioni di una medesima x_i' o x_i'' è una relazione lineare omogenea a coefficenti interi fra gli x_i ed è quindi contenuta nel sistema (2).

Ciò premesso, riprendiamo i numeri $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2,\ldots$ e indichiamo con $\bar{x}_i'$, $\bar{x}_i''$ i numeri che si ottengono da essi come gli x_i', x_i'' si esprimono per mezzo degli $x_0, x_1, x_2,\ldots$ e notiamo che la eventuale molteplicità di espressioni formali di un medesimo x_i' o x_i'' non conduce a valori diversi per un medesimo $\bar{x}_i'$ o $\bar{x}_i''$, in quanto che $\bar{x}_0, \bar{x}_1,\ldots$ soddisfanno al sistema (2), dal quale discende in particolare l'identità numerica di codeste varie espressioni. Similmente, tenendo conto del sistema (2), si ritrova che sarà

$$\bar{x}_i'' = \bar{x}_i' + \bar{x}_i.$$

Ora, passando a confrontare i rettangoli (x_i, y_i) coi corrispondenti rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$, vediamo anzitutto che essi sono compresi fra le medesime parallele all'asse della x. Ma si vede ancora subito che se due rettangoli (x_i, y_i), (x_j, y_j) sono contigui, o, più in generale, hanno due vertici sopra una

stessa parallela all'asse delle y, lo stesso accade dei corrispondenti rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$, $(\bar{x}_j, y_j)$, cosicchè resta verificato che i rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$ ricoprono completamente il rettangolo $(\bar{x}_0, y_0)$; se, infatti, è per esempio

$$x_i' = x_j'$$

con

$$x_i' = x_{h_1} + x_{h_2} + \ldots, \quad x_j' = x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots$$

per modo che il sistema (2) contenga la

$$x_{h_1} + x_{h_2} + \ldots = x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots,$$

avremo di conseguenza

$$\bar{x}_i' = \bar{x}_{h_1} + \bar{x}_{h_2} + \ldots, \quad \bar{x}_j' = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{k_2} + \ldots$$

e, siccome le $\bar{x}$ soddisfano alle (2) e quindi alla

$$\bar{x}_{h_1} + \bar{x}_{h_2} + \ldots = \bar{x}_{k_1} + \bar{x}_{k_2} + \ldots,$$

ne risulterà

$$\bar{x}_i' = \bar{x}_j'.$$

Ed è facile convincersi in modo analogo che se è, per esempio, $x_i' > x_m'$ è pure $\bar{x}_i' > \bar{x}_m'$, di guisa che non può accadere che due rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$ abbiano punti interni comuni.

Si conclude, dunque, che veramente i rettangoli $(\bar{x}_i, y_i)$ ricoprono per intero e una volta sola il rettangolo $(\bar{x}_0, y_0)$, o in altre parole il sistema di valori $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ soddisfa alla (1'). E l'asserzione nostra si può riguardare dimostrata in tutta la sua generalità, in quanto, data la natura analitica delle (2), è lecito lasciar cadere l'ipotesi relativa al segno degli $\bar{x}_i$ [1].

c) Compiuta questa disgressione sulle decomposizioni

[1] Il DEHN ha fatto uno studio sistematico delle decomposizioni di un rettangolo in rettangoli (Math. Annalen, t. LVII, 1903) ottenendo risultati assai degni di nota: il risultato più comprensivo che egli ottiene è il seguente: « Dati ∞^1 rettangoli non è possibile cogli elementi di codesta classe di rettangoli comporre tutti gli ∞^2 rettangoli del piano ». Sebbene a malincuore, siamo costretti dal piano di questo lavoro a non trattenerci di più su codeste interessanti ricerche del DEHN.

dei rettangoli in rettangoli, torniamo al poligono P, alla sua decomposizione in parti e alla (1). Se

$$(3) \qquad \begin{cases} S_1(s_1, s_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h) = 0 \\ S_2(s_1, s_2, \ldots, t_1, t_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

è il sistema delle relazioni lineari, omogenee, a coefficienti interi, indipendenti che passano fra i numeri s_l, t_i, h_j, h, avremo, per quanto si è visto dianzi, che ogni sistema di numeri soddisfacenti alle (3) soddisferà anche alla (1). Ora fra le soluzioni del sistema (3) a coefficienti interi ve n'ha certamente di razionali; esistono dunque sistemi di numeri interi $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}$, tali che sussista la relazione

$$\Sigma \bar{t}_i \tau_i + \Sigma \bar{s}_l (2\pi - \sigma_l) + \pi \Sigma \bar{h}_m = 2\pi \bar{h},$$

ossia, indicando con k un numero intero,

$$(4) \qquad \Sigma \bar{t}_i \tau_i = \Sigma \bar{s}_l \sigma_l + k\pi.$$

Stabilita l'esistenza di codesta relazione fondamentale, consideriamo accanto al poliedro P un poliedro P' ad esso equivalente, cioè decomponibile nelle medesime parti poliedriche $P_1, P_2, \ldots$, di spigoli t_i e di diedri τ_i; e, usando per gli elementi di P' gli stessi simboli per P, con l'aggiunta di un accento, consideriamo il sistema, analogo al sistema (3),

$$(3') \qquad \begin{cases} S_1'(s_1', s_2', \ldots, t_1, t_2, \ldots, h_1', h_2', \ldots, h') = 0 \\ S_2'(s_1', s_2', \ldots, t_1, t_2, \ldots, h_1', h_2', \ldots, h') = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

delle relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, indipendenti, che passano fra i t_i, s_l', h_m', h'.

Ogni soluzione del sistema (3') sarà tale che

$$\Sigma t_i \tau_i + \Sigma s_l' (2\pi - \sigma_l') + \pi \Sigma h_m' = 2h'\pi.$$

Ora fra le soluzioni del sistema (3') ve ne sono certamente di razionali intere ed è anzi facile vedere che ve ne ha una almeno di cui fanno parte i valori $\bar{t}_i$, determinati pocanzi in base al sistema (3). Se invero il sistema (3'), dopo la sostituzione dei numeri interi $\bar{t}_i$, diventasse incompatibile,

vorrebbe dire che eliminando fra le (3′) le s_l', $h_{m'}$, h' si ottengono fra i t_i relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, non soddisfatte dai $\bar{t}_i$, mentre questi numeri, soddisfacendo al sistema (3), debbono per ipotesi soddisfare a *tutte* le relazioni lineari omogenee a coefficienti razionali che valgono per i t_i.

Esistono dunque dei numeri interi $\bar{s}_l'$, $\bar{h}_{m'}$, $\bar{h}'$, tali che sussista la relazione

$$\Sigma \bar{t}_i \tau_i + \Sigma \bar{s}_l'(2\pi - \sigma_l) + \pi \Sigma \bar{h}_{m'} = 2\bar{h}'\pi,$$

ossia, indicando con k' un numero intero,

$$\Sigma \bar{t}_i \tau_i = \Sigma \bar{s}_l' \sigma_l' + k'\pi; \tag{4'}$$

e dal confronto di questa e della (4) deduciamo che fra i diedri σ_l, σ_l' dei due poliedri deve valere la equazione a coefficienti interi

$$\Sigma \bar{s}_l \sigma_l \equiv \Sigma \bar{s}_l' \sigma_l' \quad [\text{mod. } \pi]. \tag{5}$$

Ora è facile caratterizzare meglio i coefficienti interi $\bar{s}_l$, $\bar{s}_l'$ della (5). Consideriamo perciò il sistema [(3)(3′)], costituito dall'insieme delle (3) e delle (3′). Esso contiene per la definizione dei sistemi (3) e (3′) tutte le relazioni lineari omogenee a coefficienti razionali che passano fra gli s_l, e le analoghe relazioni che legano gli s_l'. Ma di più si vede subito che è contenuta nel sistema [(3) 3′)] anche ogni relazione lineare omogenea a coefficienti interi che passi fra gli s_l e gli s_l'. Invero ogni s_l è esprimibile (eventualmente in più modi) come somma di certi t_i e il sistema (3) contiene siffatte uguaglianze; del pari ogni s_l' è pur esso somma di certi t_i e tali uguaglianze compaiono nel sistema (3′). Di qui risulta che una relazione, del solito tipo, fra gli s_l, s_l' implica una analoga relazione fra i t_i, la quale certamente compare tanto in (3) che in (3′); e da essa, reciprocamente, in base alle espressioni, or ora ricordate, degli s_l, s_l' per mezzo dei t_i, contenute in (3), (3′), si potrà dedurre la relazione fra gli s_l, s_l'.

Consideriamo allora il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} T_1(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots) = 0 \\ T_2(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{6}$$

di tutte le relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, indipendenti, che passano fra gli s_l, s_l'. Esso, per quanto si è visto dianzi, è una conseguenza del sistema [(3)(3′)], onde risulta che i coefficienti della (5) soddisfanno al sistema (6).

Viceversa, ogni soluzione intera del sistema (6) fa parte di una soluzione intera di [(3)(3′)] e dà perciò luogo ad una relazione del tipo della (5). Invero, perchè ciò non fosse bisognerebbe che eliminando le h_m, $h(h_{m'}, h)$ fra le (3) (fra le (3′)) si ottenesse una relazione lineare omogenea a coefficienti razionali fra le $s_l(s_l')$, la quale non fosse soddisfatta dagli $\bar{s}_l(\bar{s}_l')$, il che contraddice all'ipotesi che gli $\bar{s}_l(\bar{s}_l')$ rendano soddisfatto il sistema (3) (o (3′)), il quale contiene *tutte* le relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, fra gli $s_l(s_l')$.

Concludendo, possiamo enunciare il seguente

TEOREMA. *Siano P e P' due poliedri di cui indichiamo, rispettivamente con s_1, s_2,.... ed s_1', s_2',.... le lunghezze degli spigoli e con σ_1, σ_2,...., e σ_1', σ_2',... le misure delle sezioni normali dei diedri; e sia*

$$\left\{\begin{array}{l} T_1(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots) = 0 \\ T_2(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{6}$$

il sistema delle relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, che passano fra gli s_1, s_2,..., s_1', s_2',.... Ciò posto, condizione necessaria, perchè i due poliedri dati siano equivalenti si è che fra i numeri σ_1, σ_2,...., σ_1', σ_2',.... passi una relazione della forma

$$\bar{s}_1\sigma_1 + \bar{s}_2\sigma_2 + \ldots \equiv \bar{s}_1'\sigma_1' + \bar{s}_2'\sigma_2' + \ldots \quad [\text{mod. } \pi] \tag{5}$$

dove $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$,...., $\bar{s}_1'$, $\bar{s}_2'$..... sono numeri interi soddisfacenti alle (6).

Da questo teorema si può subito dedurre un notevole corollario. Supponiamo che i poliedri P, P' siano, anzichè equivalenti, differenze di poliedri equivalenti; esistano cioè due poliedri equivalenti Q, Q' e altri due poliedri pure equivalenti R, R', tali che P sia la differenza di Q ed R, e P' sia la differenza di Q' ed R'. Indicando con r_1, r_2,.... ed r_1' r_2',.... le lunghezze degli spigoli di R, R' rispettivamente e con P_1, P_2,...., e P_1', P_2',.... le misure delle sezioni normali dei diedri corrispondenti, consideriamo il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} U_1(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots, r_1, r_2, \ldots, r_1', r_2', \ldots) = 0 \\ U_2(s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots, r_1, r_2, \ldots, r_1', r_2', \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{7}$$

di tutte le relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali, indipendenti, che passano fra gli s_l, s'_l, r_l, r_l'. Per il teorema precedente ogni soluzione in numeri interi $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$,...., $\bar{s}_1'$, $\bar{s}_2'$,...., $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$,...., $\bar{r}_1'$, $\bar{r}_2'$,.... del sistema (7) sarà tale che sussista la

$$\Sigma \bar{s}_l \sigma_l + \Sigma \bar{r}_m \rho_m \equiv \Sigma \bar{s}_l' \sigma_l + \Sigma \bar{r}_{m'} \rho_{m'} \quad [\text{mod. } \pi], \tag{8}$$

e, poichè il sistema (7) comprende in particolare tutte le relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali fra gli r_m, $r_{m'}$, sarà simultaneamente

$$\Sigma \bar{r}_m \rho_m \equiv \Sigma \bar{r}_{m'} \rho_{m'} \quad [\text{mod. } \pi], \tag{9}$$

e di qui e dalla (9) ricaviamo che è ancora

$$\Sigma \bar{s}_l \sigma_l \equiv \Sigma \bar{s}_l' \sigma_l \quad [\text{mod. } \pi].$$

E per mezzo di considerazioni, che tralasciamo perchè del tutto simili a quelle ripetutamente sviluppate dianzi, si dimostra che i numeri interi $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$,...., $\bar{s}_1'$, $\bar{s}_2'$,.... soddisfano anche qui al sistema (6) e, reciprocamente, ogni soluzione razionale del sistema (6) fa parte di una soluzione razionale del sistema (7). Possiamo quindi enunciare il seguente

COROLLARIO. *La condizione enunciata dal teorema precedente è pur necessaria, affinchè i due poligoni P, P' siano differenze di poliedri equivalenti.*

Ora a dimostrare l'esistenza di poliedri di ugual volume ma non equivalenti, nè ottenibili come differenze di poliedri equivalenti, basterà *provare* l'esistenza di coppie di poliedri tali che fra le misure delle sezioni normali dei rispettivi diedri sia impossibile una relazione del tipo (5), tenuto conto delle condizioni enunciate dal teorema precedente.

d) Consideriamo dapprima un cubo e un tetraedro regolare aventi egual volume. Poichè il volume del tetraedro regolare di lato s è dato da $\frac{s^3}{6\sqrt{2}}$, si avrà che gli spigoli s, s' del tetraedro e del cubo hanno il rapporto irrazionale $\sqrt[6]{72}$, onde risulta, in virtù del teorema fondamentale, che basterà verificare se sussista fra i diedri del tetraedro e del cubo una relazione del tipo (5) a coefficienti interi *quali si vogliano.*

Ora il diedro σ del tetraedro regolare, per cui $\cos\sigma = \frac{1}{3}$, $\operatorname{sen}\sigma = \frac{\sqrt{8}}{3}$, è incommensurabile con π [1]; onde si conclude che la relazione (5) non può sussistere e quindi *non è possibile dividere in parti a due a due congruenti un tetraedro regolare ed un cubo aventi ugual volume.*

Più in generale il DEHN dimostra [2] che *non è possibile dividere in parti a due a due congruenti un insieme di tetraedri regolari e un insieme di prismi, o un insieme di tetraedri rettangoli isosceli e un insieme di prismi, o un insieme di tetraedri regolari e un insieme di tetraedri rettangoli isosceli.*

e) Noi qui da ultimo faremo vedere, seguendo il DEHN [3] che *non è possibile decomporre un tetraedro regolare in parti poliedriche, che disposte le une accanto alle altre diano due tetraedri regolari.*

Se, invero, un tetraedro regolare di spigolo s ha un volume uguale alla somma dei tetraedri regolari di spigoli s_1 ed s_2, avremo, poichè i volumi dei tre tetraedri sono $\frac{s^3}{6\sqrt{2}}$, $\frac{s_1^3}{6\sqrt{2}}$, $\frac{s_2^3}{6\sqrt{2}}$ rispettivamente,

$$s^3 = s_1^3 + s_2^3. \tag{10}$$

Ora, si consideri il sistema (S) delle relazioni lineari, omogenee, a coefficienti razionali che passano fra s, s_1, s_2. Esso non può contenere più di una relazione, giacchè in caso contrario i rapporti $s : s_1 : s_2$ sarebbero razionali e si avrebbe una soluzione in numeri interi della (10), il che è notoriamente impossibile [4]. Esaminiamo dapprima il caso in cui il sistema (S) contiene una relazione e questa sia la

$$as = a_1 s_1 + a_2 s_2, \tag{S}$$

dove uno al più dei coefficienti può esser nullo senza che sian nulli tutti e tre. Se essi sono tutti e tre diversi da zero, si può soddisfare alla (S) sia prendendo $\bar{s} = a_1$, $\bar{s}_1 = a$, $\bar{s}_2 = 0$,

[1] Per una dimostrazione diretta ed elementarissima di questo fatto vedi la nota citata dello SFORZA.

[2] Gött. Nachr. 1900, l. c.

[3] Math. Ann. Bd. LV. l. c.

[4] Cfr. p. es. H. WEBER, *Elemente der Algebra und Analysis*, 1903.

sia prendendo $\bar{s} = a_2$, $\bar{s}_1 = 0$, $\bar{s}_2 = a$, onde, per il teorema fondamentale, dovrà essere, ove σ rappresenti ancora il diedro del tetraedro regolare,

$$\left.\begin{aligned}(a_1 - a)\sigma &\equiv 0\\ (a_2 - a)\sigma &\equiv 0\end{aligned}\right\} \qquad [\text{mod. } \pi].$$

Poichè σ è incommensurabile con π discende di qui $a = a_1 = a_2$, onde, per la (S) si dovrebbe avere

$$s = s_1 + s_2,$$

il che contraddice alla (10).

Se poi uno dei coefficienti, per esempio a_1, è nullo (e lo stesso vale se sono nulli tutti e tre) si può soddisfare alla (S) prendendo $s = s_2 = 0$ ed $s_1 = 1$, e noi sappiamo già che non è

$$\sigma \equiv 0 \qquad [\text{mod. } \pi],$$

onde veramente rimane dimostrato che il tetraedro regolare di spigolo s non è equivalente alla somma dei due tetraedri regolari di spigoli s_1, s_2, sebbene i volumi rispettivi siano uguali.

f) Gli esempi suindicati mettono in luce come dall'ipotesi che due poliedri abbiano solidi uguali non discenda affatto che sia per essi soddisfatta l'equazione fondamentale del DEHN, la quale è invece condizione necessaria affinchè i due poliedri considerati siano divisibili in parti poliedriche congruenti. È dunque veramente provato che pei poliedri (a differenza di ciò che accade pei poligoni) la uguaglianza di grandezza (ossia di volume) è una relazione più generale della equivalenza o decomponibilità in parti sovrapponibili.

Considerati allora tutti i poliedri che hanno volume eguale ad un poliedro determinato, per esempio al cubo-unità, noi potremo classificarli in tante categorie o *tipi*, assegnando a tipi diversi due poliedri che non possano dividersi in parti sovrapponibili, e includendo in uno stesso tipo, insieme con un poliedro determinato, tutti i poliedri ad esso equivalenti. Il DEHN ha fatto notare [1] come discenda dalle sue precedenti

[1] *Zwei Anvendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie.* Math. Annalen Bd. LIL, 1904.

conclusioni che l'insieme di codesti tipi non è *numerabile*, vale a dire non si può mettere in corrispondenza biunivoca coll'insieme dei numeri interi, o ciò che è lo stesso, dei punti di ascissa razionale compresi fra l'origine e il punto-unità.

Ma questa osservazione, per quanto interessante, aggiunge poco alle scarse notizie che si possiedono sull'argomento. Si sa che a ciascun tipo appartiene, insieme con un poliedro determinato, anche il suo simmetrico (rispetto ad un punto), giacchè due poliedri simmetrici si possono sempre decomporre in parti sovrapponibili [1]. Si sa inoltre dagli Elementi della Geometria che tutti i prismi (di volume 1) appartengono ad un medesimo tipo, poichè due prismi, tali che nessuno dei due abbia volume maggiore dell'altro, sono equivalenti, cioè divisibili in parti congruenti [2]. Ma già in codesto tipo, cui appartengono tutti i prismi, compaiono anche altri poliedri, giacchè HILL [3] ha osservato la equivalenza (decomponibilità in parti congruenti) a prismi dei tetraedri di una certa determinata categoria, i quali, per un prefissato volume, p. es. pel volume 1, dipendono ancora dal valore *arbitrario* di un angolo. Come ha osservato il VOGT [4] sono questi i tetraedri che si ottengono, in numero di sei, da ciascun romboedro (parallelepipedo a spigoli uguali) conducendo per la diagonale maggiore i piani che proiettano i sei spigoli incidenti a codesta diagonale. Così JUEL [5] ha notato l'equivalenza ad un cubo

[1] Questo fatto che si connette a proprietà notissime dei poligoni sferici, fu notato, che io sappia, la prima volta del GERLING, nella risposta ad una delle lettere del GAUSS, citate dapprincipio (Gauss Werke, Bd. 8, pag. 242).

[2] Cfr. p. es. ENRIQUES-AMALDI, *Elementi di Geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori, 4ª ediz., 1910, pag. 522.

[3] *Determination of the volumes of certain Species of Tetrahedra.* Proceedings of the London.

[4] Vedi il citato *Programma* di BRESLAU, il quale contiene altre considerazioni interessanti sulle decomposizioni in parti dei poliedri, di cui qui non possiamo intrattenerci.

[5] *Ueber das Volume der Pyramide:* Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung, Bd. 15, 1904. Cfr. la nota dello stesso autore: *Egalité par addition de quelque polyèdres.* Berichte der K. Gesell. d. Wiss, zu Kopenhagen, 1903. — Nella prima di queste note è accennato che a Göttingen, per iniziativa di F. SCHUR, furono costruiti modelli di decomposizione di un tetraedro di HILL in parti, con le quali si costruisce un prisma triangolare avente la stessa base, l'altezza uguale ad un terzo di quella e gli spigoli laterali paralleli ad uno spigolo del tetraedro.

di ciascuna delle sei piramidi uguali che hanno per basi le faccie di un cubo e per vertice comune il suo centro (1).

All'infuori dei tetraedri di HILL e della piramide di JUEL non si conoscono altri poliedri piramidali equivalenti a prismi; ed è certamente desiderabile che si possa raccogliere in quest'ordine di idee, per opera dei cultori della Geometria elementare, un materiale più ricco di risultati particolari. Forse così si potrà avere qualche indizio delle vie da scegliere per abbordare il problema che tuttora resta insoluto e sembra molto arduo, cioè il problema di determinare una condizione *sufficiente,* affinchè due poliedri siano decomponibili in parti uguali.

§ 12. **Dimostrazione del principio fondamentale della teoria delle grandezze poliedriche.** — Nel paragrafo precedente è stato messo in luce come veramente pei poliedri la decomponibilità in parti poliedriche uguali caratterizzi una relazione assai meno comprensiva della uguaglianza di volume, quale è insita nella nostra concezione intuitiva di grandezze solide. Dimostrata così la necessità di sostituire alla definizione di equivalenza le definizioni più generali di uguaglianza di volume, cui abbiamo accennato al § 9, passiamo a mostrare come sulla base di una qualsiasi di esse si possa provare che *i solidi poliedrici costituiscono una classe di grandezze,* e quindi, in particolare, vale per essi il solito principio, che noi abbiamo più volte designato col nome del DE ZOLT.

La natura delle dimostrazioni che noi abbiamo accennato o svolto nei §§ 2, 3 pel caso dei poligoni lasciano senz'altro presumere la possibilità di fornire sullo stesso schema la dimostrazione pei poliedri.

Una tal dimostrazione fu effettivamente sviluppata dal VERONESE (2) e dal GERARD (3), ciascuno dei quali estese allo spazio le considerazioni e i metodi rispettivamente usati nel piano.

Un'altra dimostrazione fu, più di recente, pubblicata da

(1) Il VOGT, nel citato *Programma*, osserva che la ottava parte della piramide di JUEL è un particolare tetraedro di HILL.

(2) L. c.

(3) Cfr. il II volume già citato *Cours de Géométrie élémentaire* di B. NIEWENSLOWSKI e L. GÉRAD.

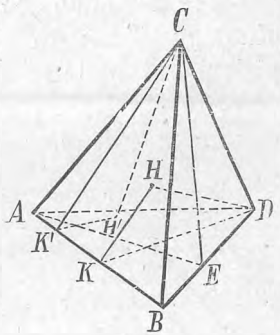
S. O. SCHATUNOVSKY (1), che già anni addietro ne aveva dato un cenno in periodici russi. Egli presuppone la teoria della misura dei segmenti e dei poligoni, onde la sua dimostrazione va per questo lato ravvicinata a quella data nel piano dal RAUSENBERGER, il quale aveva pure indicato la possibile estensione allo spazio (l. c.). Pare per altro che allo SCHATUNOVSKY la nota del RAUSENBERGER e le dimostrazioni del VERONESE e del GÉRARD fossero rimaste ignote.

Noi qui, per ottenere una certa brevità, presupporremo la teoria della misura e dimostreremo il principio fondamentale seguendo, in parte, il metodo di RAUSENBERGER-SCHATUNOVSKY (2), e in parte attenendoci al procedimento del VERONESE.

Diremo per brevità che una divisione di un tetraedro è ottenuta *con successive divisioni per piani trasversali* quando si giunge ad essa conducendo soltanto piani passanti per gli spigoli e limitati dalle facce opposte del tetraedro primitivo o di quelli successivamente ottenuti.

Ciò premesso dimostriamo i due seguenti lemmi:

LEMMA I. *Ad ogni tetraedro si può* associare *un numero tale che, diviso il tetraedro in tetraedri parziali con successive divisioni per piani trasversali, a questi tetraedri parziali corrispondono numeri, che hanno per somma il numero associato al tetraedro primitivo.*



Sia dato un tetraedro $ABCD$ e consideriamone le due faccie ABC e ABD e le rispettive altezze DH e CH'. Dico che l'area del triangolo ABC sta all'area del triangolo ABD, come la lunghezza (CH') di CH' sta alla lunghezza (DH) di DH. Infatti, condotti da H, H' i segmenti HK, $H'K'$ perpendicolari alla AB, e congiunti C con K', D con K, i triangoli rettangoli $CK'H'$, DKH, avendo gli angoli $CK'H$, DKH eguali, sono simili, onde risulta

$$(DK) : (CK') :: (DH) : (CH').$$

(1) *Ueber den Rauminhalt der Polyeder.* Math. Ann. Bd. LVII. Heft 4, (1903).

(2) Questa dimostrazione fu veramente pubblicata tal quale nella prima edizione italiana di questo articolo (1900).

Se moltiplichiamo gli antedenti di questa proporzione pei numero $\frac{1}{3}(AB)$ otteniamo

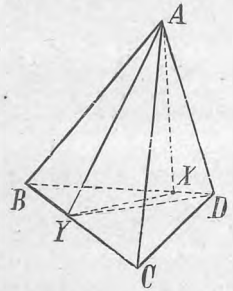
$$\frac{1}{3}(AB)(DK) : \frac{1}{3}(AB)(CK') :: (DH) : (CH') \text{ c. v. d.}$$

Se allora definiamo come numero associato ad un tetraedro il prodotto dell'area di una sua faccia per la terza parte della corrispondente altezza, abbiamo che questo numero non dipende dalla faccia del tetraedro scelta come base. Di più, immaginiamo di avere diviso il dato tetraedro in due per mezzo di un piano ACE passante per lo spigolo AC. Allora, poichè per una parte i due tetraedri così ottenuti $AEBC$ e $ADEC$ hanno comune l'altezza di C e, per l'altra, l'area del triangolo ABD è eguale alla somma delle aree di ABE e di AED, si ha, per la proprietà distributiva della moltiplicazione dei numeri, che il numero associato ad $ABCD$ è eguale alla somma dei numeri associati ad $AEBC$ e ad $ADEC$. Applicando ripetutamente il risultato ottenuto, si dimostra il *Lemma I.*

Ora dimostriamo, seguendo il VERONESE, il

LEMMA II. *Ogni divisione di un tetraedro in parti tetraedriche, od una sua suddivisione, si può eseguire con successive divisioni per piani trasversali.*

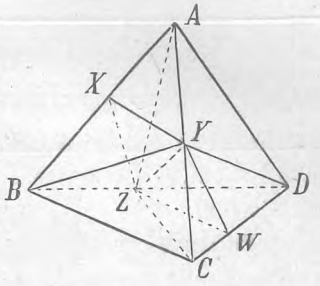
Premettiamo una osservazione. Diviso un teatredro in (due) parti con un piano, questa divisione, o una sua suddivisione, si ottiene con *piani trasversali.* Infatti, escluso il caso, in cui già il piano stesso passa per uno spigolo di $ABCD$, restano a considerare tre casi:



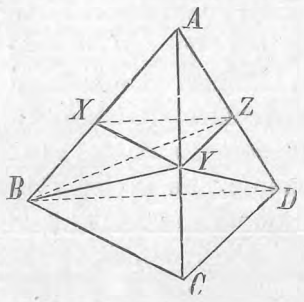
I. Il piano passa per un vertice, p. es. A, e divide il tetraedro in una piramide a base quadrilatera $DCYXA$, e in un tetraedro $XYBA$. Una suddivisione *per piani trasversali* della data divisione si ottiene conducendo successivamente i piani ADY e AYX.

II. Il piano taglia due coppie di spigoli opposti, p. es. AB e DC; AC e BD. Allora il tetraedro resta diviso nei due poliedri $BCXYWZ$ e $ADXYWZ$. Conduciamo i due piani BDY e ACZ. Così il poliedro $BCXYWZ$ resta diviso nei tre tetraedri

$BXYZ$, $BCYZ$, $CZYW$; e similmente il poliedro $ADXYWZ$ vien diviso nei tre tetraedri $DZYW$, $AZYD$, $AXYZ$. Ora, che questa sia una suddivisione *per piani trasversali* della divisione primitiva si vede costruendo anzitutto il piano BDY e poi nel tetraedro $CBDY$ i piani CYZ e ZYW, nel tetraedro $ABDY$ i piani AYZ, ZYZ.



III. Il piano interseca i tre spigoli concorrenti in un vertice, p. es. in A: esso allora divide $ABCD$ nel tetraedro $AXYZ$ e nel solido $XYZBCD$, il quale alla sua volta si divide in tetraedri per mezzo di piani BYZ e BDY. Basta costruire BDY, BYZ, YZX per vedere come la suddivisione così ottenuta si eseguisca *con piani trasversali.*



Premesso questo, consideriamo una divisione di un tetraedro $ABCD$ in tetraedri α, β, γ...., la quale supporremo non si possa ottenere con successive divisioni per piani trasversali.

Fissata ad arbitrio una faccia di uno dei tetraedri parziali, p. es. di α, prolunghiamola fino ad incontrare il contorno di $ABCD$. Otterremo in questo una certa divisione in parti: ma noi sappiamo, con le costruzioni indicate sopra, assegnarne una suddivisione, *per piani trasversali,* in un certo numero di tetraedri T_1. Scelta un'altra faccia di α, prolunghiamola fino ad incontrare il contorno di quel tetraedro T_1, o di ciascuno di quei tetraedri T_1, in cui esso è contenuto. Questo o questi tetraedri T_1 resteranno divisi in parti: ma noi potremo suddividere queste parti con piani trasversali. Così continuando per ciascuna faccia di α e di ogni altro tetraedro parziale β, γ,.... arriveremo a ottenere, *dopo un numero* evidentemente *finito* di costruzioni, una suddivisione *per piani traversali* della divisione primitiva. In questo modo il tetraedro α della divisione primitiva resterà diviso *per piani trasversali* in un certo numero di tetraedri α_1, α_2.... α_{n_1}, il tetraedro β in un certo numero di tetraedri β_1, β_2,.... β_{n_2}, ecci

Dimostrato così il *Lemma* II, osserviamo che, pel *Lemma* I,

il numero associato ad *ABCD* è eguale alla somma dei numeri associati ai tetraedri

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n_1}, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n_2}, \ldots$$

Ma la somma dei numeri associati ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n_1}$ è eguale al numero associato ad α: la somma dei numeri associati a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n_2}$ è eguale al numero associato a β, ecc. Dunque sussiste il

TEOREMA FONDAMENTALE. *Se un tetraedro è in qualsivoglia modo diviso in parti tetraedriche, il numero associato al tetraedro primitivo è eguale alla somma dei numeri associati ai tetraedri parziali.*

Se P è un poliedro e si divide in qualsivoglia modo in parti tetraedriche si dimostra facilmente (cfr. § 4) che la somma, sempre maggiore di zero, dei numeri associati ai tetraedri parziali non dipende dalla particolare divisione in parti considerata. Scelto codesto numero come *numero associato* al poliedro P, si vede immediatamente che diviso P in parti poliedriche $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k$, il numero associato a P è eguale alla somma dei numeri associati a $P_1, P_2, P_3 \ldots P_k$.

Resta così stabilita fra poliedri e numeri (positivi, escluso lo zero) una corrispondenza tale che a poliedri aventi volumi uguali corrisponde il medesimo numero e reciprocamente; e alla somma di più poliedri corrisponde la somma dei numeri corrispondenti alle singole parti. Si conclude di qui senz'altro che *i solidi poliedrici costituiscono una classe di grandezze.*

§ 13. **I solidi in generale.** — Nella Stereometria elementare, accanto ai poliedri, entrano in considerazione i *cilindri*, i *coni* e la *sfera*.

Per essi e per le superficie rispettive valgono osservazioni analoghe a quelle da noi esposte (§ 5) pel *cerchio* e la *circonferenza*. Noi qui ci restringeremo ad osservare che, circa la definizione di uguaglianza di solido di siffatte figure si può sostanzialmente ripetere ciò che al § 9 dicemmo intorno al confronto fra piramidi, e aggiungeremo che si dimostra che i *solidi a contorno qualsivoglia* formano un insieme di *grandezze*, ricorrendo ai teoremi fondamentali del Calcolo integrale [1].

(1) KILLING « *Einführung...* » pag. 33 e seguenti.

E qui da ultimo dobbiamo accennare ad alcune proposte, che mirerebbero a dare alla teoria delle grandezze un assetto alquanto diverso da quello tradizionale, prendendo, in sostanza, come punto di partenza il *principio di* ARCHIMEDE, esteso alle superficie e ai solidi.

Il FRATTINI [1] propose precisamente che a base della teoria delle grandezze si metta la seguente definizione:

« *Si dice che una figura è finita, se non è possibile toglierne una prima parte, indi una seconda, che sia congruente alla prima, poi una terza, anch'essa congruente alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile, si dirà che la figura è infinita* ».

Il GIUDICE [2] riprendendo l'idea del FRATTINI osservò che in base a codesta definizione il principio del DE ZOLT per le grandezze finite si dimostra immediatamente.

Ma con ciò naturalmente la questione non è risoluta ma semplicemente spostata, in quanto rimane o da dimostrare o da postulare che *i poligoni, il cerchio, i poliedri, i coni, i cilindri, le sfere sono grandezze finite.*

Noi possiamo osservare che, ammesso per i segmenti il *postulato* di ARCHIMEDE (supposto, cioè, che i segmenti formino un insieme di grandezze *finite*), le stesse considerazioni dei §§ 3, 6, 11 dimostrano che i poligoni, le superficie qualsiansi, i poliedri, e i solidi in generale sono *grandezze finite*, in quanto la corrispondenza che si stabilisce tra le figure di codeste varie classi e i segmenti (o numeri) permette di *trasportare* a quelle l'intera teoria dell'*eguaglianza* dei segmenti e quindi il postulato d'ARCHIMEDE.

D'altro canto il GIUDICE notò che non occorre postulare il principio suindicato in tutta la sua generalità; ma basta ammettere che *è finita ogni sfera* [3].

§ 14. **Osservazioni didattiche.** — Compiuto oramai l'esame delle varie ricerche cui dette luogo la critica della teoria della

(1) *Intorno al postulato dell'equivalenza.* Period. di Mat., 1895, p. 153.

(2) *Bollett. di Mathesis.*, 1896-97; n.° 1.

(3) Intorno alla proposta di FRATTINI-GIUDICE vedi SFORZA *Bollett. di Mathesis*, 1896-97, n. 2; CIAMBERLINI, *Bollett. di Mathesis*, 1896-97, n. 3; SBRANA, *ibidem;* BETTAZZI, *ibidem;* LAZZERI, Per. di Matematica, 1896-97, pag. 35; CERTO, *Bollett. di Mathesis*, 1897-98, n. 1; BIASI, Period. di Mat. 1903.

equivalenza, ci sia permesso di riassumere il nostro articolo, esprimendo quali conclusioni si possano, a parer nostro, formulare per la pratica dell'insegnamento.

Abbiamo visto che è possibile sviluppare tutta la teoria elementare delle grandezze poligonali e poliedriche senza introdurre nessun nuovo postulato oltre quelli dell'*appartenenza,* dell'*ordinamento* e della *congruenza.* E si può anche notare che gli sviluppi a ciò necessari non sono più elevati, nè più laboriosi di altre teorie, che, per unanime consenso, sono considerate come accessibili alla maggioranza degli alunni delle scuole medie.

Cionondimeno noi crediamo che un tale assetto della teoria non sia didatticamente raccomandabile. La concezione delle *superficie* e dei *volumi* quali *grandezze* è di una evidenza altrettanto spontanea, quanto ciascuna delle altre verità intuitive, che si sogliono assumere a postulati. E il vantaggio, che si otterrebbe di ridurne il numero è di una natura così raffinatamente critica, che esso sfuggirebbe alla quasi totalità dei giovani, i quali non comprenderebbero la necessità o l'opportunità di subordinare la propria incondizionata certezza a una deduzione logica, prolissa e faticosa quanto non desiderata, e sarebbero inevitabilmente côlti dal tedio per un insegnamento, nel quale non saprebbero vedere se non una inutile e tormentosa ricerca di artificiose difficoltà. E quand'anche l'insegnante volesse e potesse ripromettersi dalla sua scolaresca una maggiore docilità intellettuale, dovrebbe pur tener conto del fatto che egli è chiamato non già ad avvezzare i giovani a diffidar della propria intuizione, ma anzi a convincerli dell'importanza che essa ha nella ricerca di ogni verità e a educare in loro quell'armonia e quel ricambio fra l'intuire e il ragionare, che debbono presiedere ad ogni speculazione non soltanto matematica, ma scientifica in genere.

Messo da parte codesto assetto rigidamente critico della teoria delle grandezze geometriche, rimangono per la scuola, sostanzialmente, altri due metodi, che si riattaccano il primo alla trattazione di EUCLIDE, il secondo alle idee del DUHAMEL.

Abbiamo già riassunto brevemente l'assetto della teoria euclidea nel § 2, e quanto al punto di vista del DUHAMEL abbiam pure accennato come esso venga attuato nella trattazione del FAIFOFER (§ 3), la quale divenne rigorosa quando in essa fu esplicitamente introdotto il principio di DE ZOLT,

preso come postulato a reggere le dimostrazioni dei teoremi inversi.

Accettato codesto postulato sovrabbondante, per le ragioni didattiche dette di sopra, resta ancora da considerare l'assetto della teoria dal punto di vista della semplicità delle dimostrazioni. È innegabile (e sembra d'altronde nella natura delle cose) che la dimostrazione ingegnosa del teorema del gnomone, data dal FAIFOFER ricorrendo al criterio d'equivalenza per somma, riesce un po' artificiosa; e soprattutto laboriose appariscono le dimostrazioni relative alle costruzioni che ne derivano, in ispecie alla sezione aurea. Questi inconvenienti si possono rimuovere osservando:

1) Che l'ufficio del teorema del gnomone per quanto concerne la trasformazione di un poligono in un rettangolo di data altezza, può essere tenuto dal teorema sui triangoli di ugual base, riuscendosi così a compiere la trasformazione per somma di un triangolo in un altro di data altezza;

2) Che mercè la trasformazione suindicata, ed il postulato di DE ZOLT, si può facilmente e rigorosamente dimostrare (per assurdo) come « differenze di poligoni equivalenti sieno equivalenti » (1).

Pertanto la trasformazione di un rettangolo in un quadrato e la sezione aurea possono presentarsi come conseguenze di questo teorema, ridonando alla loro dimostrazione la semplicità e l'eleganza, che comporta l'applicazione del più esteso criterio di equivalenza.

L'assetto che così la teoria riceve è stato accolto, come un contemperamento delle esigenze critiche e didattiche, negli « Elementi di Geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori » di F. ENRIQUES e U. AMALDI a partire dalla 2ª edizione (1905). Per esso si volle soprattutto conservato alla scuola classica il vantaggio che il metodo del DUHAMEL presenta su quello di EUCLIDE (2), conformemente al principio che suggerisce di passare nell'introduzione dei concetti nuovi, dalle loro forme più semplici alle forme più

(1) È qui da ricordare che il postulato d'ARCHIMEDE viene qui utilizzato nella dimostrazione del primo teorema fondamentale sui parallelogrammi di ugual base ed altezza.

(2) A quest'ultimo (per ragione della sua maggiore facilità pratica) ci siamo attenuti nella riduzione dei citati « Elementi ».

complesse, procedendo per successive e graduali generalizzazioni.

Un'ultima osservazione ci sia permessa circa il modo di giungere alla quadratura delle superficie a contorno circolare e di svolgere la teoria delle grandezze poliedriche e solide in generale.

A questo proposito non vi può essere ambiguità di scelta per chi si sia attenuto fin da principio al punto di vista euclideo.

Se poi è stato adottato il metodo del DUHAMEL, resta senz'altro determinato il modo di trattare la teoria dei prismi, che va condotta parallelamente a quella delle superficie poligonali. Per quel che riguarda le figure a contorno circolare, i poliedri in generale e i solidi rotondi (cono, cilindro, sfera) noi crediamo importi soprattutto metter chiaramente in luce la maggior generalità, che per codeste figure ha l'*uguaglianza di superficie o di solido* rispetto alla *decomponibilità in parti congruenti,* alla quale ultima relazione converrà perciò limitare sistematicamente il nome di *equivalenza.*

E quanto al modo più facile di trattare la più generale relazione di uguaglianza di superficie o di solido, pensiamo convenga evitare il concetto di limite, ritornando agli antichi *metodi di esaustione* e partendo dalla seguente definizione fondamentale: « Due *superficie* o due *solidi* si diranno *uguali,* quando nessuno dei due sia maggiore dell'altro, o, in altre parole, quando nessuno sia equivalente ad una parte dell'altro ».

ARTICOLO SETTIMO

Sulla teoria delle proporzioni di GIOVANNI VAILATI †.

I. - LE PROPORZIONI SECONDO EUCLIDE.

§. 1. **Definizioni.** — La teoria delle proporzioni quale si trova esposta nei libri V e VI degli *Elementi* d'EUCLIDE prende le mosse dalle seguenti due definizioni:

1) Due grandezze A, B si dicono *stare nello stesso rapporto* di altre due C, D (ἐν τῷ αυτῳ λὸγῳ εἶναυ) quando, per qualunque coppia di numeri interi m, n per la quale si abbia:

$$mA \gtreqless nB,$$

si abbia pure rispettivamente:

$$mC \gtreqless nD$$

2) Due grandezze A, B si dicono *avere tra loro maggiore rapporto* (μείζονα λόγον ἔχειν) che altre due C, D, quando sia possibile determinare dei numeri interi m, n tali che si abbia:

$$mA > nB$$

senza che si abbia nello stesso tempo:

$$mC > nD.$$

Giova porre in confronto queste due definizioni con quella di proporzione tra numeri interi data da EUCLIDE stesso (Lib. VII, def. 20) e che consiste nel dire che quattro numeri sono in proporzione (ἀνά λογον) quando il primo e il terzo di essi si ottengano rispettivamente dal secondo e dal

quarto moltiplicandoli per uno stesso numero intero, o dividendoli per uno stesso numero intero, o facendo l'una cosa e l'altra (ὅταν ὁ πρώτος τοῦ δευτερον καὶ ὁ τρίτος τοῦ τεταρτου ἢ ἰδάκις πολλαπλάδιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦδιν).

Esse si contraddistinguono da questa anzitutto per la preoccupazione che EUCLIDE sembra aver avuta di evitare in esse ogni ricorso alla divisione in parti uguali delle grandezze di cui egli tratta.

Di tale preoccupazione è facile comprendere la causa quando si ponga mente al fatto che, tra le grandezze considerate dalla geometria, se ne presentano di quelle, come per esempio gli angoli, per le quali la divisione in parti uguali non può essere sempre effettuata col solo impiego della riga e del compasso, mentre è norma costantemente seguita da EUCLIDE quella di non prendere in considerazione alcuna figura o ente geometrico di cui egli non abbia prima assegnato un modo di costruzione ricorrendo al solo uso dei detti strumenti (1).

Tuttavia a questo inconveniente che si opponeva a che la definizione adottata da EUCLIDE pel caso dei numeri interi potesse venir estesa a ogni specie di grandezze considerate in geometria, si sarebbe potuto facilmente ovviare col solo introdurre in essa una lieve modificazione. Dire infatti che quattro numeri a, b, c, d (o quattro grandezze suscettibili di essere divise in parti uguali) costituiscono una proporzione quando esiste una coppia di numeri interi m, n tali che si abbia nello stesso tempo

$$a = \frac{n}{m} c, \quad b = \frac{n}{m} d,$$

non differisce che per la forma dal dire che i detti numeri, o le dette grandezze, sono in proporzione quando esista una coppia di numeri tale che si abbia nello stesso tempo:

$$ma = nc, \quad mb = nd.$$

Ma se ciò bastava a superare uno degli ostacoli che si opponevano alla costruzione di una teoria generale delle proporzioni valida per ogni specie di grandezze, un altro, e ben più importante, ne rimaneva, quello dipendente dal fatto che,

(1) Cfr. ZEUTHEN, *Histoires de Matématiques dans l'antiquité*. Ch. 10.

tra le grandezze considerate dalla geometria, ve ne sono di quelle tra loro « incommensurabili », tali cioè che nessun multiplo dell'una risulti uguale ad alcun multiplo dell'altra.

Il fatto che due grandezze, per esempio due segmenti a, b, fossero incommensurabili non impediva che su essi e su un terzo segmento qualunque c potessero essere effettuate quelle stesse operazioni geometriche che, nel caso che essi fossero commensurabili, avrebbbero condotto a determinare un quarto segmento costituente coi tre dati una proporzione nel senso della definizione (20ª) sopra riportata.

E poichè i gruppi di quattro segmenti in tal modo ottenuti, non *cessavano*, pel fatto della loro incommensurabilità, di godere di proprietà geometriche completamente coincidenti con quelle di segmenti commensurabili costituenti una proporzione nel senso della definizione suddetta, si presentava inevitabilmente il bisogno di una nuova e più generale definizione di proporzione, dalla quale essi non venissero esclusi.

A tale esigenza soddisfano le due definizioni che come vedemmo EUCLIDE pone a base della sua trattazione generale.

La loro introduzione sembra essere dovuta ad EUDOSSO di Cnido, al quale pure la tradizione attribuisce la paternità di una gran parte del contenuto del libro V, oltre alla scoperta del metodo cosidetto di « esaustione ».

La definizione di EUDOSSO, enunciata sotto la forma, più semplice, che essa assume quando *non* si tenga conto dell'altra esigenza che EUCLIDE si era imposta (quella cioè riferentesi alla divisibilità in parti uguali) non differisce affatto da quella che si esprimerebbe in linguaggio moderno dicendo che quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione quando non vi sia alcun numero razionale x che soddisfi all'una o all'altra delle tre condizioni: $A \gtreqless xB$, senza che per esso si abbia pure rispettivamente: $C \gtreqless xD$; o, in altre parole, quando le classi di numeri razionali, determinate dalle due condizioni: $A > xB$, $A < xB$ coincidano colle due classi determinate rispettivamente dalle due condizioni: $C > xD$, $C < xD$ (poichè in tal caso anche la condizione $A = xB$, *dato che si verificasse per qualche numero razionale,* non potrebbe essere soddisfatta che da numeri soddisfacenti nello stesso tempo anche alla condizione $C = xD$).

§ 2. **Sul cosidetto postulato d'Archimede.** — Resa in tal modo la definizione di proporzione indipendente da qualsiasi restrizione relativa alla commensurabilità delle grandezze, l'unica condizione che restava da richiedere, perchè, per una data categoria di grandezze, avesse un senso il domandarsi se quattro di esse costituissero o no una proporzione, era questa: che di tali quattro grandezze tanto le due prime come le due ultime fossero tali da ammettere effettivamente dei multipli soddisfacenti alle condizioni contemplate nella definizione.

Tale esigenza si trova appunto enunciata da EUCLIDE sotto la forma di una definizione (4ª del Lib. VI):

« Due grandezze sono dette « *aver tra loro rapporto* » quando ciascuna presa un numero sufficiente di volte può superare l'altra (λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλαδιαζόμενα ἀλεήλων ὑπερέχειν).

La qual definizione, come appunto osservano i migliori commentatori, non ha altro ufficio che quello di dichiarare che, ogni qualvolta si parli di uguaglianza o disuguaglianza di rapporti, s'intende presupposto che le coppie di grandezze che compaiono come termini di ciascuno dei « rapporti » di cui si tratta, soddisfino a quello che ora si chiama « postulato d'ARCHIMEDE », postulato che del resto, come vedremo, si trova anche enunciato da EUCLIDE (nella dimostrazione della prop. 8ª) sotto la forma che ordinariamente assume nelle trattazioni moderne.

§ 3. **Primo gruppo di proposizioni.** — Veniamo ora a delineare brevemente l'ordine seguito da EUCLIDE nello svolgere, in base alle premesse sopra indicate, una teoria generale delle proporzioni.

La prima proposizione, che egli deduce direttamente dalla definizione da lui stabilita, è la seguente:

« *Se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, sono pure in proporzione le altre quattro grandezze che si ottengono moltiplicando rispettivamente le grandezze A, C e le grandezze B, D per due numeri interi qualunque* », (prop. 4ª, Lib. V).

A questa fa seguito un gruppo di quattro proposizioni di cui le prime due (7ª, 8ª) affermano che *se A è una grandezza uguale o maggiore di B, si ha sempre, qualunque sia una terza grandezza C, rispettivamente:*

$$\frac{A}{C} \gtreqless \frac{B}{C}$$

e, inoltre, anche:

$$\frac{C}{A} \lesseqgtr \frac{C}{B}.$$

Le altre due (9ª, 10ª) sono le proposizioni inverse di queste.

Anche queste proposizioni sono da EUCLIDE dedotte direttamente dalle definizioni già sopra riportate dell'uguaglianza o disuguaglianza di due rapporti.

Di una sola fra esse, l'8ª, trascriverò qui per disteso la dimostrazione, la quale presenta particolare interesse pel fatto che essa è la sola nella quale venga fatto espressamente appello al postulato espresso, come già vedemmo, da EUCLIDE mediante la definizione 4ª.

Siano A e B due grandezze differenti e sia $A > B$. Si tratta di dimostrare che, essendo C una terza grandezza, si ha pure

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}.$$

A tale scopo si determini un numero intero n tale che, moltiplicando per esso la più piccola delle due grandezze B e $A - B$ si ottenga una grandezza maggiore di C.

Si avrà allora

(1) $$nB > C$$

e

(2) $$n(A - B) > C.$$

Si determini ora il più piccolo dei multipli di C maggiori di nB. Indicandolo con kC potremo scrivere

(3) $$(k-1)C \gtreqless nB < kC$$

ove k, in virtù della (1), deve essere maggiore di 1.

Dalla (3) si deduce:

$$kC \lesseqgtr nB + C$$

e, poichè d'altra parte, per la (2) si ha che:

$$nA > nB + C,$$

si avrà:

$$kC < nA.$$

Esistono quindi due numeri k, n interi tali che soddisfano alla condizione:

$$kC > nB$$

senza che essi soddisfino all'altra

$$kC > nA$$

il che equivale, per definizione, a dire che:

$$\frac{C}{B} > \frac{C}{A}.$$

§ 4. **Secondo gruppo di proposizioni.** — Indipendentemente dalle proposizioni viste indietro, e ancora facendo capo direttamente alle definizioni di uguaglianza e disuguaglianza di rapporti, EUCLIDE passa a dimostrare le proposizioni seguenti:

« *Se due rapporti sono ambedue uguali a un terzo rapporto essi sono uguali tra loro* » (prop. 11ª).

« *Se di due rapporti l'uno è uguale a un terzo rapporto e l'altro ne è maggiore, il secondo rapporto è maggiore del primo* » (prop. 13ª).

Dalla seconda di queste, col sussidio delle precedenti 8ª, 10ª, egli deduce le due seguenti:

« *Se quattro grandezze costituiscono una proporzione e la prima di esse è maggiore della terza anche la seconda è maggiore della quarta* » (prop. 14ª).

« *Due grandezze qualunque hanno lo stesso rapporto di due loro equimultipli qualunque* » (15ª).

Da queste, giovandosi della 7ª e dell'11ª, deduce la proposizione asserente che *in una proporzione è lecito alterare l'ordine dei medi.*

È da notare che tale dimostrazione, è da lui effettuata col sussidio anche dell'altra proposizione, antecedentemente dimostrata, che, se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, lo sono pure le quattro altre: A, B, $A+C$, $B+D$ (prop. 12ª).

A quest'ultima proposizione si riattaccano le altre relative alle note operazioni del *comporre* e del *dividere* cioè le due seguenti:

Se sussiste la proporzione

$$A : B = C : D$$

sussistono anche le due altre

$$A - B : B = C - D : D \qquad (17^a)$$

$$A + B : B = C + D : D \qquad (18^a)$$

nonchè l'altro teorema che dalla stessa proporzione:

$$A : B = C : D$$

deduce:

$$A : B = A - C : B - D.$$

§ 5. **Terzo gruppo di proposizioni.** — L'ultimo gruppo di proposizioni considerato nel Libro V è costituito da quelle che si riferiscono alle conclusioni che si possono ricavare dal sussistere di due proporzioni aventi comuni gli antecedenti (o i conseguenti) oppure gli estremi (o i medi).

Tanto nel primo caso, cioè in quello delle due proporzioni:

$$A : B = D : E, \quad B : C = E : F$$

quanto nel secondo cioè in quello delle due proporzioni:

$$A : B = E : F, \quad B : C = D : E,$$

EUCLIDE dimostra anzitutto (prop. 20ª, 21ª) che se si ha $A \gtrless C$ si ha pure rispettivamente: $D \gtrless F$. Di qui deduce che ciascuna delle suddette coppie di proporzioni danno luogo alla seguente

$$A : C = D : F \qquad \text{(prop. } 22^a, 23^a).$$

Mediante la predetta proporzione 22ª e col sussidio del teorema relativo all'invertibilità dei medi (prop. 16ª) viene infine dimostrata l'altra proposizione (24ª), che dalle due proporzioni:

$$A : B = D : E, \quad C : B = F : E$$

deriva l'altra:

$$A + C : B = D + F : E.$$

Il libro si chiude colla dimostrazione della proposizione seguente:

« *Se quattro grandezze sono in proporzione la somma della più grande colla più piccola di esse è maggiore della somma delle altre due* ».

§ 6. **Proporzioni di segmenti ed aree.** — Dell'applicazione della teoria generale, fin qui riassunta, alla geometria e in particolare ai segmenti e alle aree piane, a contorno rettilineo o circolare, si occupa EUCLIDE nel successivo libro (VI).

Egli comincia col dimostrare, facendo diretto appello alla definizione di uguaglianza di rapporti, da lui stabilita, come vedemmo, nel Libro precedente, che « le aree di due triangoli (o parallelogrammi) aventi eguali altezze hanno fra loro rapporto uguale a quello delle rispettive basi (prop. 1ª).

Da questa vengono fatte dipendere le proposizioni relative alla proporzionalità dei lati di triangoli aventi angoli rispettivamente uguali, a partire da quella che afferma la proporzionalità dei segmenti determinati su due lati di un triangolo da una parallela al terzo lato (prop. 2ª).

Questa è infatti dimostrata mediante la considerazione dei due triangoli di egual base e altezza compresi tra la detta trasversale e il lato al quale essa è parallela: cioè applicando il teorema precedente alle due coppie di triangoli d'eguale altezza costituite rispettivamente da uno di questi triangoli e da quello determinato dalla trasversale e dai due lati che essa taglia. Si ottengono così due proporzioni aventi comune un rapporto (quello cioè tra le aree dei triangoli sopra indicati) dalle quali in virtù del teorema, già prima dimostrato nella trattazione generale, asserente l'uguaglianza di due rapporti eguali a uno stesso rapporto, si conclude l'uguaglianza dei due rapporti rimanenti, che sono appunto quelli che sussistono tra i segmenti determinati dalla trasversale sui lati del triangolo.

Per mezzo della stessa prop. 1ª e parimenti col sussidio del teorema, sopraccennato, affermante che due rapporti eguali a un terzo sono eguali tra loro, viene poi dedotta la proposizione seguente e la sua inversa:

« *Se due parallelogrammi (o triangoli) sono equivalenti e un angolo dell'uno è uguale a un angolo dell'altro, le due coppie di lati che comprendono tali due angoli costituiscono rispettivamente i medi e gli estremi d'una proporzione* » (prop. 14ª, 15ª, 16ª).

Per mezzo di queste ultime, e precisamente per mezzo di quella che afferma l'equivalenza di due triangoli aventi un angolo comune compreso tra coppie di lati che figurano rispettivamente come medi ed estremi d'una stessa proporzione, si dimostra, sempre col sussidio della prop. 1ª, il teorema che EUCLIDE enuncia dicendo che « le aree di due triangoli simili stanno tra loro *in ragione duplicata* di quella dei loro lati corrispondenti (prop. 19ª).

Qui è da notare come la frase « le tali due grandezze stanno in ragione duplicata di quella di due altre grandezze », per esempio di quella di A a B, è adoperata da EUCLIDE semplicemente per indicare che le due prime quantità hanno un rapporto uguale a quello di A a una terza quantità C che soddisfa la seguente condizione: $A : B = B : C$.

Più generalmente, quando si abbia una serie di n grandezze di cui ciascuna sia media proporzionale tra le due che le sono adiacenti le due estreme da lui sono dette stare in un rapporto $(n-1)^{\text{plo}}$ di quello di una qualunque di esse alla successiva (1).

La proprietà espressa dalla prop. 19ª per i triangoli simili è poi estesa (prop. 20ª) al caso di due poligoni simili qualunque e, parimente per mezzo della prop. 19ª, si dimostra (prop. 22ª) che se quattro segmenti costituiscono una proporzione, sono in proporzione anche le aree di quattro poligoni simili costruiti su essi rispettivamente come lati omologhi.

Tanto questa proposizione come la sua reciproca compaiono come conseguenze dell'altra che rapporti duplicati di rapporti uguali sono uguali, la quale alla sua volta deriva immediatamente dalla prop. 22ª del V Libro già accennata in dietro.

§ 7. **Ulteriori sviluppi: ragione composta.** — Al precedente gruppo di proposizioni è appoggiata la soluzione del

(1) Se infatti sussiste la proposizione:

$$a : b = c : d \qquad (1^a)$$

e x, y sono due quantità che soddisfano rispettivamente alle due condizioni seguenti:

$$a : b = b : x \qquad (2^a)$$

$$c : d = d : y \qquad (3^a)$$

si avrà:

$$b : x = d : y \qquad (4^a)$$

e, dalla (1ª) e (4ª), applicando la già citata prop. 22ª del V libro,

$$a : x = c : y.$$

problema di costruire una figura di data area e simile a una figura (poligonale) data.

Essa è effettuata costruendo due rettangoli l'uno equivalente alla figura data e avente per base uno dei lati di essa e l'altro avente la stessa altezza di questo ed equivalente all'area data. La media proporzionale delle basi di questi rettangoli, fornisce il lato che, nella figura che si cerca, è omologo del lato, della figura data, che si è scelto a base del primo rettangolo.

Merita particolare attenzione la proposizione (23ª):

« *Le aree di due parallelogrammi aventi angoli rispettivamente uguali stanno in ragione composta di quelle dei loro lati* ».

Dire che due grandezze S, S' stanno tra loro in un *rapporto composto* di due altri rapporti, per esempio dei due rapporti di A a B e di C a D non significa per EUCLIDE altro che questo che esista (cioè si possa determinare o costruire) una terza grandezza S'' tale che si abbia, contemporaneamente:

$$A : B = S : S'' \qquad (1)$$

$$C : D = S'' : S'. \qquad (2)$$

È da notare che, in caso che i due rapporti dati, di A a B e di C a D siano eguali tra loro, il rapporto « composto » di essi non è altro che il rapporto « duplicato » di cui già s'è detto antecedentemente: allora, infatti dalle (1) e (2) si ricava:

$$S : S'' = S'' : S'.$$

Che rapporti composti di rapporti rispettivamente uguali siano uguali risulta immediatamente dalla proposizione già più volte adoperata (11ª, V) che due rapporti uguali a uno stesso rapporto sono uguali tra loro. Se si ha, infatti:

$$A : B = A' : B'$$

$$C : D = C' : D'$$

le due proporzioni:

$$A : B = S : S''$$

$$C : D = S'' : S',$$

permettono immediatamente di conchiudere

$$A' : B' = S : S''$$

$$C' : D' = S'' : S'.$$

È spesso conveniente indicare i due rapporti di cui si considera il rapporto composto, mediante tre sole grandezze, sostituendo cioè all'uno o all'altro di essi, per es. al rapporto di C a D il rapporto di B alla grandezza X determinata dalla condizione:

$$C : D = B : X.$$

Le (1) e (2) diventano allora

$$A : B = S : S'''$$

$$B : X = S'' : S'$$

da cui, in virtù della già più volte accennata prop. 22ª del V libro:

$$A : X = S : S''.$$

Il che si può esprimere dicendo che il rapporto di due grandezze è « composto » del rapporto della prima di esse a una terza grandezza qualunque, e del rapporto di quest'ultima alla seconda.

La stessa considerazione è immediatamente applicabile al caso di rapporti d'un numero qualunque di altri rapporti.

§ 8. **Applicazioni ai problemi di 2° grado.** — Una delle più importanti applicazioni geometriche della sua teoria generale delle proporzioni ci presenta EUCLIDE nelle proposizioni seguenti riferentisi alla discussione e alla risoluzione del problema:

Costruire un parallelogramma di cui si conoscano l'area, gli angoli e il rapporto tra uno dei suoi lati e la differenza tra l'altro lato e un segmento dato.

Egli distingue anzitutto: due casi che possono presentarsi, quello cioè in cui tale secondo lato del parallelogrammo che si cerca s'intenda dovere essere minore (ἐλλείπειν) del segmento dato e quello in cui invece s'intende che lo deve superare (ὑπερβάλλειν).

Alla risoluzione del primo caso è premessa una proposizione relativa alle condizioni alle quali occorre che i dati del problema soddisfino onde esso sia risolubile.

Tale proposizione, che tradotta in linguaggio moderno assume una forma alquanto più complicata che non nell'originale, è la seguente:

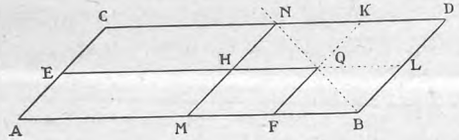
« Tra tutti i parallelogrammi, aventi angoli rispettivamente uguali e dei quali sia dato il rapporto di uno dei lati al segmento che rimane quando si sottragga l'altro lato da un segmento dato, quello di massima area è quello in cui quest'altro lato è uguale alla metà del segmento dato (prop. 27ª).

La dimostrazione di questa proposizione (come anche delle altre del gruppo di cui ora parliamo) si basa essenzialmente sulla considerazione dei due parallelogrammi simili che si ottengono conducendo per un punto della diagonale d'un parallelogramma le parallele ai suoi lati (prop. 24ª, 26ª).

Essa procede nel modo seguente:

Si costruisce anzitutto, sulla metà AM del segmento dato AB, il parallelogramma $(AMNC)$ che si tratta di dimostrare essere di area maggiore di qualunque altro che soddisfaccia alle condizioni imposte. Si unisce il vertice N di esso opposto ad A, coll'altro estremo B del segmento dato e si osserva che questa retta NB è il luogo dei vertici, opposti ad A, di tutti i parallelogrammi che soddisfano alle condizioni suindicate.

Si prenda ora uno qualunque di essi, per esempio $AEFQ$ e siano rispettivamente H, L, K i punti d'incontro del suo lato EQ con MN, CD, e del suo lato QF con NC.

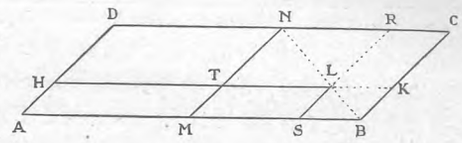


I due parallelogrammi $MHQF$, $KQDL$ sono equivalenti, onde lo sono anche gli altri due $MHLB$, $FBKD$ che si ottengono aggiungendo ad essi rispettivamente il parallelogramma $FQLB$. Ma il parallelogramma $MHLB$ è uguale a $AEHM$. Dunque quest'ultimo è equivalente a $FBKD$. Aggiungendo ora a ciascuno di questi due il parallelogramma $MHQF$ si avrà che il parallelogramma $AFQE$ sarà equivalente alla somma di $FBKD$ e di $MHQF$ e quindi minore di $MNBD$, cioè di $AMNC$ come si voleva dimostrare.

Premessa questa dimostrazione e supposto che i dati del problema in questione soddisfino alla restrizione da essa stabilita, Euclide passa alla risoluzione del sopraindicato problema, che si può enunciare come segue:

« Sopra una parte AX di un segmento dato AB, costruire un parallelogramma di data area e tale che il parallelogramma che « *manca* » (per completare la figura in modo da avere un parallelogramma avente per base l'intero segmento AB) sia simile a un parallelogramma dato ».

A tale scopo egli costruisce, sulla metà MB del segmento dato AB, un parallelogramma $MNCB$ simile al parallelogramma dato. Con un vertice in N e con due dei suoi lati situati rispettivamente sui lati NC, MN del parallelogramma $MNCB$, costruisce poi un secondo parallelogramma $TNRL$ pure simile al dato (e del quale quindi il vertice L, opposto a N, cadrà sulla diagonale BN del parallelogramma prima costruito), e avente per area la differenza tra l'area data e quella del parallelogramma $MNCB$. Se si prolunga ora il lato RL fino ad incontrare, in S, la AB e il lato TL fino ad incontrare in H la AD, si avrà, in $ASLH$, il parallelogramma cercato.



Esso infatti si compone di due parallelogrammi $(AMTH, MSLT)$ equivalenti rispettivamente ai due parallelogrammi $(MBKT, LRCK)$ che, presi insieme, costituiscono ciò che resta del parallelogramma $MNCB$ quando se ne tolga il parallelogramma $TNRS$ che, per costruzione, rappresenta appunto l'eccesso della sua area sull'area data.

In modo affatto analogo procede Euclide per risolvere il problema nell'altro caso cui abbiamo già accennato, quello cioè in cui il lato del parallelogramma cercato invece di essere una parte del segmento dato lo debba « sopravanzare » (ὑπερβάλλειν): nel qual caso non è più necessaria alcuna restrizione relativa ai dati del problema (prop. 29ª).

La soluzione generale di quest'ultimo problema è da lui immediatamente applicata al caso particolare importante nel quale l'area data sia quella del quadrato costruito sul segmento dato e in cui inoltre il parallelogrammo dato sia un quadrato.

Il problema si riduce allora a quello di costruire un rettangolo di cui l'area sia eguale a quella del quadrato costruito su un dato segmento a e di cui l'altezza, x, sia uguale all'eccesso della sua base sul segmento dato, in altre parole al problema espresso dall'equazione:

$$a^2 = x(a + x)$$

coincidente con quello di dividere un segmento in media ed estrema ragione (ἄκρον καὶ μέσον λογον), problema che da EUCLIDE si trova anche risoluto, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, col ricorso a sole considerazioni di equivalenza (Lib. II, prop. 11ª).

Lo stesso è anche da notare per il problema, più generale di quest'ultimo, che risulta dal supporre che il parallelogramma, che figura tra i dati dei due problemi precedenti, sia un rettangolo: per il problema cioè di determinare i lati di un rettangolo di cui si conosca l'area e la somma, o la differenza tra i lati.

Ambedue questi problemi si trovano infatti risolti anche indipendentemente dal ricorso alle proporzioni, nell'opera d'EUCLIDE che porta il titolo di « Dati » (Δεδόμενα), nelle proposizioni 84ª e 85ª.

La generalizzazione che di essi, come vedemmo, EUCLIDE ottiene mediante l'impiego delle proporzioni ha grande importanza nella Storia della geometria, in quanto ha fornito in seguito a APOLLONIO la base per la sua trattazione delle proprietà delle coniche. I nomi stessi che queste da lui ricevettero (ὑπερβολή, ἐλλείψις, παραβολή) in sostituzione a quelli che le designavano anteriormente (come si vede per es. in ARCHIMEDE), conservano oggi ancora la traccia di questo ordine di considerazioni.

§ 9. **Volumi.** — Le applicazioni della teoria delle proporzioni al confronto dei volumi di prismi e parallelepipedi si trovano, come è noto, esposte nel Libro XI degli *Elementi*.

La dimostrazione dei relativi teoremi non presenta alcuno speciale interesse procedendo essa per via affatto analoga a quella seguita pel caso delle figure piane considerate nel libro VI.

Di maggiore importanza sono le applicazioni che si trovano fatte, nel libro XII, del metodo cosidetto di « *esaustione* » alla determinazione del rapporto delle superficie di due cerchi (prop. 2ª).

§ 10. **Critiche e varianti di testi.** — La teoria delle proporzioni che finiamo ora di esporre nei suoi tratti fondamentali è stata riguardata, a ragione, come una delle parti teoricamente più perfette degli *Elementi* d'EUCLIDE. Per citare le

parole di uno dei più illustri tra i geometri che cooperarono a metterne in luce lo spirito e a difenderla dalle viziose interpretazioni, il BARROW:

« *There is nothing in the whole body of the Elements of a more subtle invention, nothing more solidly established and more accurately handled than the teory of proportionals* » (BARROW, *Lect. math.*, pag. 336).

Le obbiezioni critiche sollevate contro di essa già fin dal primo risorgere delle speculazioni geometriche nei tempi moderni, quando non siano dovute a malintesi fondamentali relativi all'ufficio e allo scopo che ad essa vanno assegnati nell'insieme della trattazione euclidea, hanno tutte in comune il carattere di poter venir facilmente rimosse senza menomamente compromettere la compagine e la coerenza dell'intera teoria.

Più che a riconoscere dei difetti di questa, la maggior parte di esse ci guidano a sospettare, e nello stesso tempo a indicarci il modo di correggere, dei guasti (mutilazioni, aggiunte, semplificazioni, sovrapposizioni ecc). che l'esposizione primitiva ebbe a subire nelle successive redazioni e traduzioni attraverso alle quali essa è giunta fino a noi.

Di ciò, in più d'un caso, ci son rimaste traccie, emergenti in modo evidente dal confronto del testo greco che possediamo, corrispondente come si ritiene alla redazione di TEONE ALESSANDRINO, colle prime traduzioni latine, in particolare quelle del CAMPANO secolo XIII, eseguite col sussidio di manoscritti arabi.

Un esempio caratteristico di tal fatto ci è fornito dalle obbiezioni che già fin dal CLAVIUS (1580) furono sollevate contro la dimostrazione della proposizione 18ª (relativo all'operazione di « comporre » i termini) di una proporzione, di passare cioè dalla proporzione $a : b = c : d$ all'altra $a + b : b = c + d : d$).

Si è osservato che essa, come si trova esposta sul testo originale, si basa su un presupposto del quale EUCLIDE non fa uso in alcuna altra parte della sua trattazione e che non figura neppure da lui enunciata sotto qualsiasi forma tra i suoi postulati.

Tale presupposto è quello che date tre grandezze A, B, C (di cui s'intende le due prime soddisfino al postulato d'ARCHIMEDE) esista sempre una quarta grandezza D tale che si abbia:

$$A : B = C : D.$$

La dimostrazione infatti che EUCLIDE dà di questa proposizione ha la forma di una dimostrazione per riduzione all'assurdo nella quale si fa vedere che la quarta proporzionale, supposta esistente, dopo le tre grandezze: $A+B$, B, $C+D$, non può essere nè maggiore nè minore di D.

Da alcuni tra i commentatori degli *Elementi* (dal CLAVIUS, per esempio) si ritenne quindi necessario inserire l'espressa enunciazione del suddetto presupposto tra le proposizioni fondamentali (definizioni, postulati) che figurano in principio al libro V.

Di ciò non si accontentarono altri riputando che esso non meritasse di essere riguardato come una proposizione evidente e non bisognevole o non suscettibile di dimostrazione.

Tra questi il SACCHERI che, dopo averlo qualificato come un postulato indecoroso (*parum decorum*) e aver parlato del bisogno di ricorrervi come di un altro « neo » della trattazione euclidea da porre accanto a quello consistente nell'ammissione del postulato delle parallele, propone di sostituire ad esso la seguente altra proposizione che egli ritiene essere riuscito a dimostrare:

« *Il rapporto di due grandezze qualunque è sempre o uguale o maggiore o minore* (nel senso definito da EUCLIDE) *di quello di altre due grandezze qualunque* ».

Altri infine e tra questi ROBERTO SIMPSON, nelle sue Note agli *Elementi* d'EUCLIDE (Edimburgo 1781, pag. 322), non esitano a dichiarare senz'altro spuria e dovuta a interpolazione di TEONE o di qualche altro autore anteriore, la suaccennata dimostrazione della prop. 18ª.

Tale opinione è resa tanto più probabile dal fatto che nell'edizione latina degli *Elementi*, già accennata in dietro, effettuata dal CAMPANO colla scorta della traduzione araba (facendo capo a una redazione greca più antica di quella di TEONE) figura un'altra dimostrazione della proposizione stessa (18ª) nella quale invece di ricorrere al procedimento visto sopra di riduzione all'assurdo si cerca seguire una via analoga a quella seguita da EUCLIDE nella dimostrazione del teorema antecedente (17ª), e in cui non è necessario alcun ricorso al postulato dell'esistenza della quarta proporzionale.

Tale dimostrazione, riportata dal CAMPANO, per quanto incompleta e, per se, come vedremo, non concludente, non ha tuttavia bisogno che di essere corredata di qualche limitazione o aggiunta per dar luogo a una dimostrazione perfettamente corretta e indipendente da qualsiasi presupposto non compreso tra quelli da EUCLIDE espressamente enunciati.

Essa consiste infatti nell'osservare che in virtù della definizione stessa di proporzione le quattro quantità a, b, c, d costituenti la proporzione considerata dovranno essere tali, che scelti comunque due numeri interi m, n (dei quali il primo è tacitamente supposto maggiore del secondo) si abbia sempre:

$$(m-n)c \gtreqless nd$$

a seconda che si ha rispettivamente:

$$(m-n)a \gtreqless nb.$$

Il che equivale a dire che si dovrà avere:

$$mc \gtreqless n(c+d)$$

a seconda che si abbia rispettivamente:

$$ma \gtreqless n(a+b).$$

Per poter tuttavia da ciò concludere, come si fa nel testo del CAMPANO, che le quattro grandezze a, $a+b$, c, $c+d$ soddisfano alla definizione euclidea di proporzione rimane ancora da esaminare se la condizione suddetta, oltrecchè per qualunque coppia di numeri m, n di cui il primo sia maggiore del secondo, si verifichi anche pei casi in cui si abbia invece $m \leqq n$.

Ciò risulta immediatamente dal solo notare che in ambedue tali casi si ha sempre, contemporaneamente: $ma < n(a+b)$ ed

$$mc < n(c+d).$$

Non è improbabile del resto che questa aggiunta la quale basta per rendere la dimostrazione riportata dal CAMPANO pienamente soddisfacente, fosse da lui (come da altri che pure l'ammisero, ad es. il TARTAGLIA) riguardata come troppo ovvia per essere espressamente indicata.

Nè questo è il solo caso nel quale le varianti che pre-

sentano i testi utilizzati dal CAMPANO permettono di ricostruire ciò che con tutta probabilità corrisponde a una esposizione più genuinamente euclidea di quella del testo greco pervenuto a noi.

Lo stesso si verifica, per esempio, anche per l'obbiezione sollevata dal PELETARIO (PELLETIER) contro la dimostrazione della proposizione 5ª pel fatto che in essa si suppone implicitamente la divisibilità di una delle grandezze considerate in un numero qualunque di parti uguali.

E anche qui il confronto colla traduzione del CAMPANO dal testo arabo, nel quale questo inconveniente è evitato, viene a confermare l'ipotesi già abbastanza plausibile per se stessa, che la suddetta critica piuttosto che ad EUCLIDE deve essere rivolta a qualcuno dei suoi rimaneggiatori o semplificatori anteriori a TEONE.

Un'altra dimostrazione imperfetta è quella della prop. 10ª, il cui vizio, come osserva il SIMPSON nel proporre la correzione, sta in ciò che essa presuppone senza che prima sia stato dimostrato che un rapporto non possa essere nello stesso tempo più grande e più piccolo di un altro.

Il SIMPSON stesso nota la mancanza anche di altri teoremi la cui dimostrazione, del resto facilmente ottenibile, è presupposta in dimostrazioni successive, ed attribuisce a ragione tali ommissioni a ciò che essi sono stati riguardati dai redattori del testo euclideo come troppo evidenti, come divengono in fatti quando s'attribuisca alla parola rapporto il senso aritmetico applicabile solo al caso delle grandezze commensurabili.

§ 11. **Questioni di ordinamento.** — Passando dalle suddette osservazioni relative alla trattazione generale delle proporzioni (Libro V) a quelle che si riferiscono alle applicazioni geometriche (Libro VI) se ne presenta una riferentesi a un punto che interessa non tanto la legittimità o sufficienza di qualche particolare dimostrazione ma bensì l'ordine e le relazioni di dipendenza tra le varie parti della teoria.

Il teorema di TALETE sulla proporzionalità dei segmenti determinati su due lati d'un triangolo da una parallela al terzo, è, come si è veduto, dimostrato da EUCLIDE ricorrendo a considerazioni di equivalenza di triangoli.

Il dimostrarlo direttamente, col ricorso immediato alla

definizione di grandezze proporzionali (in modo analogo a quello che EUCLIDE segue, per esempio, nella dimostrazione delle proporzionali delle aree alle basi in triangoli di eguale altezza) rende possibile un aggruppamento che pur non discostandosi essenzialmente da quello euclideo mette forse meglio in luce i legami di dipendenza tra vari gruppi di proposizioni dimostrate nel Libro VI [1].

Ad un primo gruppo possono essere attribuite le proposizioni deducibili direttamente dalla definizione di uguaglianza di rapporti, e le conseguenze che rispettivamente ne dipendono, (limitandoci, per brevità, alla Geometria piana):

1) Il teorema di TALETE, e le proporzioni relative ai triangoli equiangoli che vi si riattaccano, cui si potrebbe aggiungere la proporzione fra i segmenti determinati dall'intersecarsi di due corde in un cerchio.

2) La proporzionalità dei triangoli o parallelogrammi di uguale altezza alle loro basi, da cui (usando ancora della proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti) si deduce la proporzione cui danno luogo due triangoli o parallelogrammi equivalenti con un angolo uguale.

3) La proporzionalità degli archi agli angoli al centro nel cerchio.

Il riunire in un solo gruppo tali proposizioni ha il vantaggio di mettere in luce il fatto che nella dimostrazione dei tre teoremi fondamentali 1) 2) 3) (e degli analoghi nella Geometria solida), è applicato un medesimo procedimento, che può essere formulato in termini generali, nel modo seguente:

Si abbiano due classi di grandezze A, B, C...., A', B', C' tali che possano essere riferite tra loro in una corrispondenza univoca e reciproca godente della proprietà che alla somma $A + B$ di due grandezze dell'una corrisponda la somma $A' + B'$ delle grandezze A', B' dell'altra, che corrispondono ad A, B rispettivamente.

Si avrà allora che prese due grandezze qualunque A, B della prima classe e le corrispondenti A', B' della seconda si avrà:

$$A \gtreqless B$$

[1] Cfr. p. es. gli *Elementi di Geometria* di ENRIQUES-AMALDI. Di tale ordinamento adottato in molti testi moderni non abbiamo potuto constatare l'origine.

a seconda che si abbia: $A' \gtreqless B'$.

Inoltre a un multiplo qualunque d'una grandezza della prima classe corrisponderà, nella seconda, l'equimultiplo della grandezza corrispondente.

Ciò basta perchè si possa dedurre che se A e B sono due grandezze della prima classe e A', B' due grandezze della seconda, sussiste la proporzione:

$$A : B = A' : B'.$$

Al gruppo delle proposizioni in tal modo deducibili dalla definizione di proporzionalità fa seguito l'altro costituito dalle loro inverse.

Esse hanno questo di comune tra loro che le loro dimostrazioni si presentano sotto la forma di ragionamenti per riduzione all'assurdo nei quali, facendo uso della proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti, si fa vedere che l'ipotesi della falsità della proposizione da dimostrare porterebbe ad ammettere l'esistenza di due grandezze diverse, ambedue quarte proporzionali dopo tre grandezze (1).

Verrebbe infine il gruppo di proposizioni relative al confronto delle aree di triangoli aventi un angolo comune, o di poligoni simili, il gruppo delle proposizioni cioè che si riattacca al concetto di ragione composta.

A tale proposito è da avvertire che la determinazione generale di questo concetto sebbene non si trovi effettuata da EUCLIDE che pel caso speciale delle suaccennate applicazioni geometriche, troverebbe pure il suo posto più naturale e conveniente nella trattazione generale da lui svolta indipendentemente da ogni applicazione alla geometria.

II. - ULTERIORI SVILUPPI DELLA TEORIA.

§ 12. **Sulla tendenza della Geometria greca ed emanciparsi dalle proporzioni.** — La precedente rassegna del contenuto del libro VI degli *Elementi* d'EUCLIDE ci ha presentato più

(1) È degno di nota che il teorema di TALETE ammette due inversi; quella che è più significativa si deduce dall'altra coll'uso dell'operazione di « comporre », oppure può stabilirsi indipendentemente appoggiandosi alla unicità della divisione di una grandezza in parti proporzionali a due date.

d'un esempio di teoremi di geometria che, pure essendo, pel loro enunciato, affatto indipendenti da ogni concetto di proporzione e di rapporto, nel senso attribuito da EUCLIDE a queste parole, tuttavia sono da lui dimostrate mediante il ricorso a considerazioni basate sulle proprietà delle grandezze proporzionali.

Tra tali teoremi se ne trovano anzi perfino di quelli che, nei libri d'EUCLIDE antecedenti ai due che abbiamo esaminati, figurano già dimostrati per via affatto diversa e non implicante l'impiego della teoria svolta nel libro V.

È questo il caso, per esempio, per il teorema di PITAGORA del quale EUCLIDE dopo aver dato, nel Libro I, la nota dimostrazione di cui gli si attribuisce la scoperta, dà poi, come vedemmo, nel VI libro, un'altra dimostrazione che unisce al vantaggio della maggior semplicità anche l'altro di condurre immediatamente a una conclusione di portata assai più generale.

Lo stesso avviene anche per la dimostrazione relativa alla costruzione del lato del decagono regolare, la quale è data prima (Libro II) mediante il solo ricorso a considerazioni di equivalenza di rettangoli, ed è in seguito, come vedemmo (nel Libro VI), presentata come caso particolare di un'altra basata essenzialmente sulla proprietà delle figure simili.

E neppure mancano casi di teoremi i quali, non ostante siano assai più facilmente e direttamente dimostrabili coll'applicazione della teoria delle proporzioni, pure non sono da EUCLIDE ottenuti ricorrendo ad essa, ma bensì solo per via assai più lunga e laboriosa nella quale tale ricorso è evitato.

Ne fornisce un esempio caratteristico il teorema relativo all'equivalenza dei rettangoli costruiti coi segmenti determinati dall'intersecarsi di due corde d'un cerchio, teorema che EUCLIDE, come è noto, deduce dal teorema di PITAGORA.

Non è improbabile che la preferenza accordata in questi casi da EUCLIDE alle dimostrazioni indipendenti dal concetto di proporzione, rappresenti, come ritiene lo ZEUTHEN, una traccia, o una parziale sopravvivenza dei processi dimostrativi ai quali i geometri greci erano obbligati a ricorrere prima che l'introduzione della teoria generale delle proporzioni, dovuta come vedemmo ai predecessori immediati di EUCLIDE, avesse tolto le restrizioni che impedivano di estendere il concetto di rapporto anche al caso delle grandezze incommensurabili.

Della particolare elaborazione alla quale la teoria dell'equivalenza era stata assoggettata dai geometri greci a causa appunto della necessità in cui essi si trovarono di doverla applicare alla soluzione di questioni che solo posteriormente divennero suscettibili di esser trattate col ricorso a considerazioni di rapporti e di proporzioni, ci rimangono del resto traccie notevoli anche negli scritti di altri autori quali APOLLONIO e PAPPO, come avremo occasione di constatare più avanti.

§ 13. **Giordano Vitale da Bitonto.** — Le ricerche dirette a utilizzare quanto più fosse possibile, nelle dimostrazioni geometriche, le considerazioni riferentisi a confronti di aree a preferenza di quelle implicanti il concetto di rapporto o di proporzione, non potevano tuttavia a meno che perdere la più gran parte del loro interesse col cessar del motivo che aveva loro dato origine.

È sotto un aspetto affatto diverso che, col rinascere delle speculazioni geometriche, ricompare la tendenza a sostituire ai procedimenti mediante i quali EUCLIDE applica la sua teoria generale delle proporzioni alla dimostrazione di teoremi di geometria, altri procedimenti nei quali queste ultime venissero ottenute in modo più diretto e meno soggette alle obbiezioni che contro la teoria generale e contro qualche parte di essa potevano venir sollevate.

A un primo tentativo in questa direzione sembra aver fornito occasione il desiderio di attribuire un significato alla definizione senza dubbio spuria (manca infatti nel testo del CAMPANO, e non è del resto adoperata da EUCLIDE in alcuna dimostrazione) di « ragione composta » che si trova in principio al Libro VI.

In essa è detto che per rapporto « composto di altri due » si debba intendere il rapporto che risulta dal « moltiplicare » i loro rispettivi « valori » (πηλικότητες).

Proponendosi di determinare che cosa si dovesse intendere per prodotto di due rapporti, nel caso che le grandezze tra le quali essi sussistono non fossero commensurabili, VITALE GIORDANO da Bitonto [1] fu condotto a domandarsi se non fosse possibile, pel caso dei segmenti almeno, attribuire alle

[1] *Euclide restituto* (Roma, 1680).

parole « rapporto » e « prodotto » un senso basato su considerazioni puramente geometriche, e indipendente quindi dal qualunque ipotesi relativa alla commensurabilità o non commensurabilità dei segmenti in questione.

A tale scopo egli propone, nel suo *Euclide restituto* di definire come « prodotto » di due segmenti a, b il segmento x determinato dalla condizione seguente:

$$x : a = b : 1$$

(ove 1 rappresenta un segmento arbitrario fissato come unità) e di intendere come « quoziente » di due segmenti a, b il segmento y determinato dalla condizione:

$$a : b = y : 1.$$

I prodotti e i quozienti di due segmenti qualunque vengono in tal modo a esser definiti come degli altri segmenti, costruibili, quando i primi siano dati, col ricorso del teorema di TALETE (col portare, cioè, in ordine conveniente il segmento scelto come unità e i due segmenti dati sui due lati d'un angolo a partire dal vertice e conducendo per uno dei punti così ottenuti una parallela alla congiungente gli altri due).

I segmenti ottenuti in tal modo come prodotti o quozienti di dati segmenti possono poi alla loro volta essere di nuovo assogettati a operazioni di « prodotto » e di « divisione » (nel senso sopra definito), dando luogo a nuovi segmenti e in particolare a segmenti che risulteranno come *prodotti di quozienti* (o di rapporti) di altri segmenti.

Delle operazioni così definite VITALE GIORDANO dimostra un certo numero di proprietà, basandosi s'intende sulle proposizioni dimostrate da EUCLIDE nel V libro per le grandezze in generale.

Tra tali proprietà sono da notare le seguenti:

1) Se due segmenti a, b si « moltiplicano » per uno stesso segmento c, i due segmenti p, q che si ottengono soddisfano alla condizione:

$$a : b = p : q.$$

2) Se sussiste la proporzione

$$a : b = c : d$$

il prodotto dei due segmenti a, d (rispetto a qualsiasi unità) è uguale a quello dei due segmenti b, c (rispetto alla stessa unità).

Segue una proposizione che asserisce ciò che si esprimerebbe in linguaggio moderno dicendo che il prodotto di segmenti sopra definito gode della proprietà « associativa ».

3) Se si hanno tre segmenti a, b, c il prodotto di a pel segmento prodotto di b e c è un segmento eguale a quello che si ottiene moltiplicando invece a per b e facendo il prodotto del segmento ottenuto pel segmento c.

4) Il prodotto del « quoziente » di due segmenti a, b, per il segmento b è uguale al segmento a.

Ciò premesso egli passa a dimostrare, ricorrendo, s'intende, sempre alle proporzioni dimostrate da EUCLIDE nel V Libro, che se si ha un numero qualunque di segmenti, il prodotto dei quozienti che si ottengono dividendo ciascuno di essi per il successivo è uguale al quoziente del primo di essi per l'ultimo.

La dimostrazione che egli dà di questa proposizione, nel caso speciale che i segmenti dati siano soli tre, si riduce in sostanza alla seguente:

Se a, b, c sono i tre segmenti dati i quozienti del primo per il secondo e del secondo per il terzo saranno rispettivamente i due segmenti x, y determinati dalle seguenti due condizioni:

$$a : b = x : 1 \qquad (1)$$

$$b : c = y : 1 \qquad (2)$$

e il prodotto di x per y sarà, per definizione, il segmento z determinato dalla condizione

$$z : x = y : 1. \qquad (3)$$

Si indichi ora con z' il quoziente di a per c, cioè il segmento determinato dalla condizione:

$$a : c = z' : 1. \qquad (4)$$

Il confronto delle due proporzioni (2), (4) dà immediatamente

$$a : b = z' : y.$$

Da questa e dalla (1) si deduce immediatamente:

$$z' : y = x : 1$$

cioè:

$$z' : x = y : 1.$$

Questa colla (3) dà:

$$z' : x = z : x$$

da cui si conclude:

$$z = z',$$

la quale dice appunto che il prodotto z dei due quozienti di a per b e di b per c è un segmento uguale al segmento z' che è il quoziente di a per c.

In modo affatto analogo procede la dimostrazione riguardante il caso particolare in cui i segmenti dati a, b, c.... siano in proporzione continua, il caso cioè in cui i rapporti da « moltiplicare » siano tutti uguali tra loro (ragione « duplicata » « triplicata » ecc.) [1].

§ 14. **Hermann Grassmann.** — Le considerazioni sopra esposte di VITALE GIORDANO, nel mentre non presentano alcuna affinità con quelle dei geometri greci, che abbiamo accennato indietro, miranti a rendere indipendente dalla teoria generale delle proporzioni, dati speciali teoremi di geometria, si collegano invece per più d'un interessante punto di contatto alle speculazioni posteriori di cui ora passeremo a occuparci, aventi per scopo di costruire, indipendentemente dalla definizione di EUCLIDE e dei presupposti che essa implica (postulato di ARCHIMEDE) una teoria geometrica atta a surrogare completamente quella svolta nel II libro d'EUCLIDE, per quanto riguarda almeno le sue applicazioni al caso dei segmenti.

È nell'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN (1844) che questo concetto sembra aver trovato la sua prima realizzazione.

GRASSMANN comincia coll'osservare (§ 75) come tra le

[1] Interessante dal lato storico sono le parole che GIORDANO VITALE premette alle considerazioni suesposte:

« *Prima d'inoltrarmi nella compositione delle proportioni dottrina tanto più difficile a essere intesa quanto che nasce da principio non dimostrato sino ad ora nè da Euclide, nè, che io sappia, da alcun altra persona* ». (*Euclide restituto*, pag. 261).

proprietà geometriche caratteristiche dei segmenti proporzionali se ne presentano due ugualmente atte a servire da criterio o di base per una nuova definizione di proporzionalità fra segmenti.

L'una è quella che consiste nell'equivalenza dei due rettangoli (o parallelogrammi aventi angoli rispettivamente uguali) che abbiano per lato rispettivamente il primo e il quarto, e il secondo il terzo dei segmenti dati.

L'altra è quella enunciata dal teorema di TALETE, e consistente nel parallelismo delle due rette che congiungono il primo e il terzo e il secondo e il quarto dei quattro punti che si ottengono portando ordinatamente sui lati d'un angolo, a partire dal vertice, i quattro segmenti in questione, i primi due su un lato e gli altri due sull'altro.

Le due definizioni di « proporzione » fra segmenti che GRASSMANN adotta in corrispondenza all'una e all'altra delle due suaccennate proprietà, si riferiscono non soltanto alla lunghezza ma anche alla direzione dei segmenti considerati.

Esse sono le seguenti:

1) Quattro segmenti, di cui i due primi e i due ultimi siano paralleli tra loro e dei quali i due primi non siano paralleli ai due ultimi, si diranno costituire una proporzione quando i parallelogrammi costruiti rispettivamente con lati paralleli al primo e al quarto, e al secondo e terzo di essi abbiano eguale area.

2) Quattro segmenti, nelle stesse condizioni sopradescritte, si diranno costituire una proporzione quando, costruiti due triangoli aventi lati uguali e paralleli rispettivamente al primo e terzo e al secondo e quarto di essi, si abbia che in essi i terzi lati siano paralleli tra loro.

Le condizioni espresse dall'una e dall'altra di queste due definizioni sono da GRASSMANN mostrate immediatamente esser deducibili l'una dall'altra, col sussidio delle sue notazioni simboliche.

Per vedere come ciò si effettui basta solo ricordare come egli chiami *somma* di due segmenti a, b, il segmento OC che si ottiene conducendo per un punto O un segmento OA eguale al primo di esso e pel punto A un segmento AC eguale e parallelo al secondo e congiungendo O con C; e come egli chiami *prodotto* di due segmenti a, b, l'area del parallelogrammo avente lati rispettivamente uguali e paralleli ad essi.

Da quest'ultima definizione deriva che condizione necessaria e sufficiente perchè due segmenti siano paralleli è che il loro prodotto sia nullo. Si potrà quindi esprimere il verificarsi della condizione espressa dalla definizione 2) per quattro segmenti a, b, c, d scrivendo:

$$(a + c)(b + d) = 0.$$

E poichè l'operazione sopra definita come « prodotto » gode, rispetto a quella che si è definita come « somma » della proprietà distributiva, si avrà eseguendo le operazioni indicate nella suddetta formola, e tenendo conto che si ha $ab = 0$ e $cd = 0$ (a causa del supposto parallelismo di a, b e di c, d),

$$ad + cb = 0,$$

ossia (date le regole dei segni di GRASSMANN)

$$ad = bc,$$

la quale esprime appunto l'equivalenza delle aree dei due parallelogrammi considerati nella definizione 1).

Riconosciuta in tal modo l'identità delle due condizioni considerate nelle due definizioni da lui proposte, GRASSMANN prende le mosse dalla 2ª di esse, che può anche enunciarsi come segue:

« Se due triangoli hanno i tre lati rispettivamente paralleli, due lati dell'uno e i corrispondenti dell'altro costituiscono una proporzione ».

Per dimostrare in base a questa definizione che, se sussistono le due proporzioni

$$a : b = c : d \qquad (1)$$

$$a : b = e : f \qquad (2)$$

sussiste anche l'altra:

$$c : d = e : f,$$

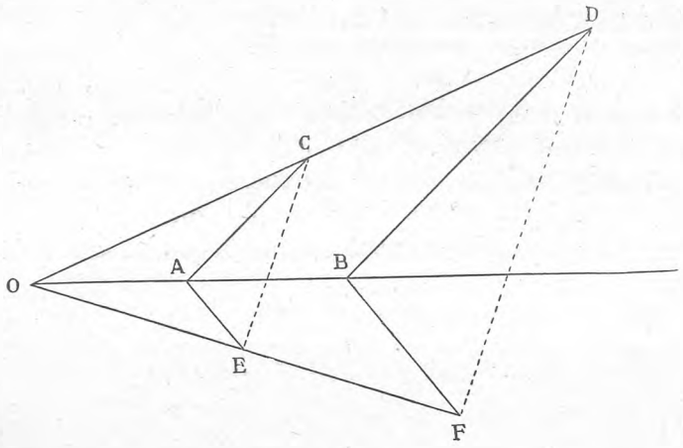
egli procede nel modo seguente:

Si portino sopra una retta avente la direzione dei due segmenti paralleli a, b, a partire da un punto O, due segmenti OA, OB rispettivamente uguali ad a, b.

Per A, B si conducano due segmenti AC, BD rispetti-

vamente uguali e paralleli a c, d. Le due congiungenti AD, AE dovendo pel sussistere della proporzione (1) riescire parallele, i tre punti A, D, E saranno in linea retta.

Se ora per A, B si conducono due altri segmenti uguali



e paralleli AE, BE ad e, f anche gli estremi E, F di questi saranno, in virtù della proporzione (2), allineati con A.

I due triangoli ACE, BDF avendo quindi due coppie ai lati paralleli ed essendo tali che le tre congiungenti le coppie di vertici omologhi concorrono in A, avranno paralleli anche i terzi lati CE, DF, il che equivale a dire che sussiste la proporzione

$$AC : BD = AE : BF$$

cioè:

$$c : d = e : f.$$

La proposizione da dimostrare viene in tal modo a comparire come un' immediata conseguenza del teorema di DESARGUES.

Un caso che rimane da considerare, e nel quale la costruzione assunta a criterio di proporzionalità cessa di essere direttamente applicabile è quello nel quale i quattro segmenti siano tutti e quattro paralleli tra loro (e non soltanto i primi due tra loro e gli ultimi due pure).

Per determinare che cosa si debba intendere, anche in questo caso, per proporzionalità dei segmenti in quistione GRASSMANN procede nel modo seguente:

Osserva anzitutto come, in virtù della proposizione antecedentemente dimostrata, date due coppie di segmenti costituenti una proporzione, se ne possa sempre determinare un' altra costituente una proporzione con ciascuna di esse.

Si ha quindi in questa proprietà un nuovo criterio per giudicare se due coppie di segmenti costituiscano una proporzione. E poichè questo nuovo criterio non cessa di aver senso anche nel caso che i segmenti costituenti le due coppie in questione siano tutti paralleli fra loro, nasce la convenienza di assumere tale nuovo criterio a base di una nuova definizione di proporzionalità la quale comprende la prima come caso particolare.

Anche per questa nuova definizione vale la proprietà, dimostrata indietro, che se due coppie di segmenti sono proporzionali a una stessa coppia, esse sono proporzionali fra loro.

Il che è tutto ciò che si richiede perchè sia lecito, anche in corrispondenza ad essa, concepire una « proporzione come un' uguaglianza di rapporti » come una relazione cioè tra coppie di segmenti soddisfacente alle proprietà caratteristiche della relazione di uguaglianza, (GRASSMANN, *Ausdehnungslehre,* 1884, § 78).

§ 15. **L. Rajola Pescarini.** — Le suddette considerazioni di GRASSMANN non sembrano aver esercitato immediatamente alcuna azione per far rivolgere l' attenzione dei matematici alle questioni che esse implicavano o suggerivano.

Affatto indipendenti da esse si presentano infatti, un quarto di secolo più tardi, i primi tentativi di costruire, in base a definizioni puramente geometriche, una teoria atta a sostituire, per quanto riguarda almeno il caso dei segmenti, quella che EUCLIDE appoggia alla sua definizione di proporzionalità.

Tra questi tentativi, riferentisi non più, come quello di GRASSMANN ai segmenti considerati in grandezza e direzione, ma semplicemente ai segmenti considerati in riguardo alla loro grandezza, sono da notare i seguenti tre, succedentisi indipendentemente, a breve distanza l' uno dall' altro:

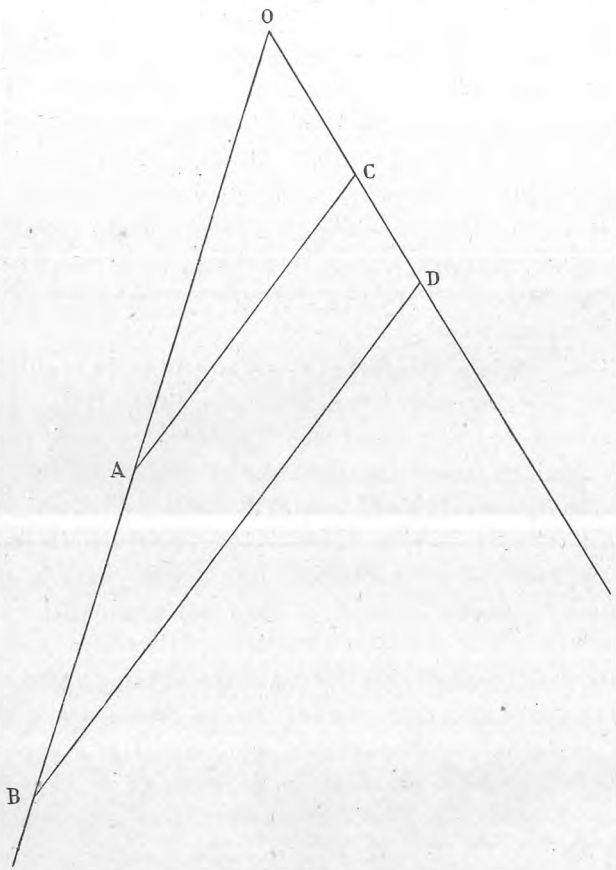
1) Quello di LUIGI RAJOLA PESCARINI esposto in un opuscolo pubblicato a Napoli nel 1876 col titolo: « *Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e alla omotetia* ».

2) Quello di R. HOPPE, contenuto in un articolo pubblicato

nel 1878 nell'« Archiv für Mathematik und Physik » (Leipzig) da lui diretto, col titolo: « *Rein Geometrische Proportionslehre* ».

3) Quello di G. BLASI da lui esposto in un Corso di Lezioni sulla teoria delle proporzioni, tenuto ai suoi allievi dell'Istituto tecnico di Sassari, e da questi riprodotto in fogli poligrafati (Sassari, 1882).

Lo scopo che il RAJOLA PESCARINI si propose nel suo opuscolo è da lui indicato come quello di « mettere i giovani in grado di studiare le importantissime proprietà racchiuse nella teoria della simiglianza, della omotetia e di altre di simil genere: e ciò indipendentemente dal 5° Libro di EUCLIDE e dall'Aritmetica ».



Prendendo le mosse da un angolo determinato, su uno dei cui lati siano portati a partire dal vertice *O* due segmenti in *OA*, *OB*, egli definisce come « proporzionali » ad *OA*, *OB*

le coppie di segmenti *OC*, *OD* che si possono ottenere conducendo da *A*, *B* due rette parallele tra loro fino ad incontrare in *C* e *D* l'altro lato dell'angolo.

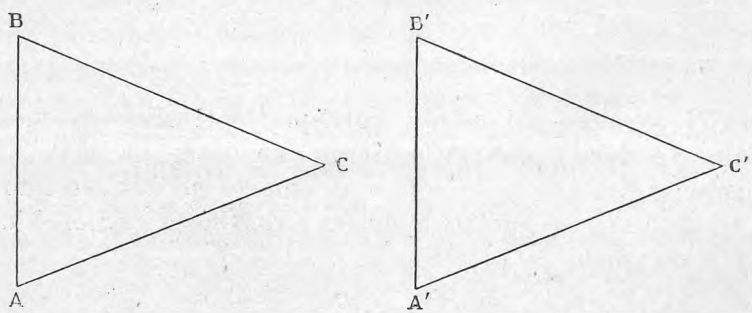
Per dimostrare, in base a questa definizione, il teorema che il rettangolo di due segmenti che figurino come termini estremi d'una proporzione è equivalente al rettangolo dei termini medi, egli ricorre al teorema relativo all'equivalenza dei rettangoli costruiti coi segmenti determinati dall'intersezioni di due corde d'un cerchio, teorema che, come già si è visto, EUCLIDE dimostra col solo impiego del teorema di PITAGORA.

Gli basta per ciò osservare che portando, nella figura suaccennata, sul lato *OD* un segmento *OB'* eguale ad *OB* e sul lato *OA* un segmento *OC'* eguale ad *OC*, si ottiene un quadrilatero *AB'C'D* avente gli angoli opposti supplementari e di cui quindi i vertici si trovano su una stessa circonferenza.

Questo teorema gli permette immediatamente di concludere che se quattro segmenti verificano per un determinato angolo, alla condizione da lui adottata per definire la proporzionalità, essi vi soddisferanno anche in corrispondenza a qualsiasi altro angolo; in altre parole: Se due triangoli sono simili lo saranno pure anche due altri qualunque che si possano ottenere portando ordinatamente sui due lati di due angoli eguali qualunque due coppie di loro lati omologhi.

Un'altra conseguenza immediata della suddetta proposizione è quella dell'invertibilità dei termini medi, o ostremi d'una proporzione.

Per dimostrare invece che se due coppie di segmenti sono proporzionali a una stessa coppia esse sono proporzionali fra loro, il RAJOLA premette il teorema:



Se le tre coppie di segmenti *aa'*, *bb'*, *cc'* costituite dai lati di due triangoli *ABC*, *A'B'C'*, sono proporzionali tra loro,

i due triangoli hanno gli angoli corrispondenti rispettivamente uguali.

Si costruisca infatti un triangolo avente angoli rispettivamente uguali a quelli di ABC e avente il lato, che corrisponde ad AC, eguale ad $A'C'$.

Se indichiamo con x e y gli altri due suoi lati si avrà:

$$a : x = b : b'$$

$$c : y = b : b'$$

dalle quali, in virtù del sussistere delle due proporzioni:

$$a : a' = b : b'$$

$$c : c' = b : b'$$

si ricava:

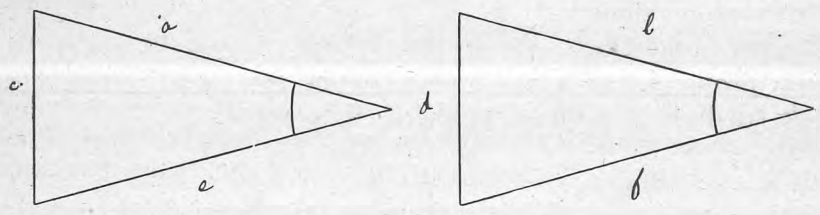
$$x = a', \quad y = c'.$$

Si abbiano ora due proporzioni

$$a : b = c : d$$

$$a : d = e : f.$$

Coi tre segmenti a, c, e si costruisca un triangolo, e così pure coi tre segmenti b, d, f. Pel teorema precedente i due



triangoli avranno gli angoli corrispondenti rispettivamente uguali. Ne deriva che si potranno collocare in modo che l'angolo $\widehat{ae}$ del primo coincida all'angolo $\widehat{bf}$ del secondo e che i lati c, d riescano paralleli fra loro. Dal che si conchiude che è vera anche la proporzione

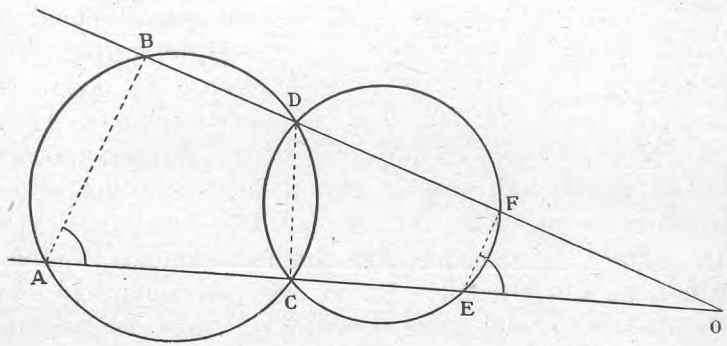
$$a : b = e : f.$$

Questa dimostrazione, cade in difetto nel caso che le

terne a, c, e, e b, d, f, di segmenti considerati non soddisfino alle disuguaglianze intercedenti fra i lati di un triangolo.

È da notare tuttavia che ad essa, se ne può facilmente sostituire un' altra basata invece sulla considerazione dei due cerchi determinati rispettivamente dai punti A, B, C, D e C, D, E, F che si otterrebbero portando in ordine opportuno sui lati d'un angolo qualunque, a partire dal vertice, i segmenti a, b, c, d, e, f.

Poichè infatti le rette AB, EF formano colla AE angoli corrispondenti uguali (poichè uguali ciascuno all'angolo CDF), i due triangoli OAB, OEF saranno simili e le due coppie



OA, OE, OB, OF saranno proporzionali. Si avrà quindi che il rettangolo di lati a, f sarà equivalente a quello di lati b, e cioè che la coppia di segmenti a, b sarà proporzionale alla coppia e, f come si voleva dimostrare [1].

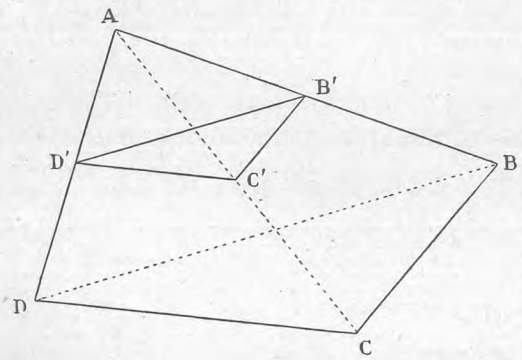
§ 16. **R. Hoppe.** — Il lavoro del HOPPE si divide in due parti delle quali la prima è dedicata a svolgere una teoria delle proporzioni fra segmenti in base a una definizione analoga a quella che abbiamo testè considerata, l'altra invece a costruire tale teoria partendo da una definizione basata sull' altra proprietà caratteristica dei segmenti proporzionali quella cioè relativa all'equivalenza di rettangoli.

Alla prima di queste due trattazioni l' HOPPE pone a fondamento il teorema seguente che egli dimostra, ricorrendo a

(1) G. VAILATI. Di un modo di riattaccare la teoria delle proporzioni tra segmenti a quella dell'equivalenza. V. Atti del II Congresso dell'Associazione Mathesis (Livorno, 1902).

una costruzione nello spazio (alla quale sono inopportunamente mescolate delle considerazioni infinitesimali) e che coincide in sostanza col teorema di DESARGUES sui triangoli omotetici.

Se gli angoli che un lato AB d'un quadrilatero forma coi due lati adiacenti AD, BC e le due diagonali AC, BD sono uguali rispettivamente agli angoli che un lato $A'B'$ d'un altro quadrilatero fa coi lati a lui adiacenti $A'D'$, $B'C'$ e colle diagonali $A'C'$, $B'D'$ allora anche gli angoli che il lato CD del primo quadrilatero fa colle stesse rette suddette AD, BC, AC, BD saranno rispettivamente uguali agli angoli che il lato $C'D'$ del secondo quadrilatero fa con $A'D'$, $B'C'$, $A'C'$, $B'D'$.



Da questo teorema deduce immediatamente l'altro (il quale non ne è d'altronde che un caso particolare):

Se a, b, c, d son quattro segmenti tali che portati, a partire dal vertice sui lati di un angolo, i due primi, per esempio, su un lato e i due altri sull'altro, dieno luogo a quattro punti A, B, C, D tali che la retta AC sia parallela ad AD, allora anche se essi sono portati nello stesso ordine sui lati di un altro angolo qualunque verificheranno pure alla stessa condizione (daranno cioè luogo a quattro punti A', B', C', D' situati su due rette parallele).

Questa proposizione gli serve per giustificare la definizione seguente dei segmenti proporzionali:

« Due segmenti a, b si diranno essere proporzionali a due altri c, d quando i primi due, e gli ultimi due figurino come lati corrispondenti in due triangoli simili ».

In base a questa definizione egli dimostra immediatamente il teorema della transitività dell'uguaglianza di rapporti e l'altro, che diremo della ragion composta, che permette di dedurre dalle due proporzioni

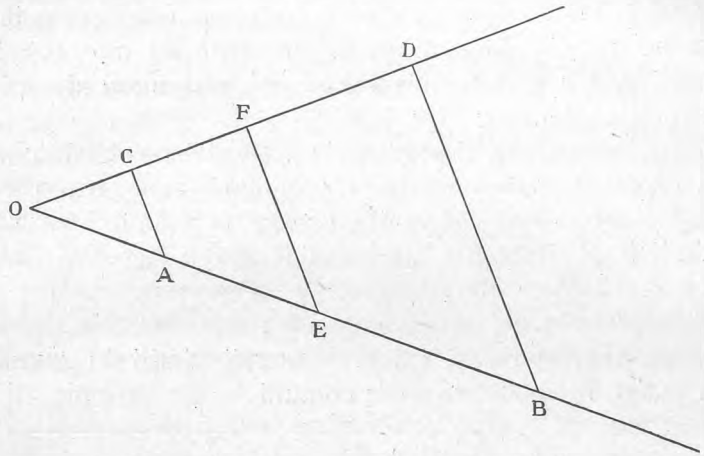
$$a : b = c : d$$

$$b : e = d : f$$

l'altra : $$a : e = c : f.$$

Il primo infatti è conseguenza diretta del teorema di DESARGUES sui triangoli omotetici.

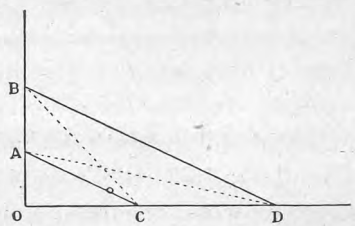
Il secondo dice semplicemente che quando si portano sui lati d'un angolo qualunque a partire dal vertice sei segmenti a, e, b, c, d, f, i primi tre su un lato in OA, OE, OB e gli altri



tre sull'altro in OC, OD, OF, se essi sono tali che AC sia parallela a BD e BD parallela ad EF, essi sono pure tali che la congiungente A con C ed E con F sono parallele tra loro.

Esso coincide quindi coll'asserire che due rette parallele a una terza sono parallele tra loro, cioè che due rette che s'incontrano non possono essere parallele a una stessa retta, (postulato V d'EUCLIDE).

Per dimostrare, poi, in base alla sopradetta definizione, che, se due segmenti a, b sono proporzionali a due altri c, d, il rettangolo avente per lati il primo e il quarto di essi è equivalente al rettangolo avente per lati il secondo e il terzo, l'HOPPE porta i primi due a, b e gli ultimi due di essi c, d rispettivamente sui lati di un angolo retto in OA, OB, OC, OD. Poichè i due triangoli ACB, ACD aventi eguale base e compresi tra le parallele AC, BD sono equivalenti, risultano equivalenti anche gli altri due OBC, OAD che si ottengono aggiungendo a quelli il trian-



golo OAC. D'onde si conclude che i due rettangoli aventi per lati OA, OD e OB, OC sono equivalenti.

Dalle proposizioni sopra esposte l'HOPPE deduce facilmente gli ordinari teoremi sulle proporzioni tra segmenti e sulle proprietà dei triangoli simili.

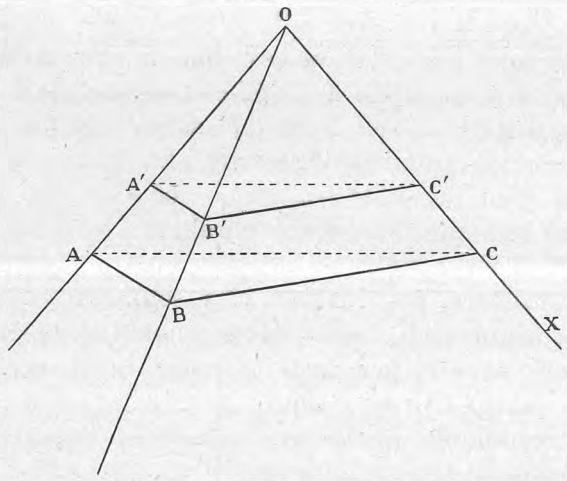
§ 17. **Seconda trattazione dello Hoppe-G. Biasi.** — A questa trattazione l'HOPPE ne fa seguire un'altra, nella quale invece si assume a definizione di proporzionalità di due coppie di segmenti a, b e c, d l'equivalenza dei rettangoli aventi per lati rispettivamente a, d e b, c.

Gli occorre allora dimostrare la proposizione che due coppie di lati omologhi di triangoli simili (equiangoli) sono proporzionali.

A tale scopo egli ricorre di nuovo al teorema di DESARGUES (e quindi implicitamente alle considerazioni stereometriche di cui s'è servito per dimostrarlo).

Egli procede nel modo seguente:

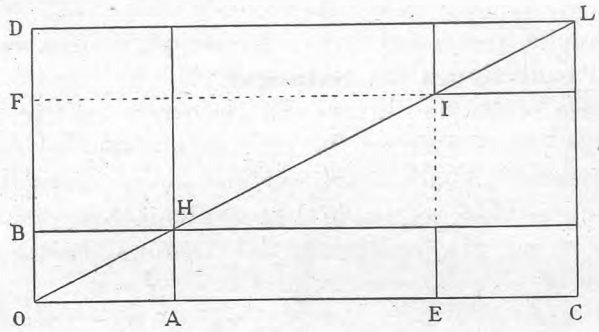
Dopo aver collocati i due triangoli simili in questione OAB, $OA'B'$ in modo da aver comuni le due coppie di lati



omologhi delle quali si vuol dimostrare la proporzionalità, e in modo quindi da avere i terzi lati paralleli fra loro, conduce, pel vertice comune, una retta OX perpendicolare a uno dei lati, per esempio, ad OA. Su questa porta a partire da O due segmenti OC, OC' eguali rispettivamente ad OB, OB'. Poichè allora anche le rette BC, $B'C'$, sono parallele, lo saranno anche, pel teorema di DESARGUES, le AC, $A'C'$.

Con che egli riconduce il caso all'altro già considerato indietro di due triangoli rettangoli simili e conclude seguendo il procedimento già visto che i due rettangoli aventi per lati rispettivamente OA, OB' e OA', OB sono equivalenti.

Per quanto invece riguarda la dimostrazione del teorema che due coppie di segmenti proporzionali a una terza sono proporzionali fra loro egli procede nel modo seguente, ricorrendo al cosidetto teorema del gnomone.



Si portino sui lati d'un angolo retto, a partire dal vertice O, i segmenti OA, OE, OC, OB, OF, OD i primi tre su un lato, gli altri tre sull'altro, e uguali rispettivamente ai segmenti a, e, c, b, f, d tra i quali sussistano per ipotesi le due proporzioni:

$$a : b = c : d$$

$$e : f = c : d,$$

e si completino i rettangoli aventi rispettivamente per lati OA, OB; OC, OD; OB, OC; OA, OD. Siano H, L i vertici dei due primi opposti ad O.

A causa dell'equivalenza dei due rettangoli $OA \cdot OD$ e $OB \cdot OC$ saranno equivalenti anche i due rettangoli che rimangono togliendo da ciascuno di essi il rettangolo $OA \cdot OB$. Ne segue in virtù del teorema del gnomone che il punto H sarà situato situato sulla diagonale OL.

Si completi ora il rettangolo $OE \cdot OF$ e sia I il vertice di esso opposto ad O. A causa dell'equivalenza dei rettangoli $OF \cdot OC$, $OD \cdot OE$ si avrà pure sottraendo da ciascuno di essi il rettangolo che hanno in comune, che i rimanenti rettangoli saranno equivalenti e che quindi anche il punto I si trova sulla retta OL.

I punti O, H, I essendo quindi sopra una stessa retta, si avrà che i rettangoli $AH \cdot AE$, $BH \cdot BF$ saranno equivalenti, e aggiungendo a ciascuno di essi il rettangolo $OA \cdot OB$ si otterranno due rettangoli equivalenti che sono $OA \cdot OF$, $OB \cdot OE$. Se ne conchiude che sussiste la proporzione:

$$a : b = e : f$$

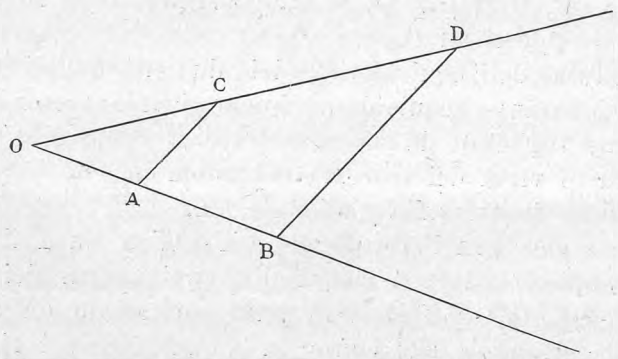
come si voleva dimostrare.

In modo analogo a questa seconda trattazione del HOPPE procede anche quella del BIASI, basata pure sulla considerazione dell'equivalenza dei rettangoli.

In essa tuttavia invece di ricorrere al teorema di DESARGUES per dimostrare la proporzionalità dei lati omologhi di triangoli simili si fa uso del teorema relativo alle corde di un cerchio, seguendo il procedimento inverso a quello adoperato, come già vedemmo, dal RAJOLA PESCARINI per dimostrare la proposizione reciproca.

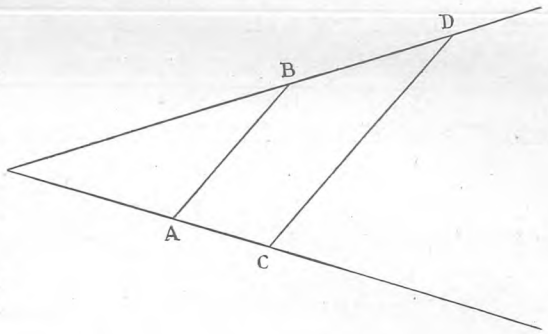
§ 18. **La teoria geometrica delle proporzioni indipendente dalle considerazioni d'equivalenza.** — Un carattere distintivo delle trattazioni della proporzionalità fra segmenti nelle quali si fa ricorso a considerazioni di equivalenza, di fronte a quelle nelle quali tali considerazioni vengono evitate, consiste in ciò che nelle prime, l'invertibilità dei medi (o degli estremi) d'una proposizione risulta come conseguenza immediata della definizione, mentre nella seconda si presenta come un teorema, che esige particolare dimostrazione, e che può enunciarsi come segue:

Se i quattro segmenti a, b, c, d sono tali che, portati a



partire dal vertice O sui lati d'un dato angolo in OA, OB, OC, OD i *primi due* su un lato, gli altri due sull'altro danno

luogo a due rette AC, BD parallele, allora anche se questi segmenti si portano sui lati dello stesso o d'un altro angolo, in modo che il *primo* e il *terzo* di essosi trovino su un lato e il secondo e il quarto sull'altro, daranno pure luogo a due rette parallele AB, CD.



È da notare che la invertibilità dei medi basta per poter dedurre immediatamente dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti l'altro teorema che abbiamo chiamato della ragione composta.

Ne segue che quando si ammetta il ricorso alla teoria dell'equivalenza le due proposizioni suddette (proprietà transitiva e ragion composta) si presentano come conseguenze immediate l'una dell'altra, mentre come abbiam già visto indietro, quando si voglia evitare tale ricorso esse devono essere riguardate come esprimenti due fatti geometrici affatto distinti, cioè l'una il teorema di DESARGUES l'altra il postulato delle parallele.

Un'altra proposizione che si presenta come una conseguenza diretta della definizione di proporzionalità, nel caso che si conceda il ricorso a considerazioni di equivalenza, è quella cosidetta della proporzione perturbata, quella cioè che permette di passare da due proporzioni:

$$a : b = c : d$$

$$b : e = f : c$$

aventi comuni due termini a una terza fra i termini rimanenti:

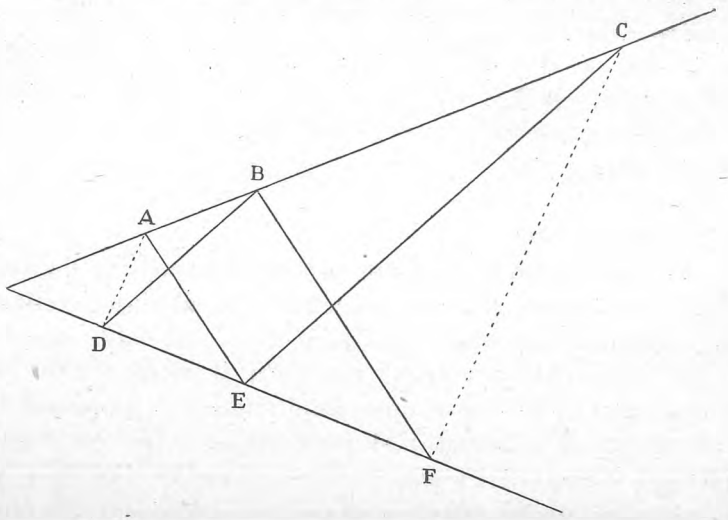
$$a : e = f : d.$$

Infatti essa esprime allora soltanto il fatto che due rettangoli equivalenti a uno stesso rettangolo sono equivalenti tra loro.

Se invece questa proposizione viene interpretata in corrispondenza all'altra definizione di segmenti proporzionali

come lati omologhi di triangoli simili, essa viene a coincidere col teorema seguente:

Se nei due lati d'un angolo si portano a partire dal vertice i segmenti a, b, c, d, e, f, i primi tre su un lato e gli altri tre sull'altro, e se i punti A, B, C, D, E, F così otte-



nuti sono tali che le rette AE, BF siano parallele tra loro e le BD, EC pure, allora saranno parallele anche le rette AD, CF.

Questa proposizione che non è altro che un caso particolare del noto teorema di PASCAL sull'esagono inscritto in una conica, era conosciuto ai Geometri greci, di essa si trova anzi un'elegante dimostrazione nelle « Collezioni » di PAPPO [1], basata però su considerazioni di equivalenza, e quindi non utilizzabile pel nostro scopo che esige appunto che essa sia dimostrata indipendentemente da esse.

Di dimostrazioni di questa proposizione indipendenti dal ricorso alla teoria dell'equivalenza o a costruzioni fuori del piano, ne sono state date parecchie.

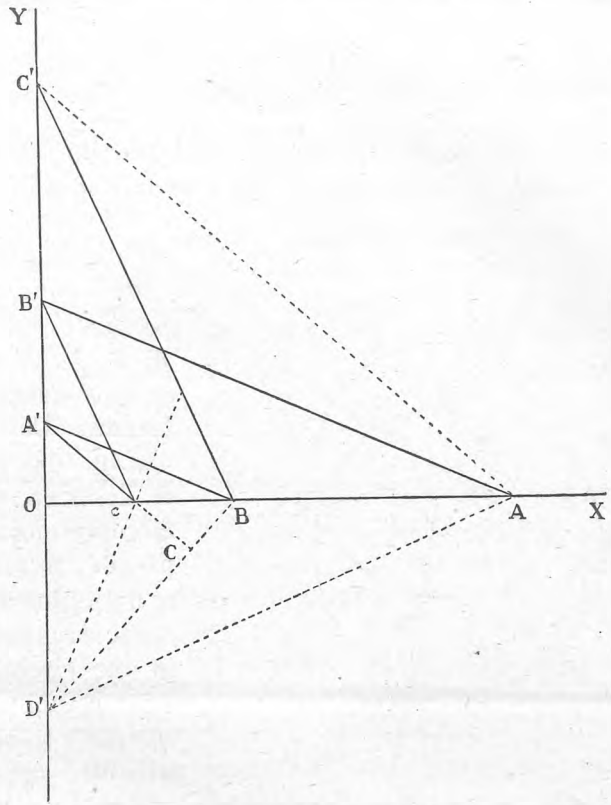
Due ne riporta l'HILBERT nella già citata sua opera *Sui fondamenti della Geometria*. Un'altra molto semplice ed elegante ne fu data da F. SCHUR (*Mathematische Annales*, Bd. 57) basata sul teorema che le tre altezze d'un triangolo concorrono in un punto.

[1] Perciò essa è nota ai geometri italiani col nome di *Teorema di* PAPPO.

In quest'ultima è tuttavia considerato solo il caso in cui l'angolo sul cui lato si riportano i segmenti in questione sia retto.

Essa procede nel modo seguente:

Siano OX, OY le dette due rette e $A'B'C'$, ABC le due terne di punti disposte rispettivamente su esse in modo che si abbia $A'B$ parallela ad AB' e $B'C$ parallelo a BC'. Si con-



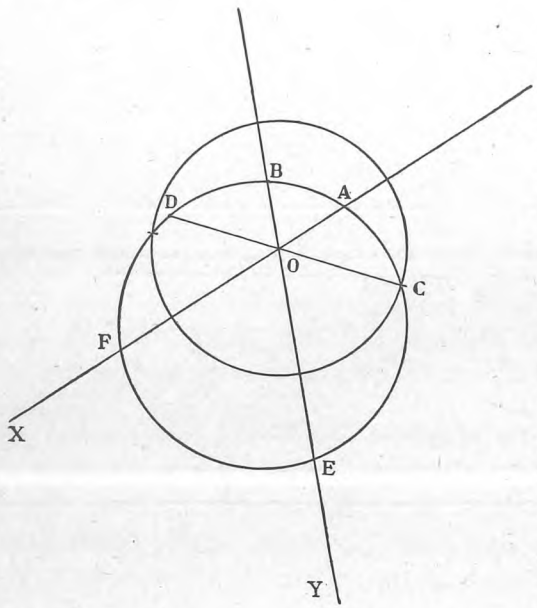
duca per B la perpendicolare ad $A'C$ fino ad incontrare in D' la OY. Il punto C sarà allora il punto d'incontro di due altezze del triangolo $BA'D'$ onde la retta $D'C$ sarà perpendicolare a BA' e quindi ad AB'. Ne segue che C sarà anche il punto d'incontro di due altezze del triangolo $AD'B'$ e quindi che AD' sarà perpendicolare a $B'C$ e quindi a BC'. Da ciò deriva che B è il punto d'incontro di due altezze del triangolo $AC'D'$ e che quindi BD' è perpendicolare ad AC'. Onde AC' e $A'C$ essendo perpendicolari a una stessa retta saranno parallele tra loro.

Al caso di qualunque angolo si applica invece la seguente altra dimostrazione del MOLLERUP (*Mathematische Annalen*, 1903), basata sulla considerazione delle due circonferenze passanti rispettivamente per le due quaterne di punti A, B, E, F, e B, C, D, E che si ottengono portando nel modo indicato dalla figura sui lati d'un angolo qualunque a partire dal vertice, i segmenti che figurano nelle due proporzioni

$$a : b = e : f$$

$$b : c = d : e.$$

Sia XOY un angolo qualunque e si portino su OX, OY rispettivamente, a partire da O i due segmenti a, b in OA, OB, e sui loro prolungamenti, sempre a partire da O, i due segmenti f, e in OF, OE. I punti A, B, F, E saranno su una stessa circonferenza. Con centro ora in O e raggio c si descriva un'altra circonferenza. Sia C uno dei punti in cui le dette due circonferenze si tagliano. (Che le due circonferenze s'intersechino si può sempre ottenere scegliendo opportunamente quella delle due proporzioni date che si adopera per costruire la prima di esse).



Se indichiamo con D il punto in cui la retta OC incontra la prima circonferenza descritta si avrà, in virtù della seconda delle proporzioni date:

$$d = OD.$$

E poichè i punti A, D, F, C sono su una stessa circonferenza si avrà:

$$a : c = d : f.$$

come si voleva dimostrare.

§ 19. **Semplificazioni relative al teorema dell'invertibilità dei medi.** — Della proprietà di segmenti proporzionali espressa, come vedemmo, dal teorema di PAPPO, quello dell'invertibilità dei medi non rappresenta che un caso particolare.

Applicando infatti il primo alle due proporzioni:

$$a : b = c : d$$

$$b : c = b : c$$

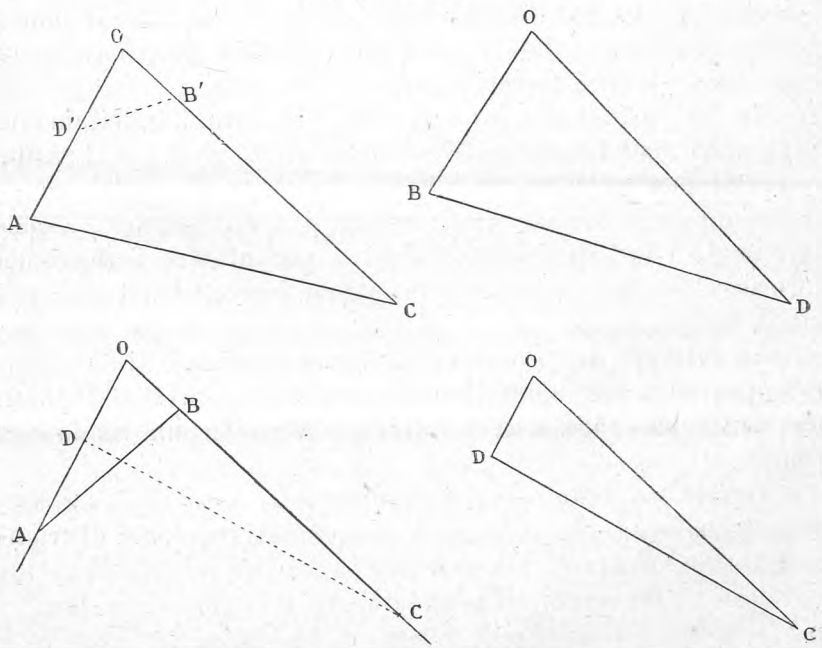
se ne deduce l'altra

$$a : c = b : d.$$

La speciale importanza tuttavia di questo caso particolare, il quale basta già per se a permettere lo sviluppo delle parti della teoria delle proporzioni alle quali è necessario ricorrere nelle trattazioni geometriche elementari, rende interessante notare il fatto, rilevato da B. LEVI (Periodico di matematica) che esso può essere dimostrato direttamente. Ciò si ottiene ricorrendo al confronto delle due figure che nascono disponendo i triangoli simili cui danno luogo le due proporzioni

$$a : b = c : d$$

$$a : c = b : d$$



in modo da avere comune l'angolo che comprende i segmenti in questione e da avere i rimanenti vertici su una stessa circonferenza.

È evidente infatti che la figura che si ottiene sovrapponendo in tal modo i due triangoli OAC, OBD è la stessa di quella che si otterrebbe sovrapponendo invece i due triangoli OAB, OCD, dimodochè se l'angolo compreso tra i lati a, c e b, d nei primi due triangoli è uguale a quello compreso tra i lati a, b; c, d negli altri due anche questi due ultimi dovranno esser simili tra loro.

Con ciò il teorema dell'invertibilità dei medi non risulta ancora stabilito, in corrispondenza alla definizione di segmenti proporzionali come lati omologhi di triangoli simili comprendenti un *angolo qualunque*.

Occorre per ciò dimostrare che se due coppie di segmenti sono lati omologhi in due triangoli simili particolari (p. es. cateti omologhi di triangoli simili *rettangoli*), i triangoli costruiti con quei segmenti e con un angolo qualunque α risultano pure simili.

A tal fine basterà far vedere che: « se la relazione accennata fra i quattro segmenti sussiste per un certo angolo α, essa sussiste per l'angolo retto »; attesochè il verificarsi della relazione stessa per l'angolo retto rende determinato il quarto segmento dati i primi tre, e quindi dalla proprietà sopra espressa si deduce la reciproca.

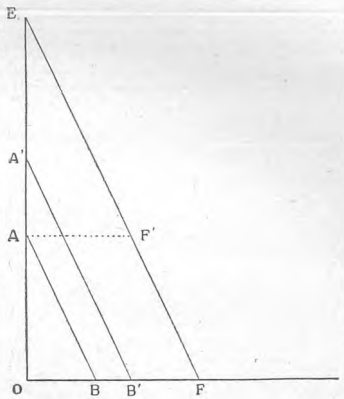
Lo scopo indicato innanzi era già stato implicitamente raggiunto dall'HILBERT (*Grundlage du Geometrie*, II Aufl., pag. 36) con un'elegante dimostrazione basata sulla considerazione delle tre coppie di triangoli (aventi per base rispettivamente i lati di triangoli dati e per altezza i raggi dei loro cerchi interrotti) determinati dalle bisettrici dei triangoli simili in questione.

Lo sviluppo del procedimento sopra accennato di HILBERT, si appoggia a tre lemmi, i quali sono stati ripresi dal LEVI, che tuttavia conduce a termine la cosa in un modo più semplice.

Questi tre lemmi sono i seguenti:

1° lemma. — Se a, a', b, b' sono cateti omologhi di triangoli rettangoli simili, allora anche i triangoli rettangoli aventi per cateti omologhi rispettivamente i segmenti $a+a'$, a e $b+b'$, b sono simili.

Collocati infatti i due triangoli rettangoli aventi per cateti a, b, a', b' in modo da avere comune in O l'angolo retto e le due ipotenuse AB, $A'B'$ parallele si porti a partire da A su OA un segmento $AE = a'$ sarà $OE = a + a'$. Si conduca per E la parallela ad AB che incontri in F il lato OB e si conduca per A la parallela ad OF che incontri la EF in F'. I triangoli AEF', $OB'A'$ sono uguali dal che segue che $AF' = OB'$.



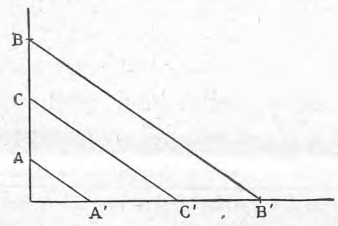
Ma nel parallelogrammo $ABFF'$ $AF' = BF$ dunque $BF = OB'$ e quindi $OF = b + b'$.

Dal che risulta b, $b + b'$ e a, $a + a'$ sono cateti omologhi di triangoli rettangoli simili.

2° lemma. — Se a, a' e c, c' sono cateti omologhi di triangoli simili e b, b', c, c' pure, lo saranno anche i segmenti: $a + b$, $a' + b'$ e c, c'.

Si deduce dal 1° lemma.

Infatti se a, a' e c, c' lo sono, lo saranno anche a, c e a', c' per quanto è stato dimostrato in dietro e parimente, per la stessa ragione: b, c e b', c', dal che si conchiude che lo sono pure: a, b, a', b'.



Ma, per la proporzione precedentemente dimostrata, da ciò deriva che lo sono pure i segmenti: $a + b$, a e $a' + b'$, a'.

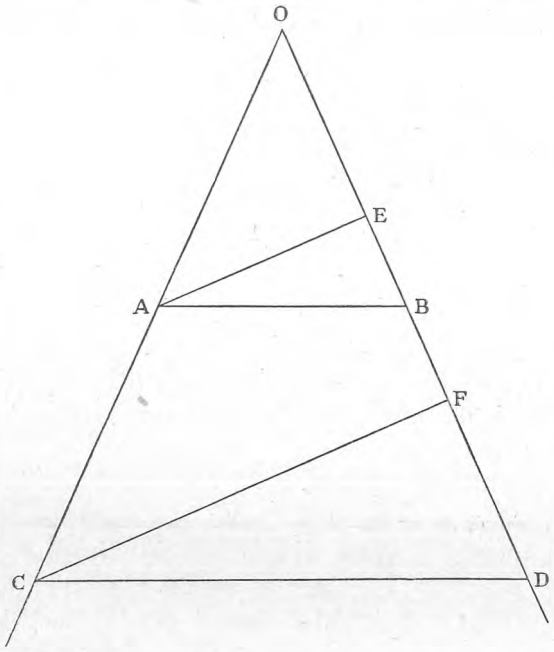
Dal che, pel fatto che, come già si vide lo sono i segmenti: c, a e c' a', si deduce in fine che lo saranno pure: $a + b$, a e $a' + b'$, a' come si voleva dimostrare.

3° lemma (conseguenza immediata del 2°). — In due triangoli simili due lati omologhi e le due corrispondenti altezze, sono segmenti atti a figurare come lati omologhi di triangoli simili.

Se ora considereremo, col LEVI, i segmenti OA, OB, OC, OD determinati da due rette parallele sui due lati d'un angolo qualunque e se in essi si conducano rispettivamente le altezze AE, CF corrispondenti ai lati OB, OD si avrà pel teorema

precedente che i segmenti: OB, OD, AE, CF saranno cateti omologhi di triangoli rettangoli simili.

Se ora sul lato sul quale si trovano i punti B, D si portano, a partire da O due segmenti OA' OC' eguali rispettivamente



ad OA, OC si potrà dire lo stesso anche delle basi e delle altezze dei triangoli isosceli OAA', OCC', cioè dei segmenti OA', OC' e AE, CF.

Dal che deriva, pel teorema già più volte applicato che anche OA, OB, OC, OD saranno cateti omologhi di triangoli rettangoli simili come si voleva provare.

§ 20. **Uso di considerazioni stereometriche.** — Abbiamo veduto che le proprietà fondamentali delle proporzioni tra segmenti, (definite mediante il parallelismo), si rispecchiano in certi teoremi di configurazione nel modo seguente:

1) la transitività dell'eguaglianza di rapporti e il teorema della ragione composta corrispondono al postulato delle parallele (transitività del parallelismo) e al teorema di DESARGUES (triangoli omotetici);

2) il teorema della ragione perturbata (che ha come

caso particolare l'invertibilità dei medi) corrisponde al teorema di PAPPO (esagono iscritto in una coppia di rette).

Le dimostrazioni di questi teoremi possono essere, sotto certi aspetti semplificate coll'uso di considerazioni stereometriche.

Il massimo vantaggio si ha in particolare pel teorema di DESARGUES; per es. due triangoli omotetici si possono riguardare come sezioni piane di due triedri colle facce parallele, ed allora il loro centro d'omotetia risulta segato sul piano dalla congiungente i vertici dei due triedri.

Del teorema di PAPPO si può fornire una dimostrazione mediante le proprietà dei due sistemi di generatrici d'un iperboloide (DONDELIN) che in particolare può scegliersi rotondo (SCHUR, *Mathem. Annalen*, Bd. 51, 1899) (1).

Un esempio caratteristico del partito che si può trarre dalle costruzioni nello spazio e in particolare dal teorema di DESARGUES per la dimostrazione di teoremi che nell'ordinarie trattazioni sono fatti dipendere dalla teoria delle proporzioni, ci è fornita dalla risoluzione data dal DE PAOLIS del problema relativo alla costruzione del decagono regolare:

Costruito un triangolo rettangolo ABC di cui il cateto AB sia doppio del cateto BC e preso su CA il segmento CD eguale a CB e da AB il segmento AE uguale ad AD, si tratta di dimostrare che nel triangolo isoscele AEF costruito su AE come base ed aventi i lati AF, EF uguali ad AB l'angolo EFA è uguale alla quinta parte di due retti.

Per ciò presi sul prolungamento di DC il segmento CG eguale a CD e quindi a CB si avrà in GBD un angolo retto. Dal che risulta

$$\widehat{GBC} = \widehat{DBA}$$

onde:

$$\widehat{CGB} = \widehat{DBA}.$$

Costruito allora entro l'angolo BAC il triangolo ALH eguale ad ABG si avrà:

$$\widehat{LHA} = \widehat{ADB}$$

onde le rette LH, DB saranno parallele.

(1) Facendo uso di considerazioni d'equivalenza, la transitività dell'eguaglianza di rapporti può farsi risultare dal fatto confronto di due parallelepipedi rettangoli costruiti convenientemente coi segmenti dati.

Preso $AM = AE$ i triangoli isosceli MDA, FLA aventi l'angolo al vertice comune avranno gli angoli alla base uguali onde anche le rette MD, FL saranno parallele.

Allora pel teorema dei triangoli omotetici applicato a MBD, FHL saranno paralleli anche i lati MB, FH.

Si considerino ora i triangoli isosceli AEF, AFH aventi gli angoli al vertice uguali ambedue ad $\widehat{ABM}$ (come risulta dall'eguaglianza di ABM, AEF e dal parallelismo di MB, FH). Essendo isoscele anche il triangolo FHE sulle base FH (poichè si ha, da una parte $AG = AB$, $AD = AE$, $DG = EH$ e dall'altra $DG = LBC = AB$, $EH = AB = EF$) risulta che $\widehat{AHF}$ è uguale alla metà di AFH e che quindi nel triangolo isoscele AEF l'angolo EFA essendo la metà di quelli alla base, è uguale alla quinta parte di due retti come si voleva provare.

ARTICOLO OTTAVO

Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee di ROBERTO BONOLA †.

L'ordinaria teoria delle parallele, oltre che sui primi postulati di *determinazione, ripartizione* (cfr. art. 3) e *congruenza* (cfr. art. 4), riposa sopra un *postulato specifico* che EUCLIDE (330-275 a. Cristo) enunciò nella forma seguente:

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due, prolungate da questa parte si incontrano.

Dal postulato discendono immediatamente:

a) *gli inversi dei primi teoremi sulle parallele;*

b) *il teorema relativo alla somma degli angoli di un triangolo;*

c) *l'esistenza delle figure simili.*

La natura e la forma poco intuitive del postulato diedero origine ad un problema, che affaticò per ben due millenni i geometri: il problema cioè della dimostrazione del *postulato delle parallele,* detto altrimenti *V postulato* o *postulato d'Euclide.*

Nella prima parte del presente articolo ci proponiamo di seguire rapidamente le vicende più notevoli attraversate dal nostro problema, che dai primi tentativi di dimostrazione del postulato vanno fino alla conquista della sua indimostrabilità ed alle moderne teorie che da essa ebbero origine.

Nella seconda parte, d'indole costruttiva, esporremo rapidamente le proposizioni fondamentali di due edifici geometrici, fondati sulla negazione del V postulato e noti sotto le denominazioni di *geometria non euclidea iperbolica e geometria non euclidea ellittica.*

PARTE PRIMA

Storia delle ricerche sulle parallele

§ 1. **Il postulato delle parallele presso i greci.** — I primi tentativi di dimostrazione risalgono ai greci e Proclo [410-485], nel suo prezioso *Commento al 1° libro di Euclide,* insieme ad osservazioni e critiche sui ragionamenti di Posidonio [1° secolo a. C.], Gemino [1° secolo a. C.], Tolomeo [87-165], ci tramanda una sua dimostrazione del V postulato.

In Posidonio e Gemino dobbiamo rilevare la tendenza a sostituire la definizione euclidea di parallele [*rette coplanari non secantesi*] con un'altra di forma grammaticale non negativa, fondata sul concetto di equidistanza; in Tolomeo e Proclo la tacita introduzione di un nuovo postulato dal quale si deduce logicamente il V di Euclide.

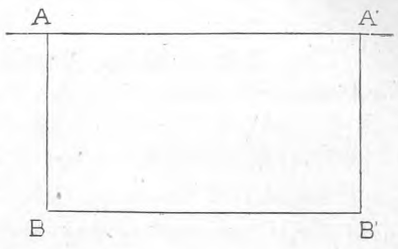
Tacendo quello di Tolomeo, perchè privo di interesse, notiamo che il postulato di Proclo, in parte enunciato, in parte sottinteso, afferma che *la distanza di due rette secantesi cresce quanto si vuole prolungando sufficientemente le due rette, mentre la distanza di due parallele si mantiene finita.* Da esso si ricava che per un punto passa una sola parallela ad una retta, e successivamente, coi noti ragionamenti, il postulato euclideo.

Un altro passo notevole realizzato dai greci possiamo rintracciarlo nel tentativo di Aganis [VI secolo?], il quale muovendo dall'ipotesi che *esistano rette equidistanti* potè costruire il punto comune a due rette, l'una perpendicolare e l'altra obliqua ad una loro trasversale comune.

§ 2. **Il postulato delle parallele presso gli arabi.** — Gli *Elementi d'Euclide* furono oggetto di parecchie traduzioni con commento arabo. Una delle più celebri, quella del geometra persiano Nasîr-Eddîn [1201-1274], ha per noi uno speciale interesse, contenendo un tentativo per ridurre a teorema il *V postulato.* Il ragionamento di Nasîr-Eddîn, al dire di Wallis ha la forma tipica delle dimostrazioni degli arabi, i

quali, non volendo concedere ad Euclide il contenuto del suo postulato, richiesero si concedesse loro qualche altra ipotesi, onde ingegnosamente dedurre la verità di quella euclidea.

Nasîr-Addîn *ammette come evidente* una lunga proposizione, la cui parte essenziale afferma che *se due rette* r *ed* s *sono la prima perpendicolare, l'altra obliqua al segmento* AB, *i segmenti di perpendicolare calati da* r *su* s *sono minori di* AB *dalla banda in cui* AB *forma con* s *angolo acuto, maggiori di* AB *dalla banda in cui* AB *forma con* s *angolo ottuso.* Segue immediatamente che se due segmenti uguali AB, $A'B'$ cadono da una stessa banda e perpendicolarmente su la retta BB', la retta AA' sarà perpendicolare essa pure ai due segmenti dati. Onde la figura $AA'B'B$ è un quadrilatero con gli angoli retti, cioè un rettangolo.



Da questo risultato Nasîr-Eddîn ricava facilmente che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti. Per il triangolo la cosa è manifesta, essendo esso metà di un rettangolo; per il triangolo qualunque si ottiene lo scopo decomponendolo in due triangoli rettangoli. Ciò premesso il nostro geometra dimostra il postulato euclideo, riferendosi prima al caso particolare di due rette, l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale comune, con un ragionamento simile a quello di Aganis; poi al caso generale, giovandosi del teorema sulla somma degli angoli di un triangolo.

§ 3. **Il postulato delle parallele durante il Rinascimento ed il XVII secolo.** — Com'è noto le prime versioni latine degli *Elementi di Euclide,* che risalgono ai secoli XII e XIII, furono compilati sui testi arabi: esse però non portano annotazioni critiche al V postulato. Altrettanto dicasi per le traduzioni fatte sui testi greci alla fine del XV e nella prima metà del XVI secolo. La critica rinasce dopo il 1550, principalmente per impulso del *Commento* di Proclo.

I commentatori di questo periodo [1550-1650], eccettuato il Cataldi, che tenta con un'intera operetta di dimostrare l'esistenza di rette equidistanti, muovono generalmente dal-

l'ipotesi che sifatte rette esistano, giustificando talvolta questa ipotesi con ragionamenti analogici.

Un altro commentatore che sfrutta ancora l'idea di rette equidistanti è GIORDANO VITALE [1633-1711]. Il tentativo di GIORDANO, pur contenendo un vizio fondamentale che toglie ogni valore alle sue conclusioni, è ugualmente interessante perchè riduce al minimo le condizioni sufficienti per l'esistenza di due rette equidistanti.

Una dimostrazione fondata su criteri ben diversi dai precedentemente notati, è dovuta al geometra inglese J. WALLIS [1616-1703].

La nuova idea, di cui siamo debitori al WALLIS, consiste nell'*ammettere in luogo del V postulato l'esistenza d'un triangolo simile ad un triangolo dato e di grandezza arbitraria,* idea ch'egli cerca giustificare per analogia col caso del cerchio (cfr. EUCLIDE, III postulato) (1).

Il metodo tenuto dal WALLIS per risolvere la questione può forse a prima vista parere soddisfacente, inquantochè la nostra intuizione sembra attestarci l'esistenza di figure d'ugual forma e non ugualmente estese, ma in fondo il concetto di forma indipendente dalla grandezza, oltre essere in tutto equivalente a quello dichiarato nella V ipotesi d'EUCLIDE, è tanto complesso da non adattarsi convenientemente alla veste di postulato.

L'equivalenza fra il postulato di WALLIS e quello d'EUCLIDE ci mostra fin d'ora che se è possibile un sistema geometrico che prescinda dall'ipotesi euclidea, non potranno in tale sistema sussistere figure simili e che la grandezza d'ogni figura sarà intimamente legata a quella dei suoi angoli.

§ 4. **Riassunto.** — Da quanto precede risulta adunque:

1°) che la difficoltà nascosta da EUCLIDE nel *V postulato* fu rilevata dai greci;

2°) che i greci tentarono di risolverla sostituendo al postulato qualche altra ipotesi [specialmente sull'esistenza di rette equidistanti] giudicata più semplice o più intuitiva;

3°) che gli arabi non portarono contributi sostanziali

(1) Il terzo postulato d'EUCLIDE enuncia infatti: Da qualsivoglia centro e con qualsivoglia intervallo si può descrivere un cerchio.

al problema, perchè la dimostrazione tipica di NASÎR-EDDÎN è modellata in gran parte su quella di AGANIS;

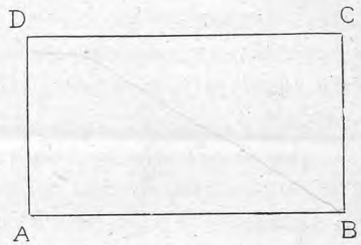
4°) che l'ipotesi sull'esistenza di rette equidistanti, sotto varie forme, fu ancora la preferita dai commentatori del Rinascimento e semplificata ulteriormente da GIORDANO VITALE;

5°) che, con J. WALLIS, la dimostrazione del postulato d'EUCLIDE può ottenersi facilmente tosto che si conceda l'esistenza di triangoli simili ad ogni triangolo dato.

§ 5. **L'opera di Gerolamo Saccheri.** — Con SACCHERI [1667-1733] muta completamente la linea direttiva delle ricerche sul nostro argomento. Profondo conoscitore dei vari tentativi fatti dai suoi predecessori, egli vuole raggiungere lo scopo cercando delle contraddizioni logiche nel seno d'una geometria sviluppata in base alle prime *26 proposizioni* euclidee ed alla negazione del *V postulato.* Il tentativo di SACCHERI è adunque un procedimento di riduzione all'assurdo.

Ecco rapidamente come procede nel suo « *Euclides ab omni naevo vindicatus; sive geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia* ».

Sia *ABCD* un quadrilatero piano in cui i lati opposti *AD, BC* sono uguali e perpendicolari alla base *AB.* Se fin da principio, si vuole lasciare impregiudicata la validità o meno del V postulato, tre ipotesi si presentano come possibili su gli ulteriori angoli $\widehat{D}, \widehat{C}$ del quadrilatero *ABCD.* Essi cioè possono essere entrambi retti [*ip. angolo retto*], entrambi ottusi [*ip. angolo ottuso*], entrambi acuti [*ip. angolo acuto*].



Nel primo caso la *somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti.* Allora, con un ragionamento simile a quello di NASÎR-ADDÎN, e col sussidio del *postulato di Archimede,* SACCHERI può rigorosamente provare la validità del V postulato.

Nel secondo caso la *somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti.* Allora, giovandosi implicitamente dell'ipotesi che *la retta è infinita,* riesce a dimostrare,

anche in questo caso, la validità del V postulato. Ma dal postulato si deduce che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, sicchè l'*ipotesi angolo ottuso,* distruggendo se stessa, dev'essere rigettata.

Nel terzo caso la *somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti.* Per tentare di distruggere anche l'*ipotesi angolo acuto* SACCHERI svolge varie proposizioni, dalle quali, se fosse rimasto nel campo puramente deduttivo, non avrebbe ottenuto la contraddizione logica di cui era in traccia. Ma tanto forte e radicata era l'idea che non potesse non dimostrarsi il postulato euclideo che SACCHERI, come tutti i suoi predecessori, *aggiunse* al suo edificio un nuovo dato intuitivo, che lo condusse a distruggere la sua terza ipotesi. Questo dato afferma che *non possono esistere due rette che si avvicinano indefinitamente senza incontrarsi* (rette asintotiche). Con il sussidio di tale ipotesi, assai meno intuitiva di tante altre utilizzate dai suoi predecessori può dichiarare falsa la sua terza ipotesi. Talchè, rimanendo possibile soltanto la prima, SACCHERI crede d'aver così dimostrato il postulato di EUCLIDE.

L'importanza dell'opera saccheriana non deve certo ricercarsi nella conclusione a cui arriva, ma sebbene in un gruppo di proposizioni, che costituisce la prima pietra di una nuova geometria indipendente dal postulato di EUCLIDE. Rileviamo le più importanti.

Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, ovvero dell'angolo ottuso, ovvero dell'angolo acuto, l'ipotesi è vera in ogni altro caso.

A seconda che si trova verificata l'ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso, dell'angolo acuto, la somma degli angoli di un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore, minore di due angoli retti e viceversa.

Una conseguenza immediata, che si ricava dai predetti teoremi è la seguente:

Se in un solo triangolo la somma degli angoli è uguale, maggiore, minore di due angoli retti, in ogni altro triangolo la somma in discorso è uguale, maggiore, minore di due angoli retti.

Sono poi notevolissime le seguenti che SACCHERI deduce nell'ipotesi dell'angolo acuto.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto:

a) *esistono una perpendicolare ed un'obliqua che non s'incontrano;*

b) *tutte le rette di un fascio possono, rispetto ad una retta* a *coplanare al fascio, classificarsi in due gruppi:* 1°) *rette che non ammettono con* a *una perpendicolare comune ed incidenti ad* a; 2°) *rette che ammettono con* a *una perpendicolare comune e non incontrano* a. *Queste ultime sono separate dalle prime mediante due rette* p, q *asintotiche ad* a.

Queste ultime, sviluppate da SACCHERI allo scopo di mostrare falsa la sua terza ipotesi, verranno ritrovate di nuovo, un secolo dopo, e saranno le proposizioni fondamentali su cui altri geometri edificheranno un sistema geometrico fondato sulla negazione del postulato di EUCLIDE.

§ 6. **L'opera di Lambert.** — Quale influenza esercitassero le ricerche di SACCHERI sui geometri del XVIII secolo non si può precisare: tuttavia è probabile che il geometra svizzero J. H. LAMBERT [1728-1777] le conoscesse, imperocchè nella sua « *Theorie der Parallelinien* » [1766] cita una dissertazione di G. S. KLÜGEL [1739-1812]; ov'è minutamente analizzata l'opera del geometra italiano.

La « *Theorie der Parallelinien* » di LAMBERT, pubblicata nel 1786, dopo la morte dell'autore, è divisa in tre parti. La prima, di natura critica e filosofica, fa cenno della duplice questione che possiamo proporci sul *V postulato,* cioè se esso possa dimostrarsi col semplice aiuto dei precedenti, ovvero con l'aiuto (*necessario*) di altri di maggiore evidenza. La seconda parte è dedicata all'esposizione di varî tentativi, in cui il postulato è ricondotto a proposizioni semplicissime, le quali però alla loro volta dovrebbero essere dimostrate. La terza la più importante, contiene ricerche simili a quelle del padre SACCHERI.

La figura fondamentale di LAMBERT è un *quadrilatero trirettangolo* e le tre ipotesi sono fatte sulla natura del 4° angolo. La prima è l'*ip. ang. retto,* la seconda è l'*ip. ang. ottuso,* la terza è l'*ip. ang. acuto.* Anche nella trattazione di queste ipotesi l'autore si accosta al metodo saccheriano.

La prima ipotesi conduce facilmente alla dimostrazione del postulato euclideo.

La seconda ipotesi viene confutata mediante l'aiuto del postulato di ARCHIMEDE.

La terza ipotesi, che corrisponde a quella dell'angolo acuto di SACCHERI, non conduce LAMBERT ad alcuna contraddizione logica.

Un importante risultato che LAMBERT aggiunge a quelli già ottenuti da SACCHERI in quest'ultima ipotesi, si riferisce alle aree dei poligoni. Chiamando *deficienza* di un triangolo la differenza fra due angoli retti e la somma dei suoi angoli, *le aree dei triangoli risultano proporzionali alle rispettive deficienze.* Questo teorema vale anche pei poligoni.

Un'altra notevole scoperta di LAMBERT intorno alla misura delle grandezze geometriche consiste in ciò che, mentre nella geometria ordinaria alla misura dei segmenti compete soltanto un significato *relativo* alla scelta di una particolare *unità,* nella geometria fondata sulla *terza ipotesi* si può invece conferirle un significato *assoluto.*

È necessario anzitutto chiarire la distinzione che qui si presenta tra *assoluto* e *relativo.* In molte questioni accade che gli elementi che si suppongono dati si possano dividere in due gruppi, per modo che quelli del *primo gruppo* restino fissi in tutto il campo delle nostre considerazioni, mentre quelli del *secondo gruppo* possano variare in una molteplicità di casi possibili. Quando ciò accade si suole spesso trascurare l'esplicita menzione dei dati del primo gruppo e considerare come *relativo* tutto ciò che dipende dai dati variabili, come *assoluto* tutto ciò che dipende soltanto dai dati fissi.

Così accade appunto in geometria. In ogni studio concreto generalmente si suppongono date certe figure, e quindi le grandezze dei loro elementi; ma oltre questi dati variabili (del *secondo gruppo*), che possono essere scelti in modo arbitrario, è sempre implicitamente presupposta l'aggiunta delle figure fondamentali: *rette, piani, fasci* ecc.... (dati fissi o del *primo gruppo*). Allora ogni costruzione, ogni misura, ogni proprietà d'una figura qualsiasi dovrà ritenersi come *relativa* se dipende essenzialmente dai dati variabili; potrà invece dirsi *assoluta* se dipende soltanto dai dati fissi (figure fondamentali), oppure se venendo enunciata in rapporto ai dati variabili, ne dipende soltanto in modo apparente, sicchè rimanga fissa al variare di questi. In questo senso è chiaro che nell'ordinaria geometria la misura dei segmenti ha necessariamente un significato relativo. Infatti l'esistenza delle trasformazioni per similitudine non ci permette in alcun modo di individuare la grandezza di un segmento rispetto alle figure fondamentali (retta, fascio, ecc...).

Per l'angolo invece si può scegliere un modo di misura che ne esprima una proprietà assoluta: basta infatti prendere il suo rapporto all'angolo di un giro, cioè all'intero fascio, che è una delle figure fondamentali.

Ritorniamo ora a LAMBERT ed alla geometria corrispondente alla *terza ipotesi.* Egli ha osservato che ad ogni segmento può farsi corrispondere un determinato angolo, facilmente costruibile. Segue da ciò che ogni segmento è in relazione con la figura fondamentale *fascio* e quindi che nella nuova (ipotetica) geometria anche *alla misura dei segmenti deve potersi attribuire un significato assoluto.*

Ma la nostra intuizione spaziale sembra attestarci che la misura dei segmenti non può avere che un significato relativo, talchè, fondandoci su questa intuizione, che potrebbe formularsi in apposito postulato, potremmo, con LAMBERT, dichiarare falsa la 3ª ipotesi!

Altre cose molto interessanti sono contenute nella « *Theorie der Parallelinien* »; ad es. il riavvicinamento della geometria che varrebbe sul piano se fosse lecita la *seconda ipotesi,* alla geometria sferica, e l'osservazione relativa all'*indipendenza* di quest'ultima dal postulato delle parallele. Riferendosi poi alla *terza ipotesi* esprimeva la seguente acuta ed originale veduta: « *Ich sollte daraus fast der Schlufs machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kügelfläche vor* ».

A questo modo di concepire le cose forse fu condotto dalla formula: $R^2 \cdot (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$, che esprime l'area di un triangolo sferico, perchè mutando in essa il raggio R nel raggio immaginario $i \cdot R$ diventa:

$$R^2(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}),$$

cioè la formula dell'area d'un triangolo piano, nella *terza ipotesi* di LAMBERT.

In conclusione LAMBERT lascia la questione sospesa; anzi, non avendo pubblicato le sue ricerche, fa supporre d'aver intravvisto qualche nuovo orizzonte.

Intanto è bene notare che pel generale insuccesso di siffatte ricerche, nella seconda metà del XVIII secolo, andava formandosi la convinzione che fosse necessario ammettere, senza dimostrazione, il postulato euclideo ovvero qualche altra ipotesi da cui esso potesse dedursi. Un tale rassegnamento,

di fronte alla nostra questione, lo si trova molto chiaramente espresso nella dissertazione di KLÜGEL, di cui facemmo menzione in principio del § 5. KLÜGEL, dopo aver esaminato con intendimento critico circa trenta dimostrazioni del postulato d'EUCLIDE, nel suo « *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* » affaccia la possibilità che il postulato sia indimostrabile e nota il fatto che la certezza della verità dell'ipotesi euclidea non è per noi un frutto di rigorose deduzioni, ma piuttosto di resultati sperimentali!

§ 7. **L'opera di Legendre.** — La critica della teoria delle parallele, che già in Italia ed in Germania aveva condotto a risultati di sì alto interesse, verso la fine del XVIII secolo ebbe anche in Francia un notevole impulso. Basti ricordare che FOURIER [1768-1830], a perfezionamento della detta teoria, proponeva nuove definizioni per la retta e pel piano; che LAGRANGE [1736-1813] ravvisava l'indipendenza della trigonometria sferica dal V postulato; che CARNOT [1753-1823] e LAPLACE [1749-1827] appoggiavano, come già WALLIS, l'idea di sostituire all'ipotesi d'EUCLIDE quella che afferma l'esistenza di figure simili; che infine A. M. LEGENDRE [1752-1833], coi suoi numerosi e svariati tentativi, diretti a sciogliere l'antica difficoltà, contribuì nel modo più efficace a mantenere vivo l'interesse dei geometri intorno alla questione delle parallele.

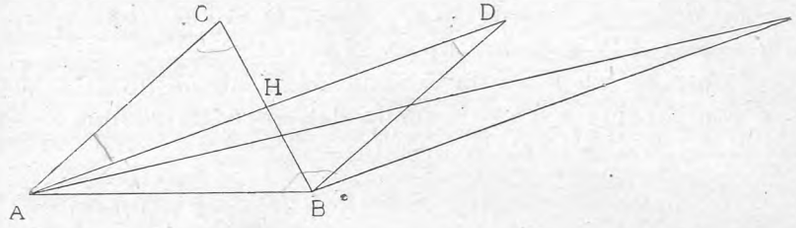
I principali risultati ottenuti da LEGENDRE, nel corso delle sue ricerche, pur essendo contenuti nell'opera di SACCHERI e di LAMBERT, offrono ugualmente un notevole interesse, non fosse altro, per la rapidità ed eleganza con cui furono raggiunti. Talchè volendo disegnare nel modo più chiaro lo stato delle cose al principio del XIX secolo, riporteremo, con lievi modificazioni nella forma, quei risultati di LEGENDRE che ci sembrano più adatti ad illustrarlo.

1) *La somma degli angoli d'un triangolo è minore od uguale a due angoli retti.*

Suppongasi, se è possibile, che $2R+\alpha$ sia la somma dei tre angoli del triangolo ABC, che in A ha l'angolo minore. Diviso allora per metà, nel punto H, il lato BC, si congiunga A con H e si prolunghi il segmento AH d'un ugual segmento HD. Dall'uguaglianza dei due triangoli AHC, BHD, si deducono le uguaglianze angolari $\widehat{CAH} = \widehat{HDB}$, $\widehat{ACH} = \widehat{HBD}$, onde che nel triangolo ABD la somma degli angoli vale

ancora $2R+\alpha$ e che uno dei due angoli $\widehat{DAB}$, $\widehat{ADB}$, che insieme compongono $\widehat{CAB}$, sarà minore od uguale alla metà di quest'ultimo.

Applicando al triangolo ADB le stesse costruzioni e ragionamenti fatti sul triangolo primitivo potremo dedurre un nuovo triangolo, in cui la somma degli angoli vale ancora $2R+\alpha$ ed in cui un angolo è minore od uguale a $\frac{\widehat{CAB}}{4}$; e così procedendo, dopo n operazioni, potremo pervenire ad un



triangolo in cui la somma degli angoli sempre vale $2R+\alpha$ ed in cui uno di questi è minore od uguale a $\frac{\widehat{CAB}}{2^n}$. Ma per n abbastanza grande, essendo $\alpha > \frac{\widehat{CAB}}{2^n}$, otterremmo un triangolo in cui due angoli presi insieme sorpasserebbero due retti, il che manifestamente è assurdo. Dunque dovrà necessariamente essere $\alpha < 0$.

Si noti che nella stabilita proposizione si fa implicitamente uso della proprietà che ha la *retta* di essere *infinita*, giacchè si suppone di poter prendere un segmento HD, doppio d'un segmento arbitrario AH. Se si volesse prescindere dalla infinità della retta, cadrebbe il teorema di LEGENDRE. A persuaderci di ciò valga la geometria sferica, nella quale il piano viene sostituito dalla superficie della sfera e la retta dal cerchio massimo. L'operazione di raddoppiare un segmento non è possibile se il segmento è più grande d'una semicirconferenza, e la somma dei tre angoli d'un triangolo è maggiore di due retti.

Dal teorema sopra dimostrato si deduce poi immediatamente.

2) *In un poligono convesso di* n *lati la somma degli angoli interni è minore od uguale a* $(2n-4)$ *angoli retti.*

Si giunge al resultato operando una decomposizione del

poligono in tanti triangoli, a mezzo di rette uscenti da un punto situato nel suo interno.

Introducendo poi per brevità la parola *deficenza* a denotare di quanto differisce da $(2n-4)$ retti la somma $\widehat{S}$ degli angoli d'un poligono convesso, ponendo cioè

avremo che: $$\alpha = (2n-4)R - \widehat{S},$$

In un poligono convesso la deficenza α è maggiore od uguale a zero.

Segue inoltre che

La deficenza d'un triangolo composto di due altri è uguale alla somma delle deficenze di questi altri.

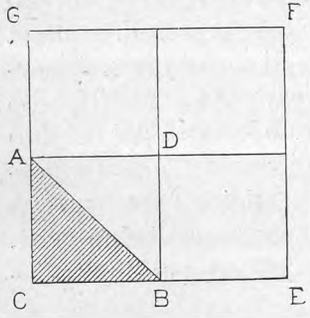
Infatti se $2R-\alpha$ è la somma degli angoli d'un triangolo componente e $2R-\beta$ quella dell'altro, la somma degli angoli del triangolo totale resulta:

$$(2R-\alpha)+(2R-\beta)-2R = 2R-(\alpha+\beta).$$

3) *Se la somma dei tre angoli d'un triangolo vale due retti, valgono pure due retti le somme degli angoli dei triangoli che da esso si ottengono a mezzo di suddivisioni con rette uscenti da un vertice.*

Poichè se nel triangolo ACD, che la retta CD stacca dal triangolo ABC, la somma valesse $2R-\alpha$ dovrebbe nell'altro triangolo rimanente DBC la somma dei tre angoli valere $2R+\alpha$, il che, per il teorema *a*), è assurdo.

4) *Se in un triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti può sempre costituirsi un quadrilatero con quattro angoli retti e quattro lati uguali, e maggiori d'ogni segmento assegnabile.*



Sia ABC un triangolo a deficenza nulla. Un tale triangolo lo supporremo rettangolo ed isoscele, giacchè se così non fosse potremmo sempre ridurci a questo caso a mezzo di suddivisioni con rette uscenti dai vertici (teorema *b*). Accostando per l'ipotenusa due siffatti triangoli comporremo un quadrilatero $ACBD$ con quattro angoli retti e quattro lati eguali. Dalla riunione conveniente di quattro simili figure risulta un nuovo quadrilatero $CEFG$, che gode delle stesse proprietà di $ACBD$ ed i cui lati sono doppi di quelli di quest'ultimo.

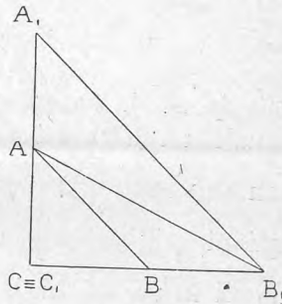
Così procedendo, dopo n operazioni, saremo condotti ad una figura con quattro angoli retti e quattro lati uguali fra loro ed uguali ciascuno a 2^n volte il lato AC. Sicchè, se n è abbastanza grande, il lato del quadrilatero a cui si perviene sorpassa in grandezza qualunque segmento grande a piacere.

Osservazione. La diagonale divide poi un siffatto quadrilatero in due triangoli rettangoli isosceli di deficenza nulla, onde dall'esistenza d'un solo triangolo in cui la somma dei tre angoli vale due retti segue l'esistenza d'un triangolo rettangolo isoscele, i cui lati sorpassano un segmento assegnato e in cui la somma degli angoli vale pure due retti.

5) *Se la somma dei tre angoli d'un triangolo è uguale a due retti, è pure due retti la somma degli angoli d'ogni altro triangolo.*

Basterà dimostrare il teorema pel triangolo rettangolo, giacchè ogni triangolo può sempre decomporsi in due, che abbiano entrambi un angolo retto.

Sia dunque ABC un triangolo rettangolo qualunque. Se in un solo triangolo la somma dei tre angoli vale due retti, pel teorema precedente potremo costruire un triangolo rettangolo $A_1B_1C_1$ che goda della stessa proprietà ed i cui cateti superino quelli di ABC. Si sovrappongano allora gli angoli retti dei due triangoli, come indica la figura e si applichi prima al triangolo $A_1B_1C_1$ poi al triangolo AB_1C_1 il teorema 3). Dedurremo allora che nel triangolo AB_1C_1 e quindi anche nel triangolo ACB la somma dei tre angoli vale due retti.



6) *Se in un solo triangolo la somma dei tre angoli è minore di due retti, in ogni altro triangolo la somma degli angoli è minore di due retti.*

Questo teorema è una immediata conseguenza del teorema 1) e del teorema precedente.

I due ultimi teoremi sono compresi nelle proposizioni di Saccheri, le quali, oltre i due casi trattati da Legendre, trattano anche il caso in cui la somma degli angoli d'un triangolo supera due retti. Questo terzo caso non può com-

parire nelle ricerche di LEGENDRE, in forza del suo primo teorema da noi riportato, teorema che ha fondamento nell'ipotesi della *infinità della retta.* Lasciando cadere questa ipotesi vien meno il teorema in discorso, ed allora l'ipotesi dell'angolo ottuso di SACCHERI ha ragione di sussistere, accanto alle altre due esaminate dal LEGENDRE.

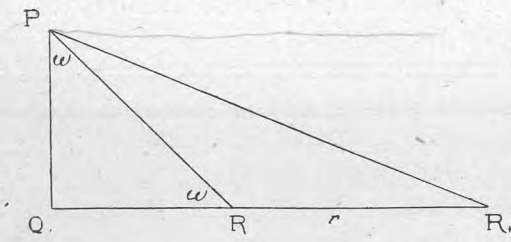
Vediamo ora quali conclusioni possono trarsi, relativamente al postulato d'EUCLIDE, dai teoremi sopra sviluppati.

7) *Se la somma dei tre angoli d'un triangolo è uguale a due retti, per un punto qualunque del piano passa una sola parallela ad una retta assegnata.*

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente

LEMMA. *È sempre possibile, per un dato punto* P, *condurre una retta che, con una retta data* r, *formi un angolo minore di un angolo assegnato.*

Infatti detto Q il piede della perpendicolare calata da P sopra r, su uno dei due raggi in cui Q divide la r si prenda un segmento $QR = PQ$ e si denoti con ω l'angolo $PRQ = RPQ$. Si costruisca poi il triangolo PRR_1 in cui l'angolo in R sia supplemento di ω ed in cui il lato RR_1 sia uguale ad RP: gli angoli adiacenti a PR_1 sono eguali, e non superano $\frac{\omega}{2}$. Procedendo nello stesso modo, dopo n operazioni, giungeremo ad un triangolo $PR_{n-1}R_n$, in cui gli angoli in R_n ed in P saranno minori od uguali a $\frac{\omega}{2^n}$, giungeremo cioè ad una retta PR_n, che partendo da P incontra la r sotto un angolo piccolo quanto si vuole.



Ritornando ora alla proposizione enunciata e mantenendo la figura da cui siamo partiti per la dimostrazione del lemma, si tracci la perpendicolare s da P alla PQ. Ogni retta, che uscendo da P incontri la r in R, formerà con le due r ed s angoli corrispondenti uguali, perchè nel triangolo PQR la somma dei tre angoli è per ipotesi uguale a due angoli retti. E siccome, pel lemma stabilito, è sempre possibile condurre per P delle rette che con la r formino un angolo piccolo a piacere, segue che tutte le rette per P, tranne la s, dovranno incontrare la r; onde s è l'unica parallela che per P possa condursi alla r.

FONDAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA
INDIRIZZO ELEMENTARE.

§ 8. **L'opera di C. F. Gauss.** — Venti secoli d'inutili sforzi e segnatamente le ultime infruttuose ricerche sul *V postulato,* indussero molti geometri, fiorenti sul principio del secolo scorso, nella convinzione che l'assetto definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema irresolubile. Non di meno l'interesse per l'argomento fu sempre vivo, e se da un lato condusse ad altri inconcludenti tentativi, dall'altro guidò alla scoperta di nuovi sistemi geometrici, i quali, pur avendo loro primo fondamento nella intuizione, si svolgono in un campo più vasto, astraendo dal principio contenuto nel *postulato euclideo.*

Tutta la difficoltà di entrare nel nuovo ordine di idee appare manifesta a chi, riportandosi a quel tempo, rifletta alla concezione allora dominante della filosofia kantiana.

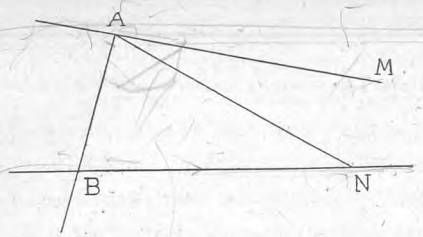
Fu GAUSS [1777-1856] il primo ad avere chiara la visione d'una geometria indipendente dal *V postulato,* visione che per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra e che venne in luce soltanto dopo le opere di LOBACEFSKI e J. BOLYAI.

I documenti che permettono una approssimata ricostruzione delle ricerche gaussiane sulle parallele sono la corrispondenza di GAUSS con W. BOLYAI, OLBERS, SCHUMACHER, GERLING, TAURINUS, BESSEL; due piccole note nei « Gött. gelehrte Anzigen » e alcuni appunti trovati fra le sue carte [1831].

Mettendo a confronto vari passi delle lettere di GAUSS è possibile delineare, a grandi tratti, due periodi nella storia delle sue ricerche.

Il primo, che dal 1792 va ai primi anni del XIX secolo, è dedicato allo studio critico dell'argomento e alla ricerca dei mezzi che potevano condurre alla dimostrazione del *V postulato.* Il secondo, iniziatosi dopo il 1813, allo sviluppo

dei teoremi fondamentali di una nuova geometria, chiamata da GAUSS prima *anti-euclidea* poi *non-euclidea*. Ecco la definizione di parallela adottata da GAUSS.



Se la retta AM, *coplanare, non incidente a* BN *è tale che ogni retta per* A, *compresa nell'angolo* BÂM, *incontri la* BN, *allora* AM *si dice parallela a* BN.

Si noti la differenza fra questa e la definizione euclidea. Infatti prescindendo dal *V postulato,* potrebbero per *A* passare altre rette diverse da *AM,* non incidenti a *BN,* le quali sarebbero parallele a *BN* soltanto con l'antica definizione.

GAUSS ha poi dimostrato che per le sue parallele sussistono i teoremi seguenti:

1° *Se* AM *è parallela a* BN, *viceversa* BN *è parallela ad* AM.

2° *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.*

E procedendo nello sviluppo della nuova geometria GAUSS ha incontrato il teorema di LAMBERT sulla proporzionalità fra l'area e la deficenza di un poligono, la presenza d'una costante indeterminata k in tutte le formule del nuovo sistema; infine la lunghezza della circonferenza di raggio r sotto la forma:

$$\pi \cdot k \cdot \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}} \right).$$

A proposito della costante k, GAUSS nota che per mettere d'accordo la nuova geometria con l'esperienza è necessario supporla immensamente grande.

§ 9. **L'opera di F. K. Schweikart e Fr. A. Taurinus.** — Contemporanei a GAUSS sono altri due investigatori, sui fondamenti della geometria, che le pazienti ricerche dei signori ENGEL e STÄCKEL hanno fatto conoscere.

Il primo di tali investigatori è FERDINANDO KARL SCHWEIKART [1780-1857]. L'unico suo scritto d'indole matematica è: *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* pubblicato a Jena e Lipsia nel 1808. Esso, contrariamente a quanto il titolo lascia

supporre, non contiene una geometria indipendente dal *V postulato:* rimanendo nel campo degli *Elementi d'Euclide,* propone soltanto una semplice sostituzione del concetto di parallelogrammo a quello di rette parallele.

In seguito però lo SCHWEIKART, entrato in altro ordine di idee, sviluppava (senza dare alla stampa) una teoria geometrica, indipendente dalla ipotesi euclidea; teoria, che, a mezzo dell'amico GERLING, faceva pervenire a GAUSS nel 1819 e gli fruttava l'approvazione di quest'ultimo.

Il secondo dei nominati investigatori è FRANZ ADOLPH TAURINUS [1794-1874], nipote dello SCHWEIKART, che nel 1825 pubblicava la *Theorie de Parallelinien* e nell'anno successivo i *Geometriae prima elementa.*

Il TAURINUS, benchè persuaso della verità assoluta del *V postulato,* riconosce tuttavia la *possibilità logica* delle altre due ipotesi che già figurano nelle ricerche di SACCHERI e di LAMBERT, nonchè il fatto che *una di esse trova sulla sfera un'interpretazione concreta.*

L'unica ragione su cui egli s'appoggia per concludere a favore della geometria d'EUCLIDE scaturisce dall'esistenza d'una costante, già incontrata da GAUSS nella geometria non-euclidea, variando la quale si otterrebbe un concetto capace di varie determinazioni, racchiudente come caso particolare lo spazio, il che appariva in contrasto con la concezione filosofica del tempo.

Il contributo più notevole portato dalle ricerche di TAURINUS sono le formule fondamentali della trigonometria non-euclidea, dedotte da quelle della geometria sferica col mutamento del raggio reale k nel raggio immaginario ik [$i = \sqrt{-1}$].

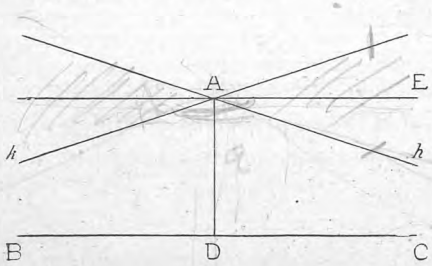
Circa l'importanza dello SCHWEIKART e del TAURINUS nella storia della geometria non-euclidea, ecco, in breve, come si esprimono i signori STÄCKEL ed ENGEL, nella loro pregevole opera, altrove citata.

Lo SCHWEIKART, per la chiarissima idea ch'ebbe di una possibile geometria, che dal *V postulato* prescinda, è da mettersi con GAUSS, al quale, per altro, rimane inferiore nello sviluppo della nuova dottrina; il TAURINUS, per la fede nell'assoluta verità della sola geometria di EUCLIDE è piuttosto da avvicinarsi al SACCHERI ed al LAMBERT, ai quali però è superiore per lo sviluppo più esteso dei nuovi sistemi, dei quali riconobbe l'esattezza logica.

§ 10. **L'opera di N. J. Lobacefski.** — Il primo a pubblicare una teoria geometrica fondata sulla negazione del *V postulato* fu il geometra russo LOBACEFSKI [1793-1856].

I suoi primi lavori sull'argomento risalgono al 1829; tuttavia per accennare nel modo più rapido il metodo da lui seguito nella costruzione della « *Geometria immaginaria* » o « *Pangeometria* », ci riferiremo alle sue « *Geometrische Untersuchungen...* » del 1840.

In esse LOBACEFSKI, dopo aver premesso un gruppo di teoremi indipendenti dalla teoria delle parallele, considera sul piano un fascio di centro A ed una retta BC che non gli appartiene. Sia AD la retta del fascio perpendicolare a BC ed AE la retta perpendicolare ad AD. La retta AE, nel sistema euclideo, è l'*unica* che non interseca BC. Nella geometria di LOBACEFSKI *esistono nel fascio A altre rette non secanti* BC: le *non secanti* sono separate dalle secanti da due rette h, k, che alla loro volta non incontrano BC. Queste rette, che l'autore chiama *parallele*, hanno ciascuna un determinato *verso di parallelismo*: la h della nostra figura corrisponde al verso destro, la k al verso sinistro. L'angolo formato dalla perpendicolare AD con una delle parallele è *l'angolo di parallelismo* corrispondente alla distanza AD. LOBACEFSKI usa il simbolo $\pi(a)$ per denotare l'angolo di parallismo corrispondente alla distanza a. Nell'ordinaria geometria si ha costantemente $\pi(a) = 90°$; in quella di LOBACEFSKI $\pi(a)$ è una ben determinata funzione di a, che tende a 90° quando a tende a zero, che tende a zero quando a tende all'infinito.



Dalla definizione di parallele l'autore deduce poi le loro principali proprietà, vale a dire la *conservazione*, la *reciprocità*, la *transività* della relazione di parallelismo (cfr. GAUSS, p. 64), e il comportamento *asintotico* delle parallele (cfr. SACCHERI, p. 36).

La dimostrazione di queste proprietà è preceduta dai teoremi sulla somma degli angoli d'un triangolo, quegli stessi già dati da LEGENDRE e prima ancora da SACCHERI. Ma la parte più importante della « *Geometria immaginaria* » è la deduzione delle formule trigonometriche.

Per dedurre queste formule l'autore introduce due nuove figure: il *Gränzlinie* (cerchio di raggio infinito) e la *Gränzfläche* (sfera di raggio infinito), che nell'ordinaria geometria sono rispettivamente la retta ed il piano. E poichè sulla *Gränzfläche*, cui appartengono ∞^2 *Gränzlinie*, può istituirsi una geometria identica alla ordinaria, in cui il *Gränzlinie* sostituisce la retta, così LOBACEFSKI ottiene questo primo notevole risultato: *Sulla Gränzfläche è valida la geometria euclidea, e in particolare l'ordinaria trigonometria piana.*

Di questa notevole proprietà e di un'altra relativa ai *Grenzlinien coassiali* (cerchi concentrici di raggio infinito) LOBACEFSKI si giova per dedurre le formule della nuova trigonometria piana e della trigonometria sferica. Queste ultime coincidono con le ordinarie formule della sfera, quando però gli elementi del triangolo siano misurati in angoli retti.

Giova notare la forma data da LOBACEFSKI alle sue formule. Se nel triangolo piano ABC denotiamo con a, b, c, i lati opposti ad A, B, C; con $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ gli angoli di parallelismo corrispondenti ai lati, la formula fondamentale di LOBACEFSKI è:

$$(4) \qquad \cos A \cdot \cos \pi(b) \cdot \cos \pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \pi(b) \cdot \operatorname{sen} \pi(c)}{\operatorname{sen} \pi(a)} = 1.$$

Si potrebbe facilmente vedere che questa formula e quella di TAURINUS [(1), p. 71] sono trasformabili l'una nell'altra.

Ecco i più notevoli risultati che LOBACEFSKI deduce dalle sue formule:

a) Per triangoli con lati piccolissimi (infinitesimi) alle formule della *trigonometria immaginaria* possono sostituirsi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, le ordinarie formule trigonometriche.

b) Il cambiamento di lati a, b, c nei lati puramente immaginari ia, ib, ic trasforma le formule della *trigonometria immaginaria* nelle formule della trigonometria sferica.

c) Istituendo sul piano e nello spazio un sistema di coordinate, simile all'ordinario cartesiano, è possibile, coi metodi della geometria analitica, calcolare le lunghezze delle linee, le aree delle superficie, i volumi dei solidi.

§ 11. **L'opera di J. Bolyai.** — Insieme a LOBACEFSKI divide la gloria della scoperta della geometria non-euclidea

il giovane ungherese GIOVANNI BOLYAI [1802-1860]. Furono le lezioni del padre WOLFANG che attirarono la sua attenzione sul postulato delle parallele, alla cui dimostrazione volle accingersi, trascurando i consigli paterni che miravano a distoglierlo dall'impresa. L'inutilità dei suoi tentativi finì ben presto per farlo entrare nel vero spirito della questione e a condurlo a edificare un sistema indipendente dal famoso postulato.

L'opera di J. BOLYAI, affidata alla stampa nel 1832 porta il titolo: « *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica* ».

Inviata poi da WOLFANG a GAUSS nel gennaio del 1832 fruttava, da parte di quest'ultimo, una lunga lettera, che ci mostra come il grande matematico trovasse l'« *Appendix* » di sua piena soddisfazione e ci illumina un poco sulla via seguita da GAUSS nelle sue proprie ricerche.

Anche dei metodi di BOLYAI, come di quelli di LOBACEFSKI non terremo parola, restringendoci semplicemente ad indicare i risultati più notevoli ottenuti dal giovane autore.

a) Definizione delle parallele e loro proprietà indipendenti dal postulato euclideo (cfr. la definizione di GAUSS).

b) Cerchio e sfera di raggio infinito. La geometria sulla sfera di raggio infinito è identica all'ordinaria geometria piana.

c) La trigonometria sferica è indipendente dal postulato di EUCLIDE. Dimostrazione diretta delle formule.

d) Trigonometria piana nel caso non-euclideo. Applicazione al calcolo delle aree e dei volumi.

e) Problemi risolubili elementarmente. Costruzione di quadrati equivalenti a particolari cerchi, nell'ipotesi della falsità del *V postulato*.

Benchè LOBACEFSKI abbia dato un maggiore sviluppo alla *geometria immaginaria*, specialmente al suo contenuto analitico, BOLYAI ha trattato più profondamente la questione della dipendenza o meno delle proposizioni geometriche dal postulato euclideo. Dove LOBACEFSKI mira principalmente a costruire un sistema geometrico sulla negazione del postulato in discorso, GIOVANNI BOLYAI mette in evidenza le proposizioni e costruzioni che nell'ordinaria geometria dal postulato

non dipendono. Siffatte proposizioni, ch'egli chiama *assolutamente vere* appartengono alla *scienza assoluta* dello spazio. La ricerca delle proposizioni di questa scienza assoluta potrebbe effettuarsi confrontando la geometria di EUCLIDE con quella di LOBACEFSKI. Tutto ciò che hanno di comune le due geometrie, ad es. le formule della trigonometria sferica, appartiene alla *geometria assoluta*.

GIOVANNI BOLYAI arriva però allo scopo direttamente.

Un elegante teorema assoluto di BOLYAI è questo:

In un triangolo piano le lunghezze delle circonferenze di raggio uguale ai lati di un triangolo stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.

Talchè, se indichiamo con a, b, c, i lati di un triangolo, con α, β, γ gli angoli opposti, con $\bigcirc x$ la lunghezza della circonferenza di raggio x, avremo:

$$(1) \qquad \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma .$$

Osserviamo che nell'ipotesi euclidea, essendo: $\bigcirc x = 2\pi x$, il *teorema di Bolyai* diventa:

$$a : b : c = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma ,$$

cioè il noto *teorema dei seni* dell'ordinaria trigonometria.

§ 12. **La diffusione della geometria non-euclidea.** — Le opere di LOBACEFSKI e BOLYAI, non ebbero, al loro sorgere, quell'accoglienza che tanti secoli di lenta e continua preparazione sembravano promettere. Questo però non deve meravigliarci, perchè la storia della scienza c'insegna che ogni radicale mutamento nelle singole discipline non abbatte d'un tratto le convinzioni, i preconcetti su cui i pensatori, gli studiosi, attraverso un lungo periodo, edificarono le loro dottrine.

Nel nostro caso l'affermazione della *geometria non-euclidea* fu ritardata anche da ragioni speciali, quali la difficoltà che offrivano alla lettura le opere russe di LOBACEFSKI, l'oscurità dei nomi dei due rinnovatori, la concezione kantiana dello spazio, dominante sul principio del secolo scorso.

A diradare le tenebre che avvolsero nei primi anni le nuove teorie giovarono molto le pubblicazioni tedesche e francesi di alcune opere di LOBACEFSKI, ma il vero trionfo

della *geometria non-euclidea* data dal giorno in cui si seppe che GAUSS fu convinto della sua validità logica e della possibilità d'uno spazio fisico che ad essa risponda. Allora l'antica questione delle parallele, attraendo, sotto un aspetto completamente nuovo, l'attenzione dei geometri, divenne centro di un vasto campo di ricerche, alcune delle quali ebbero il semplice scopo di rendere meglio accessibile al gran pubblico matematico le opere dei fondatori della *geometria non-euclidea*, altre mirarono ad allargare i risultati, il contenuto, il significato della nuova dottrina.

Queste ricerche, a seconda dei metodi, possono assegnarsi a tre principali *indirizzi*.

Il primo è l'*indirizzo elementare*, cui appartengono le opere di LOBACEFSKI e BOLYAI; il secondo è l'*indirizzo metrico differenziale*, che sorge da un lato con una classica dissertazione di RIEMANN e dall'altro con le opere di HELMHOLTZ e LIE; il terzo, che nasce dalla tendenza ad enunciare sotto forma proiettiva anche le proprietà metriche delle figure, è l'*indirizzo proiettivo*. A questi tre indirizzi principali potrebbe aggiungersene un altro, che si riattacca al concetto di FOURIER (cfr. p. 52) e mira a caratterizzare le proprietà metriche d'uno spazio per mezzo della *distanza*, assunta come idea primitiva.

Dei progressi della geometria secondo i nuovi indirizzi, parleremo brevemente in seguito.

§ 13. **Postulati equivalenti al *V postulato* euclideo.** — Prima di lasciare il campo elementare ci sembra opportuno richiamare l'attenzione del lettore su alcune proposizioni, che in un certo senso possono ritenersi come *ipotesi equivalenti al V postulato*.

Per intenderci chiaramente cominciamo col rilevare il significato di questa « equivalenza ».

Due ipotesi sono *assolutamente equivalenti*, quando ciascuna di esse si deduce dall'altra senza il sussidio di alcuna nuova ipotesi. In questo senso sono assolutamente equivalenti le due ipotesi seguenti:

a) Due rette parallele ad una terza sono paralle le fra loro.

b) Per un punto fuori d'una retta passa una sola parallela a quella retta.

Questo genere di equivalenza non ha molto interesse,

perchè le due ipotesi sono semplicemente due forme diverse d'una stessa proposizione. Vediamo piuttosto come questo concetto di equivalenza possa generalizzarsi. Supponiamo che una teoria deduttiva sia fondata sopra un certo sistema di ipotesi, che denoteremo con $\{A, B, C,... H\}$. Siano poi M ed N due nuove ipotesi, tali che dal sistema $\{A, B, C,..., H, M\}$ possa dedursi N, e dal sistema $\{A, B, C,..., H, N\}$ possa dedursi M. Indicheremo ciò scrivendo:

$$\{A, B, C,... H, M\} \cdot \supset \cdot N,$$
$$\{A, B, C,... H, N\} \cdot \supset \cdot M.$$

Allora, generalizzando il concetto di equivalenza, diremo che le due ipotesi M, N sono *equivalenti relativamente al sistema fondamentale* $\{A, B, C,... H\}$.

Insistiamo sull'importanza che il sistema fondamentale $\{A, B, C,... H\}$ ha in questa definizione. Infatti può accadere che restringendo il sistema fondamentale, tralasciando ad esempio l'ipotesi A, non siano *contemporaneamente* possibili le due deduzioni:

$$\{B, C,.... H, M\} \cdot \supset \cdot N,$$
$$\{B, C,.... H, N\} \cdot \supset \cdot M.$$

Allora, rispetto al nuovo sistema fondamentale $\{B, C,... H\}$, le due ipotesi M, N *non sono equivalenti*.

Dopo questi schiarimenti di ordine logico vediamo che cosa risulti dai precedenti sviluppi, circa la equivalenza fra talune ipotesi e l'*ipotesi euclidea*.

Assumiamo in primo luogo come sistema fondamentale di ipotesi quello formato dai postulati di *associazione* (A) e di *distribuzione* (B), che caratterizzano nel modo ordinario i concetti di retta e di piano [1]; dai postulati della *congruenza* (C) [2], dal *postulato di Archimede* (D). Relativamente a questo sistema fondamentale, che indicheremo con $\{A, B, C, D\}$, le seguenti ipotesi sono fra loro equivalenti ed equivalenti a quella formulata da EUCLIDE nel suo *V postulato*.

[1] Cfr. Articolo 3.
[2] Art. 4.

a) Gli angoli interni da una stessa parte, formati da due parallele con una trasversale sono supplementari (TOLOMEO).

b) Due rette parallele sono equidistanti (POSIDONIO).

c) Se una retta incontra una di due parallele, incontra anche l'altra (PROCLO); oppure: due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro; od anche: per un punto fuori d'una retta passa una sola parallela a quella retta.

d) D'un triangolo qualunque può sempre costruirsi un triangolo simile di grandezza arbitraria (WALLIS).

e) Per tre punti non in linea retta passa sempre una sfera (W. BOLYAI).

f) Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell'angolo (LORENZ).

α) Se due rette r, s sono l'una perpendicolare e l'altra obliqua alla trasversale AB, i segmenti di perpendicolari calati dai punti di s su r sono minori di AB, dalla banda da cui AB forma con r un angolo acuto (NASÎR-EDDÎN).

β) Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta (CLAVIUS).

γ) La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti (SACCHERI).

Supponiamo ora di restringere il *sistema fondamentale di ipotesi, prescindendo dall' ipotesi archimedea.* Allora le proposizioni *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*) anche rispetto al nuovo sistema fondamentale $\{A, B, C\}$, sono fra loro equivalenti ed equivalenti al *V postulato di Euclide.* Quanto alle proposizioni α), β), γ), pur essendo fra loro equivalenti rispetto al sistema $\{A, B, C\}$, *nessuna* è equivalente al *postulato euclideo.* Questo risultato, che mette in rilievo l'ufficio del *postulato di Archimede,* è contenuto in una recente memoria del signor M. DEHN (1900) [1]. In questa memoria viene dimostrato che l'ipotesi γ) sulla somma degli angoli di un triangolo è compatibile non solo con l'ordinaria geometria elementare, ma anche con una nuova geometria, necessariamente *non-archimedea,* dove non vale il *V postulato* ed in cui per un punto passano infinite non secanti rispetto ad una

[1] Cfr. Math. Ann. B. 53, p. 405-439: « Die Legendre'schen Satze uber die Winkelsumme im Dreieck ».

retta assegnata. A questa geometria l'autore dà il nome di: *Semi-Euklidische Geometrie.*

I successivi sviluppi della geometria non-euclidea.

Per rendere conto degli ulteriori progressi della geometria secondo gli indirizzi *metrico differenziale* e *proiettivo,* dovremmo uscire dal campo elementare, per parlare di alcune elevate teorie matematiche, quali la *geometria metrico-differenziale sopra le varietà,* la teoria dei *gruppi continui di trasformazioni,* la *geometria proiettiva pura* (sistema STAUDT) e le *geometrie metriche* ad essa subordinate. Non essendo consentaneo all'indole di questo volume, entrare in questioni troppo elevate, ci restringeremo alle sole cose necessarie per fare comprendere al lettore lo spirito che informa le nuove ricerche, e condurlo a un nuovo sistema geometrico, dovuto a RIEMANN, che le precedenti ricerche escludevano fin dal principio, coll'ammettere la infinità della retta. Questo sistema va anche conosciuto sotto il nome del suo fondatore e corrisponde all'ipotesi dell'angolo ottuso di SACCHERI e LAMBERT.

A) - Indirizzo metrico-differenziale.

§ 14. **Prime nozioni intorno alle superficie a curvatura costante.** — Per facilitare lo scopo proposto conviene muovere dalle considerazioni seguenti.

Data una superficie, proponiamoci di vedere fino a che punto si possa fondare sopra di essa una geometria analoga a quella del piano.

Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna la minima distanza fra i due punti sulla superficie. Una tal linea è la *geodetica* congiungente i due punti A, B della superficie. Se si tratta per es. di una sfera, la geodetica, che congiunge una coppia di punti (non estremi di un diametro), è un arco del cerchio massimo ch'essi determinano.

Ora, volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria sul piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella (misuranti le distanze sopra la superficie), con le rette di questo; ed anche di considerare

come (*geodeticamente*) *eguali,* sopra una superficie, due figure (tracciate su di essa) che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

A questo concetto di uguaglianza si può pervenire in un modo intuitivo se si ammette che la superficie sia realizzata con un foglio *flessibile* ed *inestendibile* e che con un movimento della superficie, in cui questa non rimanga rigida ma si fletta come è detto innanzi, le figure superficiali da noi chiamate uguali possano sovrapporsi l'una all'altra.

Prendiamo come esempio un pezzo di superficie cilindrica, che per semplice flessione senza estensione, duplicazione e rottura possa *applicarsi* sopra una regione piana. È chiaro che in questo caso dovranno chiamarsi uguali *sulla superficie* due figure le quali si distendano sopra figure piane uguali; ben inteso che due figure siffatte non sono generalmente uguali *nello spazio.*

Ritornando ad una superficie qualsiasi, il sistema di convenzioni innanzi accennato dà origine ad una *geometria sopra la superficie,* che intendiamo sempre di considerare per regioni convenientemente limitate (dette *normali*). Due superficie applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria; così per es. sopra una superficie cilindrica ed in genere sopra una qualsiasi superficie *sviluppabile,* si avrà una geometria assimilabile a quella d'una superficie piana.

Un esempio di geometria sopra una superficie, essenzialmente diversa da quella del piano, ci è dato dalla geometria sferica, perchè è impossibile applicare una porzione di sfera sopra il piano.

In questo esempio abbiamo però una notevole analogia con la geometria piana: questa analogia trova il suo fondamento nel fatto che la sfera può muoversi liberamente su se stessa precisamente come il piano; sicchè valgono per le figure uguali sulla sfera delle proposizioni in tutto analoghe ai postulati della congruenza sul piano.

Cerchiamo di generalizzare questo esempio. Affinchè una superficie convenientemente limitata possa muoversi, con flessione senza estensione, su se stessa al modo stesso d'una superficie piana, occorre che un certo numero (invariante rispetto alle predette flessioni) abbia un valore costante in

tutti i punti della superficie. Questo numero è stato introdotto da GAUSS col nome di *curvatura* [1].

Si possono costruire effettivamente delle superficie a curvatura costante distinguendo i tre tipi possibili:

$$C=0 \qquad C>0 \qquad C<0.$$

Per $C=0$ si hanno le superficie sviluppabili (applicabili sul piano); per $C>0$ si hanno le superficie applicabili sopra una superficie sferica $\left(\text{di raggio } \sqrt{\frac{1}{C}}\right)$, la quale può riguardarsi come *modello* di esse.

Per la $C<0$ si hanno le superficie applicabili sulla *pseudosfera,* la quale può assumersi come modello per le superficie a curvatura costante negativa.

La pseudosfera è una superficie di rotazione: l'equazione della curva meridiana (*trattrice*) [2] riferita all'asse di rotazione z e ad una retta x perpendicolare a z e convenientemente scelta è:

$$(1) \qquad z = k \cdot \log \frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2},$$

dove C è legato alla curvatura k della superficie dalla relazione seguente:

$$C = -\frac{1}{k^2}.$$

[1] Rammentando che per curvatura d'una linea piana in un punto s'intende l'inversa del raggio del cerchio osculatore in quel punto (cerchio che ha tre punti infinitamente vicini, comuni con la curva) ecco come può definirsi la curvatura di una superficie, in un suo punto M.

Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve ch'esso sega sulla superficie. Fra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature (sopra definite) godono delle proprietà di massimo o minimo. Il prodotto di tali curvature dà la curvatura della superficie nel punto M (GAUSS). Alla curvatura di GAUSS compete poi uno spiccatissimo carattere; essa si mantiene invariata per una flessione senza estensione della superficie; talchè se due superficie sono applicabili, nel senso indicato nel testo, debbono, nei punti corrispondenti, avere la stessa curvatura (GAUSS). Questo, risultato invertito dal MINDING, nel caso delle superficie a curvatura costante, rende manifesto che le superficie liberamente mobili sopra se stesse sono caratterizzate dalla costanza nella curvatura.

[2] La trattrice può definirsi geometricamente come quella curva in cui il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l'asintoto ha una lunghezza costante.

Sulla pseudosfera generata dalla (1) può adagiarsi qualunque porzione di superficie di curvatura costante $C = -\frac{1}{k^2}$.

§ 15. **Geometria sopra le superficie a curvatura costante.** — Fra la geometria sopra una superficie a curvatura costante e quella d'una porzione di piano, prese l'una e l'altra con le opportune limitazioni, intercede una analogia, che possiamo mettere in evidenza *traducendo* le prime definizioni e proprietà dell'una in quelle dell'altra, com'è sommariamente indicato dalla contrapposizione di frasi che si osserva nel seguente quadro:

a) Superficie	*a*) Regione di piano
b) Punto	*b*) Punto
c) Geodetica	*c*) Retta
d) Arco di geodetica	*d*) Segmento rettilineo
e) Proprietà lineari della geodetica	*e*) Postulati relativi all'ordinamento dei punti sulla retta
f) Due punti determinano una geodetica	*f*) Due punti determinano una retta
g) Proprietà fondamentali dell'uguaglianza di archi geodetici e di angoli	*g*) Postulati della congruenza segmentaria ed angolare
h) Se due triangoli geodetici hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali.	*h*) Se due triangoli rettilinei hanno uguali due lati e l'angolo compreso anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali.

Segue che si possono ritenere comuni alla geometria delle superficie in discorso tutte quelle proprietà pertinenti a regioni limitate di piano, che nell'assetto euclideo sono indipendenti dal postulato delle parallele, e nella cui dimostrazione non si fa uso del piano completo (per es. dell'infinità della retta).

Procediamo ora a confrontare, con le corrispondenti della superficie, quelle proposizioni relative alla regione piana, che sono in connessione con l'ipotesi euclidea. Si ha, per es., che sul piano la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti. La proprietà corrispondente non è generalmente vera sulla superficie.

Infatti è noto che sulla sfera la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti. Sulla pseudosfera invece detta somma è minore di due angoli retti. Segue che le proprietà delle superficie di curvatura costante, legate al valore della somma degli angoli di un poligono, non saranno le stesse per tutte le superficie, ma dipenderanno dalla curvatura di esse.

La geometria delle superficie a curvatura nulla e a curvatura costante positiva ci è nota perchè corrisponde alla geometria piana euclidea ed alla geometria sferica. Quella delle superficie a curvatura costante negativa fu studiata da MINDING [1839-40], il quale assegnò le relazioni fondamentali fra i lati e gli angoli d'un triangolo geodetico. Queste relazioni (trigonometria pseudosferica) corrispondono a quelle della *geometria* di LOBACEFSKI-BOLYAI.

§ 16. **Raffronto colla Geometria non-euclidea del piano.** — Appare dai risultati precedenti che le proprietà relative alla somma degli angoli d'un triangolo, nella geometria sopra una superficie a curvatura costante, corrispondono rispettivamente:

per $C = 0$, a quelle che si hanno nel piano nell'*ip. angolo retto;*
per $C > 0$, a quelle che sussisterebbero nel piano in forza dell'*ip. ang. ottuso;*
per $C < 0$, a quelle che si avrebbero nel piano in forza dell'*ip. ang. acuto.*

Il risultato per $C = 0$ è a priori evidente, perchè si tratta di superficie sviluppabili.

L'analogia fra la geometria sulle superficie a curvatura costante positiva o negativa e la geometria che si otterrebbe nel piano rispettivamente nell'*ip. ang. ottuso* e nell'*ip. ang. acuto* si lascia ulteriormente proseguire determinando le *relazioni trigonometriche* fra gli elementi dei triangoli geodetici appartenenti alle superficie in discorso.

Risulta così che la geometria sopra una superficie a curvatura costante positiva o negativa si può considerare come

una *interpretazione concreta della geometria non-euclidea che si ottiene in una regione limitata di piano, adottando l'ip. ang. ottuso o quella dell'ang. acuto.* Il seguito delle deduzioni ricavate da tali ipotesi dovrà dunque condurre ad un sistema geometrico logicamente coerente. Questa conclusione, per quanto concerne l'*ip. ang. ottuso,* sembra contrastare con la dimostrazione dell'assurdità di essa data da SACCHERI, LAMBERT, LEGENDRE. La contraddizione si elimina però facilmente riflettendo che quelle dimostrazioni erano ottenute non solamente con l'uso delle proprietà fondamentali pertinenti ad una regione di piano, ma (uscendo da questa) col tener conto della infinità della retta.

§ 17. **Fondamenti d'una Geometria piana secondo le idee di Riemann.** — Le precedenti osservazioni ci guidano a porre i fondamenti d'una geometria metrica prescindendo dal postulato di EUCLIDE e adottando un punto di vista più generale di quello innanzi tenuto.

a) Ammettiamo di partire da una regione limitata di piano, non dall'intero piano;

b) concediamo come postulati quelle proposizioni elementari, rivelateci dai sensi, nella regione inizialmente presa; proposizioni relative alla determinabilità della retta, alla congruenza ecc.;

c) ammettiamo che le proprietà della regione iniziale si possano estendere ad ogni intorno di un punto qualunque del piano (non diciamo al piano completo abbracciato con un solo sguardo).

La geometria sviluppata in base a questi principii sarà la più generale geometria piana, conciliabile coi dati che esprimono il risultato delle nostre esperienze, prese in un senso rigoroso, ma limitate ad un campo accessibile.

In base a quanto si disse nel § 16 è chiaro che la detta geometria troverà una concreta interpretazione in quella delle superficie a curvatura costante.

Ma tale corrispondenza sussiste soltanto dal punto di vista (differenziale) secondo cui si confrontano soltanto delle regioni limitate. Se ci si pone invece dal punto di vista (integrale) secondo cui si confrontano la geometria dell'intiero piano e la geometria sopra la superficie, il riscontro non sussiste più. Già infatti sotto questo aspetto non può

dirsi nemmeno che sopra due superficie con una medesima curvatura costante valga la medesima geometria. Per es. il cilindro circolare ha una curvatura nulla ed una regione di esso può svilupparsi sopra una regione di piano, ma l'intero cilindro non è applicabile in tal modo sopra l'intero piano. La geometria integrale sul cilindro differisce perciò da quella dell'intero piano euclideo. Infatti, vi sono sul cilindro delle geodetiche chiuse (sezioni circolari) e generalmente due geodetiche di esso (eliche) s'incontrano in un numero infinito di punti, anzichè in due.

Differenze analoghe intercederanno in generale fra una delle geometrie metriche non-euclidee, che potranno fondarsi sulla base dei postulati sopra enunciati, e la geometria d'una corrispondente superficie a curvatura costante.

Quando tentiamo di abbracciare in un senso integrale la geometria sopra una superficie a curvatura costante (per es. sulla sfera o sulla pseudosfera) vediamo in generale che la proprietà fondamentale di una regione convenientemente limitata (*regione normale*), per es. quella relativa alla determinazione della geodetica passante per due punti, cessano di valere. Questo fatto non è però una conseguenza necessaria delle ipotesi su cui si basa, nel senso anzidetto, una metrica non-euclidea generale del piano. Infatti quando si domandi se è logicamente possibile un sistema di geometria piana soddisfacente alle condizioni *a*), *b*), *c*) e tale che i postulati della congruenza e quello di determinazione della retta valgano nel piano completo, si ottengono, oltre l'ordinario sistema euclideo, i due sistemi geometrici seguenti:

1°) *Il sistema di* LOBACEFSKI-BOLYAI, già innanzi incontrato, dove esistono per un punto due parallele ad una retta.

2°) *Un nuovo sistema* (*detto di* RIEMANN), che corrisponde all'*ip. ang. ottuso* di SACCHERI, e dove non esistono rette parallele.

In quest'ultimo sistema la retta è una linea chiusa, di lunghezza finita: si evita perciò la contraddizione cui si andrebbe incontro supponendo la retta aperta (infinita) ipotesi che entra nello stabilire il teorema dell'angolo esterno di EUCLIDE e nelle considerazioni di SACCHERI.

La possibilità logica del sistema riemanniano si può desumere dandone l'interpretazione concreta, che si ottiene tra-

ducendo le ordinarie locuzioni della geometria della stella [1] col seguente dizionario:

Stella	Piano
retta	punto
piano (fascio)	retta
angolo (di due rette nel fascio) [2]	segmento
diedro (di due piani nel fascio)	angolo
triedro.	triangolo.

Il teorema che la somma dei diedri di un triedro è maggiore di due retti si esprime allora dicendo che « *la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due angoli retti* ».

Questo risultato concorda pienamente con l'*ip. ang. ottuso.*

È poi da notarsi che sul piano di RIEMANN tutte le perpendicolari ad una retta concorrono in un punto. Questa proprietà è la traduzione di un noto teorema di geometria della stella, per il quale tutti i piani della stella, perpendicolari ad un piano dato, passano per una retta, per la retta perpendicolare a questo piano.

Se in ogni retta del piano di RIEMANN facciamo corrispondere il punto in cui concorrono le perpendicolari, alla retta data, otteniamo una corrispondenza che gode delle seguenti proprietà:

1°) I punti corrispondenti alle rette di un fascio appartengono ad una retta.

2°) A questa retta corrisponde il centro del fascio.

Queste due proprietà d'una corrispondenza piana sono caratteristiche delle *polarità* studiate dalla Geometria proiettiva: sicchè potremo chiamare la corrispondenza sopra definita col nome di *polarità assoluta* del piano di RIEMANN.

La polarità assoluta del piano di RIEMANN, è la traduzione della corrispondenza che nasce nella stella associando ad ogni piano la retta ortogonale — cioè della *polarità ortogonale* della stella.

[1] S'intende per stella l'insieme delle rette e dei piani per un punto. La Geometria della stella è costituita dall'insieme delle relazioni fra angoli, diedri ecc. a cui danno luogo le figure della stella.

[2] Si osservi che nella geometria della stella l'angolo di due rette è formato dalla riunione di due angoli opposti al vertice. Analoga osservazione pei diedri e pei triedri.

§ 18. **Sulla possibilità di realizzare nello spazio euclideo delle superficie di curvatura costante sulle quali valgano integralmente le proprietà dei piani non-euclidei.** — Sebbene, come abbiamo detto, la geometria di una superficie a curvatura costante (positiva o negativa) dello spazio euclideo, non rispecchi in generale la intera geometria non-euclidea del piano di LOBACEFSKI e di RIEMANN si può domandare se un tale riscontro possa aver luogo per una qualche superficie particolare.

A questa domanda si risponde:

1°) *Non esiste alcuna superficie regolare (analitica) su cui valga nella sua integrità la geometria di Lobacefski-Bolyai* [Teorema di HILBERT].

2°) *Una superficie sopra cui valesse nella sua integrità la geometria del piano riemanniano dovrebbe essere necessariamente chiusa.*

La sola superficie regolare chiusa a curvatura costante positiva è la sfera [Teorema di LIEBMANN].

Ma sulla sfera, nelle cui regioni normali è valida la geometria riemanniana, due rette s'incontrano in due punti (opposti).

Concluderemo pertanto:

Nello spazio ordinario (euclideo) *non esiste alcuna superficie, che, nella sua completa estensione, soddisfi integralmente alle proprietà dei piani non euclidei.*

È bene notare che la sfera, fra tutte le superficie a curvatura costante, soddisfa ai postulati della congruenza non solo in regioni normali, ma sulla intera superficie, abbracciata d'uno sguardo. Questo fatto ci suggerisce un modo d'enunciare i postulati della geometria piana, che non esclude a priori la possibile esistenza di un piano con tutti i caratteri della sfera, compreso quello relativo ai punti opposti.

Si potrebbe infatti richiedere che sul piano fossero soddisfatti:

I. *I postulati* a), b), c), *delle regioni normali;*

II. *I postulati della congruenza sull'intero piano.*

Si troverebbero allora:

i tre sistemi geometrici { di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN *(tipo-ellittico)*,

precedentemente incontrati, in cui due punti determinano senza eccezione una retta;

un altro sistema geometrico, di RIEMANN *(tipo-sferico),* in cui due rette hanno sempre due punti in comune.

Il piano che corrisponde a quest'ultimo sistema, a differenza degli altri due piani non euclidei, può essere completamente rappresentato sopra una superficie di curvatura costante dello spazio ordinario: sulla superficie della sfera.

§ 19. **Fondamenti d'una Geometria spaziale secondo Riemann.** — Rivolgendoci ora allo spazio, partiamo dal fondamento filosofico che i postulati, sebbene ad essi si accordi per ipotesi un valore rigoroso, esprimono delle verità d'indole sperimentale, verificabile, solo in una regione limitata, ed ammettiamo che in base ai detti postulati i punti dello spazio siano rappresentati da tre coordinate x_1, x_2, x_3.

In tale rappresentazione (analitica) ogni linea verrà a corrispondere a tre equazioni parametriche:

$$x_1 = f_1(t), \qquad x_2 = f_2(t), \qquad x_3 = f_3(t);$$

ed allora potremo proporci di determinare una funzione s, del parametro t, che esprima la lunghezza d'un arco di curva.

Stante la proprietà distributiva, per la quale la lunghezza d'un arco è uguale alla somma delle lunghezze delle parti in cui può immaginarsi diviso, una tale funzione sarà pienamente determinata quando si conosca la distanza elementare ds di due punti infinitamente vicini, di coordinate:

$$x_1,\ x_2,\ x_3; \qquad x_1 + dx_1, \qquad x_2 + dx_2, \qquad x_3 + dx_3.$$

Le ipotesi assai generali da cui muove RIEMANN, vengono soddisfatte nel modo più semplice se si assume come espressione del quadrato della distanza elementare una forma quadratica, sempre positiva, nei differenziali delle variabili, se si pone cioè:

$$ds^2 = \Sigma a_{ij} dx_i dx_j,$$

nella quale le a_{ij} sono funzioni di x_1, x_2, x_3.

Ammettendo ora il principio della sovrapponibilità delle figure, si potrebbe dimostrare che le funzioni a_{ij} debbono essere di tale natura da permettere, in seguito ad un opportuno mutamento del sistema di coordinate, che il ds^2 assuma la forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{C}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

nella quale la costante C è ciò che il RIEMANN, per estensione del concetto gaussiano, denomina convenzionalmente *curvatura dello spazio.*

A seconda poi che C è maggiore, uguale, minore di zero abbiamo lo spazio a curvatura costante positiva, lo spazio a curvatura nulla, lo spazio a curvatura costante negativa.

Facciamo un passo ulteriore, ammettendo di estendere allo spazio completo il principio di sovrapponibilità (movimenti) e il postulato per cui la retta è determinata, senza eccezione, da due punti: si trovano allora tre forme spaziali, cioè tre geometrie logicamente possibili e conciliabili coi dati da cui siamo partiti.

La prima di tali geometrie (*geometria ellittica*) rispondente alla curvatura positiva, è caratterizzata dal fatto che in ogni piano vale il sistema di RIEMANN, per la qual cosa lo spazio a curvatura positiva sarà illimitato e finito in tutte le direzioni; la seconda, rispondente alla curvatura nulla, è l'ordinaria geometria d'EUCLIDE (*geometria parabolica*); la terza infine, che risponde al valore negativo della curvatura (*geometria iperbolica*), dà luogo in ogni piano al sistema di LOBACEFSKI e BOLYAI.

§ 20. **L'opera di H. Helmholtz e le ricerche di S. Lie.** — Anche H. HELMHOLTZ [1821-1894], in alcuni suoi scritti d'indole matematica e filosofica, ha trattato la questione relativa ai fondamenti della Geometria. Invece di assumere a priori la forma.

$$ds^2 = \Sigma a_{ij} dx_i dx_j,$$

come espressione della distanza elementare, egli ha fatto vedere che questa espressione, nella forma datale da RIEMANN per gli spazî di curvatura costante, è la sola possibile, quando alle ipotesi di RIEMANN si aggiunga, fin da principio, quella riguardante la sovrapponibilità delle figure, in modo conforme al movimento dei *corpi rigidi.*

Il problema di RIEMANN-HELMHOLTZ è stato sottoposto

ad una profonda critica da S. LIE [1842-1899]. Il quale è partito dall'idea fondamentale, rilevata da KLEIN nelle ricerche di HELMHOLTZ, che *essere due figure congruenti significa potersi trasformare l'una nell'altra mediante una certa trasformazione puntuale dello spazio e che le proprietà per cui la congruenza assume l'aspetto logico di uguaglianza sono inerenti al fatto che i movimenti formano un gruppo di trasformazioni.*

Pertanto il problema di RIEMMAN-HELMHOLTZ venne messo dal LIE sotto la forma seguente:

Determinare tutti i gruppi continui dello spazio, che, entro una regione limitata, godono delle proprietà dei movimenti.

Postulato convenientemente tali proprietà, in relazione al concetto di *libera mobilità* degli elementi lineari e superficiali uscenti da un punto, si trovano *tre tipi di gruppi*, i quali caratterizzano le tre geometrie di EUCLIDE, di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN.

B) - INDIRIZZO PROIETTIVO.

§ 21. **Subordinazione della Geometria euclidea alla proiettiva.** — Finalmente anche la *geometria proiettiva* sta in un'elegante relazione coi tre sistemi geometrici di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN e di EUCLIDE.

Per dare un'idea anche di quest'ultimo modo di trattare il problema, rammentiamo che la geometria proiettiva, secondo il sistema di G. C. STAUDT [1798-1867], riposa esclusivamente sopra *nozioni grafiche*, relative ai punti, alle rette, ai piani, e bandisce sistematicamente ogni concetto *di congruenza e di movimento* (quindi di *misura* ecc.). Per la qual cosa la geometria proiettiva, prescindendo da un certo gruppo di postulati, comprenderà un numero più ristretto di proprietà generali. Le quali (per quanto concerne le figure piane) sono le proprietà (*proiettive*) che restano invariate per proiezioni e sezioni.

Non di meno, fondata nello spazio la geometria proiettiva, possono *introdursi nell'organismo di essa i concetti metrici, come relazioni con certi enti (metrici) particolari.* Restringendoci al caso del piano (euclideo) vediamo di quale interpretazione grafica siano suscettibili *i concetti metrici fondamentali di parallelismo e di ortogonalità.*

Giova, a tale scopo, considerare in modo speciale *la retta all'infinito* del piano e *l'involuzione assoluta*, che su di essa determinano le coppie di raggi ortogonali di un fascio. I punti doppî di tale involuzione, immaginarî coniugati, vengono denominati *punti ciclici*, per la loro proprietà di appartenere a tutti i cerchi del piano [PONCELET].

Ciò posto, il *parallelismo* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà che esse hanno di concorrere in un punto della retta all'infinito; l'ortogonalità* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà dei loro punti all'infinito, di essere coniugati nella involuzione assoluta cioè di separare armonicamente i punti ciclici* [CHASLES].

Altre proprietà metriche, che possono esprimersi graficamente sono quelle inerenti alle grandezze angolari, imperocchè ogni relazione:

$$F(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \ldots) = 0$$

fra gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \ldots$ può sostituirsi con l'altra:

$$F\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i}, \ldots\right) = 0,$$

in cui $a, b, c,$ sono i birapporti formati dai lati degli angoli con le rette (immaginarie) proiettanti dal loro vertice i punti ciclici del piano [LAGUERRE].

Più in generale si dimostra che la congruenza tra due figure piane qualunque può esprimersi con una relazione grafica di esse colla retta all'infinito e l'involuzione assoluta. E poichè la congruenza è il fondamento di tutte le proprietà metriche, segue che la retta all'infinito e l'involuzione assoluta permettono di subordinare alla geometria proiettiva tutte le proprietà della geometria metrica. *Le proprietà metriche compariscono dunque nella geometria proiettiva non come proprietà grafiche delle figure considerate in sè stesse, ma come proprietà grafiche in relazione agli enti metrici fondamentali costituiti dalla retta all'infinito e dalla involuzione assoluta.*

L'insieme degli enti metrici fondamentali si denota brevemente *assoluto del piano* [CAYLEY].

Quanto abbiamo detto per il piano si estende naturalmente allo spazio. Nello spazio gli enti metrici fondamentali, che permettono di subordinare le proprietà metriche alle grafiche, sono *il piano all'infinito ed una certa polarità (pola-*

rità assoluta) su questo piano, segata dalla polarità della stella che ad ogni retta fa corrispondere il piano ortogonale. La conica fondamentale di detta polarità è il cerchio all'infinito, comune a tutte le sfere.

§ 22. **Subordinazione delle geometrie non-euclidee alla Geometria proiettiva.** — Sorgono ora spontanee le due domande:

1°) *Nelle ipotesi non-euclidea è possibile la fondazione della Geometria proiettiva?*

2°) *Data la possibilità di tale fondazione, le proprietà metriche potranno, come nel caso euclideo, subordinarsi alle proiettive?*

La risposta è affermativa per entrambe. Se nello spazio è valido il sistema di RIEMANN, la fondazione della geometria proiettiva non offre difficoltà alcuna, pel fatto che si trovano senz'altro verificate le proprietà grafiche, che stanno a base dell'ordinaria proiettiva dopo l'introduzione degli enti improprî. Se nello spazio è valido il sistema di LOBACEFSKI-BOLYAI, si può ancora fondare la geometria proiettiva introducendo, con opportune convenzioni, dei *punti*, *rette* e *piani improprî*, (o *ideali*), per mezzo dello stesso criterio, che ordinariamente si segue nel caso euclideo, per completare lo spazio con gli elementi all'infinito. Basterebbe perciò considerare accanto alla *stella propria* [insieme delle rette passanti per un punto], le due *stelle improprie*, formate l'una da tutte le rette parallele in uno stesso senso ad una retta data, l'altra da tutte le perpendicolari ad un piano dato, ed introdurre dei *punti improprî*, da riguardarsi come *centri* di queste stelle.

Se non che i punti improprî appartenenti ad un piano, non possono in questo caso, come nell'euclideo, assegnarsi ad una retta *(retta all'infinito)*: essi costituiscono una intera regione, separata dalla regione dei punti effettivi (punti *proprî*) da una conica *(conica limite o all'infinito)*. Questa conica è il luogo dei punti *improprî* determinati dalle rette parallele del piano. Nello spazio i punti *improprî* sono separati dai punti proprî da una *quadrica* non rigata *(quadrica limite o all'infinito)*, luogo dei punti *improprî* d'intersezione delle rette parallele.

Stabilita la validità della geometria proiettiva anche nelle

ipotesi non-euclidee [KLEIN (1)], per ottenere la subordinazione della metrica alla proiettiva basta considerare, come nel caso euclideo, *gli enti metrici fondamentali (assoluto)* ed interpretare le proprietà metriche delle figure come relazioni grafiche di esse rispetto a questi enti.

Sul piano di LOBACEFSKI-BOLYAI l'ente metrico fondamentale è la conica limite che separa la regione dei punti proprî da quella dei punti improprî; sul piano di RIEMANN è una *conica immaginaria* definita dalla *polarità assoluta* del piano (cfr. p. 118). Tanto nell'uno, quanto nell'altro caso le *proprietà metriche* delle figure sono tutte *le proprietà grafiche, che rimangono inalterate nelle trasformazioni proiettive* (2) *che lasciano fisso l'assoluto.*

Queste trasformazioni proiettive costituiscono poi gli ∞^3 *movimenti* del piano non-euclideo.

Nel caso euclideo le nominate trasformazioni (che non alterano l'assoluto) sono le ∞^4 similitudini fra cui, in particolare, si trovano gli ∞^3 movimenti.

Nello spazio la subordinazione della metrica alla proiettiva si fa per mezzo della quadrica limite [*assoluto dello spazio*]. Se questa è reale si ottiene la geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI, se è immaginaria si ottiene la geometria di RIEMANN (tipo ellittico).

Le proprietà metriche delle figure sono dunque le proprietà grafiche dello spazio in relazione al suo assoluto, cioè *le proprietà grafiche che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni proiettive che lasciano fisso l'assoluto dello spazio.*

Come si esprimono, rispetto all'assoluto, i concetti di distanza e di angolo?

Introdotto sul piano proiettivo un sistema qualunque di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3), che permetta di rappresen-

(1) La questione dell'indipendenza della geometria proiettiva dalla teoria delle parallele è rapidamente toccata da KLEIN nella sua prima pubblicazione « *Ueber die sogennante Nicht-Euklidisce Geometrie* », Math. Ann. IV, p. 573-625, [1871]. Un più ampio sviluppo della questione si può vedere nella seconda pubblicazione di KLEIN sullo stesso argomento; Math. Ann. VI, p. 112-145, [1873].

(2) È noto che per *trasformazione proiettiva* s'intendono quelle trasformazioni che fanno corrispondere ad un punto un punto, ad una retta una retta, a punto e retta che si appartengono punto e retta che si appartengono.

tare la retta con equazioni lineari, l'equazione della quadrica assoluto sarà del tipo:

$$\Omega_{xx} = \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Allora la distanza di due punti, $(x_1 x_2 x_3)$, $(y_1 y_2 y_3)$ viene espressa (a meno d'un fattore costante) dal *logaritmo del birapporto del gruppo ch' essi formano coi punti* M, N, *in cui la loro congiungente incontra l' assoluto.*

Ponendo poi:

$$\Omega_{xy} = \Sigma a_{ij} x_i y_i$$

e rammentando, dalla geometria analitica, che il birapporto dei quattro punti X, Y, M, N è dato da:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

l'espressione D_{xy} della distanza sarà dunque:

$$D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}};$$

ovvero, introducendo le funzioni inverse delle circolari ed iperboliche (1):

$$D_{xy} = ik \operatorname{arc\,cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = k \operatorname{arc}\, Ch \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

$$D_{xy} = ik \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = k \operatorname{arc}\, Sh \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

(1) Le relazioni fra le funzioni circolari e la funzione logaritmica sono contenute nelle seguenti identità:

$$\cos\left[\frac{\log a}{2i}\right] = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}; \qquad \operatorname{sen}\left[\frac{\log a}{2i}\right] = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}.$$

Analogamente per le funzioni iperboliche:

$$Ch\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}; \qquad Sh\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{i\cdot 2\sqrt{a}}.$$

La costante k che comparisce in queste formule è poi legata alla curvatura di RIEMANN dalla seguente relazione:

$$C = -\frac{1}{k^2}.$$

Per l'interpretazione proiettiva del concetto di *angolo di due rette* valgono considerazioni analoghe. *L' angolo di due rette,* a meno del divisore costante $2i$ *è il logaritmo del birapporto del gruppo che le due rette formano con le tangenti alla conica, condotte pel loro punto comune.*

Per esprimere analiticamente questo angolo conviene partire dall'equazione della conica in coordinate di piani. Se con b_{ij} si denotano i reciproci degli elementi a_{ij} nel discriminante di Ω_{xx}, l'equazione dell'assoluto, in coordinate di rette diventa:

$$\Psi_{uu} = \Sigma b_{ij} u_i u_j = 0.$$

Allora l'angolo di due rette $(u_1 u_2 u_3)$, $(v_1 v_2 v_3)$ verrà espresso dalla formula:

$$\omega_{uv} = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}};$$

ovvero:

$$\omega_{uv} = \operatorname{arc\,cos} \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} = \operatorname{arc}\, Ch \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}};$$

$$\omega_{uv} = \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} = \operatorname{arc}\, Sh \frac{\sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}}.$$

Una espressione analoga vale per la distanza di due punti e l'angolo di due piani nella geometria dello spazio: basta supporre che, nelle formule precedenti,

$$\Omega_{xx} = 0; \quad \Psi_{uu} = 0,$$

rappresentino le equazioni (puntuale e tangenziale) dell'assoluto dello spazio, anzichè dell'assoluto del piano. A seconda che: $\Omega_{xx} = 0$ è l'equazione di una quadrica reale a punti ellittici, ovvero di una quadrica immaginaria, le formule date sopra si riferiscono alla geometria di LOBACEFSKI-BOLYAI od a quella di RIEMANN.

Notiamo poi che il caso euclideo può riattaccarsi ai precedenti considerandolo come un caso limite, corrispondente ad una *degenerazione* della quadrica assoluta (considerata come inviluppo). Allora la formula della distanza perde ogni significato in quanto che i punti M, N, in cui la congiungente di X e Y incontra l'assoluto, coincidono. Si può tuttavia, mediante un conveniente *passaggio al limite* ed un'opportuna *scelta della costante* moltiplicatrice, interpretare la formula in modo che essa valga a rappresentare la distanza ancora nel caso parabolico.

Non occorre poi fare una simile considerazione per l'angolo di due rette o di due piani, in quantochè le formule generali mantengono il loro significato anche passando al limite: anzi si potrebbe facilmente vedere come a mezzo d'una semplice trasformazione di coordinate si riducono senz'altro a quelle che il LAGUERRE stabiliva pel caso euclideo.

OSSERVAZIONE. Le proprietà delle figure piane in relazione ad una conica e quelle dello spazio in relazione ad una quadrica, costituiscono, nel loro insieme la *metrica proiettiva*. La metrica proiettiva fu studiata da A. CAYLEY [1821-1895], indipendentemente dalle relazioni che essa ha con le geometrie non-euclidee (1), relazioni che furono scoperte ed illustrate qualche anno dopo da F. KLEIN (2). A KLEIN è pure dovuto una nomenclatura assai in uso per le metriche-proiettive. Egli chiama *geometria iperbolica* la geometria di CAYLEY rispetto ad un assoluto reale non degenere, *geometria ellittica* quella relativa ad un assoluto immaginario non degenere; *geometria parabolica* il caso limite delle due precedenti, relativo ad un assoluto degenere come luogo. Sicchè nel seguito potremo usare questa nomenclatura per indicare rispettivamente i sistemi geometrici di LOBACEFSKI-BOLYAI, di RIEMANN, di EUCLIDE.

§ 23. **Rappresentazione della geometria di Lobatcefski-Bolyai sul piano euclideo.** — Alla interpretazione proiettiva delle metriche non-euclidee, di cui sopra abbiamo discorso, si collega una interessante rappresentazione che può darsi

(1) Cfr. « *Sixth Memoir upon Quantics* », Phil. Transactions, CXLIX, p. 61-90, [1859]; ovvero: « *Math. Papers* » di CAYLEY, t. 2, p. 561-592.

(2) Cfr. « *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* », Math. Ann. IV, p. 573-625, [1871].

della *geometria iperbolica*. Per ottenerla fissiamo sul piano una conica reale non degenere, per es. un cerchio, e relativamente a questo cerchio poniamo le seguenti definizioni:

Piano = Regione di punti interni al cerchio.

Punto = Punto interno al cerchio.

Retta = Corda del cerchio.

Si può allora verificare immediatamente che i postulati relativi alla determinazione della retta, alle proprietà segmentarie ed angolari si traducono in proposizioni, che sono sempre valide anche quando si adottino le precedenti significazioni degli enti.

Ma nel successivo sviluppo della geometria, ai detti postulati si aggiungono i postulati della congruenza, contenuti nel seguente *principio del movimento*.

Dati nel piano due punti A, A′ *e per essi rispettivamente le rette* a, a′, *esistono quattro modi di sovrapporre il piano a se stesso, in modo che* A *ed* a *coincidano rispettivamente con* A′ *ed* a′. Più precisamente *un* modo di sovrapposizione resta definito se si fissano come corrispondenti un raggio di a ed un raggio di a', una banda del piano rispetto ad a ed una banda del piano rispetto ad a'.

Di questi quattro movimenti due sono *congruenze dirette, due congruenze inverse*.

Quando si adottino le precedenti interpretazioni degli enti *punto, retta, piano,* il principio qui espresso si traduce nella seguente proposizione, ben nota nella geometria proiettiva.

Data nel piano una conica (ad es. un cerchio) *e fissati due punti interni* A, A′ *e per essi rispettivamente le due corde* a, a′, *esistono quattro trasformazioni proiettive del piano, che mutano in se stessa la regione dei punti interni alla conica e che fanno corrispondere* A *ed* a *rispettivamente ad* A′, a′. Per fissarne *una* basta richiedere che un dato estremo di a corrisponda ad un dato estremo di a' e che ad una determinata banda del piano rispetto ad a corrisponda una determinata banda del piano rispetto ad a'. Di queste quattro trasformazioni due subordinano sulla conica *proiettività concordi, le altre due proiettività discordi*.

Ciò posto riprendiamo, completando, le definizioni fissate relativamente ad un cerchio dato sul piano:

Piano = Regione dei punti interni al cerchio.

Punto = Punto interno al cerchio.
Retta = Corda del cerchio.
Movimenti = Trasformazioni proiettive del piano che mutano in se stessa la regione dei punti interni al cerchio.
Ribaltamenti = Trasformazioni omologiche del cerchio.
Figure congruenti = Figure trasformabili l'una nell'altra mediante una delle nominate proiettività.

I precedenti sviluppi permettono senz'altro di affermare che tutte le proposizioni della geometria elementare piana, legate ai concetti di retta, angolo, congruenza, possono convenientemente tradursi in proprietà relative al sistema dei punti interni al cerchio, sistema che denomineremo $[S]$.

Vediamo ancora come in questa metrica convenzionale, stabilita nell'interno del cerchio, possa esprimersi la distanza di due punti.

Si introduca perciò un sistema di coordinate ortogonali $(x, y,)$ con l'origine nel centro del cerchio. La distanza di due punti $A(x, y)$, $B(x', y')$, (nel piano convenzionale), non può rappresentarsi con la solita formula

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2};$$

giacchè non rimarrebbe inalterata nelle trasformazioni proiettive, che più sopra chiamammo movimenti; sarà invece una funzione delle loro coordinate, che rimane inalterata in tutti i movimenti e che sulla retta gode della proprietà distributiva, espressa dalla formula:

$$\text{dist. } (AB) = \text{dist. } (AC) + \text{dist. } (CB).$$

Ora una espressione delle coordinate (x, y), (x', y'), di A e B, che rimanga invariata nei movimenti (trasformazioni proiettive che lasciano fisso il cerchio limite), è il birapporto dei quattro punti A, B, M, N, dove M, N sono gli estremi della corda AB: la espressione più generale, che gode della richiesta proprietà invariantiva, è una funzione arbitraria di tale birapporto.

Richiedendo poi che detta funzione riesca distributiva, nel senso sopra indicato, bisogna assumerla, a meno

d'un fattore di proporzionalità, uguale al logaritmo di $(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$. Avremo dunque:

$$\text{dist. } (AB) = \frac{k}{2} \log (ABMN).$$

Analogamente si procede per valutare l'angolo di due rette. In questo caso bisogna osservare che volendo che l'angolo retto sia espresso da $\frac{\pi}{2}$, è necessario assumere per costante moltiplicatrice del logaritmo $\frac{1}{2i}$. Avremo così:

$$\text{ang } (ab) = \frac{1}{2i} \log (abmn),$$

ove con m ed n si sono indicate le tangenti (immaginarie coniugate) condotte al cerchio dal vertice dell'angolo e con $(abmn)$ il birapporto delle rette a, b, m, n, espresso analiticamente da:

$$\frac{\text{sen } (am)}{\text{sen } (bm)} : \frac{\text{sen } (an)}{\text{sen } (bn)}.$$

Riferendoci a quanto dicemmo precedentemente intorno alla subordinazione della geometria metrica non-euclidea alla geometria proiettiva è chiaro che le formule precedenti relative alla *distanza* e all'*angolo*, coincidono con quelle che si avrebbero sopra un piano non-euclideo, quando la conica limite fosse il cerchio fondamentale del sistema $[S]$. Questo basta per concludere che la geometria di $[S]$ fornisce una interpretazione concreta della Geometria di Lobacefski-Bolyai.

È chiaro poi che un'analoga interpretazione potrebbe stabilirsi anche per la stereometria non-euclidea, fissando nello spazio ordinario una sfera e istituendo, rispetto ad essa, un sistema di definizioni analogo a quello precedentemente indicato.

Per quanto riguarda la geometria ellittica si otterrà di essa una rappresentazione concreta sostituendo alla sfera reale una sfera immaginaria. Debbono allora considerarsi come punti dello spazio ellittico non soltanto i punti (proprii) dello spazio ordinario, ma anche i punti (improprii) del piano all'infinito, come vengono considerati in geometria proiettiva.

§ 24. **Fondazione della Geometria partendo dai concetti grafici.** — I concetti esposti nei precedenti paragrafi conducono ad un nuovo ordine di idee, nel quale si pongono a primo fondamento della geometria le *proprietà grafiche* [KLEIN], anzichè le proprietà della congruenza e del movimento, di cui si servirono RIEMANN ed HELMHOLTZ. Si noti che non volendo sin dal principio introdurre veruna ipotesi sulla intersezione di rette coplanari conviene partire da un opportuno sistema di postulati, valido in una *regione limitata* di spazio e completare successivamente la regione iniziale per mezzo di *punti, rette, piani improprî.*

Sviluppata la geometria proiettiva si possono introdurre nello spazio le proprietà metriche, aggiungendo ai postulati iniziali quelli che caratterizzano i movimenti o la congruenza. Così facendo si trova una certa polarità (*non* nulla) dello spazio, dove ad ogni piano corrisponde il punto (proprio o improprio) comune alle sue perpendicolari, la quale viene trasformata in se stessa da tutti i movimenti. Si dimostra poi che la quadrica fondamentale di questa polarità non può essere che:

a) una *Quadrica reale non rigata;*

b) una *Quadrica immaginaria* (ad equazione reale);

c) una *Quadrica degenere come inviluppo.*

Si ritrovano dunque, anche per questa via, i *tre sistemi geometrici,* cui giungevano il RIEMANN e l'HELMHOLTZ, partendo dal concetto di distanza elementare.

§ 25. **Sulla indimostrabilità del postulato d'Euclide.** — Avanti di porre fine a questa esposizione storica, ci sembra utile dire qualche parola sulla indimostrabilità del postulato d'EUCLIDE.

Il fatto stesso che gli innumerevoli tentativi per la sua dimostrazione non condussero al risultato atteso, può far sorgere il dubbio *ch'esso sia indimostrabile,* giacchè l'istinto geometrico sembra attestarci che una proposizione così semplice, se è dimostrabile, debba esserlo per via di considerazioni del pari semplici.

Ma tali considerazioni non possono in verun modo tenersi in conto di una *prova* della indimostrabilità in questione.

Prescindendo dal postulato d'EUCLIDE, per seguire gli sviluppi di GAUSS, LOBACEFSKI e BOLYAI, si costruisce un

edifizio geometrico, nel quale non s'incontrano contraddizioni logiche, e che perciò appunto sembra attestare la possibilità logica dell'ipotesi non-euclidea, che è quanto dire l'*indipendenza* del postulato d'EUCLIDE dai primi principii della Geometria, e quindi la sua *indimostrabilità.* Tuttavia il fatto « che non si sieno incontrate contraddizioni » non basta ad assicurarci di ciò; occorre accertarci che proseguendo negli indicati sviluppi « mai tali contraddizioni potranno incontrarsi ». Tale convinzione si può fare scaturire in modo sicuro, dalla considerazione delle formule della trigonometria non-euclidea. Se infatti ci riferiamo al sistema di tutte le terne di numeri (x, y, z), e consideriamo convenzionalmente ogni terna come un *punto analitico,* possiamo definire la *distanza* di due punti analitici partendo dalle formule della suddetta trigonometria non-euclidea. Costruiamo così un sistema analitico, il quale, offrendo una convenzionale interpretazione della Geometria non-euclidea, dimostra la possibilità logica di essa.

In questo senso le formule della trigonometria non-euclidea di Lobatschefski-Bolyai danno la prova dell'indipendenza del postulato d'Euclide dai primi principii della Geometria (relativi alla retta, al piano e alla congruenza — cfr. art. 2, 3, 4).

Si può cercare una *prova geometrica* dell'indipendenza stessa, riattaccandosi agli sviluppi ulteriori, di cui abbiamo fatto menzione. Ammettiamo perciò come *logicamente possibile* la Geometria euclidea.

Allora l'interpretazione che la Geometria piana non-euclidea e iperbolica riceve nella Geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa, offre *fino ad un certo punto* una prima prova della indimostrabilità del postulato euclideo. Precisamente resta così stabilito che « il postulato suddetto non può essere dimostrato fondandosi sui primi principii della Geometria, validi in una regione limitata del piano ». Infatti ogni contraddizione logica che scaturisse dall'ipotesi opposta si tradurrebbe in una contraddizione nella Geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa.

Tuttavia, poichè il confronto tra il piano iperbolico e le superficie a curvatura negativa, sussiste, come abbiam detto, soltanto *per regioni limitate,* non resta così escluso che il postulato euclideo possa dimostrarsi nel *piano completo.* A togliere questo dubbio converrebbe riferirsi alle *varietà* astratte

di curvatura costante, imperocchè non esiste nessuna superficie concreta dello spazio ordinario, in cui valga la geometria iperbolica integrale.

Ma anche dopo di ciò l'indimostrabilità del postulato d'EUCLIDE riuscirebbe provata soltanto *nella Geometria piana.* Resterebbe dunque da discutere la possibilità di dimostrare il postulato con *considerazioni stereometriche.*

La fondazione della Geometria, secondo le vedute di RIEMANN (estendenti ad un campo a 3 dimensioni le idee della Geometria sopra le superficie) offre la prova completa dell'indimostrabilità, basata sull'esistenza d'un *sistema analitico non-euclideo.* Si tratta dunque di un'altra prova analitica. Lo stesso può dirsi per gli sviluppi di HELMHOLTZ, LIE; ma questi ultimi offrono, si può dire anche una prova geometrica, desunta dall'esistenza di *gruppi di trasformazioni dello spazio euclideo, simili ai gruppi di movimenti della Geometria non-euclidea.* Ben inteso bisogna qui aver riguardo alla considerazione della Geometria nella sua interezza.

Più semplice e geometricamente luminosa, è la *prova dell'indimostrabilità del postulato d'Euclide,* desunta dalla rappresentazione della Geometria non-euclidea nella metrica convenzionale relativa ad un cerchio e ad una sfera, da noi ampiamente sviluppata pel caso del piano.

Le metriche proiettive di CAYLEY-KLEIN offrono anche la prova della possibilità logica dell'ipotesi ellittica, per la quale, limitamente al caso del piano serve la sua interpretazione come geometria della stella.

PARTE SECONDA

TEORIA GENERALE DELLE PARALLELE.

§ 1. **Premesse.** — A base della teoria generale delle parallele poniamo quei postulati che nell'ordinaria geometria si sogliono anteporre allo studio di tale argomento, cioè:

a) *i postulati di determinazione ed appartenenza;*

b) *i postulati relativi alla divisione in parti della retta e del piano;*

c) *i postulati della congruenza o del movimento.*

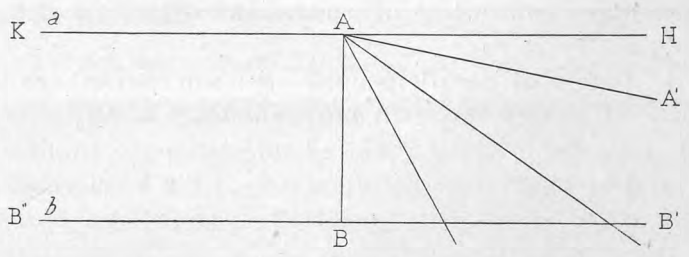
Riterremo senz'altro dimostrate le conseguenze che, con gli ordinari procedimenti, se ne ricavano, e in particolar modo:

1) *gli ordinari criteri d'uguaglianza fra triangoli;*

2) *le relazioni fra gli elementi di uno stesso triangolo* (teorema dell'angolo esterno; teoremi sui triangoli isosceli e sui triangoli a lati disuguali, ecc...);

3) *Le proprietà delle perpendicolari ed oblique.*

§ 2. **Definizione di parallela.** — Sia A un punto fuori della retta $b \equiv B''B'$, sia B il piede della perpendicolare calata da A su b ed HK la perpendicolare ad AB passante per A. Fissato uno dei due angoli adiacenti $\widehat{BAH}$, $\widehat{BAK}$, ad es. il primo, le rette per A che ad esso appartengono possono ripartirsi in due classi, a seconda che intersecano o no la retta b. Della prima classe fanno parte infiniti elementi, cioè tutte le rette che congiungono A coi punti della semiretta BB' (fig. 1); della seconda fa parte la retta HK, e con essa eventualmente altre rette.



Esiste un elemento di separazione fra le due classi?

Ove si conceda, insieme ai postulati *a*), *b*), *c*) del § 1,

anche il *postulato della continuità*, risulta senz'altro che le due classi soddisfano a tutte le condizioni richieste per la applicabilità di questo postulato; quindi si deduce l'esistenza di una retta $a' \equiv AA'$, separante la classe delle rette incidenti a b da quella delle non incidenti.

Ove poi non si voglia postulare la continuità della retta, ma fare uso delle sole proposizioni del § 1, nulla si può concludere sulla esistenza della retta a'. In tal caso, per costruire una teoria delle parallele che s'accordi almeno in parte, con la teoria ordinaria, è necessario *postulare* (con HILBERT), *l'esistenza di una retta di* $\widehat{BAH}$, *separante le secanti* b *dalle non secanti.*

Comunque si voglia procedere riterremo per dato che *esiste una retta* $a' \equiv AA'$ *di* $\widehat{BAH}$, *non incidente a* b, *e tale che ogni retta di* $\widehat{BAA'}$ *incontri* b.

La retta $a' \equiv AA'$ si dice *parallela* a b attraverso il punto A.

§ 3. **Verso di parallelismo.** — Sia $a'' \equiv AA''$ la simmetrica di a' rispetto ad AB. Evidentemente a'', nell'angolo $\widehat{BAK}$, gode delle stesse proprietà che appartengono ad a' nell'angolo BAH. Anche a'' si dice parallela a b attraverso A.

Per distinguere, ove occorra, le due parallele, si può osservare che ognuna di esse è coordinata ad un determinato verso di b. Nell'unita figura a' potrà dirsi parallela nel verso destro ed a'' parallela nel verso sinistro.

Ove poi accada che le due rette a', a'' coincidano in un'unica retta (caso euclideo), questa è parallela a b, in *entrambi* i versi di b.

Nel seguito, dicendo senz'altro « AA′ *è parallela a* BB′ » intenderemo significare anche che il verso di parallelismo sia quello definito dall'ordine di successione dei punti B e B'.

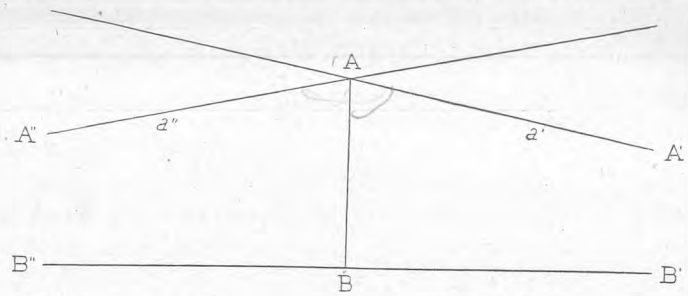
§ 4. **Angolo di parallelismo.** — Da un punto arbitrario B di $b = BB'$ si elevi la retta perpendicolare a BB', e su essa si fissi il segmento AB uguale ad un segmento prefissato d.

Per A si imagini la parallela $a' \equiv AA'$ a b nel verso BB': *l'angolo* $\widehat{BAA'}$ *verrà detto angolo di parallelismo corrispondente alla distanza* $\mathrm{d} = \mathrm{AB}$.

Dalle proprietà generali della congruenza si deducono i seguenti teoremi:

1) *L'angolo di parallelismo che corrisponde ad un determinato segmento è indipendente dal verso del parallelismo.*

Cioè se AA' ed AA'' sono la prima, parallela nel verso



destro e la seconda, parallela nel verso sinistro, a b, i due angoli $\widehat{BAA'}$, $\widehat{BAA''}$ sono eguali:

2) *Gli angoli di parallelismo che corrispondono a segmenti uguali sono uguali.*

§ 5. **Conservazione del carattere di parallelismo.** — Nella definizione di parallela, il punto A sembra avere un ufficio speciale. Tuttavia si può dimostrare che la definizione è indipendente da A; cioè che:

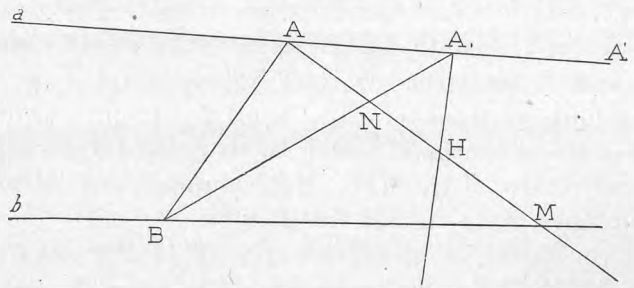
Se $\mathrm{a} \equiv \mathrm{AA'}$ *è parallela alla retta* $\mathrm{b} \equiv \mathrm{BB'}$ *attraverso il punto* A *ed* $\mathrm{A_1}$ *è un punto arbitrario di* a, *la retta* a *è parallela a* b *anche attraverso il punto* $\mathrm{A_1}$.

In altre parole: se una retta è parallela ad un'altra, si mantiene tale in tutti i suoi punti.

Distinguiamo due casi:

1) Il punto A_1 segua A nel verso AA'.

Sia allora A_1H un raggio dell'angolo $\widehat{BA_1A'}$: se il punto H è da banda opposta di A_1 rispetto a b, il raggio A_1H incontra

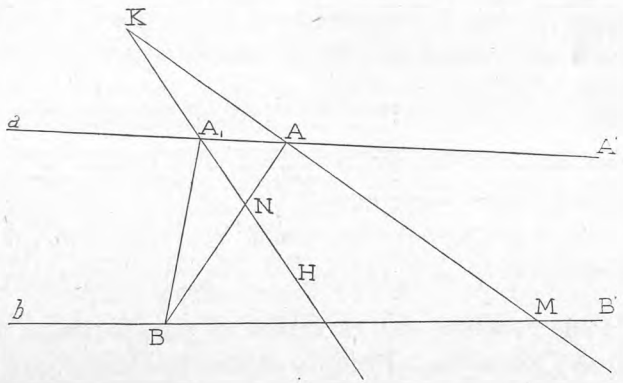


certamente b; se H non è da banda opposta di A_1 rispetto a b si tracci la retta AH. Poichè H appartiene all'angolo $\widehat{BAA'}$

la retta AH incontra b in un punto M ed il segmento A_1B nel punto N.

Allora la retta A_1H interseca il lato NM del triangolo BMN e non il lato BN: segue da ciò che A_1H intersecherà necessariamente il terzo lato BM. Dunque la retta AA' è parallela a b attraverso il punto A_1.

2) Il punto A_1 preceda A nel verso AA'.



Sia A_1H un qualunque raggio dell'angolo BA_1A' e K un punto sul prolungamento di A_1H. La retta KA, appartenendo all'angolo $\widehat{BAA'}$ incontra b in un punto M, ed il segmento AB sarà incontrato da A_1H in un punto N. Allora la retta HK, che incontra il lato AB del triangolo ABM e non il lato AM, intersecherà necessariamente il terzo lato $BM = b$. Con ciò è dimostrato il teorema anche in questo secondo caso.

§ 6. **Reciprocità del carattere di parallelismo.**

Si tratta di dimostrare che:

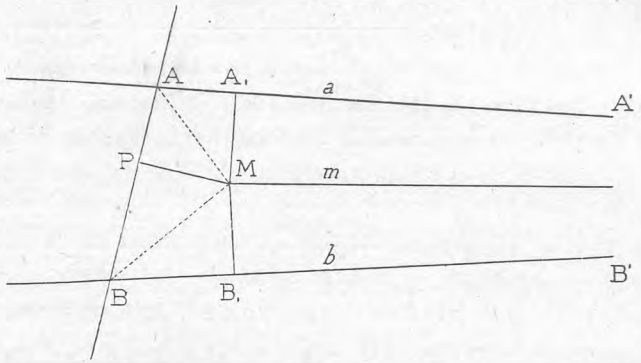
Se a $\equiv$ AA' *è parallela a* b $\equiv$ BB', *viceversa* b *è parallela ad* a.

Si traccino le bisettrici degli angoli $\widehat{BAA'}$, $\widehat{ABB'}$: essendo a parallela a b la bisettrice di $\widehat{BAA'}$ incontrerà b e per conseguenza incontrerà anche l'altra bisettrice in un punto M. Se da M caliamo le perpendicolari su a, b ed AB: i segmenti di perpendicolare MA_1, MB_1, MP compresi fra M e le tre rette nominate, sono uguali fra di loro.

D'altra parte, se si traccia per M la bisettrice m dell'angolo A_1MB_1: l'uguaglianza fra MA_1 ed MB_1 dice che i punti A_1 e B_1 sono simmetrici rispetto ad m, talchè risulteranno pure simmetriche rispetto ad m le due rette a, b per-

pendicolari ad MA_1, MB_1 nei punti A_1, B_1. Questa simmetria ci autorizza ad affermare, senza ulteriori sviluppi, che, ove a sia parallela a b, reciprocamente b è parallela ad a.

Stabilita la conservazione e la reciprocità del parallelismo, potremo, nel seguito, parlare semplicemente di rette parallele.



Dal ragionamento ora svolto e dalla figura a cui esso si riferisce, si deducono i seguenti corollari:

Se a *è parallela a* b, *esistono rette che incontrano le due parallele sotto angoli uguali.* Una di tali rette è evidentemente la congiungente i due punti A, B.

Il luogo dei punti equidistanti da due rette parallele, è una retta parallela ad entrambe. Questa retta, nella fig. 5, è la bisettrice dell'angolo, $\widehat{AMB}$, cioè m.

§ 7. **Verso comune di parallelismo.** — Se dai punti A, A', A'', che si susseguono su a in un certo verso, si calano le perpendicolari sulla parallela b, e si indicano con B, B', B''.... i piedi di queste perpendicolari, i punti B, B', B''.... sono punti susseguentisi in un determinato verso di b. In questo modo ad ogni verso di a viene a corrispondere un determinato verso di b.

Viceversa, con lo stesso procedimento a ciascun verso di b, si può far corrispondere un determinato verso di a.

Si vede facilmente che *se ad un dato verso di* a *corrisponde un certo verso di* b, *viceversa a questo verso di* b *corrisponde il verso dato su* a.

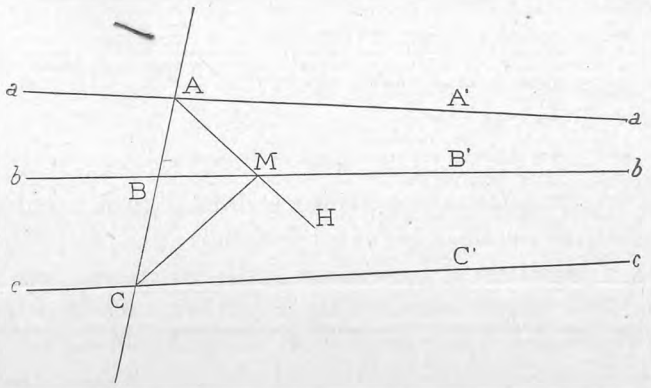
È pure chiaro che se AA' e BB' sono due versi corrispondenti su a e b ed a è parallela a b nel verso BB', allora b è parallela ad a nel verso AA'. I due versi AA', BB', in cui ciascuna delle due rette è parallela all'altro, si dicono *identici* e ciascuno di essi si chiama *verso comune di parallelismo della coppia* a, b.

§ 8. **Transitività del carattere di parallelismo.**

Due rette parallele in un determinato verso ad una terza sono parallele fra di loro.

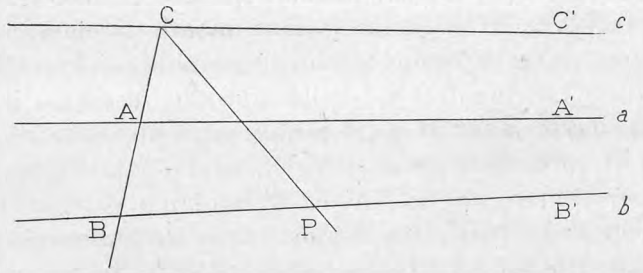
Abbiansi le rette $a \equiv AA'$, $c \equiv CC'$, parallele alla retta $b \equiv BB'$ nel verso BB', e siano AA', CC' i versi di a e c che corrispondono al verso CC'. Per dimostrare che a e c sono parallele fra loro, distinguiamo due casi:

1) Siano a e c da banda opposta di b. Designando con B il punto in cui la retta AC incontra b, i punti A' e C' dovranno trovarsi con B' da una stessa banda della traversale AC.



Preso nell'angolo $\widehat{CAA'}$ il raggio AH, si determini il punto M in cui esso incontra b. La retta MH appartiene all'angolo $\widehat{CMB'}$, perciò (essendo b parallela a c) incontrerà c. Lo stesso ragionamento vale per qualunque altra retta di CAA', sicchè a risulta parallela a c.

2) Siano a, c da una stessa banda di b. Le due rette a, c non possono incontrarsi, perchè per un punto passa una sola



parallela a b nel verso BB'. Allora una di esse, a ad es., lascerà da bande opposte le altre due. Congiunti i punti B e C, si

designi con A l'intersezione di CB con a. Ogni raggio dell'angolo BCC', dovendo incontrare b, intersecherà necessariamente a, perciò, anche in questo caso, risulta dimostrato il parallelismo fra a e c.

Si noti come in forza del teorema ora dimostrato si possa facilmente estendere il concetto di verso comune di parallelismo (cfr. § 7), al caso in cui si abbiano più rette a, b, c,... parallele ad x in un verso XX' assegnato su x. Le rette a, b, c,... vengono così ad avere un *verso in comune*, il quale può rappresentarsi con uno qualunque dei versi AA', BB', CC',... che corrispondono ad XX' rispettivamente su a, b, c,...

§ 9. **Fascio improprio e punti improprii.** — Il sistema di tutte le rette del piano parallele in un determinato verso ad una retta assegnata sul piano gode di due proprietà:

1) *per un punto qualunque del piano passa una ed una retta del sistema;*

2) *due rette qualunque del sistema lo determinano pienamente.*

Ma queste proprietà appartengono ancora al fascio di rette (insieme di tutte le rette passanti per un punto), per la qual cosa, estendendo il significato della parola fascio, potremo con essa designare anche l'insieme delle rette parallele in un determinato verso ad una retta data.

Ove poi occorra distinguere l'uno dall'altro i due fasci, faremo uso degli aggettivi « *proprio* », « *improprio* »; precisamente diremo *fascio proprio* quello formato da tutte le rette passanti per un punto, *fascio improprio* l'altro.

Tutte le rette del fascio hanno in comune un punto: *il centro del fascio;* le rette del fascio improprio non hanno alcun punto in comune. Tuttavia, queste ultime hanno in comune il verso di parallelismo. Per uniformità di linguaggio, sostituiremo alla locuzione: « *verso comune di parallelismo* » l'altra « *punto improprio* ». Allora tutte le rette di un fascio improprio hanno in comune un punto improprio. Questo punto verrà detto *centro* (improprio) del fascio.

A giustificare l'introduzione del fascio e del punto improprio, valgono le stesse considerazioni che nell'ordinaria geometria guidano al concetto di punto all'infinito.

Nel seguito i punti improprii verranno costantemente designati con lettere maiuscole dell'alfabeto greco. Così,

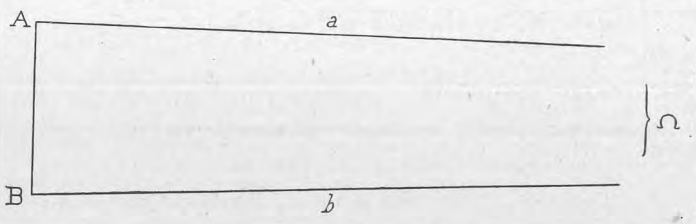
dicendo che le rette a, b hanno in comune il punto Ω intenderemo semplicemente significare il parallelismo tra a e b.

Notiamo ancora che una retta potrà designarsi mediante uno dei suoi punti proprii A ed un punto improprio Ω. Ciò in forza del principio dell'unicità della parallela per A e in un determinato verso ad una retta assegnata.

§ 10. **Striscie - Trilateri.** — Due rette parallele determinano una *striscia* di cui esse sono i lati. Appartengono alla striscia i lati ed i punti del piano che rispetto a ciascun lato sono dalla banda in cui si trova l'altro lato. La striscia di cui a e b sono i lati verrà designata col simbolo (ab).

La retta luogo dei punti equidistanti da a e b (cfr. § 6) dicesi *bisettrice* della striscia.

Siano $a = A\Omega$, $b = B\Omega$ i lati d'una striscia: la figura formata dal segmento AB e dai raggi (semirette) $A\Omega$, $B\Omega$



verrà detta *trilatero*. I punti A, B, sono i vertici del trilatero; Ω è il vertice improprio.

Il segmento AB ed i raggi $A\Omega$, $B\Omega$ sono i *lati* del trilatero.

I punti del segmento AB insieme ai punti della striscia che stanno con Ω da una stessa banda di AB costituiscono la *superficie del trilatero*. Segue la definizione di punti interni e la validità dei seguenti teoremi:

Una retta che passa per un vertice del trilatero e per uno dei suoi punti interni incontra il lato opposto.

Una retta che non passa pei vertici del trilatero ed interseca uno dei suoi lati, interseca un altro lato ed uno solo.

Gli angoli $\widehat{AB\Omega}$, $\widehat{BA\Omega}$ si dicono angoli del trilatero e s'indicano brevemente con $\widehat{A}$, $\widehat{B}$. Gli angoli adiacenti ad $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sono gli angoli esterni. Allora abbiamo:

In un trilatero un angolo esterno è maggiore od uguale all'interno opposto.

Un trilatero in cui $\widehat{A}$ *sia uguale a* $\widehat{B}$ *dicesi isoscele.*

Due trilateri $\widehat{AB\Omega}$, $\widehat{A'B'\Omega'}$ *si dicono uguali quando* $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$.

Valgono allora i seguenti criteri d'eguaglianza:

1) *Due trilateri* $AB\Omega$, $A'B'\Omega'$, *coi lati* AB *ed* $A'B'$ *uguali e con gli angoli* $\widehat{A}$ *ed* $\widehat{A'}$ *uguali sono uguali, avendo uguali anche gli altri due angoli* $\widehat{B}$ *e* $\widehat{B'}$.

Come caso particolare abbiamo che due *trilateri rettangoli* sono uguali quando hanno il cateto AB uguale al cateto $A'B'$.

2) *Due trilateri isosceli sono uguali se il lato* AB *del primo è uguale al lato* $A'B'$ *del secondo.*

Omettiamo le facili dimostrazioni.

§ 11. **Alcune proposizioni di stereometria - Rette parallele nello spazio.** — Riterremo senz'altro stabilite tutte quelle proprietà dello spazio fondate esclusivamente sui postulati $a)$, $b)$, $c)$, del § 1 e più precisamente:

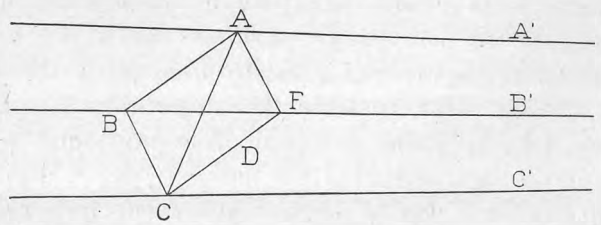
1) *i teoremi sui piani e rette perpendicolari;*

2) *i teoremi relativi alle sezioni dei diedri ed in particolar modo il teorema: « In diedri uguali sezioni ugualmente inclinate sono uguali e viceversa »;*

3) *i teoremi sui triedri ed i relativi criteri d'eguaglianza.*

Ciò posto stabiliamo alcuni teoremi sulle rette parallele nello spazio.

Se tre piani, non passanti per una retta, s'intersecano scambievolmente e due delle rette d'intersezione sono parallele, anche la terza è ad esse parallela.



Siano AA', BB', CC' le intersezioni dei tre piani ed AA' risulti parallela a BB'. Intanto è chiaro che la retta CC' non interseca le altre due, per cui basterà dimostrare che ogni retta dell'angolo $\widehat{BCC'}$, incontra BB'.

Sia CD una retta di $\widehat{BCC'}$: se dalla retta AC si proietta CD,

il piano proiettante interseca il piano delle parallele AA', BB', secondo una retta dell'angolo $\widehat{BAA'}$, cioè secondo una retta che interseca BB' in un punto F. Allora è chiaro che la retta CD passa essa pure per F, il che significa appunto che CD è secante rispetto a BB', c. d. d. Dunque CC' è parallela a BB'.

Nello stesso modo si dimostra il parallelismo delle due rette CC' ed AA'.

Seguono immediatamente i corollari:

Se due piani passanti per due rette parallele s'intersecano, la loro intersezione è una retta parallela ad esse.

Due rette parallele in uno stesso verso ad una terza sono, in quel verso, parallele fra loro.

Quest'ultimo c'insegna che la transitività del parallelismo sussiste anche quando le rette non appartengono allo stesso piano, e che tutte le parallele ad una retta in un verso determinato di esso hanno in comune il verso di parallelismo.

§ 12. **Rette parallele ad un piano e piani paralleli.** — Una retta è *parallela ad un piano* quando risulta parallela ad una retta che giace sul piano. Viceversa il piano è parallelo alla retta.

Vale allora il teorema:

Una retta parallela ad un piano è parallela a tutte le rette di un fascio improprio che giace sul piano.

Il fascio in discorso si ottiene segando il piano con tutti i piani passanti per la retta. Ciò risulta dalle proprietà stabilite nel numero precedente.

Per una retta r *non parallela e sghemba ad una retta* $a = AA'$ *passa un solo piano parallelo ad* a *nel verso* AA'. Infatti, per un punto R di r esiste una retta RR' parallela alla AA'. Questa retta, insieme ad r determina un piano ρ parallelo ad AA'. Il piano ρ è unico, inquantochè se ρ' fosse un altro piano parallelo ad AA' e passante per r, il piano γ determinato da R e da a segherebbe ρ' in una retta RR'', parallela essa pure ad AA', e ciò contro l'unicità della parallela passante per un punto ad una retta in un verso assegnato.

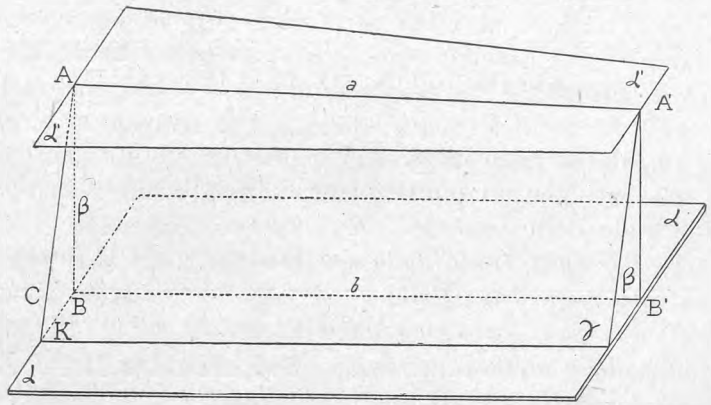
Si noti che una retta ed un piano paralleli hanno in comune un punto improprio e che la condizione affinchè un punto improprio Ω stia sopra un piano è che al piano appartenga una retta parallela a quella che individua Ω nel verso corrispondente ad Ω.

Un notevole teorema su retta e piano paralleli è il seguente:

Per una retta $a \equiv AA'$ *parallela ad un piano* α *passa uno ed un solo piano che non interseca* α.

Dimostriamo anzitutto che esiste per a un piano non secante α.

Sia β il piano per a perpendicolare ad α, ed α' il piano per a perpendicolare a β: il piano α' così ottenuto non



incontra α. Infatti, designando con b l'intersezione fra α e β, e con a' un'ipotetica intersezione fra α' ed α, le altre rette a, b, a' dovrebbero risultare parallele. D'altra parte, essendo i piani α' ed α entrambi perpendicolari a β, la retta a' dovrebbe essere perpendicolare a β, quindi incontrare a e b.

Stabilito così che α ed α' non sono incidenti passiamo a dimostrare che ogni altro piano per a, diverso da α', interseca α.

Sia γ un piano per a diverso da α' ed AB la perpendicolare calata da un punto A di a su α.

Il piano γ non è certamente perpendicolare ad AB. Ora l'angolo $\widehat{CAB}$ formato da γ con AB è minore dell'angolo $\widehat{A'AB}$ (1), cioè minore dell'angolo di parallelismo corrispon-

(1) Ciò risulta dalla seguente proposizione stereometrica:

Se α' e β sono due piani fra loro perpendicolari e la retta AB giace su β, l'angolo formato da AB con α' è maggiore dell'angolo formato da AB con qualsiasi piano passante per la retta d'intersezione fra α' e β.

dente alla distanza AB. Allora sul piano CAB, che interseca α secondo la retta BK, le due rette AC e BK sono incidenti, per la qual cosa risulteranno incidenti anche i due piani γ ed α che passano per esse. Con ciò è dimostrato il teorema.

Due piani passanti per due rette parallele e non secantesi l'un l'altro si dicono *paralleli*.

Allora l'ultimo teorema dimostrato può enunciarsi sotto la forma seguente:

Per una retta parallela ad un piano passa un solo piano parallelo al piano dato.

Geometria della stella impropria.

§ 13. **Stella impropria.** — L'insieme delle rette e dei piani passanti per un punto proprio O dello spazio si chiama stella e gode delle seguenti proprietà:

1) *Per ogni punto dello spazio diverso da* O *passa una ed una sola retta della stella.*

2) *Per ogni retta non passante per* O *passa uno ed un solo piano della stella.*

3) *La stella è determinata da due qualunque delle sue rette, ovvero da una delle sue rette ed uno dei suoi piani.*

Queste proprietà appartengono anche al sistema di tutte le rette e tutti i piani paralleli ad una retta in un verso determinato. Per ciò siamo condotti ad estendere il significato della parola stella e a designare con essa il nuovo sistema di rette e piani. Volendo poi distinguere l'uno dall'altro i due tipi di stella faremo uso, come già pei fasci, degli aggettivi « *propria* » ed « *impropria* ».

Centro della stella propria è il punto per cui passano tutte le sue rette e tutti i suoi piani; centro della stella impropria è il punto improprio comune a tutti i suoi elementi.

§ 14. **Fondamenti di una geometria della stella impropria.** — In geometria il piano si considera come il sostegno di tutti i suoi punti e le sue rette. Questi punti e queste rette sono legati fra loro da un certo gruppo di proposizioni primitive (postulati) che, combinate opportunamente fra loro, conducono ai vari teoremi della planimetria. In modo del tutto analogo si può istituire una geometria nella stella impropria Ω assumendo per elementi fondamentali le sue rette ed i suoi piani. Per la stella Ω non è però necessario postulare le prime proposizioni, poichè alcune di esse discendono facilmente dalle proprietà delle rette e piani paralleli e le altre vi si introducono muovendo da opportune definizioni. Le proprietà di Ω che discendono immediatamente da quanto fu esposto nei numeri precedenti corrispondono ai postulati di deternazione, divisione in parti della geometria piana; sicchè, *mutando nei postulati in discorso le parole punto e retta, nelle altre retta e piano, si ottengono altrettante proposizioni fondamentali per la geometria della stella impropria.*

Le conseguenze che in geometria piana si traggono dai detti postulati si traducono facilmente in altrettante proprietà di Ω. A sostituire il segmento avremo in Ω la striscia, a sostituire l'angolo il diedro. Due piani in Ω si dicono paralleli quando non s'intersecano. Allora il teorema del § 13 porge la seguente proposizione in Ω:

Per una retta passa uno ed un solo piano parallelo ad un piano dato.

§ 15. **Il principio della congruenza nella geometria della stella impropria - Congruenza fra diedri.** — Per completare il quadro delle proposizioni fondamentali di Ω è necessario introdurre il concetto di congruenza. Cominciamo dai diedri.

Due diedri di Ω si dicono congruenti od uguali, quando sono uguali nel senso ordinario della parola.

Allora le ordinarie proprietà relative all'uguaglianza, alla somma ecc. fra diedri forniscono altrettante proprietà nella geometria di Ω. Così le denominazioni: diedro retto, diedro acuto,... diedri complementari, supplementari,... piani perpendicolari, ecc. verranno usate nelle geometria della stella impropria cogli stessi significati che loro competono nello spazio.

Potremo allora enunciare il seguente teorema:

Due piani di Ω *s'intersecano quando con un terzo piano di* Ω *formano due diedri interni da una stessa parte non supplementari* (Cfr. § 14).

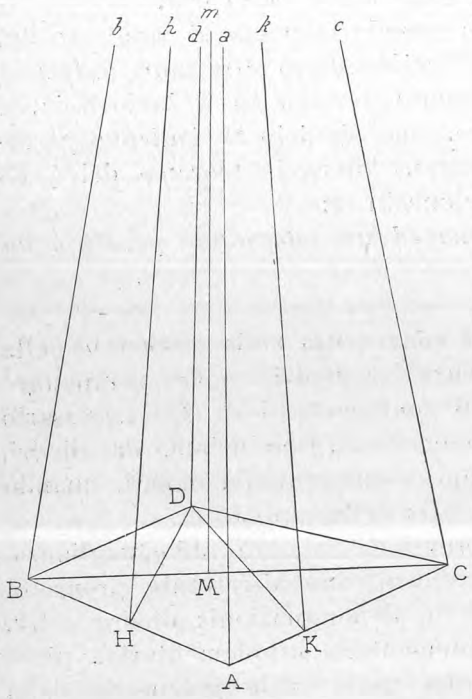
Inoltre è facile dimostrare che: *Se* α, β, *sono due piani di* Ω *fra loro incidenti e* γ *e* δ *altri due piani di* Ω *rispettivamente perpendicolari ad* α *e* β, *anche* γ *e* δ *sono fra loro incidenti.*

Il ragionamento procede di pari passo con quello che si svolge in geometria euclidea piana per dimostrare che « *due rette* c, d, *perpendicolari rispettivamente alle due rette incidenti* a, b, *sono fra loro incidenti* ». Tralasciamo perciò di svilupparlo.

§ 16. **Il teorema di J. Bolyai.** — Per poter definire l'uguaglianza fra striscie è necessario premettere alcune considerazioni.

Siano *a, b, c, d,...* rette di Ω ed *A* un punto arbitrario di *a*. Tracciata la bisettrice della striscia (*ab*) (Cfr. § 6,...) la perpendicolare abbassata da *A* su di essa incontra *b* in un punto *B* tale che

$$\Omega\widehat{AB} = \Omega\widehat{BA}.$$



Il punto *B* verrà detto *corrispondente* di *A* su *b*. Nello stesso modo si determineranno i punti *C, D,...* corrispondenti di *A* rispettivamente su *c, d,...*

Su ogni retta di Ω esiste adunque uno ed un solo corrispondente di *A*. Si tratta ora di mostrare che:

Ove i punti B, C, D,... *siano corrispondenti di* A, *saranno* A, C, D,... *corrispondenti di* B; A, B, D,... *corrispondenti di* C, *ecc.* (Teorema di Bolyai).

Basterà perciò fare vedere che la retta che congiunge due corrispondenti arbitrari *B, C,* di *A* incontra sotto angoli uguali le rette *b, c*.

Se *B* e *C* sono i corrispondenti di *A* situati sulle rette *b, c,* i segmenti *AB, AC,* incontrano i lati delle rispettive striscie (*ab*), (*ac*) sotto angoli uguali.

Supponiamo in primo luogo che le rette *a, b, c,* non siano coplanari.

Denotando con *h, k* le bisettrici di (*ab*) ed (*ac*), i piani perpendicolari nei punti di mezzo dei segmenti *AB, AC* contenendo rispettivamente *h* e *k*, appartengono ad Ω. Inoltre, per essere tali piani perpendicolari ai due piani secantisi *ab, ac* avranno in comune una retta di Ω, che designeremo con *d*.

I punti di questa retta *d* sono equidistanti da *B* e *C*, perciò apparterranno al piano perpendicolare al segmento *BC* nel suo punto di mezzo *M*. La retta $m = M\Omega$ secondo cui il piano in discorso interseca il piano *bc* è parallela a *b* e *c*, per cui risultano determinati due trilateri rettangoli $BM\Omega$, $CM\Omega$, coi cateti *BM, CM* uguali. Allora, in forza di un noto criterio d'eguaglianza fra due trilateri (Cfr. § 10) i due trilateri in discorso risultano uguali, vale a dire sussiste l'uguaglianza angolare:

$$\Omega\widehat{BM} = \Omega\widehat{CM}.$$

La retta *BC* incontra dunque le rette *b, c* sotto angoli uguali, c. d. d.

Nel caso in cui le rette *a, b, c* siano coplanari, si dimostra il teorema ricorrendo ad una quarta retta di Ω non coplanare con *a, b, c*.

Infatti, se *d* è una retta di Ω, non coplanare con *a, b, c*, e *B, C, D* i corrispondenti di *A*, in forza del precedente teorema i segmenti *BD, CD* incontrano i lati delle rispettive striscie (*bd*), (*cd*) sotto angoli uguali. Segue che i punti *B, C* sono corrispondenti del punto *D* e conseguentemente che il segmento *BC* incontra *b* e *c* sotto angoli uguali.

Con ciò il teorema è stabilito anche pel caso in cui *a, b, c,* appartengano allo stesso piano.

§ 17. **Striscie congruenti nella geometria della stella impropria.** — Ciò posto, ecco come si definisce in Ω la *congruenza fra striscie.*

Siano (*ab*), (*cd*) due striscie di Ω ed *A, B, C, D* quattro punti corrispondenti situati su *a, b, c, d*. Se il segmento *AB* è uguale al segmento *CD* allora la striscia (*ab*) si dice uguale alla striscia (*cd*).

Si noti anzitutto che la definizione è indipendente dalla quaterna *A, B, C, D* di punti corrispondenti. Infatti se *A', B', C', D'* sono quattro altri punti corrispondenti, scelti rispettivamente su *a, b, c, d,* i segmenti *A'B', C'D'* sono uguali

fra loro quando sono uguali fra loro AB e CD, e viceversa. Ciò risulta dalle proprietà generali della congruenza nello spazio.

L'uguaglianza fra striscie così definita soddisfa chiaramente alle leggi formali dell'uguaglianza fra segmenti; inoltre, dalle proprietà generali della congruenza spaziale, si deduce che:

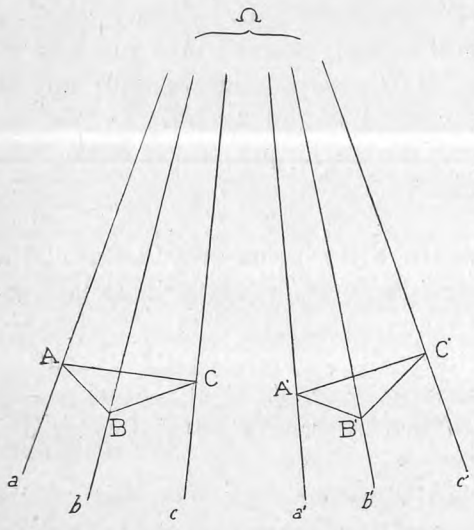
Se a, b, c *sono tre rette di* Ω *e* γ *un piano arbitrario per* c, *in ognuno dei due semipiani determinati da* c *su* γ *esiste una striscia* (cd) *uguale alla striscia* (ab).

Introducendo poi in Ω il concetto di *somma fra striscie*, la somma fra striscie soddisfa alle leggi formali della somma fra segmenti.

§ 18. **Triedri - Uguaglianza fra triedri - 1° criterio d'uguaglianza.** — Resta finalmente da stabilire in Ω quella proposizione che corrisponde al *1° criterio d'uguaglianza fra triangoli*.

Premettiamo la definizione di *triedro*. Tre rette a, b, c di Ω, non appartenenti allo stesso piano, insieme alle tre striscie (ab), (cb), (ca) che a due a due determinano, costituiscono un triedro. Le striscie (ab), (bc), (ca) si dicono faccie del triedro, ecc....

Due triedri si dicono *uguali* quando hanno ordinatamente uguali le faccie ed i diedri fra esse compresi.



Il primo criterio di uguaglianza fra triedri è il seguente:

Due triedri di Ω, *aventi due faccie e il diedro compreso del primo ordinatamente uguali a due faccie ed il diedro compreso del secondo, sono uguali.*

Siano abc, $a'b'c'$ i due triedri, con:

$$(1)\qquad \begin{cases} (ab) = (a'b') \\ (bc) = (b'c') \end{cases};$$

$$(2)\qquad \widehat{b} = \widehat{b'}.$$

Per dimostrare l'uguaglianza degli altri elementi dei due triedri fissiamo su a un punto arbitrario A ed i corrispondenti B, C, A', B', C' di A sulle rette b, c, a', b', c'. In forza delle (1) sussisteranno allora le eguaglianze segmentarie:

$$AB = A'B',$$
$$BC = B'C',$$

dalle quali, applicando il criterio d'uguaglianza per i trilateri isosceli (Cfr. § 10), si deducono le eguaglianze angolari:

$$(3)\qquad \begin{cases} \widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BA} = \widehat{\Omega A'B'} = \widehat{\Omega B'A'} \\ \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CB} = \widehat{\Omega B'C'} = \widehat{\Omega C'B'}. \end{cases}$$

Queste ultime ci dicono che gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ sono sezioni ugualmente inclinate dei due diedri $\widehat{b}$ e $\widehat{b'}$; e poichè questi diedri sono uguali, risulterà:

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}.$$

Se ora paragoniamo i due triangoli ABC, $A'B'C'$, che hanno due lati e l'angolo compreso del primo uguali a due lati e l'angolo compreso del secondo, si ricavano le relazioni:

$$AC = A'C'$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$
$$\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$$

La prima di queste si traduce nell'uguaglianza:

$$(ac) = (a'c');$$

le altre due, in forza del teorema sulle sezioni ugualmente inclinate di due diedri, esprimono l'uguaglianza dei diedri $\widehat{a}$ ed $\widehat{a'}$, e dei diedri $\widehat{c}$ e $\widehat{c'}$. Concludendo, i due triedri abc, $a'b'c'$, avendo gli elementi a due a due uguali, sono uguali, c. d. d.

§ 19. **Identità tra la geometria della stella impropria e quella del piano euclideo.** — Se si pongono a raffronto i postulati della geometria piana euclidea con le proprietà fondamentali della stella impropria, si scorge che queste si deducono da quelle mutando semplicemente le parole *punto, retta, segmento, angolo* ecc. nelle altre *retta, piano, striscia,*

diedro, ecc. Conseguentemente tutti i teoremi di geometria euclidea potranno senz'altro tradursi in altrettanti teoremi di geometria di Ω, operando in essi le opportune sostituzioni di parole. Si potrà dunque concludere:

La geometria di Ω è identica alla geometria piana di Euclide.

In particolare: *la trigonometria di Ω coincide con la trigonometria ordinaria.*

§ 20. **Orisfera - Oriciclo.** — La sfera può definirsi come luogo dei punti simmetrici d'un punto dato rispetto alle rette di una stella propria. In modo analogo può definirsi un nuovo ente geometrico, che chiameremo *orisfera,* come luogo dei punti simmetrici di un punto dato, rispetto alle rette di una stella impropria.

Rammentando la definizione di corrispondenti (Cfr. § 16) è chiaro che:

L'orisfera è il luogo dei punti corrispondenti di un punto dato sulle varie rette d'una stella impropria.

Il punto iniziale, scelto per generare l'orisfera, è un punto ordinario della superficie, cioè: *qualunque altro punto dell'orisfera può essere assunto come punto fondamentale, per la generazione di essa.* Ciò risulta dal teorema di Bolyai (Cfr. § 16).

Il centro Ω della stella verrà detto *centro* (improprio) *dell'orisfera;* le semirette che congiungono i punti dell'orisfera con Ω si dicono *raggi* dell'orisfera. Il segmento che congiunge due punti dell'orisfera è una *corda* di essa, ecc.

Un piano passante per Ω sega l'orisfera secondo una linea detta *oriciclo.* L'oriciclo è il luogo dei simmetrici d'uno qualunque dei suoi punti rispetto alle rette di un fascio improprio.

Il centro del fascio dicesi centro (improprio) dell'oriciclo, ecc.

Tanto l'orisfera quanto l'oriciclo si presentano alla intuizione come figure limiti rispettivamente della sfera e del cerchio, quando il raggio tende all'infinito.

§ 21. **Geometria orisferica - Sua identità con la geometria piana euclidea.** — Ad ogni punto di un'orisfera di centro Ω, facciamo corrispondere la retta che lo proietta da Ω. Si ottiene

così una corrispondenza biunivoca fra orisfera e stella, dalla quale si ricavano immediatamente le seguenti proposizioni fondamentali di *geometria orisferica.*

1) *Due punti dell'orisfera appartengono ad un oriciclo e ad uno soltanto.*

2) *I punti di un oriciclo sono ordinati secondo due ordini naturali o versi, opposti l'uno all'altro,* ecc.

3) *Un oriciclo divide l'orisfera in due parti, contenenti ciascuna infiniti punti,* ecc.

Seguono allora, come nell'ordinaria geometria, le definizioni di *segmento oriciclico, angolo di due oricicli,* ecc.

Il concetto di *congruenza* si introduce poi mediante le seguenti definizioni.

Due segmenti oriciclici sono *uguali* quando sono *uguali* le corrispondenti striscie; due angoli oriciclici sono *uguali* quando sono *uguali* i corrispondenti diedri di Ω.

4) *Per l'uguaglianza così stabilita fra segmenti e fra angoli orisferici valgono le proprietà tutte dell'uguaglianza fra segmenti e fra angoli della geometria piana.*

Successivamente si può definire il triangolo orisferico (a lati oriciclici) e l'uguaglianza fra due triangoli. Allora il teorema del § 18 ci permette di enunciare il seguente criterio (1°) di uguaglianza fra triangoli.

5) *Due triangoli orisferici, aventi due lati e l'angolo compreso del primo rispettivamente uguali a due lati e l'angolo compreso del secondo sono uguali.*

Infine due oricicli, appartenenti ad una stessa orisfera, si dicono *paralleli* quando non hanno punti in comune. Allora in forza dell'ultimo teorema del § 14 si ha che:

6) *Per un punto dell'orisfera passa uno ed un solo oriciclo parallelo ad un oriciclo assegnato.*

Poniamo ora a riscontro i precedenti risultati con le proposizioni fondamentali della geometria piana euclidea: è chiaro che si passa dagli uni alle altre con semplici mutamenti di parole e precisamente mutando le parole *orisfera, oriciclo,* ecc. con le altre *piano, retta,* ecc. e viceversa.

Dunque potremo concludere che:

La geometria dell'orisfera è identica alla geometria piana euclidea.

In particolare: *la trigonometria piana ordinaria, comunque venga stabilita sul piano euclideo, è valida anche sulla orisfera.*

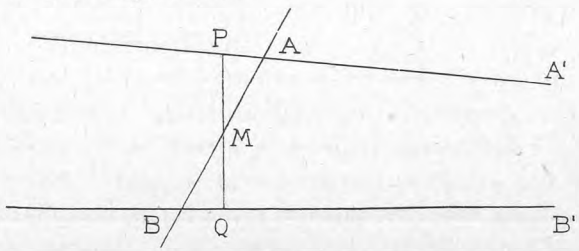
Geometria iperbolica.

§ 22. **Le parallele in geometria iperbolica.** — Alle ipotesi su cui si fonda la teoria generale delle parallele (cfr. §§ 1, 2) aggiungiamo la seguente:

Per un qualsiasi punto dello spazio passano due parallele distinte ad una retta arbitraria.

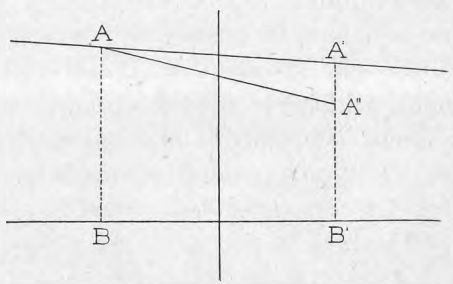
Allora, alle proprietà generali delle parallele debbono aggiungersi le seguenti:

a) *Se le due parallele* AA′, BB′ *sono intersecate dalla trasversale* AB, *la somma di due angoli coniugati* $\widehat{BAA'}$, $\widehat{ABB'}$ *è minore di due angoli retti.*



Infatti, se la somma in discorso fosse uguale a due angoli retti (maggiore non potrebbe essere in nessun caso) la perpendicolare calata dal punto di mezzo M del segmento AB sulla BB' sarebbe perpendicolare anche ad AA'; e le due parallele AA', BB' ammetterebbero una perpendicolare comune PQ. Allora, dalla simmetria della figura rispetto alla PQ, si dedurrebbe che AA' è parallela a BB' in entrambi i versi di BB', e quindi per P passerebbe una sola parallela a BB', contro l'ipotesi assunta.

b) *Le distanze dei punti della retta* AA′, *parallela a* BB′, *dalla retta* BB′ *decrescono nel verso del parallelismo.*



Infatti, siano A ed A' due punti che si seguono su AA' nel verso del parallelismo, e B e B' i piedi delle perpendicolari da essi calate su BB'

Se fosse $AB = A'B'$ l'asse del segmento BB' sarebbe perpendicolare da AA' ed allora le due parallele AA', BB' ammetterebbero una perpendicolare comune, contro la precedente proposizione.

Se fosse $AB < A'B'$ si potrebbe determinare un punto A'' di $A'B'$ tale che fosse $A''B' = AB$. Allora la retta AA'' risulterebbe perpendicolare all'asse del segmento BB' e perciò non sarebbe incidente a BB', e ciò contro l'ipotesi che AA' sia parallela a BB'. Dunque dovrà essere $AB > A'B'$.

§ 23. **I punti impropri nello spazio iperbolico.** — Poichè per ogni punto dello spazio passano due parallele ad una retta $a \equiv AA'$, esisteranno *due* stelle improprie distinte alle quali appartiene la retta a. Per fissarne una basterà, insieme ad a, assegnare il verso del parallelismo. Conseguentemente ad ogni retta dello spazio dovremo attribuire *due* punti impropri, distinti l'uno dall'altro.

L'insieme di tutti i punti impropri dello spazio costituisce l'ente che si chiama *assoluto* dello spazio iperbolico.

§ 24. **Proprietà dei trilateri.** — Premettiamo la seguente definizione: due rette non parallele nè incidenti si dicono *non-secanti.* Allora da quanto precede risulta che:

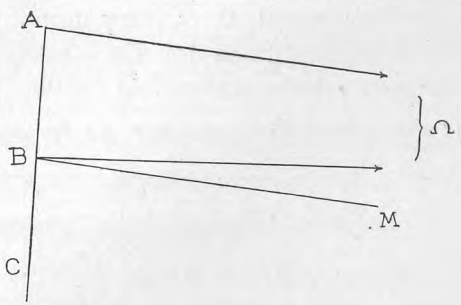
Due rette che formano con una loro trasversale angoli alterni interni uguali, ecc. sono non-secanti.

Ciò posto, alle proposizioni sui trilateri, stabilite nel § 10, possiamo aggiungere le altre che seguono.

a) *Un angolo esterno di un trilatero è maggiore dell'angolo interno opposto.*

Infatti, sia $\widehat{CB\Omega}$ un angolo esterno al trilatero $AB\Omega$. Per B e dalla stessa banda di Ω rispetto ad AB si tracci la retta BM, tale che sia:

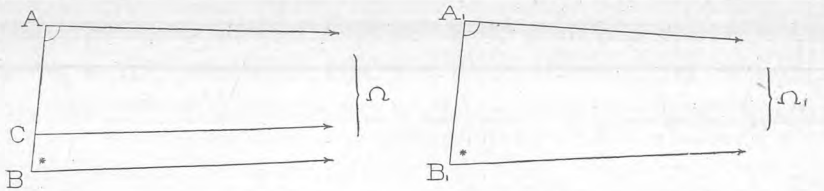
$$\widehat{CBM} = \widehat{BA\Omega}.$$



Le due rette $A\Omega$, BM sono non-secanti quindi BM cadrà necessariamente nell'angolo $\widehat{CB\Omega}$. Dunque:

$$\widehat{BA\Omega} = \widehat{CBM} < \widehat{CB\Omega};$$ c. d. d.

b) *Due trilateri* ABΩ, $A_1B_1\Omega_1$ *con gli angoli* $\widehat{A}$ *e* $\widehat{B}$ *uguali rispettivamente agli angoli* $\widehat{A}_1$, $\widehat{B}_1$ *sono uguali.*



Infatti, se non fosse AB uguale ad A_1B_1, sarebbe, ad es., $AB > A_1B_1$. Allora, su AB potremmo determinare un punto C tale che risultasse AC uguale ad A_1B_1. Congiungendo allora C con Ω il trilatero $AC\Omega$ sarebbe uguale al trilatero $AB\Omega$ (cfr. § 10). Da ciò l'uguaglianza:

$$\widehat{AC\Omega} = \widehat{A_1B_1\Omega_1}.$$

Ma, per ipotesi, abbiamo:

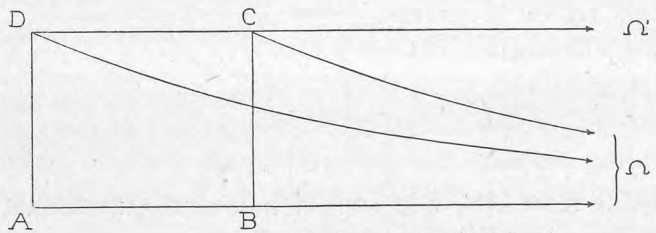
$$\widehat{AB\Omega} = \widehat{A_1B_1\Omega_1},$$

per cui: $$\widehat{AC\Omega} = \widehat{AB\Omega}.$$

Quest'ultima uguaglianza dice che nel trilatero $CB\Omega$ un angolo interno è uguale all'esterno opposto, il che contraddice il precedente teorema. Dunque cade l'ipotesi $AB > A_1B_1$, ecc.

§ 25. **Quadrilateri birettangoli isosceli.** — Sia $ABCD$ un quadrilatero birettangolo isoscele, cioè con gli angoli consecutivi $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ retti ed i lati AD, BC uguali. Dico che i due ulteriori angoli $\widehat{D}$, $\widehat{C}$ sono uguali ed acuti.

L'uguaglianza dei due angoli $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ si deduce immediatamente dalla simmetria della figura rispetto all'asse del segmento AB.



Per dimostrare poi che $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ sono acuti, si indichi con Ω il punto all'infinito di AB nel verso AB, e con Ω' il punto

all'infinito di DC nel verso DC. Si congiungano poi D e C con Ω e si paragonino i due trilateri $AD\Omega$, $BC\Omega$. Dalla uguaglianza di essi si deduce immediatamente:

$$\widehat{AD\Omega} = \widehat{BC\Omega} \tag{1}$$

Inoltre $\widehat{\Omega' C\Omega}$ è esterno al trilatero $DC\Omega$, per cui si ha:

$$\widehat{CD\Omega} < \widehat{\Omega' C\Omega}. \tag{2}$$

Sommando membro a membro le (1) e (2) si deduce:

$$\widehat{ADC} < \widehat{BC\Omega'}.$$

Ma l'angolo $\widehat{ADC}$ è uguale all'angolo $\widehat{DCB}$, quindi:

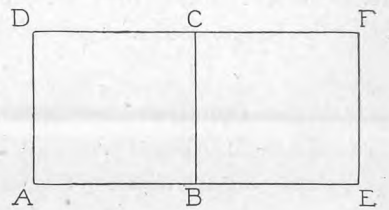
$$\widehat{DCB} < \widehat{BC\Omega'};$$

e poichè questi due ultimi angoli sono supplementari, $\widehat{DCB}$ sarà minore di un angolo retto, c. d. d.

Corollario: *Il quarto angolo di un quadrilatero triretangolo è acuto.*

Sia il quadrilatero $ABCD$, rettangolo in A, B, C: rispetto alla retta BC si costruisca il quadrilatero $BCEF$, simmetrico del quadrilatero dato.

La figura $AEFD$ è alla sua volta un quadrilatero rettangolo in A ed E, coi lati AD ed EF uguali; quindi gli angoli in D, F sono acuti. Questo prova il teorema enunciato.



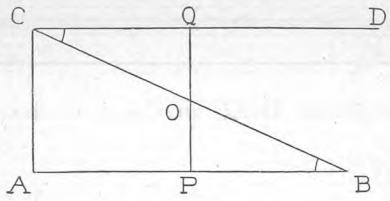
§ 26. **Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono convesso.**

La somma degli angoli d'un triangolo è minore di due angoli retti.

Potendosi ogni triangolo decomporre in due triangoli rettangoli, mediante la perpendicolare calata dal vertice dell'angolo maggiore sul lato opposto, basterà dimostrare il teorema pei triangoli rettangoli.

Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Per C, e da banda opposta di A rispetto all'ipotenusa, si mandi la retta CD in

modo che l'angolo $\widehat{DCB}$ risulti uguale all'angolo $\widehat{CBA}$. Poi dal centro O del segmento CB si cali la perpendicolare su AB.



Siano P, Q i punti in cui la perpendicolare incontra rispettivamente AB, CD. I due triangoli OPB, OCQ sono uguali per avere un lato con gli angoli adiacenti dell'uno rispettivamente uguali ad un lato ed agli angoli adiacenti dell'altro. Sarà perciò retto l'angolo $\widehat{CQO}$, onde il quadrilatero $APQC$ è trirettangolo. Segue che l'angolo $\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} + \widehat{BCQ}$ è acuto, cioè che nel triangolo rettangolo ABC la somma degli angoli è minore di due angoli retti.

OSSERVAZIONE. Se si conviene di dire che due parallele, nel verso comune di parallelismo, s'incontrano sotto un *angolo nullo*, allora il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo vale anche per i trilateri.

Consideriamo ora un poligono convesso qualsiasi di n lati e congiungiamo uno dei suoi vertici con gli altri $n-3$ non adiacenti: il poligono viene così decomposto in $n-2$ triangoli, in ciascuno dei quali la somma degli angoli è minore di 2 $\widehat{retti}$. Ma la somma degli angoli del poligono è uguale alla somma di tutti gli angoli dei triangoli, sicchè: *la somma degli angoli di un poligono convesso qualsiasi è minore di* $2(n-2)$ *angoli retti.*

§ 27. **Deficienza ed area di un poligono.** — La differenza fra $2(n-2)$ *angoli retti* e la somma S degli angoli di un poligono dicesi *deficienza del poligono.* Sarà adunque:

$$\delta = 2(n-2)\,\widehat{retti} - S$$

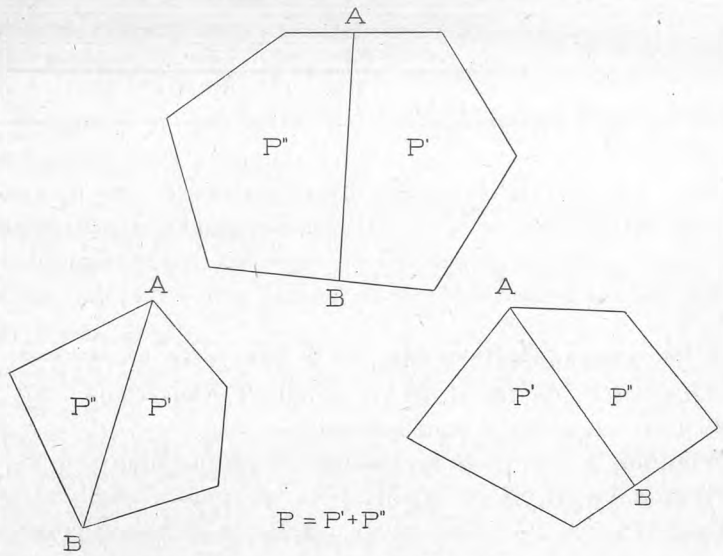
e, in particolare, pel triangolo:

$$\delta = 2\,\widehat{retti} - \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Relativamente alla deficienza vale il teorema:

La deficienza di un poligono convesso P *somma di due altri pure convessi* P′, P″ *è uguale alla somma delle deficienze dei due poligoni* P′, P″.

Sia AB il lato comune ai due poligoni; n' il numero dei lati di P'; n'' il numero dei lati di P''. Avremo allora:



$$\delta' = 2(n'-2)\,\widehat{retti} - S'$$
$$\delta'' = 2(n''-2)\,\widehat{retti} - S''$$

Sommando membro a membro si ricava:

$$(1) \qquad \delta' + \delta'' = 2(n' + n'' - 4)\,\widehat{retti} - (S' + S'').$$

Ora, se A e B sono vertici anche del poligono $P = P' + P''$ è chiaro che la somma S degli angoli ed il numero n dei lati di P sono dati da:

$$S' + S'', \qquad n' + n'' - 2,$$

quindi la (1) dà:

$$\delta' + \delta'' = 2(n-2)\,\widehat{retti} - S.$$

Questa uguaglianza dice appunto che $\delta' + \delta''$ è la deficienza di P.

Se poi il vertice B dei due poligoni non fosse vertice di P, allora sarebbe:

$$S = S' + S'' - 2\,\widehat{retti},$$
$$n = n' + n'' - 3.$$

Da queste si deduce:

$$2(n-2)\,\widehat{retti} - S = \ldots. 2(n'+n''-4)\,\widehat{retti} - (S'+S'')$$

cioè: $$\delta = \delta' + \delta''.$$

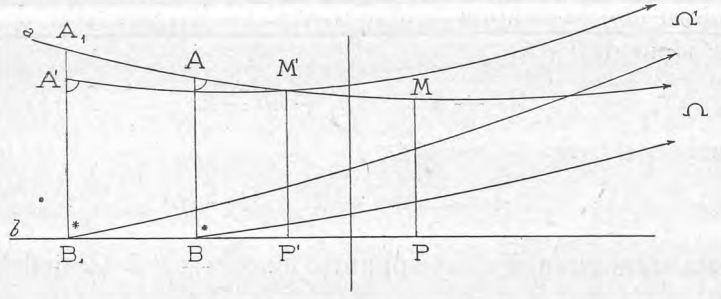
Analogamente pel caso in cui anche A non fosse vertice di P. L'*area* di un poligono, secondo l'intuizione ordinaria, è una grandezza coordinata ai poligoni, tale che l'*area della somma di due o più poligoni è uguale alla somma delle loro aree.*

Ora, in geometria iperbolica, la deficienza di un poligono gode appunto della proprietà su espressa, inerente alle aree: *potremo adunque assumere le deficienze per aree dei poligoni.*

§ 28. **Perpendicolare comune a due rette non-secanti.**

Due rette non incidenti nè parallele ammettono una perpendicolare comune ed una soltanto.

Siano a, b due rette non secantesi nè parallele; A, A_1 due punti su a; e B, B_1 i piedi delle perpendicolari calate da quei punti su b. Se fosse $AB = A_1B_1$ la perpendicolare a b nel punto medio di BB_1 sarebbe la perpendicolare comune alle due rette date. Altrimenti, uno dei segmenti AB, A_1B_1 sarà maggiore dell'altro. Supponiamo $A_1B_1 > AB$. Si indichi con Ω il punto improprio di A_1A, da banda opposta di A_1 rispetto ad A. Su B_1A_1 si prenda il segmento $B_1A' = BA$ e per A', dalla banda di Ω, si mandi il raggio $A'\Omega'$ che forma con $A'B_1$ un angolo uguale a $\widehat{BA\Omega}$. Poi si congiungano i punti impropri Ω, Ω', rispettivamente con B, B_1.



I due trilateri $AB\Omega$, $A'B_1\Omega'$, avendo i lati AB, $A'B_1$ uguali ed uguali gli angoli in A ed A' sono uguali, onde sarà:

$$\widehat{AB\Omega} = \widehat{A'B_1\Omega}.$$

Allora le rette $B\Omega$, $B_1\Omega'$, che formano con la B_1B angoli corrispondenti uguali, non saranno parallele nè secanti. Conseguentemente $A'\Omega'$ non sarà parallelo nè secante rispetto a $B\Omega$. Ciò posto è facile dimostrare che $A'\Omega'$ ed $A\Omega$ s'incontrano. Infatti la retta $A'\Omega'$, dato che non intersechi il lato A_1A del quadrilatero A_1B_1BA, nel qual caso sarebbe provato l'assunto, incontrerà il lato AB del trilatero $AB\Omega$; e poichè non incontra il lato $B\Omega$, incontrerà necessariamente il terzo lato, cioè $A\Omega$.

Ciò posto, indichiamo con M' il punto comune ad $A\Omega$ ed $A'\Omega'$ e P' il piede della perpendicolare calata da M' su b. Sul raggio $A\Omega$ si prenda il segmento $AM = A'M'$ e sia P il piede della perpendicolare calato da M su b. Si riconosce facilmente l'uguaglianza dei due quadrilateri $AMPB$, $A'M'P'B'$, onde $MP = M'P'$. Se allora dal punto medio di PP' si eleva la perpendicolare a b si ottiene la perpendicolare comune alle due rette a, b.

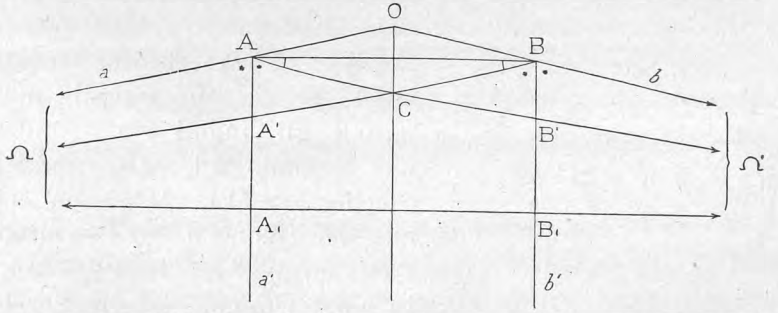
Dico poi che la perpendicolare comune alle rette in discorso è unica. Infatti, se ne esistesse una seconda, avremmo un quadrilatero con quattro angoli retti, contro il risultato del § 25.

§ 29. **Retta che congiunge due punti impropri.**

A due raggi uscenti da un punto, e non in linea retta, può condursi una parallela comune.

Siano a, b due raggi uscenti da O, non in linea retta, ed Ω, Ω' i rispettivi punti impropri. Si prendano su a e b i segmenti OA, OB uguali fra loro, indi si traccino le rette $A\Omega'$, $B\Omega$. Queste due rette s'incontrano (cfr. § 8) in un punto C, il quale evidentemente appartiene alla bisettrice O dell'angolo $\widehat{\Omega O\Omega'}$.

Dall'uguaglianza dei due trilateri $AO\Omega'$, $BO\Omega$ risulta l'uguaglianza degli angoli $\widehat{\Omega A\Omega'}$, $\widehat{\Omega B\Omega'}$ e successivamente



quella dei quattro angoli ottenuti bisecando i precedenti rispettivamente con le rette a', b'.

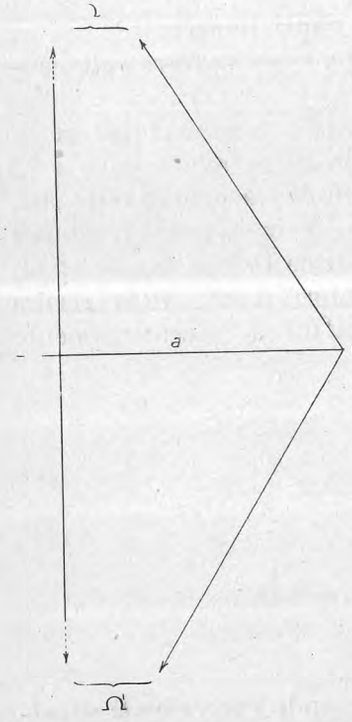
Dico che le rette a', b' sono non-secanti.

Infatti, se a', b' si incontrassero, il loro punto comune apparterebbe alla retta o (asse di simmetria della figura) e perciò risulterebbe equidistante dalle quattro rette a, b, $A\Omega'$, $B\Omega$. Ora, l'unico punto equidistante dalle rette in discorso è il punto comune alle bisettrici delle due striscie $(a, B\Omega)$, $(b, A\Omega')$, cioè un punto interno al quadrilatero $AOBC$, mentre le rette a', b' sono esterne al quadrilatero. Dunque a' b' non s'incontrano.

Per dimostrare che a', b' non sono parallele, s'indichi con A' l'intersezione di a' con ΩB e si tracci la AB.

Il triangolo ACB è isoscele, onde $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ è successivamente $\widehat{A'AB} > \widehat{ABA'}$. Allora, nel triangolo $A'AB$, che ha l'angolo in A maggiore dell'angolo in B, sarà $AA' < A'B$.

Se fosse a' parallela a b' il trilatero $\Omega AA'$ avrebbe due angoli uguali a due angoli del trilatero formato dal segmento $A'B$ con le rette a', b' per la qual cosa (cfr. § 10) sarebbe $A'A = A'B$, contrariamente alla disuguaglianza sopra dimostrata.



Concluderemo pertanto che a', b sono non-secanti e perciò ammettono una perpendicolare comune, la quale incontrerà le due rette rispettivamente nei punti A_1, B_1.

Dico che la retta A_1B_1 è parallela ai due raggi a, b. Per dimostrarlo congiungo A_1, B_1 con Ω.

Per essere $AA_1 = BB_1$ (come facilmente risulta dalle proprietà del quadrilatero ABA_1B_1), ed $\widehat{\Omega AA_1} = \widehat{\Omega' BB_1}$, i due trilateri ΩAA_1, ΩBB_1 sono uguali, quindi uguali gli angoli corrispondenti che formano ΩA_1, ΩB_1 con A_1B_1. Sicchè, ove ΩA_1, ΩB_1 non coincidessero con A_1B_1, seguirebbe l'esistenza d'un trilatero ΩA_1B_1 in cui un angolo esterno sarebbe uguale all'interno opposto. Dunque A_1B_1 passa per Ω e conseguentemente anche per Ω'. Come d. d.

Dal precedente teorema seguono facilmente le seguenti proposizioni:

Due punti improprii determinano una retta ed una soltanto.

Da un punto improprio Ω può calarsi una ed una sola perpendicolare ad una retta assegnata a.

La prima non è che il teorema precedente enunciato diversamente. Per la seconda, si congiunga il punto improprio Ω con un punto O arbitrario della retta a, mediante il raggio $O\Omega$, del quale si costruisca il simmetrico rispetto ad a. Sia Ω' il punto improprio del nuovo raggio costruito: la retta che congiunge Ω con Ω' è la perpendicolare richiesta.

§ 30. Trilateri con due e tre vertici improprii.

Siano Ω, Ω' due punti improprii e C un punto proprio: la figura ottenuta congiungendo a due a due i tre punti verrà detta *trilatero con due vertici improprii.*

Siano Ω, Ω', Ω'' tre punti improprii: la figura formata dalle tre rette $\Omega\Omega'$, $\Omega'\Omega''$, $\Omega''\Omega$, verrà detta *trilatero con tre vertici improprii.*

Analogamente a quanto si fece pei trilateri con un vertice improprio (cfr. § 9) si può definire la superficie dei nuovi trilateri, ai quali si estendono senz'altro i teoremi dei §§ 9, 10. Valgono poi i seguenti criteri d'uguaglianza:

Due trilateri con due vertici improprii sono uguali quando hanno uguali gli angoli nei vertici proprii.

Questa proposizione si rende manifesta con la decomposizione dei due trilateri mediante le perpendicolari calate dai vertici proprii sui lati opposti.

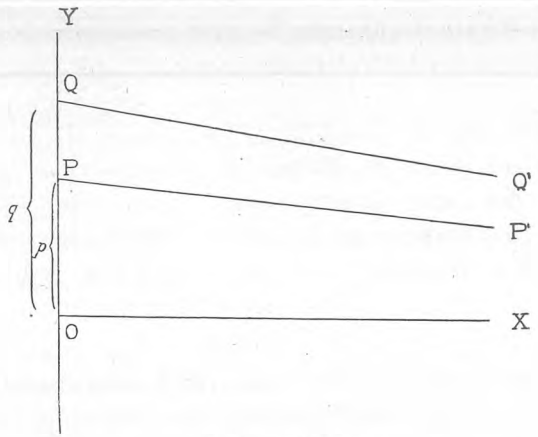
Due trilateri con i tre vertici improprii sono uguali.

Per dimostrare questa proprietà basta notare che un trilatero con tre vertici improprii si può decomporre in due trilateri rettangoli, con un vertice proprio e due improprii ciascuno.

§ 31. Proprietà dell'angolo di parallelismo.

Siano p, q due segmenti arbitrari e $\widehat{YOX}$ un angolo retto. Sul lato OY fissiamo due segmenti OP ed OQ, rispettivamente uguali a p ed a q, poi dai punti P e Q tracciamo le parallele PP', QQ' al lato OX. Se usiamo, con LOBACEFSKI, il simbolo $\pi(p)$

per designare l'angolo di parallelismo (cfr. § 4) corrispondente alla distanza p, avremo:



$$\pi(p) = \widehat{OPP'}$$
$$\pi(q) = \widehat{OQQ'}.$$

Ora, tenendo presente i teoremi sui trilateri (§ 24), è chiaro che valgono le seguenti proposizioni:

$$p = q \cdot \supset \cdot \pi(p) = \pi(q)$$
$$p > q \cdot \supset \cdot \pi(p) < \pi(q)$$
$$p < q \cdot \supset \cdot \pi(p) > \pi(q).$$

L'angolo di parallelismo è dunque una funzione decrescente di p. In particolare:

$$p = 0 \cdot \supset \cdot \pi(p) = 1 \widehat{retto}.$$

Viceversa, si può riguardare il segmento p come funzione dell'angolo $\pi(p)$. Infatti, fissato l'angolo acuto $\widehat{OPP'}$ dal punto improprio di PP' caliamo la perpendicolare XO su OP (cfr. § 29): resta determinato il segmento OP, al quale corrisponde l'angolo di parallelismo $\widehat{OPP'}$.

Poichè al crescere di p l'angolo di parallelismo diminuisce e poichè ad ogni angolo, per quanto piccolo, corrisponde sempre il suo segmento p, potremo scrivere:

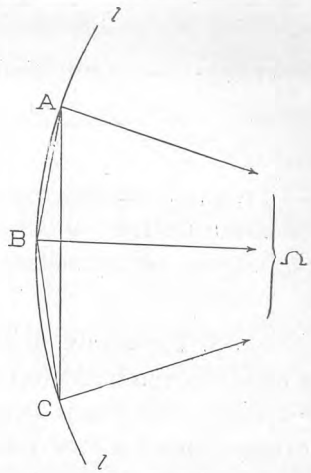
$$\pi(\infty) = 0$$

§ 32. **Proprietà generali degli oricicli.**

Tre punti di uno stesso oriciclo non sono in linea retta.

Siano A, B, C i tre punti dell'oriciclo l di centro Ω. Valgono allora le seguenti uguaglianze:

$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BA}$$
$$\widehat{\Omega AC} = \widehat{\Omega CA}$$
$$\widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CB}.$$



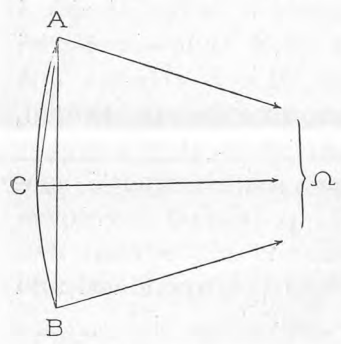
Se i tre punti A, B, C fossero in linea retta si ricaverebbe:

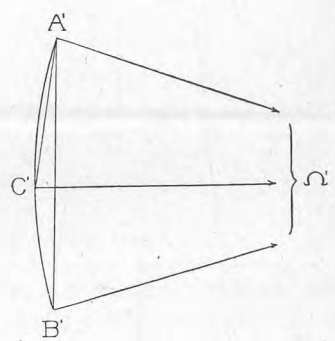
$$\widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC},$$

cioè l'uguaglianza fra un angolo interno ed un angolo esterno del trilatero $AB\Omega$, contro il teorema del § 24.

In uno stesso oriciclo od in due oricicli qualsiansi a corde uguali corrispondono archi uguali.

Osserviamo che per dimostrare l'uguaglianza fra due archi d'oriciclo converrà far vedere che è possibile stabilire fra i punti di essi una *corrispondenza biunivoca,* tale che il segmento che congiunge due punti arbitrari del primo è uguale al segmento che congiunge i corrispondenti punti del secondo.





Siano $\widehat{AB}$ ed $\widehat{A'B'}$ due archi d'oriciclo in cui le corde AB ed $A'B'$ sono uguali: la corrispondenza in discorso può stabilirsi così: al punto C del primo si coordinerà il punto C' del secondo, tale che sia:

$$\widehat{\Omega AC} = \widehat{\Omega' A'C'}.$$

È facile allora verificare che se C e D sono due punti

di $\widehat{AB}$ e C', D' i corrispondenti punti di $\widehat{A'B'}$ sussiste l'uguaglianza segmentaria:

$$CD = C'D'$$

sicchè potremo concludere:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

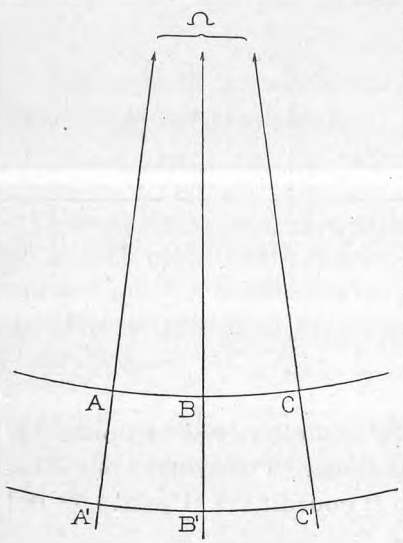
In modo analogo può dimostrarsi che:
Due oricicli qualsiansi sono fra loro eguali.
I teoremi dimostrati possono estendersi alle orisfere.

§ 33. **Proprietà degli oricicli concentrici.**

Due oricicli di centro Ω possono riferirsi biunivocamente per mezzo del fascio improprio Ω: allo scopo basterà chiamare corrispondenti i due punti che ciascuna retta per Ω determina su gli oricicli in discorso.

È chiaro allora che:

Se A, A'; B, B'; C, C';.... sono coppie di punti corrispondenti su due oricicli concentrici, i segmenti AA', BB', CC', ecc. sono uguali fra loro. Infatti, la bisettrice della striscia di lati AA', BB' è asse tanto del segmento AB quanto del segmento $A'B'$, sicchè i punti A ed A' sono simmetrici dei punti B e B' rispetto alla bisettrice in discorso. Quindi, $AA' = BB'$, c. d. d.



Due archi di oricicli concentrici si diranno *corrispondenti* quando gli estremi dell'uno sono corrispondenti agli estremi dell'altro.

Vale allora il seguente teorema:

Gli archi di un oriciclo sono proporzionali agli archi corrispondenti di un qualsiasi oriciclo concentrico.

Infatti, ad archi uguali sul primo oriciclo corrispondono archi uguali sul secondo, alla somma di due archi sul primo corrisponde la somma dei due archi corrispondenti del secondo, dunque, ecc.

Siano u, v due archi dell'oriciclo l; u', v' i due archi corrispondenti sull'oriciclo l' concentrico ad l. Allora, in forza del teorema precedente, sussisterà la proporzione:

$$u : v = u' : v'.$$

Da questa, osservando che i quattro archi u, v, u', v' sono grandezze omogenee, possiamo dedurre l'altra: $u : u' = v : v'$. Cioè:

Il rapporto fra due archi corrispondenti, in oricicli concentrici, è costante.

Per calcolare numericamente il valore di questo rapporto denotiamo con x la distanza dei due oricicli e poniamo:

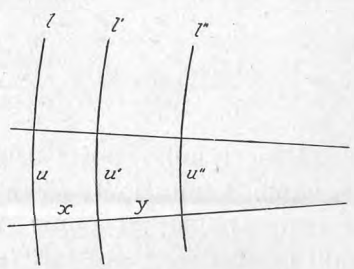
$$u : u' = f(x) \tag{1}$$

Detto l'' un terzo oriciclo, concentrico ai due precedenti, y la distanza di l' da l'' ed u'' l'arco di l'' che corrisponde all'arco u di l, sarà:

$$u' : u'' = f(y). \tag{2}$$

D'altra parte, all'arco u di l corrisponde l'arco u'' di l'' e la distanza fra l ed l'' è $x + y$. Dunque:

$$u : u'' = f(x + y). \tag{3}$$



Eliminando fra le tre relazioni (1), (2), (3) gli archi u, u', u'' si ottiene l'equazione funzionale:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

La sola funzione continua che soddisfa a questa equazione è l'*esponenziale,* per cui avremo:

$$f(x) = a^x,$$

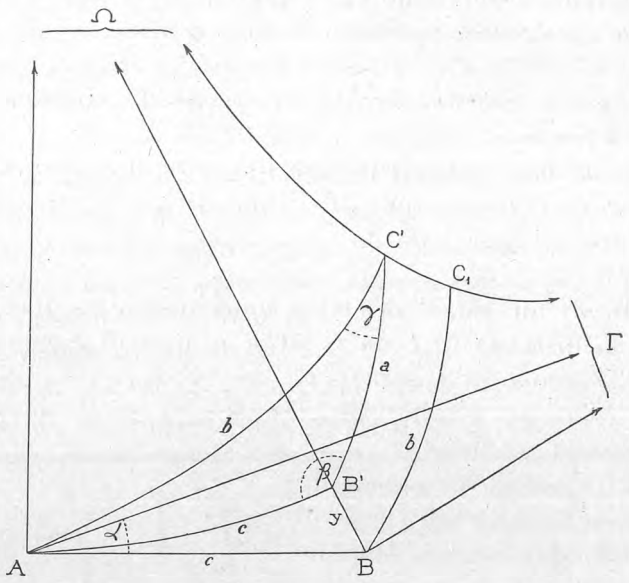
ovvero, prendendo a sotto la forma $e^{\frac{1}{k}}$:

$$u : u' = f(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

Per $x = k$ il rapporto di due oricicli concentrici è uguale ad e, base dei logaritmi naturali.

Il numero k che qui compare è il *parametro della geometria iperbolica.*

§ 34. **Formule trigonometriche pel trilatero rettangolo.** — Sia $AB\Gamma$ un trilatero col vertice improprio Γ e rettangolo in B: dal vertice A eleviamo la perpendicolare $A\Omega$ al piano del trilatero e congiungiamo il punto improprio Ω con B e con Γ.



Descriviamo poi l'orisfera di centro Ω e raggio ΩA e segnamo i punti B', C' in cui essa incontra rispettivamente le rette ΩB, $\Omega\Gamma$. I punti A, B', C' sono i vertici di un triangolo orisferico, i cui lati (oriciclici) designeremo con a, b, c, ed i cui angoli con α, β, γ.

Intanto dall'esame della figura si ricavano le seguenti relazioni:

$$\alpha = \widehat{BA\Gamma}$$
$$\beta = 1 \widehat{retto};$$

poi, tenendo conto che la geometria orisferica è identica alla geometria piana euclidea, si ottengono le altre:

$$\gamma = 1 \widehat{retto} - \alpha,$$

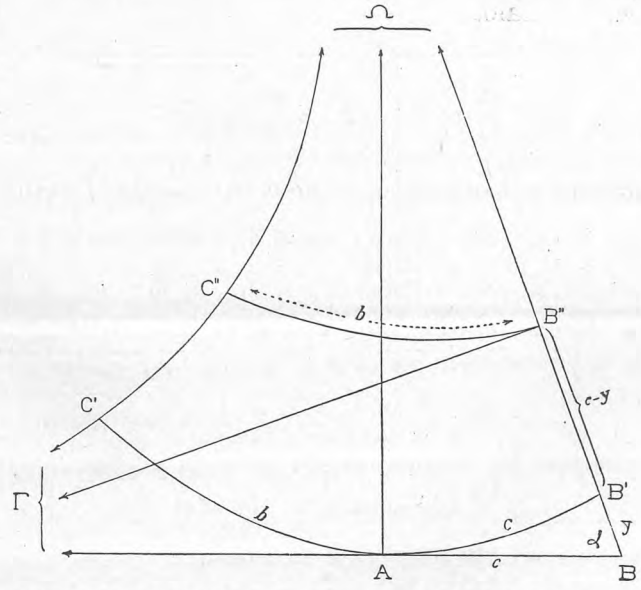
$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{b+c}.$$

Ciò posto, sul piano $B\Omega\Gamma$ si tracci l'oriciclo di centro Ω e raggio ΩB e si designi con C_1 il punto in cui esso incontra la retta $\Omega\Gamma$.

Dall'uguaglianza dei due trilateri $\Omega A\Gamma$, $\Omega B\Gamma$, rettangoli l'uno in A, l'altro in B (cfr. § 30), risulta che l'arco di oriciclo $\widehat{BC_1}$ è uguale all'arco di oriciclo $\widehat{AC'}$, cioè al lato b del triangolo $AB'C'$. D'altra parte, se con y si indica la distanza dei due oricicli concentrici $\widehat{BC_1}$, $\widehat{B'C'}$, per quanto si disse nel precedente paragrafo sarà:

$$\text{(2)} \qquad b : a = e^{\frac{y}{k}},$$

Consideriamo ora la figura piana che si ottiene *ribaltando* il trilatero $AB\Omega$ sul piano del trilatero $A\Omega\Gamma$. I due archi b, c, si disporranno in modo da formare un unico arco oriciclico, che ha per estremi i punti B', C'. Caliamo poi da Γ la perpendicolare su $B\Omega$ e sia B'' il suo piede. I trilateri $\Gamma B''B$, ΩAB, rettangoli in B'' ed A, sono uguali perchè hanno in comune l'angolo in B; per cui



$BB'' = BA$. Inoltre, dall'uguaglianza dei due trilateri rettangoli $\Gamma A\Omega$, $\Gamma B''\Omega$ risulta l'uguaglianza fra l'arco oriciclico $\widehat{C''A} = b$ e l'arco $\widehat{B''C''}$. Applicando ai due archi $\widehat{C''B'}$ e $\widehat{C''B''}$ il teorema del § 33 e ponendo $AB = c$, per cui $B''B' = c - y$, si ottiene:

$$\text{(3)} \qquad b + c : b = e^{\frac{c\ y}{k}}.$$

Eliminando fra le relazioni (1), (2), (3), gli archi a, b, c, si deduce:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = e^{-\frac{c}{k}}.$$

Questa è la formula trigonometrica che lega i due elementi α e c di un trilatero rettangolo.

Essa può per altro trasformarsi introducendo le funzioni iperboliche.

Infatti, essendo:

$$Ch\frac{c}{k} = \frac{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}}{2},$$

la (4) diventa:

$$Ch\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

In modo analogo si ricava:

$$Sh\frac{c}{k} = \frac{e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}}{2} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Dividendo poi membro a membro questa formula e la precedente se ne ottiene una terza in cui figura $Th\frac{c}{k}$.

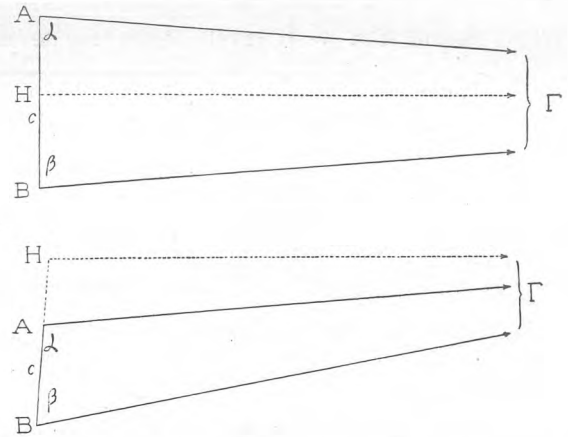
Riassumendo, pel trilatero rettangolo la relazione trigonometrica fondamentale può assumere una delle tre forme seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Sh\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang}\pi(c)} \\ Ch\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\pi(c)} \\ Th\frac{c}{k} = \cos\alpha = \cos\pi(c). \end{cases} \qquad (\alpha = \pi(c))$$

§ 35. **Formule trigonometriche pel trilatero qualunque.** — Sia $AB\Gamma$ un trilatero arbitrario, in cui gli angoli in A e B vengono designati con α e β ed il segmento AB con c.

Si presentano due casi, a seconda che il piede H della perpendicolare calata da Γ sulla retta AB appartiene al

segmento AB ovvero al prolungamento di AB. In quanto segue ci riferiremo esplicitamente al primo caso.



Essendo $c = AH + HB$, dalle note proprietà delle funzioni iperboliche, si ricava:

$$Sh\frac{c}{k} = Sh\frac{AH}{k}\cdot Ch\frac{BH}{k} + Sh\frac{BH}{k}\cdot Ch\frac{AH}{k}.$$

Applicando ora ai due trilateri rettangoli $AH\Gamma$, $BH\Gamma$ le formule (I) del precedente paragrafo potremo esprimere le funzioni iperboliche di AH e BH mediante le funzioni circolari di α e β e ottenere così:

$$Sh\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tang}\beta}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}.$$

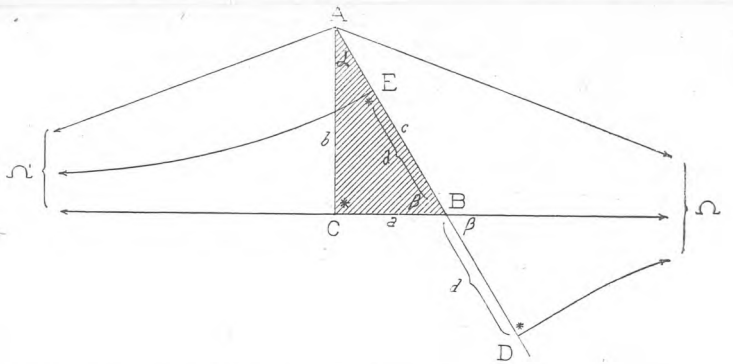
In modo analogo si potranno ricavare due formule in cui al primo membro figurino $Ch\frac{c}{k}$, $Th\frac{c}{k}$.

Otterremo così il seguente gruppo di formule:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} Sh\frac{c}{k} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta}, \\ Ch\frac{c}{k} = \frac{1 + \cos\alpha\,.\,\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\,.\,\operatorname{sen}\beta}, \\ Th\frac{c}{k} = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha}{1 + \cos\alpha\,.\,\cos\beta}. \end{cases}$$

§ 36. **Formule trigonometriche pel triangolo rettangolo.** — Sia ora ABC un triangolo rettangolo coi tre vertici proprii;

C il vertice dell'angolo retto; Ω ed Ω' i punti improprii della retta CB. Supponiamo che B stia fra C ed Ω. Si congiunga allora A con Ω e da Ω si tracci la perpendicolare ΩD sulla retta AB. Designiamo con D il piede della perpendicolare e



con d il segmento BD. Dalla figura, facendo uso della notazione di LOBACEFSKY per designare l'angolo di parallelismo (cfr. § 31), si ricavano le seguenti relazioni:

$$\pi(b) = \widehat{CA\Omega},$$
$$\pi(c+d) = \widehat{DA\Omega},$$

e da queste l'altra:

(1) $$\pi(b) = \alpha + \pi(c+d).$$

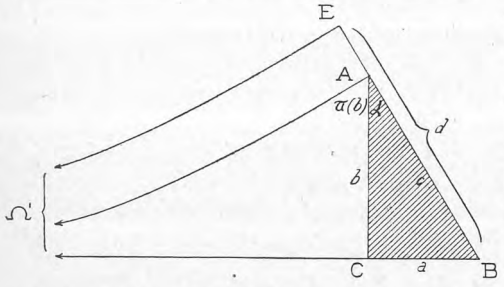
Si congiunga A con Ω', si cali da Ω' la perpendicolare su AB e si designi con E il suo piede.

Dall'uguaglianza dei due trilateri $BD\Omega$, $BE\Omega'$ risulta:

$$EB = BD = d.$$

D'altra parte essendo:

$$\pi(b) = \widehat{\Omega' AC}; \qquad \widehat{\Omega' AE} = \pi(c-d),$$



si ottiene la seconda relazione:

(2) $$\pi(b) = \pi(c-d) - \alpha,$$

la quale sussiste anche nel caso in cui E coincida con A. Se poi E, anzichè nel segmento AB, cadesse sul prolungamento di AB (vedi seconda figura), si avrebbe:

(2′) $$\pi(b) = 2\,\widehat{retti} - \alpha - \pi(d-c).$$

Se ora, per definizione, poniamo:

$$\pi(-p) = 2\,\widehat{retti} - \pi(p),$$

la (2′) può scriversi anch'essa sotto la forma (2).

Dalle relazioni (1) e (2), dimostrate vaiide in ogni caso, sommando e sottraendo si deducono le altre:

(3) $$2 \cdot \pi(b) = \pi(c-d) + \pi(c+d)$$

(4) $$2 \cdot \alpha = \pi(c-d) - \pi(c+d).$$

Partiamo ora dalla (3). Prendendo i *coseni* di ambo i membri si deduce:

$$\cos 2 \cdot \pi(b) = \cos \cdot \pi(c-d) \cdot \cos \pi(c+d) - \operatorname{sen} \pi(c-d) \cdot \operatorname{sen} \pi(c+d)$$

od anche:

$$2 \operatorname{sen}^2 \pi(b) = 1 - \cos \pi(c-d) \cdot \cos \pi(c+d) + \\ + \operatorname{sen} \pi(c-d) \cdot \operatorname{sen} \pi(c+d).$$

Quest'ultima può agevolmente trasformarsi col sussidio delle (I) di pag. 330:

$$\frac{2}{Ch^2 \dfrac{b}{k}} = \frac{Ch \dfrac{c-d}{k} \cdot Ch \dfrac{c+d}{k} - Sh \dfrac{c-d}{k} \cdot Sh \dfrac{c+d}{k} + 1}{Ch \dfrac{c-d}{k} \cdot Ch \dfrac{c+d}{k}}.$$

Sviluppando e riducendo si ricava:

$$\frac{1}{Ch^2 \dfrac{b}{k}} = \frac{Ch^2 \dfrac{d}{k}}{hC^2 \dfrac{c}{k} \cdot Ch^2 \dfrac{d}{k} - Sh^2 \dfrac{c}{k} \cdot Sh^2 \dfrac{d}{k}},$$

dalla quale:

$$Ch^2 \frac{b}{k} = Ch^2 \frac{c}{k} - Sh^2 \frac{c}{k} \cdot Th^2 \frac{d}{k}.$$

Ora, ritornando alle nostre due ultime figure, è chiaro che $\pi(d) = \beta$, per cui, in forza delle (I), si avrà:

$$Th \frac{d}{k} = \cos \pi(b) = \cos \beta.$$

Allora la precedente relazione può scriversi così:

$$Sh^2 \frac{b}{k} = Sh^2 \frac{c}{k} \cdot \operatorname{sen}^2 \beta.$$

Estraendo poi la radice quadrata ed osservando che le tre funzioni $Sh\frac{b}{k}$, $Sh\frac{c}{k}$, sen β sono positive, si ottiene finalmente:

$$Sh\frac{b}{k} = Sh\frac{c}{k}\cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Questa è una delle formule fondamentali del triangolo rettangolo. Una seconda formula, indipendente da essa, si deduce scambiando b e β con a ed α.

Per ottenerne una terza, indipendente alla sua volta dalle due così ricavate, muoviamo dalla (4), prendendo i coseni d'ambo i membri. Si ottiene così la relazione

$$\cos 2\alpha = \cos\pi(c-d)\cdot\cos\pi(c+d) + \operatorname{sen}\pi(c-d)\cdot\operatorname{sen}\pi(c+d).$$

Trasformando questa relazione, come si fece precedentemente per l'altra analoga, si ricava:

$$Ch\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

Pel triangolo rettangolo varranno adunque le seguenti tre formule:

$$(III_a)\qquad \begin{cases} Sh\frac{a}{k} = Sh\frac{c}{k}\cdot\operatorname{sen}\alpha, \\ Sh\frac{b}{k} = Sh\frac{c}{k}\cdot\operatorname{sen}\beta, \\ Ch\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta. \end{cases}$$

Combinando opportunamente fra loro queste formule se ne possono dedurre altre.

Osserviamo però che le nuove relazioni possono dedursi più rapidamente mediante le seguenti considerazioni.

Sia K il raggio d'una sfera euclidea ed ABC un triangolo sferico rettangolo che le appartiene.

Per il triangolo ABC valgono le formule:

$$(III_a')\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{a}{k} = \operatorname{sen}\frac{c}{k}\cdot\operatorname{sen}\alpha, \\ \operatorname{sen}\frac{b}{k} = \operatorname{sen}\frac{c}{k}\cdot\operatorname{sen}\beta, \\ \cos\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta. \end{cases}$$

Rammentando ora che:

$$\operatorname{sen} ix = iShx;\quad \cos ix = Chx;\quad \operatorname{tang} ix = iThx,$$

ove $i = \sqrt{-1}$, è chiaro che il mutamento di k in ik trasforma le ultime relazioni nelle (III_a). E poichè tutte le formule pei triangoli rettangoli sferici si ottengono dalle (III_a') con processi d'eliminazione, così passeremo senz'altro dalle formule dei triangoli sferici rettangoli a quelle dei triangoli rettangoli del piano iperbolico mutando k in ik ed utilizzando le relazioni fra le funzioni circolari e le iperboliche.

Otterremo così i nuovi gruppi:

$$(III_b)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cdot Ch\frac{a}{k} \\ \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha\cdot Ch\frac{b}{k} \end{cases}$$

$$(III_c)\qquad \begin{cases} Th\frac{a}{k} = Th\frac{c}{k}\cdot\cos\beta \\ Th\frac{b}{k} = Th\frac{c}{k}\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

$$(III_d)\qquad Ch\frac{c}{k} = Ch\frac{a}{k}\cdot Ch\frac{b}{k}.$$

§ 37. **Formule pei triangoli obliquangoli.**

Gli artifici che in trigonometria sferica permettono di dedurre le formule pei triangoli obliquangoli da quelle dei triangoli rettangoli sono applicabili alla deduzione delle formule trigonometriche sul piano iperbolico.

Più semplicemente ancora, in forza della osservazione fatta in fine del precedente paragrafo, basterà mutare, nelle formule della trigonometria sferica ordinaria, k in ik ecc.... Avremo così il seguente gruppo di formule fondamentali pei triangoli qualunque:

$$(IV)\qquad \begin{cases} Sh\frac{a}{k} : Sh\frac{b}{k} : Sh\frac{c}{k} = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma \\ Ch\frac{a}{k} = Ch\frac{b}{k}\cdot Ch\frac{c}{k} - Sh\frac{a}{k}\cdot Sh\frac{b}{k}\cos\alpha \\ \cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma\cdot Ch\frac{a}{k}. \end{cases}$$

§ 38. **La trigonometria ordinaria come caso limite della trigonometria iperbolica.** — Partiamo dalla seconda delle (IV) e sostituiamo alle funzioni iperboliche dei lati i rispettivi sviluppi in serie. Otterremo:

$$1+\frac{a^2}{2!k^2}+\frac{a^4}{4!k^4}+\ldots=\left(1+\frac{b^2}{2!k^2}+\frac{b^4}{4!k^4}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{c^2}{2!k^2}+\frac{c^4}{2!k^4}+\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{b}{k}+\frac{b^3}{3!k^3}+\ldots\right)\cdot\left(\frac{c}{k}+\frac{c^3}{3!k^3}+\ldots\right)\cdot\cos\alpha=$$

$$=\left(1+\frac{b^2}{2!k^2}+\frac{c^2}{2!k^2}+\ldots\right)\cdot\left(\frac{bc}{k^2}+\frac{b^3c}{3!k^4}+\frac{c^3b}{3!k^4}+\ldots\right)\cdot\cos\alpha.$$

Sottraendo da ambo i membri l'unità e moltiplicando poi per $2k^2$ otteniamo:

$$a^2+\ldots=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha+\ldots\ldots$$

ove i termini non scritti ammettono per divisore una potenza di k superiore alla prima. Talchè, se passiamo al limite per $k=\infty$, ricaveremo:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$$

cioè le formule fondamentali della trigonometria ordinaria.

Sul piano iperbolico consideriamo una regione nella quale la lunghezza del massimo segmento possa considerarsi come infinitesima rispetto a k. Allora le formule dedotte nell'ipotesi $k=\infty$ danno, a meno di infinitesimi di 2° ordine, le relazioni trigonometriche relative a quella regione.

Questo fatto si suole enunciare dicendo:

Nell'intorno infinitesimo di un punto valgono, sul piano iperbolico, le formule della trigonometria ordinaria.

A questo punto possiamo rilevare la vera natura del V postulato di EUCLIDE. L'essere, sul piano fisico, entro i limiti dell'esperienza, verificata la geometria d'EUCLIDE non implica che il piano in discorso sia *esattamente* un piano euclideo. Potrebbe essere un piano iperbolico con il parametro k tanto grande da rendere gli errori commessi nel ritenerlo infinitamente grande inferiori a quelli inerenti ai processi sperimentali. Adunque, in questo caso, postulare l'unicità della parallela equivale a semplificare la teoria, senza portare in essa modificazioni apprezzabili dall'esperienza.

Il V postulato d'Euclide apparisce adunque come un postulato di semplificazione.

§ 39. **Trigonometria sferica.** — Termineremo questa rapida escursione nel campo della geometria iperbolica ricavando le formule della trigonometria sferica.

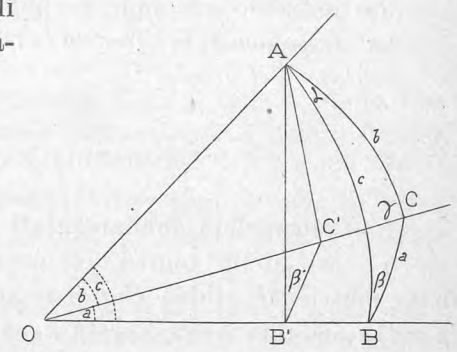
Sia ABC un triangolo sferico, rettangolo in C, coi cateti minori di $\frac{\pi}{2}$; sia O il centro della sfera. Per ricavare le formule trigonometriche relative al triangolo ABC procediamo come si suole ordinariamente in geometria euclidea. Da A caliamo la perpendicolare AC' su OC; da C' caliamo la perpendicolare $C'B'$ su OB; congiungiamo poi B' con A.

Dai triangoli rettangoli OAC', $AC'B'$, $OB'A$ si ricavano le relazioni:

$$\operatorname{sen} b=Sh\frac{AC'}{k}:Sh\frac{OA}{k},$$

$$\operatorname{sen}\beta=Sh\frac{AC'}{k}:Sh\frac{AB'}{k},$$

$$\operatorname{sen} c=Sh\frac{AB'}{k}:Sh\frac{AO}{k},$$



che combinate fra loro danno:

$$\operatorname{sen} b=\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen} c.$$

Mutando b e β in a ed α si ricava:

$$\operatorname{sen} a=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen} c.$$

Per dedurre una terza formula, indipendente dalle due ottenute, partiamo dalle seguenti relazioni, valide per i triangoli piani che si trovano nella figura:

$$\cos b=\frac{Ch\frac{AC'}{k}\cdot Sh\frac{OC'}{k}}{Sh\frac{OA}{k}};\quad \cos a=\frac{Ch\frac{C'B'}{k}\cdot Sh\frac{OB'}{k}}{Sh\frac{OC'}{k}};$$

$$\cos c=\frac{Ch\frac{AB'}{k}\cdot Sh\frac{OB'}{k}}{Sh\frac{OA}{k}};\quad Ch\frac{AB'}{k}=Ch\frac{AC'}{k}\cdot Ch\frac{C'B'}{k}.$$

Eliminando le funzioni iperboliche dei segmenti AC, OC', $C'B'$, ecc. si ricava:

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c.$$

Le formule così ottenute:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} c,$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$

coincidono con quelle dell'ordinaria trigonometria sferica. E poichè tutta la trigonometria sferica si ricava da queste formule potremo concludere che:

La trigonometria sferica ordinaria è indipendente dal V postulato d'Euclide.

Geometria ellittica.

§ 40. Proprietà fondamentali del piano ellittico.

A base della nuova geometria poniamo quei postulati della metrica euclidea che sono indipendenti dall'ipotesi che la retta sia una linea aperta e aggiungiamo ad essi l'ipotesi fondamentale della geometria ellittica: *Due rette coplanari hanno un punto comune.*

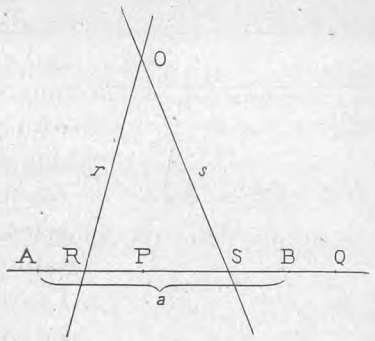
Una prima conseguenza che si deduce da tali premesse è l'esistenza di una corrispondenza univoca tra i punti di una retta e le rette di un fascio. La retta apparisce così all'intuizione come una *linea chiusa*. Quindi due punti di essa non determinano un solo segmento, bensì due. I due segmenti che hanno estremi comuni in due punti assegnati si diranno *adiacenti*.

Un'altra immediata proprietà del piano ellittico è quella *di non venire, dalle sue rette, spezzato in due parti*. Infatti, scelti sul piano due punti arbitrari A, B ed una retta r non passante per essi, dei due segmenti che hanno per estremi A e B uno ed uno solo incontra r; sicchè percorrendo il segmento che non interseca r si può passare da A a B senza attraversare r. Dunque:

Il piano ellittico non è, come il piano euclideo e il piano iperbolico, una superficie semplicemente connessa.

Esso deve dirsi invece doppiamente connesso, perchè due rette arbitrarie che gli appartengono lo spezzano sempre.

Infatti due rette, r, s, che gli appartengono, hanno in comune un punto O. Se A e B sono due punti arbitrari del piano, dei due segmenti adiacenti a ed a' ch'essi determinano uno, ad es. a, incontra r. Se l'altro segmento a' incontrasse s sarebbe già stabilito che non si può passare da A in B senza attraversare una delle due rette. Se poi avviene che a intersechi entrambe le rette nei punti R, S si fissi un punto P del segmento RS contenuto in a, ed un punto Q di a'. È chiaro allora che per passare da P a Q bisogna attraversare l'una o l'altra delle due rette date.



Segue da ciò che, eseguendo due tagli lungo le rette r ed s, il piano viene spezzato in parti non connesse fra loro.

Un esame più minuto mostrerebbe che queste parti sono due, ciascuna delle quali costituisce un *angolo*. Rispetto all'intuizione euclidea, l'angolo che si presenta nella geometria ellittica dev'essere figurato come la somma di due angoli opposti.

I due angoli determinati sul piano dalle rette r, s diconsi *l'uno adiacente all'altro*. Se due angoli adiacenti risultano uguali, ciascuno è *retto* ed i lati danno una coppia di *rette perpendicolari*.

§ 41. Polarità assoluta del piano ellittico.

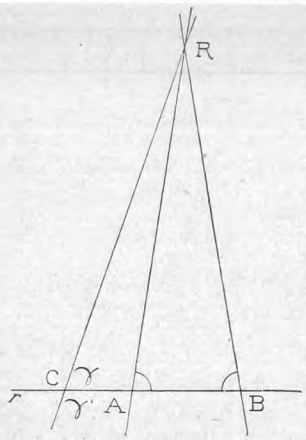
Potremo senz'altro ritenere stabilite in geometria ellittica quelle proposizioni che nell'assetto euclideo sono indipendenti dall'*infinità della retta* e dal *postulato sulle parallele*; ad es. i criteri d'uguaglianza fra due triangoli, ecc.

Procediamo ora nello sviluppo di quelle proprietà del piano ellittico che non hanno riscontro sul piano euclideo.

Tutte le perpendicolari ad una retta concorrono in un punto.

Sia R il punto d'incontro delle perpendicolari in A e B

alla retta $r \equiv AB$. Consideriamo i due triangoli isosceli che hanno per base comune uno dei due segmenti AB e vertice comune R: questi triangoli sono uguali (2° criterio d'uguaglianza), perciò risultano uguali fra loro i quattro lati che cadono perpendicolarmente alla base comune. Da ciò si deduce che il punto R e la retta r dividono in parti uguali le due rette AR, BR. Si congiunga ora R con un punto arbitrario C di r. Si ottengono due triangoli rettangoli, col lato CA e il vertice R in comune ed i lati che hanno per estremi i punti A ed R uguali.



Allora, in forza del 1° criterio di uguaglianza, i due triangoli sono uguali e conseguentemente risultano uguali i due angoli γ e γ' (vedi figura) che hanno vertice comune in C. Ma γ e γ' sono adiacenti, sicchè $\gamma = \gamma' = 1$ $\widehat{\text{retto}}$: dunque AC è perpendicolare ad r.

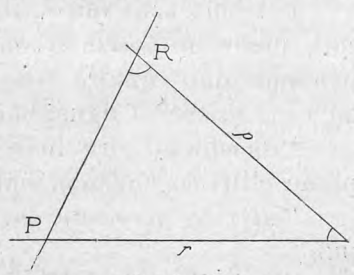
Con ciò abbiamo dimostrato che tutte le rette che congiungono R coi punti di r sono perpendicolari ad r, ovvero, che tutte le perpendicolari ad r concorrono in R.

Dal ragionamento svolto risulta pure che tutti i segmenti che congiungono R coi vari punti di r sono uguali fra loro ed uguali ciascuno alla *semiretta*. Da ciò si deduce che:

Gli estremi non comuni di tutte le semirette uscenti da uno stesso punto sono in linea retta.

Sia AB un segmento arbitrario. Tutte le perpendicolari elevate alla retta AB nei punti del segmento in discorso passano per un punto P ed appartengono ad un angolo $\widehat{APB}$, che verrà detto *angolo associato al segmento* AB.

Il punto in cui concorrono tutte le perpendicolari ad una retta dicesi *polo della retta;* la retta alla sua volta dicesi *polare* del punto.



Vale allora il seguente teorema:

Se una retta p *passa pel polo* R *di* r, *il polo* P *di* p *appartiene ad* r.

Infatti, la perpendicolare a p tracciata per R incontra r in un punto P. Questo punto è il polo di p perchè in esso concorrono due perpendicolari a p.

Un facile corollario del teorema dimostrato è il seguente:

Se la retta p *descrive un fascio, il polo di* p *descrive una retta, che è la polare del centro del fascio.*

Due punti si dicono *coniugati* quando l'uno giace sulla polare dell'altro; due rette si dicono *coniugate* quando l'una passa pel polo dell'altra. È chiaro allora che:

Due punti coniugati dividono la retta che li congiunge in parti uguali; due rette coniugate dividono il fascio ch'esse determinano in due angoli (retti) uguali.

La corrispondenza sopra stabilita fra punti e rette d'un piano gode di tutte le proprietà *grafiche* relative alla polarità studiate dalla geometria proiettiva.

Essa verrà detta *polarità assoluta* del piano.

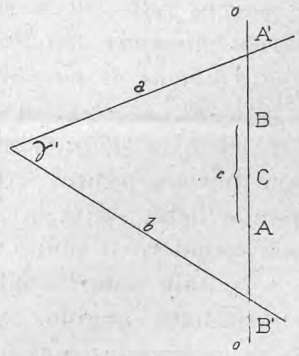
§ 42. Legge di dualità sul piano ellittico.

Mostriamo ora come sul piano ellittico *la legge di dualità* della Geometria proiettiva, valga anche per le *proprietà metriche.*

Per giungere a questo risultato conviene spendere qualche altra parola sul modo di ricavare da una figura, in cui si considerino *segmenti* ed *angoli*, la *figura duale.*

Sia perciò ABC un determinato segmento della retta o, C il suo punto di mezzo ed a, b, le polari dei suoi estremi A, B.

Detti A', B', i punti in cui a e b incontrano o, è chiaro che le due coppie di punti A, B; A', B' non si separano.



Infatti se il segmento ACB è maggiore della semiretta, i punti A', B' apparterranno al segmento in discorso; se ACB è uguale alla semiretta, A' coinciderà con B e B' con A; finalmente se ACB è minore della semiretta, entrambi i punti A' e B' cadono nel segmento adiacente ad ACB.

Dei due segmenti che i punti A', B' determinano su o fissiamo quello che contiene od è contenuto nel segmento ACB. Allora è chiaro che la somma dei due segmenti ACB, $A'CB'$ è uguale all'intera retta. Ciò posto chiameremo *angolo polare* del segmento $c = ACB$ l'angolo γ' associato al segmento $c' = A'CB'$. Viceversa il segmento c si dice *segmento* polare dell'angolo γ'.

Se si fissa come unità di misura degli angoli l'angolo

retto e come unità di misura dei segmenti la semiretta, allora fra la lunghezza c di un segmento e l'ampiezza γ' del suo angolo polare passa la relazione:

$$c + \gamma' = 2.$$

Ciò posto gli angoli ed i segmenti che vengono in considerazione nella *figura polare* F' d'una figura data F sono gli angoli ed i segmenti polari dei segmenti e degli angoli della figura F. Allora è chiaro che se in F alcuni segmenti od angoli sono uguali, nella figura polare F' saranno uguali fra loro alcuni angoli o segmenti: in altre parole: *la relazione di uguaglianza si conserva nella trasformazione polare, salvo a passare fra angoli se sussisteva fra segmenti e viceversa.* Se invece i due segmenti a, b di F sono legati dalla relazione $a > b$, gli angoli α', β' corrispondenti nella figura polare F' soddisfano alla relazione $\alpha' < \beta'$; cioè: *le disuguaglianze mutano di senso nella trasformazione polare, passando fra angoli se erano date fra lati e viceversa.*

Tenendo presenti i risultati cui siamo pervenuti è chiaro che *ad ogni proprietà metrica della figura* F *corrisponde una proprietà metrica della figura polare* F', *la quale si ottiene scambiando nell'enunciato relativo ad* F *la parola punto con la parola retta, la parola segmento con la parola angolo, la parola maggiore con la parola minore, ed introducendo quelle modificazioni di parole che da tali scambi derivano.*

Osservazione. Si noti la perfetta analogia fra il piano ellittico e la *stella* (l'insieme delle rette e dei piani che passano per un punto). Alla polarità nel piano ellittico corrisponde nella stella la *polarità assoluta,* che ad ogni retta fa corrispondere il piano perpendicolare.

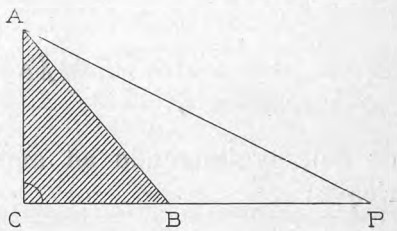
In tale polarità ad ogni diedro si fa corrispondere un determinato angolo, ottenuto innalzando dal centro della stella (che appartiene alla costola del diedro) le perpendicolari ad ogni faccia del diedro, dalla parte ove si trova l'altra faccia. Fra il rettilineo α (sezione normale) del diedro e l'angolo a' così costruito si sa che sussiste la stessa relazione $\alpha + a' = 2$ ($\widehat{\text{retti}}$), che noi abbiamo stabilito fra gli elementi corrispondenti sul piano ellittico.

Segando la stella con una sfera, che abbia il suo centro nel centro della stella, gli angoli piani della stella vengono a corrispondere ad archi di cerchio massimo sulla sfera, gli angoli diedri della stella ad angoli sulla sfera, alla polarità della stella la polarità sulla sfera. Sulla sfera, come del resto è noto, vale dunque una legge di dualità analoga a quella che abbiamo veduto sussistere sul piano ellittico.

§ 43. **Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono.** — Premettiamo il seguente lemma:

In un triangolo rettangolo l'angolo opposto ad uno dei lati dell'angolo retto è acuto, retto, ottuso a seconda che questo lato è minore, uguale, maggiore della semiretta.

Sia ABC un triangolo rettangolo in C e P il polo del lato AC. A seconda che il lato CB del triangolo è minore, uguale, maggiore della semiretta, il punto P appartiene al prolungamento di CB, ovvero cade in B, o, finalmente, appartiene a CB. Se si congiunge P con A valgono le proposizioni:



$$CB < CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} < \widehat{CAP};$$
$$CB = CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} = \widehat{CAP};$$
$$CB > CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} > \widehat{CAP}.$$

Ora, essendo P polo di AC, il segmento CP è uguale alla semiretta, $\widehat{CAP}$ è un angolo retto. Allora le proposizioni su scritte possono mettersi nella forma:

$$CB < \text{semiretta} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} < 1\ \widehat{\text{retto}}$$
$$CB = \text{semiretta} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} = 1\ \widehat{\text{retto}}$$
$$CB > \text{semiretta} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} > 1\ \widehat{\text{retto}}. \qquad \text{c. d. d.}$$

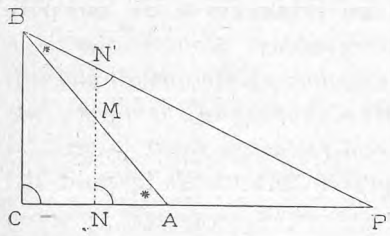
Il lemma s'inverte facilmente.

Passiamo ora a dimostrare che: *La somma degli angoli di un triangolo rettangolo è maggiore di due angoli retti.*

Se uno almeno dei due lati dell'angolo retto è uguale o maggiore della semiretta, l'angolo opposto a questo lato è retto od ottuso, sicchè la somma degli angoli del triangolo, in questi casi, supera manifestamente due angoli retti. Se poi

i due cateti sono entrambi minori della semiretta ragioneremo così.

Dal punto di mezzo M dell'ipotenusa AB caliamo la perpendicolare sul cateto AC. Il piede N di questa perpendicolare apparterrà al cateto in discorso.



Indichiamo poi con P il polo di MN e con N' il punto d'incontro fra PB ed MN. Viene così determinato un triangolo $MN'B$, rettangolo in N' ed uguale al triangolo AMN. Avremo perciò la relazione angolare:

$$\widehat{MAN} = \widehat{MBN'},$$

da cui, aggiungendo ad ambo i membri l'angolo $\widehat{ABC}$, si ricava:

$$\widehat{ABC} + \widehat{MAN} = \widehat{PBC}.$$

Ma nel triangolo rettangolo PBC il cateto $PC = PN + NC$ è maggiore della semiretta: allora, pel lemma sopra dimostrato, abbiamo:

$$\widehat{PBC} > 1\ \widehat{\text{retto}},$$

sicchè la precedente uguaglianza angolare, combinata con questa disuguaglianza, ci dà:

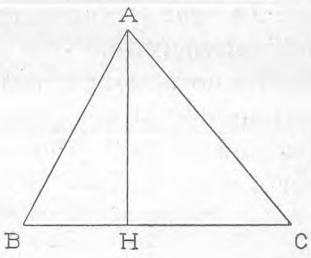
$$\widehat{ABC} + \widehat{MAN} > 1 \text{ retto}.$$

Ora, se nel triangolo ABC la somma dei due angoli in $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ è maggiore di un angolo retto, si deduce immediatamente:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 2\ \widehat{\text{retti}}, \qquad \text{c. d. d.}$$

Il teorema ora dimostrato si estende subito ai triangoli

non rettangoli. Infatti siano B e C i vertici di due angoli dello stesso tipo, cioè entrambi acuti ovvero entrambi ottusi, ed H il piede della perpendicolare calata dal vertice A sul lato BC. Il punto H appartiene al segmento BC e nei due triangoli rettangoli ABH, ACH valgono le relazioni:



$$\widehat{B} + \widehat{BAH} > 1\ \widehat{\text{retto}},$$
$$\widehat{C} + \widehat{CAH} > 1\ \widehat{\text{retto}}.$$

Sommando membro a membro si deduce:

$$\widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A} > 2\ \widehat{\text{retti}}, \qquad \text{c. d. d.}$$

Con un ragionamento uguale a quello svolto nel § 26 si dimostra poi che: *la somma degli angoli di un poligono di* n *lati è maggiore di* $2(n-2)$ *angoli retti.*

§ 44. **Eccesso ed area di un poligono.** — La differenza $\widehat{\varepsilon}$ fra la somma $\widehat{S}$ degli angoli di un poligono e $2(n-2)$ angoli retti dicesi *eccesso* del poligono.

Sicchè avremo:

$$\widehat{\varepsilon} = \widehat{S} - 2(n-2)\ \widehat{\text{retti}},$$

ed un particolare, pel triangolo:

$$\widehat{\varepsilon} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2\ \widehat{\text{retti}}.$$

Relativamente ad $\widehat{\varepsilon}$ si dimostra che:

L'eccesso di un poligono somma di due o più altri è uguale alla somma dei loro eccessi.

Il ragionamento è dello stesso tipo di quello svolto al § 27, per l'analogo teorema sul piano iperbolico.

Anche per l'area di un poligono possiamo ripetere qui ciò che dicemmo al § 27, perchè anche gli eccessi, sono grandezze che si sommano col sommarsi dei poligoni. *Potremo adunque assumere l'eccesso per area di un poligono.*

§ 45. **Proprietà geodetica della linea retta.**

Per dimostrare che la retta, anche sul piano ellittico,

gode della proprietà delle *geodetiche,* premettiamo il seguente teorema:

In ogni triangolo la somma dei lati è minore del doppio dell' intera retta.

Siano a, b, c i lati di un triangolo, α', β', γ' gli angoli corrispondenti del triangolo polare; a', b', c' i segmenti associati ad α', β', γ'. Indicando brevemente con s la semiretta, per quanto si disse al § 42, avremo:

$$a + a' = 2s$$

$$b + b' = 2s$$

$$c + c' = 2s.$$

Ma essendo: $\alpha' + \beta' + \gamma' > 2$ retti, sarà:

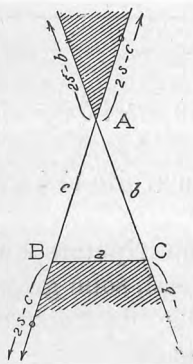
$$a' + b' + c' > 2s.$$

Allora, sommando le precedenti relazioni e tenendo conto di quest' ultima disuguaglianza, si ricava:

$$a + b + c < 4s. \qquad \text{c. d. d.}$$

Passiamo ora a dimostrare la proprietà geodetica della linea retta, vale a dire che:

In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due.



Sia ABC il triangolo: prolunghiamo i lati $c \equiv AB$, $b \equiv AC$ per modo da ottenere un nuovo triangolo che abbia con il precedente comune il lato $a \equiv AB$ e per altri lati i due segmenti $2s - c$, $2s - b$. Applicando a questo triangolo il precedente teorema si ricava:

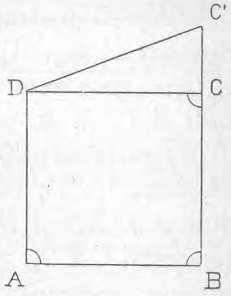
$$a + (2s - c) + (2s - b) < 4s,$$

da cui: $\qquad a < b + c. \qquad$ c. d. d.

§ 46. **Una proprietà del quadrilatero trirettangolo.**

Sia $ABCD$ un quadrilatero trirettangolo, coi lati minori della semiretta e con gli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ retti. Il 4° angolo $\widehat{D}$ sarà allora ottuso. Dico che sussistono le disuguaglianze:

$$AD < BC; \quad DC < AB.$$



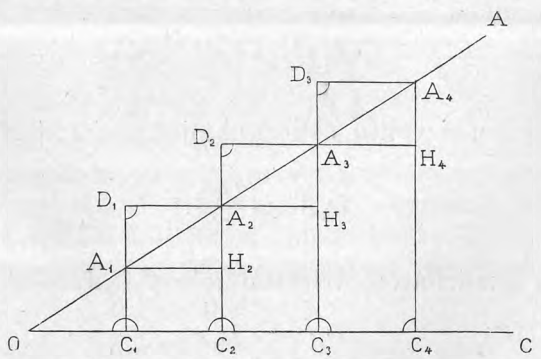
Dimostriamo la 1ª. Anzitutto è chiaro che non può essere $AD = BC$, perchè allora dovrebbe essere $\widehat{D} = \widehat{C} = 1$ retto, mentre $\widehat{D}$ è un angolo ottuso. Se poi fosse $AD > BC$ sul prolungamento di BC si prenda il punto C' tale che sia il segmento $BC' = AD$, e si congiunga C' con D. Il triangolo rettangolo DCC' ha il lato DC minore della semiretta, percui l'angolo $\widehat{C'}$ è acuto. Ma essendo $AD = C'B$, dovrebbe essere $A\widehat{D}C' = \widehat{DC'}B$, il che è assurdo, essendo $A\widehat{D}C'$ maggiore dell'angolo ottuso $\widehat{D}$ del quadrilatero $ABCD$. Dunque non può essere $AD > BC$.

Nello stesso modo si prova che DC è minore di AB. Questa proprietà del quadrilatero trirettangolo può enunciarsi dicendo:

Di due lati opposti d' un quadrilatero trirettangolo è minore quello adiacente all' angolo ottuso.

§ 47. **Un teorema sulla proiezione dei segmenti.**

Sia $\widehat{AOC}$ un angolo acuto arbitrario. Sul primo lato OA segniamo tanti segmenti uguali OA_1, A_1A_2, A_2A_3,..., tali che la loro somma sia minore della semiretta. Dai punti A_1, A_2 A_3... caliamo sul lato OC le perpendicolari e siano C_1, C_2, C_3.... i loro piedi.



I segmenti OC_1, OC_2, OC_3,..., proiezioni ortogonali di OA_1; $OA_2 = 2 \cdot OA_1$; $OA_3 = 3 \cdot OA_1$,.... soddisfano alle relazioni

$$\text{(I)} \qquad OC_1 < \frac{OC_2}{2} < \frac{OC_3}{3} < \frac{OC_4}{4} \ldots,$$

mentre i segmenti A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, soddisfano alle altre:

$$\text{(II)} \qquad A_1C_1 > \frac{A_2C_2}{2} > \frac{A_3C_3}{3} \ldots.$$

Per dimostrare ciò caliamo da A_1, A_2, A_3,.... le perpendicolari A_1H_2, A_2H_3, A_3H_4,.... rispettivamente su A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4,..., poi prolunghiamo A_1C_1 di un segmento $A_1D_1 = A_1C_1$; indi A_2C_2 di un segmento $A_2D_2 = A_2H_2$; successivamente A_3C_3 di un segmento $A_3D_3 = A_3H_3$; ecc. Congiungendo D_1 con A_2; D_2 con A_3; D_3 con A_4, ecc. si vengono a determinare i triangoli $A_1D_1A_2$, $A_2D_2A_3$, $A_3D_3A_4$, ecc., rispettivamente uguali ai triangoli OA_1C_1, $A_1H_2A_2$, $A_2H_3A_3$, ecc. Sicchè avremo le uguaglianze segmentarie:

$$OC_1 = D_1A_2; \quad A_1H_2 = D_2A_3; \quad A_2H_3 = D_3A_4,\ldots.$$

Dal quadrilatero $D_1C_1C_2A_2$, ottusangolo in A_2, si ricava:

$$D_1A_2 < C_1C_2; \quad D_1C_1 > A_2C_2;$$

ovvero:

$$OC_1 < C_1C_2; \quad 2A_1C_1 > A_2C_2,$$

e finalmente

$$\text{(1)} \qquad OC_1 < \frac{OC_2}{2}; \quad A_1C_1 > \frac{AC}{2}$$

Dedotte queste due prime relazioni passiamo a considerare l'angolo $O\widehat{A_2}C_2$ come angolo fondamentale, ed applichiamo ad esso le proprietà contenute nelle (1). Avremo, applicando ad es. la seconda,

$$A_1H_2 > \frac{OC_2}{2}$$

od anche, tenendo conto dell'uguaglianza fra A_1H_2 e D_2A_3:

$$D_2A_3 > \frac{OC_2}{2}.$$

Ma dal quadrilatero trirettangolo $C_2C_3A_3D_2$ si ricava:

$$C_2C_3 > D_2A_3.$$

Combinando questa con la precedente disuguaglianza si ricava:

$$C_2C_3 > \frac{OC_2}{2},$$

da cui:

$$C_2C_3 + OC_2 > \frac{OC_2}{2} + OC_2.$$

$$OC_3 > \frac{3}{2}\,OC_2,$$

$$\frac{OC_3}{3} > \frac{OC_2}{2}.$$

Quest'ultima, insieme alla prima delle (1) fornisce la relazione:

$$OC_1 < \frac{OC_2}{2} < \frac{OC_3}{3}.$$

In modo analogo, applicando all'angolo OA_2C_2 la prima delle due proprietà espresse dalle (1), si perverrebbe alla disuguaglianza

$$\frac{A_3C_3}{3} < \frac{A_2C_2}{2},$$

sicchè, tenendo presente la 2ª delle (1), potremo scrivere:

$$A_1C_1 > \frac{A_2C_2}{2} > \frac{A_3C_3}{3}.$$

Proseguendo con questo metodo si ottengono le relazioni (I) e (II), che ci eravamo proposto di dimostrare, le quali, tenendo presente che $OA_r = r \cdot OA_1$, possono anche scriversi così:

$$\frac{OC_1}{OA_1} < \frac{OC_2}{OA_2} < \frac{OC_3}{OA_3} < \ldots.$$

$$\frac{A_1C_1}{OA_1} > \frac{A_2C_2}{OA_2} > \frac{A_3C_3}{OA_3} > \ldots.$$

Sicchè: se OA ed OA' sono due segmenti commensurabili, minori della semiretta ed appartenenti entrambi al primo lato d'un angolo, e C, C' le proiezioni di A, A' sul 2° lato, nell'ipotesi $OA < OA'$ si deduce:

$$\text{(I')} \qquad \frac{OC}{OA} < \frac{OC'}{OA'}; \qquad \text{(II')} \qquad \frac{AC}{OA} > \frac{A'C'}{OA'}.$$

Queste disuguaglianze, ferme restando tutte le ipotesi precedenti, ad eccezione di quella della commensurabilità di

OA ed OA', si estendono, coi soliti ragionamenti fondati sulla teoria dei limiti, al caso in cui OA ed OA' siano due segmenti qualunque.

§ 48. **Conseguenze del precedente teorema.**

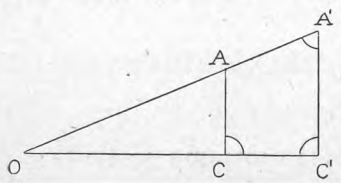
Dalle (I') e (II'), dividendo membro a membro si ricava:

$$\frac{AC}{OC} > \frac{A'C'}{OC'}$$

da cui:

$$\frac{OC'}{OC} > \frac{A'C'}{AC} \geqq 1.$$

Quest'ultima, nell'ipotesi in cui OA' sia uguale alla semiretta, dice che:



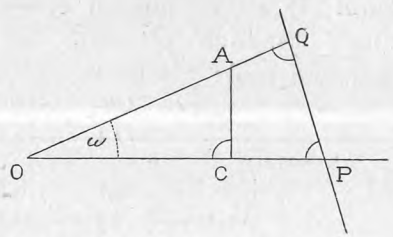
Il rapporto di due lati opposti d'un quadrilatero trirettangolo tende ad 1 *quando la distanza di quei due lati, tende a zero.*

COROLLARIO. *Il limite del rapporto* $\frac{OC}{OA}$, *quando l'angolo* $\omega = A\widehat{O}C$ *tende a zero, è l'unità.*

Infatti, se P e Q sono i punti in cui OA ed OC intersecano la polare di O, si avrà:

$$OP = OQ \geqq OA.$$

Essendo poi:



$$\frac{CP}{AQ} = \frac{OP - OC}{OQ - OA} = \frac{OP - OC}{OP - OA}$$

si deduce: $$\lim_{PQ=0} \frac{CP}{AQ} = \lim_{\omega=0} \frac{OP - OC}{OP - OA} = 1,$$

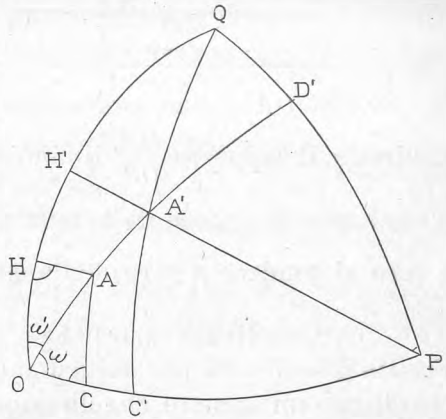
e quindi:

$$\lim_{\omega=0} \frac{OC}{OA} = 1, \qquad \text{c. d. d.}$$

TEOREMA. *Se* OA *è minore della quarta parte dell'intera retta, il limite del rapporto* $\frac{OC}{OA}$, *quando* $A\widehat{O}C$ *tende ad un angolo retto, è zero.*

Sia OPQ un triangolo trirettangolo ed ω' un angolo piccolo a piacere. Si tracci, nell'angolo $\widehat{QOP}$, la retta OD' in modo che $\widehat{QOD'}$ sia uguale ad ω' e s'indichi con ω l'angolo $\widehat{D'OP}$. L'angolo ω tende ad 1 *retto* quando ω tende a zero e viceversa.

Su OP si prenda il segmento $OC' = QD'$ e si congiunga C' con Q. Il punto comune alle due rette QC' e OD' si designi con A'; ed il punto comune ad OQ e PA' con H'.



Essendo: $OA' > OH'$ (1), si ha:

$$\frac{OC'}{OA'} < \frac{OC'}{OH'}.$$

E poichè al tendere a zero di ω' il segmento OH' resta fisso mentre ω tende ad $1\widehat{r}.$ ed OC' tende a zero, si deduce:

$$\lim_{\omega = 1\widehat{r}.} \frac{OC'}{OA'} = \lim_{\omega'=0} \frac{OC'}{OH'} = 0.$$

Sia ora A un punto arbitrario del segmento OA' e C ed H le sue proiezioni ortogonali su OP ed OQ. Sappiamo che:

$$\frac{OC}{OA} > \frac{OC'}{OA'}.$$

Passando al limite, per ω tendente ad $1\widehat{r}.$, si ricava:

$$\lim_{\omega = 1\widehat{r}.} \frac{OC}{OA} = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

COROLLARIO. *In un triangolo rettangolo, i cui lati sono*

(1) Infatti: nel quadrilatero $A'H'QD'$, che ha i lati minori della semiretta e gli angoli H', Q, D' retti, in forza del teorema del § 46, si ha:

$$A'D' < H'Q,$$

da cui, essendo $OQ = OD'$, si deduce:

$$OA' > OH'.$$

minori della semiretta, il limite del rapporto fra un cateto e l' ipotenusa, quando l' angolo opposto al cateto tende a zero, è zero.

Infatti, riferendoci alla figura precedente e tenendo conto che HA è minore di OC, si ha:

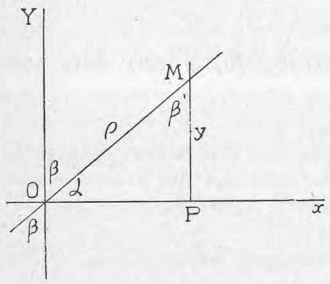
$$\lim_{\omega'=0} \frac{HA}{OA} \leq \lim_{\omega'=0} \frac{OC}{OA} = 0.$$

Se ora OA cresce, senza oltrepassare la lunghezza della semiretta, il rapporto $\frac{HA}{OA}$ diminuisce, sicchè qualunque sia OA, purchè non maggiore della semiretta, il rapporto $\frac{HA}{OA}$ tende a zero al tendere a zero dell'angolo $\widehat{HOA}$, c. d. d.

§ 49. **Coordinate cartesiane e polari - La funzione** $f(\rho, \alpha)$. — Fissata la semiretta per unità di misura, ad ogni segmento verrà coordinato un numero, che diremo lunghezza del segmento. La lunghezza di un segmento minore della semiretta è minore di 1; la lunghezza di un segmento uguale alla semiretta è il numero 1; la lunghezza di un segmento maggiore della semiretta è maggiore di 1; la lunghezza dell' intera retta è 2.

Per unità di misura degli angoli assumeremo l'angolo retto: allora l' ampiezza di un angolo è uguale alla lunghezza del suo segmento associato (cfr. § 41), talchè la misura degli angoli può essere ricondotta a quella dei segmenti associati ad essi.

Alla lunghezza di un segmento può coordinarsi il segno + ovvero il segno —. Fissato su una retta, cui appartiene un determinato segmento AB, un *verso positivo*, la lunghezza del segmento AB sarà preceduta dal segno + se il punto B segue A nel verso positivo; sarà preceduta dal segno — se il punto B precede A, sempre in quel verso.



Sia O un punto arbitrario del piano: intorno ad esso delimitiamo una *regione normale*, ad es. quella dei punti interni ad un cerchio di centro O e raggio minore della semiretta; tracciamo poi per O due assi ortogonali x, y e su ciascuno di essi sia fissata una direzione positiva. Da un punto arbitrario M della nostra regione caliamo la perpendicolare MP sull'asse x: le

lunghezze, in valore e segno, dei segmenti OP, PM sono le coordinate cartesiane ortogonali di M e verranno costantemente designate con x ed y. La lunghezza assoluta ρ del segmento OM e l'angolo $\alpha = \widehat{POM}$ sono le coordinate polari dello stesso punto.

Poniamo:

$$(1) \qquad f(\rho, \alpha) = \frac{x}{\rho}.$$

Nel caso euclideo si sa che la funzione $f(\rho, \alpha)$, così definita, è indipendente da ρ e coincide con $\cos\alpha$; nel caso presente essa dipende da ρ ed α. Proponiamoci di studiare le sue variazioni.

Osserviamo, anzitutto, ch'essa è definita solo per valori di ρ maggiori di zero e minori di 1: potrebbe tuttavia definirsi anche per $\rho \geq 1$, ma ciò non ha per noi alcuna importanza.

Per $\rho = 0$ la (1) si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$. Rimettendo al seguito la definizione di $f(0, \alpha)$, notiamo i seguenti valori particolari di $f(\rho, \alpha)$:

$$f(\rho, 0) = 1; \quad f(\rho, 1) = 0; \quad f(\rho, 2) = -1.$$

Inoltre si ha:

$$(1') \qquad -1 \leq f(\rho, \alpha) \leq 1.$$

Le proprietà stabilite al § 47, intorno alla variazione del rapporto $\frac{x}{\rho}$, ci permettono poi di asserire che:

Per $\alpha =$ *costante il valore assoluto di* $f(\rho, \alpha)$ *cresce con* ρ.

Da ciò si deduce che: fissato α esiste un limite determinato e finito per $f(\rho, \alpha)$, allorchè ρ tende a *zero*.

Questo limite, in forza dello (1'), è un numero compreso fra -1 e $+1$.

Ciò posto, definiamo il valore della funzione $f(\rho, \alpha)$, per $\rho = 0$, come limite dei valori di $f(\rho, \alpha)$ quando ρ tende a zero.

Porremo cioè:

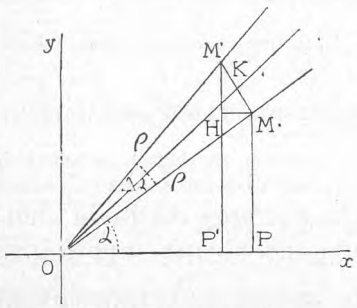
$$f(0, \alpha) = \lim_{\rho=0} f(\rho, \alpha).$$

Il valore $f(0, \alpha)$ verrà, nel seguito, designato brevemente con $f(\alpha)$.

La funzione $f(\rho, \alpha)$ è così definita per tutte le coppie ρ, α

corrispondenti ai punti della regione normale assunta ed i suoi valori sono costantemente compresi fra $+1$ e -1.

§ 50. **Continuità della funzione** $f(\rho, \alpha)$. — La $f(\rho, \alpha)$ è manifestamente continua per tutte le coppie ρ, α per cui $\rho > 0$. Per dimostrare che è continua anche per $\rho = 0$ ed α qualunque, consideriamo l'incremento che riceve quando α aumenta di $\Delta\alpha$.



Riferendoci all'unita figura, e considerando i segmenti che entrano nelle seguenti relazioni come grandezze assolute, avremo:

$$|f(\rho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\rho, \alpha)| = \frac{P'P}{OM}.$$

Se H è il piede della perpendicolare calata da M su $M'P$ e K il punto medio di MM', sussiste l'identità:

$$\frac{P'P}{OM} = \frac{P'P}{HM} \cdot \frac{HM}{MM'} \cdot \frac{2MK}{OM}.$$

Ma HM è minore di MM': per cui:

$$|f(\rho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\rho, \alpha)| < 2\,\frac{P'P}{HM} \cdot \frac{M'K}{OM}.$$

Passando al limite per $\Delta\alpha$ e ρ tendenti a zero in modo arbitrario e tenendo presenti le proposizioni dimostrate al § 48, si ottiene

$$\lim_{\substack{\rho = 0 \\ \Delta\alpha = 0}} |f(\rho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\rho, \alpha)| = 0$$

cioè:

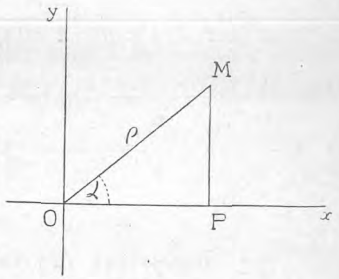
$$\lim_{\substack{\rho = 0 \\ \Delta\alpha = 0}} f(\rho, \alpha + \Delta\alpha) = f(0, \alpha) = f(\alpha).$$

La $f(\rho, \alpha)$ è dunque continua anche per $\rho = 0$.

La precedente uguaglianza può anche scriversi così:

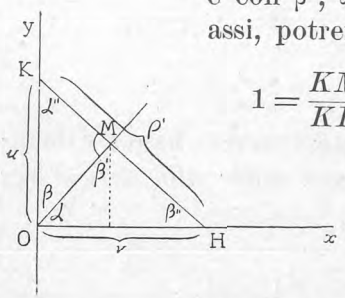
$$\lim_{\alpha' = \alpha} f(\alpha') = f(\alpha).$$

§ 51. **Proprietà della funzione** $f(\alpha)$. — Ritornando alla figura fondamentale osserviamo che l'angolo $\beta' = \widehat{OMP}$, al tendere di M ad O sul raggio OM, per limite l'angolo $\beta = \widehat{MOY}$. Sicchè:



$$\lim_{\rho = 0} \frac{y}{?} = \lim_{\rho = 0} f(\rho, \beta') = f(0, \beta) = f(\beta).$$

Ciò posto, tracciamo per M la perpendicolare alla retta OM: designando con H, K i punti in cui essa incontra gli assi x, y e con β'', α'' gli angoli ch'essa forma con gli assi, potremo scrivere la seguente identità:



$$1 = \frac{KM}{KH} + \frac{MK}{KH} = \frac{KM}{OK} \cdot \frac{OK}{KH} + \frac{MK}{OH} \cdot \frac{OH}{KH},$$

ovvero, chiamando ρ', u, v le lunghezze di KH, OK, OH:

$$1 = f(u, \alpha'') \cdot f(\rho', \alpha'') + f(v, \beta'') \cdot f(\rho', \beta'').$$

Facciamo tendere ρ a zero, mantenendo α costante e HK perpendicolare ad OM: allora anche u, v, ρ' tendono a zero, ed α'', β'' tendono ad α e β. L'ultima uguaglianza dà allora la relazione limite:

$$1 = f(\alpha)^2 + f(\beta)^2. \tag{1}$$

Se poi si osserva che $\alpha + \beta = 1$, potremo scrivere

$$f(\alpha)^2 + f(1 - \alpha)^2 = 1.$$

Questa formula, benchè dimostrata pel caso $\alpha < 1$ vale anche per $\alpha \geq 1$. Ciò si verifica facilmente facendo uso dello stesso ragionamento sopra sviluppato.

Ecco alcune importanti conseguenze che discendono dalla (1).

a) *La funzione* $f(\alpha)$ *è nulla solo per* $\alpha = \pm 1$.

Infatti, essendo $\alpha + \beta = 1$, la (1), per $f(\alpha) = 0$, dà: $f(\beta) = 1$ e successivamente $\beta = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$; $\alpha = \pm 1$.

b) *Il rapporto* $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$, *in cui* $\alpha+\beta=1$, *è finito è differente da zero per tutti gli* α *diversi da zero, uno, due.*

c) *Se* $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, *si ha:*

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

§ 52. **Proprietà dei triangoli rettangoli infinitesimi.**

Sia ABC un triangolo rettangolo in C. Designando, secondo il solito, con a, b, c, i suoi lati ed α, β, γ gli angoli, formiamo i rapporti:

$$\frac{a}{c},\quad \frac{b}{c}.$$

Facciamo poi variare il triangolo, tenendo fisso α e mantenendolo rettangolo: se l'ipotenusa c *tende allo zero* l'angolo β tende ad $1-\alpha$, talchè:

$$\lim_{c=0}\frac{b}{c}=f(\alpha);\quad \lim_{c=0}\frac{a}{c}=f(1-\alpha). \tag{1}$$

Quadrando e sommando si ricava:

$$\lim_{c=0}\frac{b^2+a^2}{c^2}=f^2(\alpha)+f^2(1-\alpha)=1;$$

od anche, indicando con ε una conveniente funzione di c, tendente a zero con c:

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=1+\varepsilon$$

cioè:

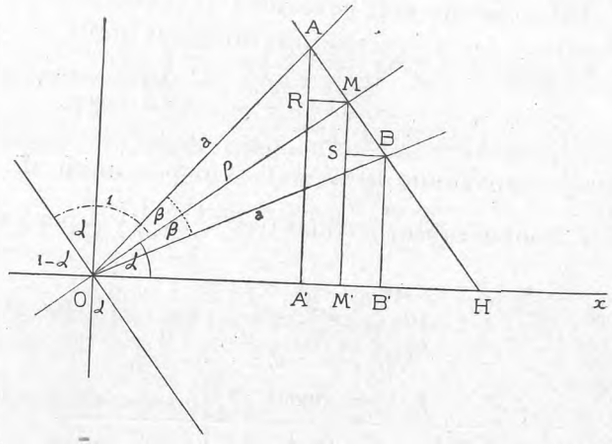
$$a^2+b^2=c^2+\varepsilon\cdot c^2.$$

Questa relazione dimostra che: *nei triangoli rettangoli infinitesimi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, vale l'ordinario teorema di Pitagora.*

Dalle (1), dividendo membro a membro si ricava poi:

$$\lim\frac{b}{a}=\frac{f(\alpha)}{f(1-\alpha)}.$$

§ 53. **Equazione funzionale relativa ad** $f(\alpha)$. — Per ottenere l'equazione funzionale a cui soddisfa $f(\alpha)$ consideriamo, oltre il raggio OM, che forma con x l'angolo α i due raggi OA, OB che formano rispettivamente con l'asse x gli angoli $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$. Siano A, B i punti d'intersezione di OA ed OB con la perpendicolare MH ad OM, ed A', B', M' i piedi delle



perpendicolari calate da A, B, M su x. Dalla figura si ricava l'identità:

$$\frac{OA'}{OA}+\frac{OB'}{OB}=\frac{OM'}{OA}-\frac{A'M'}{OA}+\frac{OM'}{OB}+\frac{M'B'}{OB}.$$

Dalla quale, essendo $OA=OB$, si deduce:

$$\frac{OA}{OA}+\frac{OB}{OB}=2\cdot\frac{OM}{OA}-\left(\frac{A'M'}{OA}-\frac{M'B'}{OB}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{OM'}{OM}\cdot\frac{OM}{OA}-\left(\frac{A'M'}{OA}-\frac{M'B'}{OB}\right).$$

Ponendo:

$$\rho=OM;\quad a=OA=OB;\quad \delta=\frac{A'M'}{OA}-\frac{M'B'}{OB},$$

la precedente uguaglianza assume la forma:

$$f(a,\alpha+\beta)+f(a,\alpha-\beta)=2f(\rho,\alpha)\cdot f(\rho,\beta)-\delta.$$

Facciamo ora tendere ρ a zero, mantenendo AB perpen-

dicolare ad OM. Siccome il limite di δ è zero [1] l'ultima eguaglianza ci dà la relazione limite:

$$f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=2f(\alpha)\cdot f(\beta), \tag{1}$$

la quale è appunto l'equazione funzionale richiesta.

§ 54. **Integrazione dell'equazione funzionale.**

La funzione $\cos\alpha$ è certo un integrale della (i), perchè si ha:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta. \tag{1'}$$

Inoltre, supponendo di aver fissato per unità di misura degli archi il quadrante, avremo: $\cos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ per cui:

$$f(0)=\cos(0)=1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$f(1)=\cos 1=0.$$

Partendo da questi valori comuni ad $f(\alpha)$ e $\cos\alpha$ possiamo calcolare i valori delle due funzioni per tutti gli argomenti del tipo $\frac{1}{2^n}$ e verificare che $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ è uguale a $\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Infatti,

[1] Infatti si ha identicamente:

$$\delta=\frac{A'M'}{OA}-\frac{M'B'}{OB}=\frac{MB}{OB}\left(\frac{A'M'}{AM}-\frac{M'B'}{MB}\right).$$

D'altra parte, se da M e B si calano le perpendicolari MR, BS su AA' ed MM' si ha: $\frac{A'M'}{AM}=\frac{A'M'}{RM}\cdot\frac{RM}{AM}$; $\frac{M'B'}{MB}=\frac{M'B'}{SB}\cdot\frac{SB}{MB}$.

Al tendere di ρ a zero i due rapporti $\frac{A'M'}{RM}$, $\frac{M'B'}{SB}$ tendono entrambi all'unità (cfr. § 48), mentre gli angoli $\widehat{AMR}$, $\widehat{MBS}$ tendono all'angolo $\gamma=1-\alpha$. Avremo pertanto:

$$\lim_{\rho=0}\frac{A'M'}{AM}=f(1-\alpha),\quad \lim_{\rho=0}\frac{M'B'}{MB}=f(1-\alpha),$$

e conseguentemente, essendo $\frac{MB}{BO}=1$:

$$\lim_{\rho=0}\delta=0, \qquad \text{c. d. d.}$$

ponendo nella (1) e nella (1') l'argomento β uguale ad α si ricava:

$$\begin{cases} f(2\alpha)+1=2f^2(\alpha) \\ \cos(2\alpha)+1=2\cos^2(\alpha) \end{cases} \tag{2}$$

Queste, per $\alpha=\frac{1}{2^2}$ danno:

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right)=\cos\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Ottenuto il valore delle funzioni per $\alpha=\frac{1}{2^2}$, ponendo nelle (2) $\alpha=\frac{1}{2^3}$ si ricava:

$$f\left(\frac{1}{2^3}\right)=\cos\left(\frac{1}{2^3}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

e così di seguito. Dunque:

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\cos\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Possiamo ora dimostrare che le due funzioni $f(\alpha)$ e $\cos\alpha$ sono identiche per tutti gli argomenti del tipo $\frac{m}{2^n}$, ove m ed n sono numeri interi e positivi arbitrari.

Infatti ponendo nelle (1) ed (1'): $\alpha=(m-1)\beta$ si ricava:

$$\begin{cases} f(m\beta)+f[(m-2)\beta]=2f(\beta)\cdot f[(m-1)\beta] \\ \cos m\beta+\cos[(m-2)\beta]=2\cos\beta\cdot\cos[(m-1)\beta]. \end{cases} \tag{3}$$

Queste formule ricorrenti permettono di calcolare successivamente $f(2\beta)$, $f(3\beta)$....; $\cos 2\beta$, $\cos 3\beta$,.... ecc., quando si conoscano $f(\beta)$ e $\cos\beta$.

E poichè le operazioni da eseguirsi su $f(\beta)$ per calcolare successivamente $f(2\beta)$, $f(3\beta)$...., sono identiche a quelle necessarie per ottenere da $\cos\beta$ i valori di $\cos 2\beta$, $\cos 3\beta$,.... così se $f(\beta)=\cos\beta$, sarà pure

$$f(m\beta)=\cos m\beta.$$

Ma per $\beta = \frac{1}{2^n}$ abbiamo effettivamente l'uguaglianza $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\frac{1}{2^n}$: dunque:

$$f\left(m\cdot\frac{1}{2^n}\right)\cos\frac{m}{2^n}. \qquad \text{c. d. d.}$$

Infine, per stabilire che le due funzioni $f(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ sono identiche per *qualunque* valore di α basta invocare la continuità di tali funzioni ed il fatto che ogni valore numerico di α può sempre considerarsi come limite di una successione di numeri del tipo $\frac{m}{2^n}$.

Concluderemo adunque:

$$f(\alpha) = \cos\alpha.$$

Naturalmente la funzione $\cos\alpha$ deve comparire mediante la sua espressione analitica. Denotando con a la lunghezza dell'arco α quando si scelga l'unità di misura in modo che il quadrante abbia per lunghezza $\frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots.$$

perciò:

$$f(\alpha) = \cos\alpha = 1 - \frac{2^2\alpha^2}{2!.\pi^2} + \frac{2^4\alpha^4}{4!\pi^4} - \ldots.$$

§ 55. **Applicazioni ai triangoli rettangoli infinitesimi.** — Facciamo il rapporto fra i cateti a, b di un triangolo rettangolo e l'ipotenusa c, poi passiamo al limite, per c tendente a zero.

Designando con α' e β' i limiti a cui tendono gli angoli α e β del triangolo, avremo:

$$\lim_{c=0}\frac{a}{c} = \cos\beta',$$

$$\lim_{c=0}\frac{b}{c} = \cos\alpha'.$$

E poichè α' e β' sono complementari, potremo scrivere ancora:

$$\lim_{c=0}\frac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha',$$

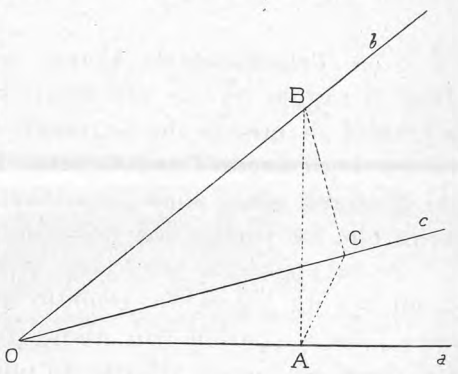
$$\lim_{c=0}\frac{b}{c} = \operatorname{sen}\beta'.$$

Da queste si deduce:

$$\lim_{c=0}\frac{a}{b} = \operatorname{tang}\alpha' = \operatorname{ctg}\beta'.$$

Questi risultati si sogliono esprimere dicendo: *Nei triangoli rettangoli infinitesimi valgono le formule trigonometriche ordinarie.* Quindi: *Nell'intorno infinitesimo di un punto del piano ellittico è valida la geometria euclidea.*

§ 56. **Trigonometria della stella.** — Sia $O(abc)$ un triedro nella stella di centro O, rettangolo lungo lo spigolo c. Designiamo con $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ le sezioni normali dei diedri e con α, β, γ le faccie opposte. Fissato su b un punto B caliamo le perpendicolari BC, BA su c ed a: il triangolo rettangolo ABC che così si ottiene ha in A un angolo uguale alla sezione normale $\widehat{A}$ del diedro a. Dall'esame della figura si ricavano le seguenti identità:



$$\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{OB}\cdot\frac{OB}{BA} = \frac{BC}{OB}:\frac{BA}{OB}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{OC}\cdot\frac{OC}{OB}:\frac{AB}{OC}.$$

Imaginiamo ora che il punto B tenda ad O, mantenendosi il piano BAC perpendicolare ad a. Allora queste due identità conducono alle relazioni limiti:

$$\lim_{OB=0}\frac{BC}{BA} = \lim_{OB=0}\frac{BC}{OB}:\lim_{OB=0}\frac{BA}{OB}.$$

$$\lim_{OB=0}\frac{AC}{AB} = \lim_{OB=0}\frac{AC}{OC}\cdot\lim_{OB=0}\frac{OC}{OB}:\lim_{OB=0}\frac{AB}{OB}.$$

ovvero: $\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$; $\cos\widehat{A} = \frac{\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$.

Tutta la trigonometria della stella può dedursi da queste due formule con procedimenti non diversi da quelli che si impiegano ordinariamente per la costruzione della trigonometria sferica. Possiamo quindi tralasciare i calcoli relativi e concludere che *la trigonometria della stella dello spazio ellittico è identica alla trigonometria della stella propria dello spazio euclideo.*

§ 57. **Trigonometria sferica.** — Imaginiamo una sfera ed una stella concentrica: conveniamo di chiamare *lunghezza di un arco di cerchio massimo* l'ampiezza del corrispondente angolo della stella; *angolo di due archi* l'angolo delle rispettive tangenti nel loro punto comune. Allora è chiaro che *le relazioni fra lati ed angoli di un triangolo sferico si identificano con quelle del corrispondente triedro,* talchè potremo concludere:

La trigonometria sferica nello spazio ellittico è identica alla trigonometria sferica ordinaria, purchè nello spazio ordinario si adotti per misura dei lati dei triangoli sferici la misura dei corrispondenti angoli al centro.

§ 58. **Trigonometria piana.** — Il piano ellittico è una sfera di raggio uguale alla semiretta; e poichè abbiamo scelto per unità di misura dei segmenti la semiretta e per unità di misura degli angoli l'angolo retto, le relazioni trigonometriche nei triangoli piani sono identiche a quelle dei triedri della stella che ha vertice nel polo del piano.

Se invece della semiretta volessimo adottare per unità di misura un segmento, rispetto al quale la lunghezza della retta fosse k (parametro) allora fra le misure a ed a'.... di uno stesso segmento, riferito all'una e all'altra unità, avremmo la relazione:

$$a = \frac{a'}{k}.$$

Sostituendo adunque nelle formule trigonometriche in discorso alle lunghezze a, b, c dei lati del triangolo, rispettivamente $\frac{a'}{k}$, $\frac{b'}{k}$, $\frac{c'}{k}$, avremo la trigonometria del piano ellittico quando l'unità di misura sia scelta in modo che la lunghezza dell'intera retta risulti $2k$.

Le nuove formule sono identiche a quelle che si riferiscono ad una sfera euclidea di raggio k e differiscono da quelle della trigonometria iperbolica per la sostituzione delle funzioni circolari alle iperboliche.

Anche qui si può ripetere ciò che si disse al § 38, parlando della geometria iperbolica. Se il parametro k della geometria ellittica fosse tanto grande da rendere gli errori commessi nel ritenerlo infinitamente grande, inferiori a quelli inerenti ai processi sperimentali, il piano ellittico potrebbe venire considerato come un piano euclideo!

ARTICOLO NONO

I numeri reali di FEDERIGO ENRIQUES a Bologna.

PARTE PRIMA

I NUMERI NATURALI

I.

IL SIGNIFICATO EMPIRICO DEI NUMERI

§ 1. **Introduzione.** — Ogni uomo ragionevole possiede il concetto dei *numeri naturali* 1, 2, 3, 4.... La spiegazione più immediata che possiamo darne consiste nel richiamare le *esperienze elementari* che sottostanno alla sua genesi nella nostra mente; è questa appunto la via che si tiene nell'insegnamento rivolto a bambini, i quali non possiedano ancora la nozione astratta del numero.

Le esperienze da cui nasce il concetto del numero sono relative a *gruppi* o *classi* di *oggetti* (*elementi*) la cui natura è arbitraria; il solo requisito è che si tratti di oggetti individuabili, cioè che non variino o sfumino o si confondano fra loro durante l'esperienza. Ai bambini si offrono a tal uopo vari esempii: dita, noci, mele, sassi, lapis, uomini ecc.

Vi sono d'altronde due serie di esperienze elementari che corrispondono all'uso diverso dei *numeri cardinali* e dei *numeri ordinali.*

§ 2. **Numeri cardinali.** — Per definire i numeri cardinali si parte dalle esperienze seguenti:

Si abbiano due classi di oggetti dati (intendo dati materialmente davanti agli occhi):

$$(a) = (a_1 a_2 \ldots.)$$
$$(b) = (b_1 b_2 \ldots.).$$

Cerchiamo di *associare* ad ogni elemento della prima classe *un* elemento della seconda, riunendo materialmente gli elementi associati o ponendo un contrassegno che valga a riunirli idealmente nella nostra mente; se l'associazione suddetta si può porre in modo che viceversa ogni oggetto della seconda classe risulti così associato ad *uno* della prima, senza eccezione, si ha fra gli elementi delle due classi (o, come si dice anche, fra le due classi) una *corrispondenza biunivoca;* diremo allora che le due classi (a), (b) sono *equivalenti* e scriveremo

$$(a) = (b).$$

L'equivalenza fra classi di oggetti soddisfa alle tre proprietà fondamentali che seguono:

1) *Proprietà riflessiva:*

$$(a) = (a).$$

Infatti si può associare ad ogni elemento di (a) se stesso.

2) *Proprietà simmetrica:*

se $(a) = (b)$

$(b) = (a).$

Infatti l'associazione di due elementi a, b, è un'operazione mentale simmetrica, cioè indipendente dall'ordine in cui si considerano i due elementi associati.

3) *Proprietà transitiva:*

se $(a) = (b)$

e $(b) = (c),$

anche $(a) = (c).$

Infatti se un elemento a si pensa associato ad un b, e questo b ad un c, restano associati nel pensiero a e c. (La corrispondenza così ottenuta fra (a) e (c) dicesi *prodotto* di quelle poste fra (a) e (b) e fra (b) e (c)).

A queste proprietà si aggiunge la seguente:

4) *Se una classe* (b) *contiene tutti gli elementi di* (a) *e qualche altro elemento, le due classi* (a) *e* (b) *non sono equivalenti.*

Si abbiano le classi

$$(a) = (a_1 a_2 \ldots.)$$

$$(b) = (h a_1 a_2 \ldots.),$$

dove si suppone per semplicità che la classe (b) contenga un solo elemento oltre gli a.

Se fosse

$$(a) = (b),$$

si avrebbe fra le due classi una corrispondenza biunivoca. In questa ad h corrisponderebbe un certo elemento a_i di (a).

Togliamo h ed a_i dalle due classi rispettivamente; avremo

$$(a_1 a_2 \ldots. a_{i-1} a_{i+1} \ldots.) = (a_1 a_2 \ldots. a_{i-1}, a_i, a_{i+1} \ldots.).$$

Ora fra queste due classi intercede una corrispondenza, in cui ad a_i corrisponde un certo elemento a_h; tolti a_i, a_h dalle due classi, rimangono classi equivalenti e così via di seguito.

Ma seguitando a togliere successivamente gli oggetti di una classe, *materialmente dati,* la classe si esaurisce; si arriva pertanto a ridursi al caso di una classe composta d'un solo oggetto a_r; e si trova che questa dovrebbe essere equivalente ad una classe che contiene anche un altro elemento:

$$(a_r) = (a_r a_s).$$

Questa conclusione è evidentemente assurda perchè se si fa corrispondere l'elemento a_r della prima classe all'uno o all'altro elemento della seconda, rimane sempre in questa seconda classe un elemento a cui non viene associato alcun elemento della prima.

Il ragionamento riesce ugualmente (a fortiori) se la classe (b) contiene più di un elemento oltre gli a.

La proprietà 4) si può enunciare in altro modo, ponendo la seguente

DEFINIZIONE. Se (a) e (b) sono due classi e la classe (a) è equivalente ad una classe contenuta in (b) e non coincidente con (b), cioè ad *una parte* di (b), la classe (b) si dice *prevalente* ad (a), e si scrive:

$$(b) > (a).$$

Allora la proprietà 4) si può enunciare dicendo:

4') *Se di due classi* (a), (b) *l'una è prevalente all'altra, le due classi non sono equivalenti.*

O più brevemente (tenendo presente la prop. 3):

Una classe non può essere equivalente ad una sua parte.

Confrontiamo ora due classi qualunque di oggetti materialmente dati. Si ha:

5) *Date due classi* (a), (b), *o esse sono equivalenti o una di esse è prevalente all' altra* (cioè questa è equivalente ad una parte di quella).

Tale proprietà si dimostra in base allo stesso principio sperimentale adoperato per stabilire la 4). Togliamo da ciascuna delle due classi (a), (b) un elemento; p. es.

$$a_1, \quad b_1$$

e associamo idealmente questi elementi; la questione è ridotta al confronto delle classi residue. Ma successivamente così operando si giunge ad esaurire una delle due classi, p. es. (a), mentre l'altra (b) può essere contemporaneamente esaurita o non ancora esaurita. Risulta quindi che

$$(a) = (b) \quad \text{oppure} \quad (b) > (a).$$

Infine notiamo che:

6) *Se di tre classi* (a), (b), (c)

$$(a) > (b) \quad \text{e} \quad (b) > (c)$$

anche

$$(a) > (c);$$

se

$$(a) > (b) \quad \text{e} \quad (b) = (c)$$

anche

$$(a) > (c).$$

Questa proprietà risulta immediatamente dalla definizione della prevalenza.

7) Corollario. *Se di due classi* (a) *e* (b):

$$(a) > (b),$$

non può essere

$$(b) > (a).$$

Invero se così fosse risulterebbe

$$(a) > (a)$$

contro la prop. 4), (cfr. la 1).

Osservazione. In altri termini *la relazione di prevalenza fra classi soddisfa alla proprietà transitiva* (6) *ma non alle proprietà simmetrica e riflessiva.*

Le precedenti proposizioni conducono a classificare o distribuire le classi o gruppi d'oggetti in *classi di classi* per modo che:

a) *Insieme ad una classe* c *appartengono alla medesima classe di classi le sue equivalenti.*

b) *Insieme a* c *non può trovarsi nella medesima classe di classi una parte di* c.

In base a questa distribuzione si può costruire un concetto astratto, che vale come contrassegno delle classi (equivalenti) appartenenti ad una medesima classe di classi, cioè un ente che corrisponde ad una qualsiasi delle classi suddette pensata come sostituibile (*uguale*) ad un'altra qualunque di esse. Questo concetto è il *numero* (*cardinale*) *degli oggetti d' una classe.* L'equivalenza delle classi (a), (b) si trasforma quindi nell'uguaglianza: numero degli elementi di (a) = numero degli elementi di (b); il significato di questa uguaglianza consiste appunto nell'indicare l'astrazione anzidetta il cui resultato è l'identità del concetto astratto = numero cardinale corrispondente alla classe di classi $\{(a), (b) \ldots .\}$.

§ 3. **Astrazione e uguaglianza.** — La definizione data del numero si basa sopra una operazione logica: l'astrazione, di cui conviene chiarire il significato.

Data una classe di oggetti la mente può sempre costruire il *concetto astratto dell' elemento della classe:* p. es. dalla classe (Tizio, Caio.....) si ricava il concetto astratto di uomo, da una classe di rette parallele si ricava il concetto di direzione ecc. La costruzione del concetto astratto dell'elemento di una classe, ha questo significato psicologico: è la finzione di un *quid comune* agli elementi della classe, ciascun dei quali viene immaginato per così dire come somma del quid comune e di un quid diverso che ne caratterizza l'individualità. Così ad es. si concepisce un ente astratto « l'uomo » da cui Tizio, Caio ecc. si ottengono coll'aggiunta di determinati caratteri, una direzione (astrattamente determinata) comune a tutte le rette parallele ecc.

La finzione anzidetta ci spiega anche il significato dell'*uguaglianza.* L'uguaglianza di due oggetti non ha di per sè alcun significato se non per riguardo ad una classe in cui essi si trovino riuniti. L'*uguaglianza* di due oggetti è sempre *relativa al concetto astratto di una classe in cui essi vengono*

considerati; p. es. segmenti uguali sono quelli che appartengono ad un medesimo sistema di segmenti generato dalle possibili posizioni di un segmento (rigido) che si muove liberamente nello spazio. Il significato psicologico dell'uguaglianza è la finzione di ritrovare lo stesso quid identico negli elementi della classe; in altre parole ogni eguaglianza si concepisce come « somma di un'identità e di una diversità » [1].

All'uguaglianza spettano le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, che esprimono qui le proprietà fondamentali del processo logico d'associazione e astrazione. Viceversa ogni relazione fra oggetti qualsiansi che goda delle tre proprietà suddette può considerarsi come un'uguaglianza, perchè essa porge un modo determinato di classificazione degli oggetti dati, ove si pongono in una medesima classe gli oggetti legati dalla relazione indicata.

Si aggiungano le osservazioni seguenti:

In luogo di considerare l'uguaglianza come una relazione fra due oggetti a, b di una classe rispetto all'astratto, si può considerare l'astratto funzione di a come uguale all'astratto funzione di b; ad esempio invece di dire che due segmenti sono uguali, si può dire che la lunghezza di un segmento è uguale alla lunghezza dell'altro. Questo giudizio riveste allora la forma di una identità, ma il suo valore non tautologico si desume dalle considerazioni che seguono.

Ogni concetto astratto corrisponde ad una classe di oggetti. Ciò che i logici designano come *estensione del concetto* è l'insieme degli oggetti che compongono la classe suddetta; così due concetti aventi la medesima estensione contengono gli stessi oggetti. Accanto all'estensione i logici considerano

[1] La finzione psicologica che è nell'astrazione ha dato luogo alla celebre controversia filosofica fra *realisti* e *nominalisti*. I realisti (a capo dei quali si può porre Platone) si rappresentavano il concetto astratto come una vera essenza reale delle cose, proiettando nel mondo esteriore il prodotto della costruzione mentale. Così p. es. un dato cavallo bianco verrebbe pensato come ottenuto dalla riunione di una *cavallinità* astratta coi caratteri speciali dell'individuo.

È inutile aggiungere che ci sono dei cavalli ma non la cavallinità e nemmeno il cavallo-tipo come animale del mondo concreto. Ma i motivi che c'inducono a dare lo stesso nome a tutti i cavalli, ponendoli in uno stesso gruppo (specie) d'animali, implicano certi *rapporti di somiglianza*, nei quali consiste tutto il significato reale dell'idea astratta.

la *comprensione* del concetto, cioè l'insieme delle proprietà (per così dire esterne) che caratterizzano la classe di oggetti corrispondente. Ora due serie diverse di proprietà possono definire la medesima classe di oggetti; così per esempio la classe dei triangoli equilateri coincide con quella dei triangoli equiangoli.

Affermare l'uguaglianza di due concetti astratti significa in generale riconoscere che due classi definite mediante proprietà diverse, cioè differenti dal punto di vista della comprensione, sono identiche dal punto di vista dell'estensione, ossia contengono gli stessi elementi.

Questa analisi del significato dell'uguaglianza appartiene ad A. PADOA.

Ritornando al caso in cui si considera l'astratto di una classe come funzione di un suo elemento, si vede qui un modo particolare di definire comprensivamente quel concetto astratto, che rimane sempre identico, dal punto di vista dell'estensione, quando si muta l'elemento scelto nella classe considerata.

§ 4. **Numeri ordinali.** — Per definire i numeri ordinali si parte dalle esperienze che seguono:

Una classe di oggetti (materialmente) dati si può *ordinare* (mediante un'opportuna disposizione nello spazio, o mediante contrassegni o semplicemente nel pensiero), pensando un elemento di essa come *primo* e gli altri elementi, come dati *successivamente uno dopo l'altro;* si ottiene così una *classe ordinata* o *serie* nella quale:

1) dati due elementi qualunque uno di essi *succede* all'altro, e questo *precede* quello;

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a;

3) ogni elemento a, ad eccezione dell'*ultimo*, ha *un successivo immediato* b, (di guisachè non vi è alcun elemento che succeda ad a e preceda b);

4) ogni elemento, ad eccezione del *primo*, ha *un precedente immediato* (di cui è *il* successivo).

Ciò posto si considerino due serie o classi ordinate:

$$(a) \equiv (a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n \ldots .)$$

$$(b) \equiv (b_1 b_2 b_3 \ldots . b_n \ldots .).$$

Cerchiamo di stabilire fra di esse una corrispondenza biunivoca ordinata, per modo che:

1) al primo elemento di (a) corrisponda il primo di (b);

2) se due elementi a, b si corrispondono, si corrispondono anche i loro successivi.

In forza di queste condizioni ad a_2 successivo di a_1 in (a), dovrà corrispondere b_2 successivo di b_1 in (b) e quindi ad a_3, b_3 ecc. Così procedendo si otterrà effettivamente una corrispondenza ordinata (*completa*) fra (a) e (b) se le due classi sono equivalenti; altrimenti, se p. es. $(b) > (a)$, si porrà una corrispondenza ordinata fra (a) ed una parte di (b), restando senza corrispondenti gli elementi che succedono in (b) al corrispondente dell'ultimo di (a); si può anche dire che si ha in questo caso una corrispondenza ordinata *parziale* o *similare* fra le due serie.

Si considerino ora tre serie qualunque

$$(a) = (a_1 a_2 .... a_n ....)$$
$$(b) = (b_1 b_2 .... b_n ....)$$
$$(c) = (c_1 c_2 .... c_n ....),$$

ed, essendo a_n un'elemento qualsiasi di (a), si supponga soltanto che ciascuna delle classi considerate sia prevalente alla parte $(a_1 a_2 .... a_n)$.

In tale ipotesi:

si può porre una determinata corrispondenza ordinata (completa o parziale) fra le serie (a) e (b), ed in questa all'elemento a_n corrisponde un determinato elemento b_n di (b);

si può porre analogamente una determinata corrispondenza ordinata (completa o parziale) fra le serie (a) e (c), ed in questa ad a_n corrisponde un determinato elemento c_n.

Ebbene: se si confrontano le serie (b), (c) ponendo tra di esse la corrispondenza ordinata (completa o parziale), in questa all'elemento b_n corrisponde l'elemento c_n.

In forza di questa proprietà si può porre la seguente

DEFINIZIONE. *Elementi di due serie che si corrispondono in una corrispondenza ordinata si dicono di* **ugual** *posto.*

Questa relazione gode delle proprietà di un' uguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva).

Diventa quindi possibile di classificare gli elementi di quantesivogliano serie ponendo in una medesima classe tutti

gli elementi di ugual posto (e arrestando la classificazione alla serie minima). Nel quadro seguente si vedono appunto costruite le classi $k_1 k_2 .... k_n$ i cui elementi (disposti sopra una verticale) appartengono alle serie (a), (b), (c)...., ed occupano in esse ugual posto;

k_1	k_2		k_n	
$(a) = a_1$	a_2	....	a_n	....
$(b) = b_1$	b_2	....	b_n	....
$(c) = c_1$	c_2	....	c_n	....
. . . . .	. .	. .	. .	. .

Il concetto astratto dell' elemento della classe k_n *si dice numero d' ordine dell' elemento* a_n *nella serie* (a), *ed ugualmente di* b_n *in* (b) ecc.

Questo numero (*ordinale*) è il segno del posto di a_n e di tutti gli elementi di ugual posto nelle serie considerate.

§ 5. **Confronto fra numeri cardinali e numeri ordinali.**

Ad ogni numero ordinale (n), connotante il posto di a_n nelle serie

$$a_1 a_2 .... a_n ....,$$

corrisponde un numero cardinale, cioè quello che designa il numero degli oggetti della classe

$$(a_1 a_2 .... a_n).$$

Viceversa si riprenda la classificazione delle classi in classi di classi equivalenti stabilita al n. 2. In forza delle proprietà (1....7) quelle classi di classi $(k_1 k_2 .... k_n ....)$ si trovano disposte in una serie ordinata, come indica il seguente quadro:

k_1	k_2		k_n	
(a_1)	$(a_1 a_2)$	....	$(a_1 a_2 .... a_n)$	....
(b_1)	$(b_1 b_2)$	....	$(b_1 b_2 .... b_n)$	....
(c_1)	$(c_1 c_2)$	....	$(c_1 c_2 .... c_n)$	....
. .	. . . .	. .	. . . . .	. .

Pertanto *al numero cardinale n,* che designa il numero

degli oggetti di ciascuna classe di k_n, *corrisponde un numero ordinale,* cioè quello che connota il posto di k_n nella serie

$$k_1 k_2 .... k_n .....$$

È chiaro che la corrispondenza fra numeri ordinali e cardinali e quella fra cardinali e ordinali testè definite, sono l'una inversa dell'altra.

Ora immaginiamo di associare ad ogni numero cardinale (n_c) il suo corrispondente ordinale (n_o): costruiamo così le classi:

$$(1_c 1_o), \quad (2_c 2_o)...., \quad (n_c n_o)....$$

Dalla classe $(n_c n_o)$ *possiamo ottenere per astrazione il concetto del numero astratto* n, simbolo comune di un numero cardinale e del corrispondente ordinale.

NOTA. Nell'uso comune s'impara difatti a operare sopra numeri astratti (1, 2, 3,....) ciascuno dei quali riceve poi il significato di numero cardinale e concretamente di numero degli oggetti di una certa classe, oppure di numero ordinale e precisamente di numero d'ordine di un elemento di una certa serie.

Dal doppio uso dei numeri cardinali e ordinali è nata alla fine del secolo scorso la questione largamente dibattuta nel pubblico « *se il secolo ventesimo cominci col 1° Gennaio 1900 o col 1° Gennaio 1901* ».

La questione consiste in questo: il numero (1900 o 1901) che si scrive nella data (riferendosi alla comune cronologia dell'era cristiana) designa il numero cardinale degli anni compiuti, a partire dalla (presunta) nascita di G. C., oppure il numero d'ordine dell'anno in corso per riguardo ad una serie di anni che ha la medesima origine?

Nel primo caso il principio del secolo ventesimo sarebbe il 1° Gennaio 1900, nel secondo il 1° Gennaio 1901.

Ora l'Aritmetica, o qualsiasi considerazione a priori, è incapace di sciogliere una questione di questo genere: tanto varrebbe pretendere di sciogliere a priori la questione se chi parla di un « piede » intenda riferirsi al sistema metrico inglese o a quello di un altro paese in cui si usi una misura diversa collo stesso nome.

La risposta si deve domandare alla storia. La quale c'insegna che quando (con DIONIGI IL PICCOLO) s'introdusse l'uso di contare gli anni dalla nascita di G. C., il numero che figura nella data fu impiegato come numero ordinale. Perciò il secolo ventesimo è cominciato col 1° Gennaio 1901.

Per curiosità ricorderemo che una questione analoga a quella testè indicata sorse anche alla fine del secolo decimo-ottavo, e si trova una nota dell'astronomo ARAGO che ne definisce chiaramente i termini, nel senso che si è indicato qui sopra.

II.

LA SERIE INFINITA DEI NUMERI

§ 6. **Empirismo e idealismo.** — L'analisi che abbiamo svolto ha messo in evidenza due serie di esperienze sopra le classi di oggetti, i loro diversi aggruppamenti, corrispondenze, ordini, le quali conducono al concetto astratto di numero (cardinale e ordinale). Da questo punto di vista le proprietà fondamentali dei numeri appariscono come proposizioni sperimentali. Ma è il caso di domandarsi:

1) Fino a che punto o in che senso l'esperienza è *sufficiente* a giustificare tali proposizioni.

2) Fino a che punto l'esperienza è *necessaria* per stabilire il concetto del numero e le proprietà ad esso inerenti.

La prima domanda si riferisce all'osservazione seguente:

Operando sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati non si arriva *in fatto* che a numeri non troppo grandi. Un uomo, occupato a contare 10 ore il giorno per 50 anni della sua vita, arriverebbe press'a poco ad un miliardo. Le esperienze effettive che dovrebbero verificare le proprietà di numeri così grandi richiederebbero un tempo assai maggiore, donde segue un'immensa difficoltà pratica per ottenere siffatte verifiche, quando non si voglia ricorrere all'opera simultanea di varii uomini.

Ma una simile impresa, volta alla diretta verificazione delle proprietà aritmetiche dei grandi numeri, non è stata mai tentata — che si sappia — dalla società umana; e nondimeno l'uso di numeri superiori ad un miliardo ricorre di frequente anche in faccende pratiche (p. es. nel bilancio dei grandi Stati moderni) e l'applicazione delle proprietà fondamentali dei numeri non solleva alcun dubbio.

Bisogna dunque ammettere che la conoscenza di cui si tratta non deriva dalla pura esperienza bruta del conteggio su classi di oggetti.

Ed invero se l'intelligenza di certi animali o dei selvaggi può essere misurata dal numero massimo cui essa può giungere, per l'uomo civile non esiste alcun massimo nella serie dei numeri.

La nostra mente supplisce alle esperienze effettuate con esperienze immaginate, la cui possibilità di ripetizione indefinite ci porge la costruzione ideale di una serie infinita di numeri.

Dunque il fondamento dell'Aritmetica si trova non soltanto nelle esperienze elementari sulle classi di oggetti materialmente dati, ma anche nella facoltà della mente di immaginare esperienze più estese e predeterminarne il resultato mercè la combinazione e ripetizione di processi già esperiti.

Da questa osservazione si passa naturalmente a discutere la seconda domanda enunciata di sopra:

Fino a che punto è necessario operare sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati?

Si può fondare l'Aritmetica senza ricorrere al mondo esterno, col semplice esame riflesso del nostro pensiero?

È chiaro anzitutto che la natura degli oggetti su cui si esperimenta è affatto indifferente al resultato delle esperienze elementari che sottostanno al concetto di numero; è anche indifferente che si ricorra ad esperienze visive, auditive o tattili ecc. Non vi è quindi difficoltà ad ammettere che si possa anche ricorrere semplicemente ad esperienze mentali. Un uomo, dotato di sufficiente forza di astrazione, il quale sia cieco - sordo - muto e paralizzato, potrebbe *pensare* degli oggetti (anche senza immaginarli in modo preciso), e operare con *associazioni* e *astrazioni* puramente ideali sopra classi di oggetti pensati. Queste esperienze mentali sostituiscono le esperienze elementari su oggetti concreti, analizzate innanzi.

A questo punto di vista si riattacca la *tesi idealistica* che: *le esperienze elementari conducenti alle definizioni dei numeri non vertono sulle proprietà obiettive degli oggetti o delle classi d'oggetti considerati, ma esprimono piuttosto le leggi operative del nostro stesso pensiero, dell' associazione e dell' astrazione logica.*

E così, in tale aspetto, le proposizioni fondamentali sui numeri si palesano non più come enunciati di *fatto* (*a posteriori*), ma come verità necessarie (*a priori*) che rispondono alla struttura e alla funzione della nostra mente.

Nella filosofia moderna la tesi idealistica è espressa da KANT che riconosce come pertinenti allo spirito umano quelle proprietà per cui qualcosa di reale viene pensato come un « oggetto ». Questa veduta è stata poi svolta e determinata nel senso del subiettivismo, mercè un'intuizione sintetica della realtà sensibile che, ritornando al pensiero di ERACLITO, figura la realtà stessa come un *continuo fluire*, un divenire e un confondersi delle cose sensibili, dove non è possibile alcuna rigida distinzione di oggetti (HEGEL); allora la determinazione di un oggetto che il pensiero distacca dal reale e assume come alcunchè di fisso, appare una *convenzione o finzione arbitraria* dell'intelletto, e le leggi secondo cui si combinano gli oggetti (in particolare quindi le relazioni numeriche) risultano a fortiori subiettive ed inerenti alla funzione intellettuale.

In contrapposto alla tesi idealistica suddetta, stà la tesi empirica che, tra i filosofi moderni, ha trovato il suo assertore in STUART MILL; questi sostiene che le relazioni numeriche esprimono fatti poichè corrispondono ad *aspettative* determinate: l'Aritmetica non è un'opinione, perchè i cassieri non possono disporre ad arbitrio mercè operazioni mentali del contenuto della loro cassa, ed invece il controllo di cassa dà luogo a previsioni, fondate sulle regole di calcolo, che riescono ad ogni momento vericate.

Il contrasto fra le due tesi empirica ed idealistica conduce ad una *veduta critica* che si può formulare come segue: [1]

I principi della teoria delle classi, i numeri e le loro relazioni, corrispondono ugualmente alle leggi logiche (*assiomi*) dei processi d'associazione e d'astrazione cui dà luogo il pensiero, e a proprietà generali dei gruppi di oggetti reali, sotto la condizione d'invarianza di questi e nei limiti in cui tale condizione è soddisfatta.

In quei principii si riconosce dunque un duplice contenuto subiettivo e obiettivo, il cui confronto può essere spiegato dicendo che: i pensieri vengono associati nell'intelletto in modo corrispondente a quello con cui si possono associare in gruppi dei sassi.

[1] Cfr. F. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*. Zanichelli, 2ª ed., 1910, cap. III.

Resta la questione filosofica di sapere se sia la mente umana che ha per così dire imitato nei suoi processi l'esperienza del riunire oggetti materiali, o se viceversa la natura dell'intelletto determini a priori quelle operazioni ed esperienze; ma una tale questione non ha alcun senso positivo perchè non ci è dato immaginare l'intelletto umano isolato dalla realtà sensibile che lo circonda, più che questa realtà all'infuori del pensiero che la rappresenta. La facoltà di osservare e sperimentare e quella di ragionare costituiscono infatti i due lati inseparabili di un medesimo sviluppo psicologico che sfugge al nostro esame obiettivo perdendosi nelle tenebre dell'infanzia.

Dal punto di vista idealistico riterremo solo la veduta che è possibile la costruzione dei numeri e dell'Aritmetica movendo da un puro esame riflesso del pensiero e delle sue operazioni associative. Ma avvertiremo che per quanto l'anzidetto esame tenda in ultima analisi a riconoscere leggi del nostro modo di pensare, implicite in ogni esperienza ragionata, queste leggi o assiomi (a priori) non si possono scoprire che mediante una riflessione obiettiva (a posteriori) sui prodotti del pensiero stesso (FRIES); tale è p. es. l'analisi dei linguaggi naturali o dei possibili linguaggi convenzionali o sistemi di segni mercè cui si tende a fondare la Logica grammaticale o simbolica.

Insisteremo infine su ciò che, per costruire la serie infinita dei numeri, non bastano gli assiomi logici esprimenti le proprietà fondamentali dell'associazione e astrazione, ma occorre un *postulato esistenziale* affermante la ripetibilità indefinita dell'atto del pensare, o la possibilità di determinare a priori una serie illimitata di associazioni; l'infinità della serie dei numeri importa appunto questa potenzialità della mente umana che si traduce appunto nel postulato: *dato un numero qualsiasi, esiste sempre un numero successivo ad esso.*

NOTA. Il riconoscimento che la serie dei numeri è infinita stabilisce, si può dire, una linea di demarcazione fra la mentalità dell'uomo minimamente civilizzato e la mentalità del selvaggio. Infatti l'intelligenza dei selvaggi, come quella degli animali, si suol misurare col numero più alto a cui essa arriva, al di sopra del quale sembra non concepire che una pluralità indistinta.

La considerazione puramente empirica dei numeri trova rispondenza nei *sistemi naturali* di segni o di suoni con cui

i numeri si rappresentano. La rappresentazione convenzionale dei numeri mira a rendere esprimibili i numeri più alti, e nella sua forma più evoluta esprime un processo di formazione della serie infinita.

Il sistema di numerazione moderno basato sul posto delle cifre e sulla considerazione dello zero fu scoperto da un prete bramino indiano, venne nell'800 a conoscenza degli Arabi, e si diffuse in Europa nel secolo decimoterzo per opera di LEONARDO TIBONACCI (da Pisa).

§ 7. **Classi finite e infinite.** — Quando si oltrepassa coll'immaginazione il dato reale dell'esperienza e ci si solleva alla considerazione della serie infinita dei numeri, si hanno — nel pensiero — non più classi di oggetti effettivamente rappresentati o pensati, ma classi di oggetti *pensabili,* in determinate condizioni, cioè *elementi supposti.*

Ora si presentano innumerevoli modi di estendere colla supposizione i dati sperimentali, e nascono così diverse *classi infinite* di oggetti: un esempio è offerto dalla classe di punti che costituisce una retta; anche qui i punti non possono essere tutti effettivamente pensati uno dopo l'altro, ma pur tuttavia sono supposti come pensabili in guisa da dar luogo a talune relazioni di ordine ecc.

Ma l'estensione del concetto di classe alle classi infinite dà luogo a modificare le relazioni analizzate nel § 1. In quel paragrafo si è usato infatti ripetutamente il principio sperimentale che: « togliendo, uno dopo l'altro gli elementi d'una classe, si arriva ad esaurire la classe », il cui significato è appunto la finitezza della classe considerata. Non valendo più questo principio vediamo cadere la prop. 4) o 4′) del n. 2:

Una classe infinita può essere equivalente ad una sua parte.

Data la serie dei numeri

$$1,\ 2,\ 3,\ldots.\ n\ldots.,$$

è chiaro ch'essa è equivalente a quella che si ottiene togliendo il primo numero:

$$2,\ 3,\ 4,\ldots.\ n' = n+1,\ldots.,$$

perchè fra le due intercede la corrispondenza:

$$n' = n+1.$$

Parimente, mercè una riduzione proporzionale (similitu-

dine) un segmento, una retta, una figura qualsiasi del piano o dello spazio può essere posta in corrispondenza con una sua parte.

Sembra che vi sia qui una proprietà generale: tutte le volte che è data una classe infinita, riconosciamo in essa una parte equivalente al tutto. Cerchiamo di provare che questa proprietà sussiste infatti per ogni classe infinita.

Anzitutto: se una classe è *numerabile,* cioè può esser fatta corrispondere biunivocamente alla serie infinita dei numeri 1, 2, 3...., essa è equivalente ad una sua parte (quella che corrisponde alla serie 2, 3,....).

In secondo luogo: se una classe C contiene una serie numerabile S, si può porre come innanzi una corrispondenza fra S ed una sua parte ed in pari tempo far corrispondere ad ogni elemento di C fuori di S se stesso; con ciò resta provato che C è equivalente ad una sua parte.

In terzo luogo si consideri una classe C qualsiasi: si scelga in C un elemento arbitrario che si designerà con 1, quindi un secondo elemento che si designerà con 2, e così via.

Se, dopo un numero finito di scelte la classe C è esaurita, essa corrisponde ad una classe finita (1, 2, 3,.... n) ed è finita com'essa; se così non è *sembra* che la classe C contenga una classe numerabile in corrispondenza colla serie infinita (1, 2, 3,....), e però che essa sia equivalente ad una sua parte.

Tuttavia questa deduzione contiene un *punto delicato:* infatti essa suppone la possibilità di compiere entro C, non solo un numero grande di scelte, ma un *numero infinito di scelte arbitrarie.* Questa possibilità trascende le facoltà del pensiero umano, a meno che non si possa fissare una *regola che determini a priori le scelte successive dipendentemente da un numero finito di operazioni.* Una regola siffatta è facile a trovare per tutte le classi di cui il nostro pensiero ha effettivamente costruita un'immagine; ma l'indeterminatezza del concetto generale di classe lascia indecisa la questione se la possibilità di una tal regola sia data per ogni classe. Facendo l'ipotesi affermativa, che si traduce in una eventuale restrizione del concetto di classe, si ha dunque che: *la possibilità di stabilire una corrispondenza fra una classe ed una sua parte appartiene a tutte le classi infinite e costituisce quindi un carattere distintivo fra le classi infinite e le classi finite.*

§ 8. **Potenza delle classi infinite.** — Ora accenneremo come la teoria dei numeri cardinali, relativi a classi finite, abbia dato luogo ad una estensione per le classi infinite. Il concetto di *potenza* di una classe, dovuto a G. CANTOR, risponde appunto al concetto di *numero cardinale infinito.*

A base di questa teoria di CANTOR sta l'osservazione che il confronto di due classi infinite può dar luogo, come per le classi finite, a un giudizio di equivalenza o di prevalenza.

Due classi sono equivalenti se tra gli elementi dell'una e quelli dell'altra intercede una corrispondenza biunivoca. Tale relazione soddisfa, come per il caso delle classi finite, alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Una classe è prevalente ad un'altra quando si può porre una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di questa e gli elementi di una parte di quella. Come per le classi finite, la prevalenza fra classi infinite soddisfa alla proprietà transitiva; ma, a differenza di quel caso, soddisfa anche alla proprietà riflessiva; inoltre essa può soddisfare anche, in qualche caso, alla proprietà simmetrica, che non appartiene mai alla prevalenza fra classi finite.

Queste differenze si riconducono alla circostanza fondamentale che:

Una classe infinita può essere contemporaneamente equivalente e prevalente ad un'altra.

Ora sussiste il

TEOREMA DI BERNSTEIN: *Se* A *e* B *sono due classi, ciascuna delle quali è prevalente all'altra,* A *e* B *sono classi equivalenti.*

Dimostriamo questo teorema fondamentale valendoci delle semplificazioni dovute a PEANO e PADOA.

Secondo l'ipotesi è data una corrispondenza biunivoca fra A e una parte B' di B, e un'altra corrispondenza biunivoca fra B e una parte A' di A. In questa seconda corrispondenza a B' corrisponderà una parte A'' di A'.

Si ha così una corrispondenza fra A e A'' parte di A', cioè una corrispondenza *univoca similare* fra A, A', che non è invertibile per gli elementi di $A' - A''$; si tratta di porre una corrispondenza biunivoca fra A ed A', e perciò basterà determinare una parte C di A' in tal guisa che togliendo C da A e da A' rimanga una corrispondenza univoca invertibile, ossia biunivoca, fra $A - C$ e $A' - C$; infatti, ponendo allora

in C la corrispondenza identica, si avrà una corrispondenza biunivoca fra A ed A'. Ora la possibilità di determinare la classe C nel modo anzidetto, risulta dal seguente

LEMMA. Se si ha una corrispondenza univoca similare fra una classe A ed una sua parte A', cioè una corrispondenza biunivoca fra A ed una parte A'' di A', si può sempre determinare una parte C di A' tolta la quale rimanga una corrispondenza biunivoca fra $A - C$ ed $A' - C$.

Si indichi con π la corrispondenza data fra A'' e A, e si consideri l'insieme degli elementi P di A'' a cui corrisponde in π^r ($r = 1, 2, \ldots$) un elemento di $A' - A''$; l'insieme di questi P preso insieme ad $A' - A''$ costituisce la classe C che volevasi determinare.

Il teorema di BERNSTEIN permette di distinguere i seguenti casi nel confronto di due classi infinite A e B:

1) le due classi sono equivalenti; in tal caso si dice che esse hanno *uguale potenza;*

2) le due classi *non* sono equivalenti, ed una di esse, p. es. A, è prevalente all'altra B; in tal caso si dice che la *potenza* di A è *maggiore* di quella di B;

3) le due classi non sono comparabili nel senso che non si sa porre una corrispondenza fra l'una e l'altra, o fra una di esse e una parte dell'altra.

Quest'ultima eventualità, che non sembra potersi escludere, implica una limitazione della teoria delle potenze di CANTOR: si suppone sempre di riferirsi a classi comparabili, che dieno luogo ad uno dei giudizi 1) 2).

La prima classe infinita che viene considerata da CANTOR è quella (di minima estensione) costituita dai numeri naturali: 1, 2, 3.... n..... Ogni classe i cui elementi si possono far corrispondere ai numeri naturali si dice *numerabile.* Tutte le classi numerabili hanno la stessa potenza minima che possa appartenere ad una classe infinita.

In seguito vedremo che la classe dei punti di un segmento (o della retta) non è numerabile, cioè che la potenza del continuo è maggiore di quella di una classe numerabile.

In generale notiamo, a titolo d'informazione, che data una classe qualsiasi si può sempre costruire una nuova classe che abbia potenza maggiore di quella. Basta considerare l'insieme di tutte le classi formate cogli elementi della classe data (classe di classi).

Il continuo rettilineo ha la stessa potenza della superficie (quadrato o piano), del volume (cubo o spazio) ecc.; ma l'insieme di tutti i possibili gruppi (infiniti) di punti d'un segmento ha potenza maggiore di questo ecc.

Infine accenneremo ad una importante questione posta da CANTOR, che rimane per ora insoluta: se esista qualche classe (gruppo di punti sulla retta) che abbia potenza intermedia fra il numerabile e il continuo.

§ 9. **Serie finite e infinite.** — Una classe infinita, alla stessa guisa di una classe finita, può concepirsi come una *serie ordinata,* per modo che:

1) dati due elementi della serie uno di essi *succede* all'altro (e questo *precede* quello);

2) se l'elemento c succede a b e b succede ad a, anche c succede ad a.

Ma l'ordine di una serie infinita non soddisfa sempre alle proprietà 3) 4) indicate al n. 4 per l'ordine di una serie finita; così p. es. la serie dei punti d'una retta è ordinata, ma dato un punto non vi è un successivo immediato nè un precedente immediato di esso. Infatti l'esistenza di un successivo immediato (e di un precedente immediato) si deduce dall'esistenza di un successivo, (e risp. d'un precedente), tenuto conto della *finitezza* della serie: se b è successivo ad a, ma vi sono elementi dopo a e prima di b, si prende uno di questi, c; se c non è successivo immediato ad a, si prenda un elemento successivo ad a e precedente a c e così di seguito; se la serie data è finita la serie dei tentativi si esaurisce e conduce al successivo immediato di a.

Come in una serie infinita può darsi che per un elemento (non ultimo) manchi un successivo immediato, e di un elemento (non primo) non vi sia alcun precedente immediato, così può anche accadere che una serie infinita non possegga un *primo* nè un *ultimo* elemento. La serie 1, 2, 3,.... n.... non ha ultimo elemento; la serie .... $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 3 ..., non ha nè primo, nè ultimo elemento.

CANTOR chiama *bene ordinata* una serie che soddisfa al seguente requisito:

3) la serie ha un *primo* elemento, ed *ogni serie* contenuta nella data come *parte* ha sempre un *primo elemento.*

Questa proprietà è legata coll'esistenza di un successivo immediato. Si ha infatti il teorema:

In una serie bene ordinata ogni elemento, che non sia ultimo, ha un successivo immediato.

Sia a un elemento (non ultimo) di una serie bene ordinata; gli elementi successivi ad a formano una serie, parte della data, che è come questa bene ordinata, e quindi ha un primo elemento, b; b è successivo immediato di a.

NOTA. Il teorema anzidetto non è invertibile. Per es. nella serie

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4}\ldots,\quad \ldots\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 3,$$

ogni elemento ha un successivo immediato, ma pure la parte

$$\ldots\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 3,$$

non possiede primo elemento.

Ora possiamo trovare un criterio distintivo delle serie finite dalle infinite; esso è dato dal seguente

TEOREMA DI PIERI. *Una serie è finita se è bene ordinata insieme alla sua inversa.*

Si abbia la serie bene ordinata:

$$S = a_1,\ a_2,\ a_3\ldots;$$

se essa non è finita contiene la serie numerata

$$s = a_1,\ a_2,\ a_3\ldots.\ a_n\ldots.$$

corrispondente a tutti i valori di n, sia che esistano *dopo* gli elementi di questa serie altri elementi oppure no; in ogni modo s è parte di S. Ma se prendiamo gli elementi di S, e quindi di s, nell'ordine inverso, la serie $\bar{S}$ così ottenuta non è bene ordinata, perchè contiene una parte ($\bar{s}$) senza primo elemento.

§ 10. **Il principio d'induzione matematica e i numeri transfiniti.** — Si abbia una relazione qualsiasi R, dipendente da un numero x; se questa relazione è verificata per $x = 1$, e se dall'essere verificata per $x = n$, si deduce ch'essa sussiste

per $x = n + 1$, allora la relazione sussiste in generale per tutti i valori di $x = 1,\ 2,\ 3\ldots.\ n\ldots.$; in simboli

se

$$R(1) = 0,$$

e da

$$R(n) = 0,$$

si deduce

$$R(n+1) = 0,$$

si ha

$$R(m) = 0,$$

(m designando un numero comunque grande).

Il principio qui enunciato è conosciuto sotto il nome di *principio d'induzione matematica* ed il suo riconoscimento come principio logico risale a MAUROLICO.

Noi abbiamo già fatto uso ripetutamente del principio d'induzione nel § 1, ammettendo la possibilità di esaurire nel pensiero una classe di oggetti materialmente dati, col toglierne successivamente un elemento dopo l'altro.

In questa maniera il principio d'induzione esprime una *condizione di possibilità* del pensiero umano rispetto ad ogni classe finita, possibilità d'immaginare tutti gli oggetti della classe come effettivamente pensati (uno dopo l'altro), per quanto si tratti invero di *possibilità logica piuttosto che pratica:* l'ipotesi che ingrandisce — occorrendo — la rapidità del pensiero e finge un tempo assai grande a sua disposizione, riesce in realtà ad ingrandire la facoltà del pensiero, press'a poco come il microscopio ingrandisce la vista, senza decampare dalle regole logiche ed in ispecie senza condurre mai ad una contraddizione.

D'altra parte si può interpretare il principio d'induzione, non già a partire dall'ipotesi di una classe finita comunque data, ma come possibilità di costruzione della serie infinita che corrisponde ai numeri naturali

$$1,\ 2,\ 3\ldots.\ n\ldots.$$

Esso precisa ancora il postulato esistenziale riconosciuto alla fine del n. 6, affermando che l'operazione con cui si passa da un termine della serie al successivo conduce ad *ogni* termine della serie. Si ha così una proprietà caratteristica della serie degli atti del pensiero che si può determinare psicologicamente fissando un modo generale di passaggio da

un pensiero al successivo (tale è per es. la serie delle riflessioni del pensiero su se stesso:

A, il pensiero di A, il pensiero del pensiero di A ecc.).

Ma si ha ancora una *proprietà caratteristica delle serie infinite* (di oggetti supposti) *che possono porsi in corrispondenza ordinata* colla serie dei pensieri e quindi *colla serie dei numeri naturali*

$$1,\ 2,\ 3....\ n....$$

Invero si consideri una serie infinita, bene ordinata, S, il cui termine generale, ordinatamente corrispondente al numero n della serie 1, 2, 3.... n...., si possa designare con n.

Osserviamo che essendo data una relazione

$$R(x) = 0,$$

tutti i numeri x che la verificano (supposto che ce ne sia qualcuno) formano una classe.

Quindi si può enunciare il principio d'induzione come segue:

Se una classe C *contiene il primo elemento* ($x = 1$) *della data serie* S, *e se dall'ipotesi essa contenga un qualsiasi elemento* ($x = n$) *di* S *si deduce che contiene ancora il suo successivo immediato* ($x = n + 1$), *la classe* C *contiene tutti gli elementi di* S (PEANO).

Questo principio appunto distingue la serie dei numeri (o quelle che sono con essa in corrispondenza ordinata, da altre possibili serie ordinate come p. es. la seguente:

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{3}{4},\ 1\frac{7}{8}....\ 2,\ 2\frac{1}{2},....$$

Infatti è chiaro che una serie bene ordinata per cui valga il postulato di PEANO, si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata colla serie dei numeri naturali

$$1,\ 2,\ 3....\ n.....$$

Ora la considerazione di serie bene ordinate non soddisfacenti al postulato di PEANO, conduce ad estendere il concetto ordinario dei numeri ordinali, considerando *numeri ordinali infiniti:* tali sono i *numeri transfiniti* di CANTOR.

Si abbia una serie bene ordinata, S, che non soddisfi al postulato di PEANO; allora vi sono in essa degli elementi successivi a quelli che portano un qualsiasi numero d'ordine n per quanto grande; la serie di tali elementi, S_1, (successivi alla serie 1, 2, 3....) è una parte di S, e perciò possiede un primo elemento ω; il successivo di ω si può designare con $\omega + 1$ e così via.

Si ha così una serie

$$S = 1,\ 2,\ 3....,\ \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2....,\ 2\omega,\ 2\omega + 1,...,\ ....$$

che si può immaginare indefinitamente proseguita.

Il simbolo ω *che designa il primo elemento della serie successivo ai numeri naturali (finiti) si può considerare come il più piccolo numero ordinale infinito (trasfinito).*

Se nella serie vi è un elemento successivo ad

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega....,$$

questo si può designare con ω^2. Si comprende quindi la possibilità che la serie contenga anche elementi

$$\omega^3,\ \omega^4....,\ \omega^\omega \text{ ecc.}$$

La serie dei numeri transfiniti qui considerati, trova un'immagine geometrica in una serie di punti che si costruisca opportunamente sopra la retta in guisa che: ω *corrisponda ad un punto limite dalla serie* 1, 2, 3....; 2ω *ad un punto limite della serie* $\omega + 1,\ \omega + 2,....$; ω^2 *ad un punto limite della serie* $\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,....$ ecc.

NOTA. Quando la serie dei numeri transfiniti è comunque prolungata mediante una costruzione mentale, *dipendente da un numero finito di convenzioni,* immaginando un successivo ω^ω dopo $\omega,\ \omega^2,\ \omega^3....$, e quindi un successivo dopo $\omega^\omega,\ \omega^{2\omega},\ \omega^{3\omega}....$ ecc., si cade sempre in *classi numerabili.*

Si può anche dimostrare (facendo uso di un ragionamento che svolgeremo nell'ultimo cap. di questo art.) che *ogni serie ben ordinata di punti susseguentisi sopra la retta* (serie a cui conduce l'immagine geometrica dei transfiniti definita innanzi) è numerabile.

Nasce ora la questione se sia possibile disporre i punti di un continuo (per es. d'un segmento) in una serie bene ordinata, di guisachè il numero cardinale che designa la

potenza del continuo, si presenti come un numero della serie dei transfiniti. Tale questione, proposta da CANTOR, ha dato luogo a numerosi tentativi, i quali però debbono ritenersi tutti come infruttuosi, perchè le pretese dimostrazioni conducenti a bene ordinare il continuo suppongono la possibilità di compiere effettivamente col pensiero infinite operazioni di scelta (non predeterminate da qualche criterio esterno) cioè sono affette dal vizio del *trascendentalismo.*

Perciò nello stato attuale della questione *rimane dubbio se il continuo possa essere bene ordinato.* Perchè tale buon ordinamento avesse un senso *positivo* bisognerebbe farlo dipendere da un criterio determinato (o determinabile a partire da una realtà data, mediante un numero finito di atti arbitrarii del pensiero), ed un siffatto criterio non sembra potersi assegnare. La prova *negativa* esigerebbe invece di dedurre una contraddizione dall'ipotesi di una serie ben ordinata avente la potenza del continuo. Non sembra potersi rigorosamente affermare che l'impossibilità di una costruzione positiva implichi necessariamente la possibilità di questa dimostrazione negativa.

Anche a prescindere dalla probabile impossibilità di estendere la serie dei transfiniti fino ad avere una serie ben ordinata della potenza del continuo, l'estensione dei numeri cardinali conduce a *due specie* diverse *di numeri infiniti,* poichè dal punto di vista cardinale si avrebbe

$$\omega = \omega + 1 = ... = 2\omega = ... = \omega^2 = ...,$$

ciascuno di questi numeri corrispondendo ugualmente ad un insieme numerabile.

III.

LE OPERAZIONI FONDAMENTALI DELL'ARITMETICA

§ 11. **Introduzione.** — Le 4 operazioni fondamentali dell'Aritmetica sono: l'*addizione,* la *moltiplicazione* e le *operazioni inverse* a queste, *sottrazione* e *divisione.*

La teoria delle operazioni (tranne per quanto concerne l'estensione del campo dei numeri) si può dunque limitare alle due operazioni *dirette:* addizione e moltiplicazione.

Queste operazioni si possono definire appellandosi al significato dei numeri come cardinali e ordinali; si ha quindi

una *teoria cardinale* e una *teoria ordinale* delle operazioni, nelle quali le proprietà fondamentali delle operazioni stesse vengono riconosciute diversamente.

Cominciamo dalla teoria cardinale.

§ 12. **L'addizione.** Nella teoria cardinale il numero viene sempre pensato come « numero degli oggetti d'una classe ». Data la classe

$$(A) = (A_1 A_2 .... A_a)$$

si scriverà

$$a = \text{num}\,(A).$$

Ciò posto l'*addizione o somma di due o più numeri corrisponde all'operazione logica del riunire due o più classi,* formando una nuova classe che contenga insieme gli elementi delle classi addende.

Se

$$a = \text{num}\,(A), \quad b = \text{num}\,(B), \quad c = \text{num}\,(C),$$

$$a + b = \text{num}\,(A + B), \quad (A + B) = (A_1 .... A_a, B_1 .... B_b)$$

$$a + b + c = \text{num}\,(A + B + C).$$

Ora l'operazione logica del riunire le classi è definita in modo simmetrico per riguardo alle classi addende, indipendentemente dal loro ordine; perciò *l'addizione gode della proprietà commutativa:*

$$a + b = b + a, \quad a + b + c = a + c + b \text{ ecc.}$$

Inoltre la riunione delle classi soddisfa all'assioma logico che si esprime colla *proprietà associativa*: riunire (A, B), (C) equivale a riunire (A) e (B) e quindi (AB) e (C).

Vale dunque *per l'addizione di più numeri la proprietà associativa:*

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c);$$

od anche

$$a + b + c = b + (a + c) \text{ ecc.},$$

formule che resultano dal combinare le proprietà associativa e commutativa.

Ora il principio d'induzione, che caratterizza la serie dei numeri *finiti,* si lascia tradurre pei numeri cardinali, in rapporto all'addizione, col seguente:

Ogni numero è somma di più unità:

$$a = 1 + 1 + \ldots + 1_a.$$

È appunto questo principio che in molti trattati elementari d'Aritmetica, sostituisce il principio d'induzione (ad es. nella dimostrazione che la somma di b numeri uguali ad a, uguaglia la somma di a numeri uguali a b).

§ 13. **La sottrazione e lo zero.** — La *sottrazione* di due numeri

$$c = a - b$$

si definisce come *operazione inversa* dell'addizione; proponendosi la risoluzione dell'equazione

$$a = b + x,$$

che dà, ove la sottrazione sia possibile,

$$x = c = a - b.$$

Per interpretare la sottrazione pei numeri cardinali a, b, si deve supporre

$$a = \text{num}\,(A), \quad b = \text{num}\,(B),$$

allora fra le due classi (A), (B) si può sempre porre una *corrispondenza similare* (univoca in un senso, ma non invertibile) in cui ad una delle due classi corrisponde biunivocamente una *parte* dell'altra, mentre gli elementi della parte *residua* non hanno corrispondente nella prima; precisamente a (B) corrisponde una parte di (A) se $(A) \geq (B)$ ed invece ad (A) una parte di (B) se $(B) \geq (A)$. *La sottrazione delle due classi* (A) (B) *è la costruzione della classe determinata come residuo della corrispondenza similare fra* (A), (B). È inteso che questo residuo è *la classe nulla* se (A) (B) sono equivalenti.

La classe nulla (O) è definita comprensivamente in modo unico, perchè di ogni elemento A si nega che esso appartenga ad (O), perciò se

$$(A) = (B) = (C) \ldots,$$

si ha

$$(O) = (A - A) = (B - B) = (C - C) \ldots.$$

Ora *dati due numeri disuguali* a, b, (corrispondenti alle classi (A), (B)) *vi è sempre uno ed uno solo di essi che è maggiore dell'altro* (minore) *e può ritenersi come somma di questo con un terzo numero;* in altre parole *è possibile la sottrazione* a — b *o* b — a. Si può togliere il *caso d'eccezione* corrispondente all'uguaglianza dei due numeri, introducendo il *numero* 0 come numero cardinale della classe nulla, e quindi ponendo per definizione

$$a + 0 = a, \quad 0 = a - a = b - b = \ldots.$$

Le proprietà della somma ci danno subito le seguenti, dove si suppongano possibili (pur conducendo a 0) le sottrazioni indicate:

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$
$$a - (b + c) = (a - b) - c$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

§ 14. **La moltiplicazione.** — La moltiplicazione di due o più numeri cardinali si può definire nel seguente modo (i cui vantaggi sono stati rilevati recentemente dal CAPELLI).

Si abbiano due o più classi *non nulle:*

$$(A) = (A_1 \ldots A_i \ldots A_a),$$
$$(B) = (B_1 \ldots B_r \ldots B_b)$$
$$(C) = (C_1 \ldots C_s \ldots C_c) \text{ ecc.}$$

Formiamo la classe

$$(AB) = (\ldots A_i B_r \ldots)$$

che ha come elementi le coppie formate associando un qualsiasi elemento di (A) con un qualsiasi elemento di (B).

Il prodotto dei due numeri a, b, *diversi da* 0, *si definisce ponendo*

$$ab = \text{num}\,(AB).$$

Analogamente

$$abc = \text{num}\,(ABC),$$

dove la classe (ABC) contiene le terne $A_i B_r C_s$ ecc.

La moltiplicazione delle classi è definita in modo simmetrico, quindi *vale per il prodotto di più numeri la proprietà commutativa:*

1) $$ab = bc, \quad abc = bac \text{ ecc.}$$

Inoltre l'associazione degli elementi $A_i B_r C_s$ può esser fatta associando prima $A_i B_r$ e poi C_s alla coppia così ottenuta, quindi *vale la proprietà associativa:*

2) $$abc = (ab)c.$$

Si ha poi *la proprietà distributiva:*

3) $$(a+b)c = ac + bc,$$

quindi:

$$(a+b+c)d = ad + bd + cd \text{ ecc.}$$

Infatti combinando per moltiplicazione le classi $(A+B)$ e (C) si ottiene appunto la riunione delle classi (AC) e (BC) ecc.

Notiamo infine che:

4) $$a1 = a.$$

Infatti moltiplicando la classe (A) per un'altra contenente un solo elemento, si dà luogo ad una classe i cui elementi corrispondono biunivocamente a quelli di (A).

Le relazioni 1) 2) 3) 4) che derivano dalla definizione del prodotto permettono di dedurre alcune conseguenze notevoli. Tali sono le formule seguenti:

$$ab = a(1+1+\ldots.\,1_b) = a + a + \ldots. + a_b$$

(cfr. la forma data al principio d'induzione nel n. 12);

$$a(b-c) = ab - ac$$

(posto $b - c = d$ si ha invero $ab = a(c+d) = ac + ad$).

L'ultima formula estesa convenzionalmente al caso $b = c$, conduce alla *definizione del prodotto di due numeri di cui uno* (almeno) *sia uguale a* 0.

5) $$a0 = 0;$$

d'accordo anche colla formula

$$0a = 0 + 0 + \ldots. = 0.$$

Qui conviene notare esplicitamente che — secondo la definizione sintetica data innanzi — il prodotto di due numeri diversi da 0 è sempre un numero diverso da 0, e così: *Condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi d'un prodotto è l'annullarsi di uno* (almeno) *dei fattori.*

§ 15. **Operazioni sui numeri ordinali.** — Cerchiamo d'interpretare le operazioni definite sui numeri cardinali, per riguardo ai numeri ordinali.

La somma $a+b$ di due numeri può essere definita come segue:

Nella serie dei numeri

$$1,\ 2,\ 3\ldots.\ a,\quad a_1 a_2\ldots.\ a_b\ldots.$$

consideriamo tutti gli elementi successivi ad a; questi formano una nuova serie numerata nella quale si può considerare il termine a_b che porta il numero d'ordine b; si ha allora

$$a_b = a + b.$$

Si deve notare che questa definizione non è più simmetrica rispetto agli addendi, quindi la proprietà della somma non è più evidente, se non si fa appello alla nozione che la classe $(1\ldots.\ a,\ a_1\ldots.\ a_b)$ ha come numero cardinale $a+b$.

In modo analogo si definirà la somma di più numeri:

$$a + b + c = (a+b) + c \text{ ecc.}$$

La proprietà associativa della somma

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

appare qui come evidente.

Non così la proprietà commutativa

$$a + b = b + a,$$

la quale tuttavia può essere dimostrata facendo ricorso al seguente principio: *se una serie finita*

$$1,\ 2,\ 3\ldots.\ n$$

viene presa nell'ordine inverso, l'ultimo elemento (1) *della serie invertita ha il numero d'ordine* n. Ma a dir vero l'evidenza di questo principio tiene sempre al concetto del numero cardinale che designa il numero degli oggetti della classe

$$(1,\ 2\ldots.\ n).$$

Se invece si vuol giungere a una dimostrazione della proprietà commutativa della somma, che sia interamente

fondata sull'intuizione dei numeri ordinali, si è condotti ad un processo ricorrente e all'uso del principio d'induzione.

Perciò si comincerà a provare induttivamente che

$$a+1=1+a$$

partendo dal caso $a=1$, e poi con una seconda induzione si estenderà la formula

$$a+1=1+a$$

pervenendo ad

$$a+b=b+a \qquad \text{(cfr. n. 16).}$$

NOTA. Questa dimostrazione induttiva non si estende naturalmente ai *transfiniti di* CANTOR pei quali la definizione ordinale della somma ci dà

$$1+\omega=2+\omega=\ldots.=\omega,$$

e *non*

$$1+\omega=\omega+1 \text{ ecc.}$$

La *sottrazione,* come operazione inversa dell'addizione, non dà luogo a nuove considerazioni se non per quanto concerne l'*interpretazione dello zero.*

La sottrazione $a-a$ è impossibile nella serie dei numeri ordinali

$$1,\ 2,\ldots.\ a,\ldots..$$

Ma se si vuole ristabilire la corrispondenza ordinata fra la serie dei numeri ordinali e dei cardinali, quando s'includa in questa « il numero degli oggetti della classe nulla », si è condotti a premettere al numero 1 un nuovo numero « lo 0 ».

Allora si ha la serie

$$0,\ 1,\ 2\ldots.\ a,\ldots.$$

nella quale il numero a non è più il numero d'ordine dell'elemento che porta questo nome, ma il *numero d'ordine* dell'elemento stesso *a contare dopo lo* 0, preso come origine della numerazione.

La *moltiplicazione* dei numeri ordinali si suole definire mediante la somma in virtù della formula

$$ab=b+b+\ldots.+b_a$$

dove

$$a=1+1+\ldots.+1_a;$$

la qual definizione si riduce alla definizione induttiva

$$a0=0$$

$$a(b+1)=ab+a.$$

Dalla precedente formula appare la proprietà distributiva a destra

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Occorre poi dimostrare le proprietà commutativa ed associativa ecc. Queste dimostrazioni si possono svolgere sistematicamente per via induttiva, e si può anche ridurre induttivamente alla più semplice espressione non solo — come qui è accennato — la definizione del prodotto, ma anche quella della somma, nel modo che ci proponiamo di svolgere nel numero seguente.

§ 16. **Fondazione dell'Aritmetica secondo Peano.** — I principii della teoria ordinale dei numeri e delle operazioni aritmetiche sono stati formulati da G. PEANO in un sistema deduttivo che tende a ridurre al minimo le premesse dell'intuizione e risponde ad una preoccupazione di economia e semplicità algoritmica.

PEANO, lasciando da parte l'analisi del significato dei numeri, assume come definizione implicita di essi un sistema di proposizioni fondamentali, espresse nei simboli della Logica matematica, che possiamo tradurre liberamente nel nostro linguaggio, come segue:

1) I *numeri* sono enti di una classe (N).

2) Esiste un'operazione (*successivo di* $=$ *suc*) che trasforma ogni numero in un numero:

se a è un N, suc a è un N.

3) *Principio d'induzione:* se S è una classe contenente lo 0, e se dall'ipotesi che S contenga un N si deduce che S contiene suc N, allora S contiene tutti gli N.

4) L'operazione *suc* non può essere invertibile in più modi diversi:

se $\text{suc } x=\text{suc } y$

segue

$$x=y.$$

5) Esiste un numero « lo 0 » che non è successivo di alcun numero. Quindi qualunque sia il numero N

$$\text{suc } N \neq 0.$$

In queste proposizioni i concetti di « numero », « 0 », « suc » appaiono come primitivi in aggiunta a quelli logici di classe ecc.

Mercè le proposizioni stesse i numeri vengono ordinati in una serie rispetto all'operazione suc:

$$0, \quad \text{suc } 0 = 1, \quad \text{suc } 1 = 2, \ldots,$$

e la serie così costruita è ben ordinata.

Viceversa l'ipotesi di una serie ben ordinata di numeri corrisponde sempre alle premesse di PEANO, se è soddisfatto il postulato d'induzione che esclude i transfiniti.

Ora ecco in breve l'ordine delle proposizioni elementari che PEANO deduce dalle 1).... 5).

SOMMA. *Definizione induttiva* di $a+b$ in base alle condizioni iniziali:

$$a+0=a$$
$$a+\text{suc } b = \text{suc}\,(a+b).$$

Si tratta di provare che queste condizioni determinano un'operazione in virtù della quale dati due numeri a, b resta definito un numero $a+b$, e poi di stabilire le proprietà associativa e commutativa di quell'operazione.

Al primo scopo si osserva che la proposizione « $a+b$ è un N » è vera per $b=0$, e dall'ipotesi

$$a+b=N$$

segue

$$a+\text{suc } b = \text{suc } N,$$

quindi induttivamente (prop. 3) la proposizione anzidetta risulta dimostrata.

Si noti poi che essendo

$$1 = \text{suc } 0$$
$$a+1 = \text{suc } a,$$

è permesso di tradurre, come si farà nel seguito, il segno « suc » col segno $+1$.

Proprietà associativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Si dimostra induttivamente perchè:

$$(a+b)+0 = a+(b+0),$$
$$(a+b)+1 = a+(b+1),$$

e dall'ipotesi

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

segue

$$(a+b)+(c+1) = a+\{(b+c)+1\} = a+\{b+(c+1)\}.$$

Proprietà commutativa:

$$a+b=b+a.$$

Dimostrazione induttiva in due tempi:

$$0+0=0,$$

e da

$$0+a=a$$

segue

$$0+(a+1) = (0+a)+1 = a+1,$$

quindi

$$0+a=a;$$

ora si ha

$$0+a=a+0,$$

e da

$$b+a=a+b$$

segue

$$\begin{aligned}(b+1)+a = a+(b+1) \,(&= b+(1+a)\\ &= b+(a+1)\\ &= (b+a)+1\\ &= (a+b)+1\\ &= a+(b+1))\end{aligned}$$

quindi si ha induttivamente

$$b+a=a+b.$$

SOTTRAZIONE. Se

$$a+c=b+c$$

si deduce

$$a=b.$$

Dimostrazione induttiva partendo dal fatto che $a+0=b+0$ porta $a=b$.

PRODOTTO. *Definizione induttiva* di ab in base alle condizioni iniziali

$$a0=0$$

$$a(b+1)=ab+a.$$

segue

$$a1=a, \quad a2=a+a.$$

Si prova in generale che

$$ab \text{ è un } N,$$

induttivamente, perchè la proposizione vale per $b=0$, e dall'essere

$$ab=N$$

si deduce

$$a(b+1)=N+a.$$

Proprietà distributiva:

A destra

$$a(b+c)=ab+ac.$$

si ha

$$a(b+0)=ab+a0$$

e da

$$a(b+c)=ab+ac$$

segue

$$a(b+\}c+1\{)=a(\}b+c\{+1)$$

$$=a(b+c)+a=(ab+ac)+a=ab+a(c+1),$$

quindi induttivamente.

A sinistra

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Dimostrazione analoga.

Proprietà commutativa:

$$ab=ba.$$

Dimostrazione induttiva in tre gradi.

Anzitutto

$$00=0$$

e da

$$0a=0$$

segue

$$0(a+1)=0a+0,$$

quindi induttivamente

$$0a=0=a0.$$

Ora

$$1\cdot 0=0$$

e da

$$1a=a1$$

segue

$$1(a+1)=(a+1)1$$

quindi induttivamente

$$1a=a1.$$

Finalmente da

$$ba=ab$$

si deduce

$$(b+1)a=ba+1a=ab+a1=a(b+1)$$

e perciò induttivamente

$$ba=ab.$$

Proprietà associativa:

$$(ab)c=a(bc).$$

Si ha

$$(ab)0=0=a(b0)$$

e da

$$(ab)c=a(bc)$$

segue

$$ab(c+1)=(ab)c+ab=$$

$$=(bc)+ab=a(bc+b)=$$

$$=a\}b(c+1)\{,$$

quindi induttivamente

$$(ab)c=a(bc).$$

Annullamento del prodotto. Se

$$ab=0 \quad \text{e} \quad a\neq 0$$

si ha

$$b=0.$$

DIVISIONE. Se

$$ac=bc \quad \text{e} \quad c\neq 0.$$

$$a=b.$$

PARTE SECONDA

I NUMERI RAZIONALI

I.

ESTENSIONE DEL CONCETTO DI NUMERO

§ 17. **Perchè s'introducono i numeri negativi, fratti** ecc. — Due ordini di motivi inducono ad estendere il concetto di numero che risponde alla serie dei numeri naturali:

1) l'impossibilità di effettuare — fuori di certe condizioni — le operazioni inverse: sottrazione, divisione, e poi estrazione di radice ecc.

2) l'uso dei numeri per designare classi di classi o misurare grandezze (indefinitamente divisibili), o per contrassegnare la posizione di un elemento in una serie (come la retta) più estesa di quella che corrisponde alla numerazione data.

In rapporto a questi due ordini di motivi l'estensione del campo dei numeri e la conseguente trattazione dei *numeri negativi, fratti,* ecc., può dar luogo ad una *teoria analitica* e ad una *teoria sintetica* dei numeri.

§ 18. **Osservazioni sulla teoria analitica.** — Lo scopo della teoria analitica dei numeri consiste nel giustificare l'*uso nel calcolo di formule* che, rispetto al concetto dato dei numeri naturali, sono *prive di senso*, come: $a-b$ per $a<b$, $\frac{a}{b}$ quando a non è multiplo di b, ecc.

Limitiamoci — per semplicità di discorso — alla teoria dei numeri fratti e negativi; lo scopo della teoria analitica di questi numeri si può ridurre più precisamente alla dimostrazione del seguente resultato:

Si operi nel calcolo algebrico (o aritmetico) fingendo sempre possibili le quattro operazioni: somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione, e supponendo formalmente le loro proprietà fondamentali (n. 16); *se per tal modo, a partire da date uguaglianze fra numeri naturali, si deducono altre uguaglianze fra numeri naturali, quest' ultime sono legittimamente dedotte, comunque si sieno rappresentate nelle formule di passaggio delle operazioni impossibili, e quindi la deduzione sia avvenuta attraverso formule vuote di senso.*

ESEMPIO: Nel paese X sono nati durante un anno, 6 uomini ogni 5 giorni, quanti uomini sono nati in tutto l'anno?

Si ha la proporzione

$$365 : 5 = x : 6,$$

che (resultando x intero) esprime un'uguaglianza frà numeri naturali. Trasformiamola scrivendo

$$x = 365 \cdot \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{5} = \left(1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$x = 365\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 365 + \frac{365}{5}$$

$$= 365 + 73 = 438.$$

Il valore di x così dedotto è quello stesso che si ottiene calcolando $\frac{365 \cdot 6}{5} = 73 \cdot 6$. E non pertanto eseguendo i calcoli nel primo modo siamo passati attraverso una formula assurda in sè, secondo la quale si suppone sia nato — ogni giorno — un uomo e $\frac{1}{5}$ di uomo. Nessuno penserà che per giustificare il calcolo si debbano effettivamente frazionare gli uomini!

Ora si tratta di vedere in qual modo il resultato precedente possa essere stabilito in generale.

Anzitutto, di fronte al presentarsi di simboli d'operazioni impossibili, o non bene definite, si possono osservare due atteggiamenti opposti:

1) l'atteggiamento prudente e rigoroso che si arresta di fronte al simbolo privo di significato e ne rifiuta l'uso;

2) l'atteggiamento ardito del ricercatore che accorda fiducia al calcolo istituito su simboli non definiti e procede in esso, colla speranza di *scoprire* nuove relazioni — se pure non giustificate — che sarà facile di giustificare poi con metodi rigorosi.

Questa diversità d'atteggiamento divide per es. — nei suoi inizii — gli oppositori e i fautori del Calcolo infinitesimale, questi ultimi potendosi riunire sotto l'insegna « continuer, la foi viendra! »; e — più di recente — gli oppositori ed i fautori dell' « immaginario » (cfr. Art. 10).

Dal punto di vista logico, l'atteggiamento ardito del ricercatore può essere giustificato come l'accoglimento di un'*ipotesi di lavoro*. In tal senso il ricercatore sviluppa le conseguenze di un'ipotesi che — a volta a volta — si appresta a sottomettere ad un diretto controllo.

Ma, quando questo controllo riesce, senza eccezione, in un seguito di casi, si produce nelle menti una specie di *certezza pratica* che l'ipotesi adottata sia giusta; ed infatti se i varii tentativi sono apprezzati con cauto giudizio, se ne ha in un certo senso una *prova sperimentale*.

Fin qui siamo sul terreno della Logica. Ora bisogna fare i conti colla Psicologia!

Lo spirito umano aborre dal dubbio, e questo aborrimento si manifesta non solo come amore della verità più sicura, cioè come ricerca di mezzi di prova più rigorose, ma anche come amore dell'illusione: così avviene che il successo parziale si scambia non di rado colla presunzione della vittoria definitiva, il resultato sperimentale col principio preteso a priori, la Fisica colla Metafisica.

Nel campo matematico di cui stiamo trattando, la certezza empirica sopra accennata, congiunta alla *superstizione del formalismo*, conduce spesso ad un *sofisma*, più o meno apertamente dichiarato, che tien luogo di prova logica: *operando nel calcolo sopra dei simboli astratti, ci è indifferente il significato concreto che questi possono ricevere compatibilmente colle proprietà formali del nostro sistema d'operazioni quindi il processo formale è legittimo indipendentemente da codesto significato concreto e però anche se — durante il processo — si è fatto uso di simboli privi di senso.*

Questo sofisma compare travestito in varie teorie formali dei numeri fratti o negativi, dove si assume in sostanza che « *un simbolo rappresenti senz'altro un oggetto del pensiero logico* ».

Nondimeno quest'assunzione si riconosce falsa in esempii volgari: si supponga per es. che sia lecito di operare, colle ordinarie regole di calcolo, sul simbolo $\frac{a}{0}$; si avrà allora

$$1 \cdot 0 = 0 \qquad 2 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{0}{0} = 1 \qquad \frac{0}{0} = 2$$

$$1 = 2!$$

Questo semplice esempio (ed altri che si potrebbero trarre dalle serie divergenti o indeterminate ecc.) ci avverte che la giustificazione formale è insufficiente ad autorizzare l'uso di simboli corrispondenti ad operazioni impossibili, giacchè gli stessi principii del pensiero logico (identità, contraddizione) valgono solo per ciò che rappresenta un *possibile oggetto*, mentre un oggetto impossibile può dare origine ad una contraddizione intrinseca (esempii: limite d'una serie indeterminata, classe di tutte le classi, ecc.).

Ora vi è luogo a distinguere intorno alla *possibilità degli enti astratti:*

1) una possibilità (fisica,....) relativa a certe interpretazioni di altri enti da cui i dati dipendono (per es. $\frac{1}{3}$ è fisicamente impossibile se l'unità è l'uomo);

2) una *possibilità logica* che spetta ad ogni concetto non contraddittorio.

Dopo ciò lo scopo della teoria analitica dei numeri negativi e fratti si può chiarire dicendo che essa si propone di: *mostrare la possibilità logica dei simboli* $a - b$, $\frac{a}{b}$, *in un sistema di enti e di operazioni che si suppone governato dalle proprietà fondamentali dell'Aritmetica dei numeri naturali.*

In qual senso possa stabilirsi una tale possibilità logica, verrà lumeggiato dalle considerazioni che seguono.

§ 19. **Rapporti fra la teoria analitica e la teoria sintetica.** — Per dimostrare la possibilità logica di un concetto astratto basta far vedere ch'esso può ricevere un'*interpretazione concreta;* in questo senso per es. si fa vedere che i numeri transfiniti di CANTOR sono logicamente possibili, ricorrendo alle serie di punti considerate al n. 10.

Così per mostrare la possibilità logica di un oggetto, che soddisfi alle proprietà formali dei numeri e sia rappresentato dal simbolo $\frac{1}{3}$, basta supporre che la classe rispetto a cui si considerano i numeri 1, 2, 3.... sia formata di elementi divisibili in tre parti: in tal modo — nonostante l'impossibilità fisica di $\frac{1}{3}$ d'uomo — si conclude alla possibilità logica di $\frac{1}{3}$, per ciò che esiste $\frac{1}{3}$ di metro.

In generale si può dire che una teoria sintetica dei numeri fratti o negativi dimostra in questo senso la possibilità logica dei simboli $\frac{a}{b}$, $a - b$. Ma qui interviene un' *osservazione delicata.*

Si abbiano due diverse interpretazioni concrete del concetto di numero, per es.:

A) numero = numero d'uomini,

B) numero = numero di metri.

Supposto che il numero a non sia multiplo di b, il simbolo $\frac{a}{b}$ ha senso rispetto all'interpretazione *B*) mentre è privo di senso rispetto ad *A*). Ora l'uso dei numeri fratti $\frac{a}{b}$ può condurre ad alcune relazioni fra numeri naturali $a, b, \ldots$, che risultano così dimostrate pei numeri concreti della classe *B*). Queste stesse relazioni aritmetiche potranno ancora ritenersi valevoli pei numeri della classe *A*)?

In altre parole: la possibilità — relativa a certe interpretazioni concrete del numero — di estendere il campo dei numeri naturali, non potrebbe — per avventura — tradursi in un nuovo postulato dell'Aritmetica, da cui seguano, per la serie stessa dei numeri naturali, proprietà incompatibili con alcune speciali interpretazioni del numero?

Se così fosse si sarebbe necessariamente condotti a distinguere *varie Aritmetiche*, in alcune delle quali il simbolo $\frac{a}{b}$ o $a - b$, potrebbe dar luogo ad una incompatibilità con certe proprietà dei numeri, e quindi rappresentare in questo senso (relativo) una impossibilità logica.

Prima di rispondere al dubbio critico sollevato dalle precedenti riflessioni, vogliamo porgere un esempio che valga a mostrare come esso debba ritenersi, *a priori*, logicamente fondato.

Si cerchi di fondare la Geometria del piano assumendo dall'intuizione alcuni postulati fondamentali relativi ai *punti* (elementi della classe « piano »), alle *rette* (classi di punti contenute nel piano), e ai *movimenti* del piano su se stesso (corrispondenze fra i punti del piano).

Supponiamo dunque di avere enunciato:

1) i postulati relativi alla determinazione di una retta per mezzo di due punti e all'intersezione di due rette (postulato d'EUCLIDE sulla unicità della parallela);

2) i postulati relativi all'ordine dei punti sulla retta, o dei raggi d'un angolo ecc., esclusa la continuità (Art. 5);

3) i postulati che caratterizzano i *movimenti del piano su sè stesso*, a cui si riattacca la proposizione che « due triangoli aventi uguali due lati a due lati e *direttamente uguali* gli angoli compresi, sono uguali ».

Su queste basi si potrà edificare, *nel piano*, una teoria dell'uguaglianza (congruenza) dei triangoli, la quale tuttavia avrà un contenuto più ristretto della teoria euclidea ordinaria. Infatti non ci è dato di dedurre che sono uguali due triangoli (inversamente uguali) la cui sovrapposizione esige un ribaltamento del piano, e quindi implica l'ipotesi che il piano sia contenuto in uno spazio a tre dimensioni.

La possibilità di questa estensione del piano si traduce qui in un nuovo postulato della Geometria piana, a cui si riattacca per es. la proprietà che « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali fra loro ». Precisamente HILBERT ha provato che questo postulato è indipendente da 1) 2) 3), per modo che è possibile assegnare un'interpretazione concreta del concetto astratto di piano, definito dai postulati 1) 2) 3), dove non valga la proprietà degli angoli alla base del triangolo isoscele.

Questo esempio ha un significato logico generale:

La estendibilità di una classe di enti astrattamente definita, in rapporto a certe relazioni postulate in essa, può tradursi in qualche postulato essenzialmente nuovo che esprima una relazione degli enti entro la classe data, tale relazione essendo compatibile con alcune interpretazioni concrete dei supposti enti astratti e incompatibile con altre interpretazioni di essi.

Dopo ciò ritorniamo alla nostra Aritmetica. È possibile che vi siano diverse Aritmetiche dei numeri naturali, per modo che in qualcuna di esse sussistano relazioni compatibili coll'estensione del campo dei numeri, e in qualche altra vi sieno relazioni incompatibili con una siffatta estensione?

A questa domanda si risponde:

No, il dubbio critico sollevato innanzi può essere rifiutato in base alla seguente considerazione, che si riattacca allo stesso processo di definizione dei numeri naturali (cardinali o ordinali):

Qualunque sia il significato concreto che vogliasi attribuire ai numeri delle due serie:

$A)$ $\quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,....$

$B)$ $\quad \bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},....,$

si può sempre porre fra le due serie una *corrispondenza ordinata* $n = \bar{n}$, la quale trasforma la somma $m + n$ in $\overline{m+n}$, il prodotto mn in $\overline{mn}$ ecc.; mediante questa corrispondenza tutte le proprietà dei numeri $A)$ in ordine alle operazioni fondamentali si traducono in proprietà analoghe dei numeri $B)$, e viceversa, quindi *le due serie di numeri godono sempre delle stesse proprietà aritmetiche.*

Vi è dunque *una sola Aritmetica dei numeri naturali,* l'unicità dell'Aritmetica derivando dal modo di costruzione dei numeri, come enti astratti che rappresentano le corrispondenze possibili fra classi o serie d'oggetti.

Pertanto se l'uso incondizionato dei simboli $a - b$, $\frac{a}{b}$ viene giustificato per riguardo ad una particolare interpretazione concreta dei numeri naturali $a, b,....$, esso risulta parimente giustificato, come possibilità logica, per riguardo ad ogni altra interpretazione concreta dei numeri. Cioè: *la teoria analitica dei numeri negativi e fratti può esser fondata ricorrendo ad una qualsiasi teoria sintetica di essi.*

Si può anche dire che ogni teoria analitica dei numeri negativi e fratti è (astrattamente parlando) una teoria sintetica, in quanto raggiunge il suo resultato fondamentale colla costruzione di una serie di enti, comprendente, la serie dei numeri naturali; per quanto la serie estesa venga qui definita senza alcun riguardo all'*uso ordinario* dei numeri negativi e fratti. Ma — dal punto di vista filosofico della teoria della conoscenza — vi è fra la teoria analitica e la teoria sintetica questa differenza importante: *la teoria sintetica dei numeri negativi o fratti* ecc. *si basa sopra postulati, in quanto suppone una realtà — o la rappresentazione concettuale di una realtà — esterna, a cui i nuovi numeri si riferiscono; invece la teoria analitica porge una costruzione puramente logica dei numeri estesi, a partire dalla serie dei numeri naturali che esclusivamente si suppone data;* qui i numeri estesi non s'introducono *mediante postulati,* ma mediante *definizioni* o *convenzioni.*

Perciò la teoria sintetica — più chiara ed interessante dal punto di vista fisico — è senz'altro preferita dagli empiristi, fautori dell'*Aritmetica a posteriori,* laddove la teoria analitica risponde al punto di vista dei fautori dell'*Aritmetica a priori.*

NOTA. Storicamente il punto di vista sintetico nella teoria dei numeri si trova esclusivamente adottato fino a HERMANN HANKEL che nel 1867, costruì la prima teoria analitica dei numeri razionali. Ancora la possibilità e la fondatezza filosofica di una teoria analitica dei numeri irrazionali veniva oppugnata nel 1882 da PAUL DU BOIS-REYMOND, contro le idee di KARL WEIERSTRASS, rese pubblicamente note fino dal 1872. È singolare che HANKEL stesso aveva avuto occasione di pronunziarsi contro il tentativo di una trattazione analitica formale dei numeri irrazionali.

I NUMERI NEGATIVI

§ 20. **Teoria sintetica.** — Dal punto di vista sintetico il concetto di numero negativo non si presenta come estensione del numero cardinale, ma soltanto del *numero ordinale.*

Infatti i numeri negativi s'introducono, accanto ai *positivi,* a costituire la classe più estesa dei *numeri con segno* o *numeri relativi,* per designare il posto (numero d'ordine) degli oggetti di una serie che procede illimitatamente non solo da ogni elemento ad un successivo, ma anche (in senso opposto) da ogni elemento ad un precedente.

Il modo più semplice di costruire una serie siffatta, consiste nel riunire due serie

$A)$ $\quad 1,\ 2,\ 3\ ....\ n\ ....$

$A')$ $\quad 1',\ 2',\ 3'....\ n'....,$

convenendo che gli elementi di $A')$ succedano a quelli di $A)$ nell'ordine inverso all'ordine di successione 1, 2, 3...., per modo che

$1'$ preceda 1,

$2'$ » $1'$ e così via;

si ottiene per tal modo la serie

$$\ldots 4', \ 3', \ 2', \ 1', \ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \ldots$$

il cui ordine designeremo brevemente usando delle espressioni: *a destra* e *a sinistra.*

I numeri d'ordine relativi agli elementi di questa serie danno luogo alla possibilità illimitata dell'addizione e della sottrazione, l'addizione essendo definita dal punto di vista ordinale.

Per $b = 1, 2, 3 \ldots$:

$a + b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a destra (nel verso della serie);

$a - b$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b dopo a a sinistra (nel verso opposto a quello della serie);

Per $b' = 1', 2', 3' \ldots$:

$a + b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a sinistra;

$a - b'$ è il numero d'ordine dell'elemento che si trova al posto b' dopo a a destra. E ciò comunque a appartenga alla serie 1, 2, 3.... o alla 1', 2', 3'....

In conseguenza si può porre

$$1' = 1 - 1 = 0,$$
$$2' = 0 - 1,$$
$$3' = 0 - 2, \ldots,$$

mentre

$$1 = 0 + 1$$
$$2 = 0 + 2$$
$$3 = 0 + 3 \ldots.$$

Quindi, tralasciando la ripetizione del simbolo 0, *i numeri d'ordine degli elementi della serie vengono rappresentati dai numeri con segno:*

$$\ldots -3, \ -2, \ -1, \ \text{o}, \ +1, \ +2, \ +3 \ldots;$$

si ha allora:

$$+a + (+b) = +(a + b)$$
$$+a + (-b) = +(a - b) \qquad (a > b)$$

$$\text{oppure} = +(b - a) \qquad (b > a)$$
$$+a - (+b) = +a + (-b)$$
$$+a - (-b) = +(a + b)$$
$$-a + (+b) = +b + (-a)$$
$$-a + (-b) = -(a + b)$$
$$-a - (+b) = -a + (-b)$$
$$-a - (-b) = -a + (+b);$$

formule che contengono le regole ordinarie della somma algebrica.

L'addizione e la sottrazione resultano così illimitatamente possibili, e vengono soddisfatte la proprietà commutativa e associativa.

NOTA. Un punto degli sviluppi precedenti merita un'osservazione particolare: i numeri a, a' delle due serie A) A') non vengono rappresentati simmetricamente dai numeri con segno, perchè

$$a = +a,$$
$$a' = -(a - 1).$$

Questo inconveniente si verifica per es. nella numerazione degli anni secondo l'*era storica,* p. C. e a. C.; gli anni a. C. vengono designati: l'anno precedente alla nascita di Cristo col numero 1 (a. C.), l'anno precedente a questo con 2 (a. C.) ecc. Ne segue per es. che la differenza fra due avvenimenti relativi ad uno stesso mese dell'anno n p. C. e dell'anno n a. C. è $2n - 1$ (e non $2n$); così in partiçolare gli anni bisestili che si succedono (ogni 4 anni) coi numeri d'ordine 4, 8,.... per gli anni p. C., per quelli a. C. portano i numeri d'ordine 1, 5, 9....

Tale circostanza diventa specialmente pregiudizievole alla brevità dei calcoli degli astronomi, i quali appunto da ciò sono stati tratti a modificare la cronologia ordinaria della storia antecristiana, indicando con 0 l'anno che termina colla nascita di G. C., con 1 l'anno precedente ecc.: gli anni a. C.

dell'*era astronomica* portano dunque un numero d'ordine che differisce di un'unità da quello relativo all'era storica [1].

L'inconveniente testè indicato nella formazione della serie corrispondente ai numeri con segno, si elimina in generale, se in luogo delle serie A) A') comincianti dal numero 1, si riuniscono in modo analogo due serie comincianti collo 0:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ ....$$
$$0',\ 1',\ 2',\ 3'....$$

facendo però coincidere gli elementi 0, 0'. Allora

$$....\ 2' = -2,\quad 1' = -1,\quad 0 = 0',\quad 1 = +1,\quad 2 = +2.....$$

§ 21. **Estensione della moltiplicazione.** — L'addizione e la sottrazione dei numeri con segno vengono definite insieme al processo medesimo di definizione di codesti numeri. Per estendere la moltiplicazione si terrà ferma la definizione ordinale

$$ab = a_1 + a_2 + ... + a_b,$$

anche nel caso in cui (essendo sempre b positivo) a sia negativo; si porrà quindi

$$(-a)b = -ab.$$

Dopo ciò per conservare la proprietà commutativa si dovrà porre

$$a(-b) = -ab,$$

ed, affinchè questa formula sia valida anche per a negativo:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Risultano quindi soddisfatte tutte le proprietà fondamentali della moltiplicazione.

[1] Questa convenzione equivale in sostanza a considerare il numero che figura nella data dell'anno corrente non più come ordinale ma come numero cardinale = numero degli anni trascorsi da un'origine, la quale non coincide colla presunta nascita di G. C. ma cade un anno innanzi. Perciò il nostro *secolo astronomico* (a differenza di quello storico — v.i 5) è cominciato il 1° Gennaio 1900.

§ 22. **La serie dei numeri relativi caratterizzata da postulati.** — In luogo di partire da due serie

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ ....$$
$$0',\ 1',\ 2',\ 3'....$$

per costruire la serie illimitata nei due versi

$$....\ 3',\ 2',\ 1',\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,....$$

che corrisponde ai numeri con segno, è conforme al punto di vista sintetico di presupporre data quest'ultima serie (ad es. riferendosi alla serie dei possibili atti del pensiero ordinata nel tempo verso il futuro, e nel senso opposto verso il passato). Allora si è condotti a surrogare il sistema di postulati che caratterizza la serie dei numeri naturali con un *sistema di postulati che caratterizza senz'altro le serie che si possono porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi.*

A tale scopo porremo la seguente

DEFINIZIONE. Una serie si dice *quasi ben ordinata* se ogni parte di essa, costituita da elementi successivi ad un elemento qualsiasi, ammette un *primo* elemento.

Si noti che la sola differenza intercedente fra una serie quasi ben ordinata e una serie ben ordinata, è la mancanza di un primo elemento della serie totale.

TEOREMA. *Una serie* S, *in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri relativi*

$$....\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,....$$

è caratterizzata dalla condizione di essere quasi ben ordinata insieme all'inversa.

La numerazione di una tal serie dipende dalla scelta arbitraria dell'elemento che si fa corrispondere allo 0.

Sia S una serie che soddisfi alle condizioni enunciate. In S ogni elemento ha *un* successivo ed *un* precedente. Scelto in S un elemento che si faccia corrispondere a 0, designamo il suo successivo con 1, il successivo di 1 con 2 ecc.; similmente designamo il precedente di 0 con -1, il precedente di -1 con -2 ecc. Per tal modo si costruisce entro S una serie S' corrispondente ordinatamente alla serie dei numeri

relativi. Si tratta di far vedere che S' esaurisce S. Infatti, se così non fosse, ci sarebbe in S un primo elemento *dopo* S', e questo non avrebbe un precedente immediato, oppure ci sarebbe un ultimo elemento fra quelli che precedono S' e questo non avrebbe un successivo immediato.

NOTA 1ª. Per stabilire una corrispondenza ordinata fra la serie S e i numeri relativi si ha la scelta arbitraria dell'*origine* 0.

Segue da ciò che la serie S ammette infinite *trasformazioni ordinate* in sè, dove all'elemento 0 si faccia corrispondere $\pm n$; queste rispondono all'operazione di somma:

$$y = x \pm n.$$

NOTA 2ª. L'analisi dei postulati che caratterizzano la serie dei numeri relativi è stata svolta criticamente, in rapporto ad una completa teoria delle operazioni, da A. PADOA, il quale parte dalle relazioni di ordine (successivo di....) e di simmetria (rispetto ad un elemento $= 0$).

La via che qui abbiamo indicato ha il vantaggio di sostituire colla considerazione della serie inversa, secondo il concetto di PIERI, il principio d'induzione, (postulato da PADOA in una forma adattata ai numeri relativi). Questo principio diventa allora un teorema, dimostrabile per es. nella forma seguente:

Se una classe contiene il numero 0, ed è tale che insieme ad ogni numero relativo debba appartenere ad essa il suo successivo e il suo precedente, la classe C contiene tutti i numeri relativi.

§ 23. **Teorie analitiche: la teoria delle coppie.** — Nella teoria analitica dei numeri negativi si tratta in sostanza di dedurre la costruzione della serie

$$.... -3, \quad -2, \quad -1 \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,...$$

da un'unica serie data

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,.....$$

All'uopo si sono escogitate varie teorie particolari. Le più notevoli sono due: la *teoria delle coppie,* e la *teoria dei numeri come operatori.*

La teoria delle coppie, considera al posto dei numeri naturali a, b, le *coppie ordinate* (ab), ponendo per definizione:

$$(ab) = (cd)$$

se

$$a + d = b + c.$$

La relazione così definita è un'uguaglianza soddisfacente alle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, sicchè è lecito formare una *classe di coppie uguali*:

$$(ab) = (cd) = (ef)....,$$

e costruire quindi il *concetto astratto della coppia rispetto alla classe suddetta;* questo concetto astratto fornisce il *numero relativo*

$$a - b = c - d = e - f.....$$

I numeri relativi così definiti si possono *ordinare in una serie* ponendo

$$a - b > a' - b'$$

se

$$a + b' > b + a',$$

e si ottiene allora la serie:

$$.... 0 - 3, \quad 0 - 2, \quad 0 - 1, \quad 0 - 0, \quad 1 - 0, \quad 2 - 0, \quad 3 - 0,....$$

equivalente a

$$.... -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3.....$$

Le operazioni sui numeri relativi si definiscono mediante le formule:

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d)$$
$$(a - b) - (c - d) = a + d - (b + c)$$
$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc),$$

provando che:

se

$$a - b = a' - b', \quad c - d = c' - d'$$

anche

$$(a - b) \pm (c - d) = (a' - b') \pm (c' - d')$$

e

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c' - d');$$

per il che basta verificare che
se

$$a + b' = a' + b$$

e

$$c + d' = c' + d;$$

si deduce

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d,$$

$$a + d + b' + c' = a' + d' + b + c,$$

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc;$$

l'ultima formula si dimostra passando attraverso alla

$$(a - b)(c - d) = (a' - b')(c - d),$$

che importa

$$(ac - bc) + (bd - ad) = (a'c - b'c) + (b'd - a'd),$$

ossia

$$ac + b'c = bc + a'c \quad (= (a + b')c = (a' + b)c)$$

$$bd + a'd = b'd + ad \quad (= (b + a')d = (b' + a)d)\{.$$

Si verifica quindi che le operazioni sopra definite soddisfano alle proprietà fondamentali delle operazioni sui numeri naturali.

§ 24. **I numeri come operatori.** — La teoria dei numeri-operatori, considera al posto dei numeri d'ordine

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots.\ a,\ldots.$$

le *operazioni* di somma e di sottrazione su di essi. Il sommare a dà luogo ad una operazione π_a che trasforma ordinatamente la serie sopra indicata nella

$$a,\ a+1,\ a+2\ldots.;$$

l'operazione inversa può essere designata con π_a^{-1}. Le operazioni π_a e π_a^{-1} danno luogo alla serie illimitata nei due versi

$$\ldots.\ \pi_a^{-1}\ldots.,\ \pi_2^{-1},\ \pi_1^{-1},\ \pi_0 = \pi_0^{-1},\ \pi_1,\ \pi_2,\ldots.\ \pi_a\ldots.$$

Ora l'operazione π_a o π_a^{-1}, è definita dalla corrispondenza di due elementi omologhi qualsiansi x, x', essendo

$$x' = x + a$$

o risp.

$$x' = x - a \qquad (\text{per } x \geq a);$$

infatti l'operazione che fa corrispondere ad x, $x + a$, fa anche corrispondere ad y, $y + a$ ecc. Più semplicemente le operazioni π_a si possono designare coi numeri $+a$ e le inverse coi numeri $-a$. Si ottengono per tal modo i numeri con segno come simboli operativi.

Allora la *somma di due numeri con segno* si definisce semplicemente come *prodotto delle corrispondenti operazioni* π o π^{-1}; si ha così:

$$+a + (+b) = \quad \pi_b\, \pi_a = \pi_{a+b} = +(a+b)$$

$$+a + (-b) = \pi_b^{-1}\, \pi_a = \begin{cases} \pi_{a-b} = +(a-b)\ (a > b) \\ \text{o} \\ \pi_{b-a}^{-1} = -(b-a)\ (b > a), \end{cases}$$

e analogamente tutte le altre formule che esprimono le regole ordinarie della somma algebrica.

Si definisce poi la moltiplicazione come al § 21, e tutte le proprietà fondamentali delle operazioni sui numeri naturali si estendono quindi alle operazioni sui numeri-operatori.

G. PEANO nella sua Aritmetica svolge la teoria dei numeri operatori.

NOTIZIE STORICHE. I numeri negativi non compaiono che molto tardi nella storia dell'Aritmetica. I Greci non ne fecero uso. Le prime traccie di un calcolo con numeri negativi si trovano nel matematico indiano BHĀSKARA (nato nel 1114), che distingue il valor positivo e negativo delle radici quadrate. Osservazioni simili si trovano presso gli Arabi. I numeri negativi compaiono quindi nei matematici vissuti alla fine del secolo XV e nel secolo XVI (PACIOLI, CARDANO, STIEFEL); ma la repugnanza che ancora si manifesta riguardo a tali numeri, considerati come « aestimationes falsae o fictae », o come « numeri surdi », tiene indubbiamente all'avere avuto in vista il concetto del numero cardinale (assoluto).

Un uso più libero dei numeri negativi ricorre in TH. HARRIOT (1600), ma soltanto con DESCARTES i numeri negativi vengono definitivamente adottati nell'Aritmetica accanto ai positivi, come numeri ordinali o ascisse dei punti di una retta.

III.

I NUMERI FRATTI

§ 25. **Teorie sintetiche: i numeri come rapporti di grandezze commensurabili.** — I numeri fratti $\frac{a}{b}$ si possono far nascere da un'estensione dei numeri cardinali o dei numeri ordinali: soltanto nel primo caso occorre limitarsi ai numeri assoluti che s'identificano coi positivi.

L'osservazione che dà origine ai numeri fratti cardinali è la seguente: nella costruzione dei numeri cardinali

$$1,\quad 2=1+1,\quad 3=1+1+1....$$

si può supporre che l'oggetto designato coll'unità sia esso stesso una classe e possa quindi considerarsi come una somma di *b unità di 2° ordine:*

$$1=1_2+1_2+....+1_2.$$

Allora il numero $\frac{a}{b}$ designa semplicemente la somma di a unità di 2° ordine.

In realtà occorre considerare accanto alle frazioni $\frac{a}{b}$ anche frazioni come $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$ ecc. e ciò illimitatamente, sicchè l'ipotesi che l'*unità primitiva sia una somma di unità inferiori,* deve essere modificata progressivamente in corrispondenza a nuovi denominatori. Se infine si vuole esprimere il contenuto dell'ipotesi più generale che corrisponde all'integrità dei numeri fratti, si è condotti a determinare l'oggetto unità della classe primitiva come una *grandezza divisibile.* Da questo punto di vista *i numeri fratti s'introducono come rapporti in un sistema di grandezze commensurabili.*

Occorre perciò postulare le relazioni fondamentali di *uguaglianza* e di *somma* che caratterizzano, nel modo più generale, il concetto di un tale sistema.

Si abbia un sistema di enti $(A, B, C....)$ i quali si trovino distribuiti in classi per mezzo di una relazione riflessiva simmetrica e transitiva (*uguaglianza*), enti uguali appartenendo ad una medesima classe. Il concetto astratto dell'ente, rispetto all'uguaglianza considerata, costituisce una *grandezza* di un *sistema di grandezze commensurabili,* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Esiste un'operazione univoca, la *somma,* che a due grandezze A, B fa corrispondere *una* grandezza $A+B$ dello stesso sistema.

Quindi data una grandezza A vi è nel sistema una grandezza (multipla secondo n)

$$nA=A+A+....+A_n.$$

2) Date due grandezze A, B avviene sempre uno e uno solo fra i tre casi seguenti:

$$A=B,$$
$$A=B+C\ (A>B),$$
$$B=A+C\ (A<B).$$

3) La somma gode delle proprietà commutativa e associativa:

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)\ (=A+B+C).$$

4) Essendo n un qualsiasi numero intero e positivo ed A una grandezza del sistema, esiste nel sistema stesso *una* grandezza

$$B=\frac{A}{n},$$

tale che

$$nB=A.$$

(*Divisibilità* delle grandezze).

5) Date, nel sistema, due grandezze qualsiasi A, B esiste sempre nel sistema una terza grandezza C di cui entrambe sono multiple:

$$A=nC,\quad B=mC.$$

(Naturalmente A e B sono multiple anche di $\frac{C}{p}$. Si dimostra che il noto processo euclideo delle divisioni successive conduce ad una grandezza C che è massima fra tutte quelle di cui

A, B sono multiple, ed ogni altra grandezza di cui A e B sieno multiple risulta allora summultipla di C).

Si noti che per il postulato 1), se

$$A = A', \quad B = B'$$

$$A + B = A' + B'$$

ed

$$nA = nA';$$

per il postulato 4), se

$$A = A'$$

anche

$$\frac{A}{n} = \frac{A'}{n}.$$

In base ai suddetti postulati, assunta nel sistema una grandezza-unità A, rappresentata da 1, si definirà *il rapporto di* B *ad* A come il *numero fratto* $\frac{m}{n}$, essendo

$$A = nC, \quad B = mC, \quad \left(B = \frac{m}{n} A\right).$$

Si dirà anche che $\frac{m}{n}$ è la *misura* di B rispetto ad A.

Per definizione, se anche

$$A = qD, \quad B = pD,$$

si ha

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q};$$

in tal caso, ponendo

$$C = rE, \quad D = sE,$$

si trova

$$A = nrE = qsE$$

$$B = mrE = psE,$$

e perciò

$$nr = qs, \quad mr = ps,$$

quindi

$$qmrs = pnrs,$$

e

$$qm = pn.$$

Viceversa se

$$qm = pn$$

$$A = nC, \quad B = mC$$

$$A = qD, \quad B' = pD,$$

posto, come innanzi,

$$C = rE, \quad D = sE$$

si deduce (post. 6),

$$A = nrE, \quad A = qsE,$$

quindi (post. 4)

$$nr = qs,$$

ma poichè

$$qmrs = pnrs$$

segue

$$mr = ps$$

$$B = mrE, \quad B' = psE$$

$$B = B',$$

cioè, per definizione,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Segue in particolare che

$$\frac{m}{n} = \frac{mr}{nr}.$$

Quando il numeratore è multiplo del denominatore i numeri fratti si riducono al tipo $\frac{m}{1}$, e corrispondono ordinatamente agli interi m, sicchè si suol porre

$$\frac{m}{1} = m.$$

Ora si possono definire le operazioni sui numeri fratti

1) La *somma* di due numeri fratti

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$$

corrisponde alla somma delle due grandezze da essi misurate.

Poniamo

$$B = \frac{m}{n} A, \quad C = \frac{p}{q} A,$$

$$B + C = D = \frac{r}{s} A,$$

sarà

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q};$$

ma

$$\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq},\quad \frac{p}{q}=\frac{np}{nq},$$

sicchè, posto

$$\frac{A}{nq}=E,$$

$$B=mqE,\quad C=npE$$

$$D=B+C=(mq+np)E,$$

quindi

$$\frac{r}{s}=\frac{mq+np}{nq}.$$

2) Per definire il *prodotto* di due numeri fratti $\frac{m}{n}\frac{p}{q}$, si è condotti ad estendere la definizione del prodotto di due numeri cardinali (§ 14), mercè le considerazioni che seguono.

Consideriamo le *coppie* non ordinate ($(BC)=(CB)$) formate colle grandezze del nostro sistema, si tratta di vedere come si possono definire per tali coppie la *somma* e una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva di *uguaglianza*, in guisa che le coppie suddette diano luogo ad un sistema di grandezze soddisfacenti ai postulati 1)....5).

Porremo a tale scopo:

$$(B,\ C)+(B,\ D)=(B,\ C+D),$$

quindi

$$(B,\ C)=\left(nB,\ \frac{C}{n}\right),$$

e più in generale

$$(B,\ C)=\left(n\frac{B}{m},\ m\frac{C}{n}\right).$$

Ciò posto è facile verificare che il concetto astratto della coppia $(B,\ C)$ (in ordine all'uguaglianza di coppie) dà luogo ad una nuova grandezza appartenente ad un sistema per cui sono soddisfatte le condizioni 1)....5). Se per es. le grandezze date sono « segmenti », le nuove grandezze costruite sono « aree di rettangoli ».

Ora se

$$B=\frac{m}{n}A,\quad C=\frac{p}{q}A$$

si definirà il *prodotto* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ *come il rapporto della grandezza* (BC) *ad* (AA).

Ma

$$(B,\ C)=\left(nB,\ \frac{C}{n}\right)=\left(mA,\ \frac{p}{nq}A\right)=\frac{1}{nq}(mA,\ pA)=$$

$$=\frac{1}{nq}(mpA,\ A)=\frac{mp}{nq}(AA),$$

quindi il prodotto

$$\frac{m}{n}\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

È chiaro che questa definizione del prodotto è la diretta estensione di quella data pei numeri (interi) cardinali.

Anche la formula

$$ab=a+a+\ldots.+a_b,$$

si estende ora osservando che il rapporto di (BC) a (BA) uguaglia il rapporto di C ad A, e il rapporto di (BA) ad (AA) uguaglia il rapporto di B ad A, quindi: *il prodotto* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ *è la misura rispetto ad* A *di una grandezza* $\mathrm{D}=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\mathrm{B}$, *la cui misura rispetto a* $\mathrm{B}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\mathrm{A}$ *è* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$.

Quest'ultima definizione del prodotto lascia subito scorgere come si effettui la *divisione* = operazione inversa della moltiplicazione:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}.$$

§ 26. **Numeri razionali ordinali.** — I numeri fratti, introdotti come rapporti di grandezze commensurabili, si lasciano *ordinare in una serie,* secondo l'ordine delle grandezze crescenti di cui esprimono il rapporto all'unità; si ha così

$$\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$$

se

$$mq>np$$

$$\left(\frac{m}{n}=\frac{p}{q}+\frac{r}{s},\quad \frac{r}{s}=\frac{mq-np}{nq}\right).$$

Da questo punto di vista i numeri fratti appariscono come *numeri d'ordine degli elementi di una serie* e sono quindi suscettibili di estensione quanto al *segno*.

Per introdurre i numeri fratti come numeri ordinali bisogna caratterizzare la serie da essi formata. Ed è subito da notare che *questa serie non è più bene ordinata,* che dopo un elemento qualsiasi $\frac{m}{n}$ non vi è più un successivo immediato, come non vi è *un* precedente.

Nondimeno la serie dei numeri fratti si lascia formare mediante successive costruzioni di serie ben ordinate, secondo ci proponiamo di esporre.

Riferiamoci per semplicità ai numeri positivi e partiamo quindi dalla serie S_1 dei numeri naturali.

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n,\ldots.$$

Consideriamo le trasformazioni della serie S_1 che nascono *per moltiplicazione:*

$$y = nx.$$

Una trasformazione di questo tipo cambia S_1 nella serie S_n:

$$0,\ n,\ 2n\ldots,$$

la quale è ben ordinata come S_1; il rapporto fra S_1 e S_n si può esprimere dicendo che S_1 contiene S_n, e che fra due elementi consecutivi di S_n vi sono $n-1$ elementi di S_1.

Ora supponiamo che sia data una *regola per cui si possano inserire* $n-1$ *elementi intermedi fra due qualsiansi elementi consecutivi* m *ed* $m+1$ *di* S_1; questa costruzione dà una serie $S_{\frac{1}{n}}$ la quale può dirsi ottenuta da S_1 mercè una *divisione* per n, poichè $S_{\frac{1}{n}}$ moltiplicata per n si trasforma in S_1.

Supponiamo che:

1) dato un qualsiasi numero $n = 2, 3,\ldots,$ sia possibile la divisione per n della serie S_1;

2) la divisione di S_1 per nm equivalga alla divisione successiva di S_1 per n e di $S_{\frac{1}{n}}$ per m.

L'insieme di tutte le serie ottenute in tal modo colla divisione della serie ***principale*** S_1 *costituisce una serie* S *ordinata come quella dei numeri fratti;* l'elemento m^{mo} della serie $S_{\frac{1}{n}}$ corrisponde ad $\frac{m}{n}$, e si ritrova nella serie $S_{\frac{1}{nr}}$ colla designazione $\frac{mn}{nr}$.

La serie S si può anche concepire come *limite della serie ben ordinata* $S_{1, 2, 3,\ldots n}$, al crescere indefinito del numero n.

La costruzione sopra indicata si può ripetere prendendo come serie principale S_1 la serie quasi bene ordinata dei numeri interi relativi; si ottiene così la serie fondamentale che corrisponde ordinatamente ai numeri fratti positivi e negativi (numeri *razionali*); questa serie si potrà designare brevemente col nome di *serie razionale.*

Come esempio concreto della costruzione precedente si può addurre la costruzione di una serie razionale di punti sopra la retta, effettuabile in diversi modi mediante semplici operazioni geometriche.

La più semplice costruzione si ottiene considerando nel piano la rete determinata da due sistemi di rette parallele, che sono rappresentati — in coordinate cartesiane — dalle equazioni:

$$x = m,\quad y = n \quad \begin{pmatrix} m = 0,\ 1,\ 2\ldots. \text{ o } = -1, -2\ldots. \\ n = 0,\ 1,\ 2\ldots. \end{pmatrix}.$$

I vertici della rete corrispondono alle coppie di numeri interi n, m. Proiettiamo la serie dei vertici della rete appartenenti alla retta $y = n\,(>0)$ dal punto $(0, -1)$ sopra la retta $y = 0$; si ottiene allora su questa retta la serie $S_{\frac{1}{n+1}}$, che si estende a destra e a sinistra dello zero.

La serie razionale così costruita corrisponde a quella stessa che viene determinata comparando all'unità le grandezze dei segmenti ad essa commensurabili, aventi come origine 0.

Anche a prescindere da questa particolare determinazione metrica si può costruire sulla retta una serie razionale mediante successive costruzioni di quarti armonici a partire da tre punti dati, ciò che dà luogo alle così dette *coordinate proiettive.*

Ritorniamo ora alla considerazione generale di una serie razionale S costruita a partire da una serie principale quasi ben ordinata S_1, e vediamo di estendere in rapporto ad S la

definizione ordinale della somma e del prodotto di due numeri interi.

Osserviamo anzitutto che alla serie fondamentale S, appartengono infinite serie quasi ben ordinate, *generatrici* di S, le quali danno per divisione successiva la stessa serie razionale, per modo che ciascuna di esse può essere assunta in luogo di S_1 come *serie principale*. Tali sono in primo luogo le serie S_n e $S_{\frac{1}{n}}$ ottenute dalla moltiplicazione e divisione di S_1, in secondo luogo tutte le serie da cui si ottiene per divisione una di queste.

La determinazione più generale di una serie generatrice entro la serie razionale S, dipende dalla scelta arbitraria di due elementi O, U, susseguentisi in S_1, assunti come 0, 1. Se, rispetto ad una numerazione di S (e quindi alla scelta di una serie principale S_1), O, U hanno rispettivamente i numeri d'ordine $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}\left(\frac{c}{d}>\frac{a}{b}\right)$, vi è *una* serie generatrice di S in cui U è *il successivo* di O, tale serie è contenuta in $S_{\frac{1}{bd}}$, e divisa per $bc-ad$ dà appunto questa $S_{\frac{1}{bd}}$.

L'osservazione precedente si può anche esprimere dicendo che *la numerazione degli elementi di una serie razionale* S *dipende dalla scelta arbitraria degli elementi* 0, 1.

Ciò posto si supponga data una prima numerazione della serie razionale S; l'addizione e la moltiplicazione dei numeri razionali si lascia definire, in rapporto alla serie stessa, come segue:

1) Si cambi l'origine 0 nell'elemento $\frac{a}{b}$, trasportando contemporaneamente l'elemento $1=\frac{b}{b}$ in $\frac{a+b}{b}$; con ciò si dà origine ad una nuova numerazione di S e quindi ad una *trasformazione ordinata* di S in sè stessa, dove si prende come serie principale quella $S_{\frac{1}{b}}$ che contiene 0 e $\frac{a}{b}$. In questa trasformazione l'elemento $\frac{c}{d}$ viene trasportato in un nuovo elemento che si *definisce come somma*

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ che contiene i tre elementi 0, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si trova

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{bc}{bd}+\frac{ad}{bd}=\frac{bc+ad}{bd}.$$

2) Si lasci ferma l'origine 0 e si cambi l'elemento 1 in $\frac{a}{b}$; con ciò si dà luogo ad una trasformazione ordinata della serie S in sè stessa: l'elemento che in questa trasformazione corrisponde a $\frac{c}{d}$ si *definisce come prodotto* $\frac{c}{d}\frac{a}{b}$. Considerando la serie $S_{\frac{1}{bd}}$ a cui appartengono entrambi gli elementi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ si trova

$$\frac{c}{d}\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}.$$

Così *la somma e il prodotto risultano definiti nella serie razionale dalla doppia arbitrarietà che appartiene alla numerazione ordinata della serie, in rapporto alla scelta degli elementi* 0 *e* 1.

Queste definizioni inerenti alle trasformazioni ordinate della serie in sè stessa, in rapporto al cambiamento dell'origine 0 e dell'elemento unità, hanno il vantaggio di condurre insieme all'addizione e alla sua operazione inversa « sottrazione », alla moltiplicazione e alla sua operazione inversa divisione.

NOTA. Il cambiamento più generale degli elementi 0, 1 conduce alla trasformazione di S rappresentata da

$$y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{d}.$$

La serie S ammette altre trasformazioni *ordinate* in se stesse (per es.:

$$y=x \text{ per } x\leq 1,\quad y=2x \text{ per } x>1);$$

ma le precedenti trasformazioni si distiguono da queste per la proprietà di cambiare ogni serie generatrice di S in una serie generatrice (due serie generatrici di S dando luogo come

abbiam detto, per divisione, ad una medesima serie, in cui è solo determinata diversamente l'origine).

§ 27. **Postulati che caratterizzano la serie razionale.** — Cerchiamo di approfondire l'analisi delle proprietà che definiscono una serie razionale S.

Il concetto della serie razionale è definito come concetto astratto in rapporto al gruppo delle trasformazioni $y = \alpha x + \beta$ dalle seguenti proprietà:

1) È dato un ordine s, degli elementi di S.

2) Dati due elementi A, B di S, susseguentisi in s, viene determinato *un* elemento C che succede a B in s, e che diremo *il successivo* (*di rango* 1) *dopo* A, B; quindi viene determinato *un* elemento C successivo dopo B, C o successivo *di rango* 2 dopo A, B; e così di seguito.

3) Esiste un elemento P (*il precedente* ad A, B) tale che B è il successivo dopo P, A.

4) Esiste *un* elemento X, compreso fra A, B in s, tale che B è il successivo di rango $n\,(=1, 2, 3....)$ dopo A, X (X si dirà *il medio di rango n* fra A, B);

5) Dati tre elementi A, B, C, susseguentisi in s, si può sempre determinare (in diversi modi) un elemento Y, compreso fra A e B, per modo che B e C appartengano alla serie dei successivi (di rango $n = 1, 2,,...$) dopo A, Y; oppure

5′) a partire da due elementi qualsiansi della serie S, eseguendo ripetutamente la costruzione del successivo, del precedente e del medio di rango $n = 1, 2,....,$ in rapporto a tutte le possibili coppie di elementi dati e costruiti, si ottengono *tutti* gli elementi di S.

Questi postulati esprimono i fatti fondamentali inerenti alla generazione della serie razionale S, mercè la divisione successiva di una serie principale quasi bene ordinata.

Sono serie generatrici di S quelle costituite dai successivi e dai precedenti (di rango $n = 1, 2....$) di due elementi dati. Ognuna di queste serie può essere presa come serie principale corrispondente alla serie dei numeri interi relativi; la numerazione di essa viene fissata tosto che si scelgano due elementi successivi come 0, 1, e dopo ciò resta anche fissata la corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri razionali.

Secondo la definizione che risulta dai postulati precedenti, il concetto di serie razionale implica, non soltanto un

ordine di questa, ma anche un *criterio associativo* per cui ad ogni coppia di elementi viene associato *un* successivo; si tratta di una vera generalizzazione del concetto di serie ben ordinata o quasi ben ordinata.

Ora supponiamo che sia data una serie ordinata di elementi (S), e cerchiamo di determinare le condizioni perchè fra gli elementi di questa possa stabilirsi un criterio associativo, in guisa da dare origine ad una serie razionale, in altre parole cerchiamo le condizioni perchè possa porsi una corrispondenza ordinata fra S e la serie dei numeri razionali.

A tale domanda rispondono i seguenti teoremi:

La classe dei numeri razionali è numerabile.

Si considerino anzitutto le frazioni positive $\frac{a}{b}$ ridotte al minimo denominatore. Possiamo ordinarle in una serie, ponendo

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b < c + d,$$

e

$$\frac{a}{b} \text{ prima di } \frac{c}{d}$$

se

$$a + b = c + d$$

$$a < c.$$

In tal modo si ottiene una serie ben ordinata.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \ldots.$$

che contiene tutte le frazioni positive ed i cui termini corrispondono a un numero d'ordine progressivo

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.....$$

Similmente si possono far corrispondere le frazioni negative ai numeri

$$-1,\ -2,\ -3.....$$

Con ciò gli elementi della classe data (numeri razionali) vengono fatti corrispondere ai numeri relativi

$$....-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,....;$$

ma la serie di questi si può numerare, designando

$$0 \text{ con } 1,$$
$$n \text{ con } 2n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$-n \text{ con } 2n+1.$$

Quindi gli elementi della classe data vengono fatti corrispondere ai numeri naturali 1, 2, 3.... c. d. d.

Affinchè una serie S *possa porsi in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali è necessario e sufficiente che:*

1) *l'insieme degli elementi di* S (*a prescindere dall'ordine*) *costituisca una classe numerabile;*

2) *l'ordine di* S *sia tale che non vi sia nè primo nè ultimo elemento e che fra due elementi qualsiansi vi sieno sempre elementi intermedî.*

Nelle ipotesi enunciate gli elementi della classe S si trovano disposti in due ordini diversi: in un ordine s appartenente alla serie S, e in un ordine α che viene stabilito in virtù della corrispondenza fra gli elementi di S e i numeri naturali. Ciò posto si designino rispettivamente con 0, 1 gli elementi che in α portano i numeri di ordine 1, 2; fra gli elementi che succedono a questi in s si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in α e si designerà con 2; quindi fra gli elementi che succedono a questo in s si considererà quello che ha il più piccolo numero di ordine in α e si designerà con 3; e così di seguito. Poi fra gli elementi che precedono in s il primo designato con 0, si considererà quello che ha il più piccolo numero d'ordine in α, designandolo con -1. Così seguitando si è costruita in S una serie principale

$$\ldots -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots$$

Per determinare la numerazione degli elementi di S che, rispetto ad s sono compresi fra due successivi m, $m+1$, della anzidetta serie principale, si procederà come segue:

Si considererà l'elemento compreso fra m, $m+1$ nell'ordine che porta il più piccolo numero d'ordine in α e si designerà con $m+\frac{1}{2}$; si considererà l'elemento compreso fra m, $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in α, e si

designerà con $m+\frac{1}{2\cdot 3}$; quindi l'elemento compreso fra $m+\frac{1}{2\cdot 3}$ ed $m+\frac{1}{2}$ che porta il più piccolo numero d'ordine in α e si designerà con $m+\frac{2}{2\cdot 3}=m+\frac{1}{3}$, l'elemento fra $m+\frac{1}{2}$ e $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in α e si designerà con $m+\frac{4}{2\cdot 3}$, l'elemento fra questo ed $m+1$ che porta il più piccolo numero d'ordine in α e si designerà con $m+\frac{5}{2\cdot 3}$. È ormai chiara la legge con cui si determineranno successivamente gli elementi che verranno designati con $m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$, $m+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}, \ldots m+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}$ e quindi $m+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ ecc.

Resta da provare che la serie razionale così generata in S esaurisce tutti gli elementi di S, cioè che ogni elemento di S trova posto nella numerazione definita innanzi. Anzitutto si consideri un qualsiasi elemento P di S e si faccia vedere che P, ove non appartenga alla serie principale, trovasi compreso fra due elementi m e $m+1$ di questa. A tal fine, posto che P succeda a 0 (o come diremo brevemente che sia a destra di 0), basterà far vedere che esiste qualche elemento della serie principale suddetta, a destra di P. Ora, se P porta in α il numero d'ordine n, ogni elemento della serie principale che porti in α un numero d'ordine $> n$ trovasi a destra di P.

Posto dunque che P sia compreso fra i due elementi della serie principale di S, designati con m, $m+1$, si tratta di far vedere che la serie dei medi inseriti fra questi contiene P. Ma ciò si dimostra per assurdo; infatti se la suddetta serie dei medi non contenesse P, si troverebbero infiniti elementi di essa, a destra e a sinistra di P, che dovrebbero portare in α un numero d'ordine $< n$, con ciò il teorema è dimostrato.

§ 28. **Teorie analitiche: teoria delle coppie.** — Gli sviluppi precedenti conducono a fondare una teoria analitica dei numeri fratti, analoga a quella dei numeri negativi (n. 23).

Consideriamo le coppie ordinate

$$(ab), \quad (cd), \ldots,$$

e poniamo la *relazione d'uguaglianza*

$$(ab) = (cd)$$

se $$ad = bc;$$

questa è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definiamo il *numero fratto* $\frac{a}{b}$ come *concetto astratto* della coppia (ab) in ordine all'uguaglianza definita innanzi. Sarà in ispecie

$$\frac{a}{b} = \frac{ar}{br}.$$

Quindi definiamo la *somma* e il *prodotto* di due numeri fratti colle formule

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Affinchè queste definizioni sieno legittime occorre provare che:

se $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad (a'b = ab')$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \qquad (c'd = cd'),$$

anche $$\frac{ad + bc}{bc} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

e $$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'},$$

cioè $$b'd'(ad + bc) = bd(a'd' + b'c')$$

e $$acb'd' = a'c'bd.$$

La seconda uguaglianza è evidente.

Per dimostrare la prima si procederà per gradi mostrando che

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d}$$

cioè che $$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd + b'c}{b'd},$$

il che importa

$$b'd(ad + bc) = bd(a'd + b'c)$$

$$ab'd^2 + cdbb' = a'bd^2 + cdbb'$$

$$ab'd^2 = a'bd^2,$$

$$ab' = a'b.$$

Ora si verificheranno le proprietà fondamentali delle operazioni definite innanzi: le proprietà commutativa e associativa della somma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right);$$

e le proprietà commutativa, associativa e distributiva del prodotto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b},$$

$$\left(\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\,\frac{e}{f}\right),$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \left(\frac{ad + bc}{bd}\right)\frac{e}{f} = \frac{ade + bce}{bdf} =$$

$$= \frac{ade}{bdf} + \frac{bce}{bdf} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

Inoltre si noterà che nel campo dei nostri numeri fratti, la *divisione* — operazione inversa della moltiplicazione — è sempre possibile:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

perchè

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{ad}{bc} = \frac{adc}{bdc} = \frac{a}{b}.$$

Infine il sistema dei numeri fratti che abbiamo definito contiene i numeri $\frac{a}{1}$, la cui serie corrisponde ordinatamente a quella dei numeri a (interi, positivi e negativi), in guisa che ad $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}$ e $\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}$ corrisponde rispettivamente $a+b$ e ab. Perciò $\frac{a}{1}$ si può identificare ad a (conforme al senso di $a:1$), e resta provato — senza far appello a giudizii sintetici (postulati) — che il sistema dei numeri interi si può estendere, conservando le proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche, per modo che la divisione riesca sempre possibile.

§ 29. **Numeri fratti operatori.** — Si può ottenere lo stesso scopo considerando i numeri $\frac{a}{b}$ come *operazioni* da effettuarsi sopra ogni numero x tale che xa sia divisibile per b:

$$x\frac{a}{b}=xa:b.$$

Si noterà che se $$x\frac{a}{b}=x\frac{c}{d},$$

anche $$y\frac{a}{b}=y\frac{c}{d}$$

purchè le operazioni indicate sieno possibili; in tal caso

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Ciò importa $$xad=xbc$$

e quindi $$ad=bc.$$

Ora s'introducono la *somma* e il *prodotto* dei numeri fratti mercè le definizioni:

$$x\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}$$

$$x\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right)=\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d},$$

(supposto sempre che le operazioni indicate sieno possibili).

Dalla prima formula si ricava:

$$x\frac{a}{b}+x\frac{c}{d}=x\frac{ad}{bd}+x\frac{bc}{bd}=x\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

E dalla seconda:

$$\left(x\frac{a}{b}\right)\frac{c}{d}=x\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

La teoria si riduce dunque a quella delle coppie, su cui ha il vantaggio di giustificare le definizioni di somma e di prodotto. Di più resta qui inutile dimostrare che per

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\quad\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'},$$

giacchè le uguaglianze

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\quad\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$$

(che si traducono in

$$ab'=a'b,\quad cd'=c'd),$$

denotano l'identità delle operazioni

$$x\frac{a}{b}\text{ e }x\frac{a'}{b'},\qquad x\frac{c}{d}\text{ e }x\frac{c'}{d'}.$$

PARTE TERZA

I NUMERI IRRAZIONALI

I.

NUMERI E GRANDEZZE

§ 30. **Introduzione.** — I numeri irrazionali s'introducono nell'Aritmetica:

1) da un punto di vista sintetico, per misurare grandezze (come quelle dei segmenti) che possono essere incommensurabili rispetto all'unità scelta nel sistema, o per rappresentare con un numero d'ordine i punti di una serie continua — come la retta — che non è esaurita dalla costruzione di un sistema di punti corrispondenti ai numeri fratti;

2) da un punto di vista analitico, per dare un significato ad alcune operazioni fuori delle condizioni in cui esse riescono possibili. Le operazioni a cui qui si allude sono di due specie:

a) l'estrazione di radice, il logaritmo ecc. che conducono a *classi ben definite di numeri irrazionali* e non mai alla totalità di essi, per es. la possibilità illimitata dell'operazione $\sqrt{\ }$ portante su numeri positivi, richiede solo l'introduzione di numeri corrispondenti ai punti che si costruiscono sulla retta *colla riga e col compasso* a partire da 0, 1 — (cfr. Vol. II);

b) i *processi infiniti: serie, frazioni continue* ecc. nelle condizioni di *convergenza* che assicurano la *possibilità logica* dei simboli corrispondenti.

Ora si deve notare che le operazioni *a*) si riducono anch'esse — mercè il calcolo approssimato — a processi infiniti. Perciò la teoria analitica degli irrazionali quale si sviluppa di solito corrispondentemente alle operazioni *b*) dà luogo alla *classe di numeri più estesa.* Ma ciò non toglie interesse all'indirizzo di ricerca in cui si studino successivamente i *più piccoli campi di numeri* (razionali e irrazionali) dove sono possibili certe operazioni.

A tale indirizzo appartengono alcune ricerche algebriche o aritmetiche menzionate negli Articoli del Vol. II.

Nel seguito di questo Articolo ci occuperemo della *teoria generale dei numeri irrazionali* che ha per iscopo di definirne la totalità.

NOTA STORICA. La teoria cardinale dei numeri irrazionali come rapporti di grandezze incommensurabili trovasi sviluppata implicitamente sotto forma geometrica nel libro V di EUCLIDE da cui, secondo DUHAMEL e STOLZ, si può trarre una vera teoria di codesti numeri.

Si fa risalire a PITAGORA (500 a. C.) la scoperta che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili; ma soltanto dopo la critica degli ELEATI e segnatamente di ZENONE, codesta scoperta fu posta nella sua vera luce. Da quel momento comincia l'elaborazione di una teoria generale delle grandezze che viene costruita da EUDOSSO di Cnido, teoria esposta appunto nel libro V di EUCLIDE, la quale nel pensiero dei Greci costituiva una vera estensione dell'Aritmetica dei numeri interi e fratti. Perciò l'affermazione esplicita di EUCLIDE che le grandezze incommensurabili non si lasciano confrontare come i numeri, non ci autorizza affatto a ritenere il punto di vista di EUCLIDE come più arretrato del punto di vista moderno, tranne perciò che concerne due ordini di progresso:

1) la designazione dei rapporti coi simboli dell'algebra;

2) il riconoscimento del postulato della continuità della retta e quindi la considerazione, almeno virtuale, del più ampio sistema costituito da tutti i possibili numeri irrazionali.

Gli Aritmetici e gli Algebristi del Medio Evo e del Rinascimento considerarono i rapporti di grandezze incommensurabili come « numeri ficti » o « numeri surdi »; così per es. LEONARDO FIBONACCI (liber abaci, 1202). MICHELE STIEFEL nella sua « Aritmetica integra » (Norimberga, 1544), in rapporto al libro X di EUCLIDE, parla espressamente di « numeri irrationales » esprimendo anche la veduta che questi numeri occupano un posto determinato nella serie ordinata dei numeri, proprio come i numeri razionali. Così la prima considerazione esplicita degli irrazionali come numeri, fa appello al concetto ordinale.

La designazione del rapporto fra due segmenti con una *semplice lettera,* su cui si calcola *come sui numeri,* compare con DESCARTES; e nella « Arithmetica universalis » di NEWTON (1707) si trova la proposizione che ogni rapporto corrisponde ad un numero, posta come *definizione del numero.*

Gli sviluppi critici moderni cominciano da una parte colla teoria analitica di K. WEIERSTRASS resa nota nel 1872 (1), dall'altra col riconoscimento del postulato della continuità della retta dovuto a G. CANTOR (2) e a R. DEDEKIND (3).

Ritornando alla teoria di EUCLIDE, diremo che questi costruisce la dottrina generale delle grandezze raccogliendo i principii comuni che valgono nel confronto di diverse specie di grandezze geometriche: segmenti, aree, volumi, angoli e archi di cerchio. In questa dottrina, puramente *ipotetica*, non compare alcun *postulato esistenziale* relativo alla divisibilità delle grandezze o alla determinazione di una quarta proporzionale dopo tre grandezze date ecc.; ma sempre l'esistenza di grandezze soddisfacenti a date condizioni viene dimostrata, per ciascuna specie di grandezze, mediante *costruzioni geometriche*.

Si ammettano, accanto alla riga e al compasso usati da EUCLIDE, anche altri istrumenti costruttivi di ordine superiore, si riconosce allora in ciascuna delle classi considerate da EUCLIDE, l'esistenza di grandezze soddisfacenti a condizioni cui i mezzi euclidei non valgono a soddisfare.

Il punto di vista moderno oltrepassando i limiti segnati da ogni ordine particolare di costruzioni, pone alla base della teoria delle grandezze un postulato esistenziale di continuità, da cui si deducono in ispecie la divisibilità delle grandezze e l'esistenza della quarta proporzionale (cfr. Art. 7), e che, come vedremo, corrisponde alla considerazione della classe di grandezze più estesa in cui può essere contenuto un sistema soddisfacente ai postulati euclidei.

Con questa modificazione indicheremo lo sviluppo della teoria dei rapporti di EUCLIDE, considerata come una teoria generale dei numeri reali positivi.

§ 31. **I numeri come rapporti di grandezze.** — Riassumiamo anzitutto i postulati che caratterizzano, secondo la comune intuizione, un sistema generale di grandezze Γ.

Le *grandezze* di un sistema Γ sono definite per astrazione da una classe di enti in cui è posta una relazione di eguaglianza (riflessiva, simmetrica e transitiva). Si hanno i seguenti postulati:

1) date due grandezze A, B, viene determinata in Γ una terza grandezza $A+B$, *somma* di quelle;

2) date due grandezze A, B, disuguali, una ed una sola di queste è *maggiore* dell'altra, cioè si può considerare come somma dell'altra e di una terza grandezza C (*differenza* tra le due $= A-B$):

$$A = B + C\,(A > B), \quad \text{oppure} \quad B = A + C\,(B > A)$$

(postulato di *sottrazione* o *di disuguaglianza:* dal quale segue che le grandezze formano una serie ordinata, essendo

$$A > C \quad \text{se} \quad A > B, \quad B > C)$$

3) la somma gode delle proprietà commutativa e associativa;

4) data una grandezza A, esiste sempre in Γ una qualche grandezza B (minore di A) di cui A è maggiore (segue che date due grandezze disuguali vi sono sempre grandezze maggiori della minore e minori della maggiore);

5) *postulato d'*ARCHIMEDE: date due grandezze A, B esiste sempre un multiplo

$$nA > B \qquad (nA = A + A + \ldots + A_n);$$

6) *postulato di* CANTOR: sieno date due successioni (*convergenti*) di grandezze:

$$A_1 A_2 \ldots A_n \ldots$$
$$B_1 B_2 \ldots B_n \ldots,$$

le prime crescenti, le seconde decrescenti, tutte maggiori delle prime, e tali che, data una qualsiasi grandezza ε (piccola ad arbitrio) si possa sempre determinare un numero n per cui

$$B_n - A_n < \varepsilon;$$

allora esiste sempre una grandezza L (*limite comune* delle due successioni) maggiore delle grandezze A_i e minore delle grandezze B_i.

Si noti che l'ipotesi implicata dall'affermazione di due successioni convergenti, porta l'unicità del loro limite comune.

(1) Cfr. S. PINCHERLE, *Giornale di Matematiche*, 1880.
(2) *Math. Annalen*, V (1872).
(3) *Stetigheit und irrationale Zahlen*, Braunschwig, 1872.

Sulla base di questi postulati si può definire il « *rapporto di due grandezze* » come concetto astratto in ordine ad una relazione (riflessiva, simmetrica e transitiva) che si pone quale « uguaglianza di rapporti » (*proporzione*).

L'uguaglianza di rapporti o proporzione

$$A : B = C : D,$$

esprime che, per qualsiasi coppia di numeri interi e positivi m, n,

secondochè $$mA \gtreqless nB$$

anche $$mC \gtreqless nD.$$

La definizione della proporzione mostra subito che si tratta di una relazione riflessiva e simmetrica:

$$A : B = A : B;$$

se $$A : B = C : D$$

anche $$C : D = A : B;$$

anzi dalla stessa definizione risulta pure senz'altro la possibilità di un altro scambio di termini, per cui da

$$A : B = C : D$$

si deduce $$B : A = D : C.$$

Infine dal confronto di due proporzioni

$$A : B = C : D$$

$$C : D = E : F,$$

si deduce $$A : B = E : F$$

(Elementi d'Euclide libro V, prop. 11); è la proprietà transitiva che (insieme all'altre due) permette di considerare la proporzione come un'uguaglianza e di costruire rispetto a questa il concetto astratto di rapporto.

Ora il post. 5) permette di dimostrare che:

Date tre grandezze A, B, C esiste sempre una grandezza D tale che

$$A : B = C : D.$$

L'unicità di questa 4ª proporzionale risulta dal postulato d'Archimede.

Prendendo $A = nB$, il teorema precedente enuncia l'esistenza di $\frac{C}{n}$. Perciò il nostro sistema di grandezzze contiene in sè un sistema di grandezze commensurabili.

Si passa quindi a definire la « somma e il prodotto di rapporti ».

Definiamo la somma di due rapporti, ponendo:

$$(B + C) : A = (B : A) + (C : A);$$

l'addizione di due rapporti che non hanno un termine comune si ridurrà a questo caso, trasformando uno dei due rapporti in un rapporto uguale. Ma *occorre dimostrare* che:

se $$B : A = B' : A'$$

e $$C : A = C' : A'$$

$$B' + C' : A' = B + C : A.$$

È la prop. 24 d'Euclide (libro V).

La somma di rapporti gode evidentemente della proprietà commutativa ed associativa.

Il *prodotto di due rapporti* si definisce ponendo:

$$(A : B) \cdot (B : C) = A : C$$

e mostrando, con Euclide, che se

$$A : B = A' : B', \quad B : C = B' : C'$$

anche $$A : C = A' : C',$$

cioè « ragioni composte di ragioni uguali sono uguali »; in virtù del qual principio si possono moltiplicare anche due rapporti non aventi un termine comune, trasformando uno di essi in un altro uguale. E la moltiplicazione gode quindi delle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Notisi che il prodotto di due rapporti si può anche definire

formando un nuovo *sistema di grandezze* colle coppie (non ordinate) (AB) costruite colle grandezze del sistema dato, ove si ponga

$$(A,\ B+C)=(AB)+(AC),$$

ed

$$(AB)=(CD)$$

quando

$$A:C=D:B,$$

(aree dei rettangoli). Allora il prodotto

$$(A:B)\cdot(C:D)=(AC):(BD).$$

Come si è osservato le operazioni sopra definite fra « rapporti » danno luogo alle relazioni fondamentali dell' Aritmetica. Le operazioni inverse sono soggette alle stesse limitazioni che pei numeri razionali positivi; la divisione è sempre possibile, perchè:

$$(A:B):(C:B)=(A:B)\cdot(B:C)=A:C;$$

invece la sottrazione è possibile fra due rapporti disuguali, in un solo senso.

Se $$(B:A)\neq(C:A),$$

si può trovare una coppia d'interi m, n tale che sia

$$nB>mA,\quad nC\leq mA$$

oppure viceversa

$$nB\leq mA,\quad nC>mA;$$

nel primo caso

$$B:A>C:A$$

nel secondo

$$B:A<C:A;$$

e se

$$B:A>C:A$$

anche

$$B>C,$$

(EUCLIDE, libro V, prop. X),

quindi

$$B=C+E$$

$$(B:A)=(C:A)+(E:A).$$

In definitiva *i rapporti fra le coppie di grandezze del nostro sistema fondamentale si possono considerare come formanti un sistema* Σ *di numeri positivi che soddisfa alle proprietà fondamentali delle operazioni aritmetiche e comprende in sè il sistema* S *dei numeri razionali positivi* (rapporti delle coppie di grandezze commensurabili).

In ogni caso il numero-rapporto di due grandezze si potrà designare con un simbolo

$$\mu=A:B,$$

scrivendo

$$\mu=\frac{m}{n}$$

se

$$A=\frac{m}{n}B.$$

Quando A e B sono incommensurabili (cioè non esistono due interi m, n per cui $A=\frac{m}{n}B$) si dirà che μ è un *numero irrazionale.*

§ 32. **Continuità e integrità.** — I postulati che abbiamo dato come definizione implicita di un sistema di grandezze aggiungono alle ipotesi euclidee l'ipotesi della continuità, formulata col postulato di CANTOR.

Il significato di questa ipotesi si lascia comprendere mercè le riflessioni seguenti. Si considerino due sistemi di grandezze Γ, Γ' soddisfacenti ai postulati 1).... 5) del numero precedente; si supponga inoltre che Γ soddisfi al post. 6) (di CANTOR), e che in Γ' sia possibile la divisibilità delle grandezze } maggiore determinazione del post. 4) che è per Γ una conseguenza di 6){. In tali ipotesi Γ e Γ' contengono ciascuno un sistema di grandezze commensurabili, che designeremo rispettivamente con G e G'; e fra G, G' si può porre una corrispondenza biunivoca per proporzione, tostochè sia fissata la corrispondenza di due elementi.

Ora considerando l'ordine delle grandezze crescenti, il sistema Γ viene ordinato come una serie di elementi; altrettanto si dica di Γ'. Dato un elemento qualsiasi A' di Γ', che non appartenga a G', si possono costruire due successioni convergenti di grandezze appartenenti a G' ed aventi come limite comune A'; a tal uopo (in forza del post. d'ARCHIMEDE) basta considerare due grandezze B', C' comprendenti A', e

quindi dividere successivamente per 2 la grandezza $D' = C' - B'$, formando le grandezze

$$B' + \frac{D'}{2}, \quad B' + \frac{D'}{4}, \quad B' + \frac{3D'}{4}, \text{ ecc.};$$

da questa serie si estraggono le successioni convergenti aventi per limite A'.

Ora a due successioni convergenti di Γ' formate con grandezze di G', corrispondono due successioni convergenti di Γ formate con grandezze di G, e quindi al limite comune A' di quelle successioni si può far corrispondere *un* elemento A di Γ, determinato come limite comune di queste. Con ciò si ottiene fra Γ' e Γ una corrispondenza univoca ordinata, dove a due qualsiansi grandezze di Γ' corrispondono due grandezze *proporzionali* di Γ; e questa corrispondenza non è generalmente invertibile, se non per gli elementi di una parte di Γ.

Dunque: *Ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacente ai postulati* 1).... 5), *si può porre in corrispondenza proporzionale con una parte di una serie continua* (soddisfacente anche al post. 6); o, in altri termini: *ogni sistema di grandezze divisibili soddisfacente ai post.* 1).... 5), *si può astrattamente ritenere come parte di un sistema continuo, contenente tutte le grandezze possibili* (compatibilmente colle relazioni poste), *questo sistema integro corrispondendo all' ipotesi di* CANTOR (6).

Cioè il *postulato di continuità di* CANTOR *esprime l' integrità del sistema di grandezze* per cui si suppone valido.

Il ragionamento precedente prova anche che tutti i sistemi di grandezze, soddisfacenti ai post. 1).... 6) si possono porre l'uno coll'altro in *corrispondenza biunivoca proporzionale,* ed *astrattamente* ritenersi come *identici* dando luogo perciò agli stessi numeri; in particolare *ogni sistema* Γ *si può riferire proporzionalmente al sistema delle grandezze segmentarie,* rappresentate dai segmenti di una semiretta con una data origine.

In tale riferimento i postulati di somma e sottrazione delle grandezze si traducono nei postulati della congruenza segmentaria (Art. 4). Quindi in virtù degli sviluppi dell'Art. 5 possiamo affermare che:

L' insieme dei postulati d' ARCHIMEDE *e di* CANTOR (5, 6) *per un sistema di grandezze* Γ *soddisfacente ai post.* 1).... 4), *si può esprimere col postulato di continuità di* DEDEKIND, nella forma seguente:

se il sistema Γ viene diviso in due classi contigue, per modo che

a) ogni grandezza appartenga ad *una* delle due classi;

b) ogni grandezza della seconda classe sia maggiore di ciascuna delle grandezze della prima,

allora esiste un *massimo* delle grandezze della prima classe, o un *minimo* delle grandezze della seconda.

Il postulato di DEDEKIND si può considerare come una proprietà della *serie* delle grandezze disposte per ordine crescente e corrisponde quindi ad una proprietà ordinale della serie dei segmenti o dei punti della retta o dei numeri, proprietà che darà luogo più avanti a nuove osservazioni.

§ 33. **Espressione degli irrazionali per frazione continua.** — L'integrità della serie dei numeri determinati come rapporti di grandezze d'un sistema continuo, corrisponde anche al fatto che si può costruire una generale espressione aritmetica dei numeri irrazionali, dipendente da una serie infinita di numeri naturali, nella quale questi numeri possono assumere tutti i valori possibili.

Una tale espressione aritmetica ci è fornita dal processo delle divisioni successive di EUCLIDE.

Si abbiano due grandezze

$$A, \; B, \quad A > B.$$

La divisione di A per B dà

$$A = aB + R_1 \qquad (a \text{ intero}, \; R_1 < B);$$

quindi proseguendo successivamente la divisione di B per R_1 e così di seguito:

$$B = a_1 R_1 + R_2 \qquad (R_2 < R_1)$$
$$R_1 = a_2 R_2 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Quando questo processo ha termine A e B sono commensurabili e si ha

$$A : B = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Quando le due grandezze sono incommensurabili il processo illimitato di divisioni successive simboleggiate dalla *frazione continua*

$$\alpha = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}} \qquad (a_i \geq 1)$$

si assumerà come espressione aritmetica del numero irrazionale

$$\alpha = A : B.$$

Questa definizione si basa sopra il teorema:

La frazione continua α corrisponde univocamente al rapporto A : B, *cioè se l' algoritmo euclideo delle divisioni successive applicato ad* A′, B′ *conduce alla frazione continua α si ha:*

$$A : B = A' : B',$$

e viceversa.

Per dimostrare questo teorema si suppongano date A, B, B' e si determini A_1 in guisa che

$$A : B = A_1 : B';$$

si tratta di provare che

$$A_1 = A'.$$

A tale scopo si considerino le successive *ridotte* della frazione continua $\alpha - a$:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}};$$

si ha (in valore assoluto)

$$(A' - A_1) < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right).$$

Ora la legge di formazione delle successive ridotte di $\alpha - a$ è data dalle relazioni ricorrenti

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

che si dimostrano verificandole per $n = 3$ e mostrando che se esse sussistono per un certo valore di n, sussistono anche per $n+1$, cioè quando si cambia a_n in $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$.

Si ha quindi

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

e perciò

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}};$$

in conseguenza risulta che le successioni

$$\frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_4}{q_4}, \ldots.$$

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_3}{q_3}, \ldots.$$

sono convergenti ed ammettono un solo limite; cioè, essendo

$$(A' - A_1) < \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p}{q_n}\right) < \frac{1}{n(n+1)}$$

per qualunque valor di n, si ha

$$A' - A_1 = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Vediamo di più che:

Ogni frazione continua

$$\alpha = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

dove $a \geq 0$ *ed* a_1, a_2.... *assumono qualsiasi valore* ≥ 1, *rappresenta un numero irrazionale* che si può determinare come rapporto di una certa grandezza A alla grandezza B assunta in Γ come unità di misura.

Infatti le due successioni di grandezze

$$\left(a+\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)B$$

$$\left(a+\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)B \qquad (n=1,\ 2,\ 3....),$$

sono convergenti ed il loro limite comune è una grandezza A tale che

$$A:B=\alpha.$$

NOTA. Anche in altri modi si può assegnare un'espressione aritmetica infinita dei numeri irrazionali: ad es. ricorrendo alle *divisioni successive per eccesso.*

Supposto per semplicità $A<B$, si consideri il minimo multiplo

$$a_1 A>B \qquad (a_1\geq 2)$$

e si scriva quindi

$$a_1 A=B+R_1 \quad \text{con} \quad R_1<B;$$

analogamente si ponga

$$a_2 R_1=B+R_2 \quad \text{con} \quad a_2\geq 2, \quad R_2<B_2,$$

e così di seguito.

L'algoritmo conduce alla *frazione continua ascendente*

$$A:B=\frac{1}{a_1}+\cfrac{1}{a_2}+\cfrac{1}{a_3}+\ddots \qquad =\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_1 a_2 a_3}+....,$$

la quale termina dopo un numero finito di divisioni successive se A e B sono commensurabili; l'algoritmo infinito rappresenta il rapporto irrazionale $A:B$ se A e B sono incommensurabili.

Una espressione di questo genere è la nota espressione del numero irrazionale

$$e=2+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{3}+\cfrac{1}{4}+\ddots \qquad =1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+....,$$

base dei logaritmi neperiani.

II.

NUMERI IRRAZIONALI ORDINALI

§ 34. **I numeri irrazionali come ascisse dei punti della retta.** — Il sistema totale dei numeri reali e positivi permette di far corrispondere ai punti d'una semiretta di origine 0, i numeri-ascisse, che esprimono, per ogni punto X, il rapporto del segmento $0x$ al segmento unità $0A$.

Attribuendo ai suddetti numeri un segno, si riesce anche alla completa rappresentazione biunivoca ed ordinata della serie dei punti della retta col sistema dei numeri reali.

Da questo punto di vista i numeri reali appariscono come *numeri ordinali,* designando il posto occupato dai punti nella serie « retta punteggiata ».

Si può costruire una teoria ordinale dei numeri reali, prendendo come punto di partenza le seguenti ipotesi:

1) È data sulla retta una serie razionale S di punti, *ovunque densa,* cioè tale che fra due punti della retta (entro ogni segmento) vi è qualche punto di S.

2) La retta è una serie di punti continua nel senso di DEDEKIND, cioè: se la retta (o un segmento di essa) è divisa in due parti formanti due classi contigue, per modo che *a*) ogni punto appartenga ad *una* delle due parti, *b*) tutti i punti di una parte precedano (nell'ordine della retta) a quelli della seconda,

allora esiste un *punto di separazione* delle due classi che è ultimo della prima classe o primo della seconda.

In tali ipotesi si ha:

ogni punto non avente un'ascissa razionale *divide* la serie S dei punti razionali in *due parti* che formano due *classi contigue,* diguisachè: *a*) ogni punto razionale appartiene all'una *o* all'altra parte; *b*) i punti della prima classe precedono a ciascun punto della seconda (le ascisse dei primi sono minori di quelle dei secondi).

Viceversa:

se la serie dei punti razionali viene divisa in due parti formanti classi contigue, segue dal postulato della continuità che esiste un *punto di separazione* il quale può dar luogo a due casi, secondochè

a) appartiene ad una delle due classi contigue, essendo l'*ultimo* punto della prima o il *primo* della seconda;

oppure *b*) non appartiene al sistema dei punti razionali e però consegue a tutti i punti della prima classe e precede a tutti quelli della seconda.

Per designare il posto occupato nella serie dei punti della retta dai punti non razionali, si possono introdurre i numeri irrazionali come numeri d'ordine corrispondenti alle partizioni dei numeri razionali in classi contigue.

Si ottiene così la definizione seguente:

Sia data una serie continua d'elementi Σ e, sopra a questa, una serie S in corrispondenza ordinata coi numeri razionali e formante un *insieme denso* su Σ (in guisa che fra due elementi di Σ sia sempre compreso qualche elemento di S); allora il posto di ogni elemento di Σ rispetto ad S è determinato in guisa che, data un'altra serie continua Σ' contenente un analogo sistema S', vi è fra Σ e Σ' una determinata corrispondenza ordinata in cui si corrispondono gli elementi di S, S' portanti lo stesso numero (razionale).

Associando per tal modo tutte le possibili serie analoghe Σ, Σ'...., si dà luogo al *concetto astratto di elemento di* Σ *considerato nell'ordine della serie rispetto ad* S; questo concetto astratto generalizzante il numero razionale ordinale, è il numero ordinale reale: razionale ed irrazionale.

Se l'ordine della serie si esprime colla relazione « *maggiore* » ($>$) e « *minore* » ($<$), il *numero irrazionale* è per definizione *maggiore di tutti i numeri razionali* che corrispondono agli elementi precedenti e *minore di tutti i numeri razionali seguenti,* i numeri razionali maggiori e minori formando le due classi contigue che lo definiscono.

§ 35. **Somma e prodotto.** — Le operazioni sui numeri irrazionali, o su irrazionali e razionali, risultano definite dalla condizione che *valgano per tutti i numeri reali e positivi le diseguaglianze seguenti:*

se
$$a > b,$$
$$a + c > b + c$$
$$ac > bc.$$

In forza di queste diseguaglianze si definiranno le operazioni sui numeri reali e positivi come segue; si aggiungeranno poi la regola dei segni e la legge d'annullamento:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Si abbiano due numeri reali α, β e si considerino tutti i numeri razionali a, a', b, b', per cui

$$a < \alpha < a'$$
$$b < \beta < b',$$

sarà
$$a + b < \alpha + \beta < a' + b', \quad ab < \alpha\beta < a'b',$$

e queste diseguaglianze definiscono in generale la *somma* $\alpha + \beta$ e il *prodotto* $\alpha\beta$. Infatti:

1) per il postulato di continuità la serie Σ contiene un elemento x che consegue agli $a + b$ e precede gli $a' + b'$, e così pure un elemento y che consegue agli ab e precede gli $a'b'$;

2) non vi possono essere due elementi, x, x_1, di Σ compresi fra $a + b$, $a' + b'$ o fra ab, $a'b'$; altrimenti si avrebbe nel primo caso

$$x - x_1 < (a' + b') - (a + b)$$
$$x - x_1 < (a' - a) + (b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$\alpha - a < \frac{x - x_1}{4} \qquad a' - \alpha < \frac{x - x_1}{4}$$
$$\beta - b < \frac{x - x_1}{4} \qquad b' - \beta < \frac{x - x_1}{4},$$
$$a' - a < \frac{x - x_1}{2} \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{2};$$

e similmente nel secondo caso

$$x - x_1 < a'b' - ab$$
$$x - x_1 < (a' - a)b + (b' - b)a + (a' - a)(b' - b),$$

mentre si possono scegliere a, a', b, b' in guisa che sia

$$a' - a < \frac{x - x_1}{3b}, \qquad b' - b < \frac{x - x_1}{3a}$$

$$(a' - a)(b' - b) < \frac{x - x_1}{3}$$

e quindi

$$(a' - a)b + (b' - b)a + (a' - a)(b' - b) < x - x_1.$$

È poi chiaro che la somma e il prodotto sopra definite pei numeri reali soddisfano sempre alle proprietà fondamentali: commutativa, associativa e distributiva.

§ 36. **Continuità e buon ordinamento di una serie.** — La proprietà della serie dei numeri interi relativi di essere quasi ben ordinata (cioè ben ordinata a parte l'esistenza d'un primo termine della serie totale) si lascia decomporre nelle due affermazioni seguenti:

1) dopo ogni numero vi è *un* successivo;

2) se la serie dei numeri è divisa in due parti formanti due *classe contigue,* vi è fra queste un *elemento di separazione,* potendosi assumere ad arbitrio come tale il massimo della prima classe o il minimo della seconda.

Quest'ultimo enunciato è identico al postulato di DEDEKIND, che si pone ad affermare la *continuità* di una serie in cui (contrariamente all'ipotesi 1)) si trovino elementi compresi fra due qualsiansi.

Già nella costruzione della serie dei numeri razionali, che estende quella dei numeri interi, si lascia cadere volontariamente la proprietà 1), assumendo che fra due elementi qualsiansi sia sempre compreso qualche elemento intermedio.

Dopo ciò si constata che cade anche la proprietà 2), giacchè per es. i numeri $< \sqrt{2}$ e $> \sqrt{2}$ danno luogo ad una divisione della classe razionale in due classi contigue, che non ammette entro questa un elemento di separazione.

Col postulato di continuità si ammette che: *data una serie razionale di elementi* S, *sia possibile determinare una serie continua* per modo che

a) fra due elementi della serie totale si trovi sempre qualche elemento intermedio;

b) la serie soddisfi alla proprietà 2) (postulato di DEDEKIND).

Quindi *il postulato di* DEDEKIND *appare come una estensione della proprietà della serie degli interi, successivi ad un intero qualsiasi, di essere ben ordinata.*

È possibile che esistano diverse serie continue contenenti la serie razionale S; una serie Σ sopra cui S sia *ovunque densa,* è *minima* fra tutte le serie anzi dette, cioè in ognuna di queste si può trovare una parte in corrispondenza ordinata con Σ (gli elementi di S corrispondendo a sè stessi).

In altre parole: *l'aggiunta dei numeri irrazionali ai numeri razionali dà luogo alla minima estensione della serie di questi che renda soddisfatto il postulato di continuità* (*di* DEDEKIND).

D'altra parte se si suppone che una serie contenente una serie razionale possa riguardarsi come una serie di grandezze, il postulato di DEDEKIND (o quello di CANTOR che ne deriva come conseguenza) porta, come abbiam visto, che la serie continua abbia la massima estensione possibile; perciò se una serie razionale S è contenuta in una serie continua Σ, e gli elementi di questa possono ritenersi come un sistema di grandezze ordinate secondo i postulati di somma e sottrazione, S dovrà esser densa ovunque sopra Σ.

Questa affermazione si riduce in sostanza al teorema (dimostrato nell'Art. 7 per i segmenti) che il postulato di DEDEKIND porta come conseguenza quello di ARCHIMEDE.

Per un'analisi approfondita delle proprietà che definiscono il continuo numerico come serie ordinata cfr. IV Cap.

III.

LE TEORIE ANALITICHE DEI NUMERI IRRAZIONALI

§ 37. **La teoria di Dedekind.** — La teoria dei numeri irrazionali ordinali che sopra abbiamo costruito, è una teoria sintetica in quanto fa appello ad un postulato esistenziale: la continuità della serie punteggiata di cui i numeri designano il posto. Ma questo postulato esistenziale, legato alla intuizione del continuo rettilineo, non è affatto necessario; infatti, partendo dalla serie dei numeri razionali si può *costruire una serie continua minima* che la contenga ed edificare così una *teoria analitica dei numeri irrazionali.*

La teoria più semplice è quella di DEDEKIND, la quale si può considerare come una semplice trasformazione della precedente teoria ordinale.

Esponiamo i principii di questa teoria:

1) Ad ogni numero razionale a, corrisponde una *partizione in classi contigue* che si ottiene ponendo nella prima classe tutti i numeri $\leq a$, e nella seconda i numeri $> a$.

La partizione in classi contigue soddisfa alle due proprietà fondamentali che: ogni numero razionale appartiene ad una e ad una sola delle due classi, e che ogni numero della prima classe è minore di ciascun numero della seconda. La partizione da noi definita in rapporto ad un numero razionale ha questo numero come *massimo*.

2) Consideriamo tutte le possibili partizioni dei numeri razionali in classi contigue escludendo le partizioni in cui la seconda classe ha un minimo.

Tutte le partizioni anzidette si possono riguardare come gli elementi di una serie Σ. La quale viene ordinata in base alla seguente convenzione: date due partizioni (aa'), (bb') si pone

$$(bb') > (aa')$$

se esistono un b ed un a' tali che

$$b > a'.$$

(Nell'ipotesi opposta o $(aa') > (bb')$ oppure si ha sempre

$$a < b', \quad a' < b$$

e le due partizioni coincidono.

3) La serie Σ contiene un sistema S di elementi corrispondenti ordinatamente ai numeri razionali: sono le « partizioni » in cui la classe inferiore ha un massimo. Gli altri elementi di Σ sono definiti dal posto che occupano rispetto ad S, poichè ciascuno di essi separa gli elementi di S in due classi contigue corrispondenti a quelle di numeri razionali da cui è definito.

Ciò posto *gli elementi di* Σ (« partizioni » dei numeri razionali) *si possono riguardare come numeri reali*, aggiungendo ai numeri razionali, che corrispondono agli elementi di S, i *numeri irrazionali*, corrispondenti a « partizioni dei numeri razionali in classi contigue non dotate di massimo nè di minimo ».

Dal n. 34 segue che la serie Σ è astrattamente identica alla serie dei numeri irrazionali ordinali che nascono come ascisse dei punti della retta; un confronto diretto degli irrazionali definiti al modo di DEDEKIND coi segmenti è svolto nell'Art. 7.

Ora si definiranno le operazioni sui numeri reali riferendosi per semplicità ai numeri reali e positivi ed aggiungendo poi la regola dei segni e la convenzione

$$\alpha 0 = 0.$$

LEMMA. Se un numero α è definito dalle classi contigue (aa') si può sempre trovare un numero a ed un a' che differiscano fra loro di un numero $\frac{1}{n}$ piccolo ad arbitrio.

Infatti si costruisca la serie dei multipli di $\frac{1}{n}$, in questa si troveranno due multipli consecutivi, uno appartenente alla classe (a) l'altro ad (a').

Ciò posto sieno dati due numeri reali e positivi α, β, definiti per mezzo delle classi contigue di numeri razionali e positivi

$$(aa') \quad \text{e} \quad (bb').$$

Formiamo le classi

$$(a + b) \quad (a' + b').$$

Se ogni numero razionale (positivo) appartiene all'una o all'altra di dette classi, queste sono classi contigue, $(a' + b' > a + b)$ ed esiste quindi un numero irrazionale

$$(a + b, \quad a' + b')$$

che si definirà come *somma*

$$(aa') + (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > a + b, \quad x < a' + b';$$

in tal caso si dimostra che non vi può essere un secondo numero

$$x_1 > a+b, \quad x_1 < a'+b'.$$

Infatti, supposto

$$x > x_1,$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande), e quindi

$$a'+b'-(a+b) > \frac{1}{n},$$

mentre si possono scegliere $a,\ a',\ b,\ b'$ in guisa che sia

$$a'-a=\frac{1}{2n}, \quad b'-b=\frac{1}{2n}$$

$$(a'+b')-(a+b)=\frac{1}{n}.$$

Pertanto se esiste x si attribuirà, come massimo alla classe $(a+b)$ e si porrà

$$x=(a+b,\ a'+b')=(aa')+(bb').$$

Parimente formiamo le classi

$$(ab) \quad (a'b').$$

Se ogni numero razionale appartiene all'una o all'altra, queste sono classi contigue ed esiste quindi un numero irrazionale

$$(aa', \quad bb').$$

che si definirà come *prodotto*

$$(aa').\ (bb').$$

Pongasi invece che esista un numero razionale

$$x > ab, \quad x < a'b';$$

in tal caso si dimostra che non può esistere un secondo numero x_1 tale che

$$x_1 > ab, \quad x_1 < a'b'.$$

Infatti, supposto

$$x > x_1$$

si avrà

$$x - x_1 > \frac{1}{n}$$

(n intero assai grande) e quindi

$$a'b' - ab > \frac{1}{n};$$

ma all'opposto si determini un numero intero m maggiore di un a' e di un b' (e però di tutti gli a e b); allora si possono scegliere $a,\ a',\ b,\ b'$ in guisa che sia

$$a'-a=\frac{1}{3n}, \quad b'-b=\frac{1}{3n}$$

e però

$$(a'-a)(b'-b)=\frac{1}{9n^2}<\frac{1}{3n};$$

segue quindi

$$a'b'-ab=(a'-a)b+(b'-b)a+$$

$$+(a'-a)(b'-b)<m\{(a'-a)+b'-b)\}+\frac{1}{3n}<\frac{1}{n}.$$

E poi chiaro che l'addizione e la moltiplicazione così estese ai numeri reali soddisfano alle proprietà fondamentali di queste operazioni.

§ 38. **Teoria di Cantor.** — La teoria degl'irrazionali di DEDEKIND è preferibile a tutte le altre teorie analitiche:

1) per la corrispondenza immediata ch'essa ha colla teoria ordinale (rappresentazione numerica del continuo rettilineo);

2) per il legame concreto che essa pone fra il numero irrazionale e una determinata partizione che gli corrisponde;

3) per la semplicità che ne deriva nella definizione delle operazioni di somma e prodotto.

Tuttavia da altri punti di vista sono apprezzabili anche le teorie di CANTOR e di WEIERSTRASS che introducono gl'irrazionali per mezzo dei *processi d'approssimazione* più direttamente usati nei calcoli.

Il punto di partenza della teoria di CANTOR si può ritrovare nell'uso di *serie a termini alternativamente positivi e negativi*, o in altri analoghi processi di approssimazione (esempio: le frazioni continue) che conducono a *valutazioni*

sempre più approssimate di una quantità per difetto e per eccesso.

CANTOR — senza preoccuparsi dell'algoritmo che le genera — considera le *coppie di successioni convergenti:*

$$a_1 a_2 .... a_n ...., \quad b_1 b_2 .... b_m ....,$$

definite dalle condizioni seguenti:

1) i numeri della prima successione vanno indefinitamente crescendo, e quelli della seconda decrescendo; cioè

$$a_1 < a_2 < .... < a_n ....,$$
$$b_1 > b_2 > .... > b_m ....;$$

2) i numeri della seconda successione sono tutti maggiori di quelli della prima:

$$b_m > a_n;$$

3) dato ad arbitrio un numero ε piccolo ad arbitrio si può determinare un numero s tale che per $n > 1$, $m > 1$, sempre

$$b_m - a_n < \varepsilon.$$

Dalla definizione precedente segue che la successione $a_1 a_2 ....$ non ammette un *massimo*, nè la $b_1 b_2 ....$ un *minimo* [1]. Perciò, dato un numero razionale c accade uno e uno solo dei tre casi seguenti:

α) vi è nella successione degli a un termine $a_n \geq c$; allora, per $m > n$, $a_m > c$;

β) vi è un $b_n \leq c$; allora, per $m < n$, $b_m < c$;

γ) per ogni valore di n

$$c > a_n, \quad c < b_n.$$

Nell'ipotesi γ) il numero c dicesi *numero-limite* delle successioni convergenti $a_1 a_2 ....$, $b_1 b_2 ....$: le differenze

$$c - a_n \quad \text{e} \quad b_n - c$$

[1] Il concetto delle successioni convergenti si può generalizzare ponendo $a_i \leq a_{i+1}$ e $b_i \geq b_{i+1}$ al posto di $a_i < a_{i+1}$, $b_i > b_{i+1}$ allora può esistere un massimo nella serie degli a o un minimo nella serie dei b. Ma la teoria riesce semplificata escludendo questo caso.

divengono, per n assai grande, piccole ad arbitrio. È poi chiaro che non può esistere un secondo numero-limite c' delle medesime successioni, diverso da c; infatti se per es.

$$c > c',$$

sarebbe $$c - a_n > c - c'$$

per qualunque valore di n, mentre si può trovare un n così grande per cui

$$c - a_n < b_n - a_n < c - c'.$$

Ora si confrontino due coppie di successioni convergenti

$$a_1 a_2 ...., \quad b_1 b_2 ....,$$
$$a_1' a_2' ...., \quad b_1' b_2' ....,$$

si avrà:

I) Se queste ammettono uno stesso numero-limite c, per ogni valore di n, m,

$$a_n < b_{m'}, \quad a_{n'} < b_m;$$

infatti

$$a_n < c < b_m, \quad a_{n'} < c < b_{m'}.$$

II) Viceversa se la prima coppia di successioni convergenti ammette il numero-limite c, e se, per qualunque valore di n, m,

$$a_n < b_{m'}, \quad a_{n'} < b_m$$

sarà anche c numero-limite della seconda coppia di successioni, cioè:

$$a_{n'} < c < b_{m'}.$$

Infatti se così non fosse il numero c si troverebbe rispetto alle successioni a', b' nell'ipotesi α) o β); fermandosi ad es. sulla prima ipotesi c'è un termine $a_{n'} > c$; ma allora il numero $a_{n'}$ rispetto alle successioni a, b, non può trovarsi che nell'ipotesi β), cioè deve esistere un termine

$$b_m < a_{n'},$$

contro il supposto.

III) Astrazion fatta dall'esistenza d'un numero-limite c, le disuguaglianze

$$a_n < b_{m'}, \quad a_{n'} < b_m,$$

pongono fra le due coppie di successioni convergenti una

relazione (*equivalenza*) che è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè possiede gli attributi logici di un'uguaglianza.

Ciò posto il *concetto astratto delle coppie di successioni convergenti che si equivalgono* fornisce un concetto più generale del *numero-limite*, comprendente, accanto ai numeri *razionali* (coppie di successioni convergenti verso un numero intero o fratto), i numeri *irrazionali* di CANTOR (coppie di successioni convergenti per cui non esiste un numero-limite razionale).

Le operazioni sui numeri reali (razionali ed irrazionali) si definiscono nel modo più semplice incominciando dal caso dei numeri positivi, limiti di successioni convergenti a termini positivi.

Si tratta di provare che date due coppie di successioni convergenti formate di numeri positivi:

$$a_1 a_2 \ldots., \quad b_1 b_2 \ldots.,$$

e

$$c_1 c_2 \ldots., \quad d_1 d_2 \ldots.,$$

sono pure successioni convergenti le seguenti:

$$a_1 + c_1, \quad a_2 + c_2 \ldots., \quad b_1 + d_1, \quad b_2 + d_2 \ldots.,$$

e

$$a_1 c_1, \quad a_2 c_2 \ldots., \quad b_1 d_1, \quad b_2 d_2 \ldots.;$$

inoltre che: se le coppie di successioni convergenti

$$a_1' a_2' \ldots., \quad b_1' b_2' \ldots.$$

e

$$c_1' c_2' \ldots., \quad d_1' d_2' \ldots.$$

equivalgono rispettivamente alle precedenti a, b e c, d, sono pure equivalenti le coppie di successioni convergenti

$$a_1 + c_1, \quad a_2 + c_2 \ldots., \quad b_1 + d_1, \quad b_2 + d_2 \ldots.$$

$$a_1' + c_1', \quad a_2' + c_2' \ldots., \quad b_1' + d_1, \quad b_2' + d_2' \ldots.,$$

e le

$$a_1 c_1, \quad a_2 c_2 \ldots., \quad b_1 d_1, \quad b_2 d_2 \ldots.$$

$$a_1' c_1, \quad a_2' c_2' \ldots., \quad b_1' d_1', \quad b_2' d_2' \ldots..$$

Del resto gli sviluppi qui occorrenti si riconducono a quelli del DEDEKIND, per mezzo del seguente teorema che stabilisce il: *Passaggio della teoria di Cantor a quella di Dedekind.*

A tutte le coppie equivalenti di successioni convergenti

$$a_1 a_2 \ldots., \quad b_1 b_2 \ldots.$$
$$a_1' a_2' \ldots., \quad b_1' b_2' \ldots.,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

corrisponde una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, partizione ottenuta attribuendo alla prima classe ogni numero a che verifichi le diseguaglianze

$$a < b_n \qquad (n = 1, 2 \ldots.),$$

oppure

$$a < b_n'$$

e all'altra classe tutti gli altri numeri razionali b (per ciascun dei quali esiste un n tale che $b > b_n$, $b > b_n'$).

Viceversa tutte le coppie di successioni convergenti che determinano in questo senso una medesima partizione del campo dei numeri razionali in classi contigue, sono equivalenti.

Data una partizione dei numeri razionali in classi contigue (a, b) si potranno costruire due successioni convergenti corrispondenti allo stesso numero-limite operando come segue: si considerino tutte le frazioni di denominatore n e si distinguano quelle appartenti alle classi (a) e (b); la massima delle prime e la minima delle seconde danno luogo a due numeri

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+1}{n};$$

al crescere di n, ad es. per $n = 10, 100, \ldots.$, la prima frazione dà origine ad una successione crescente, e la seconda ad una successione decrescente; sono due successioni convergenti tendenti al limite (ab).

(Perchè si tratti di successioni realmente illimitate occorre solo far crescere n in modo conveniente nel caso in cui (ab) sia un numero razionale).

§ 39. **Teoria di Weierstrass.** — Questa teoria si riattacca direttamente all'algoritmo della *somma di un numero infinito di termini o serie.*

Una serie

$$a_1 + a_2 + \ldots.,$$

considerata nel campo dei numeri razionali, ammette un *limite* (*somma*), se esiste un numero razionale a tale che:

dato un ε piccolo ad arbitrio vi è un m così grande che per $n > m$

$$|a - (a_1 + a_2 + ... + a_n)| < \varepsilon,$$

la differenza che compare nel primo membro essendo presa in valore assoluto. Si scrive

$$a = \lim_{n=\infty} (a_1 + ... + a_n)$$

oppure

$$a = a_1 + a_2 + ...,$$

e si riconosce che, se

$$a' = \lim_{n=\infty} (a_1 + ... + a_n),$$

deve essere

$$a = a'.$$

Ora si consideri una serie

$$a_1 + a_2 + ...,$$

che non ammette un limite razionale. Nasce la domanda: si può generalizzare il concetto del numero-limite d'una serie, trattando la serie anzidetta (senza limite razionale) come rappresentante un *oggetto logicamente possibile*? e più precisamente, si può far questo operando sulle serie nel modo che viene indicato dalla teoria delle serie possedenti un limite?

A queste domande non si può dare una risposta affermativa assolutamente generale, perchè le *serie divergenti e indeterminate* (prese in relazione alle regole operative anzidette) *non rappresentano oggetti logicamente possibili,* visto che il loro uso conduce a conseguenze assurde.

Ma le serie che posseggono un limite razionale rientrano tuttavia, come caso particolare, in una classe di serie « le *serie convergenti* », che rappresentano oggetti logicamente possibili e danno luogo ad una estensione della teoria dei numeri razionali. Quando si suppongono già introdotti i numeri irrazionali le serie convergenti si trattano come serie aventi un limite.

La teoria di WEIERSTRASS si può riguardare come una *teoria generale delle serie convergenti fondata nel campo dei numeri razionali.* Ci limiteremo a indicare qui gli sviluppi occorrenti:

1) Le serie $a_1 + a_2 + ...,$

tendenti ad un numero-limite razionale danno luogo alle seguenti relazioni:

α) Soddisfano alla *condizione di convergenza* cioè: per ogni ε piccolo ad arbitrio si può scegliere un n così grande che per qualunque valore di r:

$$R_{n,r} = a_{n+1} + ... a_{n+r} < \varepsilon.$$

β) Serie

$$a_1 + a_2 + ...,$$

$$b_1 + b_2 + ...,$$

tendenti allo stesso limite soddisfano alla *condizione di equivalenza,* cioè: per ogni ε piccolo ad arbitrio esiste un n così grande che per $m > n$ sempre

$$|(a_1 + a_2 + ... + a_m) - (b_1 + b_2 + ... + b_m)| < \varepsilon$$

(nel primo termine si designa il valore assoluto della differenza).

Se questa condizione è soddisfatta ed una delle due serie ammette un limite razionale, questo è anche limite dell'altra serie.

γ) Date due serie

$$a_1 + a_2 ....,$$

$$b_1 + b_2 ....,$$

tendenti a limiti razionali, la somma e il prodotto di questi sono rispettivamente limiti delle serie

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ...,$$

$$(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + ...$$

2) Si considerino ora serie soddisfacenti alla condizione di convergenza 1) α); indipendentemente dall'esistenza di un numero razionale limite si può provare che:

α) Se due serie soddisfano alla condizione d'equivalenza (1) β)) e una di esse è convergente, anche l'altra è convergente.

β) La condizione d'equivalenza esprime fre le serie una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

γ) Date due serie soddisfacenti alla condizione di convergenza:

$$a_1 + a_2 + ...,$$

$$b_1 + b_2 + ...;$$

anche le serie

$$S_{ab} = (a_1 b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots,$$

$$P_{ab} = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \ldots,$$

soddisfano alla medesima condizione.

δ) Date due serie convergenti

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

$$b_1 + b_2 + \ldots.$$

se le serie

$$a_1' + a_2' + \ldots$$

$$b_1' + b_2' + \ldots.$$

sono rispettivamente equivalenti ad esse, saranno pure equivalenti le serie

$$S_{ab}, \quad S_{a'b'}$$

e le

$$P_{ab}, \quad P_{a'b'}.$$

In base a queste proposizioni ogni serie convergente, insieme a quelle che le sono equivalenti, definisce un ente « il concetto astratto della classe di serie equivalenti », che si può riguardare come un *numero,* e sui « *numeri* » così introdotti sono definite le operazioni dell'Aritmetica soddisfacenti alle note proprietà fondamentali; inoltre i suddetti « numeri » comprendono come caso particolare i numeri razionali.

Osserveremo infine che la teoria delle serie sopra abbozzata si può svolgere più semplicemente limitandosi al caso di *serie a termini tutti positivi* (o tutti negativi), in base al seguente teorema:

La condizione di convergenza d'una serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

equivale alla condizione che esista un qualche numero b *tale che, per ogni valore di* a,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b.$$

Invero si tratta di provare che da tale ipotesi segue che, dato un ε piccolo ad arbitrio, esiste un n per cui, qualunque sia r,

$$R_{n,r} = (a_{n+1} + \ldots + a_{n+r}) < \varepsilon.$$

Suppongasi che la tesi non sussista; allora — essendo dato comunque n — si troverà un r per cui

$$R_{n,r} \geq \varepsilon;$$

quindi — cambiando n in $n + r$ — si troverà un r_1 per cui

$$R_{n+r,r_1} \geq \varepsilon$$

e così via.

Ma si può sempre determinare un m per cui

$$m\varepsilon > b,$$

e si avrà quindi un

$$s = n + r + r_1 + \ldots + r_m,$$

per cui $$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s) > m\varepsilon > b,$$

contro l'ipotesi.

NOTA. L'uso delle serie a termini positivi permette di *passare* nel modo più rapido *dalla teoria degli irrazionali di* WEIERSTRASS *a quelle di* DEDEKIND *e di* CANTOR. Essendo data la serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + \ldots,$$

corrispondente ad un numero irrazionale, la partizione in classi contigue che corrisponde a questo numero si ottiene ponendo:

1) nella prima classe (inferiore) ogni numero a per cui esiste un n tale che

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n > a,$$

2) nella seconda classe (superiore) ogni numero b tale che per qualunque n

$$b > a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

§ 40. **Calcolo approssimato sui numeri decimali.** — Una determinazione particolare della teoria di WEIERSTRASS che conduce a sviluppi assai semplici consiste nel considerare i *numeri decimali con infinite cifre,* cioè le serie del tipo

$$\Sigma \frac{a_n}{10^n}$$

dove a_n assume uno dei dieci valori 0, 1,.... 9.

I decimali *non periodici* corrispondono a numeri irrazionali.

Ora all'uso dei decimali con infinite cifre si riattaccano i principii del *calcolo delle approssimazioni* di cui qui vogliamo dare un cenno.

Osserveremo anzitutto che se di un numero a si trascurano le cifre decimali dopo la n^{ma}, si ha un *valore approssimato* di a a meno di $\frac{1}{10^n}$.

Ciò posto risolviamo le seguenti questioni:

1) Dati due numeri a e b, quante cifre decimali occorre calcolare di essi per avere un valore oppossimato di $a+b$ a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Sommando $a-\varepsilon_1$ e $b-\varepsilon_2$, si ha

$$a+b-(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

e se

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x}$$

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{10^y},$$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 < \frac{1}{10^x}+\frac{1}{10^y}.$$

Affinchè sia

$$\frac{1}{10^x}+\frac{1}{10^y} < \frac{1}{10^n}$$

basta prendere

$$x \geq n+1, \quad y \geq n+1.$$

Dunque per rispondere alla domanda *si calcoleranno* $n+1$ *cifre decimali* di a e b.

2) Quante cifre decimali occorre calcolare di a, b per avere un valore approssimato del prodotto ab a meno di $\frac{1}{10^n}$?

Moltiplicando

$$a-\varepsilon_1, \quad b-\varepsilon_2,$$

si ha

$$(a-\varepsilon_1)(b-\varepsilon_2) = ab-(\varepsilon_1 b+\varepsilon_2 a-\varepsilon_1\varepsilon_2).$$

Posto

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^x} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{10^y},$$

si tratta di ridurre $\frac{b}{10^x}+\frac{a}{10^y} < \frac{1}{10^n}$.

Perciò *se le parti intere di* a *e* b *contengono rispettivamente* r, s *cifre* ($a < 10^r$, $b < 10^s$), basterà prendere

$$x-s < n, \quad y-r < n$$

$$x = n+s+1, \quad y = n+r+1;$$

dunque *si calcoleranno* a *e* b *rispettivamente con* $n+s+1$ *e con* $n+r+1$ *cifre decimali.*

In particolare: se a è un numero di r cifre seguito da decimali, per calcolare a^2 a meno di $\frac{1}{10^n}$ basta tenere $n+r+1$ cifre decimali di a.

3) Si voglia calcolare un valore approssimato di $\sqrt{a}$ a meno di $\frac{1}{10^n}$, si domanda quante cifre decimali occorre tenere nel numero a, ed a quale approssimazione è sufficiente spingere il calcolo della radice.

Posto in luogo di a, $a-\varepsilon$, e al posto di $\sqrt{a-\varepsilon}$, $\sqrt{a-\varepsilon}-\tau$, la differenza fra $\sqrt{a}$ e questo suo valore approssimato è

$$\sqrt{a}-\sqrt{a-\varepsilon}+\tau;$$

si tratta di ridurre questa quantità $< \frac{1}{10^n}$, e, però basterà rendere

$$\tau < \frac{1}{2\cdot 10^n}, \quad \text{o} \quad \tau < \frac{1}{10^{n+1}}$$

e

$$\sigma = \sqrt{a}-\sqrt{a-\varepsilon} < \frac{1}{2\cdot 10^n}.$$

Pongasi

$$\sqrt{a} = x \quad \sqrt{a-\varepsilon} = x-\sigma,$$

sarà

$$x^2-(x-\sigma)^2 = \varepsilon,$$

$$2\sigma\left(x-\frac{\sigma}{2}\right) = \varepsilon,$$

$$2\sigma x < \varepsilon.$$

Si avrà quindi $$\sigma < \frac{1}{2\cdot 10^n},$$

purchè si prenda

$$2\sigma x < \varepsilon < \frac{x}{10^n}.$$

Ora *se la parte intera di* a *contiene* 2r *o* 2r — 1 *cifre:* $a > 10^{2r-2}$ e $x = \sqrt{a} > 10^{r-1}$; perciò basterà prendere

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{n-r+1}}.$$

Dunque in ultima analisi *si otterrà* $\sqrt{a}$ *coll' approssimazione di* $\frac{1}{10^n}$ *ritenendo* n — r + 1 *cifre decimali di* a *e calcolando la radice con* n + 1 *cifre decimali;* anzi la n^{ma} cifra decimale è esatta se la $(n+1)^{ma}$ è < 5.

IV.

La potenza del continuo

§ 41. **Continuo numerico.** — Colla progressiva estensione del concetto di numero abbiamo costruito successivamente

1) la classe dei numeri interi relativi,
2) la classe dei numeri fratti o razionali,
3) la classe dei numeri reali (razionali e irrazionali).

Si possono comparare queste classi alla classe dei numeri naturali 1, 2, 3...., dal punto di vista della loro *potenza* (Cantor), domandandosi se si può stabilire una corrispondenza biunivoca (non ordinata) fra i numeri naturali e i numeri delle classi 1) 2) 3).

Abbiamo già avuto occasione di dimostrare (n. 10) che:

L' insieme dei numeri razionali (o in particolare quello dei numeri interi e relativi) è numerabile.

Ora dimostreremo che:

L' insieme di tutti i numeri reali o anche solo l' insieme dei numeri reali compresi fra 0 *e* 1 *non è numerabile.*

Consideriamo tutti i numeri reali fra 0 e 1 scrivendoli sotto forma di decimali con infinite cifre. Suppongasi che questo

insieme possa essere ordinato in guisa che ad ogni numero

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

corrisponda un numero naturale n. Immaginiamo quindi di scrivere la serie dei numeri secondo l'ordine anzidetto:

1) $0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$
2) $0, b_1 b_2 b_3 \ldots.$
$\ldots\ldots\ldots$

Si possono fare due ipotesi:

α) Nella serie anzidetta si può trovare un numero

$$0, c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1} \ldots,$$

tale che non esista alcun altro numero della serie

$$0, c_1 c_2 \ldots . c_n c'_{n+1} \ldots,$$

possedente le stesse n cifre decimali $c_1 c_2 \ldots . c_n$ dopo la virgola.

In questa ipotesi la nostra serie non può contenere — come si suppone — *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1, perchè — essendo $c'_{n+1} \neq c_{n+1}$ — il numero

$$0, c_1 c_2 \ldots . c_n c'_{n+1}$$

non le appartiene.

β) Dato nella serie un numero

$$0, c_1 c_2 c_n \ldots,$$

esistono sempre in essa altri numeri che posseggono le medesime cifre $c_1 c_2 \ldots . c_n$ dopo la virgola (e differiscono dal numero dato per qualcuna delle cifre successive).

In questa ipotesi formiamo un numero decimale con infinite cifre nel modo seguente:

prendiamo come prima cifra la prima cifra a_1 del numero 1) della serie;

consideriamo fra i termini successivi della serie quello r più vicino al 1) che comincia colla stessa cifra a_1, e prendiamo altre n_r (≥ 1) cifre di esso fino a comprendere la prima cifra per cui r) diversifica da 1);

consideriamo fra i termini successivi ad r) il primo s) che comincia colle n_r cifre suddette e prendiamone altre

n_s (≥ 1) cifre, fino a comprendere la prima cifra per cui s) diversifica da r); e così di seguito.

È chiaro che per il fatto di cominciare con a_1, il numero decimale che abbiamo costruito non può occupare nella serie data un numero d'ordine compreso fra 1 ed r; ma per il fatto di contenere poi le n_r cifre assegnate esso diversifica da 1) e non può neppure occupare un posto compreso fra r) ed s); quindi per le n_s cifre successivamente date, esso diversifica da r) e dai numeri successivi ad s) che non cominciano colle $1 + n_r + n_s$ cifre considerate ecc. In ultima analisi si vede che: *il numero decimale che abbiamo costruito non può appartenere alla serie* 1) 2) 3)...., nella quale pure avevamo supposto che trovassero posto *tutti* i numeri reali compresi fra 0 e 1.

Dunque l'insieme dei numeri reali fra 0 e 1 non è numerabile. A *fortiori* non può essere numerabile l'insieme di tutti i numeri reali, giacchè è chiaro che « ogni parte d'un insieme numerabile è numerabile ».

L'insieme dei numeri razionali fra 0 e 1 corrisponde all'insieme dei punti d'un segmento (continuo). Perciò si può dire che: l'insieme dei punti d'un segmento non è numerabile; ossia: *il continuo unidimensionale ha una potenza superiore a quella della classe dei numeri naturali* (n. 8).

§ 42. **Continuo a più dimensioni.** — Introduciamo un simbolo Ω per designare la potenza del continuo rettilineo e fermiamoci un momento a mettere in luce qualche proprietà di questo *numero cardinale infinito.*

Secondo la definizione cardinale del prodotto, Ω^2 designerà la *potenza di un quadrato*, Ω^3 la *potenza di un cubo* ecc.

Ora si ha il teorema (di CANTOR):

Il quadrato e il segmento suo lato hanno la stessa potenza, quindi

$$\Omega = \Omega^2 = \Omega^3 = ...$$

Consideriamo un quadrato $Q = ABCD$: dividendo due lati consecutivi in n parti uguali si può dividere Q in n^2 quadrati. Divideremo il lato AB in n^2 parti e faremo corrispondere in un ordine determinato i punti di divisione agli n^2 vertici dei quadrati costruiti in Q, ordinando questi in modo che due punti E, F si succedano quando F è *più alto* dell'altro o quando — essendo su una stessa parallela ad AB — F è *a destra* di E. Al crescere indefinito di n ogni punto del

quadrato Q viene determinato come limite dei vertici della rete di quadrati costruita in Q, ed ogni punto del segmento AB come limite dei punti di divisione omologhi; fra i punti limiti di serie omologhe, e quindi fra i punti di Q e di AB nasce così una corrispondenza biunivoca. c. d. d.

NOTA. Risulta quindi che *il continuo a più dimensioni non si distingue dal continuo a una dimensione per la maggiore estensione (potenza) della classe dei punti o elementi che lo costituiscono, ma per la distribuzione di questi* che viene data col concetto del continuo suddetto (cfr. § 54).

PARTE QUARTA

I NUMERI NON ARCHIMEDEI E LA GENERALIZZAZIONE DEL CONTINUO NUMERICO

I.

I NUMERI NON ARCHIMEDEI

§ 43. **Riassunto delle proprietà dei numeri reali.** — Riassumiamo le principali proprietà dei numeri reali.

1) (*Operazioni*). I numeri reali costituiscono un *corpo* di enti trasformato in se stesso dalle operazioni di *somma* e *prodotto:* a + b, ab.

2) (*Proprietà fondamentali delle operazioni*). La somma e il prodotto soddisfano alle proprietà commutativa e associativa:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc),$$

e il prodotto anche alla proprietà distributiva

$$(a + b)c = ac + bc.$$

3) (*Proprietà dello zero*). Esiste un numero ben determinato « lo *zero* (0) », che, per qualunque valore di a, soddisfa alla condizione:

$$a + 0 = a$$

$$(a - a = b - b ....).$$

Si ha, qualunque sia a,

$$a0 = 0.$$

Si ha, se

$$ab = 0,$$

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0.$$

4) (*Operazioni inverse*). I numeri reali costituiscono un corpo rispetto all'operazione inversa della somma, cioè è sempre possibile la *sottrazione:* a — b.

I numeri reali, *tolto lo zero,* costituiscono pure un corpo rispetto all'operazione inversa della moltiplicazione, cioè è sempre possibile la *divisione:* $\frac{a}{b}$.

5) (*Ordinamento*). I numeri reali formano una serie ordinata, cioè: se $a \neq b$ o $a > b$ o $b > a (a < b)$, e se $a > b$, $b > c$, anche $a > c$.

6) (*Continuità*). La serie ordinata dei numeri reali è *continua, nel senso di Dedekind,* cioè: se la serie stessa è divisa in due parti *(classi contigue)* per modo che ogni numero appartenga ad *una* delle due parti, ed ogni numero della prima parte sia minore di ciascun numero della seconda, allora esiste un *massimo* della prima parte o un *minimo* della seconda.

(Segue che la serie dei numeri susseguenti ad un dato, o quella dei numeri susseguenti ad un dato e precedenti ad un altro, sono pure continue).

7) (*Numeri positivi*). I numeri reali susseguenti allo 0 (*positivi* o > 0) formano un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione.

8) (*Condizione di diseguaglianza o di sottrazione*). Se a, b sono due numeri reali e positivi, ed

$$a > b,$$

esiste fra i numeri reali e positivi la differenza:

$$c = a - b \quad (\text{ossia} \quad a = b + c);$$

viceversa se — essendo a, b, c positivi —

$$c = a - b \quad (a = b + c),$$

si ha

$$a > b.$$

9) (*L'unità*). Esiste un numero positivo ben determinato « l'*unità* (1) » tale che, qualunque sia il numero reale a,

$$a1 = a,$$

$$\left(\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \ldots\right).$$

10) (*Gl'interi*). I numeri somme di unità (*interi positivi* o « numeri naturali ») formano entro la serie ordinata dei numeri reali una serie *bene ordinata* (in cui ad n succede $n + 1$).

I numeri interi e positivi formano un corpo rispetto alla somma, e soddisfano alla *condizione di diseguaglianza,* cioè: se a e b sono interi positivi ad $a > b$, $a - b$ è un numero intero positivo.

11) (*Proposizione d'Archimede*). Dati due numeri reali e positivi a, b, esiste sempre qualche intero positivo n per cui

$$na > b.$$

Queste proprietà dei numeri reali si riattaccano al duplice aspetto in cui essi si presentano, cioè al fatto che la totalità dei numeri reali nasce dall'estensione dei numeri naturali ordinali, ed i numeri reali positivi nascono come estensione dei numeri naturali cardinali; per es. sono essenzialmente *proprietà cardinali* le prop. 7) 8) 11).

L'insieme delle proprietà cardinali dei numeri reali e positivi, corrisponde alla condizione che questi numeri si possano riguardare come « rapporti di grandezze » o come « trasformazioni di un sistema di grandezze in se stesso (moltiplicazioni) »; e ciò per riguardo ad un *sistema di grandezze* caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Sommabilità. — Somma commutativa e associativa. — Ordinamento soddisfacente alla condizione di diseguaglianza. — Proposizione d'Archimede. — Continuità o integrità.

Ora poichè queste proprietà delle grandezze sono anche proprietà dei numeri reali e positivi, così può dirsi che « *i numeri reali e positivi formano, essi stessi, un* (particolare) *sistema di grandezze soddisfacente alle condizioni indicate* ». La maggiore determinazione del sistema dei numeri è in rapporto colla definizione di una seconda operazione oltre la somma: il prodotto, rispetto a cui le grandezze numeriche formano pure un corpo.

La relazione fra numeri e grandezze può anche essere espressa sotto forma geometrica.

La serie dei numeri reali si può porre in corrispondenza biunivoca ordinata coi punti d'una retta, e la serie dei numeri reali e positivi colla serie dei punti d'una semiretta. Allora *le proprietà per cui i numeri reali positivi formano un sistema di grandezze si traducono nei postulati di: congruenza fra segmenti, ordine continuo dei segmenti crescenti, postulato d'Archimede* (cfr. Art. 5).

In particolare appare di qui che la prop. d'ARCHIMEDE (11) è conseguenza della continuità nel senso di DEDEKIND (prop. 6). (Cfr. Art. 5).

§ 44. **I trasfiniti di Cantor come numeri non-archimedei.** — Ci proponiamo ora di estendere il concetto del numero reale lasciando cadere la condizione d'ARCHIMEDE, per modo che la serie dei nuovi numeri *(non-archimedei)* comprenda un *infinito* ω o un *infinitesimo attuale* η rispetto all'unità:

$$n < \omega \quad \text{o} \quad n > \eta$$

per qualunque intero positivo n ($n = n \cdot 1$).

Si tratta di vedere fino a che punto si possono conservare pei numeri non-archimedei le proprietà dei numeri ordinarii sopra riassunte.

Anzitutto le proprietà dei numeri interi.

Una generalizzazione dei numeri interi positivi è data dai trasfiniti di CANTOR

$$0,\ 1,\ 2....,\ \ \omega,\ \omega+1....,\ \ ....,$$

comprendente un infinito attuale ω. Ma abbiamo già osservato che *se si conserva pei trasfiniti di Cantor il concetto ordinale della somma* (ritenendo che $n+\omega$ designi « il numero immediatamente successivo alla serie

$$n+1,\ \ n+2,\ \ ....,$$

si trova

$$1+\omega = 2+\omega = ... = \omega,$$

e quindi *non vale la proprietà commutativa* della somma

$$1+\omega \neq \omega+1.$$

Si può togliere questo inconveniente modificando la definizione della somma, e precisamente ponendo:

$$(a\omega+b)+(c\omega+d) = (a+c)\omega+(b+d).$$

Tuttavia questi trasfiniti non soddisfano interamente alle proprietà (10) dei numeri interi positivi: formano una serie ben ordinata, costituiscono un corpo rispetto alla somma, ma *non verificano la condizione di sottrazione* poichè, pur essendo

$$\omega > b \qquad (b = 1,\ 2....,),$$

non esiste

$$\omega - b.$$

Se si vuole soddisfatta questa condizione aggiungendo ai precedenti trasfiniti

$$\omega-1,\ \ \omega-2,\ \ ....,$$

si perde la condizione che i trasfiniti stessi formino una serie ben ordinata, poichè non esiste un minimo della serie decrescente

$$\omega-1,\ \ \omega-2.....$$

Così la proprietà dei numeri interi positivi di formare una serie ben ordinata appare incompatibile colle altre proprietà (10) dei numeri interi positivi in un sistema non-archimedeo.

Questa incompatibilità di una serie ben ordinata d'interi positivi non-archimedei coi postulati delle grandezze numeriche, si riconduce al legame per cui la condizione d'Archimede dipende come conseguenza dalla continuità nel senso di Dedekind.

Infatti se si considerano i numeri

$$a\omega+b$$

per b reale ≥ 0 e per a intero e positivo, si ottiene una serie continua nel senso di DEDEKIND (prop. 6), poichè la partizione in classi contigue

$$a\omega+b \quad (a>0), \qquad b \quad (a=0),$$

ammette (come ogni altra partizione analoga) un numero limite (ω). Ora se la serie suddetta potesse riguardarsi come

una serie di grandezze, soddisfacente alla condizione di diseguaglianza, si dedurrebbe la prop. d'ARCHIMEDE, in contrasto coll'ipotesi

$$\omega > n.$$

Una serie di numeri non-archimedei positivi $a\omega + b$, soddisfacente alla condizione di sottrazione, conterrà non solo i numeri corrispondenti a b positivo, ma anche quelli corrispondenti a b negativo. Una serie siffatta

$$a\omega \pm b, \qquad (b \geq 0)$$

non sarà più continua nel senso di DEDEKIND, ma sarà una *serie continua nel senso di Cantor se è continua rispetto* a b. Infatti due successioni una crescente e l'altra decrescente di numeri

$$a_n\omega + b_n, \quad a_n'\omega + b_n',$$

saranno da ritenere convergenti solo nel caso che — per n assai grande — sia

$$a_n = a_n' = a_{n+1} = a_{n+1}' \ldots = a,$$

e che

$$b_n b_{n+1} \ldots, \quad b_n' b_{n+1}' \ldots$$

formino successioni convergenti, nel qual caso ammettono il numero-limite $a\omega + \lim b_n$; in ispecie le successioni 1, 2, 3...., ω, $\omega - 1$, $\omega - 2$...., non sono convergenti perchè è $(\omega - n) - n > n$.

Si noti che il sistema $a\omega \pm b$, ove a percorre valori interi, corrisponde al continuo non-archimedeo di cui si è data la rappresentazione geometrica nell'Art. 5: sistema di rette parallele prese nell'ordine di successione da sinistra a destra e dal basso all'alto.

Si può generalizzare il sistema stesso facendo *variare anche* a *in modo continuo*. Con ciò non cessa di valere la continuità nel senso di CANTOR, e si conservano del pari le proprietà delle grandezze numeriche. A questa estensione si è condotti intanto dalla condizione che *esista* per a qualunque *il prodotto* $a\omega$. Ma la condizione che i numeri non-archimedei formino un corpo rispetto ad un'operazione avente le proprietà del prodotto porta altre conseguenze che dobbiamo esaminare più da vicino.

§ 45. **Prodotto di numeri non-archimedei.** — Prendiamo come punto di partenza il sistema non-archimedeo più generale

$$a\omega + b,$$

dove a e b percorrono tutti i valori reali, positivi o negativi, e dove

$$a\omega + b > c\omega + d$$

se

$$a > c$$

o se

$$a = c, \quad b > d.$$

Si tratta di vedere se possa definirsi il prodotto

$$(a\omega + b)\ (c\omega + d)$$

in guisa che il sistema suddetto formi un corpo, e soddisfacendo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Evidentemente *una tale definizione dipende dalla posizione*

$$\omega^2 = \alpha\omega + \beta,$$

perchè $(a\omega + b)(c\omega + d) = ac\omega^2 + (bc + ad)\omega + bd.$

Così nella teoria dei numeri complessi ordinarii si soddisfa alle condizioni enunciate ponendo

$$\omega^2 = -1.$$

Ma facendo in tal guisa, e in generale se $\alpha < 0$ o $\alpha = 0$, $\beta < 0$, non si soddisfa alla condizione 7) che « *i numeri positivi* (> 0) *formino un corpo rispetto al prodotto* ».

Poniamo

$$\omega^2 = \alpha\omega + \beta \quad \text{con} \quad \alpha \geq 0,$$

e domandiamoci se l'insieme dei numeri positivi $a\omega + b$ $(a > 0)$ può costituire un corpo rispetto al prodotto così definito.

A tal fine si considerino due numeri

$$\omega - x, \quad \omega - y \qquad (x > 0,\ y > 0);$$

si avrà $(\omega - x)(\omega - y) = \omega^2 - (x + y)\omega + xy =$

$$= \{\alpha - (x + y)\}\omega + (xy + \beta),$$

e però

$$(\omega - x)(\omega - y) < 0$$

se

$$x + y > \alpha.$$

Dunque *i numeri positivi* $a\omega \pm b$ *con* $a > 0$ *non possono formare un corpo rispetto ad un'operazione che goda delle proprietà del prodotto.*

NOTA. L'ipotesi precedente ($\alpha \geq 0$) è incompatibile anche colle proprietà dello zero (3) rispetto alla totalità dei numeri $a\omega \pm b$: esistono dei *divisori dello zero,* cioè dei numeri diversi da 0 il cui prodotto è 0.

Invero, se $\beta \geq 0$, si può rendere

$$(\omega - x)(\omega - y) = 0,$$

determinando x, y in modo che

$$\omega^2 - (x+y)\omega + xy = 0,$$
$$\{\alpha - (x+y)\}\omega + (\beta + xy) = 0,$$
$$x + y = \alpha \qquad xy = -\beta;$$

e queste equazioni definiscono dei valori reali di x, y. Se invece $\beta < 0$, si può rendere analogamente

$$(\omega - x)(\omega + y) = 0.$$

§ 46. **Corpo di numeri non-archimedei.** — Abbiamo dimostrato che se si parte da un sistema di grandezze non-archimedeo, contenente una sola specie di unità infinite attuali rispetto all'unità principale (1), si ottiene un sistema di numeri $a\omega \pm b$ ($a \geq 0$), che non può formare un corpo relativamente ad un'operazione soddisfacente alle proprietà del prodotto. Un corpo di numeri non-archimedei positivi (in cui si supponga definito il prodotto) deve essere più esteso, e precisamente deve contenere una nuova unità ω^2, infinita d'ordine superiore rispetto ad ω; d'accordo coll'intuizione per cui

$$\omega^2 > n\omega,$$

per $n = 1, 2, 3.....$

Ora richiamando le proprietà dei numeri a più unità (Art. 10) si ha che un sistema di numeri della forma $a\omega^2 + b\omega + c$ non può in alcun caso formare un corpo rispetto a due operazioni cui spettino le proprietà della somma e del prodotto: quindi si è condotti a considerare ω^3 come una nuova unità infinita d'ordine superiore rispetto ad ω^2, e così via di seguito.

I numeri della forma

$$a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + ... + a_1\omega + a_0$$

dove n percorre tutti i valori 0, 1, 2, 3...., e, dentro il sistema di questi, i numeri positivi ($a_n > 0$) danno luogo ad un corpo di numeri non-archimedei soddisfacente alle proprietà della somma e del prodotto, alla continuità nel senso di CANTOR, e alla condizione di diseguaglianza delle grandezze numeriche.

Ma nel sistema anzidetto non è possibile la divisione.

Per rendere possibile la divisione occorre:

1) aggiungere la serie delle unità infinitesime

$$\eta = \frac{1}{\omega}, \quad \eta^2 = \frac{1}{\omega^2} ....;$$

2) considerare numeri formati con *infinite unità infinetisime,* quali risultano per es. dalla divisione

$$\frac{1}{a + b\omega} = \eta\{b + a\eta\}^{-1},$$

sviluppando $(b + a\eta)^{-1}$ colla serie binomiale.

In conclusione *un corpo di numeri non-archimedei positivi entro cui sieno possibili le operazioni di somma, prodotto e divisione, contiene numeri con un numero arbitrariamente grande (ma finito) di unità infinite e con un numero infinito di unità infinitesime, della forma*

$$\alpha) \qquad a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + ... + a_1\omega + a_0 + \sum_1^\infty b_m\eta^m.$$

La *condizione di continuità* di CANTOR non dice più nulla rispetto a numeri di questa forma, ma essa può surrogarsi colla condizione che « *ogni sistema di numeri formati con un numero finito di unità sia continuo (nel senso di Cantor)* ».

Questa condizione importa la *continuità rispetto ai coefficienti* $a_0a_1a_2....$, $b_1b_2....$, alla quale si perviene ugualmente — in base alla possibilità del prodotto — se si suppone che uno solo dei coefficienti *varii* in modo continuo.

Il sistema α) corrisponde ai corpi continui di numeri non-archimedei, contenenti il *minimo sistema* possibile *di*

unità irriducibili. È possibile ottenere corpi più generali in cui si considerino anche potenze non intere di ω; tali sono i corpi di numeri di VERONESE e quelli dei *monosenii* di LEVI-CIVITA.

Ma, tralasciando questa possibile generalizzazione, noi ci proponiamo di vedere ora come si possa effettivamente costruire un corpo minimo di numeri non-archimedei.

§ 47. **Numeri funzionali non-archimedei.** — Per costruire effettivamente un corpo minimo di numeri non-archimedei soddisfacente alle condizioni indicate innanzi, ricorreremo all'idea genialmente svolta da HILBERT, cui daremo uno sviluppo adatto allo scopo che qui viene proposto.

Consideriamo le funzioni razionali fratte del tipo:

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{a_n t^n + ... + a_1 t + a_0}{b_m t^m + ... + b_1 t + b_0}.$$

Due funzioni siffatte

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}, \quad \frac{\chi(t)}{\psi(t)}$$

si possono confrontare per t assai grande: accade allora che (escluso il caso d'uguaglianza) da un certo punto in poi

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} > 0$$

o

$$\frac{f}{\varphi} - \frac{\chi}{\psi} < 0.$$

Nel primo caso scriveremo

$$\frac{f}{\varphi} > \frac{\chi}{\psi},$$

nel secondo

$$\frac{f}{\varphi} < \frac{\chi}{\psi}.$$

Con ciò le funzioni anzidette vengono ordinate in una serie di funzioni crescenti. Gli enti di questa serie (le funzioni) che succedono alla costante 0 (> 0), si possono riguardare come numeri positivi, costituenti un corpo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e divisione, definite ponendo:

$$\frac{f}{\varphi} + \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi + \chi\varphi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} \cdot \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\chi}{\varphi\psi},$$

$$\frac{f}{\varphi} : \frac{\chi}{\psi} = \frac{f\psi}{\varphi\chi},$$

L'insieme dei numeri-funzioni $\lesseqgtr 0$, forma anche un corpo rispetto alla sottrazione.

Ora i numeri che abbiamo definito sono numeri non-archimedei riducibili alla forma

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0 + \frac{b_1}{t} + \frac{b_2}{t^2} + ...,$$

ossia

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + ... + a_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + ...,$$

dove

$$\omega = t, \quad \eta = \frac{1}{t}.$$

NOTA. Riguardo all'*estensione* del corpo dei numeri funzionali definito innanzi, avvertiamo che in esso *si possono assumere ad arbitrio quantisivogliano coefficienti*

$$a_n,\ a_{n-1}....,\ a_0,\ b_1,\ b_2,....,\ b_m,$$

ma *non la serie infinita*

$$b_1 b_2 .....$$

Si può generalizzare i numeri funzionali suddetti, considerando *le più generali serie convergenti*

$$a_n t^n + ... + a_0 + \sum_1^\infty b_m t^{-m}$$

(anche non nascenti dalla divisione di funzioni razionali fratte) e comparandole nel modo indicato innanzi per le funzioni razionali. Allora la serie dei coefficienti

$$b_1 b_2 .....$$

si può assumere ad arbitrio compatibilmente con certe disuguaglianze.

È lecito del resto togliere anche questa restrizione, considerando le *serie divergenti* $\Sigma b_m t^{-m}$, purchè si modifichi il modo di confronto di

$$\Sigma b_m t^{-m}, \quad \Sigma c_m t^{-m},$$

cercando quale sia il segno della differenza

$$\sum_1^n b_m t^{-m} - \sum_1^n c_m t^{-m},$$

per n *e* t *crescenti, dove* t *si faccia crescere assai rapidamente rispetto ad* n.

§ 48. **Confronto dei numeri non-archimedei coi numeri reali.** — Confrontiamo i numeri non-archimedei costruiti testè come numeri-funzionali (hilbertiani) coi numeri reali, tenendo presenti le proprietà 1)....11) di questi, enunciate al § 43. Vediamo allora che i nostri numeri non-archimedei soddisfano come i numeri reali alle condizioni 1) 2) 3) 4) 5) 7) 8) 9) cioè:

L'insieme dei numeri non-archimedei forma un corpo rispetto alle operazioni di somma e prodotto (1) e alle loro inverse, sottrazione e divisione (4); quelle operazioni danno luogo alle proprietà commutativa, associativa e distributiva (2) e alle proprietà dello zero (3) e dell'unità (9).

L'insieme dei numeri non-archimedei è ordinato per numeri crescenti in guisa che fra due numeri disuguali ne esiste sempre qualcuno maggiore dell'uno e minore dell'altro (5). I numeri non-archimedei seguenti allo zero (positivi) formano un corpo rispetto alla somma, al prodotto e alla divisione (7) e soddisfano alla condizione di sottrazione delle grandezze (8).

L'abbandono della condizione d'ARCHIMEDE 11) ci ha portato a *modificare necessariamente* le proprietà 6) 10).

Non vale per la serie dei numeri non-archimedei la continuità nel senso di DEDEKIND 6). In luogo di essa si ha che *ogni sistema di numeri formato con un numero finito d'unità irriducibili infinite ed infinitesime è continuo nel senso di Cantor e però integro* (i coefficienti percorrono tutti i valori reali). La condizione d'integrità si può render soddisfatta — come si è detto — anche per il sistema dei numeri formati con infinite unità.

I numeri non-archimedei interi e positivi:

$$a_n \omega^n + ... + a_0 + \Sigma b_n \eta^n$$

(con a, b interi, $a_n > 0$) *non formano più una serie ben ordinata* (10), ma costituiscono sempre un corpo rispetto alla somma e al prodotto.

In sostanza tutte le proprietà cardinali dei numeri reali (eccezion fatta per la prop. d'ARCHIMEDE) appartengono ai nostri numeri non-archimedei; le proprietà ordinali si estendono solo in parte, modificandosi le 6) 10).

II.

SU ALCUNE POSSIBILI INTERPRETAZIONI DEI NUMERI NON-ARCHIMEDEI

§ 49. **Ordini d'infinito di Du Bois Reymond.** — Nella teoria dell'accrescimento delle funzioni di DU BOIS REYMOND si sogliono confrontare gli *ordini d'infinito* o *d'infinitesimo delle funzioni* d'una variabile t crescenti o decrescenti oltre ogni limite (ad es. per $t = \infty$). Essendo $f(t)$ e $\varphi(t)$ due funzioni crescenti si cerca se

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \infty$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \text{cost} \ (\pm 0)$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} = 0;$$

nei tre casi si dice rispettivamente che l'ordine d'infinito di f è maggiore, uguale o minore di quello di φ.

Analogamente si dica per gli ordini d'infinitesimo salvo lo scambio delle parole « maggiore » e « minore ».

In particolare gli ordini d'infinito delle funzioni

$$a_1 t + a_0, \quad a_2 t^2 + a_1 t + a_0 ....,$$

sono rispettivamente uguali a quelli di

$$t,\quad t^2 \ldots\ldots,$$

e si lasciano rappresentare coi numeri naturali

$$1,\quad 2, \ldots\ldots$$

La costante a_0 può considerarsi come un *infinito d'ordine* 0; e gl'infinitesimi

$$\frac{1}{t},\quad \frac{1}{t^2} \ldots\ldots,$$

come *infiniti d'ordine negativo*

$$-1,\quad -2 \ldots\ldots$$

Si possono *considerare ordini d'infinito fratti ed irrazionali* corrispondenti a potenze t^x con x fratto o irrazionale.

Ma *i numeri reali non esauriscono la serie dei possibili ordini d'infinito delle funzioni.*

Infatti:

1) l'ordine d'infinito di alcune funzioni per es. di e^t è superiori ad ogni numero reale e positivo n:

$$\lim_{t=\infty} \frac{e^t}{t^n} = \infty;$$

2) l'ordine d'infinito di alcune funzioni, per es. di $\log t$, deve ritenersi > 0 ma inferiore ad ogni numero reale e positivo n:

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log t}{t^n} = 0;$$

3) esistono funzioni crescenti il cui *ordine d'infinito* è *incomparabile* perchè $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$ per t crescente può non tendere ad un limite ed oscillare fra 0 e ∞.

Supponiamo di aver delimitato un corpo di funzioni comprendente t^x per x reale qualsiasi, i cui ordini d'infinito sieno comparabili. Questi ordini d'infinito, in cui si trovano infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ad 1, costituiscono una *classe di grandezze non archimedee;* potranno riguardarsi come numeri soddisfacenti alle proprietà indicate nel precedente paragrafo?

Si tratta per ciò di vedere come possano definirsi la *somma* e il *prodotto* di due ordini α, β.

La somma si definisce subito:

se

$$\alpha = \text{ord. inf. } f(t)$$
$$\beta = \text{ord. inf. } \varphi(t),$$
$$\alpha + \beta = \text{ord. inf. } f\varphi;$$

e rimangono soddisfatte le proprietà associativa e commutativa.

Postulando ora la proprietà distributiva del prodotto si avrà per n intero e positivo

$$n\alpha = \text{ord. inf. } f^n(t),$$

formula che per estensione conduce alla definizione generale del prodotto:

$$\beta\alpha = \text{ord. inf. } \varphi\{f(t)\}.$$

Ma *il prodotto così definito non gode della proprietà commutativa,* giacchè, ponendo per es.

$$\lg = \text{ord. inf. } \log t,$$

si avrà

$$n \lg = \text{ord. inf. } \log {}^n t$$
$$\lg \cdot n = \text{ord. inf. } \log t^n$$
$$= \text{ord. inf. } n \log t,$$

mentre

$$\lim_{t=\infty} \frac{\log {}^n t}{n \log t} = 0,$$

sicchè

$$n \lg < \lg \cdot n.$$

§ 50. **Probabilità.** — I numeri non-archimedei trovano applicazione in un problema di probabilità che qui citiamo a titolo d'esempio d'una classe più generale. Si supponga di far cadere un punto P entro un quadrato, e si postuli che:

1) date nel quadrato due *aree equivalenti* vi sia *uguale probabilità* che P cada nell'una o nell'altra;

2) date due *linee di ugual lunghezza* vi sia pure *ugual probabilità* che P cada sull'una o sull'altra.

Ciò posto si consideri la probabilità che P cada in un

luogo $S+s$ contenuto nel quadrato e costituito da un'area S (contorno incluso) e da una linea s fuori di S; questa *probabilità è espressa da un numero della forma*

$$a+b\eta,$$

dove $0<a<1$, ed η è un infinitesimo.

Se $c+d\eta$ corrisponde alla probabilità che P cada in un luogo analogo $S'+s'$, la *somma*

$$(a+b\eta)+(c+d\eta)=(a+c)+(b+d)\eta$$

corrisponde alla probabilità che P cada entro

$$S+S'+s+s',$$

supposto tuttavia che S, S', s, s' non abbian parti comuni; questa condizione può sempre soddisfarsi sostituendo ad S', s' un'area equivalente e una linea d'ugual lunghezza, purchè sia

$$a+c<1.$$

Il *prodotto*

$$(a+b\eta)(c+d\eta)=ac+(ad+bc)\eta+bd\eta^2,$$

corrisponde alla *probabilità composta* che lanciando due punti P, Q questi cadano rispettivamente in $S+s$ ed $S'+s'$. Analogamente si definiscono i prodotti di più numeri.

I numeri misuranti le probabilità così definite sono numeri non-archimedei ordinarii compresi fra 0 *e* 1, *ma l'interpretazione diventa difettosa per i numeri con coefficienti negativi*

$$a-b\eta.$$

Infatti si consideri un rettangolo A d'area $a<1$, con un lato l di lunghezza 1; si presenta l'idea di misurare con $a-\eta$ la probabilità che un punto cada entro il rettangolo *escluso il lato* l, ma allora sommiamo ad A un rettangolo B d'area b ($<1-a$) avente comune con A il lato l; la probabilità che P cada in $A+B$ viene data da

$$a-\eta+b=a+b.$$

NOTA. *Per rimuovere quest' inconveniente* si sarebbe indotti a porre opportune convenzioni, operando su *aree prive di una parte del contorno* che possono sommarsi dando luogo ad aree analoghe; ad esempio le aree rettangolari colla base orizzontale private di due lati consecutivi (a destra e in alto) soddisfano a tale proprietà.

§ 51. **Angolo di due curve.** — Due curve tangenti, ad es. un cerchio con una sua tangente, formano un angolo che non può dirsi nullo ma è inferiore ad ogni angolo rettilineo (come già osservava EUCLIDE). Questo angolo fu considerato da GIORDANO (1220) sotto il nome di « angulus contingentiae », e CAMPANO, alla fine del secolo XIII, ebbe ad osservare che esso non è una grandezza della stessa specie degli angoli rettilinei.

Le discussioni intorno alla suddetta grandezza infinitesima, assai vive nel periodo di elaborazione del calcolo infinitesimale, condussero con NEWTON a comparare fra loro gli angoli di contingenza mercè le derivate d'ordine superiore delle funzioni.

Ora possiamo mostrare che gli angoli di contingenza, considerati accanto agli angoli rettilinei ordinarii, danno luogo ad un concetto più generale dell'*angolo di due linee* (analitiche) come elemento d'una *classe di grandezze non-archimedee misurabili da numeri della forma:*

$$b_0+b_1\eta+b_2\eta^2+\ldots. \qquad (b_0\geq 0).$$

A tale scopo si considerino due parabole d'ordine $n+1$, C, C', aventi un contatto d'ordine n nel punto (00):

$$y=a_1x+\ldots.+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}$$

$$y=a_1x+\ldots.+a_nx^n+a'_{n+1}x^{n+1},$$

limitandosi agli archi di esse che sono da una parte dell'origine, per es. per $y>0$.

Le due curve C, C' insieme al cerchio

$$x^2+y^2=r^2$$

determinano un'area $\alpha(r)$ che diventa infinitesima d'ordine $n+1$ con r; il $\lim_{r=0}\frac{\alpha(r)}{r^{n+1}}=b$ corrisponderà alla *misura dell'angolo di* C, C', che si assumerà per definizione data da

$$b\eta^n.$$

In particolare si può così esprimere l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y_1 = a_1 x + a_{n+1} x^{n+1},$$

colla retta: $$y_1 = a_1 x$$

che ha con essa un contatto d'ordine n, o l'angolo di contingenza di una parabola C:

$$y = a_1 x + ... + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1},$$

con la parabola C':

$$y = a_1 x + ... + a_n x^n,$$

questa retta o curva C' venendo considerata come una parabola d'ordine $n+1$ corrispondente ad

$$a'_{n+1} = 0.$$

Ciò posto si può definire in generale l'angolo di due qualsiansi curve analitiche

$$y_1 = a_1 x + a_2 x^2 + ...$$
$$y_1 = a_1' x + a_2' x^2 + ...,$$

passanti per l'origine 0 e considerate da una parte di 0 (ad es. per $y > 0$).

Questa definizione si lascia ridurre, mediante somma e differenza, al caso più semplice dell'angolo compreso fra una curva

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + ...,$$

ed una retta $$y_1 = a_1' x;$$

il quale si esprime mediante un numero della forma:

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + ...,$$

determinando b_0, b_1, b_2.... nel modo seguente:

1) b_0 è l'angolo delle due rette

$$y = a_1 x, \quad y = a_1' x;$$

2) $b_1 \eta$ è l'angolo di contingenza della parabola

$$y = a_1 x + a_2 x^2$$

colla sua tangente

$$y = a_1 x,$$

preso positivamente o negativamente secondochè l'elemento di parabola che si considera si trova da parte opposta della retta $y = a_1' x$ rispetto alla tangente suddetta, oppure dalla medesima parte;

3) $b_2 \eta^2$ è l'angolo di contingenza delle parabole osculatrici

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$y = a_1 x + a_2 x^2,$$

preso negativamente o positivamente secondochè esso è contenuto o no nell'angolo determinato dalla seconda parabola colla retta $y = a_1' x$ ecc.

Con ciò si ha una semplice interpretazione geometrica dei numeri non-archimedei

$$b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + ...$$

come misure delle grandezze di un sistema; ma in questo sistema non vi sono grandezze corrispondenti ai numeri infiniti ω, ω^2.... che nascerebbero dalla divisione dei precedenti $\left(\omega = \frac{1}{\eta},\ \omega^2 = \frac{1}{\eta^2} \text{ ecc.}\right)$.

III.

Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata

§ 52. **Condizioni di riferibilità d'una serie continua al continuo numerico.** — Colla costruzione dei numeri non-archimedei abbiamo investigato particolarmente le proprietà cardinali dei numeri reali, ponendone in luce i legami. Ora vogliamo studiarne più profondamente le proprietà ordinali, analizzando le condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata.

Una *serie* Σ di elementi si dirà *continua* se:

1) è dato in essa un ordine degli elementi che non ammette primo nè ultimo elemento, e tale che fra due elementi vi è sempre qualche elemento intermedio;

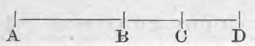
2) l'ordine della serie Σ soddisfa al postulato di Dedekind, cioè ogni partizione della serie in classi contigue è operata mediante un elemento di separazione, che è primo elemento di una delle parti o ultimo dell'altra.

Ora si ha il teorema [1]:

Affinchè una serie continua di elementi, Σ, *si possa porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali (continuo numerico) è necessario e sufficiente che si possa determinare in* Σ *un insieme di elementi,* S, *numerabile e ovunque denso sopra* Σ, cioè tale che fra due elementi di Σ vi sia sempre qualche elemento di *S*.

La condizione di CANTOR è evidentemente necessaria. Dimostriamo che è sufficiente. A tale scopo notiamo che — nell'ipotesi fatta — la serie numerabile *S* (ordinata secondo l'ordine di Σ) è tale che fra due elementi di essa vi è certo qualche elemento di *S*, quindi si può porre in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri razionali; ma poichè *S* è densa su Σ, questa riesce in corrispondenza ordinata colla serie dei numeri reali.

NOTA. Si abbia una serie continua Σ cui appartenga una serie numerabile *S*, tale che fra due elementi di *S* vi sia sempre qualche elemento di *S*. Se *S* non è ovunque densa sopra Σ non segue che Σ possa riferirsi ordinatamente al continuo numerico. Ma non segue neppure il contrario. L'unica deduzione che se ne trae è che « *S* è contenuta in una serie minima Σ′ riferibile al continuo numerico, che è parte di Σ ». Così ad es. si consideri un gruppo numerabile di punti *S*, ovunque denso sopra l'insieme dei segmenti *AB*, *CD* (v^i figura), e si supponga che tutt'al più uno dei due estremi *B*, *C* appartenga ad *S*; in questo caso Σ′ è costituito dall'insieme dei due segmenti $AB + CD$, escluso uno degli estremi *B*, *C*; Σ è il segmento *AD* di cui $AB + CD$ è una parte.



§ 53. **Ordine continuo di specie superiore al continuo numerico.** — Ora nasce la questione se la condizione di CANTOR, cioè l'esistenza d'un insieme di elementi numerabile e ovunque denso su Σ, sia o no conseguenza dell'ipotesi che Σ sia una serie continua, in altre parole « se ogni serie continua possa o no riferirsi al continuo numerico ». Ben inteso che la serie continua è definita nel modo ordinale colle condizioni 1) 2) del numero precedente, prescindendo da ogni *relazione* (come la *congruenza* pei segmenti rettilinei) che permetta di ritenere Σ una serie di grandezze.

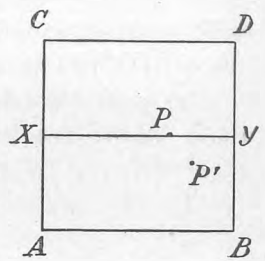
[1] Cfr. G. CANTOR « Math. Annalen, 46 » (1895).

A tale questione si risponde negativamente costruendo *un ordine continuo di specie superiore al continuo numerico*, cioè « una serie ordinata per modo che fra due elementi qualsiansi di essa vi sia sempre qualche elemento intermedio e che ogni partizione in classi contigue sia operata mediante un elemento di separazione (continuità di DEDEKIND), ma pur tale che non possa farsi corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri reali ».

A questo scopo consideriamo un quadrato *ABCD*. I punti di questo quadrato verranno ordinati in guisa che:

1) dati due punti *P*, *P′* si dirà che *P* segue a *P′* se *P* si trova *più alto* di *P′* (più distante dal lato *AB*);

2) se *P*, *P′* appartengono ad uno stesso segmento *XY* parallelo ad *AB*, cioè sono ugualmente alti, si dirà che *P* segue a *P′* se *P* si trova *a destra* di *P′* (più lontano da *AB*).



Si ottiene così una serie ordinata di punti Σ, che ha come primo elemento *A* e come ultimo elemento *D*.

L'ordine è tale che fra due punti vi è sempre qualche punto intermedio, ed è continuo nel senso di DEDEKIND perchè per ogni partizione della serie in classi contigue esiste un segmento *XY* parallelo ad *AB* tale che:

a) la partizione stessa dà luogo ad una partizione analoga sopra *XY*, e allora vi è su questo segmento un punto di separazione (ultimo elemento della classe inferiore o primo della separazione);

a) oppure i punti della classe superiore sono i punti più alti di *XY*, e allora *Y* è l'ultimo elemento della classe inferiore;

c) oppure i punti della classe inferiore sono i punti più bassi di *XY*, e allora *X* è primo elemento della classe superiore.

L'ordine della serie Σ gode così delle proprietà che spettano all'ordine di un ordinario segmento *MN*; togliendo gli estremi *A*, *B* si ha un ordine analogo a quello dei punti di una retta.

Si tratta di dimostrare che « non si può porre una corrispondenza ordinata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, o fra i punti di Σ' e i punti d'una retta ».

La seconda tesi si riconduce alla prima perchè i punti d'una retta si possono proiettare sui punti d'un semicerchio dal centro di questo, e quindi il semicerchio si lascia proiettare sopra un segmento rettilineo MN da un punto del semicerchio complementare.

Supponiamo dunque che si abbia una corrispondenza ordinata fra i punti di Σ e i punti d'un segmento MN, avente una certa lunghezza l. Ad ogni segmento XY del quadrato $ABCD$, parallelo ad AB, corrisponde un segmento $X'Y'$ contenuto in MN; ed a segmenti XY che si succedono per altezza crescente nel quadrato, corrispondono segmenti $X'Y'$ successivi senza punti comuni entro MN.

Ciò posto si consideri un intero positivo n arbitrariamente dato: fra le immagini di segmenti analoghi ad XY entro MN, ve ne sono certo *meno di* n, la cui lunghezza è $\geq \frac{l}{n}$.

Pertanto i segmenti XY paralleli ad AB si lasceranno classificare come segue:

1) un primo gruppo contenente al più 1 segmento la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{2}$;

2) un secondo gruppo contenente al più 2 segmenti la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{3}$;

. . . . . .

n) un n^0 gruppo contenente al più $n-1$ segmenti la cui immagine in MN è $\geq \frac{l}{n}$;

. . . . . .

La serie dei gruppi così formata comprende certo *tutti* i segmenti XY poichè ciascun di questi ha un'immagine non nulla in MN. Di più i segmenti dello n^0 gruppo si possono prendere in un determinato ordine di successione, per es. nell'ordine secondo cui si succedono in Σ. Con ciò la serie dei segmenti XY viene fatta corrispondere ordinatamente alla serie dei numeri naturali. Ma questa conclusione è assurda poichè l'anzidetta serie, come l'insieme dei punti X del

segmento AC, ha una potenza superiore ad un gruppo numerabile. c. d. d.

§ 54. **Continuo a più dimensioni.** — L'esempio addotto nel numero precedente mostra l'indipendenza dei tre postulati che secondo il § 52, caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata, cioè delle condizioni 1) 2) inerenti alla continuità della serie, e della condizione di CANTOR affermante l'esistenza d'un insieme denso e numerabile di elementi.

Ora quest'ultima condizione è di natura speciale e diversa dalle altre due; data una serie continua come puro ordine, non si ha in essa alcuna operazione costruttrice d'un tale insieme, alcun legame fra la scelta d'un insieme siffatto (nell'ipotesi che esista) e il concetto della serie data.

Si potrebbe presumere che questa difficoltà relativa alla definizione del continuo numerico come serie ordinata o *varietà ad una dimensione* (in senso astratto = *linea*) si rispecchiasse ugualmente nella definizione delle *varietà continue a due o più dimensioni*, che si trovano in corrispondenza continua col continuo numerico (xy) o (xyz) ecc.

Invece la definizione del continuo a più dimensioni si presenta sotto un nuovo punto di vista.

Limitiamoci ad indicare il teorema fondamentale che concerne la definizione genetica del continuo a due dimensioni (astrattamente = *superficie*) [1].

Anzitutto si *postuli* che: Gli elementi « *punti* » di una *superficie* v_2 (semplicemente connessa, aperta) si possono distribuire in una *distribuzione reticolare* costituita da *due fasci di linee generatrici* v_1 per modo che:

1) Ogni v_1 sia una serie continua (nel senso di DEDEKIND = ipotesi 1) 2) del § 52);

2) Ogni punto di v_2 appartenga ad *una* linea d'un fascio e ad una dell'altro;

3) Una linea d'un fascio e una dell'altro abbian comune *un* punto (intersezione);

[1] Cfr. F. ENRIQUES, « Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate.... ». Rendic. Circolo Mat. di Palermo 1898.

Cfr. pure l'Art. III, I di F. ENRIQUES nella « Encyclopädie der Math. Wissenchaften » (n. 15).

4) Tre linee d'un fascio intersecano due linee dell'altro in punti che si susseguono nel medesimo ordine sulle due linee.

(Segue il concetto d'*intorno* d'un punto su v_2 rispetto alla distribuzione reticolare considerata e quindi di *punto limite* di una serie di punti sempre relativo alla distribuzione suddetta).

5) Due distribuzioni reticolari diverse di v_2 sono tali che un punto limite d'una serie rispetto all'una è pure limite della serie stessa rispetto all'altra distribuzione.

Questi postulati definiscono il concetto della superficie v_2 *come concetto astratto in ordine alle trasformazioni continue* (conservanti i punti limiti).

Si accordi ora il postulato esistenziale:

6) *Esistono in* v_2 *almeno tre fasci di linee generatrici unisecantisi,* che combinati a coppie dan luogo a (tre) diverse distribuzioni reticolari di v_2.

In base a questo postulato esistenziale si può porre una corrispondenza continua fra i punti di v_2 *e le coppie di numeri* (xy), in modo che le linee di due dei fasci considerati vengano rappresentate da $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.

Ciascuna di queste varietà unidimensionali v_1 risulta riferibile al continuo numerico $\{(y)$ o $(x)\}$ per il fatto di essere generatrice di un continuo duedimensionale *che ammette generazioni diverse,* quantunque non si sia postulato in principio, per la v_1 stessa, l'esistenza d'una serie numerabile e densa secondo l'ipotesi di CANTOR.

§ 55. **Osservazioni finali.** — Nell'analisi del concetto di numero siamo partiti da due operazioni logiche fondamentali:

1) *riunire* o *associare* più oggetti dati in una classe,

2) *ordinare* più oggetti dati in una serie.

A queste due operazioni si riattacca la genesi dei due concetti di *numero cardinale* ed *ordinale;* la serie dei numeri naturali risulta già dal subordinare a queste operazioni i dati elementari di ogni pensiero dotato di *riflessività* su se stesso.

Lo sviluppo del concetto di numero ci mostra in qual modo si riesca a subordinare progressivamente alle stesse operazioni fondamentali del riunire e dell'ordinare, delle intuizioni che sono suggerite alla nostra mente da realtà esterne sempre più vaste, quali sono specialmente le intuizioni geometriche elaborate nei concetti di grandezza e di linea (superficie ecc.).

Appaiono quindi in luce le condizioni in cui i concetti generalizzati del numero cardinale ed ordinale si possono unificare in una veduta più astratta.

Questo processo d'unificazione e d'astrazione è parte integrante dell'adattamento che si compie nello sviluppo storico dei concetti. Infatti su questa base si è costituita la Matematica moderna, identificando — con DESCARTES — l'Analisi e la Geometria nella Geometria analitica.

Sarebbe errore storico e logico non vedere in siffatta identificazione che « un metodo di soluzione dei problemi geometrici come applicazione dell'Analisi ». La Geometria analitica ha avuto ed ha altrettanto valore per l'Analisi che per la Geometria, foggiando in modo più generale i concetti analitici sulle intuizioni geometriche; ciò appare lumeggiato negli sviluppi successivi del Calcolo infinitesimale, e nella formazione di alcune fra le più alte teorie dell'Analisi moderna (teoria dei gruppi di trasformazioni di S. LIE, teoria delle funzioni algebriche, curve, superficie, ecc.).

Così, la critica delle nozioni fondamentali e lo studio dei rapporti annodantisi fra le più evolute dottrine matematiche, la filosofia e la storia, conducono ugualmente ad una veduta unificatrice, avversa al particolarismo scientifico che pretende classificare entro quadri rigidamente distinti i varii ordini di concetti, costruiti a rappresentare una medesima realtà.

ARTICOLO DECIMO

Dei numeri complessi a due e a più unità di DUILIO GIGLI a Pavia.

CAP. I. - LE ORIGINI DELLA TEORIA DELL'IMMAGINARIO

§ 1. **Le equazioni cubiche.** — La teoria dei numeri immaginari ha avuto origine dalle ricerche degli Algebristi italiani del Cinquecento, intorno alla risoluzione delle equazioni cubiche.

Quest'affermazione potrà sorprendere chi osservi che già le equazioni di 2° grado possono condurre alla considerazione di radici quadrate di numeri negativi, dalla qual considerazione appunto si è condotti alla introduzione dell'immaginario. Ma si deve riflettere che le equazioni di 2° grado a discriminante negativo corrispondono a problemi geometrici, meccanici etc., che non ammettono soluzioni; invece le equazioni cubiche offrono il primo esempio di *problemi possibili*, la soluzione dei quali è data da numeri espressi mediante radici quadrate di numeri negativi.

Ai matematici del principio del secolo XVI l'uso dei simboli algebrici era quasi del tutto sconosciuto; tuttavia essi distinguevano i problemi in classi, che son quelle stesse che facciamo noi, avendo riguardo al grado delle equazioni nelle quali i problemi si traducono. Ma, rifuggendo dalla considerazione dei numeri negativi, suddividevano in classi diverse problemi fra i quali non facciamo oggi distinzione.

In particolare facevano tre classi dei problemi che dipendono da equazioni cubiche prive del termine di 2° grado;

cioè trattavano partitamente i tre casi:

$a)$ $\qquad x^3 + px = q,$

$b)$ $\qquad x^3 = px + q,$

$c)$ $\qquad x^3 + q = px.$ $\qquad$ (p e q positivi) (1).

Fu il bolognese SCIPIONE DAL FERRO (1465-1526) il primo che, intorno al 1515, riuscì a compiere la risoluzione dell'equazione $a)$. Ma non si sa quale procedimento egli seguisse, perchè non pubblicò per le stampe i risultati delle sue indagini (2).

Queste furono riprese da NICOLÒ TARTAGLIA (1500?-1557), che trovò regole per ciascuno dei tre problemi $a)$, $b)$ e $c)$ (1535); le apprese da lui GIROLAMO CARDANO (1501-1576), il quale le divulgò, corredandole di dimostrazioni, col suo *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unicus*, stampato a Norimberga nel 1545. Ne trattarono poi il TARTAGLIA, nel 9° libro dei *Quesiti et inventioni diverse* (Venezia, 1546), e, molto diffusamente, il bolognese RAFFAELE BOMBELLI nella sua *Algebra* (Bologna, 1572) (3).

Per rammentare qui come si risolva l'equazione cubica, facciamolo riproducendo, appunto dai trattati del CARDANO e del BOMBELLI, le ingegnose argomentazioni geometriche, attraverso le quali la risoluzione dovette essere per la prima volta raggiunta. Esse tenevan luogo pei matematici di quel tempo degli algoritmi algebrici, che a noi permettono di fare tanta economia di pensiero. Ma quelle argomentazioni, per le quali si dà corpo all'equazione, discutendola su di un problema di geometria, del quale essa sia l'espressione, meritano ancora che ne diamo un saggio.

(1) Tralasciavano il caso dell'equazione

$$x^3 + px + q = 0,$$

che non può avere radici positive.

(2) V. L. FRATI, *Scipione dal Ferro* (Boll. di bibliogr. e storia delle Sc. matem., XII, 1910).

(3) Queste opere, insieme al libro *De regula Aliza* del CARDANO, del quale diremo poi, ebbero un illustratore sagace in PIETRO COSSALI, autore dell'opera *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra*, stampata a Parma nel 1797.

Ponendo l'equazione

$a)$ $\qquad x^3 + px = q,$

noi chiediamo di determinare un cubo ed un parallelepipedo soddisfacenti a queste condizioni:

1) l'altezza del parallelepipedo deve essere eguale al lato x del cubo;

2) il parallelepipedo deve avere area di data base p;

3) cubo e parallelepipedo devono avere volumi di data somma q.

Possiamo intendere che il parallelepipedo abbia ad essere ortogonale. Di esso non è data la base e solo è detto che questa deve avere una data area p; non sono cioè date le dimensioni, siano u e $3v$, della base, ma ne è dato il prodotto:

$$u \cdot 3v = p.$$

È sempre possibile determinare due numeri positivi, dei quali siano prefissati prodotto e differenza; perciò alle condizioni enunciate aggiungiamo l'altra, che abbia ad essere

$$u - v = x,$$

cioè la condizione che il parallelepipedo ortogonale da determinarsi abbia per base un rettangolo di area p e inoltre di dimensioni u e $3v$, tali che la differenza $u - v$ eguagli l'altezza x del parallelepipedo stesso.

Colla nuova condizione il problema non cessa d'essere possibile se lo era, e soprattutto non si complica. Difatti un parallelepipedo come quello che ora chiediamo di determi-

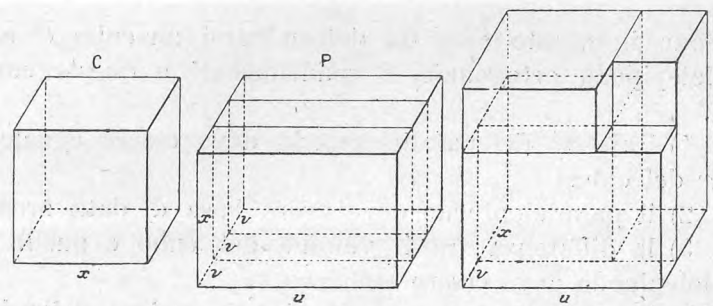


Fig. 1.

nare si potrà decomporre in tre parallelepipedi eguali, aventi le dimensioni u, v ed x; e questi si potranno addossare al cubo di lato x nel modo che è indicato dalla figura; cioè si

potranno sommare col cubo così da formare un solido che il BOMBELLI chiamava *gnomonoide* e che è la differenza di due cubi, uno di lato u e l'altro di lato v. Dunque noi dobbiamo determinare uno gnomonoide di dimensioni u e v e di volume q. Deve essere

$$u^3 - v^3 = q.$$

Ma $v = \frac{p}{3u}$; quindi

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = q,$$

$$(1) \qquad (u^3)^2 - q \cdot u^3 - \frac{p^3}{27} = 0;$$

e infine

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$v = \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$(2) \qquad x = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Poco diversa è la discussione per l'equazione

$$b) \qquad x^3 = px + q.$$

Sono in questo caso da determinarsi un cubo C e un parallelepipedo ortogonale P soddisfacenti a queste condizioni:

1) l'altezza del parallelepipedo deve essere eguale al lato x del cubo;

2) il parallelepipedo deve avere base di data area p;

3) la differenza fra il volume del cubo e quello del parallelepipedo deve essere eguale a q.

Dinotiamo ancora con u e $3v$ le dimensioni della base del parallelepipedo P, che potremo ancora decomporre in tre parallelepipedi eguali di dimensioni u, v ed x. Deve essere

$$u \cdot 3v = p.$$

Ma noi aggiungeremo la condizione che sia anche

$$u + v = x.$$

Quando anche a questa possiamo soddisfare $\left(\text{ciò accade se } \frac{p}{3} \leq \frac{x^2}{4}\right)$, tre parallelepipedi di dimensioni u, v ed x si potranno tagliar via, cioè sottrarre dal cubo C nel modo che la figura indica. Rimarrà un solido che è somma di due cubi, uno di lato u e l'altro di lato v; e tal solido deve avere il volume q; deve essere

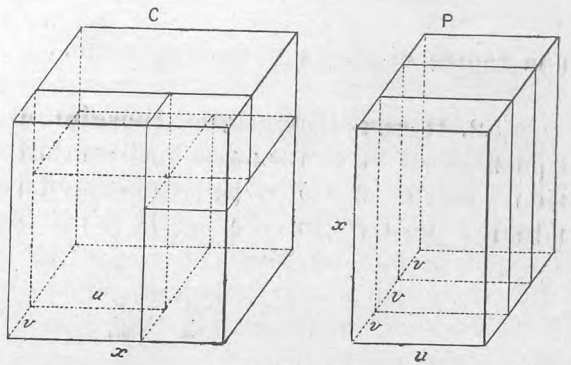


Fig. 2.

$$u^3 + v^3 = q.$$

Ma è ancora $v = \frac{p}{3u}$; quindi deve essere

$$u^3 + \frac{p^3}{27u^3} = q,$$

$$(1') \qquad (u^3)^2 - q \cdot u^3 + \frac{p^3}{27} = 0,$$

e infine

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

$$v = \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

$$(2') \qquad x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Il caso dell'equazione

$$c) \qquad x^3 + q = px$$

era dal TARTAGLIA e dagli altri ricondotto al precedente.

Posta l'equazione

$$y^3 = py + q,$$

e trovatane la radice α, sarà

$$x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{p - \frac{3\alpha^2}{4}}$$

una radice di c). La verifica è facile.

§ 2. **Il caso irriducibile. Indagini di G. Cardano.** — Le equazioni (1) ed (1′) sono le risolventi di 2° grado delle equazioni cubiche a) e b) rispettivamente. La (1) ha sempre discriminante positivo; invece per la (1′) il discriminante

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$$

può essere negativo: il caso nel quale ciò accade è quello che fu detto *irriducibile.*

È facile persuadersi che in ogni caso, epperò anche in questo, esistono un cubo C ed un parallelepipedo P soddisfacenti alle condizioni 1), 2) e 3) poste col problema b). Variando x, il volume del cubo C varia proporzionalmente alla terza potenza di x e quello del parallelepipedo P varia proporzionalmente alla prima. Quindi per valori piccoli di x il volume di C sarà piccolo e non potrà eguagliare la somma del volume di P più q; ma, crescendo x, attraverseremo tal valore per il quale l'agguagliamento ha luogo. Dunque due figure, un cubo C ed un parallelepipedo P, soddisfacenti al problema esistono: esiste sempre cioè una soluzione positiva dell'equazione b).

Ma col procedimento tartaleano vuolsi di più che le due figure C e P, soddisfacenti al problema, possano decomporsi nelle parti che abbiamo detto, così che i due cubi che si traggono da C abbiano insieme il volume q ed i tre parallelepipedi abbiano il volume px. Ora *è una siffatta decomposizione che può essere impossibile:* ciò avviene quando sia

$$q < \frac{1}{4} x^3$$

(perchè il minimo del volume dei due cubi si ha per $u = v = \frac{1}{2}x$ ed è $\frac{1}{4}$ del volume di C); o altrimenti quando sia

$$\frac{x^3}{4} < \frac{px}{3},$$

e quindi quando abbiasi

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0.$$

Queste circostanze si rispecchiano nella formola risolutiva (2′), la quale, quando il discriminante è negativo, involge simboli di operazioni impossibili.

L'operazione di estrazione di radice da numeri negativi dovette essere oggetto di discussioni fra i matematici del sec. XVI: ed il CARDANO nell'*Artis magnae etc.* credette di doverne far cenno, esponendo una *Regula falsum ponendi* per la risoluzione di questo problema (1).

Si divida 10 in due parti a e b, il prodotto delle quali sia eguale a 40. Il CARDANO risolveva il problema fondandosi sulla prop. V del secondo libro di EUCLIDE.

Se è dato un segmento AB e C ne è il punto medio e D un altro punto qualunque, sarà

$$AD \cdot BD + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2.$$

Abbia ora AB la lunghezza 10 e quindi $\overline{AC}^2$ abbia l'area 25. Se potessimo col punto D dividere il segmento in parti, delle quali il rettangolo avesse l'area 40, l'area di $\overline{CD}^2$ dovrebbe poi ottenersi sottraendo 40 da 25: *radix igitur residui, si aliquid maneret* (cioè la misura di CD), *addita et detracta ex* AC, *ostenderet partes; at, quia tale residuum est minus* (è negativo), *ideo imaginaberis R m. 15* ($\sqrt{-15}$); e sarà

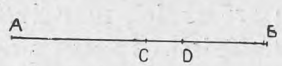


Fig. 3.

$$a = 5 + \sqrt{-15}, \quad b = 5 - \sqrt{-15}.$$

(1) Cap. XXXVII, Regula II. Non si pensi ad una regola di falsa posizione. *Numeri falsi* o *ficti* erano detti i numeri negativi; e qui si tratta d'una regola, nella quale si ammette la considerazione di numeri negativi.

Quanto a questa $\sqrt{-15}$ egli osserva: *Quae quantitas vere est sophistica, quoniam per eam non ut in puro minus* (cioè come colle comuni quantità negative), *nec in aliis operationibus exercere licet, nec venari quid sit.* Ed aggiunge: *Hucusque progreditur arithmetica subtilitas, cujus hoc extremum adeo est subtile ut sit inutile.*

Nello stesso tempo che il CARDANO scriveva così nell'opera che destinava alle stampe, in un suo manoscritto *Ars magna arithmeticae* (1), che ha quasi lo stesso contenuto di quell'opera, si fermava un po' più a lungo sulla considerazione di radici quadrate di numeri negativi. Dei sistemi (2)

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=16, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=6, \\ xy=20, \end{cases}$$

dà le soluzioni

$$(3+\sqrt{-7},\ 3-\sqrt{-7}) \text{ e } (3+\sqrt{-11},\ 3-\sqrt{-11}),$$

osservando: *Istud tamen verum est quod tales aequationes requirunt intellectum subtilissimum et sunt quasi* ***entia rationis.*** Aggiunge subito dopo: *R m. 9 non est 3p. nec 3m.* (la $\sqrt{-9}$ non è $+3$ nè -3), *sed* ***quaedam tertia natura abscondita.***

Il CARDANO non dovette credere mai alla utilità della considerazione di radici quadrate di numeri negativi nei problemi ricordati. Nè lo studio del caso irriducibile lo rimosse dall'idea che si trattasse di sottigliezze inopportune. Egli, che sapeva potere una equazione cubica ammettere fino a tre radici, nell'*Artis magnae etc.* si limita a suggerire degli artifizi (3,) i quali possono servire a determinare le radici di qualche equazione cubica a discriminante negativo: tali artifizi consistono nella determinazione di quantità ausiliarie, determinazione che dipenderebbe da altre equazioni di 3° grado e che negli esempi addotti appare ottenuta per tentativi. Nell'*Ars magna arithmeticae* dice dapprima (4) che nel caso

(1) Stampato nel 1663 a Lione, coll'edizione completa delle Opere.
(2) *Quaestio XXXVIII.*
(3) Cap. XXV.
(4) Cap. XXX.

irriducibile *nulla potest sequi aequatio* (non può aver luogo l'agguagliamento); ma più innanzi (1), posta l'equazione

$$x^3 = 9x + 6,$$

ne scrive la radice

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{-18}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{-18}},$$

quale è data dalla formula risolutiva (2'), senza aggiungere altro che un *proba et invenies.*

Nel 1570 poi, ristampandosi a Basilea l'*Artis magnae etc.*, egli vi aggiunse un suo *De regula Aliza libellus* (2), tutto dedicato allo studio delle equazioni cubiche e delle questioni aritmetiche connesse; v'è esposto, fra l'altro, un complesso di tentativi diretti a girare le difficoltà del caso irriducibile. In questi tentativi, che dovevano essere infruttuosi, il CARDANO giunse a sospettare che la risoluzione del caso irriducibile esigesse la considerazione di quantità ***silvestri*** (!), *scilicet quae non sint in aliquo genere radicum, nec compositae ex illis, nec per detractionem relictae* (3): e ciò era divinare la possibilità d'una soluzione trascendente del problema. Ma con questo il CARDANO si allontanava sempre più dalla considerazione delle radici quadrate dei numeri negativi.

Anzi nel Cap. VI del *De regula Aliza* egli scriveva: *Radix plus est* (esistono radici dei numeri positivi); *radix minus quadrata nulla est, juxta communem usum* (non esistono radici quadrate dei numeri negativi, stando all'uso comune); *sed de hoc inferius agemus.*

E ciò che doveva dire più sotto era questo. Nel Cap. XXII egli vuole ad ogni costo convincersi che come prodotto di due numeri negativi conviene, per qualche riguardo, assumere il numero negativo, che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori: e gli è poi necessario uno sforzo non piccolo per illudersi che questa definizione potrebbe trovar luogo insieme con quella comune, che egli aveva sempre adottato.

§ 3. **L'opera di Raffaele Bombelli.** — Mentre così si logorava il genio del CARDANO, RAFFAELE BOMBELLI componeva

(1) *Quaestio XXXVIII.*
(2) Cioè *de regula irresolubili* (?), dice il COSSALI.
(3) Cap. X.

il suo Trattato, che è una esposizione completa e ordinata di quanto a quel tempo era noto intorno alle equazioni dei primi quattro gradi. Specialmente importante e originale è la discussione del caso irriducibile.

Il procedimento del TARTAGLIA per la risoluzione dell'equazione *b*) conduceva alla formola

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}},$$

dove ogni parte ha chiaro senso nel campo dei numeri reali, finchè sia

$$\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}>0.$$

Per trattare il caso contrario il BOMBELLI si esprime così: Il radicale

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$$

non si può chiamare nè più nè meno, però lo chiamarò più di meno, quando egli si doverà aggiongere, e, quando si doverà cavare, lo chiamarò men di meno; e quest' operatione è necessarissima più che l' altre, etc. etc. (1).

Dunque le radici dei numeri negativi sono numeri di specie nuova, che il BOMBELLI designa come quelli che provengono dall'applicazione degli operatori (moltiplicatori) *più di meno* e *meno di meno* a numeri positivi. Adotta per questi operatori le abbreviazioni *p. di m.* e *m. di m.*

Diciamo subito, per la chiarezza della nostra esposizione, che i numeri di tal nuova specie sono quelli che noi chiamiamo *immaginari*, e che i segni *p. di m.* e *m. di m.*, non adottati da alcuno dopo il BOMBELLI, furono sostituiti dagli altri i e $-i$ (2).

(1) L'*Algebra*, pag. 169. A dir vero il BOMBELLI cessa di riguardare come negativo un tal numero, tostochè gli occorra di estrarne la radice quadrata: per lui *è già il radicando un numero di specie nuova.* Ciò non si accorderebbe esattamente colle definizioni del seguito; ma da tale frettolosa sostituzione questo seguito non è affatto toccato.

(2) Il segno i fu introdotto da EULERO, e fu GAUSS il primo che, dal 1801, prese ad usarlo costantemente.

Il BOMBELLI trova adatto allo scopo definire subito i prodotti fra numeri reali e immaginari nel modo seguente:

Più via più di meno fa più di meno, (ciò che vuol dire: $+\cdot+i=+i$);
Meno via più di meno fa meno di meno, $(-\cdot+i=-i)$,
Più via meno di meno fa meno di meno, $(+\cdot-i=-i)$,
Meno via meno di meno fa più di meno, $(-\cdot-i=+i)$,
Più di meno via più di meno fa meno, $(+i\cdot+i=-)$,
Più di meno via meno di meno fa più, $(+i\cdot-i=+)$,
Meno di meno via più di meno fa più, $(-i\cdot+i=+)$,
Meno di meno via meno di meno fa meno, $(-i\cdot-i=-)$.

Il BOMBELLI dà poco più innanzi le definizioni per la somma, esprimendosi così:

Più di meno con più di meno si somma e fa più di meno, cioè $ia+ib=i(a+b)$; ma *più con più di meno non si può sommare, se non dire più più di meno; più cavato di più di meno non si può, se non per via del meno* etc. etc. Così il BOMBELLI veniva a considerare i binomi $a+ib$, $a-ib$ che con GAUSS chiameremo *numeri complessi* (1).

Tutta l'indagine del BOMBELLI intorno a siffatti binomi si fonda sopra queste tre definizioni:

α) $a+ib=a'+ib'$ se $a=a'$ e $b=b'$, e inversamente;

β) $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$;

γ) $(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

Il BOMBELLI le applica di continuo senza incertezza, quantunque non le enunci in alcun luogo compiutamente: egli sottintende cioè che in queste tre definizioni debbano compendiarsi quelle che abbiamo ricordate.

Introdotti i numeri complessi, il BOMBELLI poteva dire che l'equazione di 2° grado ammette sempre due radici distinte o coincidenti; e per l'equazione

$$x^2-8x+20=0$$

(1) Tale denominazione fu usata la prima volta nella *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio II*, del 1831 (Art. 30).

trovava appunto

$$x = 4 \pm 2i.$$

In particolare ammetteva sempre due radici la risolvente di 2° grado dell'equazione cubica

$$x^3 = px + q,$$

e la formola tartaleana corrispondente acquistava in ogni caso un senso. Proposta quindi per es. l'equazione

$$x^3 = 15x + 4,$$

si aveva

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Ma il BOMBELLI non si fermava a questo punto: proposto un binomio come $a + ib$, egli aveva studiato un metodo per estrarne la radice cubica. Esso consiste in questo.

Posto

$$\xi + i\eta = \sqrt[3]{a + ib},$$

si ha, elevando alla 3ª potenza (def. γ)) ed eguagliando le parti reali e le immaginarie (def. α)),

$$\begin{cases} \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a, \\ 3\xi^2\eta - \eta^3 = b; \end{cases}$$

e di qui, quadrando e sommando,

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = a^2 + b^2.$$

Ora, se $a^2 + b^2$ era il cubo d'un numero intero o fratto m, dalle equazioni

$$\begin{cases} \xi^3 - 3\xi\eta^2 = a, \\ \xi^2 + \eta^2 = m, \end{cases}$$

il BOMBELLI traeva *per tentativi* [1] ξ ed η. Così per esempio trovava

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i;$$

[1] *A tentone*, dice egli stesso (pag. 180), che aveva riconosciuto che l'eliminazione di η dalle due equazioni portava ad esprimere ξ come somma di radicali cubici dello stesso tipo di quello del quale era partito.

e siccome analogamente risultava

$$\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i,$$

concludeva che la radice x dell'equazione cubica considerata sopra era eguale a

$$2 + i + 2 - i,$$

cioè (def. β)) eguale a 4.

Così, con algoritmo affatto nuovo, attraverso l'immaginario, giungeva a calcolare la radice positiva dell'equazione.

Il BOMBELLI possedeva anche delle risoluzioni geometriche delle equazioni cubiche (*dimostrazioni per linea* o *in superficie piana*, come egli le chiamava).

Costruiva le radici di una equazione, collocando *per tentativi* sopra un foglio da disegno una o due squadre, così che queste intercettassero, sopra rette disegnate nel foglio, segmenti soddisfacenti a certe relazioni di eguaglianza e di equivalenza. Proposta per esempio l'equazione

$$x^3 = px + q,$$

cioè l'equazione

$$(x^2 - p)x = q,$$

vedeva che essa richiedeva la costruzione d'un rettangolo di area q coi lati x e $x^2 - p$.

Ora, presi sopra una retta r i segmenti consecutivi $AB = 1$ e $BC = p$, una squadra, della quale un braccio passasse per A e il vertice D scorresse sulla retta s perpendicolare ad r in B, tagliava coll'altro braccio sulla retta r il segmento BE di misura x^2, se x era la misura di BD; era poi $x^2 - p$ la misura di CE. Occorreva che fosse

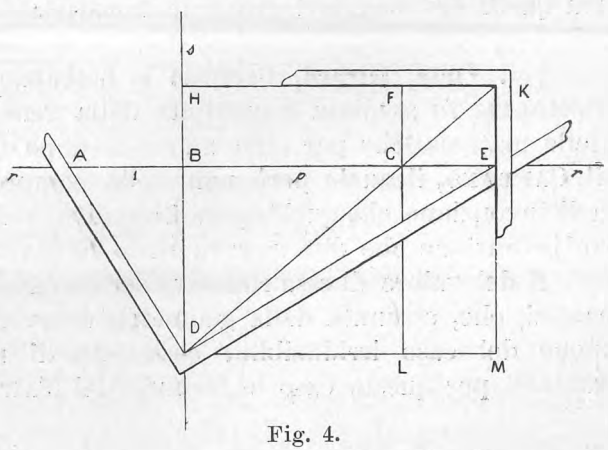


Fig. 4.

$(x^2 - p)x = q$; e per ottenere questo bastava costruire su BC il rettangolo $BCFH$ d'area q $\left(BH = \frac{q}{p}\right)$ e collocare una seconda squadra con un braccio sulla retta HF, mentre l'altro si faceva passare per E. Il BOMBELLI intravedeva che, muovendo opportunamente le due squadre, si otteneva che i loro vertici D e K fossero allineati con C, cioè si otteneva che fossero equivalenti i rettangoli $BCFH$ e $CLME$ e fosse quindi appunto

$$(x^2 - p)x = q.$$

In questa costruzione il BOMBELLI vedeva un modo di calcolare la radice e di verificare quindi i risultati della sua analisi.

E per questa noi dobbiamo riconoscere nel BOMBELLI il fondatore della teoria degli immaginari. Nei trattati d'algebra, negli accenni che si fanno alle origini di tale teoria, si incontra spesso il solo nome del CARDANO. Ma quanto abbiamo esposto avrà persuaso che il CARDANO rivolse ogni suo studio ad *evitare l'immaginario*, mentre il BOMBELLI seppe utilizzarlo. È ben vero che egli stesso riguarda sempre l'immaginario come un espediente e dice essergli a lungo sembrate *sofistiche* e *stravaganti* le considerazioni nelle quali esso interviene; ma, se ci riportiamo al tempo nel quale egli visse, quando la ricerca algebrica non era mai disgiunta dalle costruzioni geometriche, saremo indotti a porre il suo nome fra quelli dei maggiori nostri matematici.

§ 4. **Vieta, Girard, Cartesio e Leibniz.** — L'opera del BOMBELLI fu studiata e meditata dalla generalità dei cultori delle matematiche per oltre un secolo dopo di lui. La conobbe il CARDANO, il quale però non volle comprendere il valore dell'invenzione che quell'opera illustrava: era per il CARDANO un'invenzione che distruggeva tutto EUCLIDE [1].

E del valore di essa rimasero certamente dubbiosi i matematici, che, ottenuta dalla geometria una vera e propria soluzione del caso irriducibile, cessarono di riguardare come valevoli per questo caso le formule del TARTAGLIA.

[1] *et hoc destruit totum Euclidem..... (Sermo de plus et minus*, Ms. stampato nel 1663, coll'edizione lionese delle Opere).

Fra questi deve prima d'ogni altro ricordarsi FRANCESCO VIETA (1540-1603), il quale, riconosciuto il nesso esistente fra il caso irriducibile ed il problema della trisezione dell'angolo [1], ne trasse un metodo per costruire le radice d'un'equazione cubica a discriminante negativo.

La scoperta sembra sia derivata dal confronto dell'equazione

$$x^3 - px + q = 0, \qquad (p > 0) \tag{1}$$

colla formula per la moltiplicazione degli archi

$$4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} = \cos\theta.$$

Se in questa formula poniamo

$$\cos\frac{\theta}{3} = \frac{x}{\rho},$$

avremo l'equazione

$$4x^3 - 3\rho^2 x = \rho^3\cos\vartheta; \tag{2}$$

ed è evidente che di questa saranno radici

$$x_1 = \rho\cos\frac{\theta}{3},$$

$$x_2 = \rho\cos\frac{\theta + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = \rho\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{3}.$$

Se fosse

$$\frac{3\rho^2}{4} = p, \quad -\frac{\rho^3}{4}\cos\vartheta = q,$$

[1] V. nel *Supplementum geometriae* (1593) il *consectarium generale*, che è conclusione dell'opera, e il cap. VI (teor. III) dello scritto *De aequationum recognitione et emendatione* (1615, postumo). Al nesso fra i due problemi accenna anche il BOMBELLI (*Algebra*, p. 321), il quale si riserbava forse di trattarne in un'opera di contenuto geometrico (ibid. p. 648), che non fu pubblicata. (Cfr. Bibliotheca mathematica, 3, VIII, 1907-8, p. 86-88).

la (2) coinciderebbe coll'equazione data (1): ma per ottener questo occorrerebbe prendere

$$\rho = 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$\cos\theta = -\frac{q}{2}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ciò che può farsi quando sia

$$\left|-\frac{q}{2}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right| \leq 1,$$

cioè quandò sia

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \leq 0.$$

In tale ipotesi dunque sono radici della (1)

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta + 4\pi}{3},$$

essendo

$$\theta = \text{arc cos}\left[-\frac{q}{2}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

cioè, preso un arco siffatto nel cerchio di raggio $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, trisecandolo, costruiremo le radici dell'equazione proposta. Altrimenti calcoleremo le radici dell'equazione stessa col sussidio delle tavole trigonometriche.

Dopo VIETA la risoluzione del caso irriducibile mediante la trisezione dell'angolo fu illustrata da ALBERTO GIRARD († 1632) nella sua *Invention nouvelle en l'Algèbre* (1629) (1) e

(1) Ristampata a Leida da D. Bierens de Haan nel 1884.

da RENATO DESCARTES (1596-1650) nella *Géométrie* (1637); i quali entrambi, al pari di VIETA, pongono le formole tartaleane per il solo caso di discriminante positivo e appaiono incerti intorno all'uso degli algoritmi del BOMBELLI, quando vi intervengono gli immaginari.

Il GIRARD considera in più luoghi le radici quadrate di numeri negativi, chiamandole *racines indicibles* e adottando per esse il segno comune $\sqrt{-}$. A lui si deve una prima enunciazione del teorema fondamentale dell'algebra sul numero delle soluzioni d'una equazione: fra queste egli chiama *solutions envelopées* quelle che involgono radici indicibili ed afferma che è utile considerarle per tre ragioni: *pour la certitude de la reigle generale, et qu'il ny a point d'autre solutions et pour son utilité* (1).

Nella Geometria di CARTESIO è nuovamente enunciato il teorema sul numero delle soluzioni d'una equazione; e vi si aggiunge: *Au reste, tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles, mais quelquefois seulement imaginaires* (2).

Così, qui per la prima volta, la parola *immaginario*, generalmente adottata nel seguito, comparve contrapposta all'altra *reale*.

Il primo che tornò ad affermare che dalle formole tartaleane si aveva l'espressione delle radici dell'equazione cubica anche nel caso di discriminante negativo, cioè il primo che tornò ad adottare l'algoritmo dell'immaginario, fu GUGL. GOTTIFREDO LEIBNIZ (1646-1716), il quale pure, da lettere e manoscritti, appare essere stato studiosissimo dell'opera del BOMBELLI (3) e caldo ammiratore degli algebristi italiani (4).

Ma al LEIBNIZ (5) sembravano inutili i segni speciali *p. di m.* e *m. di m.* che il BOMBELLI aveva adottato per gli

(1) *Invention* etc., foglio *F.*

(2) *Géométrie*, p. 380.

(3) LEIBNIZens *mathematische Schriften*, ed. di C. J. Gerhardt: Bd. I (Berlino, 1849), XXX, XXXVII, XLII; Bd. II (Berlino, 1850), I, II (1675-77).

(4) *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: Bd. VII (Halle, 1863), XVIII (p. 211) e *Geometrica IV* (p. 315).

(5) *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: Bd. VII, XIV, *De resolutionibus aequationum* etc.

immaginari. Egli, quando afferma la validità delle formole del TARTAGLIA in ogni caso e le scrive, nel caso di discriminante negativo, col segno comune $\sqrt{-}$, e perciò solo afferma d'avere di molto oltrepassato il BOMBELLI, ci induce a sospettare che, escludendo la opportunità d'un nuovo simbolo, pensasse di non avere a che fare con un concetto affatto nuovo. Egli stesso del resto riconosceva di non essere riuscito a comprendere chiaramente che cosa fosse questo immaginario, quando, ancora nel 1702, lo chiamava *analyseos miraculum, idealis mundi monstrum, pene inter Ens et non-Ens amphibium* (1).

Ma sono notevoli gli esempi che il LEIBNIZ sapeva addurre di espressioni analoghe a quelle delle radici delle equazioni cubiche, e cioè involgenti quantità immaginarie e pure aventi valore reale; trovava per esempio che

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6.$$

§ 5. **Il teorema di A. de Moivre.** — Il BOMBELLI aveva sviluppata ed applicata una teoria delle operazioni elementari su binomi del tipo $a \pm ib$. Per trovare chi, dopo di lui, tentò un ampliamento di quella teoria occorre giungere a GIOVANNI WALLIS (1616-1703), che nel suo *Treatise of Algebra* (1685) riproduce, con qualche complemento, gli sviluppi del BOMBELLI (2).

E a questo si connettono pure direttamente le indagini di ABRAMO DE MOIVRE (1667-1754) (3). Il BOMBELLI aveva studiato un modo per ridurre radicali cubici come

$$\sqrt[3]{a \pm ib}$$

(1) *Math. Schriften*, ed. Gerhardt: Bd. V. (Halle, 1858), *Specimen novum analyseos* etc. (p. 350-361).

(2) V. i Cap. 47 e 48.

(3) Si hanno nelle *Philosophical transactions* tre memorie del DE MOIVRE riguardanti il teorema che porta il suo nome; sono le seguenti: *Aequationum quarumdam potestatis tertiae* etc. (Vol. XXV, 1706-7, p. 2368-71); *De sectione anguli* (Vol. XXXII, 1722-3, p. 228-230); e *De reductione radicalium ad simpliciores terminos* etc. (Vol. XL, 1737-8, p. 463-478). È particolarmente notevole quest'ultima. Un accenno ai risultati stabiliti da DE MOIVRE in queste memorie si trova nei suoi *Miscellanea analytica* (1730; Libro I, lemma I). Cfr. anche A. von BRAUNMÜHL, *Zur Geschichte der Entstehung des sogenannten* MOIVRE*schen Satzes* (Bibl. math., 3, T. II, 1901, p. 97-102).

alla forma $\xi \pm i\eta$: il DE MOIVRE riprese la ricerca per radicali d'indice qualunque. Ponendo

$$\xi + i\eta = \sqrt[n]{a + ib},$$

facendo quindi la potenza n^{esima} ed eguagliando le parti reali e le immaginarie, si ottengono le equazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi^n - \binom{n}{2}\xi^{n-2}\eta^2 + \binom{n}{4}\xi^{n-4}\eta^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots = a, \\ \binom{n}{1}\xi^{n-1}\eta - \binom{n}{3}\xi^{n-3}\eta^3 + \binom{n}{5}\xi^{n-5}\eta^5 - \ldots\ldots = b; \end{cases}$$

e queste stesse equazioni otterremmo se ponessimo

$$\xi - i\eta = \sqrt[n]{a - ib}.$$

Per trarre dalle (1) ξ ed η conviene cercare d'eliminare una di queste incognite da una delle equazioni: ciò può ottenersi così. Quadrando e sommando, le (1) dànno:

$$(\xi^2 + \eta^2)^n = a^2 + b^2;\ (1)$$

quindi, posto

$$a^2 + b^2 = r^2$$

e

$$\sqrt[n]{r} = \rho,$$

(1) Questo è il risultato stabilito dal BOMBELLI (V. § 4) per $n = 3$. Che esso abbia luogo in generale si vede molto semplicemente così. La somma

$$(\alpha + \beta)^n + (\alpha - \beta)^n$$

è il doppio della somma S dei termini di posto dispari (1°, 3°, 5°.....) nello sviluppo di $(\alpha + \beta)^n$; e la differenza

$$(\alpha + \beta)^n - (\alpha - \beta)^n$$

è il doppio della somma S' dei termini di posto pari (2°, 4°, 6°.....) nello stesso sviluppo. Quindi

$$S^2 - S'^2 = \left(\frac{(\alpha+\beta)^n + (\alpha-\beta)^n}{2}\right)^2 - \left(\frac{(\alpha+\beta)^n - (\alpha-\beta)^n}{2}\right)^2$$
$$= (\alpha+\beta)^n \cdot (\alpha-\beta)^n$$
$$= (\alpha^2 - \beta^2)^n.$$

Nel caso nostro è $S = a$, $S' = ib$; $\alpha = \xi$, $\beta = i\eta$.

risulta

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2;$$

abbiamo cioè

$$\eta^2 = \rho^2 - \xi^2.$$

Tale espressione di η^2 si sostituirà nella prima delle (1) e così avremo un'equazione colla sola ξ:

$$(2) \qquad \xi^n - \binom{n}{2}\xi^{n-2}(\rho^2 - \xi^2) + \binom{n}{4}\xi^{n-4}(\rho^2 - \xi^2)^2 - \ldots\ldots = a.$$

Il DE MOIVRE considerò tale equazione pei primi valori di n: ebbe precisamente le equazioni:

$$1^a) \qquad \xi = a,$$

$$2^a) \qquad 2\xi^2 - \rho^2 = a,$$

$$3^a) \qquad 4\xi^3 - 3\rho^2\xi = a,$$

$$4^a) \qquad 8\xi^4 - 8\rho^2\xi^2 + \rho^4 = a,$$

$$5^a) \qquad 16\xi^5 - 20\rho^2\xi^3 + 5\rho^4\xi = a,$$

. . . . . .

e, seguendo le orme per le quali abbiam detto che sembra essersi VIETA condotto alla sua risoluzione del caso irriducibile [1], osservò che le equazioni scritte portavano gli stessi coefficienti che si hanno nelle formole per la moltiplicazione degli archi:

$$1^a) \qquad \cos\theta = \cos\theta$$

$$2^a) \qquad 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \cos\theta$$

$$3^a) \qquad 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} = \cos\theta$$

$$4^a) \qquad 8\cos^4\frac{\theta}{4} - 8\cos^2\frac{\theta}{4} + 1 = \cos\theta$$

$$5^a) \qquad 16\cos^5\frac{\theta}{5} - 20\cos^3\frac{\theta}{5} + 5\cos\frac{\theta}{5} = \cos\theta$$

. . . . . .

[1] L'equazione 3ª) non è altro che la (2) del § precedente.

Dal confronto dedusse che, in generale [1], preso

$$\theta = \text{arc}\cos\frac{a}{\rho^n},$$

ciò che era possibile perchè

$$\frac{a}{\rho^n} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1,$$

alla (2) si soddisfaceva con

$$\xi = \rho\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

essendo k un numero intero qualunque. Risultava poi

$$\eta = \rho\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

e infine

$$(3) \qquad \sqrt[n]{a \pm ib} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} \pm i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

Così il DE MOIVRE stabiliva che la radice n^{esima} del binomio complesso $a \pm ib$ aveva n valori diversi, quelli che si ottengono dalla (3) per es. per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Questo risultato era già stato enunciato da MICHELE ROLLE nel suo oscuro *Traité d'Algèbre* (Parigi, 1690; p. 227 e seguenti).

Ora il DE MOIVRE, mediante la formola (3), traeva dalle formole tartaleane i valori delle tre radici d'una equazione cubica a discriminante negativo, ma gli occorreva il sussidio delle tavole dei seni: erano queste che gli risparmiavano i tentativi ai quali il BOMBELLI aveva dovuto limitarsi.

§ 6. **L'interpretazione geometrica dei numeri complessi.** — Coi risultati del DE MOIVRE la teoria delle operazioni elementari sui numeri complessi $a + ib$ era completa. Ma essa doveva restare, quasi per un altro secolo ancora, oscura alla generalità degli studiosi. I numeri complessi erano null'altro che *entia rationis*, enti puramente ideali: la teoria svolta per

[1] La dimostrazione generale della coincidenza indicata non fu data dal DE MOIVRE: ma non è difficile stabilirla.

essi *era*, come abbiam detto più volte, *null'altro che un complesso di algoritmi*, analoghi a quelli noti per i numeri reali, e così connessi a questi, da costituire un sistema, dove nulla si aveva di contradittorio e che serviva a determinare, mediante i dati reali di alcuni problemi, le soluzioni reali dei problemi stessi. Ma di questa teoria non si sapeva dare una *interpretazione geometrica:* cioè non si sapeva dire di quali costruzioni geometriche fossero immagini quegli algoritmi.

Per giungere a questo, bisognava riconoscere che il *concetto di numero complesso è l'estensione di quello di numero reale, corrispondente al passaggio dalla considerazione dell'ordine a una dimensione a quella d'un ordine doppio, a due dimensioni.*

E a tale veduta avrebbe dovuto condurre prontamente l'indagine intorno al nesso, intravisto dal BOMBELLI e precisato negli studi di VIETA e del DE MOIVRE, fra l'estrazione di radice da binomi complessi e la divisione del cerchio. Ma l'intento tardò ad essere raggiunto.

Il primo tentativo verso di esso, che sia degno di menzione, fu quello del WALLIS, che, nei capitoli 66-69 della sua *Algebra* già citata, cercò di costruire le radici complesse d'un'equazione quadratica come somme di vettori di un piano: ma il WALLIS non riconobbe che bisognava riguardare *a* ed *ia* come simboli di vettori fra loro perpendicolari (1).

Nel sec. XVIII la teoria dei numeri complessi, oltre che completarsi, dal punto di vista aritmetico, coi risultati del DE MOIVRE, si arricchì, nel modo che vedremo, delle più importanti proposizioni, invadendo tutta l'Algebra e l'Analisi: la sua interpretazione geometrica venne come ultima cosa.

Essa fu data per la prima volta dal topografo danese CASPAR WESSEL (1745-1818) con una sua Memoria *Om Directionens analytiske Betegning* del 1797 (2). E la stessa interpretazione possedeva certo per intero GAUSS, quando scriveva la sua *Dissertazione inaugurale* (1797; pubblicata nel 1799).

(1) Cfr. G. ENESTRÖM, *Die Darstellung imaginärer Grössen bei Wallis* (Bibl. math. 3, VII, 1906-07, p. 263-269). — V. pure una piccola nota dello stesso Autore nella stessa Rivista (3, IX, 1908-09, p. 343-344).

(2) Fu stampata negli *Atti dell'Accademia danese di Scienze e Lettere* (2, V, 1799) e ristampata, dopo cent'anni dalla presentazione, in traduzione francese (*Essai sur la représentation analytique de la direction*, Copenhagen, Höst & Sön, 1897).

Ma, da una parte, la memoria del WESSEL rimase sconosciuta alla generalità degli studiosi. E d'altro lato GAUSS, nella detta dissertazione, diceva di riserbarsi di trattare della natura delle quantità immaginarie in apposito scritto, che poi non pubblicò mai; e per allora, con breve artificio, rimuoveva dal suo studio ogni considerazione di numeri complessi.

Poco più tardi, nel 1806, GIOVANNI ROBERTO ARGAND (1768-1822) pubblicava una memoria col titolo *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1). In questa ed in altre contenute nei tomi IV e V (1813-14, 1814-15) degli *Annali di Gergonne* l'ARGAND, forse con minor chiarezza di principii che non il WESSEL, giungeva agli stessi risultati. Gli scritti dell'ARGAND furono oggetto di importanti discussioni, dalle quali l'interpretazione geometrica dell'immaginario finì coll'apparire pienamente soddisfacente. E della sua legittimità ed opportunità si fecero assertori GAUSS e CAUCHY: il primo con una nota del 1831 alla *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* (2), ed il secondo con parecchi studi di analisi algebrica contenuti nel IV volume degli *Exercices d'analyse et de physique mathématique* (1847).

Fra noi autore insigne di una teoria geometrica dei numeri complessi fu GIUSTO BELLAVITIS (1803-1880); e applicazione di tal teoria fu il suo *metodo delle equipollenze,* per la risoluzione di svariate questioni di geometria (3).

Pertanto la chiarezza dell'esposizione richiede ora che noi costruiamo organicamente e compiutamente la teoria, lasciando di seguirne le sviluppo (4). Torneremo a dar notizie di questo per trattare del teorema fondamentale dell'Algebra e della teoria dell'esponenziale.

(1) Ristampato a Parigi da Gauthier-Villars nel 1874.

(2) *Göttingische gelehrte Anzeigen,* 23 aprile 1831 (Gauss, Werke, Bd. I, p. 169).

(3) V. per es. la *Esposizione del metodo delle equipollenze* (Memorie della Società italiana delle Scienze 1, 25 II, 1854; traduz. francese di C. A. Laisant, Parigi, 1874).

(4) Il contenuto dei seguenti §§ 7-10 è, nella forma che oggi si usa, quello stesso delle memorie citate del WESSEL e dell'ARGAND.

Cap. II. - Teoria geometrica ed analitica dei numeri complessi ordinari.

§ 7. **Vettori e traslazioni.** — I numeri reali servono alla rappresentazione d'un *sistema ordinato, semplicemente infinito e continuo* di elementi. Vogliamo ora estendere il concetto di numero, così che esso valga alla rappresentazione di sistemi continui più volte infiniti. Occorre per questo che ricordiamo e precisiamo alcune nozioni elementari.

Assi e vettori. Pensando che i punti d'una retta, o d'un segmento, siano ordinati nell'uno o nell'altro dei due modi possibili, noi *attribuiamo alla retta, od al segmento, un verso o il verso opposto.*

Def. 1ª. Una retta cui sia attribuito un verso si dice un *asse;* un segmento cui sia attribuito un verso si dice *segmento ordinato* o *vettore.*

Data una retta r, determiniamo il verso che vogliamo assegnarle, considerandone due punti e distinguendo quale dei due *precede*, nel verso voluto, l'altro. Per un vettore distingueremo un 1° *estremo* od *origine* ed un 2° *estremo* o *termine.*

Con $\overrightarrow{a}$ ed $\overleftarrow{a}$ si designeranno i due vettori, che si ottengono attribuendo ad un segmento a l'uno o l'altro verso. Più precisamente, dati due punti A e B, il vettore d'origine A e di termine B si designerà scrivendo $\overrightarrow{AB}$ o $\overleftarrow{BA}$. Non escludiamo che A e B possano coincidere, nel qual caso il vettore si dice *nullo.*

Def. 2ª. Due vettori si dicono *consecutivi*, se il termine del primo è origine del secondo.

Def. 3ª. Dati i vettori consecutivi $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, si dice *somma* di questi vettori il vettore $\overrightarrow{AC}$. Ciò si esprime scrivendo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Vettori uguali. Ogni retta è sostegno di due assi di verso opposto. Considerata ora la totalità delle rette parallele ad una retta data e degli assi di cui esse sono sostegni, intendiamo che siano stabilite le nozioni di *eguaglianza* e di *opposizione dei versi* di due di tali assi, come intendiamo che sia stabilita la nozione di *eguaglianza di segmenti.*

Def. 4ª. Dato il vettore $\overrightarrow{AB}$, la retta AB, attribuitole il verso secondo il quale A precede B, si dice *asse del vettore.*

Osserv. Conveniamo che al vettore $\overrightarrow{AA}$ nullo possa attribuirsi come asse una qualunque delle rette passanti per A, attribuitole comunque un verso.

Def. 5ª. Due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si diranno avere *egual grandezza*, se i segmenti AB e CD sono eguali, ed avere *egual verso* o *verso opposto*, se i loro assi, appartenendo ad una stessa retta o a rette parallele, hanno egual verso o verso opposto.

Def. 6ª. Due vettori si dicono *eguali* (o *equipollenti*) quando hanno egual grandezza ed egual verso; e si dicono *contrari* quando hanno egual grandezza e verso opposto.

Esprimiamo che i vettori $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ sono eguali scrivendo

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b};$$

ed è ovvio che

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a};$$

se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, è pure $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$;

se $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$, è pure $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$.

Inoltre dato un vettore $\overrightarrow{a}$ e dato un punto qualunque O, c'è uno ed un sol vettore avente l'origine in O ed eguale ad $\overrightarrow{a}$.

Esprimeremo poi che i vettori $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ sono contrari, scrivendo

$$\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{b} \text{ (o } \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{a}).$$

In particolare

$$\overrightarrow{a} = -\overleftarrow{a}.$$

Somma di vettori. Dati due vettori consecutivi qualunque ed altri due vettori consecutivi ordinatamente eguali a quelli, la somma dei primi è eguale alla somma dei secondi.

Diamo dunque questa

Def. 7ª. Dati due vettori $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, si dice *somma* di essi ogni vettore $\overrightarrow{s}$ che sia somma di vettori consecutivi ordinatamente eguali a quelli dati. Si scriverà

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

E, dati i vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$, si dirà *somma* di questi vettori nell'ordine dato il vettore

$$[(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}]+\vec{d}+\ldots.$$

Osserv. Il vettore $\vec{a}+\vec{b}$ è la diagonale $\vec{OP}$ d'un parallelogrammo, dove i lati $\vec{OM}$ ed $\vec{ON}$ sono eguali ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rispettivamente: il vettore $[(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}]+\vec{d}+\ldots.$ è la congiungente gli estremi d'una spezzata, dove i lati sono ordinatamente eguali ad $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\ldots..$

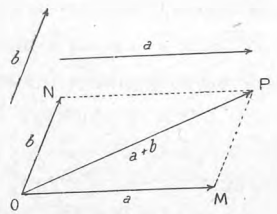


Fig. 5.

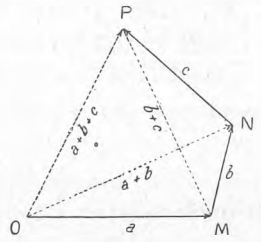


Fig. 6.

Risulta quindi immediatamente che:

a) somme di vettori ordinatamente eguali sono eguali;

b) la somma di vettori gode delle proprietà commutativa ed associativa:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

TRASLAZIONE D'UN PUNTO, D'UNA FIGURA, DELLO SPAZIO. Nelle proposizioni precedenti non facciamo altro che riunire ed enunciare nel modo che i nuovi termini introdotti consentono alcuni teoremi di geometria elementare.

Colla definizione di *vettore* precisiamo la nozione di *traslazione d'un punto;* con quella di *vettori eguali* precisiamo la nozione di *traslazione d'una figura e dello spazio.*

Dalla *composizione di due traslazioni* d'una figura risulta una nuova traslazione della figura stessa: è questa proposizione che ci consente la definizione che abbiamo dato di *somma di vettori.* E possiamo aggiungere che, data una figura, ogni sua traslazione può determinarsi con un vettore, e la traslazione composta di altre due è determinata dal vettore che è somma di quelli, che determinano queste due.

§ 8. **I numeri complessi. - Modulo ed argomento.** — Dalla definizione di somma di vettori si trae immediatamente quella di *multiplo* d'un vettore secondo un numero intero, quindi secondo un numero razionale e infine secondo un numero reale (assoluto) qualunque.

Def. 1ª. Dato il vettore $\vec{OA}$ non nullo e il numero reale assoluto ρ, il vettore $\vec{OB}$, che ha lo stesso verso di $\vec{OA}$ e grandezza $OB=\rho\, OA$, si dice *multiplo* di $\vec{OA}$, secondo il numero ρ; si dice altrimenti che il *rapporto* di $\vec{OB}$ ad $\vec{OA}$ è ρ e si scrive

$$\vec{OB}=\rho\,\vec{OA},$$

ovvero

$$\frac{\vec{OB}}{\vec{OA}}=\rho.$$

Osserv. 1ª. Non escludiamo che sia $\rho=0$, nel qual caso $\vec{OB}$ è nullo.

Osserv. 2ª. Mediante *moltiplicazione d'un vettore dato non nullo per coefficienti reali* (*assoluti*) si costruiscono i vettori aventi lo stesso verso di quello dato. Ad ogni coefficiente reale corrisponde un vettore, che è multiplo di $\vec{OA}$ secondo quel coefficiente; e, dato un vettore qualunque avente lo stesso verso di $\vec{OA}$, esso è multiplo di $\vec{OA}$ secondo un coefficiente reale determinato.

Dato il vettore $\vec{OA}$ non nullo, *moltiplicandolo* per un coefficiente reale ρ e quindi *ruotando* d'un certo angolo α in una determinata giacitura g il vettore ottenuto, si costruisca il vettore $\vec{OB}$. Per determinare siffatta costruzione occorrerebbe dare i valori di *quattro* parametri, e cioè il coefficiente ρ, la misura dell'angolo α e le coordinate della giacitura g. Ma limitiamoci per ora alla costruzione dei vettori d'un determinato piano π.

Fissiamo in questo ad arbitrio *un verso positivo delle rotazioni,* e conveniamo di attribuire il segno positivo alle misure degli angoli descritti con rotazione positiva e il segno negativo a quelle degli angoli descritti con rotazione contraria.

Def. 2ª. Dato nel piano π, nel quale è fissato un verso positivo delle rotazioni, il vettore $\vec{OA}$ non nullo, se *moltiplicandolo* per il coefficiente reale ρ, dato comunque, e quindi *ruotando* il vettore ottenuto, attorno all'origine O, d'un

angolo di misura θ, dato comunque, si costruisce il vettore $\overrightarrow{OB}$, diremo che questo vettore $\overrightarrow{OB}$ è *multiplo* di $\overrightarrow{OA}$ secondo un *numero complesso* a di *modulo* ρ e di *argomento* θ; diremo altrimenti che il *rapporto di* $\overrightarrow{OB}$ *ad* $\overrightarrow{OA}$ è il numero complesso a, e scriveremo

$$\overrightarrow{OB} = a\,\overrightarrow{OA} = (\rho, \theta)\,\overrightarrow{OA},$$

ovvero

$$\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = a = (\rho, \theta).$$

Osserv. I due elementi d'un numero complesso — modulo ed argomento — sono, il primo un numero reale *assoluto*, il secondo un numero reale *relativo*.

Mediante *moltiplicazione del vettore* $\overrightarrow{OA}$ *non nullo per numeri complessi* si costruiscono i vettori del piano π.

Ma è da notare che, dati comunque i numeri complessi (ρ, θ) e (ρ', θ'), e quindi costruiti i vettori

$$\overrightarrow{OB} = (\rho, \theta)\,\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB'} = (\rho', \theta')\,\overrightarrow{OA},$$

sarà $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ quando $\rho = \rho' = 0$ qualunque siano θ e θ', ovvero quando $\rho = \rho' \neq 0$ e insieme $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

Inversamente, se è dato $\overrightarrow{OB}$, è determinato il modulo ρ del rapporto di $\overrightarrow{OB}$ ad $\overrightarrow{OA}$, mentre se $\overrightarrow{OB}$ è nullo, l'argomento θ di questo rapporto è affatto indeterminato, e, se $\overrightarrow{OB}$ non è nullo, è determinato soltanto a meno di multipli di 2π.

Quindi:

Def. 3ª. Due numeri complessi sono *eguali* se hanno moduli nulli qualunque siano gli argomenti, ovvero se hanno moduli non nulli ed eguali ed insieme argomenti differenti un dall'altro di un multiplo di 2π.

Osserv. Il numero complesso di modulo nullo è lo zero.

I numeri complessi, per i quali

$$\theta \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

sono i numeri reali assoluti.

E se avendosi, con ρ reale,

$$\overrightarrow{OB} = \rho\,\overrightarrow{OA},$$

diremo che i vettori contrari $\overrightarrow{OB}$ e $-\overrightarrow{OB}$ sono *multipli* di $\overrightarrow{OA}$ secondo i numeri reali *relativi* $+\rho$ e $-\rho$, i numeri complessi pei quali

$$\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

saranno i numeri reali positivi, e quelli pei quali

$$\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

saranno i negativi.

§ 9. **Somma e prodotto di numeri complessi.** — Conviene che stabiliamo una corrispondenza fra i numeri complessi e i punti del piano.

In π, fissato insieme col verso positivo delle rotazioni il vettore $\overrightarrow{OU}$ non nullo, costruiamone il multiplo $\overrightarrow{OM}$ secondo il numero complesso qualunque $a = (\rho, \theta)$: chiamiamo questo punto M *indice* del numero a.

Così ogni numero complesso ha in π un indice: numeri complessi eguali hanno indici coincidenti. Inversamente ogni punto di π è indice d'un numero complesso e degli infiniti ad esso eguali.

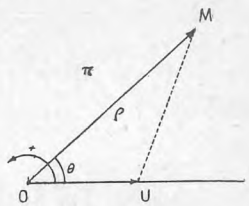


Fig. 7.

Il piano π, considerato come luogo dell'indice M del numero complesso (ρ, θ), dicesi *piano complesso;* il vettore $\overrightarrow{OU}$, il termine U del quale è indice di 1, dicesi *vettore-unità*. Modulo ed argomento d'un numero complesso sono le coordinate polari dell'indice, quando origine ed asse del vettore-unità si prendano come origine ed asse polare.

Se poi, collo stesso verso positivo delle rotazioni che abbiamo già fissato o coll'opposto, preso un altro vettore $\overrightarrow{O'U'}$ non nullo e costruito

$$\overrightarrow{O'M'} = (\rho, \theta)\,\overrightarrow{O'U'},$$

riguardiamo il piano come luogo del punto M', abbiamo un secondo piano complesso π'.

E se, su π e π', stabiliamo che si corrispondano i punti M ed M', che sono indici di numeri complessi eguali, stabiliamo fra π e π' una similitudine Σ.

Siano $a = (\rho, \theta)$ e $b = (\rho_1, \theta_1)$ due numeri complessi qua-

lunque e siano M ed N i loro indici in π, M' ed N' quelli su π'. Sommiamo in π i vettori $\vec{OM}$ ed $\vec{ON}$, in π' i vettori $\vec{O'M'}$ e $\vec{O'N'}$. Se

$$\vec{OM} + \vec{ON} = \vec{OP}, \quad \vec{O'M'} + \vec{O'N'} = \vec{O'P'},$$

i punti P e P' si corrisponderanno, al pari di M ed M' e di N ed N', nella similitudine Σ: al parallelogrammo compreso fra due segmenti corrisponde il parallelogrammo compreso fra i segmenti corrispondenti. Perciò P e P' saranno indici di numeri complessi eguali. E possiamo dare questa

Definizione. Se $a = (\rho, \theta)$ e $b = (\rho_1, \theta_1)$ sono due numeri complessi qualunque e se M ed N sono i loro indici nel piano complesso, dove un vettore *qualunque* $\vec{OU}$ è il vettore-unità, costruito il vettore

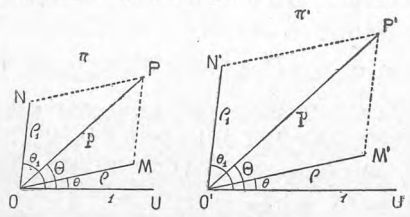


Fig. 8.

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{ON},$$

il numero complesso $c = (\mathrm{P}, \Theta)$, che ha per indice P, si dice *somma* dei numeri complessi a e b; e si scrive

$$c = a + b.$$

Osserv. La somma di vettori gode delle proprietà commutativa ed associativa: è evidente che delle stesse proprietà godrà la somma dei numeri complessi.

La considerazione delle figure ci dà poi facilmente che

$$\mathrm{P} = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1)}, \quad \Theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho \operatorname{sen}\theta + \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1}{\rho\cos\theta + \rho_1 \cos\theta_1}.$$

Dati i numeri complessi qualunque $a = (\rho, \theta)$, $m = (r, \varphi)$, consideriamo in π i vettori

$$\vec{OM} = (\rho, \theta)\,\vec{OU}, \quad \vec{OM}_1 = (r, \varphi)\,\vec{OM}$$

e in π' i vettori

$$\vec{O'M'} = (\rho, \theta)\,\vec{O'U'}, \quad \vec{O'M_1'} = (r, \varphi)\,\vec{O'M'}.$$

I punti M_1 ed M_1' si corrisponderanno evidentemente nella similitudine Σ, cioè saranno indici di numeri complessi eguali.

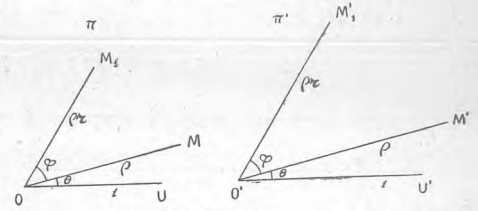


Fig. 9.

Definizione. Dati i numeri complessi qualunque $a = (\rho, \theta)$ ed $m = (r, \varphi)$, e costruiti, partendo da un vettore *qualunque* $\vec{OU}$, il multiplo $\vec{OM}$ secondo a, e quindi il multiplo $\vec{OM}_1$ di $\vec{OM}$ secondo m, il rapporto $p = (R, \Phi)$ di $\vec{OM}_1$ ad $\vec{OU}$ si dice *prodotto* di a per m; e si scrive

$$p = a \cdot m.$$

Osserv. La considerazione della figura dà immediatamente che

$$R = \rho \cdot r, \quad \Phi \equiv \theta + \varphi \pmod{2\pi}:$$

Il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Il prodotto gode dunque delle proprietà associativa e commutativa.

È inoltre da osservare che, essendo sempre

$$\vec{OM} = (\rho, \theta)\,\vec{OU}, \quad \vec{OM}_1 = (r, \varphi)\,\vec{OM},$$

e quindi essendo, per la definizione di prodotto, M ed M_1 gli indici dei numeri complessi (ρ, θ) e $(\rho, \theta) \cdot (r, \varphi)$ risp., questi punti M ed M_1, variando ρ e θ, variano insieme nel piano. E siccome, posto

$$\vec{OU}_1 = (r, \varphi)\,\vec{OU},$$

si ha

$$\vec{OM}_1 = (\rho, \theta)\,\vec{OU}_1,$$

M ed M_1 sono indici di numeri eguali nei piani complessi dove vettori-unità sono $\vec{OU}$ ed $\vec{OU}_1$. M ed M_1 si corrispondono dunque in una *similitudine* Σ_1, *che è prodotto d'una omotetia* di centro O e rapporto di $1 : r$ *e d'una rotazione* attorno ad O d'un angolo φ.

Da questa osservazione si trae che:

Il prodotto di numeri complessi gode della proprietà distributiva rispetto alla somma.

Difatti, dato con $a=(\rho,\theta)$ un altro numero complesso $b=(\rho_1,\theta_1)$, se M ed N sono gli indici di a e b e se

$$\vec{OP}=\vec{OM}+\vec{ON},$$

e perciò P è indice di $a+b$, i punti M_1, N_1, P_1, indici di $a\cdot m$, $b\cdot m$, $(a+b)\cdot m$ corrisponderanno ad M, N, P nella similitudine Σ_1. Sarà quindi $OM_1P_1N_1$ un parallelogrammo, come è un parallelogrammo il quadrilatero $OMPN$: cioè sarà

$$\vec{OP}_1=\vec{OM}_1+\vec{ON}_1$$

e quindi

$$(a+b)\cdot m=a\cdot m+b\cdot m.$$

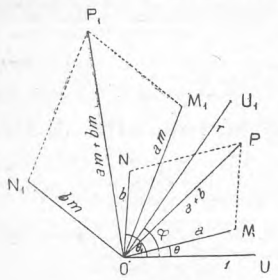


Fig. 10.

§ 10. **Il numero complesso *i*.** — Stabilite come abbiamo fatto le nozioni di somma e di prodotto di numeri complessi, possiamo ridurre ogni numero complesso ad una forma particolarmente importante.

Nel piano π, insieme col vettore-unità $\vec{OU}$, consideriamo il vettore

$$\vec{OV}=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\vec{OU};$$

e dinotiamo con i questo numero complesso $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ [1].

Si ha innanzi tutto

$$i^2=(1,\pi)=-1.$$

Moltiplicare per i un vettore è ruotarlo d'un angolo retto attorno alla sua origine; epperò, se $\vec{OX}$ è un vettore qualunque della retta OU, il vettore

$$\vec{OY}=i\,\vec{OX}$$

è un vettore qualunque di OV. Si avrà

$$\vec{OX}=x\,\vec{OU}$$

[1] Il Bellavitis lo dinotava col segno $\curlyvee$, che leggeva *ramuno* (contrazione di *radice di meno uno*).

con x reale, e

$$\vec{OY}=i\,(x\,\vec{OU})=ix\,\vec{OU}.$$

Se poi M è un punto qualunque del piano complesso ed è indice del numero $a=(\rho,\theta)$, conduciamo per M le parallele ad OU ed OV e siano M_1 e M_2 i punti dove queste rette sono intersecate da tali parallele. Avremo

$$\vec{OM}=\vec{OM}_1+\vec{OM}_2,$$

ed essendo

$$\vec{OM}_1=x\,\vec{OU},\quad \vec{OM}_2=iy\,\vec{OU},$$

dove x ed y dinotano numeri reali, avremo infine

$$a=x+iy.$$

Il numero complesso $a=(\rho,\theta)$ è così espresso come *somma d'un numero reale x e del prodotto di i per un numero reale y*. Questi numeri reali x ed y sono non altro che le coordinate cartesiane di M rispetto alle rette OU ed OV assunte come assi, essendo ancora OU l'unità di misura lineare. Tra tali coordinate cartesiane e le polari ρ, θ hanno luogo le relazioni

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

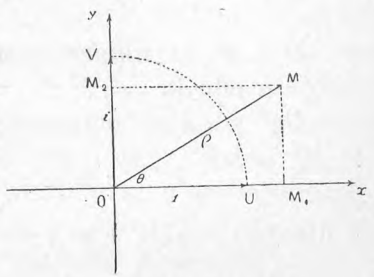


Fig. 11.

e le altre

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\mathrm{arc\ tang}\,\frac{y}{x}.$$

Si ha quindi anche

$$(\rho,\theta)=\rho\,(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta);$$

e la definizione che già abbiamo dato di eguaglianza di numeri complessi e le proposizioni dimostrate intorno alla somma e al prodotto di tali numeri dànno ora che

α) $x+iy=x'+iy'$, se $x=x'$ e $y=y'$, e inversamente;

β) $(x+iy)+(x'+iy')=x+x'+i(y+y')$;

γ) $(x+iy)\cdot(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$.

Sono queste le proposizioni elementari della teoria, che abbiamo qui fondato sulle definizioni di *eguaglianza* e *somma di vettori* e dove il numero complesso è introdotto come *operatore della costruzione, mediante la quale,* in un piano, *da un vettore dato se ne ottiene un altro.*

§ 11. **Teoria analitica: eguaglianza e somma.** — Dalla teoria dei numeri complessi, quale nei precedenti paragrafi è stata costruita, possiamo ora passare ad una *teoria analitica* [1].

La fondiamo sulle seguenti definizioni.

Def. 1ª. Una coppia *ordinata* di numeri reali qualunque

$$x_1, \quad x_2$$

si dirà *numero complesso*; x_1 ed x_2 si diranno rispettivamente 1° e 2° *elemento* del numero complesso, e dinotando questo con x, scriveremo

$$x = (x_1, x_2).$$

Def. 2ª. Il numero complesso $(0, 0)$ si dirà lo *zero* e si dinoterà con 0.

Def. 3ª. I numeri complessi

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

si diranno *eguali,* e si scriverà

$$x = y,$$

quando sia

$$x_1 = y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = y_2.$$

Osserv. È evidente che l'eguaglianza fra numeri complessi ha i caratteri della *riflessività,* della *simmetria* e della *transitività:*

a) $x = x$;

b) se $x = y$, è $y = x$;

c) se $x = y$ ed $y = z$, è $x = z$.

[1] Cfr. S. PINCHERLE, *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. Weierstrass.* (Gior. di Matem., XVIII, 1880).

V. anche O. STOLZ und J. A. GMEINER, *Theoretische Arithmetik* (Lipsia, Teubner, 2ª ed. 1900-902, *X*).

Def. 4ª. Dati i numeri complessi $x = (x_1, x_2)$ ed $y = (y_1, y_2)$, si dice *somma* di x con y il numero

$$(x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2),$$

che si dinota con $x + y$.

Osserv. 1ª. La somma gode delle proprietà *commutativa* ed *associativa:*

a) $$x + y = y + x,$$

b) $$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Inoltre

c) $$x + 0 = x.$$

Osserv. 2ª. È chiaro come dalla definizione di somma possa trarsi quella d'un'operazione inversa, che si dirà ancora *sottrazione,* e per la quale adotteremo le denominazioni e i segni comuni.

Se $x = (x_1, x_2)$ ed $y = (y_1, y_2)$,

$$x - y = (x_1 - y_1, \; x_2 - y_2).$$

A queste definizioni di *eguaglianza* e di *somma* ci conviene accompagnarne un'altra, per porre ogni numero complesso sotto una forma, che riuscirà opportuna nel seguito.

Def. 5ª. Dato il numero complesso $u = (u_1, u_2)$ e dinotato con λ un coefficiente reale qualunque, il numero

$$l = (\lambda u_1, \; \lambda u_2)$$

si dirà *multiplo* di u secondo λ; ovvero si dirà che *il rapporto di l ad u è reale* ed eguale a λ. Il numero l si dinoterà con $\lambda(u_1, u_2)$ o con λu.

Osserv. 1ª. Fra i multipli λu d'un numero che non sia lo zero si ha sempre lo zero, mentre ogni multiplo di zero è zero.

Osserv. 2ª. Il numero $u' = -u$, multiplo di u secondo -1, dicesi *contrario* di u. Si ha

$$u + u' = 0.$$

Osserv. 3ª. È poi evidente che

a) $$\mu(\lambda u) = \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u,$$

e che

b) $$\lambda u + \mu u = (\lambda + \mu)u.$$

Osserv. 4ª. Dati due numeri

$$u=(u_1,\ u_2),\quad v=(v_1,\ v_2),$$

se uno non è multiplo dell'altro secondo un coefficiente reale, cioè se

$$\begin{vmatrix} u_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

diremo che *fra u e v non intercede rapporto reale.*

Nel dire che fra i numeri u e v non intercede rapporto reale è implicito che l'uno e l'altro sono diversi da zero.

Abbiamo ora questo

Teorema. Se fra u e v non intercede rapporto reale, un numero complesso qualunque è somma d'un certo multiplo di u con un certo multiplo di v.

Difatti, qualunque sia $x=(x_1,\ x_2)$, alle equazioni

$$\begin{cases} \xi_1 u_1+\xi_2 v_1=x_1, \\ \xi_1 u_2+\xi_2 v_2=x_2 \end{cases} \tag{2}$$

per ξ_1 e ξ_2, si soddisfa, a causa della (1), in uno ed in un sol modo; e, soddisfatte tali equazioni, si ha appunto

$$x=(\xi_1 u_1+\xi_2 v_1,\quad \xi_1 u_2+\xi_2 v_2)$$

$$=\xi_1(u_1,\ u_2)+\xi_2(v_1,\ v_2),$$

cioè

$$x=\xi_1 u+\xi_2 v.$$

Corollario. Non potrà essere

$$\xi_1 u+\xi_2 v=\xi_1' u+\xi_2' v,$$

senza che si abbia

$$\xi_1=\xi_1'\quad\text{e}\quad \xi_2=\xi_2'.$$

Def. 6ª. Fissati i numeri u e v, fra i quali non interceda rapporto reale, ed espresso un altro numero qualunque x nella forma

$$\xi_1 u+\xi_2 v,$$

i coefficienti ξ_1 e ξ_2 si chiameranno rispettivamente *1°* e *2° elemento* di x rispetto alle *unità* u e v.

Osserv. 1ª. Se è ancora $x=(x_1,\ x_2)$, x_1 ed x_2, che già abbiamo detto elementi di x, sono gli elementi di x rispetto alle unità

$$\bar{u}=(1,\ 0),\quad \bar{v}=(0,\ 1);$$

è infatti

$$x=x_1(1,\ 0)+x_2(0,\ 1).$$

Osserv. 2ª. Se il numero x ha gli elementi x_1 ed x_2 rispetto alle unità $\bar{u}$ e $\bar{v}$, e gli elementi ξ_1 e ξ_2 rispetto ad altre unità u e v, fra le x_i e le ξ_i intercedono le relazioni (2). *Il cangiamento delle unità equivale ad una sostituzione lineare* sugli elementi di ciascun numero.

Osserv. 3ª. Dati i numeri x ed y, li dicevamo *eguali*, quando avevano ordinatamente eguali gli elementi rispetto alle unità $\bar{u}$ e $\bar{v}$; e dicevamo *somma* di x ed y il numero complesso che si ottiene sommando ordinatamente questi elementi. Dicevamo infine intercedere o non intercedere fra x ed y *rapporto reale*, secondochè fra gli elementi stessi sussistesse o non sussistesse proporzionalità.

Possiamo ora intendere che in quelle definizioni si tratti di *elementi rispetto ad unità qualisivogliano.* Perchè, se

$$x=(x_1,\ x_2)=\xi_1 u+\xi_2 v,\quad y=(y_1,\ y_2)=\eta_1 u+\eta_2 v,$$

abbiamo già visto (Coroll. prec.) che sarà $x=y$, allora ed allora soltanto che sia $\xi_1=\eta_1$ e $\xi_2=\eta_2$. Ed abbiamo pur visto che

$$x+y=(\xi_1+\xi_2)u+(\eta_1+\eta_2)v.$$

Inoltre

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 \\ v_1 v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 \xi_2 \\ \eta_1 \eta_2 \end{vmatrix};$$

quindi il determinante delle x_i e y_i e quello delle ξ_i ed η_i sono insieme nulli o insieme diversi da zero.

§ 12. **La definizione di prodotto: preliminari.** — Le definizioni di eguaglianza e di somma, date al paragrafo precedente, sono arbitrarie. Ma, in grazia di esse, ogni numero x si esprime mediante due numeri assegnati qualunque u e v nella forma

$$x=\xi_1 u+\xi_2 v.$$

Per quelle definizioni dunque la totalità doppiamente infinita dei numeri complessi considerata acquista il carattere di *sistema lineare:* la chiameremo *un sistema di numeri complessi a due unità.*

Vogliamo ora definire il *prodotto* $x \cdot y$ di un numero complesso qualunque x (*moltiplicando*) per un altro numero complesso qualunque y (*moltiplicatore*).

Vogliamo cioè *far corrispondere ad ogni coppia x, y di numeri del sistema un numero z del sistema stesso, il quale abbia le proprietà o almeno alcune delle proprietà che, nel campo reale, ha il prodotto rispetto ai fattori,* così che a questo z convengano ancora il nome di prodotto ed il simbolo $x \cdot y$ e ad x e y convengano i nomi di moltiplicando e moltiplicatore o di *fattori.*

Diremo che coll'assegnare di due numeri qualunque del sistema il loro prodotto nel sistema stesso si fa di questo *un* ***corpo*** *di numeri complessi.* Quando ciò sia fatto, e con

$$x = \xi_1 u + \xi_2 v, \quad y = \eta_1 u + \eta_2 v,$$

sia

$$x \cdot y = \varphi_1 u + \varphi_2 v,$$

per ogni sistema di valori di ξ_1, ξ_2, η_1 ed η_2 avremo un valore di φ_1 ed uno di φ_2; gli elementi del prodotto saranno due funzioni

$$\varphi_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2), \quad \varphi_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$$

degli elementi dei fattori. E inversamente, se φ_1 e φ_2 sono due funzioni qualunque delle variabili ξ_1, ξ_2, η_1 ed η_2, ponendo che, con

$$x = \xi_1 u + \xi_2 v, \quad y = \eta_1 u + \eta_2 v,$$

sia

$$x \cdot y = \varphi_1 u + \varphi_2 v,$$

assegnamo per ogni coppia di numeri x ed y il loro prodotto.

Definire il prodotto è costruire queste funzioni φ_1 *e* φ_2. Può farsi questo in guisa che il prodotto goda delle proprietà che gli appartengono nel campo reale? e, se può farsi, può farsi in un sol modo o in più d'uno?

Precisiamo la questione nel modo seguente. Ci domandiamo:

1°) *Se possa definirsi un corpo di numeri complessi così che in esso*

a) *sussista la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma;* cioè abbiasi

$$(1) \qquad (x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y,$$

$$(2) \qquad x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y',$$

e inoltre

$$(3) \qquad (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y),$$

$$(4) \qquad x \cdot (\mu y) = \mu (x \cdot y),$$

qualunque siano i coefficienti reali λ e μ [1];

b) *sussista la proprietà associativa,* cioè sia

$$(5) \qquad (x \cdot y) \cdot y' = x \cdot (y \cdot y');$$

c) *il prodotto sia nullo* ***soltanto*** *quando uno almeno dei fattori sia zero;*

d) *sussista la proprietà commutativa,* cioè sia

$$(6) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

2°) *Se, essendo possibile la definizione d'un corpo di numeri complessi, nel quale sussistano le proprietà enunciate, tale definizione possa darsi in un sol modo o in modi diversi.*

Ricerchiamo innanzi tutto quale carattere delle funzioni φ_1 e φ_2 corrisponda a ciascuna delle proprietà *a*), *b*), *c*) e *d*), che vogliamo appartengano al prodotto.

[1] Sarà facile al Lettore trarre dalle (1) e (2) le formole (3) e (4) rispettivamente, prima per valori interi e positivi dei coefficienti λ e μ e quindi anche per valori positivi frazionari.

Se stabiliremo che *le funzioni* φ_1 *e* φ_2 *abbiano ad essere continue* rispetto alle ξ_1, ξ_2 ed alle η_1, η_2 rispettivamente, le (3) e (4) si trarranno dalle (1) e (2) anche per valori reali positivi qualunque degli stessi coefficienti λ e μ. E stabilito infine che *siano contrari un dell'altro i prodotti* $x \cdot y$ *e* $(-x) \cdot y$ *ed i prodotti* $x \cdot y$ *e* $x \cdot (-y)$ (ciò che vuol dire stabilire che *un prodotto sia nullo ogni volta che è nullo uno almeno dei fattori*), le (3) e (4) varranno per valori reali qualunque, positivi e negativi.

Nelle dette formole (3) e (4) si ha dunque l'espressione di proprietà le quali, coll'aggiunta delle ipotesi cui abbiamo accennato, derivano dalla proprietà distributiva, quale è comunemente intesa: potremmo dire che le formole (1) e (3), (2) e (4) sono espressione della proprietà distributiva (a destra e a sinistra rispettivamente) *intesa in senso lato.*

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA. Richiedendo che sussista la proprietà distributiva si determina già la specie delle funzioni φ_1 e φ_2. Ha luogo infatti questo

TEOREMA. *La condizione necessaria e sufficiente, perchè il prodotto goda della proprietà distributiva rispetto alla somma, è che gli elementi del prodotto siano funzioni bilineari omogenee degli elementi dei fattori.*

Esprimendosi infatti ogni numero complesso mediante le unità u e v, che ora ci conviene di dinotare con u_1 e u_2, poniamo innanzi tutto che sia

$$(7)\quad \begin{cases} u_1 \cdot u_1 = \lambda_{11}^{(1)} u_1 + \lambda_{11}^{(2)} u_2, \quad u_1 \cdot u_2 = \lambda_{12}^{(1)} u_1 + \lambda_{12}^{(2)} u_2, \\ u_2 \cdot u_1 = \lambda_{21}^{(1)} u_1 + \lambda_{21}^{(2)} u_2, \quad u_2 \cdot u_2 = \lambda_{22}^{(1)} u_1 + \lambda_{22}^{(2)} u_2, \end{cases}$$

dove le $\lambda_{ij}^{(k)}$ dinotino coefficienti reali qualunque, per ora affatto arbitrari. Dati i numeri

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2, \\ y &= \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2, \\ z &= \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

se sussiste la proprietà distributiva, cioè se hanno luogo le (1), (2), (3) e (4), solo che le consideriamo poste per u_1 ed u_2, ne ricaviamo

$$x \cdot y = \sum_i \xi_i u_i \cdot \sum_j \eta_j u_j \,(^1) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j (u_i \cdot u_j),$$

cioè

$$(9)\quad x \cdot y = \sum_{i,j,k} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k .$$

Dunque, dati comunque colle (7) i quattro prodotti fra le unità, è determinato il prodotto $x \cdot y$ di due numeri qualunque: esso ha gli elementi

$$(10)\quad \varphi_k = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} \qquad (k = 1, 2)$$

che sono funzioni bilineari omogenee degli elementi di x ed y.

(1) In tutto questo capitolo il segno Σ dinoterà la somma dei termini risultanti dall'attribuire agli indici di sommazione i valori *1* e *2*.

Inversamente qualunque siano i coefficienti $\lambda_{ij}^{(k)}$, il prodotto di numeri qualunque, avente elementi formati secondo la (10), godrà effettivamente della proprietà distributiva. Avremo infatti, ad esempio:

$$\begin{aligned} (x + x') \cdot y &= (\sum_i \xi_i u_i + \sum_i \xi_i' u_i) \cdot \sum_j \eta_j u_j \\ &= \sum_i (\xi_i + \xi_i') u_i \cdot \sum_j \eta_j u_j \\ &= \sum_{i,j,k} (\xi_i + \xi_i') \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k \\ &= \sum_{i,j,k} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k + \sum_{i,j,k} \xi_i' \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k \\ &= x \cdot y + x' \cdot y. \end{aligned}$$

Dal teorema ora dimostrato appare come la proprietà distributiva abbia una importanza preponderante nella definizione di prodotto, della quale andiamo in cerca. Perciò non prescinderemo mai da questa proprietà distributiva, e ricercheremo a quali condizioni debbano soddisfare i coefficienti delle funzioni φ_1 e φ_2, perchè, *insieme colla proprietà distributiva, sussista qualcuna delle altre tre proprietà* b), c) *e* d) enunciate sopra.

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA. Perchè anche questa abbia luogo occorre innanzi tutto che sia

$$(11)\quad (u_i \cdot u_j) \cdot u_k = u_i \cdot (u_j \cdot u_k) \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

ed è sufficiente che sussistano queste otto eguaglianze, perchè la proprietà associativa abbia luogo per prodotti fra numeri qualunque. La verifica di questo è ben semplice.

Pertanto perchè sussistano le (11) occorre e basta che sia

$$(11')\quad \sum_m \lambda_{ij}^{(m)} \lambda_{mk}^{(n)} = \sum_m \lambda_{jk}^{(m)} \lambda_{im}^{(n)} \qquad (i, j, k, n = 1, 2).$$

Dunque *la condizione necessaria e sufficiente perchè abbia luogo la proprietà associativa è che i coefficienti* $\lambda_{ij}^{(k)}$ *delle funzioni* φ_1 *e* φ_2, *i quali finora erano affatto arbitrari, soddisfino alle equazioni* (11').

ESCLUSIONE DEI DIVISORI DELLO ZERO DIVERSI DA ZERO. Sussistendo la proprietà distributiva, come dalle (1), (2), (3)

e (4) è definita, il prodotto è zero *ogni volta* che uno dei fattori è zero.

Si vuole ora che il prodotto sia nullo *soltanto* in questo caso: non si vuole cioè che due numeri, entrambi diversi da zero, diano per prodotto lo zero. Se si avessero numeri così fatti, li chiameremmo *divisori dello zero* diversi da zero, riguardandosi come divisore dello zero lo zero stesso, che, assunto come fattore insieme con qualunque altro numero, dà prodotto nullo.

Ora, perchè non si abbiano divisori dello zero diversi da zero, a quali condizioni devon soddisfare i coefficienti $\lambda_{ij}^{(k)}$ di φ_1 e φ_2?

Se x, y e z sono dati dalle (8) e se

$$x \cdot y = z,$$

si ha

$$\sum_{i,j} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} = \zeta_k \qquad (k = 1, 2);$$

e quindi, ordinando rispetto agli elementi ξ_i del moltiplicando,

$$(12) \quad \begin{cases} \xi_1 \sum_j \eta_j \lambda_{1j}^{(1)} + \xi_2 \sum_j \eta_j \lambda_{2j}^{(1)} = \zeta_1, \\ \xi_1 \sum_j \eta_j \lambda_{1j}^{(2)} + \xi_2 \sum_j \eta_j \lambda_{2j}^{(2)} = \zeta_2. \end{cases}$$

Ordinando invece rispetto agli elementi η_j del moltiplicatore, abbiamo

$$(13) \quad \begin{cases} \eta_1 \sum_i \xi_i \lambda_{i1}^{(1)} + \eta_2 \sum_i \xi_i \lambda_{i2}^{(1)} = \zeta_1, \\ \eta_1 \sum_i \xi_i \lambda_{i1}^{(2)} + \eta_2 \sum_i \xi_i \lambda_{i2}^{(2)} = \zeta_2. \end{cases}$$

Se il prodotto $x \cdot y$ ha da esser nullo soltanto quando sia nullo x o y, alle equazioni (12), fattovi

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

non si deve poter soddisfare altrimenti che con

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,$$

ogni volta che η_1 *ed* η_2 *non siano insieme nulle.* Perchè accada questo, occorre e basta che il determinante

$$\Delta(y) = \left| \sum_j \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2)$$

sia diverso da zero per ogni sistema di valori reali delle η_j, che non sia il sistema $\eta_1 = \eta_2 = 0$. In altre parole occorre e basta che questo determinante sia tal funzione di y che si annulli soltanto per $y = 0$.

Analoghe considerazioni varrano per le (13): il determinante

$$\Delta'(x) = \left| \sum_i \xi_i \lambda_{ij}^{(k)} \right| \qquad (j, k = 1, 2)$$

dovrà annullarsi soltanto per $x = 0$.

Concludiamo che *la condizione necessaria e sufficiente, perchè non si abbiano divisori dello zero diversi da zero, è che i coefficienti* $\lambda_{ij}^{(k)}$ *di* φ_1 *e* φ_2 *siano tali che i determinanti* $\Delta(y)$ *e* $\Delta'(x)$ *si annullino soltanto per* $y = 0$ *ed* $x = 0$ *rispettivamente.*

PROPRIETÀ COMMUTATIVA. Perchè sussista questa proprietà è necessario anzi tutto che sia

$$(14) \qquad u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i \qquad (i, j = 1, 2),$$

e basta che ciò accada perchè sia

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

qualunque siano x ed y: è facile verificarlo. Perchè poi abbiano luogo le (14) *è necessario e sufficiente che sia*

$$(14') \qquad \lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ji}^{(k)} \qquad (i, j, k = 1, 2).$$

§ 13. **Il modulo (unità reale) della moltiplicazione.** — La questione posta al paragrafo precedente si enuncia ora così: È possibile determinare gli otto coefficienti $\lambda_{ij}^{(k)}$, così che abbiasi

$$\sum_m \lambda_{ij}^{(m)} \lambda_{mk}^{(n)} = \sum_m \lambda_{jk}^{(m)} \lambda_{im}^{(n)} \qquad (i, j, k, n = 1, 2),$$

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ji}^{(k)} \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

e che i determinanti $\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ si annullino soltanto per $y = 0$ ed $x = 0$ rispettivamente?

Risponderemo a questa domanda sviluppando alcune conseguenze delle proprietà analizzate.

TEOREMA 1°. *Se si ha un corpo di numeri complessi a due unità, dove vale la proprietà distributiva e non esistono divi-*

sori dello zero diversi da zero, variando uno dei fattori d'un prodotto, se l'altro non è zero, varia anche il prodotto.

Difatti con

$$x \neq x' \quad \text{e} \quad y \neq 0,$$

si ha

$$(x - x') \cdot y \neq 0,$$

e quindi

$$x \cdot y \neq x' \cdot y.$$

Analogamente con

$$x \neq 0 \quad \text{ed} \quad y \neq y'$$

sarà

$$x \cdot y \neq x \cdot y'.$$

TEOREMA 2°. *Se in un corpo di numeri complessi a due unità sussiste la proprietà distributiva e non esistono divisori dello zero diversi da zero, all'equazione*

$$x \cdot y = z,$$

dove z è un numero qualunque, si soddisfa, se è dato $y \neq 0$, con uno ed un sol valore di x, e, se è dato $x \neq 0$, con uno ed un sol valore di y.

Difatti l'equazione

(1) $$x \cdot y = z,$$

trattando come incognita x, compendia le (12) poste al paragrafo precedente per gli elementi ξ_1 e ξ_2 di x. Da queste equazioni, quando siano date comunque ζ_1 e ζ_2 ed ogni volta che sia $y \neq 0$ e quindi $\Delta(y) \neq 0$, sono determinate ξ_1 e ξ_2. Dunque c'è uno ed un sol numero x che soddisfi alla (1), se sono dati z comunque ed y diverso da 0.

E analogamente, come è ovvio, c'è uno ed un sol numero y che soddisfi alla (1), se sono dati z comunque ed x diverso da 0.

Definizione. Se $y \neq 0$ e se

$$x \cdot y = z,$$

x si dice *quoziente* della *divisione anteriore* di z per y; e se $x \neq 0$ e

$$x \cdot y = z,$$

y si dice quoziente della divisione *posteriore* di z per x.

Osserv. Divisione anteriore e divisione posteriore sono le due operazioni inverse della moltiplicazione, che doveva

occorrerci di considerare *finchè non facciamo l'ipotesi che al prodotto appartenga la proprietà commutativa.*

Il teorema ora dimostrato può enunciarsi così: *In un corpo di numeri complessi a due unità, dove valga la proprietà distributiva e non esistano divisori dello zero diversi da zero, dato comunque il dividendo, si ha, per ogni divisore che non sia zero, un quoziente anteriore ed un quoziente posteriore.*

TEOREMA 3°. *Se in un corpo di numeri complessi a due unità sussistono le proprietà distributiva ed associativa e non si hanno divisori dello zero diversi da zero, esiste nel corpo uno ed un solo numero r tale che*

$$r \cdot a = a \cdot r = a$$

qualunque sia a.

Dim. Poniamo l'equazione

$$x \cdot b = b.$$

Supposto $b \neq 0$, c'è uno ed un sol numero r che soddisfa a questa equazione: è il quoziente della divisione anteriore di b per b.

Sia poi a un numero qualunque del sistema e poniamo

$$z = a \cdot r.$$

A causa della proprietà associativa, avremo

$$z \cdot b = (a \cdot r) \cdot b = a \cdot (r \cdot b) = a \cdot b,$$

cioè

$$z \cdot b = a \cdot b.$$

Ma $b \neq 0$, epperò, per il 1° teorema, $z = a$, ovvero

(2) $$a \cdot r = a,$$

qualunque sia a.

Analogamente, se ponessimo l'equazione

$$b \cdot y = b$$

con $b \neq 0$, troveremmo che il numero r' che ne è radice dà

(3) $$r' \cdot a = a,$$

qualunque sia a.

Sarà dunque in particolare per la (2)

$$r' \cdot r = r',$$

e, per la (3),

$$r' \cdot r = r;$$

cioè

$$r = r'$$

e infine

$$r \cdot a = a \cdot r = a$$

qualunque sia a. È poi ovvio che non può aversi un altro numero r_1, avente la stessa proprietà.

Definizione. Il numero r per il quale

$$r \cdot a = a \cdot r = a$$

qualunque sia a, dicesi *modulo* del corpo di numeri complessi considerato.

Dunque *ogni corpo di numeri complessi a due unità, nel quale valgano le proprietà distributiva ed associativa e non esistano divisori dello zero diversi da zero, ammette un modulo.*

TEOREMA 4°. *Se, in un corpo di numeri complessi a due unità, sussistono le proprietà distributiva ed associativa e non si hanno divisori dello zero diversi da zero, nel corpo stesso sussiste anche la proprietà commutativa.*

Difatti il corpo ammette un modulo r, che evidentemente non è zero e che perciò può assumersi come unità. Colle unità r ed u_2 abbiamo

$$r \cdot r = r$$

e inoltre

$$r \cdot u_2 = u_2 \cdot r = u_2:$$

sussiste cioè la proprietà commutativa per il prodotto delle unità, e sappiamo che basta questo, perchè la proprietà stessa valga per prodotti fra numeri qualunque.

Sussistendo la proprietà commutativa, le operazioni di divisione anteriore e posteriore si confondono in una sola.

§ 14. **Le unità immaginarie.** — Sia definito il prodotto così che insieme colla proprietà distributiva sussista la associativa e non si abbiano divisori dello zero diversi da zero. Avremo un modulo r.

Vogliamo ora dimostrare che *si ha un numero i tale che*

$$i \cdot i = -r.$$

A tal uopo prendiamo come unità r ed u_2 ed abbiasi

$$u_2 \cdot u_2 = \mu_1 r + \mu_2 u_2;$$

e, indicato con a un numero qualunque, sia

$$a = \alpha_1 r + \alpha_2 u_2.$$

Si ha

$$a \cdot a = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mu_1) r + (2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \mu_2) u_2,$$

e risulterebbe

$$a \cdot a = \varepsilon r$$

se avessimo

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mu_1 = \varepsilon, \\ 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2 \mu_2 = 0, \end{cases}$$

cioè se avessimo

(1) $$\alpha_2^2 \left[\left(\frac{\mu_2}{2} \right)^2 + \mu_1 \right] = \varepsilon$$

e

(2) $$\alpha_1 = -\frac{\mu_2}{2} \cdot \alpha_2.$$

Ora se alla (1), postovi $\varepsilon = +1$, potessimo soddisfare con valore reale di α_2, per essere positivo il coefficiente

$$k = \left(\frac{\mu_2}{2} \right)^2 + \mu_1,$$

cioè se potessimo avere

$$a \cdot a = r,$$

senza che fosse

$$a = \pm r,$$

il prodotto dei due numeri

$$c = r + a, \quad c' = r - a,$$

entrambi diversi da zero, sarebbe eguale ad

$$r + a - a - r,$$

cioè sarebbe nullo.

Dunque k non è positivo. E neppure è nullo; perchè, se fosse tale, alle (1) e (2) fattovi $\varepsilon = 0$, soddisferemmo con α_1 ed α_2 reali qualunque; e, con $a \neq 0$, avremmo $a \cdot a = 0$.

Dunque k è negativo e dalle (1) e (2), postovi $\varepsilon = -1$, si traggono per α_1 ed α_2 i valori reali

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad \alpha_1 = -\frac{\mu_2}{2\sqrt{-k}}.$$

Dinotato con i il numero $\alpha_1 r + \alpha_2 u_2$, dove α_1 ed α_2 hanno questi valori, si ha

$$i \cdot i = -r.$$

Osserv. 1ª. Si hanno due numeri i, quelli che corrispondono ai due valori contrari di $\sqrt{-k}$: e non se ne hanno altri. Perchè, se fosse

$$i \cdot i = i' \cdot i' = -r,$$

avremmo

$$i \cdot i - i' \cdot i' = 0,$$

cioè

$$(i + i') \cdot (i - i') = 0,$$

e quindi

$$i = \pm i'.$$

Osserv. 2ª. Fra r ed i non intercede rapporto reale, perchè $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{-k}}$ non è zero.

§ 15. **Conclusione.** — Riassumiamo i risultati stabiliti.

Abbiamo dimostrato che:

Se, in un sistema di numeri complessi a due unità, può definirsi il prodotto in guisa che sussistano le proprietà distributiva ed associativa e non si abbiano divisori dello zero diversi da zero, e sussista pure, *per conseguenza*, la proprietà commutativa, nel sistema esistono un numero r e due numeri i (uno contrario dell'altro) tali che:

$$r \cdot r = r, \quad r \cdot i = i, \quad i \cdot r = i, \quad i \cdot i = -r.$$

Fra r ed i non intercede rapporto reale; e assumendo tali due numeri come unità, il prodotto dei numeri

$$x = \bar{\xi}_1 r + \bar{\xi}_2 i, \quad y = \bar{\eta}_1 r + \bar{\eta}_2 i,$$

è dato dalla formola

$$x \cdot y = (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1 - \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2) r + (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_1) i.$$

Inversamente, se in un sistema di numeri complessi, presi come unità due numeri qualunque r ed i, e considerati i numeri

$$x = \bar{\xi}_1 r + \bar{\xi}_2 i, \quad y = \bar{\eta}_1 r + \bar{\eta}_2 i$$

definiamo il prodotto di essi colla formola

$$x \cdot y = (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1 - \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2) r + (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_1) i$$

(la quale dà in particolare

$$r \cdot r = r, \quad r \cdot i = i, \quad i \cdot r = i, \quad i \cdot i = -r),$$

nel corpo di numeri complessi a due unità, che così costruiamo, sussistono tutte le proprietà che hanno luogo nel campo reale. È ben semplice riconoscere questo; ma qui, per ricordare i punti principali della precedente discussione, osserveremo che:

1) sussiste la proprietà distributiva, perchè gli elementi del prodotto

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1 - \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2, \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\xi}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_1,$$

sono funzioni bilineari omogenee degli elementi dei fattori;

2) sussiste la proprietà associativa, perchè in queste funzioni si hanno i coefficienti

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_{11}^{(1)} = 1, & \bar{\lambda}_{11}^{(2)} = 0; & \bar{\lambda}_{12}^{(1)} = 0, & \bar{\lambda}_{12}^{(2)} = 1; \\ \bar{\lambda}_{21}^{(1)} = 0, & \bar{\lambda}_{21}^{(2)} = 1; & \bar{\lambda}_{22}^{(1)} = -1, & \bar{\lambda}_{22}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

che sono una soluzione del sistema

$$(2) \qquad \sum_m \lambda_{ij}^{(m)} \lambda_{mk}^{(n)} = \sum_m \lambda_{jk}^{(m)} \lambda_{im}^{(n)} \qquad (i, j, k, n = 1, 2);$$

3) non si hanno divisori dello zero diversi da zero, perchè, coi coefficienti $\bar{\lambda}_{ij}^{(k)}$ dati dalle (1), risulta

$$\Delta(y) = \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2, \quad \Delta'(x) = \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2:$$

i determinanti $\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ si annullano dunque soltanto per $y = 0$ e $x = 0$ risp.;

4) sussiste la proprietà commutativa, perchè questa, in un corpo di numeri complessi a due unità, non è mai disgiunta dalle precedenti: e si ha del resto dalle (1)

$$\bar{\lambda}_{ij}^{(k)} = \bar{\lambda}_{ji}^{(k)}.$$

Dunque: *Esiste uno ed un sol corpo di numeri complessi a due unità, dove siano conservate le proprietà delle operazioni, che sussistono nel campo reale.*

Esso si ottiene dal sistema di numeri

$$x = \bar{\xi}_1 r + \bar{\xi}_2 i, \quad y = \bar{\eta}_1 r + \bar{\eta}_2 i, \quad z = \ldots\ldots,$$

ponendo

$$x \cdot y = (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_1 - \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_2) r + (\bar{\xi}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\xi}_2 \bar{\eta}_1) i;$$

ovvero, adottate altre unità u_1 ed u_2, si ottiene dal sistema di numeri

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2, \quad y = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2, \quad z = \ldots\ldots,$$

ponendo

$$x \cdot y = \sum_{i,j,k} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k,$$

e gli elementi ξ_i, η_j.... ed i coefficienti $\lambda_{ij}^{(k)}$ essendo formati con le $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_j$.... e coi coefficienti della sostituzione lineare, corrispondente al cangiamento delle unità indicato.

Se è precisamente

$$r = l_{11} u_1 + l_{12} u_2, \quad i = l_{21} u_1 + l_{22} u_2,$$

con

$$\Delta = l_{11} l_{22} - l_{12} l_{21} \neq 0, \tag{3}$$

e quindi

$$u_1 = l_{11}' r + l_{12}' i, \quad u_2 = l_{21}' r + l_{22}' i,$$

con

$$l_{11}' = \frac{l_{22}}{\Delta}, \quad l_{12}' = \frac{-l_{12}}{\Delta}, \quad l_{21}' = \frac{-l_{21}}{\Delta}, \quad l_{22}' = \frac{l_{11}}{\Delta}, \tag{4}$$

risulta

$$\xi_1 = l_{11} \bar{\xi}_1 + l_{21} \bar{\xi}_2, \quad \xi_2 = l_{12} \bar{\xi}_1 + l_{22} \bar{\xi}_2$$

e le stesse relazioni hanno luogo fra le η_i e le $\bar{\eta}_i$. Si ha poi

$$\lambda_{ij}^{(k)} = (l_{i_1}' l_{j_1}' - l_{i_2}' l_{j_2}') l_{1k} + (l_{i_1}' l_{j_2}' + l_{i_2}' l_{j_1}') l_{2k}.$$

Possiamo anche dire che le (1) dànno una particolare soluzione del sistema di equazioni (2), aggiunta la condizione che i determinanti $\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ abbiano ad annullarsi solo per $y = 0$ ed $x = 0$ rispettivamente: *ogni altra soluzione* si ha da questa particolare colle formole:

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \sum_{p,q,r} l_{ip}' l_{jq}' l_{rk} \bar{\lambda}_{pq}^{(r)}$$

dove le l_{ip}', l_{rk} sono coefficienti qualunque legati dalle (3) e (4).

Per tornare infine alle espressioni ed ai simboli d'uso comune, chiamiamo *unità reale* il modulo r del corpo di numeri complessi che abbiamo definito, e chiamiamo *unità immaginarie* i due numeri i.

I multipli λr dell'unità reale costituiscono da soli un corpo: il prodotto di due di tali multipli è pure un multiplo dell'unità stessa.

Se al multiplo λr dell'unità reale facciamo corrispondere il numero reale λ, si ha fra i numeri complessi λr e i numeri reali una corrispondenza biunivoca, tale che alla somma e al prodotto di due numeri λr corrispondono somma e prodotto dei numeri reali corrispondenti. Inoltre nelle operazioni cogli altri numeri complessi i multipli λr si comportano come coefficienti reali e nei numeri complessi e nelle espressioni formate con essi ogni coefficiente reale λ può sostituirsi col fattore complesso λr.

Diremo perciò che del corpo di numeri complessi che abbiamo definito fa parte quello dei *numeri reali* e che questi sono i multipli λr dell'unità reale. E, senza andare incontro ad ambiguità di sorta, potremo d'or innanzi tralasciare di segnare a fianco del coefficiente λ l'unità r.

I multipli delle unità immaginarie si chiamano *immaginari puri*. Ogni numero complesso è somma d'un numero reale *(parte reale)* e d'un immaginario puro *(parte immaginaria)*. Due numeri complessi si dicono *coniugati*, quando le loro parti immaginarie sono numeri contrari.

La teoria si compendierà ora in queste formole:

I) $\xi_1 + \xi_2 i = \eta_1 + \eta_2 i$, se $\xi_1 = \eta_1$ e $\xi_2 = \eta_2$ e inversamente;

II) $(\xi_1 + \xi_2 i) + (\eta_1 + \eta_2 i) = (\xi_1 + \eta_1) + (\xi_2 + \eta_2)i$;

III) $(\xi_1 + \xi_2 i) \cdot (\eta_1 + \eta_2 i) = (\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2) + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)i$;

IV) $i^m = 1, i, -1, -i$, secondochè sia $m \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$;

V) Se $\eta_1 + \eta_2 i \neq 0$,

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 i}{\eta_1 + \eta_2 i} = \frac{\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2}{\eta_1^2 + \eta_2^2} - \frac{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1}{\eta_1^2 + \eta_2^2} i .$$

Ponendo

VI) $$\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

dove il radicale abbia il valore assoluto, e

VI′) $$\theta = \text{arc tang} \frac{\xi_2}{\xi_1},$$

risulterà

VI″) $$\xi_1 = \rho \cos\theta, \quad \xi_2 = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

restando θ determinato soltanto a meno di multipli di 2π.

E così dagli elementi ξ_1 e ξ_2 del numero complesso, seguendo il cammino inverso a quello tenuto nella teoria geometrica, passiamo alla considerazione del *modulo* ρ e dell'*argomento* θ; modulo ed argomento sono qui due variabili, legate alle antiche ξ_1 e ξ_2 dalle VI), VI′), VI″). La sostituzione di queste variabili permette una trascrizione vantaggiosa delle formole III) e V), che diventano:

III′) $$\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \cdot \rho'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') = \rho\rho'(\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')),$$

V′) $$\frac{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{\rho'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')} = \frac{\rho}{\rho'}(\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')),$$

e dànno, prima per esponenti interi e positivi, quindi per esponenti fratti e positivi e infine per esponenti razionali qualunque, positivi o negativi, la formola del DE MOIVRE

VII) $$[\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^\mu = \rho^\mu(\cos\mu(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}\mu(\theta + 2k\pi)).$$

CAP. III. - IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

§ 16. **Enunciato del teorema - Cenni storici.** — Colle formole stabilite si decompone in n fattori di 1° grado rispetto alla variabile z il binomio

$$z^n - a,$$

dove a è un numero complesso qualunque.

Ma questo non è che un caso particolare d'una proposizione ben più importante.

Consideriamo il polinomio intero di grado n rispetto alla variabile complessa z

(1) $$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

dove a_1 $a_2, \ldots, a_n$ sono coefficienti complessi qualunque; e poniamo l'equazione

(2) $$f(z) = 0.$$

Considerazioni elementari valgono a stabilire che, se il polinomio $f(z)$ ammette il divisore di 1° grado $z - \alpha$, α è radice dell'equazione (2) ed inversamente. *La decomposizione di $f(z)$ in fattori di 1° grado equivale alla risoluzione dell'equazione $f(z) = 0$.*

Pure mediante considerazioni elementari si stabilisce che $f(z)$ *non può ammettere* n + 1 *fattori di 1° grado diversi* e che, se potessimo affermare che ogni polinomio intero rispetto a z ammette almeno un fattore di 1° grado, ne trarremmo immediatamente che $f(z)$ *è il prodotto di* n *determinati fattori di 1° grado*

$$z - \alpha_1, \quad z - \alpha_2, \ldots, \quad z - \alpha_n,$$

fra i quali possono aversene degli eguali.

Ora il teorema fondamentale dell'Algebra afferma appunto che *ogni polinomio intero rispetto a z ammette almeno un divisore $z - \alpha$* ovvero che *ogni equazione algebrica di grado* n *ammette una e quindi* n *radici,* alcune delle quali possono essere fra loro eguali.

Nel caso particolare che i coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siano tutti reali, si ha di più che, ammettendo $f(z)$ il fattore $z - \alpha_s$,

con α_s complesso ed eguale a $\beta_s + i\gamma_s$, $f(z)$ ammette anche il fattore $z - \alpha_s'$ con α_s' coniugato di α_s. In tale ipotesi quindi $f(z)$ è decomponibile, in uno ed in un sol modo, in prodotto di fattori *reali* di 1° e di 2° grado, come

$$z - \alpha_r,$$
$$(z - \beta_s)^2 + \gamma_s^2.$$

Come abbiamo detto sopra, già il CARDANO sapeva che un'equazione di 3° o 4° grado può ammettere tre o quattro soluzioni rispettivamente; e già abbiamo detto che una prima enunciazione del teorema fondamentale ora ricordato si deve al GIRARD.

Tuttavia la prima dimostrazione di esso, cui non possano muoversi obiezioni, fu pubblicata soltanto nel 1799 da C. F. GAUSS (1777-1855) colla Dissertazione *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (1).

Nel lungo periodo intermedio, l'oscurità che avvolgeva il concetto di numero immaginario fece sì che la questione non fosse neppure posta in modo preciso. Si trattava di stabilire che ad ogni equazione algebrica si può soddisfare con valori reali dell'incognita o con valori della forma $a + ib$ con $i = \sqrt{-1}$.

Invece si pose da molti come *assioma* che ogni equazione ammette radici possibili o *impossibili*. Per radici possibili si intendevano quelle reali; quanto alle impossibili, queste non avrebbero dovuto essere altro che le complesse, della forma $a + ib$; ma, prima di GAUSS, aveva potuto insinuarsi nelle considerazioni dei matematici questa nozione indeterminata e misteriosa di *quantità impossibile*, nozione che non si sapeva dire se fosse diversa o se comprendesse in sè quella di quantità complessa. E così non si scorgeva che l'*assioma* intorno all'esistenza delle radici d'un'equazione algebrica veniva ad avere non altro contenuto che questo: Ad ogni equazione si può soddisfare *o* con valori reali dell'incognita, *o* con valori complessi della forma $a + ib$, *o* forse con valori di altra forma ancora ignota, *o* infine con valori non contenuti in alcuna forma. Partendo da un tale assioma, attraverso considerazioni nelle quali *si parlava di somme e prodotti di queste quantità impossibili*, si veniva a dimostrare che quelle fra esse, colle quali si soddisfaceva ad un'equazione algebrica, si riducevano poi alla forma $a + ib$. Ma è chiaro come in tutto questo si avesse non altro che una petizione di principio.

(1) Helmstedt, 1799; Werke, Bd. III, p. 1.

Da tale macchia sono offuscate fin le dimostrazioni che del teorema fondamentale dette nel 1749 un matematico insigne come LEONARDO EULERO (1707-1783) (1); l'insufficienza di tali dimostrazioni fu appunto messa in luce da GAUSS nella *Dissertazione* già citata, dove è pur discussa una dimostrazione dello stesso teorema, data nel 1746 da GIOVANNI LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) (2). Anche questa non è molto rigorosa, ma ha tuttavia in sè tanto di vitale, da giustificare che al teorema fondamentale si conservi il nome dell'enciclopedista francese.

Perciò esporremo, nei tratti essenziali, prima questa dimostrazione, nella forma che oggi si può darle, e poi quella di GAUSS, rimandando pei particolari ai trattati di Algebra.

§ 17. **La dimostrazione del d'Alembert.** — Consideriamo la funzione

$$U = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{1}$$

e supponiamo che i coefficienti siano reali.

Questa funzione definisce, nel piano dove le z sono le ascisse e le U sono le ordinate, una curva C. Quando ci muoviamo lungo un arco di questa curva, per ogni valore di z si ha un corrispondente valore di U e inversamente: *è dunque anche z una funzione di U.* Di quale specie è tal funzione

$$z = z(U)?$$

Se supponiamo dapprima che per $U = 0$ abbiasi $z = 0$ (cioè che sia $a_n = 0$), e che, per valori positivi e pros-

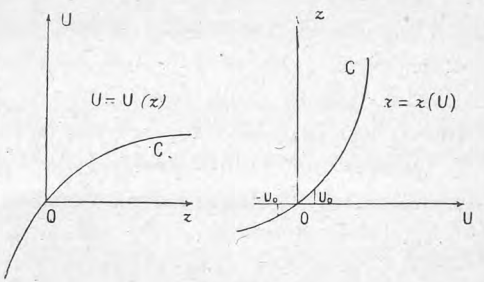


Fig. 12.

(1) Histoire de l'Académie royale des Sciences et belles Lettres, Berlino, Annata V^a, 1749 (1851), p. 222.

(2) Histoire de l'Académie etc., Berlino, Annata II^a, 1746 (1748), p. 182.

simi a zero di z, la U riceva valori positivi prossimi a zero, se supponiamo cioè che la curva C passi per l'origine delle coordinate e sia disposta come indicano le figure 12 e 13, la più generale espressione che a $z = z(U)$ possa appartenere, per valori piccoli e *positivi* di U, sarà quella d'una serie

$$z = \alpha U^{\frac{m}{n}} + \beta U^{\frac{p}{q}} + \gamma U^{\frac{r}{s}} + \ldots, \tag{2}$$

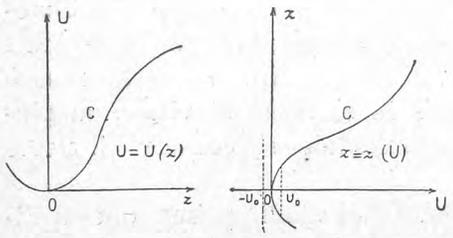


Fig. 13.

dove gli esponenti sono positivi ed è

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} \ldots.$$

(Una siffatta espressione sarà quella che costruiremo, per esempio, fissando un valore, positivo e prossimo a zero, U_0 di U e poi calcolando, coi metodi di approssimazione, la radice positiva prossima a zero dell'equazione

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z = U_0).$$

Pertanto ponendo nella (1) in luogo di z lo sviluppo (2), dove ancora intendiamo che U sia positivo, la (1) si cangia in una identità. *In pratica* dalla (2) trarremo soltanto valori approssimati di z, ritenendo un numero limitato di termini della serie. Introdotto uno di tali valori approssimati di z nella (1), a calcoli fatti si elideranno le potenze di U cogli esponenti più bassi: rimarranno soltanto potenze di U con esponenti tanto più alti, cioè sarà tanto più prossimo a zero il risultato della sostituzione, quanto maggiore sarà il numero dei termini che avremo ritenuto per z.

Questo per valori *positivi* di U. Ma possiamo pensare di attribuire ad U nella serie (2) valori prossimi a zero e *negativi*. Allora, se nella serie (2) non si hanno termini, dove l'esponente abbia denominatore pari, la serie consterà ancora di termini tutti reali; ma, se ci saranno termini coll'esponente a denominatore pari, questi per valori negativi di U saranno immaginari. Tuttavia, coll'una e coll'altra ipotesi, la serie (2) ci dà ancora valori di z, coi quali si soddisfa alla (1). Difatti, ritenendo ancora nella (2) un numero limitato di termini e sostituita entro la (1) l'espressione di z formata con questi, *i calcoli si faranno colle stesse regole che si seguivano prima,* con U positivo; rimarranno potenze di U con esponenti tanto più alti, quanto maggiore sarà il numero dei termini assunti a formare il valore di z. Ma, se, con U negativo, poniamo

$$U^{\frac{m}{2n'}} = a + ib,$$

a e b sono quantità reali dell'ordine di $|U|^{\frac{m}{2n'}}$. Dunque, anche quando si presentino gli immaginari, separando nel risultato della sostituzione indicata la parte reale dal coefficiente dell'immaginario, tal parte reale e tal coefficiente di i saranno tanto più prossimi a zero, quanto più grande sarà il numero dei termini che avremo ritenuto nello sviluppo (2).

Tutto questo vuol dire che la serie (2), la quale dà z in funzione di U, per U prossimo a zero e positivo, dà pure per U prossimo a zero e negativo un valore di z, *reale o complesso*, col quale si soddisfa ancora alla (1). Cioè vuol dire che, se la funzione $U(z)$, per z prossimo a zero e positivo, assume valori prossimi a zero e positivi, assumerà valori prossimi a zero e negativi per valori di z *reali o complessi:* per valori reali quando si abbia la disposizione della figura 12, per valori complessi quando si abbia quella della figura 13.

È ovvio che le argomentazioni svolte valgono anche per il caso che, essendo $U(0) = 0$, per valori prossimi a zero e positivi di z la U assuma valori prossimi a zero e negativi. Allora la U riceverà anche valori prossimi a zero e positivi per valori reali o complessi di z.

Ed è pur ovvio che le osservazioni fatte per il punto della curva C, dove $z = 0$ ed $U = 0$, possono intendersi fatte per ogni altro punto (z_1, U_1): basta in quel che precede sostituire le variabili $z - z_1$ ed $U - U_1$ a z ed U.

Supponiamo ora che, attribuendo a z valori reali, U varii nell'intervallo (r, s), gli estremi inclusi. Per le argomentazioni svolte *potremo estendere nell'uno e nell'altro senso questo intervallo*, attribuendo a z, se non valori reali, valori complessi. In tal guisa potremo ottenere che la U prenda ogni valore reale finito.

Perchè, se ci fosse un valore $\overline{U}$, maggiore di r o minore di s, che non potesse essere raggiunto dalla funzione $U(z)$, tra s ed $\overline{U}$ dovrebbe essere compreso un *massimo* T della funzione stessa (ovvero fra $\overline{U}$ ed r un *minimo*), il qual valore T corrisponderebbe ad un certo valore $p+iq$ di z.

Ma, se nella (1) poniamo $p+iq$ in luogo di z e quindi, fatti i calcoli, eguagliamo le parti reali e le immaginarie, avremo due equazioni fra U, p e q, dalle quali, mediante eliminazioni, ne trarremo altre due, una involgente U e p e l'altra U e q. La $U(z)$ per valori reali di p e q percorre l'intervallo (s, T) (o l'intervallo (T, r)); quindi assumerà anche valori maggiori di T (o minori), se non per valori reali di p e q, per valori complessi $\alpha+i\beta$ e $\gamma+i\delta$, e infine per il valore complesso di z, $\alpha-\delta+i(\beta+\gamma)$.

In conclusione, coll'attribuire a z valori reali e complessi, *si può fare assumere ad U qualunque valore reale:* quindi si avranno valori reali o complessi di z, per i quali $U=0$, cioè si avranno radici reali o complesse dell'equazione

$$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Tale è la dimostrazione del D'ALEMBERT. E si può osservare innanzi tutto che in essa si sorvola intorno alla possibilità e alla convergenza dello sviluppo di z in serie secondo la (2). Inoltre, se è dimostrato che, *raggiungendo U il valore T*, U assume anche valori maggiori o minori di T, cioè se è escluso che U ammetta un massimo o un minimo, non è escluso, colla dimostrazione fatta, che U ammetta soltanto un limite superiore o inferiore finito.

A questi difetti ha supplito l'odierna teoria delle funzioni algebriche di una variabile complessa, della qual teoria il D'ALEMBERT, precorrendo il suo tempo, intravide il fondamento.

L'equazione

$$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n - U = 0, \tag{3}$$

se, attribuito a z il valore *generico* z_0, dà $U=a$, e quindi se per $U=a$ è soddisfatta da $z=z_0$, ha per valori di U prossimi ad a una radice prossima a z_0, e questa radice è in un conveniente intorno del punto a una *funzione regolare di U*, cioè sviluppabile in serie di potenze di $U-a$. *Prolungando*

analiticamente tale funzione, il prolungamento soddisfa sempre alla (3); e, mediante tale prolungamento, si viene ad avere una funzione $z=z(U)$, non tanto pei valori reali di U, ma anche per tutti quelli complessi. Di questa funzione $z=z(U)$ dovrà dirsi poi che ha un numero finito di punti singolari (*critici*) e che non è in generale monodroma: è uno degli n rami d'una funzione analitica di U esistente in tutto il piano complesso etc.

Ora il D'ALEMBERT sviluppa appunto una funzione $z=z(U)$, definita dalla (3), in serie di potenze, e la prolunga analiticamente. Nella sua dimostrazione sono manchevoli i mezzi; ma è vitale, come abbiamo detto, il principio.

§ 18. **La dimostrazione di Gauss.** — La dimostrazione che ora esporremo è la prima delle tre che il GAUSS ha dato del teorema fondamentale, ed è la più semplice, come quella dove la questione è investita nel modo più diretto e dalla quale meglio ne è rivelata l'essenza [1].

Proposto il polinomio

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n,$$

con

$$a_h = \rho_h(\cos\theta_h + i \operatorname{sen}\theta_h),$$

poniamovi

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Risulterà

$$f(z) = X + iY$$

con

$$\begin{aligned} X &= r^n \cos n\varphi + \rho_1 r^{n-1} \cos(\vartheta_1 + (n-1)\varphi) + ... \\ &\quad + \rho_{n-1} r \cos(\vartheta_{n-1} + \varphi) + \rho_n \cos\theta_n, \\ Y &= r^n \operatorname{sen} n\varphi + \rho_1 r^{n-1} \operatorname{sen}(\theta_1 + (n-1)\varphi) + ... \\ &\quad + \rho_{n-1} r \operatorname{sen}(\theta_{n-1} + \varphi) + \rho_n \operatorname{sen}\theta_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Dobbiamo ricercare se si abbiano valori di x ed y, ovvero di r e φ, pei quali risulti insieme

$$X=0, \quad Y=0.$$

Il fondamento della dimostrazione sta nel fatto che *le funzioni X e Y sono continue.* Quindi, se in due punti A e B

[1] Cfr. F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* I (Lipsia, 1908), p. 232 e seguenti.

del piano complesso una delle funzioni assume valori di segno contrario, congiunti A e B con una linea qualunque, lungo di questa la funzione si annullerà almeno una volta: A apparterrà ad una regione del piano dove la funzione ha un certo segno, B ad una regione dove ha il segno opposto; e due tali regioni saranno separate da linee o da regioni, dove la funzione è nulla.

Si ha:

$$\frac{X}{r^n} = \cos n\varphi + \frac{\rho_1}{r}\cos(\theta_1 + (n-1)\varphi) + \dots + \frac{\rho_{n-1}}{r^{n-1}}\cos(\theta_{n-1} + \varphi) + \frac{\rho_n}{r^n}\cos\theta_n,$$

(2)

$$\frac{Y}{r^n} = \operatorname{sen} n\varphi + \frac{\rho_1}{r}\operatorname{sen}(\theta_1 + (n-1)\varphi) + \dots + \frac{\rho_{n-1}}{r^{n-1}}\operatorname{sen}(\theta_{n-1} + \varphi) + \frac{\rho_n}{r^n}\cos\theta_n,$$

epperò, quando r sia sufficientemente grande, cioè fuori d'un cerchio avente il centro nell'origine delle coordinate e raggio sufficientemente grande, *le funzioni* $\frac{X}{r^n}$ *ed* $\frac{Y}{r^n}$ *si confondono sensibilmente colle altre* $\cos n\varphi$ *e* $\operatorname{sen} n\varphi$. Pei valori di z, dei quali il modulo è maggiore del raggio di tal cerchio, nell'equazione

$$f(z) = 0$$

o nelle altre

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

possiamo, per la nostra discussione, trascurare tutti i termini che seguono il primo e quindi riferirci alle equazioni

$$z^n = 0$$

ovvero

$$\cos n\varphi = 0, \quad \operatorname{sen} n\varphi = 0 \tag{3}$$

rispettivamente.

Ora queste equazioni (3) definiscono, la prima un sistema S di n rette, passanti per l'origine e formanti coll'asse delle x gli angoli

$$\frac{\pi}{2n}, \ \frac{3\pi}{2n}, \ \frac{5\pi}{2n}, \dots, \ \frac{(2n-1)\pi}{2n};$$

la seconda un sistema T di n rette, pure passanti per l'origine e formanti coll'asse delle x gli angoli

$$0, \ \frac{\pi}{n}, \ \frac{2\pi}{n}, \dots, \ \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Le rette d'un sistema sono bisettrici degli angoli compresi dalle rette dell'altro; e, negli angoli compresi dalle rette S, $\cos n\varphi$ è alternatamente positivo e negativo, e lo stesso accade di $\operatorname{sen} n\varphi$ negli angoli compresi dalle rette del sistema T. (Nella figura qui a fianco è $n = 3$, le rette s_1, s_2, s_3, sono quelle del sistema S, e t_1, t_2, t_3 quelle del sistema T).

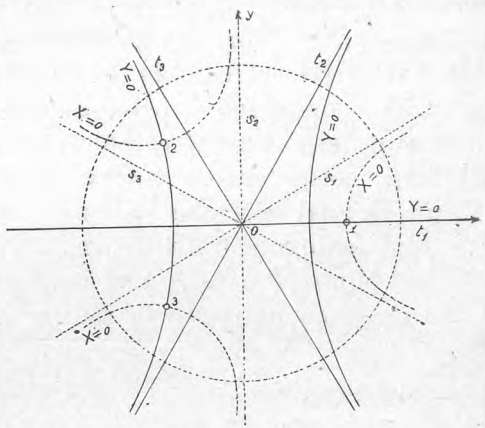


Fig. 14.

Perciò, almeno fuori d'un cerchio avente centro nell'origine e raggio sufficientemente grande, si avranno punti del piano dove X è, insieme con $\cos n\varphi$, positiva e altri punti dove è negativa. E perciò *il piano sarà diviso in regioni, dove la funzione di* X *è positiva, e in altre dove la funzione stessa è negativa, da un sistema di linee lungo le quali è* $X = 0$.

Non possono aversi aree, dove sia $X = 0$; perchè, se si avesse una tal area, in essa potremmo condurre un arco di cerchio avente centro nell'origine e un certo raggio r_0. L'equazione di tal cerchio e la $X = 0$, aventi i gradi 2 ed n rispettivamente, dovrebbero ammettere infinite soluzioni comuni, mentre non possono averne più di $2n$.

Sempre per il fatto che

$$\lim_{r=\infty}\left(\frac{X}{r^n} - \cos n\varphi\right) = 0,$$

il sistema delle linee lungo le quali è $X = 0$, potrà costituire, entro un cerchio avente il centro nell'origine, una figura co-

munque diversa da quella che vi è costituita dalle rette del sistema S: ma *queste rette saranno gli asintoti di quel sistema di linee.*

Analoghe considerazioni varranno per la funzione Y: l'equazione $Y=0$ definirà un sistema di linee, che hanno per asintoti le rette del sistema T [1].

Quindi, *alternandosi*, fuori d'un cerchio abbastanza grande, *i rami delle curve $X=0$ con quelli delle curve $Y=0$*, entro il cerchio dovremo avere almeno un punto P, dove una curva d'un sistema interseca una curva dell'altro sistema. Lasciamo al Lettore di persuadersi di questo, di stabilire cioè che, presi sul cerchio $2n$ punti ed altri $2n$ alternantisi coi primi, comunque si congiungano questi a due a due con linee tracciate entro il cerchio, non potrà farsi lo stesso per gli altri, senza che le nuove linee intersechino le prime. (Risulterà anzi così che debbono aversi n punti d'incontro, eventualmente non tutti distinti).

Nel punto $P\equiv(x_0, y_0)$ si ha $X=Y=0$. Dunque l'equazione proposta ammette la radice

$$z_0 = x_0 + iy_0.$$

§ 19. **Dimostrazione di Argand e Cauchy.** — Nella dimostrazione precedente si ha riguardo al modo di variare della parte reale X e della parte immaginaria Y della funzione $f(z)$. Consideriamo ora come varii con x ed y il modulo R di questa funzione.

Sia

$$f(z) = X + iY = R(\cos\Phi + i\operatorname{sen}\Phi); \tag{1}$$

e supponiamo che, attribuiti ad x e y gli accrescimenti h e k, risultino per X, Y ed R gli accrescimenti ΔX, ΔY e ΔR. Ponendo nel polinomio $f(z)$, $x+h+i(y+k)$ in luogo di z, avremo

$$f(x+h+i(y+k)) = f(z) + (h+ik)f_1(z) + (h+ik)^2 f_2(z) + \dots. \tag{2}$$

dinotando $f_1(z)$, $f_2(z)$,.... nuovi polinomi: sono, a meno di coefficienti, le derivate di $f(z)$.

[1] Quando i coefficienti dell'equazione siano reali, la retta t_1 è uno dei rami del luogo $Y=0$.

Sia quindi

$$h + ik = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),$$

e

$$f_1(z) = R_1(\cos\Phi_1 + i\operatorname{sen}\Phi_1),$$
$$f_2(z) = R_2(\cos\Phi_2 + i\operatorname{sen}\Phi_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Eseguendo nella (2) le sostituzioni, risulterà

$$\begin{aligned} f(x+h+i(y+k)) = \\ = R\cos\Phi + R_1\rho(\cos\Phi_1+\theta) + R_2\rho^2\cos(\Phi_2+2\vartheta) + \dots + \\ + i\{R\operatorname{sen}\Phi + R_1\rho\operatorname{sen}(\Phi_1+\theta) + R_2\rho^2\operatorname{sen}(\Phi_2+2\theta) + \dots\}. \end{aligned} \tag{3}$$

In questo sviluppo la parte reale è $X+\Delta X$, il coefficiente di i è $Y+\Delta Y$; epperò

$$\begin{aligned} (R+\Delta R)^2 = (X+\Delta X)^2 + (Y+\Delta Y)^2 = \\ \{R\cos\Phi + R_1\rho\cos(\Phi_1+\theta) + R_2\rho^2\cos(\Phi_1+2\vartheta) + \dots\}^2 \\ + \{R\operatorname{sen}\Phi + R_1\rho\operatorname{sen}(\Phi_1+\theta) + R_2\rho^2\operatorname{sen}(\Phi_2+2\vartheta) + \dots\}^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Sia $f(z)\neq 0$ e quindi $R\neq 0$. Eseguendo nella seconda parte della (4) i quadrati ed ordinando secondo le potenze crescenti di ρ, si hanno come primi termini

$$R^2 + 2RR_1\rho\cos(\Phi_1 - \Phi + \theta) + \dots$$

e quindi la quantità

$$(R+\Delta R)^2 - R^2$$

cioè l'accrescimento $\Delta(R^2)$ di R^2, ordinato nel medesimo modo, avrà come primo termine, se R_1 non è nullo,

$$2RR_1\rho\cos(\Phi_1 - \Phi + \theta).$$

Se R_1 sarà nullo senza che lo sia R_2, avrà come primo termine

$$2RR_2\rho^2\cos(\Phi_2 - \Phi + 2\vartheta),$$

e così via. Se per il valore di z che consideriamo saranno nulli R_1, R_2,...., R_{l-1}, senza che lo sia R_l, il primo termine dello sviluppo di $\Delta(R^2)$ sarà

$$2RR_l\rho^l\cos(\Phi_l - \Phi + l\vartheta).$$

Ora, quando ρ è piccolo e qualunque sia θ, cioè quando gli accrescimenti h e k sono piccoli, $\Delta(R^2)$ avrà lo stesso segno che il primo suo termine. Ma possiamo sempre disporre di θ così che $\cos(\Phi_l - \Phi + l\vartheta)$ e quindi $\Delta(R^2)$ abbiano il segno che si vuole. Dunque *se per un certo valore di z non è $R = 0$, a quel valore di z non corrisponde nè un massimo nè un minimo di R^2, o di R.*

Ma *R è funzione continua di z*, definita in tutto il piano complesso: epperò *ammetterà un massimo ed un minimo* e vi saranno punti del piano, eventualmente a distanza infinita, dove questo massimo e questo minimo sono da R effettivamente raggiunti. A distanza infinita non si ha minimo di R, come risulta dalla considerazione delle espressioni che, per X e Y, abbiamo posto al paragrafo precedente. Perciò *i punti di minimo saranno a distanza finita,* e siccome questi punti di minimo saranno tali *solo a condizione che in essi sia $R = 0$,* così concludiamo che *si avrà almeno un valore finito di z, per il quale è $R = 0$ cioè $f(z) = 0$.*

Il principio sul quale posa questa dimostrazione fu utilizzato dall'ARGAND, appunto a questo scopo, nel suo *Essai* del 1806. La forma nella quale abbiamo qui esposto la cosa ed i particolari sono del CAUCHY (1).

§ 20. **Dimostrazione di Mourey e Holst.** — Diamo per ultima una dimostrazione, che non occorre di trovare nei trattati di Algebra, e che, senza essere meno semplice delle precedenti, è, per qualche particolare, singolarmente elegante. Essa si trova in uno scritto di C. V. MOUREY, che fu uno degli illustratori della teoria geometrica delle quantità complesse (2); nella forma nella quale ora la daremo fu pubblicata da E. HOLST (3).

Supponiamo che ogni polinomio di grado $n-1$ rispetto alla variabile complessa z sia decomponibile in $n-1$ fattori

(1) V. Journal de l'École polytechnique, Cah. XVIII, T. XI, 1820, p. 411 (Oeuvres, 2, I, 1905, 258). V. anche *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, IV, Parigi 1847 (*Mémoire sur les quantités géométriques* p. 157-180, § 4).

(2) MOUREY, *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* Parigi, 1828; 2ª ed., 1861.

(3) Acta mathematica, 8, 1886; p. 155-160.

di 1° grado. Dimostreremo che l'equazione di grado n ammette almeno una radice.

Riprendiamo l'equazione

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_{n-1} z + a_n = 0, \tag{1}$$

cioè l'equazione

$$z(z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = -a_n, \qquad (a_n \neq 0);$$

e siano

$$z - \alpha_1, \quad z - \alpha_2, \dots, \quad z - \alpha_{n-1}$$

i fattori di 1° grado del polinomio

$$f'(z) = z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Alcuni di questi fattori possono essere fra loro eguali e qualcuna delle α_k può essere nulla. In generale quindi potremo trascrivere la (1) in questa forma

$$z^m (z - \alpha_1)^{m_1} \cdot (z - \alpha_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z - \alpha_p)^{m_p} = a_n, \tag{2}$$

dinotando $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ numeri tutti diversi ed essendo

$$m + m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Poniamo

$$z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$
$$z - \alpha_k = r_k(\cos\varphi_k + i \operatorname{sen}\varphi_k) \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$
$$-a_n = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta);$$

e così scinderemo la (2) in una *equazione dei moduli*

$$r^m \cdot r_1^{m_1} \cdot r_2^{m_2} \cdot \dots \cdot r_p^{m_p} = \rho \tag{3}$$

e in un'*equazione degli argomenti*

$$m\varphi + m_1\varphi_1 + \dots + m_p\varphi_p \equiv \theta \pmod{2\pi}. \tag{4}$$

Consideriamo che cosa rappresentino le quantità:

$$\Pi(r) = r^m \cdot r_1^{m_1} \cdot r_2^{m_2} \cdot \dots \cdot r_p^{m_p},$$
$$\Sigma(\varphi) = m\varphi + m_1\varphi_1 + \dots + m_p\varphi_p.$$

Supponiamo per questo che, nel piano complesso, dove O è l'origine delle coordinate, siano $A_1, A_2, \dots, A_p$ gli indici

di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ rispettivamente: sia P un punto variabile nel piano, indice della variabile z. I vettori $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{A_1P}$, $\overrightarrow{A_2P}, \ldots,$ $\overrightarrow{A_pP}$ hanno le lunghezze $r, r_1, r_2, \ldots, r_p$, e formano coll'asse delle x gli angoli $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$. Dobbiamo dimostrare che ci sono nel piano dei punti P, pei quali è ad un tempo

$$\Pi(r) = \rho, \quad \Sigma(\varphi) \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

Osserviamo a tal uopo innanzi tutto che, se P si porta in O o in uno dei punti A_k, risulta $\Pi(r) = 0$.

Se poi tracciamo nel piano un cerchio C, avente centro nell'origine e raggio maggiore di $\mu + \sqrt[n]{\rho}$, dove μ dinota la più grande fra le distanze dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_p$ dall'origine, tutti questi punti $A_1, A_2, \ldots, A_p$ cadranno, in-

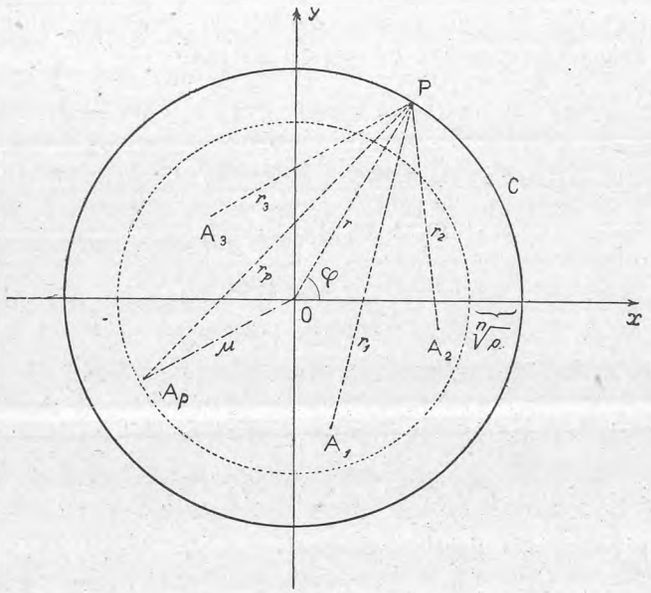


Fig. 15.

sieme con O, entro il cerchio C; e, quando P descriva tal cerchio, la sua distanza dall'origine e da uno qualunque dei punti stessi sarà sempre maggiore di $\sqrt[n]{\rho}$. Avremo sempre

$$r > \sqrt[n]{\rho}, \quad r_1 > \sqrt[n]{\rho}, \ldots, \quad r_p > \sqrt[n]{\rho},$$

e quindi

$$\Pi(r) > \left(\sqrt[n]{\rho}\right)^{m + m_1 + \ldots + m_p},$$

cioè

$$\Pi(r) > \rho.$$

Dunque, seguendo un cammino qualunque che da O o da uno dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_p$, porti a un punto del cerchio C, $\Pi(r)$ che, inizialmente è zero, finisce col superare ρ. Ma $\Pi(r)$ è funzione *continua* della posizione di P; epperò lungo il cammino dovrà aversi almeno un punto, dove $\Pi(r) = \rho$, e attorno a ciascuno dei punti $O, A_1, A_2, \ldots, A_p$ si avrà un contorno *chiuso*, lungo il quale *è soddisfatta l'equazione dei moduli.*

Si potrà avere un siffatto contorno per ciascun punto, ovvero un contorno potrà chiudere più d'un punto: supponiamo che interni ad uno stesso contorno Γ siano i punti O, A_1 $A_2, \ldots, A_h$. Dimostriamo che si hanno su Γ dei punti dove è soddisfatta l'equazione degli argomenti.

Fissiamo su Γ un punto P_0 e siano $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_p$ le misure degli angoli positivi e minori d'un giro che i vettori $\overrightarrow{OP_0}$, $\overrightarrow{A_1P_0}$, $\overrightarrow{A_2P_0}, \ldots,$ $\overrightarrow{A_pP_0}$ formano coll'asse delle x:

$$\Sigma(\bar{\varphi}) = m\bar{\varphi} + m_1\bar{\varphi}_1 + \ldots + m_p\bar{\varphi}_p$$

è uno dei valori che $\Sigma(\varphi)$ assume in P_0.

Immaginiamo che P descriva in un certo verso, per es. in verso positivo, il contorno Γ, partendo da P_0; e in ogni posizione di P, tra i valori possibili per ciascuno degli argomenti $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, prendiamo quelli che succedono per continuità ai valori iniziali $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_p$. Così partendo da P_0 col valore $\bar{\varphi}$ di φ, vi ritorneremo, descritto il contorno Γ, col valore $\bar{\varphi} + 2\pi$ dell'argomento stesso, qualunque sia la posizione che O occupa nell'interno e qualunque sia la forma di Γ. E si accrescerà similmente di 2π ciascuno degli argomenti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ corrispondenti ai punti $A_1, A_2, \ldots, A_h$ *interni* a Γ. Invece, se A_{h+k} è uno qualunque dei punti *esterni*, quando P descrive Γ, l'argomento φ_{h+k} oscillerà; ma, partendo da P_0 col valore $\bar{\varphi}_{h+k}$ di esso, torneremo in P_0 *collo stesso valore.*

Partiamo dunque da P_0 col valore $\Sigma(\bar{\varphi})$ di $\Sigma(\varphi)$ e vi torniamo col valore $\Sigma(\bar{\varphi}) + (m + m_1 + m_2 + \ldots + m_h)\cdot 2\pi$. Ma il passaggio da un valore all'altro si fa *con continuità.* Ci son

dunque su Γ almeno $m + m_1 + m_2 + \ldots + m_h$ punti, nei quali si ha

$$\Sigma(\varphi) \equiv \theta \pmod{2\pi},$$

nei quali cioè *è soddisfatta l'equazione degli argomenti:* a questi punti corrispondono valori di z che sono radici dell'equazione (1).

Cap. IV. - La funzione esponenziale.

§ 21. **La nozione di limite.** — Riprendiamo lo svolgimento delle proposizioni elementari dell'Aritmetica, per definire la potenza a^z, essendo a e z numeri complessi qualunque.

Occorre per questo che precisiamo per le quantità complesse le nozioni di *limite* e di *funzione.*

Abbiamo detto *eguali* due numeri complessi x ed y, quando i due numeri abbiano eguali parti reali ed eguali parti immaginarie. Dovremo quindi dire che x *differisce di poco* da y, quando parte reale e coefficiente dell'immaginario in x differiscono di poco da parte reale e coefficiente dell'immaginario in y rispettivamente.

Alla definizione data di eguaglianza dobbiamo dunque accompagnare questa definizione di *limite:*

Definizione. *Si dice che la successione indefinita di numeri complessi*

$$(1) \qquad x_1 = a_1 + ib_1, \quad x_2 = a_2 + ib_2, \ldots, \quad x_n = a_n + ib_n, \ldots$$

ha per limite il numero complesso $X = A + iB$, *se*

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} a_n = A \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} b_n = B.$$

Ne seguirà che

$$\lim_{n=\infty} (a_n - A) = \lim_{n=\infty} (b_n - B) = 0$$

e quindi

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{(a_n - A)^2 + (b_n - B)^2} = 0.$$

Inversamente, se ciò ha luogo, han pur luogo le (2):

la (3) *compendia dunque le* (2); ed equivarrà alla precedente quest'altra

Definizione. *La successione indefinita di numeri complessi*

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n, \ldots$$

ha per limite il numero complesso X, *se il modulo della differenza* $x_n - X$, *crescendo* n *indefinitamente, ha per limite lo zero.*

Conviene che per il modulo d'un numero qualunque x adottiamo lo stesso segno $|x|$, che si usa per il valore assoluto d'un numero reale; e il nome stesso di *valore assoluto* può darsi al modulo d'un numero complesso. Così le proposizioni della teoria dei limiti, note per quantità reali, continuano a sussistere, quasi senza modificazione alcuna degli enunciati, nel campo complesso.

Vale il teorema di Cauchy: *La condizione necessaria e sufficiente, perchè la successione indefinita di numeri complessi*

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n, \ldots \quad (x_n = a_n + ib_n)$$

ammetta il limite L, *è che, prefissato un numero* σ *positivo e comunque piccolo, si abbia tal valore di* n, *che riesca*

$$|x_{n'} - x_n| < \sigma$$

per ogni indice $n' > n$. Questa diseguaglianza *compendia* infatti, come abbiamo detto, le altre

$$|a_{n'} - a_n| < \sigma,$$
$$|b_{n'} - b_n| < \sigma.$$

E valgono i teoremi intorno ai limiti di somme e prodotti. Non importa che stiamo a ripeterne qui le dimostrazioni, le quali si traggono da quelle note, applicando queste due proposizioni:

I. *Il modulo della somma di due o più numeri complessi* ***non è maggiore*** *della somma dei moduli degli addendi.*

II. *Il modulo d'un prodotto di numeri complessi è eguale al prodotto dei moduli dei fattori.*

Può occorrere di considerare una successione indefinita di numeri complessi

$$x_1 = a_1 + ib_1, \quad x_2 = a_2 + ib_2, \ldots, \quad x_n = a_n + ib_n, \ldots$$

tale che sia

$$\lim_{n=\infty} |x_n| = \infty. \tag{4}$$

Si dice in tal caso che *la successione ha per limite l'infinito.*

Colla (4) avranno luogo o l'una o l'altra o entrambe le relazioni

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty, \quad \lim_{n=\infty} |b_n| = \infty.$$

Ma non si ha mai ragione di distinguere un caso dall'altro; e perciò *si conviene* di dire che *nel campo complesso si ha un sol valore infinito.*

Non importerà che enunciamo il teorema di CAUCHY per il caso di limite infinito.

§ 22. **La nozione di funzione.** — Ricerchiamo ora quale definizione ci convenga dare di *funzione di una variabile complessa.* E, per questo, proviamoci innanzi tutto ad adottare per variabili complesse le stesse definizioni di *funzione*, di *continuità* etc., che si dànno per variabili reali.

Consideriamo un insieme di valori della variabile $z = x + iy$, aventi come indici nel piano complesso xy i punti d'un certo campo superficiale C; e cominciamo col dire, col DIRICHLET, che *la variabile complessa* $w = u + iv$ *è funzione di* z *nel campo* C, *quando a ciascuno dei valori di* z *considerati corrisponde un valore determinato di* w. Così ad ogni sistema di valori di x ed y, appartenente al campo C, corrisponderanno valori determinati di u e v: u e v saranno *funzioni reali delle variabili reali* x *e* y.

Limitiamo subito le nostre considerazioni a funzioni *generalmente finite*, assumenti cioè valori finiti in ogni punto dei rispettivi campi, eccettuati eventualmente alcuni punti o linee.

Senza che ci indugiamo a spiegare che cosa debba intendersi per *intorno d'un valore* $z_0 = x_0 + iy_0$ della variabile z o di un *punto* z_0 del campo C, diciamo *continua* la funzione $w = w(z)$ nel punto z_0, dove è finita, quando, prefissato un numero σ positivo e piccolo ad arbitrio, si ha un intorno di z_0, al quale z_0 sia interno, tale che in ogni punto di esso sia

$$|w(z) - w(z_0)| < \sigma.$$

Questa relazione compendia le altre due

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \sigma,$$
$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \sigma:$$

le due funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ son dunque *funzioni superficialmente continue nel punto* (x_0, y_0).

Consideriamo poi, insieme col valore z_0 di z, il valore $z_0 + \Delta z = x_0 + \Delta x + i(y_0 + \Delta y)$, e supponiamo che a questo corrisponda il valore $w(z_0) + \Delta w = u(x_0, y_0) + \Delta u + i(v(x_0, y_0) + \Delta v)$ di $w(z)$; formiamo il quoziente $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ e chiamiamo *derivata* di $w(z)$ nel punto z_0 il limite, se esiste, di questo quoziente quando Δz tenda a zero, cioè tendano insieme a zero Δx e Δy.

Ma questo tendere di Δz a zero può aver luogo in vario modo. Poniamo

$$y = y(x)$$

o, più simmetricamente, facciamo di x e y due certe funzioni

$$x = x(s), \quad y = y(s) \tag{1}$$

d'una nuova variabile s, funzioni che dobbiamo supporre assumano, variando s in un certo intervallo, valori tutti appartenenti al campo C e precisamente i valori x_0, y_0 e $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$ per certi valori s_0 ed $s_0 + \Delta s$ di s. Le (1) definiscono nel piano xy un luogo di punti, una curva γ, lungo la quale w viene ad essere una *funzione complessa* (coppia di funzioni reali u e v) *della variabile reale* s, funzione composta mediante x e y; e la z sarà anche essa una tal funzione complessa (la coppia delle funzioni x e y) della stessa variabile reale. Abbiamo da considerare il rapporto $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ degli accrescimenti di due siffatte funzioni.

Si può subito dire a quali condizioni ammetta limite determinato il rapporto incrementale d'una funzione complessa di variabile reale. Difatti se, in generale, per la funzione complessa $\Phi(s) = \varphi(s) + i\varphi'(s)$ della variabile reale s si ha

$$\Phi(s_0 + \Delta s) = \Phi(s_0) + \Delta\Phi$$
$$= \varphi(s_0) + \Delta\varphi + i(\varphi'(s_0) + \Delta\varphi'),$$

il quoziente

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}+i\frac{\Delta\varphi'}{\Delta s}$$

ammetterà limite determinato per $\Delta s=0$, quando ammettano limite determinato $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ e $\frac{\Delta\varphi'}{\Delta s}$, cioè quando le due funzioni reali φ e φ' ammettano per $s=s_0$ derivate $\frac{d\varphi}{ds}$ e $\frac{d\varphi'}{ds}$: sarà

$$\lim_{\Delta s=0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}+i\frac{d\varphi'}{ds}.$$

Nel caso presente abbiamo due funzioni Φ da considerare e cioè w e z. E si ha

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{\Delta w}{\Delta s}}{\frac{\Delta z}{\Delta s}}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta s}+i\frac{\Delta v}{\Delta s}}{\frac{\Delta x}{\Delta s}+i\frac{\Delta y}{\Delta s}}.$$

E perciò, se le funzioni *date* $u(x,y)$ e $v(x,y)$ ammettono nel punto (x_0,y_0) e in un intorno, comunque piccolo, di esso derivate parziali prime finite e continue, e se le funzioni $x(s)$ e $y(s)$, *introdotte* per determinare il modo di tendere di Δz a zero, hanno in s_0 derivate finite e determinate, saranno $u(x,y)$ e $v(x,y)$ derivabili rispetto ad s, nel punto s_0, secondo la regola per la derivazione delle funzioni composte. E se, di più, $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ non si annulleranno insieme per $s=s_0$, con che la curva γ ammetterà certo una tangente determinata nel punto s_0, avremo

$$\lim_{\Delta z=0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{du}{ds}+i\frac{dv}{ds}}{\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}}\ (1).$$

Ma $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$ sono, per quello che abbiam

(1) In tutto il seguito, come in questa formola, $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ dinoteranno derivate parziali *nel punto* (x_0,y_0) e $\frac{d}{ds}$ la derivata *nel punto* s_0.

detto or ora, i limiti per Δx e Δy tendenti a zero dei rapporti $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta w}{\Delta y}$, limiti che dobbiam dire *derivate parziali* di w (funzione complessa) rispetto a x e y (variabili reali) nel punto (x_0,y_0) e dinotare con $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Dunque si ha:

$$(1)\qquad \frac{dw}{dz}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}}.$$

Questa $\frac{dw}{dz}$ è formata, oltre che colle derivate parziali delle funzioni date $u(x,y)$ e $v(x,y)$, colle derivate $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ delle funzioni $x(s)$, $y(s)$ da noi introdotte, derivate che sono proporzionali ai coseni di direzione della tangente alla curva γ in s_0.

Dunque, *colle ipotesi fatte per* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$, *la funzione* $w(z)$ *ammette nel punto* z_0 *una derivata per ogni direzione uscente da* z_0 *stesso.* Con questo dire *per ogni direzione* noi compendiamo le diverse restrizioni fatte intorno al modo di tendere di Δz a zero.

Derivate corrispondenti a direzioni diverse saranno in generale diverse. In particolare nelle direzioni degli assi si hanno le derivate

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ora è importante notare che *se queste due derivate sono eguali,* se

$$(2)\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}$$

(cioè se si ha ad un tempo

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$

allora la (1) ci dà

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}}=\frac{\partial w}{\partial x}:$$

ogni derivata di w in z_0 è eguale a $\frac{\partial w}{\partial x}$, cioè la $\frac{dw}{dz}$ nel punto z_0 è indipendente dalla direzione secondo la quale è calcolata.

Da tutto questo appare che si possono adottare per variabili complesse le stesse definizioni di *funzione*, di *derivata*, che si dànno per variabili reali: ma, così facendo, si costruisce una teoria che non differisce sostanzialmente da quella di funzioni reali di *due* variabili reali.

La funzione w di *una* variabile complessa z ammette *una* derivata per quei valori di z, pei quali, insieme colle altre ipotesi dette prima, si verificano la (2), ovvero la (3). Ora l'Analisi limita appunto le sue considerazioni a quelle funzioni che hanno questa proprietà in tutto un campo: esse si dicono *monogene*, la (2) dicendosi *condizione di monogeneità*. Come punto di partenza per lo studio di funzioni complesse si prende dunque questa definizione fondamentale.

DEFINIZIONE. *Una variabile complessa w si dice funzione d'un'altra variabile complessa $z = x + iy$ in un campo C, quando ad ogni valore di z in questo campo corrisponda un valore determinato e generalmente finito di w, e quando w, considerata come funzione delle variabili reali x ed y, sia continua e possegga le derivate parziali prime $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ pure generalmente finite e continue e soddisfacenti alla relazione*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}\ (1).$$

Terminiamo col dire che le considerazioni svolte intorno alla monogeneità sono dovute al CAUCHY (2) e coll'osservare che sono in particolare monogene, ed è ben facile riconoscerlo, le funzioni elementari

$$w = a + z, \quad w = az,$$

dove a sia una costante complessa qualunque.

(1) V. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* (Pisa, Spoerri, 1901), § 2.

(2) V. *Exercices d'analyse et de physique mathém.*, T. IV (*Sur les différentielles des quantités algébriques ou géométriques* etc).

§ 23. **Rappresentazioni conformi.** — Analizziamo e interpretiamo geometricamente i risultati del paragrafo precedente: così stabiliremo in quali proposizioni se ne trovino gli elementi e ne trarremo importanti conseguenze.

Consideriamo, insieme col piano complesso $xy(\pi)$, luogo degli indici dei valori di z, un secondo piano complesso $uv(\pi')$ e prendiamo i suoi punti come indici dei valori della funzione w. Ad ogni punto del campo C corrisponde un valore di w e quindi un certo punto, indice di questo valore, d'un certo campo C' nel piano π'.

Quando poniamo

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

cioè facciamo descrivere all'indice di z una certa curva γ, la parte reale $u(x, y)$ e il coefficiente dell'immaginario $v(x, y)$ di w diventano certe funzioni della stessa s, le quali definiscono in π' una curva γ', luogo dei punti di C' corrispondenti a quelli di γ.

Supponiamo che ai punti P e P_1 di γ, corrispondenti ai valori z_0 e $z_0 + \Delta z$ di z o s_0 ed $s_0 + \Delta s$ di s, corrispondano su γ' i punti P' e P_1', indici dei valori w_0 e $w_0 + \Delta w$ di w.

I numeri complessi Δz e Δw rappresenteranno i vettori $\overrightarrow{PP_1}$ di π e $\overrightarrow{P'P'_1}$ di π', vettori aventi lunghezze ρ e ρ' ed argomenti θ e θ'. Il quoziente $\frac{\Delta w}{|\Delta z|}$ rappresenterà il vettore $\overrightarrow{P'Q}$

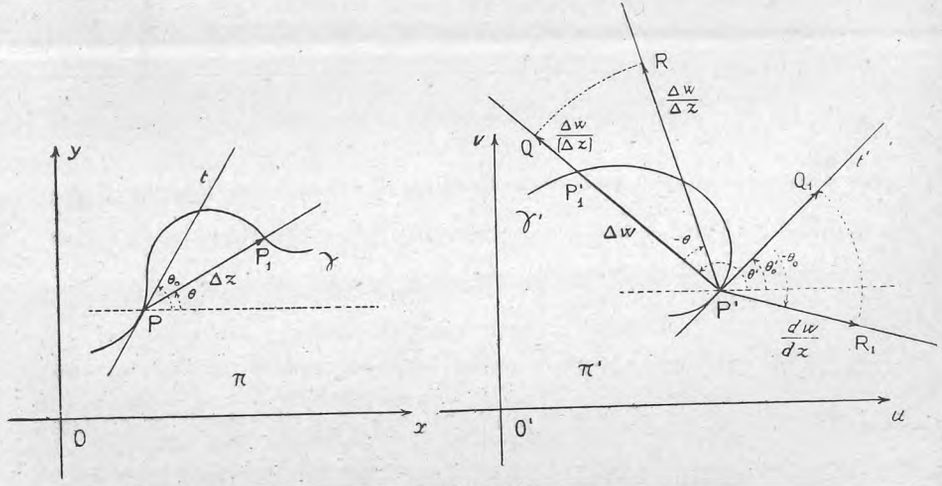


Fig. 16.

di π' che ha la lunghezza $\frac{\rho'}{\rho}$ e forma con $O'u$ l'angolo θ'; e infine il quoziente $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ rappresenterà il vettore $\overrightarrow{P'R}$, che si ottiene ruotando $\overrightarrow{P'Q}$ d'un angolo $-\theta$ attorno alla sua origine.

Già abbiam detto che, colle ipotesi fatte intorno al modo di tendere di Δz a zero, la curva γ ammette in P una tangente Pt determinata, i coseni direttori della quale sono $k\frac{dx}{ds}$ e $k\frac{dy}{ds}$, essendo k un certo coefficiente: prendiamo $\frac{s}{k}$ come nuova variabile s e saranno precisamente $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ questi coseni di direzione. Colle altre ipotesi che le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ammettano in P derivate parziali finite e continue e quindi derivate determinate e finite rispetto ad s, siccome queste derivate rispetto ad s non saranno insieme nulle se non si annulli in P il jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, ciò che ora escludiamo, veniamo a dire che la curva γ' ammette in P' una tangente determinata $P't'$. E siccome poi, con tutte queste ipotesi intorno a u e v e ad x e y, il quoziente $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ viene ad avere, tendendo Δz a zero, un limite determinato e finito, così vediamo che, quando P_1 tende lungo γ a P, non solo la retta $P'Q$ tende alla sua posizione limite $P't'$, ma il punto Q stesso ha su $P't'$ una posizione limite determinata Q_1; e quindi anche la retta $P'R$ e il punto R avranno posizioni limiti determinate $P'R_1$ ed R_1.

La $\frac{dw}{dz}$ *calcolata in* P *secondo la direzione* Pt *rappresenta il vettore* $\overrightarrow{P'R_1}$; e perciò il modulo di tal $\frac{dw}{dz}$ è il quoziente $\frac{ds'}{ds}$, con $ds' = \sqrt{du^2 + dv^2}$ e l'argomento è la differenza $\theta_0' - \theta_0$ fra gli angoli che le tangenti $P't'$ e Pt formano cogli assi $O'u$ ed Ox rispettivamente.

Ora ci domandiamo: come mai basta l'eguaglianza dei valori di $\frac{dw}{dz}$ in P, corrispondenti alle *due* direzioni Ox ed Oy, perchè risultino eguali *tutti* i valori di $\frac{dw}{dz}$ in P?

Per veder questo, consideriamo come si corrispondano i punti di π prossimi a P e quelli di π' prossimi a P'.

Consideriamo in π i punti del cerchio c, che ha centro in P e raggio infinitesimo ds. Assunti, coll'origine in P, assi paralleli ad Ox e Oy, le coordinate del punto M di c, dove termina il raggio di questo cerchio che ha i coseni direttori α e β, sono $dx = \alpha ds$ e $dy = \beta ds$.

Il punto M', che nel piano π' corrisponde ad M, avrà, rispetto ad assi paralleli ad $O'u$ e $O'v$ ed aventi origine in P', certe coordinate du e dv, le quali, per la derivabilità delle funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ nella direzione (α, β), sono date dalle formole

$$(1)\qquad \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy: \end{cases}$$

du e dv sono funzioni lineari ed omogenee di dx e dy; ed è naturale che ciò sia.

Tutto quello infatti che abbiam detto intorno alla derivabilità di $u(x, y)$ e $v(x, y)$ porta che, ad esempio, la superficie

$$\zeta = u(x, y)$$

possiede nel punto $K \equiv (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ un piano tangente determinato e non parallelo all'asse $O\zeta$. I due intorni infinitesimi di K nella superficie e nel piano tangente si confondono (a meno di infinitesimi d'ordine superiore).

Ora la parallela ad $O\zeta$ condotta per M taglia il piano tangente in un punto N e du è la quota di tal punto N sul piano condotto per K parallelamente al piano xy. In altre parole dx, dy e du sono, rispetto ad assi aventi l'ori-

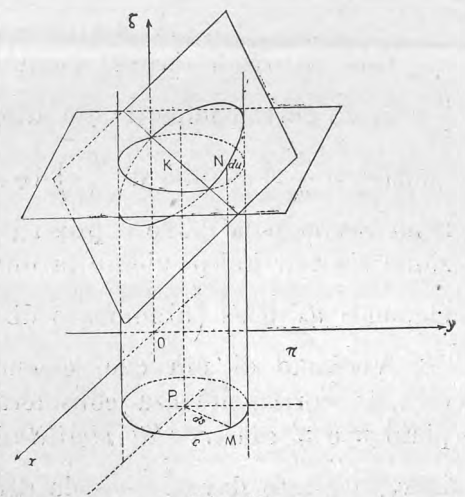


Fig. 17.

gine in K e paralleli a Ox, Oy ed $O\zeta$, le coordinate di N. Quando M descrive il cerchio c, N si mantiene sul piano tangente e perciò fra du e dx, dy intercede una relazione lineare. Appare anche chiaramente da queste considerazioni come varii du (o dv) quando M ruota su c.

Pertanto le (1), se il determinante funzionale $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ non è nullo, ciò che già abbiamo escluso, stabiliscono una *proiettività* fra l'intorno di P e quello di P', per la quale il cerchio c è trasformato in una ellisse c' di centro P'. Prendiamo in c i raggi PM_1 e PM_2, aventi le direzioni Ox e Oy, e siano $P'M_1' = ds_1'$ e $P'M_2' = ds_2'$ i semidiametri corrispondenti in c'. Se questi formano con $O'u$ gli angoli θ_1 e θ_2, saranno $\frac{ds_1'}{ds}$ e $\frac{ds_2'}{ds}$ i moduli e θ_1 e $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$ gli argomenti dei valori della $\frac{dw}{dz}$ in P, corrispondenti alle direzioni Ox ed Oy.

Se tali due valori sono eguali, cioè se $ds_1' = ds_2'$ e $\varphi_1 \equiv \varphi_2 - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, ovvero se $P'M_1' = P'M_2'$ ed $M_1'\widehat{P'}M_2'$ è retto, allora si hanno in c' due diametri fra loro perpendicolari ed eguali. In tal caso c' è un cerchio e la projettività stabilita dalle (1) è una *similitudine:* le (1) sono appunto le formole della similitudine, quando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Così ritroviamo come basti l'eguaglianza dei valori di $\frac{dw}{dz}$ in P, corrispondenti alle direzioni Ox ed Oy, perchè il quoziente $\frac{ds'}{ds}$ $\left(\text{modulo di } \frac{dw}{dz}\right)$ risulti indipendente dalla direzione secondo la quale è preso l'elemento ds e da tal direzione sia pur indipendente la differenza delle anomalie degli elementi ds' e ds $\left(\text{argomento di } \frac{dw}{dz}\right)$.

Vediamo di più che, essendo $w(z)$ funzione monogena di z, la corrispondenza considerata fra i campi C e C' dei piani π e π' *conserva la similitudine delle parti infinitesime*, in ogni punto dove $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ sia diversa da zero, cioè in ogni

punto dove sia diversa da zero la $\frac{dw}{dz}$: si vede subito infatti che la condizione di monogeneità, non può coesistere con l'altra $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$, se non sia $\frac{dw}{dz} = 0$ (1).

Nella rappresentazione di C su C' *si ha conservazione degli angoli in grandezza e verso;* e perciò tale rappresentazione si dice *direttamente conforme.* Ed è chiaro che, se è data una rappresentazione direttamente conforme d'un'area C su di un'altra C', la variabile complessa nel campo C' è funzione, monogena, della variabile complessa in C.

Se poi, in tutto quello che precede, cambieremo y in $-y$ (ovvero v in $-v$), troveremo che, se la variabile complessa in un campo C' è funzione, monogena, della coniugata della variabile complessa in un campo C, allora la corrispondenza fra i punti di C e quelli di C' conserva la grandezza degli angoli, ma ne inverte il senso: è una rappresentazione *inversamente conforme.* Ed ogni rappresentazione inversamente conforme si ottiene nel modo detto.

È stato GAUSS il primo a dimostrare tutto questo in una sua memoria coronata del 1825 (2).

Le funzioni elementari

$$w = a + z, \qquad w = az \ (a \neq 0)$$

definiscono rappresentazioni conformi di tutto il piano π sul piano π': sono la congruenza e la similitudine.

Ora vogliamo costruire una terza funzione elementare

$$w = a^z:$$

e vi perverremo, mediante le considerazioni svolte, prendendo le mosse dalla definizione di potenza nel campo reale.

(1) Già abbiamo escluso dalle nostre considerazioni, per quello che abbiam detto delle $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ etc., quei punti, se vi sono, dove $\frac{dw}{dz}$ è infinita.

(2) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebener Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so aufzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.* (Astr. Abhand., III, 1825; Werke, Bd. IV, p. 189-216).

§ 24. **Potenze ad esponente reale di basi positive.** — Nel *Triparty en la science des nombres* (1484), trattato (*in tre parti*) di aritmetica e di algebra dovuto a NICOLA CHUQUET da Parigi e poi nell'*Arithmetica integra* (1544) di MICHELE STIFEL (1486 [o 7]-1567) da Esslingen si trovano già tabelle del genere di questa:

(1)

....	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	....
....	$-3b$	$-2b$	$-b$	0	b	$2b$	$3b$	$4b$	$5b$	....

Nella prima linea si ha la progressione geometrica costituita dalle *potenze* (*facoltà* o *dignità*, come eran dette) d'un numero a positivo e diverso da 1, e nella seconda linea si ha la progressione aritmetica dei *multipli* d'un altro numero qualunque b, diverso da zero. Si corrispondono i termini 1 e 0; e quindi, presi due numeri qualunque della prima linea e i loro corrispondenti nella seconda, al prodotto dei primi corrisponde la somma dei secondi. Così il possesso della tabella (1) può servire ad abbassare d'un grado le operazioni, che occorra di fare sopra i numeri della prima linea.

Ma in questa figurano soltanto alcuni numeri positivi: epperò la tabella non serve nella generalità dei casi. Servirà in un maggior numero di casi, se inseriremo fra due termini consecutivi della prima linea un certo numero di medii geometrici, per es. $q-1$ medii geometrici, e fra i due termini corrispondenti della seconda linea altrettanti medii aritmetici. Così avremo nella prima linea le potenze, non di a, ma di $\sqrt[q]{a}$, e nella seconda i multipli, non di b, ma di $\frac{b}{q}$, corrispondendosi i termini $\sqrt[q]{a^p}$ e $\frac{p}{q}b$; e quanto più grande sarà questo numero q, tanto meglio la tabella corrisponderà ai bisogni del calcolo

Per esaminare più da vicino la dipendenza dei termini d'una linea da quelli dell'altra, supponiamo che sia $b=1$: abbiasi dunque da principio la tabella

(2)

....	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5 ....
....	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ....

dove i termini della seconda linea sono gli *esponenti* delle potenze di a, che figurano nella prima. Fatta l'inserzione di medii che abbiam detto, a $\sqrt[q]{a^p}$ viene a corrispondere $\frac{p}{q}$; e, per uniformità di linguaggio, converrà che diciamo che $\sqrt[q]{a^p}$ è la *potenza* della *base* a corrispondente all'*esponente* $\frac{p}{q}$: converrà cioè che al segno $\sqrt[q]{a^p}$ sostituiamo l'altro $a^{\frac{p}{q}}$. Così definiamo la potenza a^x per ogni valore razionale, positivo o nullo o negativo, dell'esponente x.

Le proposizioni note intorno al calcolo sui radicali ci dànno che

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pr}{qr}},$$

qualunque sia il numero intero e positivo r: dunque *ad esponenti razionali eguali corrispondono potenze eguali della base* a. Le stesse proposizioni ci dànno ancora che

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2},$$

$$(a^{x_1})^{\lambda} = a^{\lambda x_1},$$

qualunque siano i numeri razionali x_1, x_2 e λ.

Notiamo poi che, se $a>1$, e se p è un numero intero qualunque,

$$a^{p+1} > a^p:$$

le potenze di a crescono quando l'esponente cresce per valori interi.

E si hanno potenze di a maggiori del numero positivo N, comunque grande, e minori del numero positivo $\frac{1}{N}$, comunque piccolo; perchè, se è precisamente

$$a = 1+\beta \qquad (\beta>0),$$

avremo

$$a^p = (1+\beta)^p = 1 + p\beta + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\beta^2 + ...,$$

e quindi

$$a^p > p\beta,$$

qualunque sia il numero intero e positivo p; con $p > \frac{N}{\beta}$, avremo

$$a^p > N, \quad a^{-p} < \frac{1}{N}.$$

Notiamo ancora che, se $a > a_1$ si ha, con q positivo,

$$a^q > a_1^q,$$

e inversamente, se ciò ha luogo, è $a > a_1$. Dunque sarà

$$\sqrt[q]{a^{p+1}} > \sqrt[q]{a^p},$$

cioè

$$a^{\frac{p+1}{q}} > a^{\frac{p}{q}};$$

le potenze di a crescono quando l'esponente cresca per valori razionali.

Infine siccome, prefissato c, maggiore di 1 e comunque prossimo a 1, si hanno esponenti positivi r che dànno

$$c^r > a,$$

cioè

$$a^{\frac{1}{r}} < c,$$

così, con s razionale soddisfacente alla diseguaglianza

$$0 < s < \frac{1}{r},$$

avremo

$$1 < a^s < a^{\frac{1}{r}}$$

e, qualunque sia il numero razionale t,

$$1 < a^t : a^{t-s} < c.$$

Dunque *ad esponenti che* (come $t - s$ e t) *differiscano d'abbastanza poco un dall'altro, corrispondono potenze di a, il rapporto delle quali è prossimo ad 1 quanto si vuole,* le quali cioè differiscono una dall'altra di tanto poco quanto si vuole.

Da tutte queste considerazioni si trae la definizione della potenza di a corrispondente ad un esponente reale qualunque x. Se questo è limite superiore (o inferiore) d'una classe di numeri razionali $x_1, x_2, x_3, \ldots$, si dirà potenza di a corrispondente all'esponente x, e si dinoterà ancora con a^x, il limite superiore (o inferiore) della classe di numeri $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots$

Così avremo definito per ogni valore reale dell'esponente x la funzione

$$y(x) = a^x.$$

Sarà *funzione finita è continua, sempre positiva e crescente con* x, avendosi precisamente

$$\lim_{x=-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x=+\infty} a^x = +\infty;$$

e, *appunto a causa della continuità di* $y(x)$ [1], varranno, qualunque siano gli esponenti reali x_1, x_2 e λ, le proprietà

$$(3) \qquad \begin{cases} a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \\ (a^{x_1})^\lambda = a^{\lambda x_1}, \end{cases}$$

che già abbiam visto aver luogo per esponenti razionali qualunque.

Con $a = 1$, le potenze di esponente intero di a son tutte eguali ad 1; e le considerazioni ora svolte ci conducono a porre per definizione

$$a^x = 1,$$

qualunque sia il numero reale x. È evidente che varranno anche in tal caso le (3).

Se poi è $a < 1$ (e sempre positivo), allora continuano a valere tutte le considerazioni svolte per il caso contrario, solo che si invertano i segni delle diseguaglianze. Avremo la funzione

$$y(x) = a^x$$

finita continua e sempre positiva e *decrescente* con x, essendo

$$\lim_{x=-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty} a^x = 0,$$

e valendo ancora le (3).

La funzione

$$y(x) = a^x,$$

(1) Cfr. p. es. a questo riguardo WEBER u. WELLSTEIN, *Enzyklopädie d. elem. Mathematik*, Bd. I (Lipsia, Teubner 1903), §§ 24 e 34.

con a positivo qualunque, definisce, nel piano dove le x sono le ascisse e le y le ordinate, una curva c_a, tutta posta nel semipiano delle ordinate positive e traversante l'asse delle ordinate nel punto P d'ordinata 1. Se $a=1$, c_a è la retta condotta per P parallelamente all'asse delle ascisse; altrimenti c_a ha per asintoto questo asse, e sale indefinitamente dalla parte delle ascisse positive o da quella delle ascisse negative, secondo che sia $a>1$ ovvero <1.

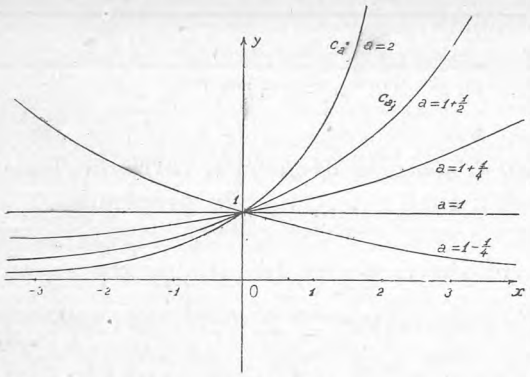


Fig. 18.

Variando con continuità la base a, la curva c_a si deforma in modo continuo, perchè la potenza a^x è funzione continua anche della base a. Diremo tra breve di quale specie sia questa deformazione.

§ 25. **Logaritmi reali di numeri positivi.** — Ogni volta che sia $a \neq 1$, la funzione $y(x)=a^x$ è sempre crescente o sempre decrescente con x; si ha quindi, con $a \neq 1$, una *funzione inversa*

$$x = x(y)$$

per ogni valore positivo di y. È noto che tal funzione inversa si chiama *logaritmo di* y *corrispondente alla base* a, scrivendosi

$$x = \log_a y.$$

Poniamo X e Y in luogo di y ed x rispettivamente. La funzione

$$Y = \log_a X,$$

definita per X positivo, sarà sempre crescente o sempre decrescente con X, secondochè sia $a>1$ o $a<1$ e avrà le proprietà

$$(1) \qquad \begin{cases} \log_a (X_1 \cdot X_2) = \log_a X_1 + \log_a X_2, \\ \log_a (X_1^{\lambda}) = \lambda \log_a X_1, \end{cases}$$

le quali non son altro che le proprietà (3) (§ prec.te) della funzione $y(x)$. Si ha poi, con $a>1$,

$$\log_a X \gtreqless 0, \text{ secondochè } X \gtreqless 1;$$

$$\lim_{X=0} \log_a X = -\infty, \quad \lim_{X=+\infty} \log_a X = +\infty;$$

e, con $a<1$,

$$\log_a X \lesseqgtr 0, \text{ secondochè } X \lesseqgtr 1;$$

$$\lim_{X=0} \log_a X = +\infty, \quad \lim_{X=+\infty} \log_a X = -\infty.$$

La funzione $Y=\log_a X$ definisce nel piano XY, e precisamente nel semipiano delle X positive, una curva C_a, la quale, secondo che sia $a>1$ o $a<1$, ha l'andamento indicato dalla fig. 19, che non è altro che la fig. 18, ribaltata attorno alla bisettrice dell'angolo compreso dalle direzioni positive degli assi.

Consideriamo le due curve C_a e C_{a_1}, corrispondenti alle funzioni

$$Y = \log_a X, \quad Y_1 = \log_{a_1} X.$$

Siccome è

$$a_1^{Y_1} = a^Y = X,$$

così segue che

$$Y_1 = Y \cdot \log_{a_1} a.$$

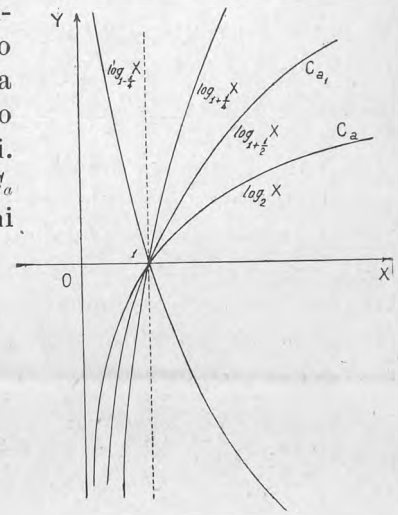


Fig. 19.

Dunque, prolungando le ordinate Y dei punti di C_a nel rapporto di $1 : \log_{a_1} a$, se $\log_{a_1} a > 0$ (cioè se a ed a_1 sono insieme maggiori o minori di 1), ovvero prolungando le ordinate Y dei punti di C_a nel rapporto di $1 : (-\log_{a_1} a)$, se $\log_{a_1} a < 0$ (cioè se le basi a ed a_1 sono una maggiore e l'altra minore di 1), e poi, in questo secondo caso, ribaltando la figura attorno all'asse delle ascisse, si passa dalla curva C_a alla curva C_{a_1}. Con tal legge le curve C_a e c_a si defor-

mano nei loro piani al variare di a: la deformazione è una *dilatazione* (accompagnata ad una simmetria rispetto agli assi X o y, quando il *coefficiente della dilatazione* $\log_{a_1} a$ è negativo); è cioè una omologia, della quale è asse l'asse delle X o delle y ed è centro il punto all'infinito di OY od Ox; costante dell'omologia è il coefficiente $\log_{a_1} a$.

Terminiamo questo paragrafo completando l'accenno alle origini della teoria dei logaritmi, col quale abbiamo cominciato il paragrafo precedente.

La parola *logaritmo* fu introdotta dal matematico scozzese JOHN NEPER (1550-1617), autore della *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614), cui seguì, postuma, la *Constructio mirifici etc.* (1619). Il NEPER fu il primo a pubblicare grandi tavole di logaritmi; prima di lui ne aveva costruite JOOST BÜRGI (1552-1632 [o 3]), svizzero, vissuto per lo più a Kassel e a Praga: egli compilò, negli anni dal 1603 al 1611, le *Progress Tabulen,* che furono stampate a Praga solo nel 1620, dopo che erano già comparse le opere del NEPER.

Non si conosce quale metodo abbia seguito il BÜRGI per la costruzione delle sue tavole; si sa che il NEPER vi pervenne formando progressioni di quoziente molto vicino ad 1, nelle quali quindi, senza successive inserzioni di medii, si trovano numeri sufficientemente prossimi ad ogni numero compreso in un intervallo assegnato (l'intervallo [0, 1] per il NEPER). La tavola

....	1	$1+\delta$	$(1+\delta)^2$	$(1+\delta)^3$	$(1+\delta)^4$	....
....	0	ε	2ε	3ε	4ε	....

è una tavola di logaritmi corrispondenti alla base $(1+\delta)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Ora nelle tavole del NEPER è

$$\delta = -\frac{1}{10\,000\,000}, \quad \varepsilon = 1,000\,000\,05:$$

si ha dunque una base minore di 1 e vicinissima a 1. In quelle del BÜRGI è

$$\delta = \frac{1}{10\,000}, \quad \varepsilon = 10:$$

la base del sistema è dunque

$$\sqrt[10]{1,000\,1} = 1,000\,009\,990\,550\ldots.$$

La base 10, cui corrisponde il sistema dei *logaritmi decimali,* fu adottata da ENRICO BRIGGS (1556-1630), autore della *Logarithmorum Chilias prima* (1617) e dell'*Arithmetica logarithmica* (1624).

§ 26. **Le derivate delle funzioni a^x e $\log_a X$. - Il numero e.** — Per avere una conoscenza un po' più completa delle funzioni

$$y(x) = a^x, \quad Y(X) = \log_a X,$$

occorre che impariamo a derivarle.

Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{a^{x+\varepsilon} - a^x}{\varepsilon} = a^x \cdot \dfrac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\log_a (X+\delta) - \log_a X}{\delta} = \dfrac{1}{X} \cdot \dfrac{\log_a \left(1 + \dfrac{\delta}{X}\right)}{\dfrac{\delta}{X}}: \end{cases}$$

dobbiamo dunque ricercare se esistano e quali siano i limiti:

$$\lim_{\varepsilon = \pm 0} \frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad \lim_{\delta = \pm 0} \frac{\log_a (1+\delta)}{\delta} \ (^1).$$

La determinazione di uno si avrà subito da quella dell'altro, essendo le due funzioni inverse una dell'altra. E precisamente, posto

$$a^\varepsilon = 1 + \delta,$$

cioè

$$\varepsilon = \log_a (1+\delta),$$

si ha

$$\lim_{\varepsilon = \pm 0} \frac{a^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim_{\delta = \pm 0} \frac{\delta}{\log_a (1+\delta)}.$$

(1) Abbiamo potuto moltiplicare e dividere per X ed ora poniamo δ in luogo di $\frac{\delta}{X}$, perchè di X non è da considerare il valore zero.

Per trovare poi il

$$\lim_{\delta=\pm 0}\frac{\log_a(1+\delta)}{\delta},$$

ovvero, posto $\delta=\frac{1}{n}$, il

$$\lim_{n=\pm\infty} n\cdot\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ovvero infine il

$$\lim_{n=\pm\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

osserviamo che, se la successione di numeri positivi

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ldots,\ k_p,\ k_{p+1},\ldots$$

ha un limite positivo K, sarà

$$\lim\log_a k_p=\log_a\lim k_p=\log_a K;$$

e, inversamente, se la successione

$$\log_a k_1,\ \log_a k_2,\ldots,\ \log_a k_p,\ \log_a k_{p+1},\ldots$$

ha per limite $\log_a K$, sarà

$$\lim k_p=K:$$

ciò accade *perchè* $\log_a X$ *è funzione continua di* X.

Dunque è

$$\lim_{n=\pm\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log_a\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:$$

ed abbiamo da ricercare

$$\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Cominciamo col considerare la potenza

$$E(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

per valori *interi e positivi* di n.

Quando n *cresca indefinitamente,* $E(n)$ *tende ad un limite* e, compreso fra 2 e 3. I punti fondamentali della dimostrazione di questo fatto sono i seguenti:

1) $E(1)=2$.

2) $E(n)$ *cresce al crescere di* n [1]. Difatti

$$E(n)=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots.$$

$$\ldots.+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!};$$

$$E(n+1)=1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!}+\ldots.$$

$$\ldots.+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots.\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!}$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots.\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}.$$

Nel secondo sviluppo abbiamo un termine di più e ogni termine, prescindendo dai primi due, è maggiore del corrispondente nel primo sviluppo.

3) $E(n)$ *è sempre minore di* 3. Difatti

$$E(n)<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n!},$$

ma

$$2!=2,\quad 3!=2\cdot 3>2^2,\quad 4!=2\cdot 3\cdot 4>2^3,\ \text{etc};$$

quindi

$$E(n)<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots.+\frac{1}{2^{n-1}},$$

e infine

$$E(n)<3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

[1] Si ponga mente al modo come ciò avviene. Se n_0 fosse un numero positivo qualunque, $\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^n$ *crescerebbe tendendo a* $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n_0}$ *decrescerebbe tendendo a* 1, quando n crescesse: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *cresce al crescere di* n, ma non illimitatamente.

Si ha

$$\lim_{n=\infty} E(n) = e$$

non soltanto quando n cresca per valori interi e positivi, ma anche quando n cresca per valori positivi razionali, quindi per valori positivi reali qualunque, e infine quando n sia negativo ed il suo valore assoluto cresca indefinitamente.

Per dimostrare tutto questo senza ricorrere a quegli artifici, che ingombrano taluni trattati di Algebra, notiamo che, per porre a confronto le due potenze

$$\left(1+\frac{1}{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{q}} \qquad \left(1+\frac{1}{\frac{p+1}{q}}\right)^{\frac{p+1}{q}},$$

cioè

$$\left[\left(1+\frac{q}{p}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad \left[\left(1+\frac{q}{p+1}\right)^{p+1}\right]^{\frac{1}{q}},$$

conviene studiare come varii con p la potenza

$$F(q,p) = \left(1+\frac{q}{p}\right)^{p},$$

dove q sia un numero positivo qualunque. Avremo, come precedentemente per $F(1,p) = E(p)$:

1) $F(q,1) = 1+q$;

2) $F(q,p)$ cresce al crescere di p per valori interi e positivi.

Dunque

$$\left(1+\frac{q}{p}\right)^{p} < \left(1+\frac{q}{p+1}\right)^{p+1},$$

epperò

$$\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} < \left(1+\frac{q}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{q}};$$

cioè $E(n)$ cresce quando n cresce per valori razionali positivi. E, siccome $E(n)$ è funzione continua di n, $E(n)$ crescerà quando n cresca per valori reali positivi.

Tanto basta per conchiudere che il risultato

$$\lim_{n=+\infty} E(n) = e$$

vale anche quando n varii per valori reali positivi qualunque.

Se poi vogliamo considerare, insieme con $E(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, anche

$$E(-n') = \left(1-\frac{1}{n'}\right)^{-n'}$$

(n ed n' positivi, $n' > 1$), basterà che osserviamo che *le due basi*

$$1+\frac{1}{n}, \quad 1-\frac{1}{n'}$$

sono numeri inversi un dell'altro se $n' = n+1$. Con tale ipotesi

$$E(-n') = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n'}}\right)^{n'} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

È quindi chiaro che

$$\lim_{n'=\infty} E(-n') = \lim_{n=\infty} E(n) = e.$$

Ed ora torniamo alla questione che è principale oggetto di questo paragrafo.

Abbiamo

$$\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

e quindi

$$\lim_{n=\pm\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \log_a \lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \log_a e = \frac{1}{\log_e a};$$

cioè

$$\lim_{\delta=\pm 0} \frac{\log_a(1+\delta)}{\delta} = \frac{1}{\log_e a} \tag{1}$$

e quindi

$$\lim_{\varepsilon=\pm 0} \frac{a^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} = \log_e a. \tag{2}$$

Sarà poi

$$\frac{d\log_a X}{dX} = \frac{1}{X \cdot \log_e a}, \tag{3}$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \log_e a. \tag{4}$$

Le (1) e (2) esprimono che *il* $\log_a(1+\delta)$ *e la differenza* $a^\varepsilon - 1$ *sono infinitesimi con* δ *ed* ε *e dello stesso ordine di* δ *ed* ε *rispettivamente.* Ciò poteva apparire evidente dalla considerazione delle figure: ma ora abbiamo trovato i quozienti di questi infinitesimi.

Tutte le precedenti formole *assumono l'aspetto più semplice,* quando base delle potenze o del sistema di logaritmi sia il numero e. Allora

$$\lim_{\delta=\pm 0} \frac{\log_e(1+\delta)}{\delta} = \lim_{\varepsilon=\pm 0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1; \tag{1'), (2')}$$

$$\frac{d\log_e X}{dX} = \frac{1}{X}; \tag{3'}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \tag{4'}$$

Dunque, mentre già sapevamo che da ogni osservazione relativa al modo di variare delle funzioni a^x, $\log_a X$, facilmente saremmo passati all'analoga per le funzioni a_1^x $\log_{a_1} X$, (si ricordi quanto abbiamo detto intorno all'omologia che trasforma le curve c_a e C_a nelle altre c_{a_1} e C_{a_1}), ora vediamo di più che, per lo studio di potenze e logaritmi, *ci conviene riferirci alle funzioni* e^x *e* $\log_e X$. Le (1') e (2') esprimono che $\log_e(1+\delta)$ ed $e^\varepsilon - 1$ sono infinitesimi con δ ed ε e dello stesso ordine di δ ed ε risp. non solo, ma *sono infinitesimi eguali a* δ *ed* ε *risp.*. Cosicchè, tornando alle immagini geometriche, le curve C_e e c_e tagliano sotto angoli di 45° gli assi delle X e delle y: esse e le simmetriche $C_{\frac{1}{e}}$, $c_{\frac{1}{e}}$ sono, potrebbe dirsi, le *bisettrici* nei sistemi delle curve C e c: C_e e c_e nel sistema

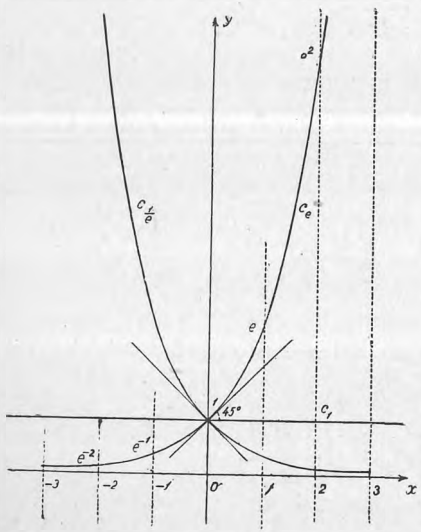


Fig. 20.

delle curve C e c corrispondenti a basi maggiori di 1, $C_{\frac{1}{e}}$ e $c_{\frac{1}{e}}$ in quello delle C e c corrispondenti a basi minori di 1.

Il numero e, del quale, dagli sviluppi in serie che daremo più innanzi, si calcola facilmente il valore approssimato

$$e = 2,718281828459045....,$$

si chiama *base dei logaritmi naturali:* si dicono cioè *naturali* i logaritmi a base e. Questi sono spesso anche chiamati *logaritmi neperiani,* ma affatto impropriamente: i logaritmi calcolati dal NEPER non erano a base e.

Nel seguito dinoteremo i logaritmi naturali col segno ℓ: scriveremo cioè ℓX in luogo di $\log_e X$.

Il coefficiente $\log_a e = \frac{1}{\ell a}$, per il quale si debbono moltiplicare i logaritmi naturali per avere i logaritmi a base a (cioè il coefficiente della dilatazione che trasforma C_e in C_a) si dice *modulo* del sistema di logaritmi corrispondente alla base a.

§ 27. **La proprietà caratteristica della funzione esponenziale.** — Nel § 24 è definita la funzione

$$y(x) = a^x$$

per ogni base a reale e positiva, e successivamente pei valori interi, razionali e reali dell'esponente x. Ma le considerazioni fatte allora non possono servire ad estendere quella definizione al caso di esponenti complessi.

Per compiere siffatta estensione noi dobbiamo domandarci *se esistano funzioni* $w(z)$ *della variabile complessa* z, *le quali godano delle proprietà che appartengono alla funzione reale di variabile reale* $y(x)$: nel caso che tali funzioni esistano, dovremo stabilire quali siano.

Le proprietà della funzione $y(x)$, finita e continua per ogni valore finito di x, sono queste

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \quad (a^{x_1})^\lambda = a^{\lambda x_1}$$

cioè

$$y(x_1) \cdot y(x_2) = y(x_1 + x_2),$$

$$[y(x_1)]^\lambda = y(\lambda x_1).$$

La seconda è conseguenza della prima e questa caratterizza pienamente la funzione $y(x) = a^x$.

Abbiasi infatti la funzione $y(x)$, finita e continua per ogni valore reale e finito della variabile x, e valga per essa l'equazione funzionale

$$y(x_1) \cdot y(x_2) = y(x_1 + x_2), \tag{1}$$

essendo x_1 ed x_2 due valori qualunque della variabile.

Siffatta funzione può essere la costante zero; ma, escluso che sia tal costante, è da osservare:

1) *La funzione* $y(x)$ *non si annulla per alcun valore di* x, perchè, se fosse $y(\alpha) = 0$, avremmo

$$y(x_1 + \alpha) = y(x_1) \cdot y(\alpha) = 0,$$

cioè

$$y(x) = 0$$

per ogni valore di x.

2) Si ha

$$y(x_1) \cdot y(0) = y(x_1),$$

e quindi

$$y(0) = 1 \ (^1).$$

3) Si ha

$$y(x_1) \cdot y(-x_1) = y(0) = 1,$$

e quindi

$$y(x_1) = \frac{1}{y(-x_1)}:$$

la funzione $y(x)$ *assume dunque valori inversi un dell'altro per valori contrari della variabile.*

4) Dalla (1) si trae

$$y(x_1) \cdot y(x_2) \cdot \ldots \cdot y(x_m) = y(x_1 + x_2 + \ldots + x_m),$$

e quindi

$$[y(x_1)]^m = y(mx_1); \tag{2}$$

e, posto $\frac{x_1}{m}$ in luogo di x_1, si ha

$$[y(x_1)]^{\frac{1}{m}} = y\left(\frac{x_1}{m}\right). \tag{3}$$

(1) La funzione *continua* $y(x)$ non si annulla per alcun valore di x e per $x = 0$ assume il valore 1: *è dunque sempre positiva.*

Le (2) e (3) dànno

$$[y(x_1)]^\lambda = y(\lambda x_1) \tag{4}$$

per ogni valore *razionale e positivo o nullo* di λ, e quindi, a causa della continuità di $y(x)$ rispetto ad x e di $(y(x_1))^\lambda$ rispetto a λ, anche per ogni valore *reale e positivo o nullo* di λ. Sarà poi

$$[y(x_1)]^{-\lambda} = \frac{1}{[y(x_1)]^\lambda} = \frac{1}{y(\lambda x_1)} = y(-\lambda x_1),$$

per quanto abbiam visto or ora.

La (4) *ha dunque luogo per ogni valore reale di* λ.

5) Poniamo nella (4) x in luogo di λ e 1 in luogo di x_1. Si ha

$$y(x) = [y(1)]^x,$$

ovvero, dinotato con a il numero *positivo* $y(1)$, si ha

$$y(x) = a^x.$$

È così dimostrato che, oltre la costante zero, *si ha soltanto la funzione esponenziale che soddisfi all'equazione funzionale* (1) (1).

Ed osserveremo che noi eravamo giunti per gradi alla definizione di potenza d'esponente reale d'una base positiva a.

Ora abbiamo stabilito che *a quella definizione è equivalente quest'altra: la potenza* a^x *della base positiva* a *è quella soluzione dell'equazione funzionale*

$$y(x_1) \cdot y(x_2) = y(x_1 + x_2),$$

che per $x = 1$ *assume il valore* a.

§ 28. **Potenze ad esponente complesso di basi reali e positive.** — Ora per definire la potenza ad esponente complesso di una base reale e positiva, proponiamoci questo problema:

(1) Cfr. p. es. CAUCHY, *Exercices d'analyse et de physique mathém.*, T. IV, 1847 (*Sur les fonctions entières d'un degré infini* etc.). Nella *Theor. Arithmetik* di STOLZ e GMEINER, già citata, la stessa cosa è dimostrata con ipotesi meno restrittive di quella della continuità di $y(x)$ (Cfr. VIII^te Abt., 8, 11).

Si domanda se si abbiano funzioni $w(z) = u(z) + iv(z)$ *della variabile complessa* $z = x + iy$, *finite e continue per ogni valore finito di questa, assumenti valori reali per valori reali della variabile, e soddisfacenti all' equazione funzionale*

$$w(z_1) \cdot w(z_2) = w(z_1 + z_2), \tag{1}$$

dove z_1 *e* z_2 *sono valori qualunque di* z.

Una funzione che risponde a tutte queste condizioni è la costante zero.

Ma supponiamo che esista un'altra funzione $\bar{w}(z)$ soddisfacente alle stesse condizioni. *Essa non si annullerà per alcun valore della variabile e si ridurrà pei valori reali* x *di questa alla funzione* a^x, essendo a un numero reale e positivo.

Per valori complessi avremo

$$\bar{w}(x + iy) = \bar{w}(x) \cdot \bar{w}(iy) = a^x \cdot \bar{w}(iy), \tag{2}$$

e sarà da determinare la natura della funzione $\bar{w}(iy)$.

1° *Caso.* Può essere $a = 1$. In questo caso, come si ha, per ogni valore finito di z,

$$\frac{\partial \bar{w}(z)}{\partial x} = 0,$$

così, a causa della monogeneità della funzione, sarà, pure per ogni valore finito di z,

$$\frac{\partial \bar{w}(z)}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}(iy)}{\partial y} = 0, \quad \frac{d\bar{w}(z)}{dz} = 0,$$

e quindi $\bar{w}(iy) = \text{cost.}^{te}$, e $\bar{w}(z) = \text{cost.}^{te} = 1$.

2° *Caso.* Sia $a \neq 1$. Abbiamo per ogni valor finito di z

$$\frac{\partial \bar{w}(z)}{\partial x} = la \cdot a^x \cdot \bar{w}(iy) \neq 0,$$

e quindi anche per ogni valore finito di z

$$\frac{\partial \bar{w}(z)}{\partial y} = a^x \frac{\partial \bar{w}(iy)}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{d\bar{w}(z)}{dz} \neq 0.$$

In tal caso dunque si ha una rappresentazione conforme $\bar{R}$ del piano complesso π, dove immaginiamo distesi

i valori della variabile $z = x + iy$, sul piano π', dove distendiamo i valori di $\bar{w}(z) = \bar{u} + i\bar{v}$.

Ai punti dell'asse delle x di π corrispondono in π' quelli del semiasse delle $\bar{u}$ positive: precisamente all'origine O di π corrisponde in π' il punto $O' \equiv (1, 0)$, ai punti dei semiassi delle x negative e delle x positive corrispondono quelli del segmento $O'I$ e quelli del prolungamento $O'\bar{u}$ o inversamente, secondochè sia $a > 1$ o < 1.

Conduciamo in π la retta r parallela all'asse delle x per il punto B, di Oy, che è indice di iy_0. Essendo

$$\bar{w}(x + iy_0) = a^x \cdot \bar{w}(iy_0),$$

ai punti di r, indici dei numeri $x + iy_0$, corrispondono per la rappresentazione $\bar{R}$ quelli d'un raggio r' che ha l'origine in I e che passa per il punto B', indice di $\bar{w}(iy_0)$: sono in-

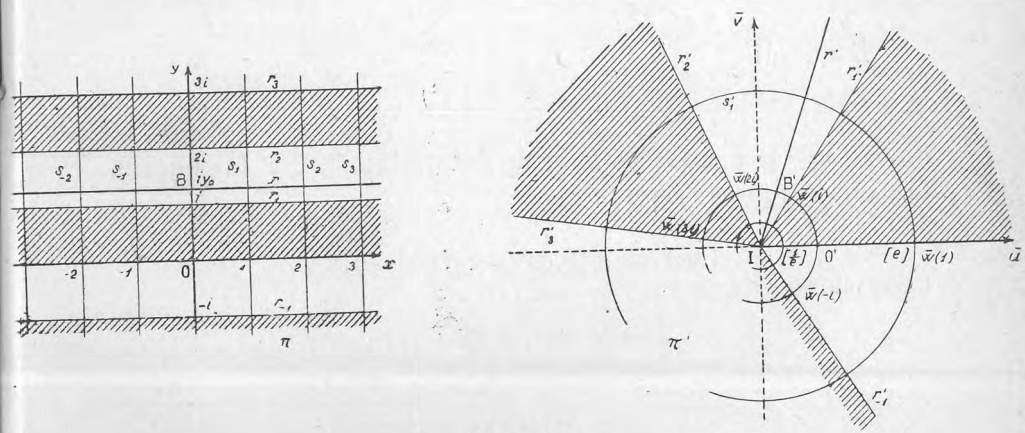


Fig. 21.

fatti i punti di tal raggio gli indici dei numeri $a^x \cdot \bar{w}(iy_0)$. Dunque *alle rette condotte in* π *parallelamente all' asse delle* x *corrispondono in* π' *raggi uscenti da* I.

Facciamo poi muovere con continuità la retta r nel fascio delle rette parallele ad Ox: il raggio r' ruoterà attorno ad I, e la conformità della rappresentazione $\bar{R}$ di π su π' richiede che, essendo r_1, r_2, r_3 tre posizioni di r ed r_1', r_2', r_3' le tre corrispondente posizioni di r', ed essendo r_1 ed r_3 vicine ad r_2, siano pure r_1' ed r_3' vicini ad r_2' e siano da una stessa parte o da parte opposte di r_2', secondochè r_1 ed r_3 si trovino dalla

stessa parte o da parti opposte di r_2. Dunque quando r descrive *in un verso* il fascio di parallele che abbiam detto, r' ruota, *pure sempre in un verso,* attorno ad I.

Se quindi consideriamo in π le rette s perpendicolari alle r, a queste rette s, che sono le trajettorie ortogonali del sistema delle r, corrisponderanno in π' le trajettorie ortogonali del sistema dei raggi r', cioè i cerchi che hanno il centro in I; in particolare all'asse Oy corrisponderà il cerchio di raggio 1 e sarà quindi

$$\bar{w}(iy) = \cos\theta(y) + i\,\mathrm{sen}\,\theta(y).$$

Ma si vede subito quale funzione abbia ad essere questa $\theta(y)$, perchè dobbiamo avere

$$\bar{w}(iy_1)\cdot\bar{w}(iy_2) = \bar{w}(i(y_1+y_2)),$$

cioè

$$\theta(y_1)+\theta(y_2) = \theta(y_1+y_2).$$

È quindi

$$\theta(y) = \varkappa y, \ (1)$$

dove $\varkappa = \theta(1)$ è una costante da determinarsi. Per far questo, ora che sappiamo aversi

$$\bar{w}(z) = a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y),$$

osserviamo che

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} = \ell a\cdot a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y),$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} = \varkappa\cdot a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y).$$

Dunque, per la monogeneità della funzione, è

$$\varkappa = \ell a.$$

Concludiamo che non può aversi altra funzione $w(z)$, che sia finita e continua per ogni valore finito della variabile complessa z, che soddisfi all'equazione funzionale (1) e che

(1) Si arriva a questa conclusione, imitando la dimostrazione del paragrafo precedente, e tenendo presente che $\theta(0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ e quindi possiamo prendere $\theta(0) = 0$. Cfr. anche § 12, nota (pag. 533).

assuma valori reali per valori reali della variabile, all'infuori della costante zero e della funzione

$$w(x+iy) = a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y), \tag{2}$$

dove a è un numero reale e positivo qualunque e $\varkappa = \ell a$. Se $a = 1$, questa funzione si riduce alla costante 1.

La funzione $w(x+iy)$ definita dalla (2) gode effettivamente delle proprietà ora ricordate. Dunque la sola definizione di potenza ad esponente complesso di una base reale e positiva la quale, collimando nel caso di esponente reale con quella comune, conservi alla potenza le proprietà che la caratterizzano nel campo reale, è la seguente.

DEFINIZIONE. *La potenza ad esponente complesso $z = x+iy$ della base reale e positiva a è il numero*

$$a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y) \qquad (\varkappa = \ell a).$$

Escludiamo che sia $a = 1$. La funzione esponenziale

$$a^{x+iy} = a^x(\cos\varkappa y + i\,\mathrm{sen}\,\varkappa y)$$

non è una costante, ma *è periodica,* risultando

$$a^{x+iy} = a^{x'+iy'},$$

quando sia

$$x = x', \quad y \equiv y' \left(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{\varkappa}\right);$$

si ha dunque un *periodo immaginario* eguale a $\frac{2\pi}{\varkappa}i$. Del resto *la potenza a^{x+iy} assume ogni valore complesso $w = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, prefissato finito e non nullo,* risultando precisamente

$$a^{x+iy} = r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

quando sia

$$x = \log_a r, \quad y \equiv \frac{\varphi}{\varkappa}\left(\mathrm{mod}\,\frac{2\pi}{\varkappa}\right).$$

Verremo a dire queste stesse cose osservando che, nella rappresentazione conforme di π su π', stabilita dalla funzione $w(x+iy) = a^{x+iy}$ $(a \neq 1)$, le striscie di π, comprese fra rette parallele ad Ox hanno per immagini angoli di π' col vertice

in I: le striscie sono proporzionali agli angoli immagini e la striscia di larghezza $\frac{2\pi}{\varkappa}$ ha per immagine l'angolo di misura 2π, cioè l'intero piano π'.

Sempre con $a \neq 1$, abbiamo una *funzione inversa* di questa $w(z) = a^{x+iy}$, e tal funzione $z(w) = \log_a w$ è funzione ad infiniti valori, che sono dati dalla formula

$$(3) \qquad \log_a (r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)) = \log_a r + i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{\varkappa},$$

essendo k lo zero o un numero intero positivo o negativo qualunque.

Fra questi infiniti valori si suol chiamare *principale* quello per il quale $\varphi + 2k\pi$ è compreso fra $-\pi$ e $+\pi$.

Si ha anche

$$(3') \qquad \log_a (u + iv) = \log_a \sqrt{u^2+v^2} + \frac{i}{\varkappa} \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u}.$$

Chiudiamo questo paragrafo con due osservazioni.

Tutte le formole precedenti si semplificano quando la base sia il numero e. Allora

$$\varkappa = 1$$

e quindi

$$(4) \qquad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y):$$

in particolare

$$e^{i\pi} = -1.$$

Inoltre

$$(5) \qquad \ell(r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)) = \ell r + i(\varphi + 2k\pi)$$

ovvero

$$(5') \qquad \ell(u + iv) = \ell\sqrt{u^2+v^2} + i \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u}.$$

Le funzioni e^z e ℓw sono formate con esponenziali e logaritmi reali e con funzioni circolari: perciò a lor volta queste funzioni circolari possono esprimersi per esponenziali e logaritmi. Si trova:

$$(6) \qquad \begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \operatorname{sen} y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ \operatorname{arc\,tang} \dfrac{v}{u} = \dfrac{1}{2i}\,\ell\,\dfrac{u+iv}{u-iv}. \end{cases}$$

§ 29. **Potenze ad esponente complesso di basi complesse.** — Il Lettore comprende come tutto il cammino, che abbiamo percorso partendo dalla considerazione d'una base, cioè d'un *operando reale e positivo* a, si possa nuovamente percorrere riferendoci ad un *operando complesso* qualunque $a + ib = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, non nullo.

Dalla considerazione delle potenze d'esponente n intero e positivo o nullo o intero e negativo

$$(a + ib)^n = \rho^n (\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega),$$

mediante inserzioni di medii geometrici e quindi *per istabilire la continuità*, ci condurremo a definire come potenza della base $a + ib$ corrispondente all'esponente reale qualunque x il numero complesso $\rho^x(\cos x\omega + i \operatorname{sen} x\omega)$. Ma è da notare che, come ω è determinato solo a meno di multipli di 2π, così, ponendo

$$(1) \qquad (a + ib)^x = \rho^x (\cos x\omega + i \operatorname{sen} x\omega),$$

questa potenza $(a + ib)^x$ viene ad essere una funzione complessa $w(x)$, della variabile reale x, a infiniti rami. Se tra i valori dell'argomento ω di $a + ib$ è ω_0 quello compreso fra $-\pi$ e $+\pi$, avremo un *ramo principale*

$$(2) \qquad w_0(x) = \rho^x (\cos x\omega_0 + i \operatorname{sen} x\omega_0)$$

e altri infiniti rami

$$(3) \qquad w_k(x) = w_0(x) \cdot (\cos 2xk\pi + i \operatorname{sen} 2xk\pi),$$

essendo k un numero intero positivo o negativo qualunque.

Notiamo che così w_0 come w_k non si annullano per alcun valore finito di x e che $|w_0|$ e $|w_k|$, se non sono costanti ed eguali a 1, sono sempre crescenti o sempre decrescenti con x: ed anche gli argomenti di w_0 e w_k son sempre crescenti o sempre decrescenti con x, se non sono costanti e nulli. Si ha

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw_0(x)}{dx} = (\ell\rho + i\omega_0) w_0(x), \\ \dfrac{dw_k(x)}{dx} = (\ell\rho + i(\omega_0 + 2k\pi)) w_k(x): \end{cases}$$

queste derivate non si annullano per alcun valore finito di x, tranne il caso che siano identicamente nulle.

Potremo considerare nel piano complesso π' i luoghi dei punti, che sono indici dei valori di $w_0(x)$ e $w_k(x)$. Il luogo γ_0, corrispondente a w_0 è il cerchio che ha il centro nell'origine I e il raggio 1, se $\rho = 1$, e si riduce al punto O', se $\omega_0 = 0$; è invece una spirale logaritmica passante per questo punto O', se $\rho \neq 1$: la spirale tende al suo polo in I quando $x\omega_0$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, secondo che sia ρ maggiore o minore di 1; e si riduce al semiasse delle ascisse positive, se $\omega_0 = 0$.

Quanto ai luoghi γ_k, corrispondenti alle funzioni w_k, le (1) e (3) dimostrano che sono lo stesso cerchio di centro I e raggio 1 se $\rho = 1$, e spirali logaritmiche se $\rho \neq 1$.

Dinotiamo ora con $w(x)$ uno dei rami della potenza definita colla (1). Si ha ancora

$$w(x_1) \cdot w(x_2) = w(x_1 + x_2), \tag{5}$$

essendo x_1 ed x_2 valori qualunque della variabile reale x; e questa proprietà caratterizza ancora la funzione $w(x)$: una funzione complessa finita e continua d'una variabile reale x, la quale soddisfi alla (5) e non sia la costante zero, è uno dei rami della potenza, definita colla (1), d'una certa base complessa $a + ib$.

La dimostrazione data al § 27 vale infatti, senza alterazione alcuna, anche nel caso presente.

Quindi, ricercando se si abbiano funzioni complesse $w(z)$ della variabile complessa z, le quali siano finite e continue per ogni valore finito di z e soddisfino all'equazione funzionale

$$w(z_1) \cdot w(z_2) = w(z_1 + z_2), \tag{6}$$

troveremo, con discussione simile a quella già fatta, che, se $\bar{w}(z)$ è una funzione siffatta, diversa della costante zero, essa non si annulla per alcun valore finito di z: e si ha innanzi tutto

$$\bar{w}(x + y) = \bar{w}(x) \cdot \bar{w}(iy)$$

e $\bar{w}(x)$ è una soluzione della (5). Dunque

$$\bar{w}(x + iy) = \bar{\rho}^{x} (\cos x\bar{\omega} + i \operatorname{sen} x\bar{\omega}) \cdot \bar{w}(iy),$$

dove $\bar{\rho}$ è modulo d'un certo numero complesso $a + ib$ non

nullo ed $\bar{\omega}$ è uno determinato dei valori dell'argomento di tal numero.

Se $\bar{\rho} = 1$ ed $\bar{\omega} = 0$, allora $\bar{w}(z) = \text{cost.}^{te} = 1$. Se invece non è ad un tempo $\bar{\rho} = 1$ ed $\bar{\omega} = 0$, allora la $\dfrac{d\bar{w}}{dz}$ non si annulla per alcun valore finito di z, ed è da stabilire quale funzione sia $\bar{w}(iy)$.

Qui non ricorreremo alle considerazioni geometriche, facili anche questa volta e che solo richiederebbero la distinzione del caso nel quale sia $\bar{\rho} = 1$ da quello nel quale abbiasi $\bar{\rho} \neq 1$. Osserveremo che dall'equazione

$$\bar{w}(iy_1) \cdot \bar{w}(iy_2) = \bar{w}(i(y_1 + y_2))$$

trarremo nel solito modo che

$$\bar{w}(iy) = [\bar{w}(i)]^{y};$$

ora possiamo farlo, perchè abbiamo definito la potenza di esponente reale qualunque y d'una base complessa.

Poniamo quindi che sia $\bar{w}(i) = a' + ib'$ e che siano $\bar{\rho}'$ il modulo e $\bar{\omega}'$ uno, indeterminato, dei valori dell'argomento di $\bar{w}(i)$. Abbiamo

$$\bar{w}(iy) = \bar{\rho}'^{y} (\cos y\bar{\omega}' + i \operatorname{sen} y\bar{\omega}')$$

e

$$\bar{w}(z) = \bar{\rho}^{x} (\cos x\bar{\omega} + i \operatorname{sen} x\bar{\omega}) \cdot \bar{\rho}'^{y} (\cos y\bar{\omega}' + i \operatorname{sen} y\bar{\omega}').$$

Deriviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x} = (\bar{\ell\rho} + i\bar{\omega})\bar{w}(z) \\ \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \left(\dfrac{\bar{\ell\rho}'}{i} + \bar{\omega}'\right)\bar{w}(z). \end{cases} \tag{7}$$

Troviamo così che, per la monogeneità della funzione, deve essere

$$\bar{\omega}' = \bar{\ell\rho}, \quad \bar{\ell\rho}' = -\bar{\omega},$$

cioè che

$$\bar{w}(z) = \bar{\rho}^{x} (\cos x\bar{\omega} + i \operatorname{sen} x\bar{\omega}) \cdot e^{-y\bar{\omega}} (\cos(y \cdot \bar{\ell\rho}) + i \operatorname{sen}(y \cdot \bar{\ell\rho})). \tag{8}$$

E sarà giustificata questa

DEFINIZIONE. *La potenza ad esponente complesso $z = x + iy$*

della base complessa non nulla $a+ib=\rho(\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega)$ *è il numero complesso*

$$\rho^x(\cos x\omega+i\operatorname{sen}x\omega)\cdot e^{-y\omega}(\cos(y\cdot l\rho)+i\operatorname{sen}(y\cdot l\rho))$$

cioè il numero complesso (cfr. § 29 (1), § 28 (5))

$$(a+ib)^x\cdot e^{iy\cdot l(a+ib)},$$

cioè infine il numero complesso

$$e^{(x+iy)\cdot l(a+ib)}.$$

Siffatta potenza è funzione ad infiniti rami, corrispondenti agli infiniti valori di ω. Ciascuno di questi rami è effettivamente una soluzione della (6), e fra essi diciamo *principale* quello che corrisponde al valore ω_0 di ω, che è compreso fra $-\pi$ e $+\pi$.

Si ha in particolare

$$i^i=e^{-\frac{1}{2}\pi+2k\pi};$$

i valori di i^i son dunque tutti reali e quello principale è $e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

Non vogliamo trattare dei sistemi di logaritmi corrispondenti ad una base complessa $a+ib$. Ci limitiamo ad osservare che le successive definizioni date per la potenza si compendiano in quest'unica:

La potenza d'esponente $z=x+iy$ *della base* $A=a+ib$ *non nulla è quella funzione finita e continua per ogni valor finito della variabile complessa* z, *che soddisfa all'equazione funzionale*

$$w(z_1)\cdot w(z_2)=w(z_1+z_2)$$

e che assume per $z=1$ *il valore* A.

Notiamo ancora che è in ogni caso

$$\frac{dA^z}{dz}=lA\cdot A^z$$

(cfr. questo § (7) e § 28 (5)), precisamente come avevamo (§ 26 (4)) per potenze d'esponente reale di basi positive.

§ 30. **Complementi e notizie storiche.** — Ciò che ora ci mancherebbe per compiere l'esposizione della teoria delle potenze e dei logaritmi nel campo complesso, sarebbe la dimostrazione degli algoritmi che servono al calcolo di queste funzioni.

Rimandiamo pei particolari di questa dimostrazione ai trattati d'Analisi. Le proposizioni principali sono le seguenti:

1°) *Si ha*

$$e^z=\lim_{n=\pm\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

essendo z *un valore qualunque della variabile complessa.*

2°) *Lo sviluppo in serie di* TAYLOR *dell'esponenziale*

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots.+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

è convergente in tutto il piano complesso.

3°) *Lo sviluppo in serie del valor principale del logaritmo naturale*

$$l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots.+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots.$$

è convergente entro e sul contorno del cerchio di raggio 1 *e di centro* O, *il punto* $z=-1$ *escluso.*

La via, lungo la quale, nelle pagine precedenti, siamo giunti alla definizione di potenza d'esponente complesso d'una base reale o complessa, non è quella che di solito si segue nei trattati: in questi si segue, può dirsi, il cammino inverso, perchè, ottenuti gli sviluppi in serie dell'esponenziale e del logaritmo, per il caso di variabile reale, si assumono poi questi sviluppi, sostituitavi la variabile complessa alla reale, a definire quelle funzioni nel campo complesso.

Ma la via da noi seguita è meno lontana di quel che si possa pensare da quella attraverso la quale la teoria si è formata.

Costruttore di questa teoria fu EULERO. Prima di lui, il LEIBNIZ e GIOVANNI BERNOULLI (1667-1748), studiando l'integrazione delle funzioni razionali fratte, erano giunti a porre formole involgenti logaritmi di numeri immaginari, e al

BERNOULLI si era presentata la relazione, che intercede fra logaritmi ed architangenti (1).

Ebbe poi luogo una lunga controversia fra i due. Il BERNOULLI, trascurando la detta relazione, sosteneva che i numeri negativi hanno logaritmi reali, eguali a quelli dei loro valori assoluti, il LEIBNIZ sosteneva che hanno logaritmi immaginari; del parere del BERNOULLI era il D'ALEMBERT.

Ciò accadeva quando *era ancora da definire il logaritmo d'un numero negativo,* epperò non poteva essere controverso altro che la *opportunità* di questa o quella definizione.

EULERO (2) mosse da questa proposizione. *Con a positivo ed* ε *infinitesimo, si ha*

(1) $$a^{\varepsilon} = 1 + k\varepsilon,$$

dove k è un coefficiente che dipende da a. Si troverà subito la relazione fra k ed a: (noi sappiamo già, § 26 (2), che $k = la$).

Se n è un numero reale qualunque, si ha

$$a^{n\varepsilon} = 1 + \frac{n}{1!}k\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}k^2\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}k^3\varepsilon^3 + \dots;$$

e quindi, se, mentre ε tende a zero, n cresce così che $n\varepsilon$ si serbi eguale ad un certo numero x, otteniamo

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{n-1}{2!n}k^2x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}k^3x^3 + \dots,$$

ma con n molto grande si ha, press' a poco, $\frac{n-1}{n} = 1$, $\frac{n-2}{n} = 1$ etc.; otteniamo quindi

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \dots,$$

e in particolare ($x = 1$)

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots.$$

(1) V. LEIBNIZens *math. Schriften*, ed. C. J. Gerhardt, Bd. III, lett. 147 e 148; Bd. V, *Specimen novum* etc.; e BERNOULLI, *Opera* I, 393-400.

(2) V. *Introductio in Analysin infinitorum* (Losanna, 1748) 1° vol., Cap. 7° e 8°; *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* (Hist. de l'Acad. de Berlin, T. V, 1749, p. 139-179).

Così sono trovati lo sviluppo in serie di a^x e la relazione, che abbiam detto, fra a e k. Consideriamo la base e, per la quale riesce $k = 1$, cioè la base

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

Avremo

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon, \quad e^{n\varepsilon} = (1+\varepsilon)^n, \quad e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n_{(n=\infty)}$$

cioè

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

In tutto questo EULERO non dice se ε ed x siano reali o complessi: ma adotta i risultati ottenuti anche per il caso che queste variabili abbiano valori complessi. E perciò possiam dire che *egli ponendo la* (1) *con* ε *complesso infinitesimo, cioè ponendo che il quoziente* $\frac{a^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$ *ha un limite finito, indipendente dal modo di tendere a zero di* ε, *definisce la potenza a esponente complesso come una funzione monogena nell' origine, e quindi, mediante la formola d' addizione*

$$a^{z+\varepsilon} = a^z \cdot a^{\varepsilon},$$

come una funzione monogena in tutto il piano complesso.

Egli trova poi nel modo seguente la dipendenza dell'esponenziale dalle funzioni circolari. Essendo

$$(\cos x \pm i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx \pm i \operatorname{sen} nx$$

(n intero positivo), si ha

$$\cos nx = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n + (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2},$$

$$\operatorname{sen} nx = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n - (\cos x - i \operatorname{sen} x)^n}{2i}.$$

Sia ora x infinitesimo e insieme n tenda a $+\infty$, così che

nx mantenga un valore finito y: avremo $x=\frac{y}{n}$, $\operatorname{sen} x=\frac{y}{n}$, $\cos x=1$ e quindi

$$\cos y=\frac{\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n+\left(1-\frac{iy}{n}\right)^n}{2},$$

$$\operatorname{sen} y=\frac{\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n-\left(1-\frac{iy}{n}\right)^n}{2i};$$

e, siccome abbiam già visto sopra che

$$\left(1+\frac{iy}{n}\right)^n_{(n=\infty)}=e^{iy},$$

troviamo

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \operatorname{sen} y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},$$

ed

$$e^{iy}=\cos y+i\operatorname{sen} y$$

etc.

Tutte queste dimostrazioni oggi non appagherebbero; ma ciò che in esse manca non è sostanza: è forma soltanto.

Cap. V. - Numeri complessi a n unità

§ 31. **Cenno storico.** — La teoria delle equazioni e quella della funzione esponenziale possono avere, pei risultati fondamentali che abbiamo esposto, uno sviluppo generale e completo nel campo dei numeri complessi ordinari: l'Algebra non richiederebbe altre estensioni del concetto di numero. Ma la teoria svolta suggerisce subito la domanda, se una nuova estensione di questo concetto sia possibile.

Il primo a proporsi questa questione fu il Wessel, che, come abbiamo detto, fu pure il primo a dare l'interpretazione geometrica dell'immaginario. Egli, nella seconda parte della sua memoria del 1797, cercò di sviluppare una aritmetica pei vettori dello spazio ordinario. Il tentativo ricomparve

nelle memorie, pure citate, dell'Argand, il quale, trascurando la formola di Eulero

$$i^i=e^{-\frac{1}{2}\pi},$$

riteneva di dover assumere tale potenza i^i come terza unità d'un nuovo sistema di numeri complessi.

Gauss, nella sua nota del 1831 alla *Theoria residuorum biquadraticorum* etc., ripetendo il proposito, espresso fin dal 1797, di dedicare apposito scritto allo studio dei numeri complessi, faceva conoscere d'avere scoperto che una nuova estensione della nozione di numero non poteva aversi, senza che si perdessero alcune delle proprietà fondamentali delle operazioni. Egli affermava precisamente che *die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können.*

Gauss non pubblicò lo studio annunziato. Ma si ebbero da altri sommi Geometri opere di capitale importanza per la teoria dei numeri complessi, e cioè, nel 1853, le *Lectures on quaternions* di G. R. Hamilton, e, nel 1862, l'*Ausdehnungslehre* di E. Grassmann. Nelle prime, che sono esposizione sistematica d'un complesso di studi, che risalgono al 1843, è svolta la teoria d'un corpo di numeri complessi a 4 unità, i *quaternioni*, dove il prodotto non gode della proprietà commutativa; nella seconda, che è rimaneggiamento di altra opera pubblicata dal Grassmann nel 1844, si introducono, col nome di *quantità estensive*, numeri complessi generali, partendo da un sistema primitivo e senza porre la condizione che il prodotto di due numeri di tal sistema sia un numero del sistema stesso.

Tenne dietro a queste, nel 1867, un'opera di minor mole, la *Theorie der complexen Zahlensysteme* di E. Hankel, dove è dimostrato che, all'infuori dei corpi dei numeri reali e dei numeri complessi ordinari, non si hanno altri corpi di numeri complessi, dove valgano tutte le proprietà del prodotto — distributiva, associativa, commutativa; mancanza di divisori dello zero, diversi da zero —. E più tardi, nel 1878, G. Frobenius [1] dimostrava che, oltre quelli dei numeri reali

[1] *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (Giornale di Crelle, Bd. 84 (1878), p. 1-63; § 14).

e dei numeri complessi ordinari, si ha solo il corpo dei quaternioni del HAMILTON, dove valgano le proprietà distributiva ed associativa e non esistano divisori dello zero diversi da zero.

Sono così ricordate le date più importanti nello sviluppo di una teoria, intorno alla quale sono stati pubblicati moltissimi studi (1). Ora esporremo i risultati indicati, riprendendo termini e segni adottati pei numeri complessi ordinari (2).

Termineremo col mostrare come la teoria si connetta a quella dei sistemi lineari di omografie che formano gruppo (3).

§ 32. **Numeri complessi a n unità. - Eguaglianza e somma.** — Delle definizioni, date al § 12, di *numero complesso*, di *eguaglianza* e di *somma* di numeri complessi si ha questa immediata estensione.

Def. 1ª. Chiamiamo *numero complesso d'ordine n* un sistema di n numeri reali qualunque

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n;$$

dinotando tal numero con x, scriveremo

$$x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n).$$

I numeri $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ si diranno gli *elementi* di x.

Def. 2ª. Il numero complesso a elementi tutti nulli si dirà lo *zero* e si dinoterà con 0.

Def. 3ª. I numeri complessi

$$x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n),\quad y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)$$

si diranno *eguali* e si scriverà

$$x=y,$$

quando sia

$$x_1=y_1,\quad x_2=y_2,\ldots,\quad x_n=y_n.$$

(1) Una nota bibliografica si trova alla fine della memoria di G. SCHEFFERS, *Zurükführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen* (Math. Annalen, Bd. XXXIX, 1891, p. 386).

(2) Veggasi ancora la *Theor. Arithmetik* di STOLZ e GMEINER (X, 12-18) e il lavoro di M. CIPOLLA, *Teoria dei numeri complessi ad n unità* (Per. di Mat. XX, 1905).

(3) La lettura dei §§ 32-36 può procedere di pari passo con quella dei §§ 37-39.

Def. 4ª. Dati i numeri complessi x ed y, si dice *somma* di essi e si dinota con $x+y$ il numero

$$(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,\ x_n+y_n).$$

Osserv. Evidentemente con queste definizioni abbiamo

a) $x=x;$

b) se $x=y$, è anche $y=x;$

c) se $x=y$ e $y=z$, è $x=z;$

d) $x+y=y+x,$

e) $(x+y)+y'=x+(y+y'),$

f) $x+0=x.$

E non occorrerà che ci indugiamo sulla definizione di *sottrazione*.

La totalità ∞^n dei numeri complessi, nella quale eguaglianza e somma sono definite come abbiam fatto, si chiamerà *un sistema di numeri complessi a n unità*.

Def. 5ª. Dati i numeri

$$u=(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n),\quad v=(v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n),$$

se

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 \ldots u_n \\ v_1 & v_2 \ldots v_n \end{Vmatrix}=0,$$

cioè se

$$v_1=\lambda u_1,\quad v_2=\lambda u_2,\ldots,\quad v_n=\lambda u_n,$$

si dice che fra v ed u intercede *rapporto reale* eguale a λ, ovvero che v è *multiplo* di u secondo λ; e scriveremo $v=\lambda u$. Se invece la matrice considerata non è nulla, diremo che *fra u e v non intercede rapporto reale*.

Osserv. 1ª. Abbiamo

$$\mu(\lambda u)=\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u,$$

$$\lambda u+\mu u=(\lambda+\mu)u;$$

e, qualunque sia u,

$$0u=0.$$

Osserv. 2ª. Dati parecchi numeri

$$u_i = (u_{i_1},\ u_{i_2},\ldots,\ u_{in}) \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ p),$$

consideriamo la matrice

$$\left\| \begin{matrix} u_{11}\ u_{12}\ldots u_{1n} \\ u_{21}\ u_{22}\ldots u_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_{p1}\ u_{p2}\ldots u_{pn} \end{matrix} \right\|$$

e sia h la sua caratteristica ($h \leq n$): supponiamo precisamente che sia diverso da zero uno dei minori tratti dalle prime h linee. Le proposizioni note, intorno alle relazioni che, con tali ipotesi, intercedono fra gli elementi u_{ij} della matrice, possono ora enunciarsi in modo compendioso così.

Gli h numeri complessi $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_h$ non possono soddisfare ad un'equazione della forma

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_h u_h = 0,$$

dove le λ_i dinotino coefficienti reali non tutti nulli; e dall'eguaglianza

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_h u_h = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_h u_h$$

segue che

$$\lambda_1 = \mu_1,\quad \lambda_2 = \mu_2,\ldots,\quad \lambda_h = \mu_h.$$

Invece *ciascuno dei numeri $u_{h+1},\ u_{h+2},\ldots,\ u_p$, che seguono i primi h, è somma di certi multipli di questi;* si hanno cioè coefficienti ν_{ij}, tali che

$$u_{h+i} = \nu_{i_1} u_1 + \nu_{i_2} u_2 + \ldots + \nu_{ih} u_h \quad (i = 1, 2,\ldots, p-h).$$

Def. 6ª. Dati h numeri complessi, se la matrice formata coi loro elementi ha la caratteristica h, diremo che gli h numeri sono *indipendenti.*

Osserv. Si possono in infiniti modi scegliere n numeri

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n$$

indipendenti: basta che, se

$$u_i = (u_{i_1},\ u_{i_2},\ldots,\ u_{in}),$$

il determinante

$$D(u) = \Sigma \pm u_{11} u_{22} \ldots u_{nn}$$

sia diverso da zero. Sono in particolare indipendenti gli n numeri

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= (1,\ 0,\ldots,\ 0), \\ \bar{u}_2 &= (0,\ 1,\ldots,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{u}_n &= (0,\ 0,\ldots,\ 1). \end{aligned}$$

Scelti n numeri u_i indipendenti, ogni altro numero $x = (x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ è somma di determinati multipli di quelli; perchè alle equazioni

$$u_{1j}\xi_1 + u_{2j}\xi_2 + \ldots + u_{nj}\xi_n = x_j \quad (j = 1, 2,\ldots, n),$$

poste per le ξ_i, potremo soddisfare, qualunque siano le x_j, *in uno ed in un sol modo.* Dunque il numero x potrà, in uno ed in un sol modo, ridursi alla forma

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n.$$

Def. 7ª. Fissati i numeri indipendenti

$$u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,$$

ed espresso ogni altro numero x nella forma

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n,$$

i numeri $u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n$ si diranno *numeri-unità* o semplicemente *unità del sistema;* ed i coefficienti $\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\ \xi_n$ si diranno *elementi* di x rispetto a queste unità.

Osserv. 1ª. Se $x = (x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ i numeri $x_1,\ x_2\ldots,\ x_n$, che già abbiamo detto elementi di x, sono gli elementi di x rispetto alle unità $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots,\ \bar{u}_n$.

Osserv. 2ª. Come unità possono prendersi n numeri indipendenti qualunque. Il cangiamento delle unità corrisponde ad una sostituzione lineare sugli elementi di ciascun numero complesso; e il Lettore si persuaderà facilmente che, nelle definizioni di eguaglianza e di somma di due numeri complessi e in quella di numeri indipendenti, possiamo intendere si tratti di elementi, dei numeri da considerarsi, *rispetto ad unità qualisivogliano.*

§ 33. **Intorno alla definizione di prodotto. Generalità.** — Dovremmo ora definire il *prodotto* $x \cdot y$ del numero complesso x (*moltiplicando*) per il numero complesso y (*moltiplicatore*): dovremmo cioè trasformare in *corpo di numeri complessi* il sistema considerato.

Si presenta qui la stessa questione che abbiamo discusso nel caso dei numeri complessi a due unità. Ci domandiamo: *Se possa definirsi il prodotto in guisa che:*

a) *sussista la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*, cioè abbiasi

$$(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y,$$

$$x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y',$$

e inoltre

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y),$$

$$x \cdot (\mu y) = \mu (x \cdot y),$$

qualunque siano i coefficienti reali λ e μ;

b) *sussista la proprietà associativa*, cioè sia

$$(x \cdot y) \cdot y' = x \cdot (y \cdot y');$$

c) *non si abbiano divisori dello zero diversi da zero*, cioè *il prodotto sia nullo soltanto quando uno almeno dei fattori sia nullo;*

d) *sussista la proprietà commutativa*, cioè sia

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Nel caso delle due unità abbiamo dimostrato che *la proprietà commutativa era una conseguenza delle altre tre* (distributiva, associativa e mancanza di divisori dello zero diversi da zero); e che *in un sol modo poteva definirsi il prodotto, così che sussistessero queste tre proprietà e quindi anche la quarta.*

Ora dimostreremo che, quando le unità son più di due, insieme colla proprietà distributiva e colla associativa, *non possono ad un tempo aver luogo le altre due* (mancanza di divisori dello zero diversi da zero e commutatività del prodotto): *l'una esclude l'altra. E c'è un sol caso, nel quale, sussistendo le proprietà distributiva ed associativa, non si hanno divisori dello zero diversi da zero.*

Se è in qualche modo definito il prodotto

$$x \cdot y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots + \varphi_n u_n \tag{1}$$

dei fattori

$$x = \sum_i \xi_i u_i \ (^1), \quad y = \sum_i \eta_i u_i, \tag{2}$$

gli elementi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ del prodotto sono funzioni degli elementi ξ_i ed η_i dei fattori.

Ha luogo, come per il caso delle due unità, questo

TEOREMA. *La condizione necessaria e sufficiente, perchè il prodotto goda della proprietà distributiva rispetto alla somma, è che gli elementi del prodotto siano funzioni bilineari ed omogenee degli elementi dei fattori.*

Difatti sia

$$u_i \cdot u_j = \sum_k \lambda_{ij}^{(k)} u_k \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

dove le $\lambda_{ij}^{(k)}$ sono coefficienti reali dati comunque; se ha luogo la proprietà distributiva, dalle (2) e (3) ricaviamo

$$x \cdot y = \sum_{i,j,k} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} u_k,$$

cioè

$$\varphi_k = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)};$$

e inversamente, se gli elementi φ_k del prodotto sono così formati, qualunque siano le $\lambda_{ij}^{(k)}$, ha luogo la proprietà distributiva per prodotti fra numeri qualunque.

Perchè sussistano, *insieme colla proprietà distributiva*, o l'una o l'altra o la terza delle rimanenti proprietà del prodotto, si hanno le stesse condizioni che abbiamo stabilito nel caso di due unità.

Perchè abbia luogo la proprietà associativa, occorre e basta che essa abbia luogo pei prodotti fra unità: cioè occorre e basta che sia

$$(u_i \cdot u_j) \cdot u_k = u_i \cdot (u_j \cdot u_k) \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, n),$$

(1) In tutto questo capitolo il segno Σ dinoterà la somma dei termini, che si ottengono attribuendo agli indici di sommazione i valori $1, 2, \dots, n$.

e quindi che sia

$$\sum_m \lambda_{ij}^{(m)} \lambda_{mk}^{(n)} = \sum_m \lambda_{jk}^{(m)} \lambda_{im}^{(n)}$$

$$(i,\ j,\ k,\ n = 1,\ 2,\ldots.,\ n).$$

Perchè non esistano divisori dello zero diversi da zero, è necessario e sufficiente che i due determinanti

$$\Delta(y) = \left| \sum_j \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} \right| \qquad (i, k = 1, 2,\ldots., n),$$

$$\Delta'(x) = \left| \sum_i \xi_i \lambda_{ij}^{(k)} \right| \qquad (j, k = 1, 2,\ldots., n)$$

si annullino soltanto per $y = 0$ ed $x = 0$ rispettivamente.

Ed infine, perchè sussista la proprietà commutativa, è necessario e sufficiente che questa abbia luogo per i prodotti fra le unità, cioè che si abbia

$$u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i \qquad (i, j = 1, 2,\ldots., n),$$

e quindi

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ji}^{(k)} \qquad (i, j, k = 1, 2,\ldots., n).$$

Anche i teoremi, che abbiamo stabilito per il caso delle due unità al § 13, continuano a sussistere, e le dimostrazioni, che allora ne demmo, valgono senza modificazione alcuna nel caso di quante si vogliano unità: è ben facile persuadersi di questo, solo che si scorrano quelle dimostrazioni. Dunque

1°. *Se è definito il prodotto così che valga la proprietà distributiva e non esistano divisori dello zero diversi da zero, variando uno dei fattori del prodotto, se l'altro non è zero, varia anche il prodotto.*

2°. *Se è definito il prodotto così che valga la proprietà distributiva e non si abbiano divisori dello zero diverso da zero, all'equazione*

$$x \cdot y = z,$$

dove z è un numero qualunque, si soddisfa, se è dato $y \neq 0$, con uno ed un sol valore di x (quoziente della divisione anteriore di z per y); e, se è dato $x \neq 0$, con uno ed un sol valore di y (quoziente della divisione posteriore di z per x).

3°. *Se è definito il prodotto così che sussistano le proprietà distributiva ed associativa e non si abbiano divisori dello zero diversi da zero, esiste uno ed un sol numero r, tale che*

$$r \cdot a = a \cdot r = a$$

qualunque sia a.

Questo numero r si chiamerà ancora il *modulo* del sistema. E ci conviene qui aggiungere queste altre denominazioni. Un corpo di numeri complessi (nel quale valga la legge distributiva) si chiamerà *associativo* o *commutativo*, secondo che in esso sussista la proprietà associativa o la commutativa; si dirà *hankeliano* (CIPOLLA), se in esso non si avranno divisori dello zero diversi da zero.

Così il teor. 3° ora ricordato si enuncierà col dire, che *ogni corpo di numeri complessi che sia associativo ed hankeliano ammette un modulo r.*

I multipli di questo costituiscono da soli un corpo: sono i *numeri reali* del sistema. Converrà assumere questo modulo r, quando esiste, come unità, sostituendolo per es. all'unità u_n; e, se x è un numero qualunque del sistema, scriveremo

$$x = \xi_0 + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots. + \xi_{n-1} u_{n-1},$$

tralasciando di notare a fianco del primo elemento l'unità r, scrivendo cioè 1 in luogo di r.

§ 34. **Incompatibilità dell'esclusione dei divisori dello zero colla commutatività del prodotto, se $n > 2$.** — Un corpo associativo e hankeliano ammette modulo. In esso dunque possono scegliersi le unità, così che, per i prodotti fra una determinata di esse (il modulo) e le altre, valga la proprietà commutativa: se queste altre si riducono a una sola, cioè se si tratta di un corpo a due sole unità, esso è commutativo.

Dimostriamo ora, come abbiamo detto sopra, che *un corpo associativo a più di due unità, se è hankeliano non può essere commutativo e viceversa.*

A tal uopo cominciamo coll'osservare che, per un corpo associativo, si definiscono opportunamente le potenze di esponente intero positivo d'un numero qualunque a; perchè, ponendo

$$a^1 = a, \quad a^{p+1} = a^p \cdot a,$$

avremo anche

$$a \cdot a^p = a^{p+1}$$

ed in generale

$$(1) \qquad \begin{cases} a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \\ (a^p)^q = a^{pq}. \end{cases}$$

Se consideriamo le potenze

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \ldots, \quad a^{n-1}, \quad a^n,$$

può darsi che esse non siano indipendenti, cioè può darsi che con certi coefficienti reali ν_i, non tutti nulli, risulti

$$\nu_1 a^n + \nu_2 a^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1} a^2 + \nu_n a = 0.$$

Ma se ciò non accade, allora ogni altro numero, ed in particolare a^{n+1}, sarà somma di determinati multipli di $a, a^2, \ldots, a^n$; avremo cioè

$$a^{n+1} + \nu_1 a^n + \nu_2 a^{n-1} + \ldots + \nu_{n-1} a^2 + \nu_n a = 0.$$

In ogni caso dunque il numero a soddisferà ad un'equazione come

$$x^{m+1} + k_1 x^m + k_2 x^{m-1} + \ldots + k^m x = 0$$

con $m \leq n$; e sarà $m = 0$ soltanto nel caso che sia $a = 0$.

Premesso questo, veniamo a considerare un corpo, che sia ad un tempo associativo e hankeliano. Di esso fanno parte lo zero, i numeri reali (multipli del modulo r) e numeri formati colle rimanenti unità. Ha luogo questo

TEOREMA FONDAMENTALE. *Dato un corpo associativo e hankeliano, ogni numero a del corpo, che non sia reale, soddisfa ad un'equazione di 2° grado a coefficienti reali.*

Difatti, in quanto il corpo è associativo, il numero a soddisfa ad un'equazione a coefficienti reali

$$x^{m+1} + k_1 x^m + k_2 x^{m-1} + \ldots + k_m x = 0,$$

dove $m \leq n$. Trascriviamo l'equazione così:

$$x(x^m + k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \ldots + k_m) = 0;$$

e consideriamo il polinomio

$$P(x) = x^m + k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \ldots + k_m.$$

Se x fosse una *variabile reale,* questo polinomio, secondo il teorema fondamentale dell'Algebra, si decomporrebbe, in uno ed in un sol modo, in fattori di 1° e 2° grado della forma

$$x - \alpha_r,$$

$$(x - \beta_r)^2 + \gamma_r^2 \qquad (\gamma_r \neq 0),$$

le quantità reali α_r, β_r, γ_r dipendendo dai coefficienti k_i: si avrebbe l'identità

$$P(x) = \prod_r (x - \alpha_r) \cdot \prod_s ([x - \beta_s]^2 + \gamma_s^2);$$

Ma siffatta identità avrà senso e sussisterà anche se riguardiamo x variabile nel corpo associativo e hankeliano ad n unità, che consideriamo. Avrà senso, perchè nei binomi $x - \alpha_r$, $x - \beta_s$ avremo le differenze fra la variabile complessa x e determinati multipli del modulo r del corpo; e sussisterà, perchè il prodotto

$$\prod_r (x - \alpha_r) \cdot \prod_s ([x - \beta_s]^2 + \gamma_s^2)$$

si sviluppa in tal corpo colle stesse regole che valgono nel campo reale, e cioè secondo la legge distributiva e secondo la associativa, che dà per le potenze le (1), mentre si possono trattare indifferentemente le α_r, β_r e γ_r come multipli del modulo r, ovvero come coefficienti reali.

Dunque il numero a soddisfa all'equazione

$$x \cdot \prod_r (x - \alpha_r) \cdot \prod_s ([x - \beta_s]^2 + \gamma_s^2) = 0$$

cioè annulla il prodotto della prima parte. Ma si tratta di corpo hankeliano; epperò a dovrà annullare uno almeno dei fattori del prodotto; e, se non sarà lo zero nè sarà reale, annullerà precisamente uno dei fattori

$$(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2,$$

cioè soddisferà ad una certa equazione di 2° grado

$$(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2 = 0 \qquad (\gamma_s \neq 0).$$

Importante corollario di questo teorema è il seguente:

Le unità $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *possono sostituirsi con altre i quadrati delle quali siano eguali a* -1.

Difatti ogni numero che non sia reale soddisfa ad un'equazione della forma

$$(x-\beta)^2+\gamma^2=0 \qquad (\gamma \neq 0),$$

la quale, se poniamo α invece di $\frac{1}{\gamma}$ e β invece di $\frac{\beta}{\gamma}$ diventa

$$(\alpha x+\beta)^2=-1.$$

Così per le unità u_i avremo, con certi coefficienti α_i e β_i,

$$(\alpha_i u_i+\beta_i)^2=-1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Prendiamo come nuove unità i numeri

$$u_i'=\alpha_i u_i+\beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

i quali, insieme coll'unità reale, formano un sistema di n numeri indipendenti, perchè il determinante degli elementi delle unità 1 ed u_i' rispetto alle unità 1 ed u_i è diverso da zero ($=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$). Avremo così, insieme coll'unità reale, altre unità, delle quali i quadrati sono tutti eguali a -1 e che chiameremo *unità immaginarie*. Converrà poi che continuiamo a dinotarle con $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Se si ha, oltre l'unità reale, la sola unità u_1, il corpo è quello dei numeri complessi ordinari.

Se si hanno due o più unità immaginarie il corpo non potrà essere commutativo. Difatti, perchè fosse tale, occorrerebbe, e basterebbe, che valesse la proprietà commutativa pei prodotti fra le unità. Ma, se fosse

$$u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i,$$

il prodotto $-1+u_i\cdot u_j-u_j\cdot u_i+1$ dei fattori

$$u_i+u_j, \quad u_i-u_j,$$

entrambi diversi da zero, sarebbe eguale a zero.

Così siamo pervenuti a dimostrare che, *quando le unità son più di due, per definire il prodotto così da escludere l'esistenza di divisori dello zero diversi da zero, dobbiamo rinunziare alla proprietà commutativa.*

§ 35. **Osservazioni intorno ai divisori dello zero.** — Conviene che facciamo alcune osservazioni intorno ai corpi di numeri complessi, che ammettono divisori dello zero diversi da zero e che possono quindi essere commutativi [1].

Riprendiamo in esame le relazioni che, *perchè sussista la proprietà distributiva,* debbono intercedere fra gli elementi del prodotto e quelli dei fattori.

Dati i prodotti fra le unità

$$u_i \cdot u_j = \sum_k \lambda_{ij}^{(k)} u_k \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n),$$

se, con

$$x=\sum_i \xi_i u_i, \quad y=\sum_j \eta_j u_j,$$

si ha

$$x\cdot y = z = \sum_k \zeta_k u_k,$$

è

$$\zeta_k = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \lambda_{ij}^{(k)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n);$$

e quindi, ordinando rispetto agli elementi ξ_i del moltiplicando,

$$(1) \qquad \xi_1 \sum_j \lambda_{1j}^{(k)} \eta_j + \xi_2 \sum_j \lambda_{2j}^{(k)} \eta_j + \ldots + \xi_n \sum_j \lambda_{nj}^{(k)} \eta_j = \zeta_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

ed ordinando rispetto agli elementi η_j del moltiplicatore

$$(2) \qquad \eta_1 \sum_i \lambda_{i1}^{(k)} \xi_i + \eta_2 \sum_i \lambda_{i2}^{(k)} \xi_i + \ldots + \eta_n \sum_i \lambda_{in}^{(k)} \xi_i = \zeta_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Consideriamo i determinanti

$$\Delta(y) = \left| \sum_j \lambda_{ij}^{(k)} \eta_j \right| \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

e

$$\Delta'(x) = \left| \sum_i \lambda_{ij}^{(k)} \xi_i \right| \qquad (j, k=1, 2, \ldots, n),$$

[1] Non è necessaria la lettura di questo paragrafo per intendere il contenuto del § 36, nel quale si compie lo svolgimento della teoria analitica.

ed *escludiamo soltanto che essi siano*, per la scelta fatta dei coefficienti $\lambda_{ij}^{(k)}$, *identicamente nulli*, cioè nulli qualunque siano y ed x rispettivamente. Avremo valori di y pei quali si ha $\Delta(y)=0$ e altri pei quali $\Delta(y)\neq 0$; e lo stesso sarà per x e $\Delta'(x)$.

Notiamo ora innanzi tutto che, se con $\bar{y}=\sum_j \bar{\eta}_j u_j \neq 0$, si ha $\Delta(\bar{y})=0$, alle (1), postevi le $\bar{\eta}_j$ in luogo delle η_j, si soddisfa con valori non tutti nulli delle ξ_i, *anche se le* ζ_k *sono tutte nulle.*

Si ha dunque una infinità $X_{\bar{y}}$ di valori di x non nulli, che dànno

$$x\cdot\bar{y}=0,$$

mentre è anche $\bar{y}\neq 0$: questi valori di x e il numero $\bar{y}$ sono altrettanti divisori dello zero diversi da zero.

Similmente, se, con $\bar{x}=\sum_i \bar{\xi}_i u_i \neq 0$, si ha $\Delta'(\bar{x})=0$, esiste un'infinità $Y_{\bar{x}}$ di valori non nulli di y che dànno

$$\bar{x}\cdot y=0.$$

Ma è poi facile riconoscere che i numeri dell'infinità $X_{\bar{y}}$ annullano il determinante $\Delta'(x)$ e quelli dell'infinità $Y_{\bar{x}}$ annullano $\Delta(y)$, mentre evidentemente $\Delta(0)=0$, $\Delta'(0)=0$.

Dunque *i divisori dello zero sono i numeri che annullano o l'uno o l'altro dei determinanti* $\Delta(y)$ *e* $\Delta'(x)$.

Possiamo chiamare divisore dello zero *di 1ª specie* ogni numero che annulla $\Delta(y)$ e divisore dello zero *di 2ª specie* ogni numero che annulla $\Delta'(x)$. Un divisore dello zero *può* appartenere a un tempo all'una e all'altra specie: e tale è *in ogni caso* lo zero.

Supponiamo ora in secondo luogo che $\bar{y}=\sum_j \bar{\eta}_j u_j$ non sia un divisore, di 1ª specie, dello zero. In tale ipotesi dalle (1), postevi le $\bar{\eta}_j$ in luogo delle η_j, si traggono, *date comunque le* ξ_i, le ζ_k; e a due sistemi di valori diversi delle ξ_i corrispondono sistemi di valori diversi delle ζ_k: inoltre, inversamente, alle stesse (1), *date comunque le* ζ_k, si soddisfa con uno ed un sol sistema delle ξ_i. Compendiando quindi le (1) nell'equazione

(3) $$x\cdot\bar{y}=z,$$

diremo ancora che questa, quando sia $\Delta(\bar{y})\neq 0$, determina, dato comunque z, il quoziente della divisione anteriore di z per $\bar{y}$: ovvero diremo che *colla* (3) *si stabilisce una* ***corrispondenza biunivoca*** *tra i valori di* x *e quelli di* z, *variando* x *e* z *nel corpo di numeri complessi considerato.*

Coll'equazione

(4) $$\bar{x}\cdot y=z,$$

quando sia $\Delta'(\bar{x})\neq 0$, stabiliremo una *corrispondenza biunivoca* tra i valori di y e quelli di z, essendo ancora y e z variabili nel corpo di numeri complessi dato.

Ora all'ipotesi che i determinanti $\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ non siano identicamente nulli, aggiungiamo l'altra che *il prodotto goda della proprietà associativa.*

Se $\Delta(\bar{y})\neq 0$, posta l'equazione

(5) $$x\cdot\bar{y}=\bar{y},$$

ad essa si soddisfa con uno ed un sol valore r di x:

$$r\cdot\bar{y}=\bar{y}.$$

Quindi, moltiplicando a sinistra per un numero *qualunque* a, otteniamo

$$a\cdot(r\cdot\bar{y})=a\cdot\bar{y},$$

cioè

$$(a\cdot r)\cdot\bar{y}=a\cdot\bar{y}.$$

Ma $\Delta(\bar{y})\neq 0$, epperò deve essere

$$a\cdot r=a.$$

Dunque il numero r, col quale si soddisfa alla (5), dà

(6) $$a\cdot r=a$$

qualunque sia a; e perciò ci conviene di chiamarlo *modulo posteriore* della moltiplicazione.

Dunque un corpo associativo, se $\Delta(y)$ non è identicamente nullo, ammette un modulo posteriore della moltiplicazione; ammette cioè modulo posteriore in quanto vi è possibile la divisione anteriore. E si capisce che, se vi è possibile la divisione posteriore ($\Delta'(x)$ non identicamente nullo), ammet-

terà un *modulo anteriore* della moltiplicazione; cioè esisterà nel corpo un numero r', tale che sia

$$r' \cdot a = a, \tag{7}$$

qualunque sia a.

I numeri r ed r', se esistono insieme, sono eguali, perchè, a causa della (6), deve essere

$$r' \cdot r = r',$$

e a causa della (7)

$$r' \cdot r = r.$$

Infine è importante osservare che, *in un corpo associativo, le due specie di divisori dello zero si confondono in una sola*, perchè se $\Delta(\bar{y}) = 0$ sarà anche $\Delta'(\bar{y}) = 0$.

Infatti, essendo $\Delta(\bar{y}) = 0$, si hanno numeri x_1 non nulli, che dànno

$$x_1 \cdot \bar{y} = 0.$$

Se fosse $\Delta'(\bar{y}) \neq 0$, potremmo trovare un numero y_1, che desse

$$\bar{y} \cdot y_1 = r;$$

e da quest'eguaglianza, moltiplicando a sinistra per x_1, trarremmo

$$x_1 \cdot r = x_1 \cdot (\bar{y} \cdot y_1) = (x_1 \cdot \bar{y}) \cdot y_1 = 0,$$

cioè

$$x_1 = 0,$$

contro quello che si è detto di x_1.

§ 36. **I quaternioni.** — Si ha un sol corpo associativo e hankeliano a una unità — quello dei numeri reali —, e un sol corpo associativo e hankeliano a due unità — quello dei numeri complessi ordinari —. Questo abbiamo dimostrato nei §§ 11-15.

Ricerchiamo ora quali corpi associativi e hankeliani a più di due unità siano possibili.

Abbiansi le unità

$$1, \; u_1, \; u_2, \ldots, \; u_{n-1},$$

con

$$u_i^2 = -1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

I due numeri $u_r + u_s$, $u_r - u_s$ $(r \neq s)$, non reali, soddisferanno a certe equazioni di 2° grado a coefficienti reali; avremo per es.

$$(u_r + u_s - \beta)^2 + \gamma^2 = 0, \quad (u_r - u_s - \beta')^2 + \gamma'^2 = 0;$$

e di qui svolgendo troviamo

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} (u_r + u_s)^2 - 2\beta(u_r + u_s) + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \\ (u_r - u_s)^2 - 2\beta'(u_r - u_s) + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0. \end{cases}$$

Ma

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} (u_r + u_s)^2 &= -2 + u_r \cdot u_s + u_s \cdot u_r, \\ (u_r - u_s)^2 &= -2 - u_r \cdot u_s - u_s \cdot u_r; \end{aligned}$$

epperò dalle (1), sommando, giungiamo a quest'equazione:

$$2(\beta + \beta')u_r + 2(\beta - \beta')u_s = \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 - 4.$$

E siccome u_r ed u_s non possono soddisfare ad equazione lineare che non abbia coefficienti tutti nulli, risulta che

$$\beta = \beta' = 0, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 = 4,$$

cioè

$$0 < \gamma^2 < 4, \quad 0 < \gamma'^2 < 4.$$

Così la prima delle (1) e la prima delle (2) ci dànno che

$$u_r \cdot u_s + u_s \cdot u_r = 2 - \gamma^2;$$

e posto

$$u_r \cdot u_s + u_s \cdot u_r = \delta_{r,s} \qquad (r \neq s;\ r, s = 1, 2, \ldots, n-1),$$

sarà

$$\delta_{r,s}^2 < 4.$$

Dopo questo ricerchiamo se si possano prendere unità v_r tali che, essendo

$$\text{(3)} \qquad v_1 = u_1, \quad v_r = \alpha_r u_1 + \beta_r u_r \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1),$$

si abbia ancora

$$v_r^2 = -1$$

ed insieme

$$v_1 \cdot v_r + v_r \cdot v_1 = 0 \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Occorrerà innanzi tutto che il determinante degli elementi delle nuove unità rispetto alle antiche sia diverso da zero: e si vede subito che per questo dovranno le $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{n-1}$ esser tutte diverse da zero.

Avendosi poi

$$v_r^2 = (\alpha_r u_1 + \beta_r u_r)^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \delta_{1,r} \tag{4}$$

e

$$v_1 \cdot v_r + v_r \cdot v_1 = -2\alpha_r + \beta_r \delta_{1,r}, \tag{5}$$

vediamo che, quando sia $\delta_{1,r} = 0$, otteniamo l'intento prendendo

$$\alpha_r = 0, \quad \beta_r = \pm 1 \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Se invece $\delta_{1,r} \neq 0$, le (3), (4) e (5) dànno per la determinazione dei coefficienti α_r e β_r queste equazioni

$$\beta_r = \frac{2\alpha_r}{\delta_{1,r}}, \quad \alpha_r^2 \left(1 - \frac{4}{\delta_{1,r}^2}\right) = -1 \quad (r = 2, 3, \ldots, n-1),$$

alle quali potremo soddisfare con valori reali e non nulli delle α_r e quindi delle β_r, come abbiamo visto essere necessario.

Concludiamo che, in un corpo associativo e hankeliano a più di due unità, possono scegliersi unità v_r che diano

$$v_r^2 = -1, \quad v_1 \cdot v_r + v_r \cdot v_1 = 0 \quad (r = 2, 3, \ldots, n-1),$$

cioè

$$v_1 \cdot v_r = -v_r \cdot v_1 \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Di qui ricaviamo subito la conseguenza che *non si ha corpo associativo e hankeliano a tre unità.* Difatti colle unità

$$1, \quad v_1, \quad v_2,$$

posto che fosse

$$v_1 \cdot v_2 = \xi_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2,$$

seguirebbe che

$$\begin{aligned}(v_1 \cdot v_2) \cdot v_2 &= \xi_0 v_2 + \xi_1 v_1 \cdot v_2 - \xi_2 \\ &= \xi_0 v_2 + \xi_1(\xi_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) - \xi_2 \\ &= (\xi_0 \xi_1 - \xi_2) + \xi_1^2 v_1 + (\xi_0 + \xi_1 \xi_2) v_2,\end{aligned}$$

mentre è

$$(v_1 \cdot v_2) \cdot v_2 = v_1 \cdot (v_2 \cdot v_2) = -v_1.$$

Le ξ dovrebbero dunque essere coefficienti reali tali da dare, oltre che

$$\xi_0 \xi_1 - \xi_2 = \xi_0 + \xi_1 \xi_2 = 0,$$

anche

$$\xi_1^2 = -1;$$

e ciò è impossibile.

Supponiamo ora che sia $n > 3$ e prendiamo nuove unità $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ legate alle precedenti dalle relazioni

$$\begin{aligned}&i_1 = v_1, \quad i_2 = v_2, \\ &i_r = \alpha_r v_2 + \beta_r v_r \qquad (r = 3, 4, \ldots, n-1),\end{aligned}$$

essendo le α_r e β_r tali coefficienti da darci

$$\begin{cases} i_r^2 = -1 & (r = 1, 2, \ldots, n-1), \\ i_2 \cdot i_r + i_r \cdot i_2 = 0 & (r = 3, 4, \ldots, n-1): \end{cases}$$

che questi coefficienti possano determinarsi risulta da una discussione in tutto analoga a quella fatta or ora.

Per $r > 2$ risulterà

$$\begin{aligned}(i_1 \cdot i_2 \cdot i_r)^2 &= (i_1 \cdot i_2) \cdot (i_r \cdot i_1) \cdot (i_2 \cdot i_r) \\ &= (i_1 \cdot i_2) \cdot (i_1 \cdot i_r) \cdot (i_r \cdot i_2) \\ &= -(i_1 \cdot i_2 \cdot i_1) \cdot i_2 \\ &= -(i_1 \cdot i_2) \cdot (i_1 \cdot i_2) \\ &= i_2 \cdot (i_1 \cdot i_1) \cdot i_2 \\ &= -i_2^2 = 1.\end{aligned}$$

Dunque

$$(i_1 \cdot i_2 \cdot i_2)^2 - 1 = 0,$$

cioè

$$(i_1 \cdot i_2 \cdot i_r + 1)(i_1 \cdot i_2 \cdot i_r - 1) = 0;$$

e, trattandosi di un corpo hankeliano, sarà

$$i_1 \cdot i_2 \cdot i_r = \pm 1$$

ovvero

$$i_1 \cdot i_2 = \mp i_r.$$

Ora, se fosse $n > 4$, avremmo che

$$i_3 = \pm i_4 = \pm i_5 = \ldots,$$

cioè avremmo unità legate da relazioni lineari: ciò che non può essere. Ha dunque luogo il seguente

TEOREMA. *Non si hanno corpi di numeri complessi associativi e hankeliani a più di 4 unità.*

Per $n = 4$ infine abbiamo il sistema dalle unità

$$1, \quad i_1, \quad i_2, \quad i_3,$$

ovvero, coi segni che sono di uso comune, dalle unità

$$1,\ i,\ j,\ k,$$

dove

$$(6)\qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ i\cdot j = -\,j\cdot i = \varepsilon k, \\ j\cdot k = -\,k\cdot j = \varepsilon i, \\ k\cdot i = -\,i\cdot k = \varepsilon j, \end{cases}$$

con $\varepsilon = \pm 1$. Si può supporre che sia $\varepsilon = 1$; perchè, se avesse luogo il contrario, ci ridurremmo a questo caso prendendo come unità i numeri $-i$, $-j$, $-k$.

Il sistema che ha queste unità è appunto quello dei *quaternioni* del HAMILTON; ed è effettivamente un corpo associativo e hankeliano. Difatti:

1°) Il prodotto gode della proprietà associativa, tal proprietà valendo pei prodotti delle unità:

$$(i\cdot j)\cdot k = k^2 = -1, \quad i\cdot(j\cdot k) = i^2 = -1, \text{ etc.}$$

2°) Non si hanno divisori dello zero diversi da zero.

Considerato infatti il numero

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

e insieme con esso l'altro

$$A' = \alpha_0 - (\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k),$$

che si dice *coniugato* del primo, risulta

$$A\cdot A' = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Tal prodotto si dice *norma* del numero A e si dinota con NA.

Ora, se avessimo

$$A\cdot B = 0,$$

moltiplicando per il coniugato B' di B, avremmo

$$(A\cdot B)\cdot B' = A\cdot(B\cdot B') = A\cdot NB = 0;$$

dovrebbe dunque essere o

$$A = 0$$

ovvero

$$NB = 0$$

e quindi

$$B = 0.$$

Un prodotto dunque non è nullo, se non quando sia nullo uno dei fattori.

È così stabilito il

TEOREMA DI FROBENIUS: *Si hanno soltanto tre corpi associativi e hankeliani, quello dei numeri reali, quello dei numeri complessi ordinari e quello dei quaternioni.*

§ 37. **Un sistema di numeri complessi a n unità e il gruppo delle traslazioni in un S_n.** — Un sistema di numeri complessi ad n unità è una molteplicità ∞^n di enti: è dunque uno *spazio ad n dimensioni.* Ogni numero del sistema è un *punto* di questo spazio; due numeri eguali sono due *punti coincidenti.*

Per adottare i segni della Geometria, dinoteremo con S_n il sistema di numeri complessi, riguardato come spazio a n dimensioni; il numero x, pensato come punto di questo spazio, si dinoterà con P_x, e gli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di x si diranno le *coordinate* di P_x, e scriveremo

$$P_x \equiv (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n).$$

Essendo $x = y$, scriveremo

$$P_x \equiv P_y.$$

Il punto $O \equiv (0,\ 0, \ldots,\ 0)$ si dirà *origine delle coordinate.*

In S_n sono da definire gli enti fondamentali (rette, piani, ..., iperpiani), sono da stabilire i postulati di appartenenza, e, se si vuole, una metrica, cioè una legge per la misurazione delle distanze e degli angoli. Potremmo far questo adottando formole analoghe a quelle che valgono per lo spazio ordinario, dove sia stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Così, dati i punti

$$P_x \equiv (x_i), \quad P_y \equiv (y_i),$$

potremmo chiamare *distanza* dell'uno dall'altro la quantità

$$\delta = +\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2},$$

e, se i due punti sono distinti ($x \neq y$), chiamare *retta* congiungente P_x a P_y il luogo dei punti che hanno le coordinate

$$z_i(\lambda) = x_i + \lambda \frac{y_i - x_i}{\delta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove λ sia un parametro reale qualunque. La distanza dei punti P_x e P_y potrebbe dirsi *lunghezza del segmento di retta che li congiunge* e potrebbero dirsi *eguali* due segmenti di egual lunghezza.

I numeri $\frac{y_i - x_i}{\delta}$ o gli altri $\frac{z_i(\lambda') - z_i(\lambda)}{\delta(\lambda, \lambda')}$, ordinatamente eguali a quelli se $\lambda' > \lambda$ e se $\delta(\lambda, \lambda')$ dinota la distanza di $P_{z(\lambda)}$ da $P_{z(\lambda)}$, si potrebbero chiamare *coseni di direzione* della retta $P_x P_y$, quando le si attribuisca il verso nel quale essa è descritta dal punto $P_{z(\lambda)}$, al crescere di λ. Quindi potremmo chiamare *angolo* delle rette aventi i coseni di direzione α_i e β_i l'angolo θ positivo e non maggiore di π o nullo, determinato dalla formola

$$\cos\theta = \sum_i \alpha_i \beta_i .$$

E, continuando, potremmo chiamare *piano* determinato dei tre punti P_x, P_y e P_z, non appartenenti ad una stessa retta, il luogo dei punti che hanno le coordinate

$$t_i(\lambda, \mu) = x_i + \lambda \frac{y_i - x_i}{\delta} + \mu \frac{z_i - x_i}{\delta'}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo λ e μ due parametri reali qualunque e δ' la distanza di P_x da P_z, etc.

Così troveremmo che, considerata la funzione elementare

$$(1) \qquad \bar{z}(x) = x + \bar{y}$$

che abbiamo definito per il sistema di numeri complessi considerato (qui è x un numero complesso variabile, $\bar{y}$ un numero complesso determinato), se stabiliamo che in S_n si corrispondano i punti P_x e $P_{\bar{z}(x)}$, abbiamo in S_n una corrispondenza biunivoca di punto a punto, che è una *traslazione: i segmenti che congiungono punti corrispondenti sono eguali e di egual verso* (appartengono a rette che comprendono angoli nulli): è ben facile verificar questo.

Ma, visto che *il chiamar traslazione la trasformazione di S_n in sè stesso, che è definita dalla* (1), *concorda col riguardare S_n come uno spazio lineare a metrica euclidea* [1], conviene che noi compiamo per altra via la definizione degli enti fondamentali di S_n.

Dinotiamo con $t_{\bar{y}}$ la traslazione di S_n su sè stesso definita dalle (1) e diciamo che per essa P_x *è portato* in $P_{x+\bar{y}} \equiv P_{\bar{z}(x)}$.

Ad ogni numero $\bar{y}$ del sistema, cioè ad ogni punto $P_{\bar{y}}$ di S_n (o ad ogni vettore $\overrightarrow{OP}_{\bar{y}}$) corrisponde una traslazione; e dalle due traslazioni $t_{\bar{y}}$ e $t_{\bar{y}'}$, corrispondenti ai punti $P_{\bar{y}}$ e $P_{\bar{y}'}$, il punto qualunque P_x di S_n è portato in uno stesso punto o in punti diversi, secondochè siano coincidenti o distinti i punti $P_{\bar{y}}$ e $P_{\bar{y}'}$; infatti $P_{x+\bar{y}} \equiv P_{x+\bar{y}'}$ solo quando sia $P_{\bar{y}} \equiv P_{\bar{y}'}$, come non si ha $x + \bar{y} = x + \bar{y}'$, se non sia $\bar{y} = \bar{y}'$.

Abbiamo dunque un sistema ∞^n (sistema a n parametri) di traslazioni di S_n su sè stesso; e alle proprietà della funzione

$$z(x, y) = x + y$$

corrisponderanno altrettante proprietà di questo sistema di traslazioni.

Si ha innanzi tutto

$$(x + \bar{y}) + \bar{y}' = x + (\bar{y} + \bar{y}'),$$

e quindi

$$P_{(x+\bar{y})+\bar{y}'} \equiv P_{x+(\bar{y}+\bar{y}')};$$

e ciò vuol dire che, se in S_n si effettua prima la traslazione $t_{\bar{y}}$ e quindi quella $t_{\bar{y}'}$, la trasformazione risultante è la traslazione $t_{\bar{y}+\bar{y}'}$, corrispondente al punto $P_{\bar{y}+\bar{y}'}$.

Si dice che questa è il *prodotto* di $t_{\bar{y}}$ e $t_{\bar{y}'}$ e si scrive

$$t_{\bar{y}+\bar{y}'} = t_{\bar{y}} \cdot t_{\bar{y}'}.$$

Dunque, *in quanto alla somma di numeri complessi appar-*

[1] Cfr. quanto abbiamo osservato al principio del § 12.

tiene la proprietà associativa, le traslazioni di S_n su sè stesso costituiscono un gruppo g_n.

La traslazione corrispondente all'origine O delle coordinate lascia fisso ogni punto, perchè

$$x + 0 = x,$$

qualunque sia x: tal traslazione è dunque l'*identità*. E siccome

$$\bar{y} + \bar{y}' = \bar{y}' + \bar{y}$$

(*proprietà commutativa*), cioè

$$t_{\bar{y}} \cdot \bar{y}' = t_{\bar{y}'} \cdot t_{\bar{y}} \ (^1),$$

così vediamo che due traslazioni qualunque di S_n su sè stesso sono *permutabili*, cioè g_n è un gruppo di trasformazioni permutabili.

Consideriamo le *potenze* ad esponente intero e positivo della traslazione $t_{\bar{y}}$, cioè le traslazioni

$$(t_{\bar{y}})^1 = t_{\bar{y}}, \quad (t_{\bar{y}})^2 = t_{\bar{y}} \cdot t_{\bar{y}} = t_{2\bar{y}}, \quad (t_{\bar{y}})^3 = t_{2\bar{y}} \cdot t_{\bar{y}} = t_{3\bar{y}}, \ldots\ldots$$

Si comprende come dalla considerazione di queste traslazioni ci conduciamo a chiamare *potenza* corrispondente all'esponente reale λ, positivo nullo o negativo, di una traslazione $t_{\bar{y}}$ e a dinotare con $(t_{\bar{y}})^\lambda$ la traslazione $t_{\lambda\bar{y}}$, corrispondente al punto $P_{\lambda\bar{y}}$; e, siccome sappiamo che

$$\lambda\bar{y} + \mu\bar{y} = (\lambda + \mu)\bar{y},$$

essendo λ e μ due coefficienti reali qualunque, così vediamo che

$$t_{\lambda\bar{y}} \cdot t_{\mu\bar{y}} = t_{(\lambda+\mu)\bar{y}};$$

vediamo cioè che il prodotto di due potenze d'una stessa traslazione è ancora una potenza di questa: le potenze d'una traslazione costituiscono dunque esse pure un gruppo γ_1, cioè un *sottogruppo* ∞^1 di g_n (²).

(¹) Le due traslazioni $t_{\bar{y}} \cdot t_{\bar{y}'}$ e $t_{\bar{y}'} \cdot t_{\bar{y}}$ portano il punto qualunque P_x di S_n in uno stesso punto: le diciamo perciò *equivalenti* e questo esprimiamo col segno $=$.

(²) Si sottintende che $t_{\bar{y}}$ non è l'identità: se fosse tale, γ_1 si ridurrebbe all'identità stessa.

Il luogo dei punti $P_{x+\lambda\bar{y}}$, nei quali P_x è portato dalle traslazioni di questo sottogruppo γ_1, è una retta, ed ogni retta di S_n è un luogo siffatto: è facile persuadersene. Le rette di S_n son dunque le *trajettorie* corrispondenti ai sottogruppi ∞^1 di g_n.

Dati i numeri $\bar{y}$ e $\bar{y}'$, fra essi può intercedere rapporto reale oppur no: corrispondentemente le traslazioni $t_{\bar{y}}$ e $t_{\bar{y}'}$, apparterranno o non apparterranno ad uno stesso sottogruppo ∞^1 di g_n. In questo secondo caso le due traslazioni $t_{\bar{y}}$ e $t_{\bar{y}'}$, si diranno, al pari dei numeri $\bar{y}$ ed $\bar{y}'$, *indipendenti;* e le traslazioni $t_{\lambda\bar{y}+\mu\bar{y}'}$ (cioè le traslazioni $(t_{\bar{y}})^\lambda \cdot (t_{\bar{y}'})^\mu$), dove λ e μ siano parametri reali qualunque, costituiranno un sottogruppo ∞^2 di g_n: il luogo dei punti $P_{x+\lambda\bar{y}+\mu\bar{y}'}$, dove il punto qualunque P_x è portato dalle traslazioni di questo nuovo sottogruppo è un *piano* di S_n.

E si comprende come abbiamo a continuare. Dati i numeri $\bar{y}$, $\bar{y}'$,...., $\bar{y}^{(\rho-1)}$ indipendenti, le traslazioni $t_{\lambda\bar{y}+\mu\bar{y}+\ldots+\tau\bar{y}^{(p-1)}}$ costituiscono un sottogruppo ∞^p di g_n; e il luogo dei punti nei quali P_x è trasportato dalle traslazioni di tal sottogruppo è un S_p subordinato di S_n.

Sono definiti in questa guisa gli enti fondamentali propri di S_n: non ci intratteniamo sulle considerazioni colle quali si introducono gli impropri. Aggiungiamo soltanto questa importante osservazione.

Se fra i numeri x e x' intercede rapporto reale eguale a ρ, cioè se

$$x' = \rho x,$$

allora $P_{x'}$ appartiene al luogo dei punti $P_{\lambda x}$, dove λ sia un coefficiente reale variabile; e questo luogo è la retta passante per l'origine delle coordinate e per il punto P_x. L'inversa è pur vera; epperò possiamo dire che *i punti P_x e $P_{x'}$ sono allineati coll'origine oppur no, secondo che fra i numeri x ed x' interceda o non interceda rapporto reale.* Perciò le $x_1\ x_2,\ldots,\ x_n$, coordinate *non omogenee* di punto in S_n, *sono coordinate omogenee nella stella* Σ_{n-1} delle rette di S_n che passano per O. E difatti ad ogni sistema di valori finiti non tutti nulli di $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ corrisponde un punto di S_n diverso da O e quindi una retta di Σ_{n-1}; e le rette di Σ_{n-1} corrispondenti ai due sistemi di valori $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ e $x_1',\ x_2',\ldots,\ x_n'$ sono

coincidenti o distinte secondochè sia

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'} = \ldots = \frac{x_n}{x_n'}$$

oppur no.

§ 38. **Corpi di numeri complessi e gruppi di omografie.** — Definire il prodotto di due numeri complessi x e y è costruire una seconda funzione elementare

$$Z(x, y) = x \cdot y.$$

Supponiamo che una definizione di prodotto sia data; supponiamo cioè che sia data in un certo modo questa funzione $Z(x, y)$. Fatto $y = \bar{y}$, la funzione

$$\bar{Z}(x) = x \cdot \bar{y},$$

quando si convenga che in S_n si corrispondano i punti P_x e $P_{\bar{Z}(x)}$, definirà una nuova trasformazione $\Omega_{\bar{y}}$ di S_n in sè stesso; e si avrà una siffatta trasformazione per ogni numero $\bar{y}$, numero che diremo *operatore* della trasformazione.

Pertanto, ora che in S_n sono definiti gli enti fondamentali, è da ricercare quali caratteri di questo nuovo sistema $\Sigma(\Omega)$ di trasformazioni corrispondano alle diverse proprietà, che supporremo abbia il prodotto.

Supponiamo innanzi tutto che per questo sussista *la proprietà distributiva a destra.* Sia cioè

$$(1) \qquad \begin{cases} (x + x') \cdot \bar{y} = x \cdot \bar{y} + x' \cdot \bar{y}, \\ (\lambda x) \cdot \bar{y} = \lambda (x \cdot \bar{y}). \end{cases}$$

La seconda di queste formole, postovi $\lambda = 0$, esprime già che qualunque sia $\bar{y}$, la trasformazione $\Omega_{\bar{y}}$ lascierà fissa l'origine delle coordinate; esprime ancora che per tale trasformazione ogni punto di S_n che sia a distanza infinita rimane a distanza infinita.

Dalle (1) si trae poi che

$$(x + \lambda x' + \mu x'' + \ldots) \cdot \bar{y} = x \cdot \bar{y} + \lambda (x' \cdot \bar{y}) + \mu (x'' \cdot \bar{y}) + \ldots;$$

e questa formola significa che ai punti $P_{x+\lambda x'+\mu x''+\ldots}$, che sono quelli d'uno spazio lineare subordinato di S_n, corrispondono per la trasformazione $\Omega_{\bar{y}}$ i punti $P_{x\cdot\bar{y}+\lambda(x\cdot\bar{y})+\mu(x''\cdot\bar{y})+\ldots}$, che sono quelli d'un altro spazio lineare. Dunque la trasformazione $\Omega_{\bar{y}}$ fa corrispondere ad ogni spazio lineare uno spazio lineare, epperò $\Omega_{\bar{y}}$ è una *omografia.*

In secondo luogo supponiamo che il prodotto goda della *proprietà distributiva a sinistra,* cioè che si abbia

$$(2) \qquad \begin{cases} x \cdot (\bar{y} + \bar{y}') = x \cdot \bar{y} + x \cdot \bar{y}', \\ x \cdot (\lambda \bar{y}) = \lambda (x \cdot \bar{y}). \end{cases}$$

La seconda di queste formole, fatto $\lambda = 0$, esprime che l'omografia Ω_0, di operatore 0, è degenere, perchè ad ogni punto proprio di S_n fa corrispondere l'origine delle coordinate.

Dalle (2) trarremo poi la formola

$$x \cdot (\lambda \bar{y} + \mu \bar{y}' + \ldots) = \lambda (x \cdot \bar{y}) + \mu (x \cdot \bar{y}') + \ldots;$$

e questa esprime che l'omografia Ω_Y, che corrisponde all'operatore $Y = \lambda \bar{y} + \mu \bar{y}' + \ldots$, appartiene al sistema lineare determinato dalle omografie $\Omega_{\bar{y}}$, $\Omega_{\bar{y}'}, \ldots$, corrispondenti agli operatori $\bar{y}$, $\bar{y}', \ldots$. E, siccome sappiamo che, presi n numeri indipendenti $\bar{y}$, $\bar{y}', \ldots, \bar{y}^{(n-1)}$, *ogni altro* numero y del sistema è somma di determinati multipli $\lambda\bar{y}$, $\mu\bar{y}', \ldots, \tau\bar{y}^{(n-1)}$ di quelli, così vediamo che *il sistema di omografie* $\Sigma(\Omega)$ *è un sistema lineare.*

Alla *proprietà associativa*

$$(x \cdot \bar{y}) \cdot \bar{y}' = x \cdot (\bar{y} \cdot \bar{y}')$$

corrisponderà lo stesso carattere del sistema $\Sigma(\Omega)$ di omografie, che abbiam visto corrispondere, per il sistema delle traslazioni di S_n su sè stesso, alla proprietà associativa della somma: *le omografie del sistema lineare* $\Sigma(\Omega)$ *formeranno un gruppo* G.

Aggiungiamo ora — avremmo potuto dirlo anche per il gruppo delle traslazioni — che, siccome *l'operatore* $\bar{y} \cdot \bar{y}'$ *dell'omografia risultante dal prodotto di* $\Omega_{\bar{y}}$ *e* $\Omega_{\bar{y}'}$, *è quella stessa funzione* (prodotto) *dell'operatore* $\bar{y}$ *che* $\bar{Z}(x)$ *è di* x, così il gruppo G è *gruppo parametrico di sè stesso.*

Dunque, *se in un sistema di numeri complessi si definisce il prodotto così che esso goda delle proprietà distributiva e associativa, si ha corrispondentemente in* S_n *un* ***sistema lineare***

di omografie formanti gruppo, di tutte le omografie del sistema lasciando fissi l'origine e l'iperpiano all'infinito e fra esse essendo degenere quella che corrisponde all'operatore zero.

Veniamo ora a trattare dell'*esclusione dei divisori dello zero* diversi da zero.

Abbiamo già osservato che, se $\bar{y}$ non è divisore dello zero (di 1ª specie), colla formola

$$x \cdot \bar{y} = z$$

si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i valori di x e quelli di z. Dunque *se y non è divisore dello zero (di 1ª specie), l'omografia $\Omega_{\bar{y}}$ non è degenere.*

Similmente se $\bar{x}$ non è divisore dello zero (di 2ª specie), la formola

$$\bar{x} \cdot y = z$$

stabilisce corrispondenza biunivoca fra i valori di y e quelli di z; e ciò ora vuol dire che nel sistema $\Sigma(\Omega)$ si ha una ed una sola omografia che porta il punto $P_{\bar{x}}$ in un altro punto comunque assegnato P_z: o, altrimenti, *se $\bar{x}$ non è divisore dello zero (di 2ª specie), il sistema di omografie $\Sigma(\Omega)$ agisce transitivamente sul punto $P_{\bar{x}}$.*

Dunque, *definito il prodotto così che, valendo le proprietà distributiva ed associativa, numeri generici del sistema non siano divisori dello zero* ($\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ non identicamente nulli), *il gruppo G consta di omografie generalmente non degeneri, ed è, per per la generalità dei punti di S_n, semplicemente transitivo;* è dunque un gruppo G_n, a n parametri (che son gli elementi dell'operatore y) tutti essenziali. Sono degeneri le omografie che hanno per operatori i divisori dello zero e sono punti eccezionali per la transitività del gruppo i punti immagini di divisori dello zero.

Sappiamo che, se numeri generici del sistema non sono divisori dello zero, si ha un modulo r. *L'omografia Ω_r è l'identità*, la quale dunque fa parte del gruppo G, quando questo consti di omografie generalmente non degeneri, o, ciò che fa lo stesso (1), sia semplicemente transitivo per punti generici di S_n.

(1) Valendo la proprietà associativa, $\Delta(y)$ e $\Delta'(x)$ sono insieme identicamente nulli, oppur no.

E, se λr è un multiplo qualunque del modulo, *l'omografia $\Omega_{\lambda r}$ è una omotetia di centro O,* come è ben semplice verificare. Viceversa, se una omografia $\Omega_{\bar{y}}$ di G_n è una omotetia (cioè se fra x ed $x \cdot \bar{y}$ intercede rapporto reale, qualunque sia x), allora $\bar{y}$ è un multiplo del modulo. Così vediamo che *di G_n fanno parte ∞^1 omotetie di centro O, le quali,* siccome è evidentemente

$$(x \cdot \lambda r) \cdot \lambda' r = x \cdot (\lambda \lambda' r),$$

costituiscono in G_n un sottogruppo g_1.

Tutte le considerazioni fatte fin qui in questo paragrafo si potrebbero ripetere, prendendo nella formola

$$Z(x, y) = x \cdot y$$

il numero x come operatore (moltiplicatore a sinistra).

La funzione

$$\bar{Z}'(y) = \bar{x} \cdot y$$

definirà nello spazio S_n, pensato come luogo del punto P_y, una trasformazione $\Omega'_{\bar{x}}$; e, valendo per il prodotto le solite proprietà, avremo un altro sistema lineare di omografie di S_n in sè stesso, formanti un gruppo G_n' semplicemente transitivo etc. Questo gruppo G_n' è costituito dalle omografie, che sono permutabili con ciascuna delle omografie di G_n, perchè si ha

$$\bar{x} \cdot (y \cdot \bar{y}) = (\bar{x} \cdot y) \cdot \bar{y};$$

e comune a G_n e G_n' è il sottogruppo g_1, perchè

$$y \cdot \lambda r = \lambda r \cdot y$$

(perchè, dunque, in un corpo associativo il modulo anteriore è anche modulo posteriore).

Il gruppo G_n' si chiama, in teoria dei gruppi, il *gruppo reciproco* di G_n: i due gruppi G_n e G_n' sono due gruppi parametrici reciproci.

Abbiamo visto così come alla considerazione d'un sistema di numeri complessi a moltiplicazione distributiva ed associativa, e dove sia generalmente possibile divisione anteriore e posteriore, si accompagni quella d'una coppia di gruppi reciproci di omografie etc. Aggiungiamo, che è stato

il POINCARÉ il primo a collegare alla teoria dei gruppi continui le ricerche intorno ai corpi di numeri complessi [1], e che lo STUDY ha poi invertito i risultati precedenti, dimostrando che ad ogni coppia di gruppi lineari ed omogenei in n variabili, semplicemente transitivi e reciproci un dell'altro, corrisponde un corpo di numeri complessi a moltiplicazione distributiva ed associativa etc. [2]. Noi non ci inoltreremo in queste ricerche: porgeremo invece in veste geometrica le dimostrazioni dei paragrafi precedenti.

§ 39. **Dimostrazione geometrica dei teoremi fondamentali per i corpi di numeri complessi a più unità.** — Abbiasi un corpo di numeri complessi ad n unità, dove *non esistano divisori dello zero* all'infuori dello zero. Se P_x e $P_{x'}$ sono due punti qualunque di S_n a distanza finita, *e se* P_x *è distinto dall'origine* O $(x \neq 0)$, si avrà una omografia $\Omega_{\bar{y}}$, che porta P_x in $P_{x'}$ e *se ne avrà una sola:* perchè se fosse

$$x \cdot \bar{y} = x', \quad x \cdot \bar{y}' = x'$$

avremmo

$$x \cdot (\bar{y} - \bar{y}') = 0$$

e dovrebbe essere

$$\bar{y} = \bar{y}'.$$

In particolare *la sola identità lascierà fisso* P_x. Dunque, se non si hanno divisori dello zero all'infuori dello zero, *in ogni omografia di* G_n, *che non sia l'identità, non si hanno punti uniti reali a distanza finita, all'infuori dell'origine delle coordinate.*

Ci risparmieremo ora questo dover considerare in modo speciale l'origine e l'iperpiano all'infinito, osservando che dalle omografie di G_n la stella Σ_{n-1} delle rette di S_n passanti per O è trasformata in sè stessa; e queste omografie di Σ_{n-1} in sè stessa costituiscono un gruppo Γ_{n-1}, alla considerazione del quale perverremmo anche, se, riprendendo da capo la strada

[1] V. POINCARÉ, *Sur les nombres complexes* (Comptes-rendus de l'Académie, T. 99, 2me sémestre, 1884).

[2] V. STUDY, *Complexe Zahlen und Transformationsgruppen* (Leipz. Berichte, 1889, p. 177-228). V. anche LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. I, §§ 144-148; Bd. III, §§ 20-28, 140, 143.

percorsa nel precedente paragrafo, trattassimo le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, non omogenee di punto in S_n, come coordinate omogenee in Σ_{n-1}. Così ai due operatori $\bar{y}$ e $\lambda\bar{y}$ (λ reale qualunque) viene a corrispondere una stessa omografia $\omega_{\bar{y}}$ di Σ_{n-1} in sè stesso; Γ_{n-1} è perciò meriedricamente isomorfo con G_n, all'identità di Γ_{n-1} corrispondendo in G_n il sottogruppo g_1.

Γ_{n-1} ha in ogni caso le proprietà stesse di G_n: e cioè composto di omografie generalmente non degeneri ed è semplicemente transitivo per la generalità degli elementi sui quali opera, se queste proprietà appartengono a G_n. *Quando poi,* come ora supponiamo, *non si hanno divisori dello zero diversi da zero, la transività di* Γ_{n-1} *è perfetta:* scelti cioè comunque due elementi di Σ_{n-1}, due *punti*, diremo ora, di questo spazio Σ_{n-1}, c'è *una ed una sola* omografia di Γ_{n-1} che porta l'uno nell'altro, e quindi *ogni omografia di* Γ_{n-1}, *che non sia l'identità, non ha alcun punto unito* (*reale*).

Da questo si trae immediatamente, innanzi tutto, che non possono aversi corpi di numeri complessi associativi e hankeliani pei valori dispari di n (eccettuato, naturalmente, il caso $n = 1$). Difatti ogni omografia di Γ_{n-1}, per non avere alcun punto unito reale, dovrà avere spazi fondamentali tutti immaginari e a due a due coniugati; e ciò può accadere solo quando n sia pari.

Per istabilire poi che non si hanno corpi associativi e hankeliani altro che per $n = 2$ e $n = 4$, cominciamo a notare che, se $\omega_{\bar{y}}$ ed $\omega_{\bar{y}'}$ sono due omografie qualunque di Γ_{n-1}, e portano un punto qualunque A di Σ_{n-1} nei punti B e C, tutte le omografie del fascio determinato di quelle due, fascio che dinoteremo con $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$ appartengono a Γ_{n-1} e portano A nei punti della retta BC: questa si dirà la *trajettoria* di A per le omografie di $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$. Essa passerà per A solo quando del fascio faccia parte l'identità.

Consideriamo poi in Σ_{n-1} una retta r, luogo dei punti A, A_1, A_2, ...: essa sarà portata da $\omega_{\bar{y}}$ in una retta s, luogo di B, B_1, B_2, ..., e da $\omega_{\bar{y}'}$ in una retta t, luogo di C, C_1, C_2, ...
Si ha

$$AA_1A_2 \ldots \pi \quad BB_1B_2 \ldots \pi \quad CC_1C_2 \ldots :$$

le trajettorie BC, B_1C_1, B_2C_2, ... dei punti di r punteggiano projettivamente le rette s e t.

Ora accadrà in generale [1] che s e t siano sghembe, e quindi appartengano a un certo Σ_3 subordinato di Σ_{n-1}. In tale ipotesi, le trajettorie, che le omografie di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$ fanno descrivere ai punti di r, sono le rette d'una serie rigata R di Σ_3: le rette dell'altra serie rigata R', che con R sta su di una superficie di 2° ordine, sono le successive posizioni assunte da r per le omografie di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$.

Potrà darsi in secondo luogo che s e t stiano in un piano. In tal caso s e t non saranno prospettive: difatti il punto M, che hanno a comune, sarebbe unito solo se ω_y^- ed $\omega_{y'}^-$ portassero in M uno stesso punto di r; ma ciò non accade, perchè Γ_{n-1} è perfettamente transitivo. Dunque, in questa seconda ipotesi, le trajettorie dei punti di r costituiscono un inviluppo di 2ª classe *non degenere:* ogni retta di tale inviluppo è ad un tempo la trajettoria d'un certo punto di r ed è la posizione che r assume per una certa omografia di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$.

Potrà darsi infine che s e t coincidano, cioè che le due punteggiate $BB_1B_2\ldots$, $CC_1C_2\ldots$ projettive abbiano uno stesso sostegno s: le due punteggiate non avranno elementi uniti reali. In tal caso su s si sovrappongono tutte le trajettorie dei punti di r e quindi tutte le diverse posizioni che r assume per le omografie di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$. Se di questo fascio fa parte l'identità, allora s coincide con r, cioè r è unita per ogni omografia di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$.

L'omografia ω_y^- sia diversa dall'identità. Essa non ha punti uniti reali; ma ne avrà di immaginari, a due a due coniugati. Una retta r, che congiunga due di siffatti punti, immaginari e coniugati, è una retta reale unita per l'omografia ω_y^-.

Consideriamo ora il fascio $[1, \omega_y^-]$, determinato dall'identità e da ω_y^-: la retta r è unita per tutte le omografie di questo fascio, perchè è unita per due fra esse, l'identità e ω_y^-. r è dunque trajettoria di ciascun suo punto per le omografie di $[1, \omega_y^-]$; fissato cioè su r un punto qualunque A, le omografie di $[1, \omega_y^-]$ fanno descrivere ad A tutta r, e, sempre per la perfetta transività di Γ_{n-1}, se una omografia di Γ_{n-1} porta A in un altro punto di r, tale omografia fa parte di $[1, \omega_y^-]$.

Ora appunto, siccome ω_y^- porta A in un certo punto B di r, e questo da ω_y^- stessa è portato in un altro punto B', ancora di r, così vediamo che il quadrato $(\omega_y^-)^2$ di ω_y^- porta A in B', cioè A in un altro punto di r; epperò $(\omega_y^-)^2$ *appartiene a* $[1, \omega_y^-]$, cioè $[1, \omega_y^-]$ *è un gruppo.*

Notiamo subito che $(\omega_y^-)^2$ è diversa da ω_y^-, perchè B' non è B, e che nel gruppo $[1, \omega_y^-]$ si ha una omografia, non identica, involutoria. Difatti l'omografia generica ω_y di tal gruppo porta A nel punto generico M di r, e questo punto M è da un'altra omografia $(\omega_y)^{-1}$ di $[1, \omega_y^-]$ riportato in A. Stabilendo che si corrispondano le due omografie ω_y ed $(\omega_y)^{-1}$, stabiliamo nel fascio $[1, \omega_y^-]$ una projettività discorde e perciò iperbolica: gli elementi uniti di questa saranno l'identità ed un'altra omografia, che porterà A in un certo punto M_0 e questo M_0 in A, una omografia dunque della quale il quadrato è l'identità. Supporremo che tale omografia sia precisamente la ω_y^-, cioè che M_0 sia B.

Se $n = 2$, il fascio $[1, \omega_y^-]$ è il gruppo Γ_{n-1} stesso. E non importerà che qui insistiamo a dimostrare la effettiva esistenza di un tal gruppo: esso è *il gruppo delle rotazioni d'un fascio di rette in sè stesso.*

Se poi $n > 2$, allora dalle omografie di $[1, \omega_y^-]$ i punti di Σ_{n-1} vengono a essere distribuiti in un sistema di ∞^{n-2} rette, tutte unite per ogni omografia del fascio: per ogni punto di Σ_{n-1} passa una retta siffatta, che è trajettoria di quel punto e di ogni altro che le appartenga per le omografie di $[1, \omega_y^-]$.

Sia quindi $\omega_{y'}^-$ una omografia di Γ_{n-1} estranea ad $[1, \omega_y^-]$. Avremo un nuovo fascio $[1, \omega_{y'}^-]$ avente le stesse proprietà del precedente; e supporremo che in tal fascio sia precisamente $\omega_{y'}^-$ l'omografia involutoria, che sappiamo appartenergli.

Ed ora consideriamo il fascio $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$. ω_y^- porta A in B, $\omega_{y'}^-$ porta A in C, esterno ad AB; quindi la retta BC è la trajettoria di A per le omografie di $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$. Come si muove per le omografie di questo stesso fascio la retta BC?

ω_y^-, portando B in A e C in un altro punto C_1, porta BC in AC_1; $\omega_{y'}^-$, portando C in A e B in un altro punto B_1, porta BC in AB_1: *due* omografie del fascio $[\omega_y^-, \omega_{y'}^-]$ portano BC

[1] Cfr. la nota di F. ENRIQUES su *Alcune proprietà dei fasci di omografie* (Atti Acc. dei Lincei, 4 (Rendiconti), VI, 2, 1890, p. 63-70).

in rette passanti per A, epperò le omografie del fascio stesso fanno descrivere a BC un inviluppo di 2ª classe (non degenere), ovvero portano tutte BC in una stessa retta.

È questo secondo caso che ha luogo. Difatti è da escludere subito che AC_1 e AB_1 giacciano nel piano ABC: se vi giacesse, per esempio, la AC_1, cioè vi giacesse il punto C_1, l'omografia $\omega_{\bar{y}}$, che porta A, B e C in B, A e C_1 rispettivamente, lascerebbe fisso il piano ABC, trasformerebbe questo piano in sè stesso. Ma in ogni omografia di un piano in sè stesso si ha almeno un punto unito reale; e che ciò accada è escluso dall'ipotesi che Γ_{n-1} sia perfettamente transitivo.

Considerata ora un'altra omografia del fascio $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$, per esempio quella, $\omega_{\bar{y}}$ che porta A in un certo punto H di BC, siccome AH sarà la trajettoria di ciascun dei suoi punti e di H in particolare per le omografie del fascio $[1, \omega_{\bar{y}}]$, così $\omega_{\bar{y}}$ porterà la retta BC in un'altra B_2C_2, appoggiantesi ad AH; ma questa B_2C_2 deve pure appoggiarsi ad AC_1 e a AB_1, epperò passerà anch'essa per A.

Dunque tutte le omografie di $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$ portano la retta BC in rette passanti per A e quindi *in una stessa retta* AD, cui appartengono C_1 e B_1. E dunque *le due omografie* $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}$ *ed* $\omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}$, *prodotte dalla composizione di* $\omega_{\bar{y}}$ *ed* $\omega_{\bar{y}'}$, *portano* A *in punti* C_1 *e* B_1 *allineati con* A: il che significa che *ciascuna d'esse appartiene al fascio determinato dall'identità e dall'altra*: i fasci

$$[1, \omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}], \quad [1, \omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}]$$

sono un medesimo fascio.

Abbiamo visto che C_1 e B_1 non giacciono in ABC; quindi AD *non giace nel piano* ABC, cioè $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}$ ed $\omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}$ *non appartengono alla rete* $[1, \omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$. E con ciò ritroviamo che non può essere $n = 3$.

Lo spazio Σ_3, determinato dalle rette AB, AC, AD, è il luogo dei punti nei quali A è portato dalle omografie del sistema lineare ∞^3 $[1, \omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}, \omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}]$. $\omega_{\bar{y}}$ porta A, B, C e C_1 in B, A, C_1 e C rispettivamente; $\omega_{\bar{y}'}$ porta A, B, C e B_1 in C, B_1, A e B rispettivamente; perciò così $\omega_{\bar{y}}$ come $\omega_{\bar{y}'}$ e come i loro prodotti $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}$ e $\omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}$ trasformano un tetraedro di Σ_3 in sè stesso e quindi lasciano, non solo il punto A, ma ogni punto di Σ_3 in Σ_3; e se

H e K sono due punti qualunque di Σ_3, si ha in $[1, \omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}, \omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}]$ una ed una sola omografia che porta H in K.

Se $n = 4$, allora $[1, \omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}, \omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}]$ è Γ_{n-1}; e neppur qui insisteremo a dimostrare la effettiva esistenza d'un gruppo siffatto: esso è il gruppo delle omografie biassiali di un Σ_3, che hanno come assi le generatrici d'un sistema d'una quadrica immaginaria, cioè è *il gruppo degli scorrimenti d'uno spazio ellittico su sè stesso.*

Rimane da stabilirsi che non può essere $n > 4$; e per questo occorre che torniamo alla considerazione del gruppo G_n di omografie di S_n in sè stesso. Sorvoleremo ormai sui particolari.

L'omografia $\omega_{\bar{y}}$ di Γ_{n-1} lascia fisse ∞^{n-2} rette di Σ_{n-1} ed è involutoria. Una qualunque delle corrispondenti omografie $\Omega_{\mu\bar{y}}$ di G_n lascia fissi in S_n ∞^{n-2} piani passanti per l'origine O, ma non è involutoria: il suo quadrato è una omotetia inversa di centro O. Difatti, se P_x è un punto di S_n, a distanza finita e diverso da O, le omotetie $\Omega_{\lambda r}$ fanno descrivere a P_x la retta $a \equiv OP_x$ e ogni omografia $\Omega_{\mu\bar{y}}$ porta questa retta a in un'altra $b \equiv OP_x.\bar{y}$: il piano ab è unito per tutte le omografie della rete $[\Omega_{\lambda r}, \Omega_{\mu\bar{y}}]$. Fra le omografie $\Omega_{\mu\bar{y}}$ ve n'è una, sia precisamente $\Omega_{\bar{y}}$, che per la retta a (e quindi per ogni retta del fascio ab) è non altro che una *rotazione* attorno ad O (non composta cioè con una omotetia). L'omografia $\Omega_{r+\bar{y}}$ porta la retta a in un'altra a', della quale ogni punto sarebbe lasciato fisso così dall'identità come da $\Omega_{\bar{y}}$, se il quadrato di $\Omega_{\bar{y}}$ fosse l'identità. Per la semplice transitività di G_n dunque il quadrato $\Omega_{\bar{y}}$ è un'omotetia inversa (e precisamente una simmetria rispetto a O).

Le due omografie $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}$ ed $\omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}$ di Γ_{n-1}, appartenenti coll'identità ad uno stesso fascio, possono anche essere una stessa omografia di Σ_{n-1} in sè. Difatti, quando l'omografia ω_y, che porta A nel punto H di BC, descrive il fascio $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$, il punto B', dove B è portato da $\omega_{\bar{y}'}$, ed il punto H', dove H è portato da $\omega_{\bar{y}}$, descrivono sulla retta AD due punteggiate projettive; in questa projettività, discorde e quindi iperbolica, si hanno i punti uniti A e un altro, sia D. Esser D unito significa che c'è nel fascio $[\omega_{\bar{y}}, \omega_{\bar{y}'}]$ un'omografia ω_y, portante A in tal punto H di BC, che da $\omega_{\bar{y}}$ è poi portato in quello stesso punto di AD, dove B è portato da ω_y. Possiamo supporre che questa omografia ω_y sia precisamente la $\omega_{\bar{y}'}$, cioè che

coincidano in D i punti B_1 e C_1, e quindi che siano una stessa omografia le due $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'}$ ed $\omega_{\bar{y}'} \cdot \omega_{\bar{y}}$.

Ma non saranno una stessa omografia di S_n in sè due qualunque delle corrispondenti omografie $\Omega_{\lambda\bar{y}} \cdot \Omega_{\mu\bar{y}'}$ ed $\Omega_{\mu\bar{y}'} \cdot \Omega_{\lambda\bar{y}}$ di G_n: una è prodotto dell'altra per una omotetia inversa di centro O. Se ciò non fosse, portando $\Omega_{\bar{y}}$ ed $\Omega_{\bar{y}'}$ la retta a nelle rette b e c rispettivamente, e quindi portando l'omografia $\Omega_{\bar{y}+\bar{y}'}$ la stessa retta a in una retta a'' del fascio bc, ogni punto di questa a'' sarebbe poi portato in uno stesso punto così da $\Omega_{\bar{y}}$ come da $\Omega_{\bar{y}'}$.

Ora se in Γ_{n-1} si hanno, insieme coll'identità, le omografie indipendenti $\omega_{\bar{y}}$, $\omega_{\bar{y}'}$, $\omega_{\bar{y}''}$, $\omega_{\bar{y}'''}$,...., si può intendere che queste siano tutte involutorie e così scelte, che la prima e la seconda siano permutabili fra loro e con ciascuna delle successive; così il quadrato dell'omografia $\omega_{\bar{y}} \cdot \omega_{\bar{y}'} \cdot \omega^*$, dove ω^* è una qualunque di queste omografie che seguono le prime due, sarà per Σ_{n-1} l'identità. E sarà anche l'identità in S_n il quadrato dell'omografia $\Omega_{\bar{y}} \cdot \Omega_{\bar{y}'} \cdot \Omega^*$ (si comprende quale sia il significato dei simboli), perchè tal quadrato equivarrà al prodotto d'un numero pari di simmetrie rispetto ad O. Ma — sì trae subito da quello che abbiam detto poco fa per $\Omega_{\bar{y}}$ —, se il quadrato d'una omografia di G_n è l'identità, l'omografia stessa deve essere, per la transitività di G_n, o l'identità o una simmetria rispetto ad O. Dunque $\Omega_{\bar{y}} \cdot \Omega_{\bar{y}'} \cdot \Omega^*$ è l'identità o una tal simmetria, epperò Ω^* è o la $\Omega_{\bar{y}} \cdot \Omega_{\bar{y}'}$ ovvero la $\Omega_{\bar{y}'} \cdot \Omega_{\bar{y}}$; e non si hanno in G_n più di *quattro* omografie indipendenti (per es. Ω_r, $\Omega_{\bar{y}}$, $\Omega_{\bar{y}'}$ e $\Omega_{\bar{y}} \cdot \Omega_{\bar{y}'}$).

E qui terminiamo. All'interpretazione geometrica data in questo paragrafo sarebbe da accompagnare la comune teoria geometrica dei quaternioni. Rimandiamo per questa ai trattati speciali [1], limitandoci a dire che il quaternione è precisamente il *rapporto* di vettore a vettore nello spazio ordinario, è cioè l'operatore della costruzione, mediante la quale, nello spazio ordinario, da un vettore dato se ne ottiene un altro. E già dicemmo (§ 8) che per definire una tal costruzione occorrevano appunto quattro parametri.

---

[1] V. anche F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* I, pag. 147-175, e F. KLEIN und A. SOMMERFELD, *Theorie des Kreisels* I (Lipsia, Teubner, 1897), pag. 15-68.

INDICE

INDICE

PREFAZIONE . . . . . Pag. V

F. ENRIQUES. - Sull'importanza filosofica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria.

§ 1. Le basi empiriche della Geometria. . . . . Pag. 1
§ 2. Esperienza e intuizione . . . . . » 3
§ 3. La critica dei principii della Geometria dal punto di vista logico . . . . . » 4
§ 4. La critica dei principii della Geometria dal punto di vista dell'intuizione . . . . . » 8
§ 5. I principali indirizzi nelle ricerche relative ai principii della Geometria . . . . . » 11
§ 6. Il problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali . » 13
§ 7. Il problema filosofico della Geometria . . . . . » 15

F. ENRIQUES. - Sull'insegnamento della Geometria razionale.

§ 1. Sugli ordinamenti scolastici . . . . . Pag. 19
§ 2. Sui diversi sistemi d'insegnamento della Geometria . . . » 20
§ 3. Il metodo sperimentale . . . . . » 22
§ 4. Il metodo razionale deduttivo dell'Euclide . . . . . » 23
§ 5. Considerazioni generali intorno all'ufficio della deduzione e dell'induzione nella scienza . . . . . » 25
§ 6. Metodo razionale induttivo. . . . . » 26
§ 7. Mezzi di cui dispone l'insegnante . . . . . » 29
§ 8. Intorno al rigore e a certe esagerazioni critiche . . . . » 30
§ 8. Estensione dell'insegnamento nel senso filosofico . . . . » 33

U. AMALDI. - Sui concetti di retta e di piano.

Le definizioni di retta . . . . . Pag. 38
Le definizioni di piano . . . . . » 43
Sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij . . . . . » 48

Postulati di appartenenza . . . . . Pag. 56
Proprietà lineari della retta . . . . . » 58
Proprietà superficiali del piano . . . . . » 62
I versi di rotazione del piano . . . . . » 69
L'indirizzo del Pasch. . . . . » 75
Sulle partizioni del piano . . . . . » 80
Il diedro . . . . . » 86
Sulle partizioni dello spazio . . . . . » 88
Versi elicoidali dello spazio . . . . . » 90

A. Guarducci. - Della Congruenza e del Movimento.

§ 1. La trattazione Euclidea . . . . . Pag. 93
§ 2. Il significato della congruenza . . . . . » 96
§ 3. Analisi logica del concetto di movimento . . . . . » 99
§ 4. La congruenza presa come nozione primitiva. . . . . » 100
§ 5. Il sistema dei postulati di Pasch . . . . . » 101
§ 6. Il sistema di Veronese . . . . . » 105
§ 7. Il sistema di Hilbert . . . . . » 110
§ 8. Principali proposizioni sulle perpendicolari . . . . . » 113
§ 9. Congruenza delle figure in generale . . . . . » 116
§ 10. Diedri e triedri . . . . . » 117

G. Vitali. - Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare.

§ 1. Il postulato della continuità . . . . . Pag. 123
§ 2. Divisibilità del segmento e dell'angolo . . . . . » 128
§ 3. Proposizione d'Archimede . . . . . » 129
§ 4. Di altre forme del postulato della continuità. Continuo non archimedeo . . . . . » 130
§ 5. Intersezione di una retta con un circolo . . . . . » 135
§ 6. Intersezioni di due circoli . . . . . » 137
§ 7. Fondamenti del concetto di lunghezza della circonferenza. » 139
§ 8. Sulla teoria della misura . . . . . » 141

U. Amaldi. - Sulla teoria della equivalenza.

§ 1. Considerazioni generali sulle grandezze geometriche. . . Pag. 145
§ 2. La teoria dell'eguaglianza dei poligoni secondo Euclide . » 147
§ 3. Cenni storici sull'ulteriore sviluppo della teoria delle grandezze poligonali . . . . . » 150
§ 4. Dimostrazione secondo il Veronese del principio fondamentale della teoria delle grandezze poligonali. . . . » 158
§ 5. Indipendenza della teoria delle grandezze poligonali dal postulato d'Archimede . . . . . » 163
§ 6. Il cerchio e i poligoni a lati circolari . . . . . » 165
§ 7. Le superficie a contorno qualsiasi . . . . . » 170
§ 8. Poligoni sferici . . . . . » 173

§ 9. Prismi. . . . . Pag. 173
§ 10. I poliedri . . . . . » 175
§ 11. Dimostrazione del Dehn della impossibilità di decomporre in generale due poliedri di ugual volume in parti a due a due congruenti . . . . . » 177
§ 12. Dimostrazione del principio fondamentale della teoria delle grandezze poliedriche. . . . . » 190
§ 13. I solidi in generale. . . . . » 194
§ 14. Osservazioni didattiche . . . . . » 195

G. Vailati. - Sulla teoria delle proporzioni.

I. - Le proporzioni secondo Euclide

§ 1. Definizioni . . . . . Pag. 199
§ 2. Sul cosidetto postulato d'Archimede . . . . . » 202
§ 3. Primo gruppo di proposizioni. . . . . » 202
§ 4. Secondo gruppo di proposizioni . . . . . » 204
§ 5. Terzo gruppo di proposizioni . . . . . » 205
§ 6. Proporzioni di segmenti ed aree. . . . . » 206
§ 7. Ulteriori sviluppi: ragione composta . . . . . » 207
§ 8. Applicazioni ai problemi di 2° grado. . . . . » 209
§ 9. Volumi . . . . . » 212
§ 10. Critiche e varianti di testi . . . . . » 212
§ 11. Questioni di ordinamento . . . . . » 216

II. - Ulteriori sviluppi della Teoria

§ 12. Sulla tendenza della Geometria greca ad emanciparsi dalle proporzioni. . . . . » 218
§ 13. Giordano Vitale da Bitonto . . . . . » 220
§ 14. Hermann Grassmann . . . . . » 223
§ 15. L. Rajola Pescarini. . . . . » 227
§ 16. R. Hoppe . . . . . » 231
§ 17. Seconda trattazione dello Hoppe-G. Biasi . . . . . » 234
§ 18. La teoria geometrica delle proporzioni indipendente dalle considerazioni d'equivalenza . . . . . » 236
§ 19. Semplificazioni relative al teorema dell'invertibilità dei medi . . . . . » 241
§ 20. Uso di considerazioni stereometriche. . . . . » 244

R. Bonola. - Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee.

PARTE PRIMA

Storia delle ricerche sulle parallele

§ 1. Il postulato delle parallele presso i greci . . . . . Pag. 248
§ 2. Il postulato delle parallele presso gli arabi . . . . . » 248
§ 3. Il postulato delle parallele durante il Rinascimento ed il XVII secolo . . . . . » 249

§ 4. Riassunto . . . . . Pag. 250
§ 5. L'opera di Gerolamo Saccheri . . . . . » 251
§ 6. » » Lambert . . . . . » 253
§ 7. » » Legendre . . . . . » 256

FONDAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

(*Indirizzo elementare*)

§ 8. L'opera di C. F. Gauss . . . . . » 261
§ 9. » » F. K. Schweikart e Fr. A. Taurinus. . . . . » 262
§ 10. L'opera di N. J. Lobacefski . . . . . » 264
§ 11. » » J. Bolyai . . . . . » 265
§ 12. La diffusione della geometria non-euclidea . . . . . » 267
§ 13. Postulati equivalenti al *V postulato* euclideo . . . . . » 268

I SUCCESSIVI SVILUPPI DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

A) *Indirizzo metrico-differenziale.*

§ 14. Prime nozioni intorno alle superficie a curvatura costante. » 271
§ 15. Geometria sopra le superficie a curvatura costante . . . » 274
§ 16. Raffronto colla Geometria non-euclidea del piano . . . . » 275
§ 17. Fondamenti d'una Geometria piana secondo le idee di Riemann. . . . . » 276
§ 18. Sulla possibilità di realizzare nello spazio euclideo delle superficie di curvatura costante sulle quali valgano integralmente le proprietà dei piani non-euclidei . . . » 279
§ 19. Fondamenti d'una Geometria spaziale secondo Riemann . » 280
§ 20. L'opera di H. Helmholtz e le ricerche di S. Lie . . . . » 281

B) *Indirizzo proiettivo.*

§ 21. Subordinazione della Geometria euclidea alla proiettiva . » 282
§ 22. Subordinazione delle geometrie non-euclidee alla Geometria proiettiva . . . . . » 284
§ 23. Rappresentazione della geometria di Lobacefski-Bolyai sul piano euclideo . . . . . » 288
§ 24. Fondazione della Geometria partendo dai concetti grafici. » 292
§ 25. Sulla indimostrabilità del postulato d'Euclide . . . . . » 292

PARTE SECONDA

TEORIA GENERALE DELLE PARALLELE

§ 1. Premesse . . . . . » 295
§ 2. Definizione di parallela . . . . . » 295
§ 3. Verso di parallelismo . . . . . » 296
§ 4. Angolo di parallelismo . . . . . » 296
§ 5. Conservazione del carattere di parallelismo . . . . . » 297
§ 6. Reciprocità del carattere di parallelismo . . . . . » 298
§ 7. Verso comune di parallelismo . . . . . » 299
§ 8. Transitività del carattere di parallelismo . . . . . » 300
§ 9. Fascio improprio e punti impropri . . . . . » 301
§ 10. Striscie - Trilateri . . . . . » 302

§ 11. Alcune proposizioni di stereometria - Rette parallele nello spazio . . . . . Pag. 303
§ 12. Rette parallele ad un piano e piani paralleli . . . . . » 304

GEOMETRIA DELLA STELLA IMPROPRIA

§ 13. Stella impropria . . . . . » 306
§ 14. Fondamenti di una geometria della stella impropria. . . » 306
§ 15. Il principio della congruenza nella geometria della stella impropria - Congruenza fra diedri . . . . . » 307
§ 16. Il teorema di Bolyai . . . . . » 308
§ 17. Striscie congruenti nella geometria della stella impropria. » 309
§ 18. Triedri - Uguaglianza fra triedri - 1° criterio d'uguaglianza. » 310
§ 19. Identità tra la geometria della stella impropria e quella del piano euclideo . . . . . » 311
§ 20. Orisfera - Oriciclo . . . . . » 312
§ 21. Geometria orisferica - Sua identità con la geometria piana euclidea . . . . . » 312

GEOMETRIA IPERBOLICA

§ 22. Le parallele in geometria iperbolica . . . . . » 314
§ 23. I punti improprii nello spazio iperbolico . . . . . » 315
§ 24. Proprietà dei trilateri . . . . . » 315
§ 25. Quadrilateri birettangoli isosceli . . . . . » 316
§ 26. Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono convesso » 317
§ 27. Deficienza ed area di un poligono . . . . . » 318
§ 28. Perpendicolare comune a due rette non-secanti . . . . . » 320
§ 29. Retta che congiunge due punti improprii . . . . . » 321
§ 30. Trilateri con due e tre vertici improprii . . . . . » 323
§ 31. Proprietà dell'angolo di parallelismo. . . . . » 323
§ 32. Proprietà generali degli oricicli. . . . . » 324
§ 33. Proprietà degli oricicli concentrici . . . . . » 326
§ 34. Formule trigonometriche pel trilatero rettangolo . . . . » 328
§ 35. Formule trigonometriche pel trilatero qualunque . . . . » 330
§ 36. Formule trigonometriche pel triangolo rettangolo . . . . » 331
§ 37. Formule pei triangoli obliquangoli . . . . . » 335
§ 38. La trigonometria ordinaria come caso limite della trigonometria iperbolica . . . . . » 336
§ 39. Trigonometria sferica. . . . . » 337

GEOMETRIA ELLITTICA

§ 40. Proprietà fondamentali del piano ellittico. . . . . » 338
§ 41. Polarità assoluta del piano ellittico . . . . . » 339
§ 42. Legge di dualità sul piano ellittico . . . . . » 341
§ 43. Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono . . » 343
§ 44. Eccesso ed area di un poligono . . . . . » 345
§ 45. Proprietà geodetica della linea retta. . . . . » 345
§ 46. Una proprietà del quadrilatero trirettangolo. . . . . » 346
§ 47. Un teorema sulla proiezione dei segmenti . . . . . » 347
§ 48. Conseguenze del precedente teorema . . . . . » 350
§ 49. Coordinate cartesiane e polari - La funzione $f(\rho, \alpha)$ . . . » 352
§ 50. Continuità della funzione $f(\rho, \alpha)$. . . . . » 354
§ 51. Proprietà della funzione $f(\alpha)$ . . . . . » 355

§ 52. Proprietà dei triangoli rettangoli infinitesimi . . . . . Pag. 356
§ 53. Equazione funzionale relativa ad $f(x)$ . . . . . » 357
§ 54. Integrazione dell'equazione funzionale . . . . . » 358
§ 55. Applicazioni ai triangoli rettangoli infinitesimi . . . . » 360
§ 56. Trigonometria della stella . . . . . » 361
§ 57. Trigonometria sferica . . . . . » 362
§ 58. Trigonometria piana . . . . . » 362

F. Enriques - I numeri reali.

Parte Prima - I NUMERI NATURALI

I. - Il significato empirico dei numeri

§ 1. Introduzione . . . . . Pag. 365
§ 2. Numeri cardinali . . . . . » 365
§ 3. Astrazione e uguaglianza . . . . . » 369
§ 4. Numeri ordinali . . . . . » 371
§ 5. Confronto fra numeri cardinali e numeri ordinali . . . . » 373

II. - La serie infinita dei numeri

§ 6. Empirismo e idealismo . . . . . » 375
§ 7. Classi finite e infinite. . . . . » 379
§ 8. Potenza delle classi infinite . . . . . » 381
§ 9. Serie finite e infinite . . . . . » 383
§ 10. Il principio d'induzione matematica e i numeri transfiniti. » 384

Le operazioni fondamentali dell'aritmetica

§ 11. Introduzione . . . . . » 388
§ 12. L'addizione. . . . . » 389
§ 13. La sottrazione e lo zero . . . . . » 390
§ 14. La moltiplicazione . . . . . » 391
§ 15. Operazioni sui numeri ordinali . . . . . » 393
§ 16. Fondazione dell'Aritmetica secondo Peano . . . . . » 395

Parte Seconda - I NUMERI RAZIONALI

Estensione del concetto di numero

§ 17. Perchè s'introducono i numeri negativi, fratti ecc. . . . » 400
§ 18. Osservazioni sulla teoria analitica . . . . . » 400
§ 19. Rapporti fra la teoria analitica e la teoria sintetica. . . » 403

I numeri negativi

§ 20. Teoria sintetica . . . . . » 407
§ 21. Estensione della moltiplicazione . . . . . » 410
§ 22. La serie dei numeri relativi caratterizzata da postulati . » 411
§ 23. Teorie analitiche: la teoria delle coppie . . . . . » 412
§ 24. I numeri come operatori. . . . . » 414

I numeri fratti

§ 25. Teorie sintetiche: i numeri come rapporti di grandezze commensurabili . . . . . » 416

§ 26. Numeri razionali ordinali . . . . . Pag. 421
§ 27. Postulati che caratterizzano la serie razionale . . . . . » 426
§ 28. Teorie analitiche: teoria delle coppie . . . . . » 429
§ 29. Numeri fratti operatori . . . . . » 432

Parte Terza - I NUMERI IRRAZIONALI

I. - Numeri e grandezze

§ 30. Introduzione . . . . . » 434
§ 31. I numeri come rapporti di grandezze . . . . . » 436
§ 32. Continuità e integrità . . . . . » 441
§ 33. Espressione degli irrazionali per frazione continua . . . » 443

II. - Numeri irrazionali ordinali

§ 34. I numeri irrazionali come ascisse dei punti della retta. . » 447
§ 35. Somma e prodotto . . . . . » 448
§ 36. Continuità e buon ordinamento di una serie . . . . . » 450

III. - Le teorie analitiche dei numeri irrazionali

§ 37. La teoria di Dedekind . . . . . » 451
§ 38. Teoria di Cantor. . . . . » 455
§ 39. Teoria di Weierstrass. . . . . » 459
§ 40. Calcolo approssimato sui numeri decimali . . . . . » 463

IV. - La potenza del continuo

§ 41. Continuo numerico . . . . . » 466
§ 42. Continuo a più dimensioni. . . . . » 468

Parte Quarta - I NUMERI NON-ARCHIMEDEI E LA GENERALIZZAZIONE DEL CONTINUO NUMERICO

I. - I numeri non-archimedei

§ 43. Riassunto delle proprietà dei numeri reali . . . . . » 469
§ 44. I trasfiniti di Cantor come numeri non-archimedei . . . » 472
§ 45. Prodotto di numeri non-archimedei . . . . . » 475
§ 46. Corpo di numeri non-archimedei . . . . . » 476
§ 47. Numeri funzionali non-archimedei . . . . . » 478
§ 48. Confronto dei numeri non-archimedei coi numeri reali . . » 480

II. - Su alcune possibili interpretazioni dei numeri non-archimedei

§ 49. Ordini d'infiniti di Du Bois Reymond . . . . . » 481
§ 50. Probabilità . . . . . » 483
§ 51. Angolo di due curve . . . . . » 485

III. - Condizioni che caratterizzano il continuo numerico come serie ordinata

§ 52. Condizioni di riferibilità d'una serie continua al continuo numerico. . . . . » 487

§ 53. Ordine continuo di specie superiore al continuo numerico. Pag. 488
§ 54. Continuo a più dimensioni . . . . . » 491
§ 55. Osservazioni finali . . . . . » 492

D. Gigli. - Dei numeri complessi a due e a più unità.

Cap. I. - Le origini della teoria dell'immaginario

§ 1. Le equazioni cubiche . . . . . Pag. 495
§ 2. Il caso irriducibile. Indagini di G. Cardano . . . . . » 500
§ 3. L'opera di Raffaele Bombelli . . . . . » 503
§ 4. Vieta, Girard, Cartesio e Leibniz . . . . . » 508
§ 5. Il teorema di A. de Moivre . . . . . » 512
§ 6. L'interpretazione geometrica dei numeri complessi . . . » 515

Cap. II. - Teoria geometrica ed analitica dei numeri complessi ordinari

§ 7. Vettori e traslazioni . . . . . » 518
§ 8. I numeri complessi. - Modulo ed argomento . . . . . » 521
§ 9. Somma e prodotto di numeri complessi . . . . . » 523
§ 10. Il numero complesso i. . . . . » 526
§ 11. Teoria analitica: eguaglianza e somma . . . . . » 528
§ 12. La definizione di prodotto: preliminari . . . . . » 531
§ 13. Il modulo (unità reale) della moltiplicazione. . . . . » 537
§ 14. Le unità immaginarie. . . . . » 540
§ 15. Conclusione. . . . . » 542

Cap. III. - Il teorema fondamentale dell'algebra

§ 16. Enunciato del teorema - Cenni storici . . . . . » 547
§ 17. La dimostrazione del d'Alembert . . . . . » 549
§ 18. La dimostrazione di Gauss. . . . . » 553
§ 19. Dimostrazione di Argand e Cauchy . . . . . » 556
§ 20. Dimostrazione di Mourey e Holst . . . . . » 558

Cap. IV. - La funzione esponenziale

§ 21. La nozione di limite . . . . . » 562
§ 22. La nozione di funzione . . . . . » 564
§ 23. Rappresentazioni conformi . . . . . » 569
§ 24. Potenze ad esponente reale di basi positive . . . . . » 574
§ 25. Logaritmi reali di numeri positivi. . . . . » 578
§ 26. Le derivate delle funzioni a^x e $\log_a X$. - Il numero e . . » 581
§ 27. La proprietà caratteristica della funzione esponenziale. . » 587
§ 28. Potenze ad esponente complesso di basi reali e positive . » 589
§ 29. Potenze ad esponente complesso di basi complesse. . . . » 595
§ 30. Complementi e notizie storiche . . . . . » 599

Cap. V. - Numeri complessi a n unità

§ 31. Cenno storico . . . . . » 602
§ 32. Numeri complessi a n unità. - Eguaglianza e somma. . . » 604

§ 33. Intorno alla definizione di prodotto. Generalità . . . . Pag. 608
§ 34. Incompatibilità dell'esclusione dei divisori dello zero colla commutatività del prodotto, se $n > 2$ . . . . . » 611
§ 35. Osservazioni intorno ai divisori dello zero . . . . . » 615
§ 36. I quaternioni . . . . . » 618
§ 37. Un sistema di numeri complessi a n unità e il gruppo delle traslazioni in un S_n . . . . . » 623
§ 38. Corpi di numeri complessi e gruppi di omografie . . . . » 628
§ 39. Dimostrazione geometrica dei teoremi fondamentali per i corpi di numeri complessi a più unità . . . . . » 632

Finito di stampare
il dì 30 Aprile 1912
nella Tipografia della Cooperativa Azzoguidi
in Bologna