Enriques, Federigo

Sulla teoria geometrica degli immaginari

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XVII** (1913), pp. 69-72.

FEDERIGO ENRIQUES

Sulla teoria geometrica degli immaginari

NOTA

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna
nell' adunanza del 13 Aprile 1913.

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1913

Estratto dal *Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* — Anno Accademico 1912-13.

1. In questa nota, che ha uno scopo prevalentemente didattico, mi propongo di indicare come, partendo da note rappresentazioni dei punti reali ed immaginari del piano sui punti reali di S_4, si sia condotti nel modo più semplice all' interpretazione geometrica del punto immaginario di S t a u d t. Così vengono messe immediatamente in luce le proposizioni fondamentali di quella teoria: che due punti immaginari determinano *una* retta (in generale immaginaria); che due rette (reali o immaginarie) hanno un punto comune.

2. Agli ∞^4 punti reali ed immaginari, d' un piano $\pi \equiv (x + iy, \ u + iv)$, si possono far corrispondere i punti reali dello spazio a 4 dimensioni $S_4 \equiv (x,y,u,v)$. Allora l' insieme dei punti reali di π è rappresentato dal piano reale α, che ha per equazioni in S_4: $y = o$, $v = o$. Alle rette, reali o immaginarie, di π, corrispondono ∞^4 piani incidenti a due rette immaginarie all' infinito g, g'; fra questi ce ne sono ∞^2 perpendicolari incidenti ad α secondo rette, che corrispondono alle rette reali di π, considerate come luogo di punti reali ed immaginari.

Due punti immaginari coniugati di π appartengono ad una retta reale e su questa definiscono la corrispondenza involutoria detta *coniugio*; i punti omologhi in S_4 sono punti simmetrici rispetto al piano α e ad una retta di esso, stando in un piano perpendicolare ad α secondo codesta retta.

La rappresentazione reale del piano complesso che sopra abbiamo descritto, è stata incontrata dal Sig. Segre (*). Questi ha pure notato che, per togliere gli elementi eccezionali della rappresentazione, vi è luogo a sostituire lo S_4 con una varietà razionale V_6 d' ordine 6 in S_8, rappresentata su S_4 dalle quadriche per g, g'.

3. In rapporto alla nominata V_6, la rappresentazione di Segre ci appare come caso particolare di una rappresentazione che si ottiene da quella ponendo in S_4 una generale trasformazione cubica che operi omograficamente sui piani per g e per g'.

La rappresentazione generale che così si ottiene del piano complesso π sullo spazio reale S_4, dà luogo alle seguenti circostanze:

1) Alle ∞^4 rette, reali o immaginarie, di π corrispondono i piani incidenti a g, g'.

2) Ai punti reali di π corrispondono i punti d' una rigata cubica F_3 avente come generatrici g, g'.

3) Alle rette reali di π corrispondono i piani secanti F_3 secondo coniche (immagini dei punti reali delle rette omologhe).

4) Ai punti immaginari coniugati che si trovano sopra una retta reale di π, corrispondono punti del piano omologo di S_4, che separano armonicamente la conica sezione di F_3 e che sono allineati col polo della retta congiungente i punti in cui inter-

(*) Cfr. la sua Memoria nei Mathem. Annalen Bd 40.

seca g, g' (polo rispetto a C). La corrispondenza quadratica involutoria fra i punti suddetti, potrà essere designata come un' *inversione* rispetto alla conica, avente per centro il polo suindicato.

Questa rappresentazione del piano complesso sullo S_4 conduce subito alla rappresentazione di Staudt, in cui ad ogni punto complesso si fa corrispondere un' involuzione ellittica sopra una retta reale ed un verso di questa retta.

Il legame che abbiamo enunciato si pone nel seguente modo :

Premettiamo che tutte le coniche di F_3 si trovano riferite prospettivamente mediante la serie delle generatrici della rigata, e quindi si può distinguere un *verso positivo* ed un *verso negativo* per tutte le coniche suddette; la distinzione arbitrariamente fissata per una conica risulta fissata per le altre.

Ciò posto si consideri un piano di S_4 (incidente a g, g') che seghi F_3 secondo una conica C.

Ad ogni punto P del piano, che sia *interno* a C, faremo corrispondere l' *involuzione ellittica* su C di centro P, *associata al verso positivo* di C.

Dato un punto P del piano, che sia *esterno* alla conica C, costruiremo il punto coniugato di P nell' inversione quadratica 4), ed otterremo così un punto P' interno alla conica C. Faremo corrispondere a P l' *involuzione ellittica* su C di centro P', *associata al verso negativo della stessa conica* C.

Si ha così l' interpretazione staudtiana dei punti immaginari del piano π : ogni punto immaginario designa una involuzione ellittica sopra una retta reale associata ad un verso di questa retta.

Le proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva del piano π vengono quindi messe in luce pei punti complessi di π. La proposizione che due punti, reali o nò, di π determinano una retta si traduce in quella che due punti di S_4 determinano un piano incidente a g, g'; la proposizione che due rette, reali o nò, di π hanno un punto comune, diviene: due piani di S_4 (incidenti a g, g') hanno un punto comune.

L' estensione dal piano complesso allo spazio è ovvia.