

---

Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

# FEDERIGO ENRIQUES

---

ENRIQUES, FEDERIGO

## Il significato della critica dei principi nello sviluppo delle matematiche

in Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge, 22-28 Aug. 1912), IHobson, E. W. ed., and Love, E. H. ed., University Press, Cambridge, 1913, pp. 67-79.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

---

*Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques" promosso dal*

*Ministero per i Beni e le attività Culturali  
Area 4 - Area Archivi e Biblioteche  
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

# IL SIGNIFICATO DELLA CRITICA DEI PRINCIPII NELLO SVILUPPO DELLE MATEMATICHE

DI FEDERIGO ENRIQUES.

SOMMARIO.—I: Introduzione.—II: Il continuo e i procedimenti infinitesimali nell'antichità.—III: La fondazione del calcolo infinitesimale.—IV: La critica dei concetti infinitesimali e i nuovi sviluppi sul calcolo delle variazioni.—V: Le funzioni arbitrarie e la moderna elaborazione del concetto del continuo.—VI: Lo sviluppo intensivo delle Matematiche: le equazioni e i numeri immaginari.—VII: La teoria delle funzioni algebriche secondo Riemann e la critica dei principii della Geometria.—VIII: Nuovi sviluppi dell'algebra.—IX: Conclusioni; pragmatismo e naturalismo matematico.—X: Le Matematiche come strumento e come modello della scienza.

## I. *Introduzione.*

La critica dei principii è all'ordine del giorno fra i matematici contemporanei. L'analisi approfondita dei concetti di limite e di funzione, le ricerche che hanno come punto di partenza la teoria delle parallele e la geometria non-euclidea, quelle più recenti che si riattaccano alla fondazione della geometria proiettiva e all'*Analysis situs*, gli sviluppi sulle varietà a più dimensioni, sulle trasformazioni e sui loro gruppi; finalmente la teoria degl'insiemi e le speculazioni sull'infinito e l'infinitesimo attuale, cui si connettono le geometrie non-archimedee, hanno sollevato tanti problemi che toccano le profonde radici dell'edificio matematico e attraggono, per diversi motivi, gli spiriti filosofici.

Nell'ambito di una scienza eminentemente conservatrice, che, da duemila anni, offre lo spettacolo di una continuità ininterrotta di costruzioni progredienti senza demolizione, le critiche innovatrici, di colore rivoluzionario, svegliano forse un interesse emotivo più forte che in qualsiasi altro campo dello scibile, ove le crisi si succedono visibilmente in modo periodico. A questo interesse emotivo si deve non soltanto la resistenza che le nuove idee incontrano presso il pubblico non preparato a comprenderle, ma più ancora la seduzione che esse esercitano su tanti spiriti, pronti a passare, per naturale reazione psicologica, dalla meraviglia e dallo sbigottimento alla fede e all'entusiasmo, per il mondo nuovo che si dischiude ai loro occhi.

Di qui il fenomeno singolare, a cui abbiamo più volte assistito: la propagazione delle idee critiche attraverso piccole cerchie di lavoratori e d'interpreti, che, sviluppandone fino agli estremi le conseguenze logiche, compiono intorno a sè un vero apostolato, illusi forse che la nuova verità ad essi scoperta debba segnare un radicale rivolgimento del pensiero matematico, e instaurare una nuova èra nella sua storia.

Dobbiamo ringraziare la molteplicità delle Chiese se la propaganda che si svolge fervidamente intorno a noi non ci toglie il senso della relatività e ci permette di conservare qualche fede anche nella vecchia matematica.

Ora le discussioni più vive suscitate dai nuovi campi di indagine e soprattutto i nuovi atteggiamenti dello spirito critico, pongono naturalmente un problema d'ordine filosofico e storico: quale sia il valore proprio della critica dei principii e quale posto le spetti nell'ordine dei progressi della nostra scienza. Tutte le questioni particolari di valutazione, per riguardo a diversi indirizzi di analisi e di ricerca, sembrano dominate da quel problema generale che, sia pure in diversi modi, ogni lavoratore, riflettendo sul proprio lavoro, è indotto a porre a sè stesso.

## II. *Il continuo e i procedimenti infinitesimali nell'antichità.*

La storia ci offre a questo riguardo un primo insegnamento istruttivo: la critica dei principii non è affatto un fenomeno nuovo che caratterizzi la produzione matematica dei tempi nostri; all'opposto essa è parte essenziale dell'elaborazione dei concetti che in ogni tempo prepara o accompagna il progresso della scienza e la sua più estesa applicazione.

La perfezione universalmente ammirata della opera d'Euclide si rivela appunto allo storico come il frutto maturo di una lunga critica, che si svolge durante il periodo costruttivo della geometria razionale da Pitagora ad Eudosso. Tanta finezza e profondità d'idee si dispiega in quel movimento critico, che talune vedute non poterono essere comprese se non in tempi recentissimi, quando gli sviluppi della nostra stessa critica ci condussero a superare veramente, anche in questa direzione, il pensiero greco.

Allora in particolare ha cominciato a palesarsi nella sua propria luce il significato dei metodi e dei principii mercè cui i Greci stessi riuscirono a vincere i paradossi che sembra incontrare naturalmente chi riflette sull'infinito; giacchè le difficoltà che a questo riguardo travagliarono lungamente i matematici e i filosofi dell'antichità, sono le medesime che ebbe a sperimentare il Rinascimento nel periodo costruttivo dell'analisi infinitesimale, ed anche dopo la costituzione sua fino alla critica più recente.

La fondazione di una teoria della misura per opera della scuola pitagorica sollevò per la prima volta la questione del continuo geometrico. I pitagorici ponevano a fondamento di quella teoria un elemento indivisibile dello spazio, il punto dotato di estensione finita; intanto il rapporto incommensurabile della diagonale al lato del quadrato suscitava sui loro passi una insuperabile contraddizione.

Tuttavia P. Tannery ha mostrato che soltanto la critica degli Eleati riuscì a vincere definitivamente l'erroneo concetto dei pitagorici. Come generalmente avviene per riguardo a certe costruzioni astratte, il paradossale aspetto negativo degli argomenti di Zenone (Achille e la tartaruga!) dovette colpire l'immaginazione del gran pubblico, e questa impressione è passata nella corrente della tradizione letteraria ov'è tutt'ora dominante. Ma il valore positivo di codesta critica è di avere schiuso la via ad una esatta veduta del continuo e ad una teoria delle grandezze incommensurabili.

La quale viene fondata da Eudosso di Cnido mercè l'introduzione del postulato, comunemente citato col nome di Archimede, che serve di base alla trattazione generale delle proporzioni, esposta nel V libro d'Euclide.

La critica di Eudosso permetteva in pari tempo di dare una base rigorosa ai procedimenti infinitesimali impiegati dagli antichi per la misura delle aree e dei volumi. Infatti sul suo postulato, Eudosso stesso fondava il processo d'esaustione, e se ne serviva per dimostrare i risultati sui volumi della piramide e del cono, già trovati da Democrito.

Il pubblico matematico, assetato di rigore, plaudì all'opera di Eudosso, e la testimonianza di Archimede (nell'opera ritrovata da Heiberg) ci fa noto che, appunto in omaggio al rigore, non era lecito citare altro autore di tali dottrine fuori di colui che era riuscito a rimuovere ogni obiezione stabilendo il risultato con logica impeccabile. Tanto varrebbe, nota argutamente lo Zeuthen, attribuire la scoperta del calcolo infinitesimale a Cauchy, che dette l'ultima risposta ai dubbi sollevati dall'uso degl'infinitesimi!

Il metodo d'esaustione fu dunque il termine consapevole a cui si arrestò lo sviluppo dei procedimenti infinitesimali presso i Greci, ma i concetti che ad esso soggiacciono e che erano volontariamente banditi per l'esigenza del rigore, vengono alla luce ad ogni passo nell'opera d'Archimede. E la lettera che questi scrisse ad Eratostene ci rivela come appunto i metodi dell'analisi infinitesimale, la riduzione del continuo ad una somma d'un numero finito di termini, gli servissero di guida nella scoperta, mentre l'esposizione dei risultati, condotta col processo d'esaustione, gli permetteva di soddisfare alle esigenze del pubblico scientifico.

### III. *La fondazione del calcolo infinitesimale.*

Le idee d'Archimede sono riprese e approfondite nel Rinascimento da Galileo e da Keplero, ai quali si riattacca la prima sistemazione organica di esse che è la geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri.

Il grande geometra italiano pone il fecondo principio chè le superficie e i volumi si possono riguardare come somme di un numero infinito d'elementi indivisibili, che sono rispettivamente linee o superficie, e ne trae conseguenze assai generali ed importanti. Attaccato da Guldino nel 1640, mostra che il suo metodo si riduce all'esaustione degli antichi; esso non è che una *finzione*, utile per la rapida soluzione dei problemi, e non involge alcuna *ipotesi* contraria al concetto tradizionale del continuo.

Frattanto i metodi infinitesimali vengono alla luce secondo diversi aspetti; la difficoltà fondamentale di coglierne il vero significato filosofico determina appunto le divergenze di questi conati, che vanno di pari passo cogli acquisti positivi.

Torricelli e Roberval ottengono la tangente colla composizione dei movimenti; e questi decompono le superficie e i solidi in una molteplicità indefinita di rettangoli o di prismi decrescenti secondo una certa legge.

I nuovi procedimenti investigati da Cavalieri, Fermat, Descartes, Roberval, ricevono un più alto sviluppo nell'*Aritmetica degli infiniti* di Wallis, da cui segue il primo esempio di rettificazione d'una curva, e poi per opera di Mercator che determina

mediante una serie l'area compresa fra l'iperbole e i suoi asintoti; infine Barrow, il maestro di Newton che si riattacca specialmente a Galileo e a Torricelli, pone in piena luce il carattere inverso delle operazioni relative alla determinazione dell'area e della tangente d'una curva.

Occorre ancora scoprire che quest'ultima è un'operazione *diretta* che può essere semplicemente compiuta. Si giunge così alla costituzione organica dell'analisi infinitesimale moderna, cioè al metodo delle flussioni e fluenti di Newton e al calcolo differenziale e integrale di Leibniz.

Una grande elaborazione concettuale, che profonda le sue radici nel più antico pensiero dei Greci, presiedette dunque all'acquisto che rimarrà come titolo d'onore dello spirito umano; il concetto dell'infinito e dell'infinitesimo potenziale che, liberato più tardi da ogni oscurità, diverrà la solida base del calcolo, rappresenta per così dire la sintesi dell'ipotesi pitagorica, ripresa come finzione da Cavalieri, e della critica negativa di Zenone convertita in un procedimento rigoroso di dimostrazione mercè il postulato di Eudosso. La sintesi diverrà logicamente perfetta quando Cauchy sarà riuscito a conciliare le divergenze di vedute separanti ancora per lungo tempo i newtoniani e i leibniziani, come diremo più avanti. Frattanto per apprezzare in tutta la sua vastità il lavoro d'analisi compiuto, occorre tener presente l'elaborazione dei principii della Meccanica che vi si accompagna. La stessa idea fondamentale che costituisce il passaggio dal finito all'infinito e dal discreto al continuo determina il disegno generale della scienza moderna, cioè il principio di un determinismo universale che scompone i processi naturali in una serie continua di *cause elementari*, e ritrova così nella forma delle equazioni differenziali gl'invarianti che costituiscono l'oggetto di una rappresentazione razionale della realtà. La metafisica razionalistica delle scuole di Descartes e di Leibniz appare, da questo punto di vista, come un ramo grandioso della stessa critica dei principii ond'è uscito il calcolo infinitesimale.

#### IV. *La critica dei concetti infinitesimali e i nuovi sviluppi sul calcolo delle variazioni.*

Ho detto che lungamente, dopo Newton e Leibniz, proseguì la critica tendente a dare una base logica all'analisi infinitesimale, la cui fecondità si mostrava ogni giorno più meravigliosa.

Il metodo di Newton, che introduce le flussioni come velocità, toccò primo ad un assetto rigoroso mercè la critica di Maclaurin e di D'Alembert; i quali, eliminando il concetto dinamico per svolgere puramente i principii analitici, riconobbero il suo fondamento logico nella teoria dei limiti. La fondazione newtoniana riesce così all'ordinario calcolo delle derivate. Tuttavia la rapidità consentita dall'uso dell'infinitesimo, a cui si conformano le notazioni leibniziane più generalmente adottate, faceva ancora desiderare una giustificazione piena della ipotesi fondamentale che s'incontra per questa via, cioè, del principio di Leibniz, che "si possono trascurare gl'infinitesimi di fronte alle quantità finite e gl'infinitesimi d'ordine superiore di fronte a quelle d'ordine inferiore."

La difficoltà di comprendere logicamente questo principio, che sembra rompere collo spirito d'esattezza delle Matematiche, travagliava ancora Lagrange, per cui impulso l'Accademia di Berlino nel 1784 bandiva un concorso volto ad ottenere una

sistemazione rigorosa dell'analisi infinitesimale, e premiava poi la memoria di Lhuillier tendente in sostanza ad eliminare la caratteristica feconda del calcolo di Leibniz.

C'era da temere che gli scrupoli logici ancora una volta, come nel mondo antico, prendessero il disopra sulla fecondità dei metodi. Ma questi avevano ormai una base troppo larga nella coscienza matura dei progressi acquisiti. Nacque tosto un movimento di reazione che produsse le *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* di S. Carnot; qui è contenuta l'idea che il principio di Leibniz trovi la sua giustificazione, come regola pratica, nella considerazione dell'arbitrarietà dell'infinitesimo; e più tardi Cauchy dimostrava che codesta considerazione, a prescindere da altre riflessioni meno chiare di Carnot, basta da sola a legittimare il Calcolo di Leibniz, e a stabilirne l'identità colla teoria dei limiti.

Se ora vuoi convenientemente apprezzare il valore della nuova critica che riesce a fondare logicamente le basi del calcolo infinitesimale, occorre riflettere all'intima connessione che lega codesta critica ad altri positivi sviluppi nella mente dei nominati matematici, ricordando che, appunto dal tentativo di definire rigorosamente i principii del calcolo, Lagrange fu condotto all'introduzione delle funzioni analitiche che, per opera di Cauchy, Riemann, Weierstrass, ricevettero organica trattazione.

Ancora è da menzionare il legame della critica dei principii con un'altra grande scoperta di Lagrange, il calcolo delle variazioni, che è appunto un'estensione dei concetti infinitesimali allo studio delle funzioni dipendenti da altre funzioni e dei loro massimi e minimi.

In una serie di conferenze, tenute recentemente a Parigi, Vito Volterra\* ha illustrato i progressi della teoria di queste funzioni di linee, mostrando come l'evoluzione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale si prosegua qui nella fiorente costruzione della dottrina delle equazioni integrali e integro-differenziali; onde questa mirabile estensione di concetti si palesa come un frutto maturo di quella stessa critica che riconoscemmo come fermento attivo dei progressi delle Matematiche durante due millenni di storia.

#### V. *Le funzioni arbitrarie e la moderna elaborazione del concetto del continuo.*

Ad allargare il campo della critica nel secolo decimonono interviene l'estensione del concetto di funzione, guadagnata per una parte attraverso il problema delle corde vibranti e gli studi di D'Alembert e di Fourier, d'altra parte mercè la considerazione qualitativa degli algoritmi d'integrazione.

La prima via suggerisce il concetto di Dirichlet della funzione arbitraria, la seconda, con Abel e Jacobi, porta alla introduzione effettiva di funzioni più generali nell'Analisi.

Appunto la considerazione di queste, ed in genere la veduta più larga degli algoritmi analitici come operazioni, porge un interesse positivo alle ricerche critiche concernenti la convergenza delle serie, la continuità e la derivabilità delle funzioni, ecc.; cioè a quelle speculazioni sui principii della teoria delle funzioni arbitrarie che furono spinte innanzi da Riemann, Weierstrass, Dini, ecc.

\* Cfr. *Revue du Mois*, 10 mars 1912.

Il vedere tra i fondatori di questa critica quegli stessi matematici che hanno costituito l'organismo della teoria delle funzioni analitiche, ci fa comprendere il nesso profondo fra due campi di studio che taluno ama talora contrapporre come due indirizzi delle Matematiche.

In realtà se le funzioni analitiche sono nate nella mente di Lagrange per rispondere ai dubbi intorno ai fondamenti del calcolo infinitesimale, il loro progresso appare sempre legato a preoccupazioni critiche della medesima specie; basti rammentare che il più bel risultato della teoria delle funzioni analitiche è la determinazione di esse per mezzo dei loro punti singolari nel piano, e che a base dei teoremi d'esistenza che le concernono si trova il principio di Riemann-Dirichlet.

Ora per approfondire in generale le questioni d'esistenza in rapporto al concetto esteso delle funzioni, delle serie, ecc., occorre una nuova analisi del continuo che conduce ad un complemento essenziale della critica antica. Alludo al postulato della continuità e al nuovo assetto della dottrina dei numeri irrazionali considerati nella loro integrità. Questa dottrina si confonde infatti per Weierstrass colla teoria generale della convergenza delle serie, per Cantor e per Dedekind colla determinazione delle condizioni d'esistenza dei limiti. L'intimo rapporto ond'essa è legata al concetto dell'arbitrarietà delle funzioni si palesa negli sviluppi critici di Cantor sugli insiemi e sulla loro potenza.

Per questi sviluppi e per le speculazioni più recenti (di Veronese, Hilbert, ecc.) sul cosiddetto continuo non-archimedeo, il pensiero moderno sembra avere svolto fino alle sue estreme conseguenze l'analisi iniziata quasi duemilacinquecent'anni or sono coll'ipotesi pitagorica. Certo il concetto del continuo rimane per noi quello stesso che Eudosso ed Archimede ponevano a base delle loro costruzioni, ma arricchito di un nuovo principio esistenziale che è in rapporto all'estensione dei concetti delle Matematiche; e il significato di questo principio viene messo in tutta la sua luce grazie ai suddetti sviluppi non-archimedei, divenuti parte integrante dell'esplorazione critica del continuo.

#### VI. *Lo sviluppo intensivo delle Matematiche: le equazioni e i numeri immaginari.*

Le considerazioni precedenti mirano soprattutto al progresso *estensivo* delle Matematiche, mostrando in ordine ad esso l'ufficio della critica dei principii. Le idee suggerite primitivamente da un'intuizione ristretta si affinano coll'analisi delle condizioni di validità e diventano atte a fecondare un campo di problemi sempre più vasto. A questa estensione che è un aspetto del progresso scientifico presiede appunto il pensiero critico, inteso come strumento di sapere positivo.

Ma lo sviluppo delle Matematiche non avviene soltanto nel senso estensivo, bensì anche secondo una direzione che può dirsi *intensiva*.

Allargare la posizione dei problemi riuscendo a sottomettere all'analisi un campo ognor più vasto di rapporti reali, non dispensa dall'approfondire i problemi antichi, proseguendone una risoluzione effettiva con mezzi determinati.

Così la considerazione più generale dei numeri irrazionali lascia posto ad una teoria dei numeri razionali od interi o di particolari specie d'irrazionali; e mentre le equazioni algebriche trovano la loro naturale estensione nelle equazioni differenziali,

e queste nelle equazioni a derivate parziali, nelle equazioni integrali ed integro-differenziali, ciascuna di tali classi di problemi dà luogo ad uno sviluppo intensivo proprio.

La veduta estesa porge a questo stesso sviluppo un criterio fondamentale, cioè il principio di *relatività*, per cui la risoluzione cercata viene messa in rapporto con dati mezzi, e si converte in una classificazione gerarchica dei varii tipi di problemi secondo un ordine di difficoltà crescente.

Ora la Matematica, considerata da tale punto di vista, tocca il suo punto culminante nello sviluppo dell'Algebra, intesa—in modo ampio—come teoria generale dei problemi *qualitativi* che sorgono in rapporto al gruppo delle operazioni razionali (equazioni e funzioni algebriche, funzioni ellittiche e abeliane, equazioni algebrico-differenziali, ecc.), o come primo ramo di una teoria qualitativa delle funzioni.

L'ufficio della critica dei principii che abbiamo riconosciuto nella estensione dei concetti e dei problemi, si discopre non meno essenziale per riguardo a questo indirizzo delle Matematiche, dove—a primo aspetto—potrebbe apparire meno evidente.

Riportiamoci col pensiero alle origini della teoria delle equazioni algebriche. Le equazioni di 2° grado trovansi risolte in veste geometrica nel libro II d'Euclide e la loro risoluzione si connette alla scoperta degli incommensurabili, cui si è già innanzi accennato. Attraverso gli Arabi quella dottrina assunse la forma propriamente algebrica, che mette in evidenza il problema generale delle equazioni di grado superiore.

E da questa rappresentazione sorgono i numeri negativi (già incontrati dall'Indiano Bhâskara nel 1114); i quali saranno ripresi dai matematici dei secoli XV e XVI, Pacioli, Cardano, Stiefel; e, dopo Harriot e Descartes, adottati come numeri ordinali o ascisse d'una retta.

L'uso dei simboli non era ancora familiare ai matematici italiani del secolo decimosesto, i quali—volgendosi alla trattazione delle equazioni cubiche—vedono in esse il soggiacente problema geometrico. Scipione dal Ferro e Niccolò Tartaglia scoprono le regole per la risoluzione delle equazioni stesse, distinte allora in tre classi\*; e quelle regole sono riprese e svolte da Girolamo Cardano e Raffaele Bombelli.

Orbene il caso irriducibile delle equazioni di terzo grado apre la via alla considerazione dell'immaginario, cioè al problema critico del valore e del significato che si può conferire alla radice quadrata d'un numero negativo ed al suo uso nei calcoli. Il progresso ulteriore dell'Algebra esige che piena luce sia fatta su questo delicato concetto; la profonda elaborazione che primo ne ha data il Bombelli resta pressochè incompresa fino a Leibniz e a Wallis, e—ripigliata da questi matematici—riceve uno sviluppo pieno coll'interpretazione trigonometrica del De Moivre; tuttavia la critica si affatica ancora a cercare un significato concreto dei numeri complessi, e vi riesce colla nota rappresentazione geometrica di Wessel, Argand, Gauss.

Allora soltanto, sulla base della critica compiuta, si asside la dimostrazione del teorema fondamentale che un'equazione di grado  $n$  ha  $n$  radici; teorema ricercato dai

\*  $x^3+px=9$ ,  $x^3=px+9$ ,  $x^3+9=px$ . Cfr. D. Gigli, *Dei numeri complessi...*, in F. Enriques, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna, 1912.

matematici del secolo decimottavo e segnatamente dal D'Alembert (1746), rigorosamente stabilito da Gauss nel 1789.

Se ora si riflette al posto che l'immaginario riceve nella teoria delle funzioni, si è condotti a comprendere in tutta la sua larghezza il valore della critica iniziata colle speculazioni del Bombelli, e suscitata da un problema determinato come quello delle equazioni cubiche.

VII. *La teoria delle funzioni algebriche secondo Riemann e la critica dei principii della Geometria.*

Procediamo a considerare la storia degli sviluppi dell'Algebra, e riscontriamo che ogni passo innanzi si lega ugualmente con una critica toccante i concetti fondamentali della scienza matematica.

Mentre le equazioni del 4° grado si riconducono a quelle del 3°, lo studio delle equazioni di grado superiore al 4° conduce, con Ruffini et Abel, alla dimostrazione della impossibilità di risolvere per radicali l'equazione del 5° grado e quindi alla dottrina generale della risolubilità algebrica secondo Galois. Ebbene questa dottrina che—estesa poi in vari sensi—ha fecondato tutti i rami delle Matematiche, e con Lie è riuscita a porgere la base di una classificazione razionale delle equazioni differenziali, è finalmente una critica di taluni elementari concetti: ordine, operazione o corrispondenza, gruppo di operazioni.

Il posto di questi concetti per riguardo ai principii delle Matematiche, ed in ispecie della Geometria, appare chiaramente nell'opera che—per diversi riguardi—può riconoscersi come centrale nello sviluppo delle Matematiche del secolo decimonono: dico l'opera di Bernardo Riemann.

La straordinaria attività creatrice di questo pensatore s'illumina di una più viva luce a chi investighi il legame profondo fra le ricerche onde uscì la dottrina generale delle funzioni algebriche e dei loro integrali, la sua critica dei concetti del Calcolo e quella—di carattere più largamente filosofico—che tocca i principii della Geometria e pone le basi di essa nell'*Analysis situs*. Appunto il rapporto fra le proprietà invarianti per trasformazioni birazionali delle funzioni algebriche e la connessione delle corrispondenti superficie riemanniane costituisce la scoperta dominante in quel campo di studii.

Inoltre si deve alla sintesi di Riemann, che le pure speculazioni dei geometri non-euclidei vengano riattaccate all'organismo della realtà matematica, formante oggetto della storia (forme differenziali quadratiche). Quindi innanzi il rapporto fra la critica dei principii della Geometria e lo sviluppo delle dottrine matematiche apparirà più chiaramente sotto molteplici aspetti. Il nodo di questo rapporto sta nella Geometria proiettiva che da Poncelet a Möbius, a Steiner, a Staudt, si svolge, non solo come dottrina delle proiezioni e come metodo di riduzione, ma anche come critica dei concetti e dei rapporti spaziali, riuscendo ad una trattazione qualitativa di questi indipendente dalle nozioni metriche. Il valore di tale sviluppo per riguardo ai problemi filosofici concernenti i principii risulta chiaro dall'opera di Beltrami, Schläfli, Cayley, Klein, ecc. Quanto alla sua importanza in ordine al progresso costruttivo delle Matematiche, basti additare la nuova forma data ai problemi concernenti le funzioni algebriche, e i risultati che ne conseguono.

Infatti i continuatori di questo indirizzo riemanniano (e segnatamente Clebsch e Noether) hanno rinnovato la dottrina mercè una considerazione più astratta della Geometria proiettiva delle curve e delle superficie algebriche, dalla quale è scaturita finalmente una posizione più generale degli stessi problemi dell'Algebra. Così per es. un sistema d'equazioni soddisfatto da un numero finito di soluzioni, viene ad essere riguardato come avente un grado invariante per un cambiamento continuo dei parametri, in forza della convenzione geometrica che estende lo spazio coi punti impropri, e porta quindi ad annoverare fra le soluzioni effettive anche le soluzioni asintotiche ed in particolare anche ad eliminare taluni casi d'incompatibilità.

Ora è essenziale avvertire che non soltanto la Geometria proiettiva come edificio costruito, ma appunto le indagini sulla sua fondazione debbono essere ritenute come elemento essenziale della nuova teoria delle funzioni algebriche. Infatti uno dei concetti metodologici principali appare qui la considerazione astratta della Geometria proiettiva come sistema ipotetico-deduttivo caratterizzato dai postulati, cioè il fecondo principio che, generalizzando la dualità scoperta da Gergonne, permette di considerare certi sistemi di enti o di funzioni come diverse interpretazioni di quella Geometria.

Trattisi p. es. di ricercare i gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile. Sotto l'aspetto geometrico si ha dunque a fare coi gruppi di omografie sulla retta. Ma la totalità  $\infty^3$  delle omografie sulla retta forma un sistema lineare che può essere ritenuto in senso astratto come uno spazio proiettivo ordinario; basta perciò chiamare "punti" le omografie stesse e "rette" i "fasci d'omografie." La rappresentazione che così risulta, studiata da Stephanos, mette in evidenza una quadrica immagine delle omografie degeneri e un punto che corrisponde all'identità. Il nostro problema si riduce a determinare i gruppi d'omografie che lasciano ferma una quadrica e un punto non appartenente ad essa. Con una trasformazione lineare immaginaria la quadrica si muterà in una sfera e il punto nel suo centro. I gruppi cercati corrisponderanno ai gruppi di rotazioni della sfera, cioè (com'è noto) ai gruppi dei poliedri regolari!

Ora il principio generale della Geometria proiettiva astratta assume tutta la sua estensione grazie al concetto degli spazi a più dimensioni, e così diventa possibile di trattare come "spazi," cioè di tradurre nei termini della Geometria proiettiva generale, le serie  $g_n^r$  di gruppi di punti sopra una curva, i sistemi lineari di curve sopra una superficie, ecc.

#### VIII. *I nuovi sviluppi dell'Algebra moderna.*

Ho accennato all'Algebra in veste geometrica, che contempla le equazioni e i sistemi d'equazioni a più incognite, di fronte alle trasformazioni birazionali; e credo di non cedere ad una predilezione individuale, affermando che essa si trova oggi al posto più avanzato sulla linea del progresso intensivo delle Matematiche, come continuatrice legittima della grande tradizione dei problemi algebrici, di cui ho porto innanzi una rapida veduta. Tanto più che quasi tutti i rami della Matematica qualitativa, dalle funzioni abeliane alle funzioni automorfe e alle equazioni algebrico-differenziali (secondo gli sviluppi di Poincaré e Painlevé) vi si riattaccano intimamente.

Si consideri dunque un teorema pertinente a quella teoria, p. es. il teorema che l'annullamento del genere porge la condizione per la risoluzione d'un'equazione

$$f(xy) = 0,$$

mediante funzioni razionali d'un parametro :

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t)$$

(Clebsch), e che la risoluzione effettiva si ottiene con operazioni razionali e tutt'al più coll'estrazione di una radice quadrata a partire dai coefficienti di  $f$  (Noether). Un siffatto enunciato porge una risposta pienamente determinata a una questione del pari determinata; nulla sembra più remoto dal campo proprio della critica dei principii; eppure la storia di quell'acquisto suppone—come abbiamo accennato—una lunga elaborazione di concetti: dal numero irrazionale all'immaginario, dalle permutazioni alle superficie più volte connesse, dalla Geometria proiettiva al principio di dualità generalizzato quale scaturisce dalla contemplazione logica dell'edificio geometrico!

Se ora taluno stimasse che l'elaborazione critica dei concetti s'incontri in quelle dottrine algebriche soltanto per fondare una base, su cui la costruzione proseguirà poi senz'altro rapporto colla critica stessa, ch'ei rifletta su altri ulteriori sviluppi; e così sarà tratto a riconoscere come la teoria invariantiva della superficie esiga un'analisi delicata, tendente allo stesso scopo per cui s'introducono nella Geometria proiettiva i punti impropri, cioè a rimuovere casi eccezionali d'invarianza (convenzioni sui buchi delle curve o sui punti-base dei sistemi lineari, sulla riducibilità o irriducibilità, ecc.); e d'altra parte vedrà che le stesse idee dominanti l'estensione del campo dei numeri, cioè l'introduzione dei numeri fratti, negativi o immaginari, trovano una feconda applicazione nel concetto più largo delle funzioni  $\phi$  di grado  $n-4$ , aggiunte ad un'equazione di grado  $n$

$$f(xyz) = 0,$$

le quali sono invarianti di  $f$  rispetto alle trasformazioni birazionali (Clebsch-Noether). Infatti l'estensione della teoria degli invarianti di Clebsch-Noether si è fatta appunto nel senso di considerare per così dire le  $\phi$  virtuali che—nel caso del genere  $p=0$ —porgono talora funzioni  $\phi^n$  effettivamente esistenti, le quali (almeno per  $n=2, 3, 4, 6$ ) costituiscono dei nuovi invarianti di  $f$ . E mi sia lecito ricordare che mercè questi invarianti si è potuta assegnare in forma semplice e determinata la condizione per la risoluzione razionale di  $f(xyz) = 0$ , la condizione per la trasformazione di  $f(xyz) = 0$  in un'equazione fra due variabili  $F(xy) = 0$ , la condizione perchè  $f(xyz) = 0$  posseda un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stessa, ecc.

Infine lo studio delle trascendenti connesse con un campo algebrico a due dimensioni, ha messo Picard e Poincaré in faccia alle difficoltà concernenti la connessione delle varietà a quattro dimensioni; e deve ritenersi che talune difficoltà non ancora superate verranno sciolte il giorno che la critica dei principii della Geometria avrà approfondito il più alto problema che ancora appaia insoluto nel suo campo, dando una base geometrica pura all'edificio dell'*Analysis situs*.

#### IX. Conclusioni: pragmatismo e naturalismo matematico.

La tesi enunciata in principio mi sembra ormai sufficientemente dimostrata: la critica dei principii fa parte integrante della storia degli sviluppi delle Matematiche, così dal punto di vista estensivo come dal punto di vista intensivo; essa è il processo di elaborazione e di definizione dei concetti che tende ad estendere i dati dell'intuizione

a campi sempre più vasti e così ad allargare la posizione dei problemi e a preparare strumenti più penetranti per recare risposta determinata a più profonde questioni.

Ora questa veduta storica suppone in qualche modo una legge di sviluppo delle Matematiche, rispetto a cui assegna—per così dire—un fine naturale alla critica dei principii. Ed intanto il progresso di questa critica stessa sembra all'opposto far scaturire l'illimitata *arbitrarietà della costruzione matematica*.

Già vedemmo che le funzioni, assunte altra volta come dato di una realtà naturale (la potenza, la radice, l'esponenziale, il logaritmo, il seno, ecc.), cedono il posto alle funzioni generali nel senso di Dirichlet, che sono corrispondenze arbitrarie. Le proprietà fondamentali dei numeri non appaiono più l'espressione di assiomi necessari, ma—soprattutto per l'analisi di Cantor e di Peano—divengono condizioni arbitrarie con cui si definiscono certi insiemi ordinati; p. es. il principio d'induzione matematica perde il suo valore di canone logico per rappresentare solo una condizione costruttiva della serie ben ordinata di oggetti cui corrispondono i numeri interi, tantochè la negazione del principio dà luogo—in quella serie—all'esistenza di punti-limiti cui corrispondono numeri ordinali transfiniti.

La Geometria, che aveva visto allargare il campo delle sue possibilità colla trattazione delle ipotesi non euclidee e cogli spazî a più dimensioni, diventa ormai suscettibile di un'estensione illimitata, sicchè non vi è più gruppo di oggetti dotato di proprietà qualsiasi che non possa rivendicare il nome di "spazio."

La scuola logica non ha mancato di lumeggiare il significato delle rivoluzioni compiute. Si sono detronizzati gli assiomi; rotto l'incantesimo della loro investitura per diritto divino, cioè il loro fondamento in una evidenza o necessità naturale dello spirito umano, essi sono divenuti dei semplici postulati, non più principii o membri d'un'aristocrazia gentilizia, ma funzionari elettivi di una repubblica democratica, che possono essere revocati o sostituiti per motivi di economia o di semplice rinnovamento.

Un Aristofane potrebbe anche trovare che l'arbitrio illimitato di scelta rischia di convertire questa democrazia in una vera demagogia; che le funzioni *disoneste* prendono troppo spesso il posto delle semplici ma oneste funzioni soddisfacenti ai teoremi del Calcolo infinitesimale, che talune costruzioni di Geometrie bizzarre (giustificate dapprima come mezzo per investigare certi rapporti di subordinazione) affermano la libertà dell'idea ispiratrice al modo stesso che le forme di governo succedentisi nel Principato di Monaco, auspicie Rabagas.

Eppure anche le esagerazioni un po'barocche a cui conduce l'odierna critica dei principii sono servite a diffondere una giusta idea del valore della Logica e per contrapposto lasciano indovinare il valore che altri elementi non logici assumono nella conoscenza matematica. L'importanza della veduta della Logica così messa in luce risulta già dal fatto che quell'indirizzo critico ha suscitato un vasto movimento filosofico, propagatosi—ai nostri giorni—sotto il nome di *pragmatismo*. Infatti di padre di quel pragmatismo filosofico che è riuscito finalmente ad una reazione antiscientifica, è proprio il pragmatismo dei logici matematici che, armati della critica dei principii, rivendicano il carattere di definizioni dei postulati e ne desumono l'arbitrarietà della costruzione matematica, contro una concezione che potrebbe chiamarsi *naturalistica*, secondo la quale gli enti delle Matematiche esistono fuori di

noi, al pari delle specie viventi delle scienze naturali, come oggetto di scoperta e di osservazione.

Ebbene se il pragmatismo logico-matematico riesce a combattere vittoriosamente il naturalismo ed il realismo ingenuo che vi soggiace, quel pragmatismo a sua volta viene vinto dalla storia. La storia degli sviluppi delle Matematiche ci ha mostrato appunto il lavoro della critica logica in una elaborazione secolare di concetti.

Pertanto alle conseguenze che si vorrebbero trarre dalla veduta dei postulati come definizioni implicite, la storia oppone che le definizioni stesse degli enti matematici non sono arbitrarie poichè appariscono come frutto di un lungo processo d'acquisto e di uno sforzo assiduo rivelante alcuni motivi generali della ricerca.

Vi è una tradizione di problemi e vi è un ordine che presiede ai progressi estensivi ed intensivi della scienza; perciò solo vi è una materia propria delle Matematiche, che le definizioni mirano a rispecchiare; onde l'arbitrio del definitore non sembra diverso da quello dell'architetto che dispone le pietre di un edificio elevantesi secondo un armonico disegno.

Opera d'Architettura è infatti la scienza matematica; non realtà che si offra allo sguardo di un osservatore esterno come qualcosa di dato, ma processo che si fa dallo spirito umano, e pur rivela la realtà stessa dello spirito creatore.

Così dunque l'atto di volontà che il matematico rivendica ognora più libero nella posizione dei problemi, o nella definizione dei concetti o nell'assunzione delle ipotesi, non può mai significare arbitrio, ma solo facoltà di avvicinarsi da più lati, per approssimazioni successive, a non so che ideale implicito nel pensiero umano, cioè ad un ordine e ad un'armonia che ne riflette le intime leggi.

Se questa è la conclusione che emerge da una veduta storica della scienza e della critica, il pragmatismo logico matematico, lungi dall'aprire un'era di costruzioni fantastiche moltiplicantisi all'infinito quasi per giuoco o per bizzarria, avrà dato alla ricerca una coscienza più elevata dei suoi scopi; e d'altra parte, purificando la Logica, avrà dimostrato l'insufficienza di essa e la necessità di approfondire gli altri elementi psicologici che conferiscono significato e valore alla costruzione matematica.

#### X. *Le Matematiche come istrumento e come modello della scienza.*

Alla nostra veduta idealistica, che sembra nascere da una considerazione esclusiva delle Matematiche pure, altri potrebbe contrapporre una veduta apparentemente più larga in cui le Matematiche stesse sieno ritenute, non più come un oggetto di per sè stante, ma come strumento della scienza naturale. Senonchè questo concetto (che a taluno può essere suggerito, per reazione, dalle esagerazioni del pragmatismo logico) porterebbe ad impoverire singolarmente il campo dell'attività matematica. Esso ci ricondurrebbe alla veduta di Fourier che rimproverava Abel e Jacobi di studiare le equazioni e funzioni algebriche anzichè volgersi di preferenza al movimento del calore; rimprovero cui bene rispose lo Jacobi che scopo della scienza è unicamente l'onore dello spirito umano e che a questo titolo una questione di numeri non vale meno che una questione relativa all'ordine dell'universo.

Se è necessario portare argomenti in appoggio alla veduta di Jacobi, basta—io credo—riflettere come appunto le difficoltà della teoria dei numeri abbiano attratto in

ogni tempo gl'intelletti più alti, compresi i fondatori del sistema del mondo e della Meccanica.

Ma la ristrettezza dell'anzidetta considerazione delle Matematiche si rivela meglio sul suo proprio terreno, mercè una veduta approfondita del posto che alle Matematiche spetta nell'ordine dello scibile.

Se la larghezza delle applicazioni del calcolo ha potuto avvalorare l'idea che le Matematiche sieno soltanto uno *strumento* della cognizione fisica, in ogni tempo i più alti pensatori riconobbero in esse un *modello* della scienza.

Questo concetto porge una più giusta veduta del rapporto che intercede fra il progresso dello spirito matematico e il progresso scientifico in generale. Bene avverte il Poincaré che appunto lo spirito matematico, indipendente dalla potenza degli algoritmi, è attivo nelle feconda intuizione delle analogie di Faraday, che guida Maxwell alle sue memorabili scoperte. E nello stesso senso può dirsi p. es. che la Termodinamica è tutta intera un'opera matematica, sebbene si svolga in gran parte indipendentemente, non dai concetti, ma dai risultati del calcolo.

L'ispirazione matematica si rivela del pari più largamente in altri rami di scienza, che pure non toccano propriamente ad una fase di sviluppo matematico.

Per tal modo si può dire che il progresso tenda a realizzare l'ideale scientifico di Platone, di Descartes e di Leibniz, che pone *le Matematiche modello della scienza*.

Questa veduta, allargante il valore delle Matematiche nell'ordine universale dello scibile, restituisce anche tutto il suo valore al libero sviluppo della teoria pura, rivendicato dal secolo decimonono.

Ora al lume della concezione idealistica delle Matematiche, quella veduta acquista un significato nuovo rispetto alla posizione *realistica* dei nominati filosofi.

Quando Platone costruiva il mondo delle Idee ad immagine della classificazione delle forme geometriche; quando Galileo, Descartes, Leibniz, foggiano una nuova realtà dinamica, i cui invarianti sono rapporti di successione, cioè leggi naturali; questi filosofi proiettavano nel mondo esterno il processo interiore del loro spirito, ed in quel mondo credevano di riconoscere le cause elementari, come dato semplice della realtà stessa.

Oggi la critica gnoseologica, connessa all'investigazione dei principii di cui si è innanzi discorso, ci avverte che il modello matematico della scienza ha un significato diverso; non si tratta di scoprire la profonda struttura metafisica del reale, ma di riconoscere le forme dell'attività spirituale che atteggia la realtà sensibile nella costruzione scientifica, secondo le intime leggi dello spirito umano.

Così le Matematiche, che per Platone, Descartes, Leibniz offrivano il fondamento di una filosofia della natura, elevantesi ad una grandiosa metafisica razionalistica, oggi, mercè il possente risveglio della critica contemporanea, suscitano una nuova filosofia dello spirito, cioè una gnoseologia che deve rivelare il pensiero a se stesso indagando le profonde armonie psicologiche ond'esso si atteggia nella continuità della storia.

E da questo lato la critica dei principii promette di recare nuovi risultati importanti; dopo avere illuminato il carattere proprio della Logica, essa riuscirà ad approfondire lo studio degli elementi intuitivi di diverso ordine che conferiscono alle Matematiche il loro inesauribile valore.