Enriques, Federigo

Nozioni di matematica [ad uso dei licei moderni]

vol. **I**

Zanichelli, Bologna, 1914. (Con U. Amaldi)

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

NOZIONI DI MATEMATICA

AD USO DEI LICEI MODERNI

VOLUME PRIMO

(CLASSE II)

LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

[illegible]

Bologna - Coop. Tip. Azzoguidi — 8-1914

PREFAZIONE

Il programma di Matematiche per il Liceo moderno corrisponde ad una vasta tendenza riformatrice dell' insegnamento, che è attiva oggidì presso tutti i popoli colti ed appare caratteristica del nostro tempo.

L'ideale a cui sono ancora informati i vigenti quadri didattici, esprime una concezione analitica della Scienza che cerca di perfezionare le singole trattazioni, di ridurre i principii su cui si assidono, di purgarle da concetti o da metodi pertinenti ad altre dottrine. Rigore e purismo riassumono questa tendenza, che ha ricevuto da noi ampio ed alto sviluppo ed ha recato — senza dubbio — larghi benefici alla Scuola e alla Cultura nazionale.

Ma a codesto ideale si contrappone una concezione sintetica della Scienza, per cui le varie teorie matematiche non sono pensate come organismi chiusi di per sè stanti, ma piuttosto come parti di un medesimo organismo, che debbono vivere della vita del tutto.

Qui il purismo isolatore cede ad una veduta più larga che dà rilievo alle connessioni e subordinazioni reciproche dei problemi e dei metodi. Così la bellezza e la perfezione che si cercavano in un'Algebra o in una Geometria pura, capaci di svolgere un ristretto numero di concetti, appariranno in diversa luce ove si abbia di mira di ricostituire l'unità fondamentale di codeste dottrine, conforme allo sviluppo storico. Medesimamente dovranno cadere le barriere elevate fra Matematiche elementari e superiori, o fra Matematiche ed Applicazioni delle Matematiche, cioè tutte le divisioni elaboratesi in forza del progresso differenziale della Scienza, e codificate in una troppo rigida classificazione.

L'ideale sintetico della Scienza, suscitato insieme da profonde esigenze filosofiche e da motivi d'ordine pratico, non poteva lasciare indifferente la Scuola. E così la riforma didattica invocata da uomini eminenti di ogni paese guadagna ogni giorno adesioni più larghe e più significative.

Di tale movimento che ha trovato espressione nei lavori della Commissione internazionale per la riforma dell'insegnamento delle Matematiche, attestano anche pregevoli trattati fra cui basti citare quelli del Tannery e del Sainte-Laguë.

Gli autori di queste Nozioni, antichi scolari del Liceo, si sono accostati al nuovo ordine d'idee, riconoscendone francamente il valore, soprattutto per riguardo ad un Istituto dove la Scienza è chiamata in parte a prendere il posto degli studî letterarî e linguistici, contribuendo in prima linea ad un'armonica educazione delle giovani menti.

Essi nutrono fiducia che i noti vantaggi della cultura classica, di cui serbano vivo e grato il ricordo, possano conservarsi anche attraverso diversi ordini di studio, che sono largamente richiesti dallo sviluppo della vita e della società moderna, purchè gli scopi superiori dell'educazione formale non vengano posposti ed obliterati da una visione grettamente utilitaria dell'insegnamento, e purchè il nuovo Istituto — movendosi con progresso graduale sul terreno della tradizione — riesca veramente a trarre partito dalle nuove idee vivificatrici, senza perdere tutto ciò che di buono ci è acquisito da un'esperienza secolare.

Questo prudente criterio ha servito costantemente di guida al nostro lavoro. Il quale non mira dunque ad una brusca rinnovazione di metodi, cui mancherebbe oggi il conforto dell'esperienza e la preparazione dell'ambiente scolastico, ma vuol compiere soltanto un primo passo che speriamo possa segnare la buona via: la via che dovrà percorrere l'evoluzione dell'insegnamento medio delle Matematiche nel nostro paese, atteggiandosi in proprie forme, secondo le esigenze peculiari dello spirito italiano, alle idee direttive che vanno simultaneamente manifestandosi in tutto il mondo civile.

L'applicazione concreta dei criterî suesposti e l'evoluzione di forma e di materia che vi è implicata risultano già dall'indice degli argomenti trattati in questo libro; il quale tuttavia deve essere giudicato in rapporto al secondo volume che ne porgerà il compimento. All'ordine così indicato basteranno pochi commenti, necessariamente limitati alla parte che oggi si pubblica.

1) La teoria dei numeri irrazionali viene fatta sorgere dal calcolo approssimato, che — razionalmente proseguito — conduce al concetto del numero decimale illimitato. Lo sviluppo della dottrina risulta quindi ispirato all'ordine d'idee del Weierstrass, già espresso in forma didattica da varii trattatisti [1].

2) La trattazione dei radicali quadratici e delle equazioni di secondo grado mette in rilievo lo svolgimento parallelo e l'interdipendenza dei concetti algebrici e geometrici, quali risultano dal progresso storico. Questo modo d'esposizione reca il peculiare vantaggio di chiarire i passi successivi della ricerca, in guisa che l'allievo possa comprendere le verità insegnate rivivendo il processo del loro acquisto.

3) La stessa osservazione si può ripetere in rapporto ai problemi di cubatura dei solidi, dove viene esposto in forma elementare il procedimento d'integrazione classico dei precursori del Calcolo infinitesimale, che risale ad Archimede. E giova avvertire che questi sviluppi (per cui si raggiunge già una singolare semplicità nella cubatura della sfera) offrono anche la più naturale preparazione al corso successivo. Chè, se qualche insegnante preferisca alla nuova via la trattazione tradizionale o comunque giudichi opportuno di richiamare su di essa l'attenzione degli allievi per opportuni confronti, il nostro libro soddisfa a tale desiderio offrendo al lettore una seconda esposizione della dottrina, concepita secondo il disegno oggi comunemente adottato.

4) Le funzioni e le grafiche costituiscono la parte essenzialmente nuova del programma qui esposto. Aderendo pienamente allo spirito delle istruzioni che informano il programma ministeriale, ci siamo intrattenuti a lumeggiare, in rapporto alle Scienze di osservazione, i diversi modi secondo cui le funzioni possono venir definite; ed abbiamo usato delle

[1] Cfr. p. es. O. Reichel (Grundlagen der Arithmetik, t. II, 1890), F. Hocevar (*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* für Obergymnasien, 1902), e, in Italia: Frattini (Lezioni di Algebra, Geometria e Trigonometria piana e sferica, t. I, 1911), nonchè Volpi (« Pitagora » Anno XII, 1905) e Soschino (« Supplemento al Period. di Mat. » Anno XXVI, 1911).

coordinate solo per lo scopo richiesto, di far comprendere il significato delle grafiche. Così contenuta entro limiti precisi, la nuova materia d'insegnamento non può dar luogo a difficoltà didattiche in confronto al vecchio programma; mentre siamo convinti che offra ai giovani un campo di utili riflessioni, notevolmente suggestive.

5) Nella scelta e nell' ordinamento degli « Esercizi ed applicazioni » con cui si chiude il volume, ci siamo ispirati al proposito di fornire non soltanto un insieme di argomenti di esercitazione, ma anche una serie di commenti e di complementi agli sviluppi del testo.

Tale è — in breve — il contenuto del libro, a cui seguirà presto la seconda parte che lo completa.

Facciamo assegnamento sulla cooperazione degl' Insegnanti e sui consigli che essi vorranno comunicarci, per arrecarvi in progresso di tempo tutti i miglioramenti suggeriti dall' esperienza didattica.

Ci piace terminare esprimendo la nostra gratitudine alla Casa Editrice, e in particolare al comm. Zanichelli e al cav. Franchi, per la premura con cui è stato assecondato ogni nostro desiderio in ordine all' esecuzione tipografica del libro, e al cav. Capri per la cura e l' intelligenza con cui ha disegnato le numerose figure.

Modena-Bologna, Maggio 1914.

UGO AMALDI, FEDERIGO ENRIQUES

NOZIONI DI MATEMATICA

I.

MISURE APPROSSIMATE E NUMERI IRRAZIONALI

Misurazione decimale dei segmenti

1. Le grandezze che nella pratica si è condotti a *misurare*, possono essere di natura assai diversa: distanze, intervalli di tempo, pesi, temperature, ecc. Ma qui considereremo le *grandezze geometriche* e dapprima in modo particolare i *segmenti* di retta, i quali si prestano, in base a opportune convenzioni, a rappresentare anche le altre grandezze, cui dianzi accennammo.

2. Ciascuno di noi sa che per *misurare* un dato segmento a, si fissa come *unità di misura* un certo segmento u, il quale è comunemente il *metro* (1), e si verifica quante volte u sia contenuto in a. Se vi è contenuto esattamente un numero intero n di volte (o, come si suol dire, se u è sottomultiplo di a secondo n), il numero n si dice la *misura* o *lunghezza* di a, rispetto all'unità u, od anche il *rapporto* di a ad u. Se invece a non è multiplo della unità u, sarà certamente compreso tra due multipli consecutivi di essa

$$nu < a < (n+1)u;$$

(1) Com'è ben noto, il *metro* è la lunghezza di un certo regolo-campione di platino iridiato, che si conserva al « Bureau international des Poids et Mesures » di Sèvres, presso Parigi. Esso fu costruito uguale alla quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, quale risultava dalle misurazioni compiute, per l'arco di meridiano compreso tra Dunkerque e Barcellona, da Delambre e Mechain, dal 1793 al 1799, per iniziativa dell'Assemblea Nazionale francese. Ma determinazioni più recenti e più precise hanno messo in luce la ineguaglianza dei diversi meridiani terrestri, per cui risulta inesatta (per circa $\frac{1}{5000}$ del suo valore) la *definizione naturale* del metro, come parte aliquota del meridiano terrestre. È per questo che la Conferenza internazionale dei pesi e misure, tenuta a Parigi nel 1889, ha deciso di adottare la *definizione convenzionale* del metro indicata in principio di questa nota.

e allora i numeri interi n ed $n+1$ si diranno *misure* o *lunghezze approssimate di* a *a meno di un'unità*, la prima *per difetto*, l'altra *per eccesso*.

Se in tal caso, si vuol misurare il dato segmento in modo più preciso, si prova a suddividere l'unità u in un certo numero di parti uguali, per esempio in q, e si cerca quante volte il segmento a contenga $\frac{u}{q}$. Può accadere che codesto sottomultiplo di u sia contenuto esattamente un certo numero di volte p in a, talchè si abbia

$$a = p\frac{u}{q},$$

il che si scriverà anche

$$a = \frac{p}{q}u$$

[e si leggerà « a uguale ai p q^{mi} di u »]. Se così accade, si dice che $\frac{p}{q}$ è la *misura* o *lunghezza* di a rispetto all'unità u od anche il *rapporto* di a ad u.

3. Alla definizione precedente si è giunti prendendo come *unità ausiliare* un certo sottomultiplo $\frac{u}{q}$ della *unità fondamentale* u. Ora è notorio che, per le stesse convenzioni per cui una gran parte degli Stati civili hanno adottato come unità fondamentale il *metro*, si sono assunti come unità ausiliari non già dei sottomultipli quali si vogliano di esso, ma bensì i sottomultipli secondo 10, 100, 1000, ecc., cioè il *decimetro*, il *centimetro*, il *millimetro*, ecc.

Supponiamo che, misurando con codeste successive unità decimali ausiliari un certo segmento a, si trovi che esso è compreso tra 35 e 36 dm., e così tra 358 e 359 cm., tra 3586 e 3587 mm.; ossia indicando al solito con u il metro, sussistano le disuguaglianze

$$\frac{35}{10}u < a < \frac{36}{10}u, \quad \frac{358}{100}u < a < \frac{359}{100}u, \quad \frac{3586}{1000}u < a < \frac{3587}{1000}u, \ldots$$

le quali si potranno anche scrivere

(1) m. $3{,}5 < a <$ m. $3{,}6$, m. $3{,}58 < a <$ m. $3{,}59$, m. $3{,}586 < a <$ m. $3{,}587, \ldots$

Generalizzando una definizione data al n. prec., i numeri così trovati successivamente

$$(2) \qquad 3{,}5 \qquad 3{,}58 \qquad 3{,}587 \ldots.$$

e

$$(3) \qquad 3{,}6 \qquad 3{,}53 \qquad 3{,}588 \ldots.$$

si diranno *misure* o *lunghezze approssimate* di a, rispettivamente a meno di

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \ldots.,$$

le (2) *per difetto,* le (3) per *eccesso.*

La frazione $\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{100}$ o $\frac{1}{1000}$ ecc. dicesi *limite di approssimazione* od anche *errore,* in quanto fornisce un limite dell'errore che si commetterebbe, sostituendo al segmento dato a il segmento misurato da uno dei due valori approssimati corrispondenti.

Notiamo che per ognuna di codeste lunghezze approssimate che si ottengono successivamente col procedimento di misurazione decimale suaccennato, il limite di approssimazione è dato precisamente dall'unità decimale dell'ultima cifra ottenuta; ed inoltre nelle misure per difetto, che così si trovano, *tutte le cifre sono esatte,* cioè, una volta trovate, non mutano più, per quanto si prosegua nella misurazione decimale. Così p. es. se ci riferiamo al segmento considerato dianzi, le misure per difetto 3,5; 3,58; 3,586,.... hanno tutte le cifre decimali esatte.

Ma si possono considerare anche *lunghezze approssimate* del segmento dato, per le quali il limite di approssimazione è dato da un'unità decimale maggiore di quella dell'ultima cifra decimale. P. es. dalle disuguaglianze (1) ricaviamo pel nostro segmento a queste altre

$$\text{m. } 3{,}585 < a < \text{m. } 3{,}595.$$

I due numeri 3,585 e 3,595, che differiscono fra loro di 0,01 e misurano due segmenti, l'uno minore, l'altro maggiore di a, si diranno anch'essi *lunghezze approssimate* di a *a meno di* $\frac{1}{100}$ rispettivamente *per difetto* e *per eccesso.*

Qui la misura per difetto 3,585 contiene *due* cifre esatte; ma può anche darsi che una misura approssimata (per difetto) a meno di $\frac{1}{100}$ contenga *una* sola cifra decimale esatta; tale è, per il nostro solito segmento, il numero 3,579, in quanto risulta dalle (1)

$$\text{m. } 3{,}579 < a < \text{m. } 3{,}589.$$

Ed una misura approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{100}$ può anche non contenere nessuna cifra decimale esatta; ma ciò è possibile solo nel caso in cui la misura approssimata considerata abbia la cifra dei centesimi uguale a 9: p. es. se le cifre esatte di un numero sono 4,6034...., il valore 4,594 approssimato a meno di $\frac{1}{100}$ ha esatta soltanto la parte intera.

Estendendo le definizioni e le osservazioni precedenti al caso generale, si dirà *misura* o *lunghezza approssimata* di a *a meno di* $\frac{1}{10^n}$ *per difetto* ogni numero l, tale che i due segmenti misurati da l e da $l+\frac{1}{10^n}$ siano il primo minore, l'altro maggiore di a:

$$lu < a < \left(l+\frac{1}{10^n}\right)u;$$

mentre, sotto la stessa ipotesi, il numero $l+\frac{1}{10^n}$ si dirà *lunghezza approssimata* a meno di $\frac{1}{10^n}$ *per eccesso*.

Codeste lunghezze approssimate a meno di $\frac{1}{10^n}$ conterranno in generale più di n cifre decimali: ne conterranno precisamente n, soltanto nel caso in cui si tratti delle lunghezze ottenute col procedimento di misurazione decimale, in quanto questo conduce a considerare i due multipli consecutivi di $\frac{u}{10^n}$ che sono l'uno minore e l'altro maggiore di a.

Considerate, in particolare, le misure approssimate per difetto a meno di $\frac{1}{10^n}$, ciascuna di esse conterrà almeno $n-1$ cifre decimali esatte e ne potrà anche contenere n, come accade per la misura ottenuta colla misurazione decimale: solo nel caso in cui l'n^{ma} cifra decimale sia uguale a 9, il numero delle cifre esatte potrà scendere al di sotto di $n-1$.

4. Le osservazioni precedenti sono di importanza fondamentale nella pratica, dove il processo di misurazione decimale non perviene mai all'esattezza e si arresta anzi in ogni caso non appena siasi raggiunto un grado di approssimazione, che possa bastare per gli scopi, cui si mira.

Così gli Agrimensori, che nelle loro misurazioni si servono del decametro a catena o a nastro, si accontentano generalmente della approssimazione di 1 dm., mentre un venditore di stoffe, che usa il solito metro a regolo graduato, non bada nel misurare la sua merce a 1 cm. in più o in meno.

E anche nelle misurazioni più precise viene inevitabilmente imposto un limite alla approssimazione sia dalla limitata potenza dei nostri sensi, sia dalla imprecisione degli strumenti misuratori, sia infine dal fatto che le lunghezze concrete che si vogliono misurare non sono in generale esattamente definite. Basta riflettere, per esempio, che nel disegno ciò che noi chiamiamo « punto » è effettivamente un segno avente certe dimensioni, le « rette » sono striscie di una determinata larghezza, e via dicendo.

Così anche il disegnatore più paziente e più esatto non può presumere di oltrepassare nei suoi disegni l'approssimazione di un mezzo millimetro. Molto più in là si spingono i Fisici e i Biologi, i quali, valendosi di strumenti muniti di viti micrometriche e di microscopi, pervengono a valutare persino i *micron* o millesimi di millimetro.

Ma qui non sarà inopportuno notare, sia pure incidentalmente, come la portata dell'*errore* commesso in una certa misurazione non debbasi valutare in base all'entità dell'errore stesso (*errore assoluto*) ma bensì del rapporto in cui esso sta alla misura ottenuta (*errore relativo*). Così, mentre per un disegnatore, che considera al più lunghezze di qualche decimetro, sarebbe intollerabile un errore di 1 mm., in Astronomia, ove la necessità di considerare distanze grandissime ha suggerito di assumere secondo i casi come unità lo spazio percorso dalla luce in un secondo (300 000 Km.) od anche il semidiametro dell'orbita terrestre, per le distanze medie delle stelle fisse dalla Terra si ritiene soddisfacente l'approssimazione a meno di diecimila semidiametri dell'orbita terrestre, ossia di cento milioni di chilometri.

Calcoli numerici approssimati

5. Come dianzi si è visto pei segmenti, così per ogni specie di grandezze concrete le misurazioni conducono in generale a risultati approssimativi; ed anzi, anche quando si abbia modo di conoscere per una data misura un grande numero di cifre decimali esatte, basta per lo più conservarne alcune, p. es. 3 o 4 ([1]). Così la lunghezza della circonferenza di 1 m. di diametro si assumerà praticamente uguale a m. 3,14, benchè si sappia che le cifre decimali che seguono il 4 sono 1, 5, 3, 2, ecc.; e, similmente, dovendo dividere in tre parti uguali una distanza di Km. 1361, si prenderà ciascuna di codeste parti uguale Km. 453,666, pur sapendosi che il valore esatto di $\frac{1361}{3}$ è dato dal numero decimale periodico semplice (a infinite cifre decimali)

$$453{,}6666.... = 453{,}\bar{6}.$$

Insomma nei calcoli aritmetici pratici si opera generalmente sopra numeri lievemente inesatti.

Ma l'uso di siffatti valori approssimati fa nascere dubbi e obbiezioni, che danno luogo ai problemi della cosidetta *teoria degli errori*. Se un Cassiere trascura sistematicamente le frazioni di centesimo, queste sommate insieme, alla fine di qualche mese, possono alterare il resultato dei suoi conti di parecchie lire. I tempi segnati da due diversi orologi che sono sensibilmente uguali per l'intervallo di un'ora, danno luogo a differenze apprezzabili alla fine di un'intiera giornata; e così via.

Nasce dunque il problema di determinare da una parte il limite di approssimazione del risultato di un certo calcolo, quando si conosce il limite di approssimazione di ciascuno dei dati; e viceversa di decidere con quale approssimazione debbano calcolarsi due o più numeri, perchè il risultato di una operazione eseguita su di essi abbia un certo limite di approssimazione.

([1]) Nelle applicazioni correnti si adottano delle unità di misura, tali che basti conservare appunto 3 o 4 cifre decimali: talvolta i Chimici, nei calcoli relativi a pesate, si spingono a 5 cifre dopo la virgola; e si può dire che gli Astronomi siano quasi i soli a calcolare con numeri a 7 cifre decimali.

È specialmente importante quest'ultimo problema, perchè in talune Scienze, come la Geodesia e l'Astronomia, vien prefissato un certo limite, che non deve mai essere superato dall'errore.

Ora siffatti problemi, presi in forma generale, sono assai difficili e non ammettono una risposta che sia al tempo stesso semplice e completa; ma per quanto riguarda le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, alle quali qui ci limiteremo, si giunge agevolmente a conclusioni semplici, mediante il confronto diretto del risultato che si ottiene eseguendo l'operazione su valori approssimati dei dati con quello che si avrebbe operando su *valori esatti.*

Le conclusioni, alle quali perverremo in tal modo, assumeranno un valore del tutto generale in base al paragrafo seguente, nel quale, ricorrendo a numeri decimali illimitati, mostreremo come si possa sempre considerare la *misura esatta* di una qualsiasi grandezza.

Qui intanto avvertiamo che nei nn. seguenti si intenderanno senz'altro estese ai *valori approssimati di un numero* le definizioni e le osservazioni del n. 3, relative alle misure approssimate di un dato segmento.

6. Somma. — Supponiamo che

$$2{,}524 \qquad 4{,}232$$

siano valori approssimati per difetto a meno di $\frac{1}{10^3} = 0{,}001$ di certi due numeri a e b, il che equivale a supporre

$$2{,}524 < a < 2{,}525$$

$$4{,}232 < b < 4{,}233.$$

Di qui sommando risulta

$$6{,}756 < a + b < 6{,}758;$$

e l'errore che si commette prendendo come valore approssimato per difetto di $a + b$ il numero 6,756 è minore di $\frac{2}{10^3}$ e quindi a maggior ragione di $\frac{1}{10^2} = 0{,}01$.

La stessa osservazione si può manifestamente ripetere in ogni altro caso analogo, onde si conclude che *per avere il valore approssimato a meno di* $\frac{1}{10^n}$ (per difetto o per eccesso) ***della somma di due numeri, basta tener conto di*** $n+1$ ***cifre decimali esatte per ciascuno dei due addendi.***

Questa medesima regola varrà anche per $r > 2$ addendi, *purchè sia* $r < 10$, giacchè l'errore risulterà in tal caso minore di

$$\frac{r}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n};$$

chè, se fosse

$$10 < r < 100,$$

bisognerebbe, per analoghe ragioni, prendere in ogni addendo $n+2$ cifre decimali esatte.

E importa da ultimo notare che siffatte regole si estendono senz'altro alle somme di addendi dotati di segno, e in particolare alla differenza di due numeri.

7. Il numero approssimato (per difetto) che si ottiene sommando i valori decimali di $r < 10$ addendi, presi ciascuno con $n+1$ cifre decimali esatte, risulta in generale con $n-1$ cifre decimali esatte. Ma vi sono, a ciò, delle eccezioni (cfr. n. 3): per es., se a e b sono dati per difetto, a meno di 0,001, rispettivamente da 5,384 e 3,215

$$5{,}384 < a < 5{,}385$$

$$3{,}215 < b < 3{,}216$$

risulta

$$8{,}599 < a+b < 8{,}601,$$

talchè, pur avendosi in 8,599 un valore approssimato (per difetto) a meno di 0,01 di $a+b$, si rimane incerti se codesta somma sia data, con due cifre decimali esatte, da 8,59 o da 8,60.

Tuttavia si è certi che le prime $n-1$ cifre decimali ottenute sono esatte, se la n^{ma} risulta minore di 9.

8. Prodotto. — In questo caso supponiamo che certi due numeri positivi a, b siano dati per difetto, rispettivamente con p e q cifre esatte, da a' e b'; cosicchè si abbia

$$a' < a < a' + \frac{1}{10^p},$$

$$b' < b < b' + \frac{1}{10^q}.$$

Moltiplicando membro a membro otterremo

$$a'b' < ab < a'b' + \frac{b'}{10^p} + \frac{a'}{10^q} + \frac{1}{10^{p+q}};$$

onde risulta che $a'b'$ fornisce un valore approssimato per difetto di ab con un errore minore di

$$\varepsilon = \frac{b'}{10^p} + \frac{a'}{10^q} + \frac{1}{10^{p+q}}.$$

Perciò se vogliamo ottenere pel prodotto un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^n}$ dovremo supporre che i numeri p e q delle cifre decimali esatte di a' e b' siansi presi abbastanza grandi, perchè risulti

$$\varepsilon < \frac{1}{10^n}.$$

Se vogliamo trovare una regola più precisa, cominciamo col riscrivere l'errore ε sotto la forma

$$\varepsilon = \frac{a'}{10^q} + \frac{1}{10^p}\left(b' + \frac{1}{10^q}\right)$$

e notiamo che se la parte intera di a' contiene r cifre, sarà certamente

$$a' < 10^r,$$

cosicchè il primo addendo di ε sarà certamente minore di

$$\frac{1}{10^{q-r}}.$$

Similmente se la parte intera di b' contiene s cifre, avremo anche

$$b' + \frac{1}{10^q} < 10^s,$$

salvo quando tutte le cifre di b' siano uguali a 9, nel qual caso potremo essere sicuri soltanto della disuguaglianza

$$b' + \frac{1}{10^q} < 10^{s+1}.$$

Corrispondentemente, il secondo addendo di ε sarà minore di

$$\frac{1}{10^{p-s}}$$

o, quanto meno, nell'indicato caso di eccezione, di

$$\frac{1}{10^{p-s-1}}.$$

Allora per ottenere

$$\varepsilon < \frac{1}{10^n},$$

basterà aver preso p e q in modo da soddisfare nel caso generale alle disuguaglianze

$$q - r > n, \quad p - s > n$$

ossia

$$p = s + n + 1, \quad q = r + n + 1$$

e, nel caso di eccezione,

$$q - r > n, \quad p - s - 1 > n;$$

ossia

$$p = s + n + 2, \quad q = r + n + 1;$$

e notiamo che quest'ultima modificazione alla regola generale è necessaria solo quando *tutti e due* i fattori a', b' siano formati di sole cifre 9, giacchè se ciò accade per uno solo, basterà, nelle precedenti osservazioni, prender come b' l'altro fattore, per ricadere nel caso generale.

Si conclude quindi che *per calcolare il prodotto* ab *colla approssimazione di* $\frac{1}{10^n}$, *in generale basta prendere* $n + s + 1$ *cifre decimali esatte per* a *ed* $n + r + 1$ *per* b, *ove si supponga che* r, s *siano i numeri di cifre contenute rispettivamente nelle parti intere di* a *e* b. *Solo nel caso eccezionale in cui i due fattori siano formati entrambi di sole cifre* 9, *bisognerà calcolare per uno di essi una cifra decimale in più.*

Questa regola, come è facile verificare, vale anche quando uno dei due fattori o entrambi siano minori di 1, bastando in tal caso porre $r = 0$ o $s = 0$ o $r = s = 0$. E quando uno dei due fattori o entrambi abbiano la prima cifra significativa qualche posto dopo la virgola si riduce corrispondentemente il numero delle cifre decimali che occorre calcolare in essi per ottenere pel prodotto il voluto limite di approssimazione.

9. Quoziente. — Se infine si vuol calcolare con una data approssimazione il quoziente $\frac{a}{b}$, notiamo che, potendosi questo scrivere sotto la forma

$$a \cdot \frac{1}{b},$$

non si hanno che da applicare le regole valide pel prodotto, purchè prima si determini con quante cifre decimali debbasi calcolare b per ottenere $\frac{1}{b}$ con una approssimazione prefissata.

Ora se b' è il valore di b calcolato con q cifre decimali esatte, avremo

$$b' < b < b' + \frac{1}{10^q}$$

e quindi

$$\frac{1}{b'+\frac{1}{10^q}}<\frac{1}{b}<\frac{1}{b'};$$

cosicchè l'errore ε_1, che si commette prendendo per $\frac{1}{b}$ uno dei due valori approssimati così ottenuti, sarà dato da

$$\varepsilon_1=\frac{\frac{1}{10^q}}{b'\left(b'+\frac{1}{10^q}\right)}$$

e riuscirà quindi certamente

$$\varepsilon_1<\frac{1}{10^q b'^2}.$$

Perciò se vogliamo ottenere per $\frac{1}{b}$ un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^n}$ dovremo prendere per b' un numero q di cifre decimali abbastanza grande perchè risulti

$$\frac{1}{10^q b'^2}<\frac{1}{10^n}.$$

Se si desidera una regola più precisa, si noti che se b ha qualche cifra intera ed è perciò maggiore di 1, sarà certamente

$$\varepsilon_1<\frac{1}{10^q},$$

cosicchè si otterrà un valore di $\frac{1}{b}$ approssimato a meno di $\frac{1}{10^n}$ prendendo $q=n$, cioè calcolando b con n cifre decimali.

Ma è facile vedere che codesto numero di cifre decimali è in molti casi sovrabbondante.

Invero se il numero b (o b') ha r cifre prima della virgola, con $r>1$ avremo

$$10^{r-1}<b'<10^r$$

e quindi

$$\varepsilon_1<\frac{1}{10^{q+2r-2}},$$

cosicchè in tal caso basterà prendere

$$q+2r-2=n$$

ossia

$$q=n-2r+2,$$

o, in altre parole, calcolare b con $n-2r+2$ cifre decimali esatte.

Se invece b è minore di 1 ed ha la prima cifra significativa all's^{mo} posto dopo la virgola, cosicchè si abbia

$$\frac{1}{10^s} < b' < \frac{1}{10^{s+1}},$$

risulta

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10^q \frac{1}{10^{2s}}} = \frac{1}{10^{q-2s}};$$

e allora si deve prendere

$$q - 2s = n \quad \text{ossia} \quad q = n + 2s,$$

il che vuol dire che per b si debbono calcolare $2s + n$ cifre decimali esatte.

10. Notiamo qui infine che l'applicazione delle regole date dianzi dà luogo rapidamente a complicazioni non lievi nei calcoli che comprendano parecchie operazioni. In tali casi èsse non cessano di essere utili come norme direttive, ma si sostituiscono anche con altre considerazioni, suggerite, caso per caso, dal buon senso e dalla pratica.

Misurazione esatta delle grandezze e numeri irrazionali

11. Torniamo alla misurazione decimale di un dato segmento a.

Abbiamo visto (n. 3) come si determinino ordinatamente le successive cifre decimali della lunghezza di a e abbiamo notato che in pratica ci si arresta in codesta determinazione non appena il valore trovato si possa considerare sensibilmente esatto, rispetto alle applicazioni che si hanno in vista.

Ma teoricamente noi possiamo immaginare di disporre di strumenti di misurazione così perfetti che ci permettano di proseguire quanto vogliamo nella determinazione delle successive cifre decimali della lunghezza di a.

Allora, supposto a uguale ad una certa frazione dell'unità, p. es. a $\frac{p}{q}u$, può darsi che $\frac{p}{q}$ sia riducibile a frazione decimale [1] e in tal caso il procedimento di misurazione avrà

[1] Com'è notorio, ciò si verifica sempre e soltanto, quando la frazione $\frac{p}{q}$, ridotta ai minimi termini, ammette a denominatore soli fattori primi 2 e 5.

termine precisamente quando si siano trovate tutte le cifre decimali di $\frac{p}{q}$.

Ma più spesso $\frac{p}{q}$ non sarà riducibile a frazione decimale, e allora, misurando $\frac{p}{q}u$, si troveranno *infinite cifre decimali succedentisi con un certo periodo*, ossia, come si dice in Aritmetica, si troverà il *numero decimale periodico* equivalente a $\frac{p}{q}$. Così, per esempio, prendendo il segmento $\frac{u}{3}$ e cercando successivamente quante volte esso contenga

$$\frac{u}{10},\ \frac{u}{100},\ \frac{u}{1000},\ \text{ecc.},$$

troveremo il numero decimale periodico $0,33333.... = 0,\overline{3}$.

Viceversa, se riusciamo in qualche modo a stabilire che per un certo segmento a le successive misurazioni decimali approssimate conducono ad un numero decimale periodico, ciò vuol dire che a è uguale ad una certa frazione dell' unità.

Per esempio, se troviamo come risultato della misurazione

$$0,171717.... = 0,\overline{17},$$

concludiamo che

$$a = \frac{17}{99}u.$$

Ora queste considerazioni conducono naturalmente a pensare che esistano anche segmenti a, pei quali le successive misurazioni approssimate conducano ad *infinite* cifre decimali susseguentisi *senza periodicità*, o, come noi diremo, ad *un numero decimale illimitato non periodico.*

Per precisare questa importante osservazione, notiamo anzitutto che si può sempre definire aritmeticamente un numero decimale illimitato non periodico, prefissando una qualsiasi regola di successione per le sue cifre, purchè non periodica; p. es.

$$0,121122111222....,$$

(dove alla virgola si fanno seguire una cifra 1 e una cifra 2, poi due cifre 1 e due cifre 2 e così via indefinitamente).

Ed allora riesce senz'altro naturale di ammettere (*postulato della continuità della retta*) che: *Ad ogni qualsiasi numero decimale illimitato non periodico corrisponde un determinato segmento, la cui misurazione decimale conduce ordinatamente alle successive cifre del numero considerato.*

In altre parole codesto segmento, per qualsiasi numero intero n, ammette come lunghezza approssimata (per difetto) a meno di $\frac{1}{10^n}$ il numero decimale che si ottiene dal dato, prendendone le prime n cifre decimali.

Perciò il numero decimale illimitato si dirà *lunghezza* di quel segmento o *rapporto* di esso all'unità prefissata.

A chiarire la ragione e il significato del postulato dianzi ammesso, riferiamoci al numero scritto poc'anzi

$$0{,}121122111222\ldots;$$

e notiamo che, perchè un segmento a, misurato con l'unità u e i suoi sottomultipli decimali, dia luogo al numero precedente, è necessario e sufficiente che a sia maggiore di tutti i segmenti misurati dai valori approssimati per difetto

(1) $$0{,}1 \quad 0{,}12 \quad 0{,}121 \quad 0{,}1211\ldots$$

e minore di tutti i segmenti misurati dai valori approssimati per eccesso

(2) $$0{,}2 \quad 0{,}13 \quad 0{,}122 \quad 0{,}1212\ldots.$$

Portiamo allora tutti codesti segmenti su una retta a partire da un suo punto O e, per esempio, alla destra di esso; e, per fissare le idee, chiamiamo rispettivamente

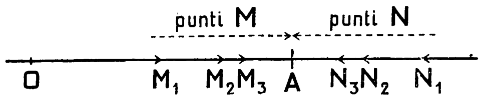
$$OM_1 \quad OM_2 \quad OM_3\ldots$$

i segmenti misurati dai numeri (1) e

$$ON_1 \quad ON_2 \quad ON_3\ldots$$

i segmenti misurati dai numeri (2).

Siccome i numeri (1) sono crescenti e i (2) decrescenti, i punti M_1, M_2, M_3,.... si susseguiranno verso destra e i punti N_1, N_2, N_3,.... in senso opposto; e, poichè ognuno dei valori approssimati per difetto (1) è minore di tutti i valori approssimati per eccesso (2), così i punti M resteranno tutti a sinistra di tutti i punti N.



In base a ciò l'intuizione che ciascuno di noi ha della retta come *linea continua* ci assicura che vi sarà certamente un punto A, che *separa* i punti M dai punti N, lasciando a sinistra i primi e a destra i secondi.

E codesto punto A è necessariamente *unico*, giacchè se vi fosse un secondo punto B, pur esso situato dopo tutti gli M e prima di tutti gli N, ognuno dei segmenti

$$M_1N_1,\quad M_2N_2,\quad M_3N_3,\dots,$$

dovrebbe essere maggiore del segmento AB, mentre invece le loro lunghezze

$$0,1\quad 0,01\quad 0,001\dots$$

diventano, purchè si vada abbastanza avanti nella successione, minori di qualsivoglia segmento assegnabile.

Il segmento OA, maggiore di tutti gli OM e minore di tutti gli ON è precisamente quello che ha per lunghezza il numero decimale prefissato.

12. Un segmento a, che, secondo quanto si è ammesso nel postulato del n. prec., abbia come lunghezza un numero decimale illimitato *non periodico*, non può essere della forma $\frac{p}{q}u$, giacchè in tal caso la sua misura $\frac{p}{q}$ sarebbe, ridotta a decimale, o limitata o periodica; cioè *il segmento a e l'unità u non possono avere nessun sottomultiplo comune*, o, come si è convenuto di dire, *debbono essere fra loro incommensurabili.*

Così il postulato del n. prec. porta, in particolare, ad ammettere l'esistenza effettiva di segmenti incommensurabili. La quale conseguenza può, a tutta prima, apparire strana e, quasi, ripugnare alla nostra intuizione; ma noi più innanzi faremo vedere, anche direttamente con esempi geometrici effettivi, che essa corrisponde alla verità; e, per esempio, mostreremo che sono incommensurabili il lato e la diagonale di un qualsiasi quadrato (n. 62).

I numeri decimali illimitati, che danno la misura dei segmenti incommensurabili coll'unità, e che, non essendo periodici, non si possono esprimere come frazioni ordinarie, si dicono *numeri irrazionali*, mentre si designano col nome di *razionali* i numeri interi e le frazioni ordinarie (cioè i numeri decimali limitati e gli illimitati periodici).

Operazioni sui numeri irrazionali

13. Ai numeri decimali più generali (cioè anche illimitati), i quali comprendono tanto i numeri razionali quanto gli irrazionali, è necessario *estendere* le operazioni fondamentali dell'Aritmetica, definite sin qui soltanto pei numeri razionali.

Prima per altro escludiamo, una volta per tutte, i numeri decimali illimitati che, da un certo posto in poi, hanno tutte le cifre decimali uguali a 9, convenendo di sostituirli in ogni caso col decimale limitato equivalente.

Così, per esempio, se incontreremo nei nostri calcoli il numero

$$3{,}27\bar{9} = 3{,}279999....$$

gli sostituiremo senz'altro il numero che gli è uguale (¹)

$$3{,}28.$$

14. Nota. — Codesta convenzione è in accordo col fatto, che, se immaginiamo di misurare un segmento con le solite successive approssimazioni decimali, non otterremo mai un numero come 3,27999.... ma addirittura il numero limitato equivalente 3,28.

15. Per semplicità di linguaggio, noi designeremo qui col nome generico di *numeri decimali* i numeri decimali più generali, vale a dire limitati o illimitati, periodici o no; e spesso li rappresenteremo con lettere latine minuscole: a, b, c,...., come già prima d'ora si è fatto pei numeri razionali.

In ogni caso saranno *uguali* due numeri decimali aventi ordinatamente uguali le cifre situate allo stesso posto rispetto alla virgola (tanto prima quanto dopo di essa).

Se invece due numeri decimali non sono uguali, diremo *maggiore* quello, in cui la prima cifra, che non sia identica a quella di ugual posto dell'altro, è maggiore (²).

Così, per esempio, di due numeri come

$$1{,}24531....$$

$$1{,}24529....$$

si dirà *maggiore* il primo; ed è facile vedere che, in base alla precedente definizione, dati due segmenti a e b, è maggiore

(¹) Infatti sappiamo dall'Aritmetica che è, per la regola di trasformazione delle frazioni periodiche miste,

$$0{,}009999.... = \frac{9}{900} = 0{,}01.$$

(²) Naturalmente anche qui il posto di una cifra va sempre computato *rispetto alla virgola*, tanto prima quanto dopo di essa.

quello che ha, rispetto alla unità prefissata u, lunghezza, o rapporto, maggiore.

Supponiamo, per fissare le idee, che a e b siano misurati rispettivamente dai numeri dianzi scritti; allora, fermandoci all'approssimazione corrispondente alla prima cifra disuguale, avremo che

$$\frac{12453}{10^4} u < a$$

mentre

$$b < \frac{12453}{10^4} u,$$

onde risulta veramente

$$b < a.$$

16. Pel seguito è molto importante il notare che, *se quattro segmenti a, b, c, d sono in proporzione, il rapporto dei due primi è uguale al rapporto degli altri due.*

Si ricordi invero che per trovare un certo valore approssimato del rapporto di a a b, per esempio il valore approssimato con tre cifre decimali esatte, bisogna cercare quante volte $\frac{b}{1000}$ sia contenuto in a. Supposto

$$\frac{m}{1000} b < a < \frac{m+1}{1000} b,$$

avremo simultaneamente, per la proporzionalità di a, b, c, d (¹),

$$\frac{m}{1000} d < c < \frac{m+1}{1000} d;$$

cioè i valori approssimati con tre cifre decimali esatte dei

(¹) *Geometria:* n. 440. — Citeremo sempre in tal modo i nostri « *Elementi di Geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori - VI ediz. ». — In sostanza per la definizione stessa della proporzione

$$a : b = c : d$$

abbiamo che, presi due numeri interi quali si vogliono m, n, secondo che è

$$\frac{m}{n} b < a \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} b = a \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} b > a,$$

si ha anche

$$\frac{m}{n} d < c \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} d = c \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} d > c.$$

rapporti di a a b e di c a d sono identici; e, poichè ciò vale per ogni possibile approssimazione, concludiamo che quei due rapporti sono uguali.

17. Il teorema precedente si inverte, in quanto, *se i rapporti di a a b e di c a d sono uguali, i quattro segmenti a, b, c, d sono in proporzione.*

Prendiamo infatti il segmento a' tale che sussista la proporzione

$$a' : b = c : d.$$

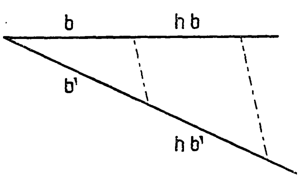
Pel n. prec. il rapporto di a' a b sarà identico a quello di c a d e quindi ancora al rapporto di a a b; onde si conclude che i due segmenti a e a', avendo a b il medesimo rapporto, sono uguali (postulato del n. 11), e sussiste veramente la proporzione

$$a : b = c : d.$$

18. D'or innanzi indicheremo il rapporto (razionale o irrazionale) di due segmenti a, b con $a : b$ e, designato con h codesto rapporto, scriveremo in ogni caso, per analogia con quanto si fa nel caso di h razionale,

$$a = hb.$$

Allora preso un altro qualsiasi segmento a', si potrà costruire il segmento $a' = hb'$, cioè tale che sia



$$a' : b' = a : b,$$

mediante la nota costruzione del quarto proporzionale dopo b, a, b' [1].

19. L'equivalenza dianzi stabilita tra proporzionalità di coppie di segmenti e uguaglianza di rapporti permette di definire le operazioni sui numeri irrazionali per via geometrica.

Cominciamo dall'*addizione*.

Dati due numeri decimali a, a' e supposto, com'è lecito, che essi siano definiti come rapporti di due segmenti a, a' ad un medesimo segmento u (n. prec.)

$$a = a : u, \quad a' = a' : u,$$

[1] *Geometria:* n. 451.

noi in accordo con ciò che vale nel caso in cui i numeri dati siano entrambi razionali, chiameremo *somma* $a + a'$ di a e a' il rapporto di $a + a'$ ad u, cioè porremo

$$a + a' = (a + a') : u.$$

Poichè abbiamo pei segmenti $a + a' = a' + a$, così risulta dalla definizione stessa la *proprietà commutativa* per la somma dei numeri

$$a + a' = a' + a;$$

e in modo analogo si riconosce la validità della *proprietà associativa*.

Se poi a non è minore di a', si dirà *differenza* $a - a'$ di a ed a' il rapporto di $a - a'$ ad u, cioè

$$a - a' = (a - a') : u.$$

20. La definizione di prodotto di due numeri a, a' qualsiansi ci è suggerita, per analogia, dalla seguente osservazione relativa al caso in cui si tratta di due numeri entrambi razionali $\frac{p}{q}$ ed $\frac{r}{s}$. Possiamo supporre che se $\frac{p}{q}$ è il rapporto di due segmenti a ed u, $\frac{r}{s}$ sia il rapporto di u ad un terzo segmento v (basta prendere $v = \frac{s}{r} u$). Allora dalle uguaglianze

$$a = \frac{p}{q} u, \quad u = \frac{r}{s} v$$

risulta

$$a = \frac{p}{q} \frac{r}{s} v$$

ossia

$$a : v = \frac{p}{q} \frac{r}{s}.$$

È appunto codesta proprietà del prodotto di due numeri razionali che permette di estendere la definizione del prodotto al caso di due numeri qualsiansi.

Dato

$$a = a : u,$$

supporremo a' definito come rapporto di u ad un terzo segmento v

$$a' = u : v \text{ (}^1\text{)};$$

e chiameremo *prodotto* aa' il rapporto di a a v

$$aa' = a : v.$$

Similmente per estendere la definizione di quoziente al caso di due numeri a, a' qualsiansi, converrà, per analogia al caso dei rapporti razionali, supporre che a, a' siano dati come rapporti di due segmenti a, a' ad uno stesso u

$$a = a : u, \quad a' = a' : u,$$

e si dirà *quoziente* $\frac{a}{a'}$ il rapporto di a ad a'

$$\frac{a}{a'} = a : a'.$$

In altre parole il quoziente di due numeri è il rapporto dei due segmenti che essi misurano (rispetto ad una qualsiasi unità).

21. In particolare se in luogo della vecchia unità u ne prendiamo una nuova u' avremo per un segmento a qualsiasi

$$a : u' = \frac{a : u}{u' : u}$$

cioè, *quando si cambia unità di misura, la nuova lunghezza di ciascun segmento si ottiene dividendo quella di prima per la vecchia lunghezza della nuova unità.*

22. Anche pel prodotto e pel quoziente così definiti si può dimostrare, come già per la somma, che essi godono delle proprietà fondamentali, che spettano al prodotto e al quoziente di numeri razionali; e a ciò si giunge servendosi di proprietà delle proporzioni tra segmenti. Ma noi qui non ci indugeremo su codeste deduzioni, che potranno fornire argomento ad un gruppo di esercizi.

(1) Se a' è dato come rapporto di due segmenti qualsiansi

$$a' = a' : u',$$

il segmento v non è altro che il quarto proporzionale dopo u', a' ed u.

23. Le definizioni date dianzi per le operazioni sui numeri decimali generali soddisfano alle esigenze della teoria. Praticamente i calcoli su numeri decimali illimitati si fanno per approssimazione, trascurando nei dati le cifre decimali da un certo punto in poi; e, naturalmente, in ogni singolo caso se ne conservano tante quante bastano ad assicurare al risultato l'approssimazione desiderata (Cfr. i nn. 6-9).

24. Ai numeri decimali illimitati si può anche attribuire un segno, dando così luogo a numeri (razionali o irrazionali) *positivi* e *negativi*; e ciò corrispondentemente al fatto che spesso nel considerare i segmenti di una medesima retta, convien riguardarli come *dotati ciascuno di un senso* o *orientati* [1]; in tal caso il rapporto $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD}$ sarà il numero *opposto* del rapporto $\overrightarrow{BA} : \overrightarrow{CD}$.

Ai *numeri reali relativi* si estendono senz'altro le proprietà di segno dei numeri relativi razionali, e in particolare la regola dei segni per il prodotto e per il quoziente.

Misurazione degli angoli

25. I numeri decimali generali (razionali e irrazionali), cui fummo condotti dalla misurazione dei segmenti, servono ugualmente a misurare le altre specie di grandezze. Noi, considerando anzitutto le grandezze del piano, ci occuperemo qui subito della misura degli angoli e nel capitolo seguente della misura dei poligoni e dei cerchi.

26. È ben noto che per la misurazione degli angoli si adotta generalmente come unità principale l'*angolo grado* o semplicemente *grado* (1°) che è la 90$^{\text{ma}}$ parte dell'angolo retto, e come unità ausiliari il *minuto* (1′), che è la 60$^{\text{ma}}$ parte del grado, e il *secondo* (1″) che è la 60$^{\text{ma}}$ parte del minuto.

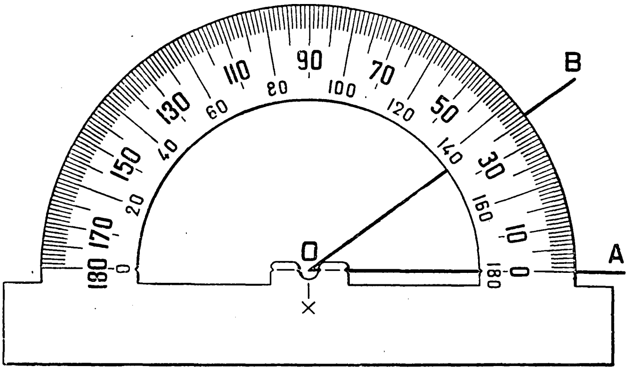
Fu anche proposto un sistema decimale di misurazione degli angoli, in cui l'angolo retto si divide in 100 *gradi* [2] centesimali, il grado in 100 minuti ecc.; ma per ora codesto sistema è ancora poco diffuso.

Nella pratica per la misurazione degli angoli si adoprano diversi tipi di strumenti misuratori o *goniometri*, dei quali il

(1) *Geometria:* n. 11.

(2) I Francesi dicono « *grade* ($1^{\curlyvee}$) », mentre chiamano « *degré* » il grado sessagesimale.

più semplice e il più usato nel Disegno è il *rapportatore* o *semicircolo graduato,* che si trova anche nelle comuni scatole



di compassi. Grazie a siffatti strumenti, dato un angolo, si può valutarne la *misura,* detta anche *ampiezza,* con una certa approssimazione, quale sia sufficiente per le applicazioni che si hanno in vista. Nel Disegno coi soliti rapportatori non si va oltre il mezzo grado; ma gli strumenti topografici ed astronomici sono forniti di circoli graduati, le cui ultime suddivisioni corrispondono anche ad angoli di 3′ o 2′ soltanto.

E facendo ricorso ad altri strumenti sussidiari (nonii, microscopi a stima, microscopi a vite micrometrica,...) gli Astronomi nelle loro osservazioni pervengono a determinare gli angoli (per esempio le cosidette *parallassi stellari*) con una approssimazione che può essere persino di $^1/_{100}$ di secondo. Più oltre praticamente non si va.

Ma teoricamente si può immaginare come pei segmenti (cfr. n. 11) che in codesta approssimazione si possa spingersi tanto innanzi quanto si vuole; e così si è anche condotti a considerare *angoli incommensurabili col grado* e aventi quindi un'ampiezza irrazionale.

A questo punto possiamo limitarci a notare come tutte le nostre considerazioni dei nn. 16-22, relative ai segmenti e alle loro lunghezze si estendano nel modo più naturale al caso degli angoli e delle loro ampiezze.

II.

AREE PIANE: POLIGONI E CERCHI

Aree dei poligoni

27. I poligoni considerati come *grandezze geometriche* si riguardano uguali quando sono *equivalenti* (cioè decomponibili in un certo numero di parti rispettivamente sovrapponibili), cosicchè, in tutte le questioni relative al confronto tra poligoni e in particolare alla loro misurazione, si può sostituire ad un poligono indifferentemente uno qualsiasi dei suoi equivalenti. Così per definire il rapporto di due poligoni P e P', questi si trasformano in due rettangoli R, R' aventi una prefissata altezza (1) e poichè questi stanno tra loro come le rispettive basi b, b' (2) si assume come rapporto $P:P'$ dei due poligoni il rapporto $b:b'$ dei due segmenti b, b'.

Ciò posto, per la misurazione dei poligoni, si fissa un certo poligono U come *unità*, e si definisce come *misura* od *area* di un qualsiasi poligono il suo rapporto alla unità U.

Notoriamente nella pratica come *unità di misura* U delle *aree* non si prende un poligono qualsiasi, ma precisamente il *quadrato della unità delle lunghezze;* e allora, per quanto si disse pocanzi, un qualsiasi poligono P sarà misurato dallo stesso numero che dà la lunghezza della base del rettangolo equivalente di altezza 1.

Risulta di qui che *poligoni aventi ugual area sono equivalenti* e che *di due poligoni di area disuguale è prevalente quello di area maggiore.*

Si estendono del pari ai poligoni e alle loro aree le altre considerazioni svolte ai nn. 19-21 per i segmenti e le loro lunghezze; e in particolare si dimostra che *il rapporto di due*

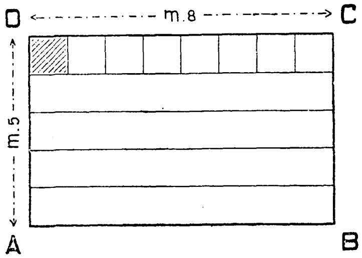
(1) *Geometria:* n. 380.
(2) *Geometria:* n. 464.

poligoni è uguale al quoziente delle loro aree (rispetto ad una unità qualsiasi).

28. Nella pratica per la misura di un poligono non sarebbe certamente comodo il procedimento indicato dianzi, pel quale si deve anzitutto trasformare il poligono dato nel rettangolo di altezza 1 e poi misurarne la base. Perciò si sono cercate delle regole che nei casi più comuni permettono di calcolare l'area del poligono quando si conoscano le lunghezze di taluni suoi elementi. Son regole notissime, delle quali qui ci limitiamo ad indicare rapidamente le dimostrazioni.

Cominciamo dal *rettangolo.*

Nel caso in cui i lati sono entrambi multipli della unità di misura delle lunghezze, risulta senz'altro dall'unita figura



che *l'area del rettangolo è uguale al prodotto delle lunghezze dei lati* (o *dimensioni* del rettangolo).

E questa regola si estende facilmente al caso generale, in base ad un noto teorema di proporzionalità [1]. Invero, preso il rettangolo $r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, di due segmenti quali si vogliono $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e indicata ancora per un momento con $\boldsymbol{u}$ l'unità dei segmenti e con $q(\boldsymbol{u})$ il rispettivo quadrato, avremo, per la proporzionalità dei rettangoli di uguale altezza alle basi relative,

$$r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) : r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{u}$$
$$r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) : \quad q(\boldsymbol{u}) \quad = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{u},$$

ossia passando dai rettangoli e dai segmenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$ alle rispettive misure a, b, 1 e ricordando che il quadrato $q(\boldsymbol{u})$ dell'unità lineare è l'unità delle aree,

$$r(a, b) : r(a, 1) = b : 1,$$
$$r(a, 1) : \quad 1 \quad = a : 1.$$

Ricaviamo di qui

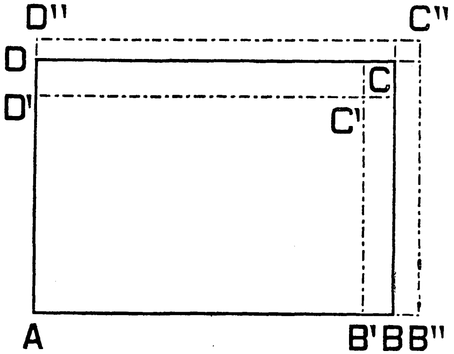
$$r(a, b) = r(a, 1) \times b$$
$$r(a, 1) = a$$

(1) *Geometria:* n. 464.

e quindi, come volevamo dimostrare,

$$r(a, b) = a \times b.$$

29. La regola precedente dà luogo ad una chiara interpretazione geometrica della relazione che intercede fra il limite di approssimazione dei fattori e quello del prodotto (cfr. il n. 8). Se delle dimensioni AB e AD del rettangolo $ABCD$ conosciamo, anzichè le misure esatte, le misure approssimate a', b' rappresentate in figura da AB', AD', e indichiamo con ε_1, ε_2 gli errori commessi, cioè i segmenti $B'B$, $D'D$, l'errore che si commette prendendo in luogo del prodotto esatto



$$(a' + \varepsilon_1)(b' + \varepsilon_2)$$

area del rettangolo $ABCD$, il prodotto approssimato ab, area del rettangolo $AB'C'D'$, è dato dall'area dell'esagono concavo *(gnomone)* $B'BCDD'C'$, la cui area è appunto

$$b'\varepsilon_1 + a'\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Analogamente per l'approssimazione per eccesso.

30. Come caso particolare della regola del n. 28 abbiamo che *l'area di un quadrato è uguale alla seconda potenza (o quadrato) della lunghezza del lato.*

Nota. — Risulta di qui che il rapporto di due quadrati di lato l, l' rispettivamente

$$\frac{l^2}{l'^2},$$

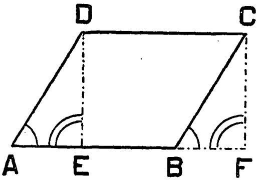
in quanto si può anche scrivere

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

è uguale alla seconda potenza del rapporto dei lati.

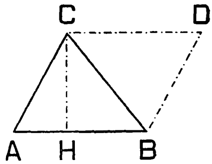
Dipende da ciò il fatto notorio che le varie unità decimali per la misura delle aree (metro quadrato, decametro quadrato, ettometro quadrato ecc.) decimetro quadrato, centimetro quadrato, ecc., sono ciascuna multipla secondo 100 di quella immediatamente minore.

31. Dalla regola che dà l'area del rettangolo si deducono tutte le altre che si usano nella pratica.

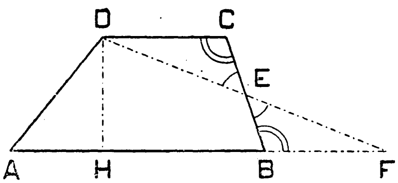


Anzitutto dal fatto che un parallelogramma è equivalente al rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza discende che *l'area di un parallelogramma è uguale al prodotto della lunghezza della base e dell'altezza.*

Così poichè un triangolo è la metà di un parallelogramma avente base ed altezza rispettivamente uguali, resta giustificata la regola per cui *l'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle lunghezze di un lato e dell'altezza relativa.*

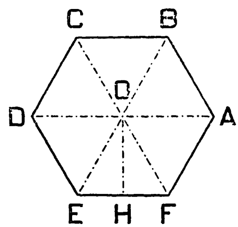


32. Quest' ultima regola permette di trovar l'area di un qualsiasi poligono, in quanto questo si può sempre decomporre in triangoli.



Qui basterà considerare i casi del trapezio e dei poligoni regolari, pei quali le unite figure mettono in luce le suddivisioni in triangoli che danno luogo alle notorie regole di misura:

1) *L'area di un trapezio è data dal semiprodotto delle lunghezze della somma delle basi e dell'altezza.*



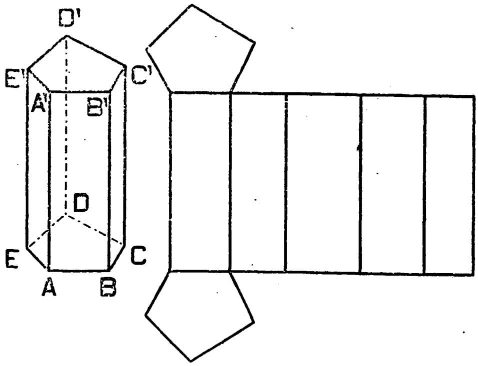
2) *L'area di un poligono regolare è data dal semiprodotto delle lunghezze del perimetro e dell'apotema.*

Aree delle superficie poliedriche

33. L'area di una superficie poliedrica si otterrà semplicemente sommando le aree delle singole faccie del poliedro.

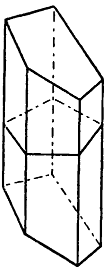
Nel caso del prisma e della piramide retta si possono assegnare delle regole per calcolare più rapidamente codesta somma.

34. La superficie laterale di un prisma retto è costituita di tanti rettangoli aventi per altezza l'altezza del prisma e per basi i singoli lati della base di esso; cosicchè sommando codesti rettangoli e ricordando la regola che dà l'area di un



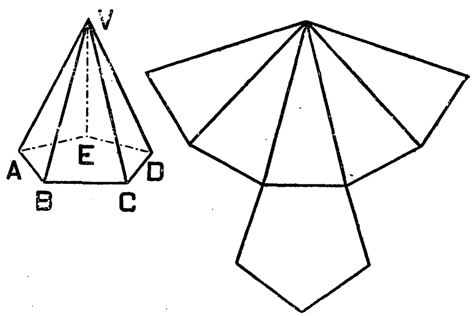
rettangolo (n. 28) avremo che: *L'area della superficie laterale di un prisma retto è data dal prodotto dell'altezza pel perimetro della base.*

35. Nel caso di un prisma obliquo le faccie laterali sono parallelogrammi. Se consideriamo una sezione normale del prisma (conducendo per un punto di uno spigolo il piano perpendicolare) i lati di questa danno le altezze delle singole faccie rispetto agli spigoli laterali; onde risulta che: *L'area della superficie laterale di un prisma obliquo è data dal prodotto dello spigolo laterale per il perimetro di una sezione normale.*

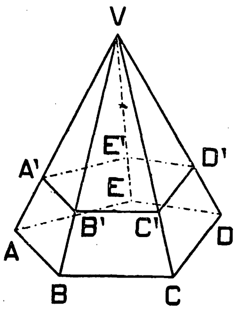


36. Per una piramide retta a base regolare le faccie laterali sono tanti triangoli uguali, aventi per basi i lati della base della piramide e le altezze uguali all'apotema di esse: cosicchè pel n. 31 risulta che: *L'area della superficie laterale di una piramide retta a base regolare è uguale al semiprodotto dell'apotema pel perimetro della base.*

Questa regola vale anche nel caso di una qualsiasi piramide *retta*, cioè avente come base un poligono qualsivoglia circoscritto ad un cerchio e il vertice in un punto della perpendicolare al piano del cerchio nel suo centro.



37. Si dice notoriamente tronco di piramide (a basi parallele) la parte di piramide compresa tra la base e una sua sezione parallela alla base. Ricordando la regola che dà l'area del trapezio (n. 32) si trova che *l'area della superficie laterale di un tronco di piramide retto (a basi parallele) è dato dal semiprodotto della somma dei perimetri delle basi per l'apotema.*



Lunghezza della circonferenza

38. Il problema di *misurare la lunghezza di una data circonferenza,* dal punto di vista pratico, non offre difficoltà. Se la circonferenza non è di raggio molto grande, basta disporre su di essa un filo (flessibile, ma resistente alla trazione) e poi misurare codesto filo. Se invece la circonferenza ha un raggio piuttosto ragguardevole, si potrà addirittura servirsi di un regolo graduato (doppio-decimetro o metro o canna da agrimensori, ecc.) e riportarlo successivamente cogli estremi sulla circonferenza quante volte è possibile (1).

Quest'ultimo modo di misurazione pratica equivale approssimatamente (cioè trascurando una frazione del nostro regolo graduato) a sostituire alla circonferenza data un poligono iscritto regolare (i cui lati sono tutti uguali al regolo considerato).

Ora appunto in codesta considerazione è contenuta la definizione che i Geometri danno della *lunghezza di una circonferenza,* della quale ora ci occuperemo.

39. Si consideri adunque una circonferenza C e per fissare le idee si prenda il diametro come unità.

Ogni poligono iscritto in C è interno a qualsiasi poligono circoscritto, cosicchè il perimetro del primo sarà in ogni caso minore del perimetro del secondo (2).

E la nostra intuizione ci assicura che se disponiamo un filo lungo la C e poi lo distendiamo, esso risulta più lungo

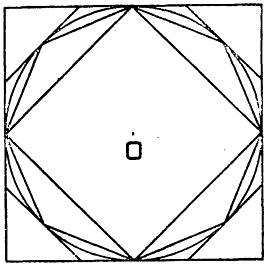
(1) Misurando in tal modo con un regolo di 1 m. una circonferenza di 1 Km. di raggio si commetterebbe, teoricamente, un errore inferiore ad $^1/_3$ di millimetro, cioè certamente minore degli errori, da cui è nella pratica inevitabilmente affetto il resultato della misurazione.

(2) *Geometria:* n. 133. — *Se un poligono è contenuto in un altro* (cioè se i vertici del primo appartengono al secondo) *il perimetro del primo è minore di quello del secondo.*

del perimetro di qualsiasi poligono iscritto, più corto del perimetro di qualsiasi poligono circoscritto.

Così si è naturalmente condotti a cercare tra i perimetri dei poligoni iscritti e circoscritti i *valori approssimati* della lunghezza della circonferenza, rispettivamente per difetto e per eccesso.

Consideriamo a tale scopo i quadrati iscritto e circoscritto a C e poi successivamente i poligoni regolari iscritti e circoscritti a



$$8, \quad 16, \dots, \quad 2^n, \dots$$

lati [1]. I perimetri

(1) $$p_4, \quad p_8, \quad p_{16}, \dots$$

di codesti poligoni iscritti sono manifestamente crescenti, mentre decrescono i perimetri

(2) $$P_4, \quad P_8, \quad P_{16}, \dots$$

dei corrispondenti poligoni circoscritti.

Inoltre, prefissata una qualsiasi unità decimale, per esempio $\frac{1}{10^m}$, è intuitivo (e si dimostra rigorosamente, come vedremo al n. 42) che fra i poligoni considerati dianzi si potranno sempre trovarne due, l'uno iscritto e l'altro circoscritto, i quali abbiano un numero di lati 2^n tanto grande che la differenza $P_{2^n} - p_{2^n}$ dei loro perimetri sia minore di $\frac{1}{10^m}$.

Le lunghezze di codesti due perimetri p_{2^n}, P_{2^n} si assumeranno come *valori approssimati della lunghezza della circonferenza a meno di* $\frac{1}{10^m}$, l'uno per difetto, l'altro per eccesso.

Così, per esempio, si trova

$$p_6 = 3{,}000\dots, \qquad P_6 = 3{,}464\dots$$
$$p_{24} = 3{,}133\dots, \qquad P_{24} = 3{,}160\dots$$
$$p_{96} = 3{,}141\dots, \qquad P_{96} = 3{,}143\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(1) *Geometria:* n. 345.

e perciò si dirà che le lunghezze approssimate di C (per difetto e per eccesso) sono date, a meno di un'unità, da 3 e 4; a meno di $\frac{1}{10}$, da 3,1 e 3,2; a meno di $\frac{1}{100}$, da 3,14 e 3,15 e così via. Siccome i p_{2^n} vanno crescendo e i P_{2^n} decrescendo, noi, proseguendo nel calcolo, otterremo mano mano nuove cifre decimali e determineremo così un certo numero decimale illimitato

$$\pi = 3,14....,$$

il quale risulterà maggiore di tutti i perimetri

$$(1) \qquad p_4, \quad p_8, \quad p_{16}, ...$$

e minore dei perimetri

$$(2) \qquad P_4, \quad P_8, \quad P_{16}, ...,$$

cioè sarà, come diremo, *compreso* tra i perimetri dei poligoni regolari, rispettivamente iscritti e circoscritti a C, che si ottengono raddoppiando successivamente il numero dei lati, a partire dai due quadrati.

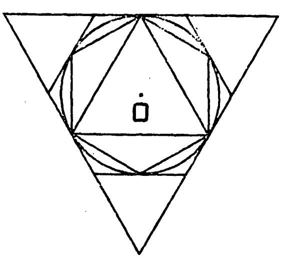
Spingendo effettivamente innanzi i calcoli si trova

$$\pi = 3,141592653....$$

La legge con cui si succedono le cifre di codesto numero decimale non può essere indagata se non con mezzi di Analisi molto elevata, per mezzo dei quali si è dimostrato, in particolare, che le cifre decimali non possono ripetersi da un punto in poi periodicamente, perchè il numero π è irrazionale.

Questo numero π si dirà la *lunghezza della circonferenza* C di diametro uguale ad 1.

40. Lo stesso procedimento tenuto dianzi per calcolare la lunghezza π di C si può ripetere partendo da due altri qualsiansi poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto a C, per esempio dai due triangoli equilateri, e considerare poi i perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti a 6, 12, 24,.... lati.



Ma la nostra intuizione della lunghezza della circonferenza come maggiore dei perimetri di tutti i poligoni iscritti e minore di tutti i poligoni circoscritti ci assicura che, comunque si scelgano i poligoni regolari di partenza, le successive approssimazioni condurranno sempre al medesimo numero π, ottenuto partendo dai due quadrati.

Del resto è facile dimostrare rigorosamente che codesto numero π è maggiore del perimetro di *qualsiasi* poligono iscritto in C e minore del perimetro di *qualsiasi* poligono circoscritto.

Ammettiamo infatti che si possa iscrivere nella data circonferenza un poligono, il cui perimetro p non sia minore di π: potremo addirittura supporre

$$p > \pi,$$

giacchè se fosse $p = \pi$, basterebbe aggiungere su C, tra due vertici consecutivi del poligono considerato, un nuovo vertice per avere un altro poligono iscritto avente un perimetro maggiore di p e quindi anche di π.

Ciò premesso, per quanto piccola sia la differenza $p - \pi$, noi potremo sempre trovare nella successione dei poligoni circoscritti a C, che abbiamo ottenuto raddoppiando successivamente il numero dei lati a partire dal quadrato, un poligono il cui perimetro P differisca da π meno di $p - \pi$

$$P - \pi < p - \pi.$$

Ora questa disuguaglianza, la quale ove si aggiunga π ad ambo i membri, diventa

$$P < p,$$

è assurda perchè il perimetro P di un poligono circoscritto non può essere che maggiore del perimetro p di un poligono iscritto.

Analogamente si trova assurda l'ipotesi che vi sia un poligono circoscritto a C, il cui perimetro sia minore di π.

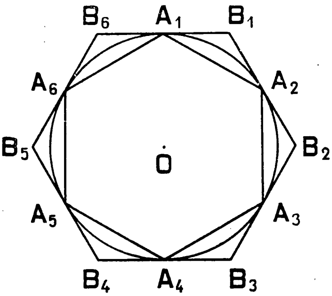
41. Le osservazioni dei nn. precedenti valgono manifestamente per ogni possibile circonferenza e qualunque sia l'unità di misura adottata; onde porremo in generale la seguente definizione:

Dicesi *lunghezza di una data circonferenza* il numero maggiore di tutti i perimetri dei poligoni iscritti e minore dei perimetri dei poligoni circoscritti.

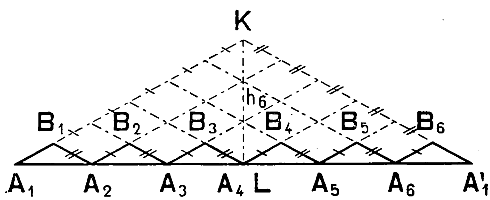
Il segmento che ha la stessa lunghezza della data circonferenza dicesi talvolta « circonferenza rettificata » o « segmento ottenuto rettificando la data circonferenza ».

42. A completare le considerazioni dei nn. 39-41 rimane da dimostrare che *fissato un qualsiasi numero* $\frac{1}{10^m}$, *si possono sempre trovare due poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto alla data circonferenza, tali che la differenza dei loro perimetri sia minore di* $\frac{1}{10^m}$.

A tale scopo confrontiamo il perimetro p_n del poligono regolare $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ iscritto nella nostra circonferenza, col perimetro P_n del poligono regolare circoscritto $B_1B_2 \ldots B_n$ i cui lati sono tangenti al cerchio rispettivamente in $A_1A_2, \ldots A_n$ (nella fig., si è preso $n = 6$). Considerati gli n triangoletti isosceli, fra loro uguali, che così si ottengono, $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2, \ldots, A_nA_1B_n$, portiamoli ad avere le basi su di una stessa retta, l'una consecutiva all'altra, come indica la figura; e prolunghiamo i lati estremi fino a incontrarsi in K così da ottenere un triangolo isoscele $A_1A_1'K$, la cui base è per costruzione il perimetro p_n del poligono iscritto.



(Nell'annessa fig., per economia di spazio, i lati A_1A_2, A_2A_3, ecc. dei triangoletti e i lati omologhi sono stati ridotti nel rapporto da 3 a 2). Inoltre, come è reso visibile immediatamente sulla figura dalle rette punteggiate [1], abbiamo



$$A_1K = A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_nB_n$$
$$KA_1' = B_1A_2 + B_2A_3 + \ldots + B_nA_1',$$

cosicchè risulta

$$A_1K + KA_1' = P_n.$$

Ma dai due triangoli rettangoli, in cui $A_1A_1'K$ è diviso dall'altezza KL, deduciamo [2]

$$A_1K - A_1L < KL$$
$$KA_1' - LA_1' < KL$$

e, sommando membro a membro,

$$A_1K + KA_1' - (A_1L + LA_1') < 2KL,$$

o, infine, indicando con h_n l'altezza KL,

$$P_n - p_n < 2h_n.$$

E se al triangolo $A_1A_1'K$ sostituiamo un triangolo simile Δ_n, avente la base ancor maggiore, per esempio uguale al perimetro P_4 del quadrato circoscritto al cerchio (cioè al quadruplo del diametro) l'altezza k_n di Δ_n sarà maggiore di h_n; e sarà a più forte ragione

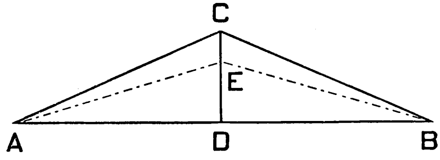
$$P_n - p_n < 2k_n;$$

(1) *Geometria:* n. 278, 2): *In un parallelogramma i lati opposti sono uguali.*

(2) *Geometria:* n. 97: *In ogni triangolo la differenza di due lati è minore del terzo.*

cioè *la differenza dei perimetri dei poligoni regolari ad* n *lati, iscritto e circoscritto a un cerchio, è minore dell'altezza del triangolo isoscele* Δ_n, *che ha la base uguale al quadruplo del diametro e gli angoli alla base uguali all'* n^ma^ *parte aliquota di* 180°.

Ciò premesso si trova facilmente un numero n di lati abbastanza grande, perchè la differenza $P_n - p_n$ sia minore di $\frac{1}{10^m}$. Costruito infatti il triangolo isoscele ABC, che ha la base AB uguale al quadruplo del diametro e l'altezza $DC = \frac{1}{2 \cdot 10^m}$ (l'annessa fig. è stata, per ragioni d spazio, alquanto ridotta) si prenda n abbastanza grande perchè sia



$$\left(\frac{180}{n}\right)^{\circ} < D\widehat{A}C;$$

allora il triangolo Δ_n del teorema precedente, costruito sulla base AB avrà il vertice E compreso tra D e C, e dalla disuguaglianza $DE < \frac{1}{2 \cdot 10^m}$ e dalla

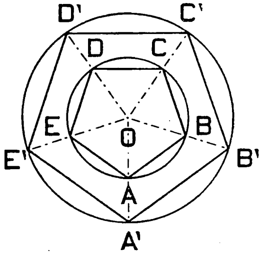
$$P_n - p_n < 2DE$$

si concluderà veramente

$$P_n - p_n < \frac{1}{10^m}.$$

43. La lunghezza di una qualsiasi circonferenza, di cui sia dato il raggio, si può subito determinare, quando si conosca il numero π che dà la lunghezza della circonferenza di diametro uguale all'unità (n. 39). Sussiste invero il seguente teorema fondamentale: *Il rapporto della lunghezza di una circonferenza al relativo diametro è il medesimo per tutti i cerchi o,* come si suol dire, *è costante.*

Per dimostrare questo teorema, consideriamo due circonferenze di raggio r, $r'(r' > r)$, e di lunghezza c, c' rispettivamente; e, per comodità di ragionamento, supponiamole concentriche (nel punto O). Iscritto nella prima circonferenza un poligono qualsiasi $ABCDE$, prolunghiamo i raggi OA, OB,...., OE fino a intersecare l'altra circonferenza in A', B',...., E' rispettivamente, e osserviamo che il poligono $A'B'C'D'E'$, che così si ottiene nella seconda circonferenza risulta simile ad $ABCDE$. I perimetri p, p' dei due



poligoni saranno perciò proporzionali a due loro lati omologhi e quindi ancora ai raggi [1], cosicchè avremo

$$\frac{p}{r}=\frac{p'}{r'}.$$

Ma essendo c, c' rispettivamente maggiori di p, p', sarà ancora

$$\frac{c}{r}>\frac{p}{r},\quad \frac{c'}{r'}>\frac{p'}{r'},$$

onde risulta che i rapporti $\frac{c}{r}$ e $\frac{c'}{r'}$ sono entrambi maggiori di tutti i rapporti $\frac{p}{r}$ dei perimetri dei poligoni iscritti nel cerchio di raggio r a codesto raggio stesso.

Analogamente, designato con P il perimetro di un qualsiasi poligono circoscritto al cerchio di raggio r, si dimostra che i due rapporti $\frac{c}{r}$, $\frac{c'}{r'}$ sono entrambi minori di $\frac{P}{r}$, cosicchè abbiamo

$$\frac{p}{r}<\frac{c}{r}<\frac{P}{r},\quad \frac{p}{r}<\frac{c'}{r'}<\frac{P}{r}.$$

Ma come c è l'unico numero maggiore di tutti i perimetri p e minore di tutti i perimetri P, così non ci può essere nessun numero diverso da $\frac{c}{r}$, che al pari di esso sia maggiore di tutti i rapporti $\frac{p}{r}$ e minore di tutti i rapporti $\frac{P}{r}$; onde concludiamo veramente l'uguaglianza dei due rapporti $\frac{c}{r}$, $\frac{c'}{r'}$,

$$\frac{c}{r}=\frac{c'}{r'},$$

e quindi ancora la proporzionalità di c, c' ai rispettivi diametri

$$\frac{c}{2r}=\frac{c'}{2r'}.$$

(1) *Geometria:* n. 512. — *I perimetri di due poligoni simili iscritti o circoscritti a due cerchi stanno fra loro come i raggi dei due cerchi.*

Se in questa proporzione prendiamo come circonferenza c' quella di diametro uguale ad 1, la cui lunghezza è data dal numero (n. 39)

$$\pi = 3{,}141592653\ldots,$$

otteniamo la relazione

$$\frac{c}{2r} = \pi,$$

la quale afferma appunto che il rapporto della lunghezza di una circonferenza qualsiasi al rispettivo diametro è costante ed uguale a π.

La formola precedente si può anche scrivere

$$c = 2\pi r,$$

onde risulta la nota regola, per cui *la lunghezza di una circonferenza si trova moltiplicandone il diametro pel numero* π, *che nella pratica si prende uguale a* 3,14 *o, al più, a* 3,1416.

44. Il numero π è stato oggetto fino dall'antichità di indagini e di calcoli pazienti.

Nel *Papyrus Rhind*, dovuto allo scrittore egiziano AHMES (2000 av. Cr.), è implicitamente assegnato per π il valore

$$\frac{256}{81} = 3{,}1604\ldots.$$

ARCHIMEDE calcolò i perimetri regolari iscritti e circoscritti, che si ottengono partendo dall'esagono e raddoppiandone il numero dei lati, e per tal via, spingendosi fino ai poligoni di 96 lati, dimostrò che π è compreso fra $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{10}{70}$: quest'ultimo valore, forse più facile da ricordare sotto la forma $\frac{22}{7}$, supera π di meno che 0,002. L'olandese MEZIO (seconda metà del sec. XVI) assegnò il valore $\frac{355}{113}$, che supera π di meno che $\frac{3}{10^7}$.

Ed altri Matematici o semplici Calcolatori, quasi gareggiando l'uno coll'altro di pazienza e di abilità, spinsero la determinazione approssimata di π molto più in là di quanto occorra pei calcoli pratici anche più delicati: lo SHANKS calcolò 707 cifre decimali!

Notiamo infine che espressioni di π, in cui si può spingere la approssimazione quanto innanzi si vuole, sono quella data dal WALLIS (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots;$$

quella data dal BROUNKER (1620-1684)

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \dots}}}}};$$

e infine quella data dal LEIBNIZ (1646-1716)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

I calcolatori di π furono, per lungo tempo, animati nelle loro fatiche dalla speranza di pervenire, dopo un certo numero di cifre, al valore esatto di π, il che era impossibile, in quanto, come già si notò (n. 39) si tratta di un numero irrazionale. Ciò fu stabilito nel 1770 dal LAMBERT; e più di recente, nel 1882, il LINDEMANN ha dimostrato che π non può soddisfare ad alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali (è, come si dice, un *numero trascendente*).

45. Oggigiorno pel calcolo di π l'Analisi moderna dispone di metodi, molto più rapidi di quelli antichi. Tuttavia offrono sempre un interesse storico i procedimenti elementari, che furono escogitati a rendere meno lenti i calcoli suggeriti dal metodo di ARCHIMEDE, fondato sulla considerazione dei poligoni regolari iscritti e circoscritti (nn. 39-41). Su tali procedimenti elementari per il calcolo di π si vedano gli Esercizi.

Misura degli archi di circonferenza

46. Consideriamo dapprima *gli archi di una stessa circonferenza,* i quali sono grandezze omogenee in quanto si possono confrontare tra di loro per sovrapponibilità. Perciò, fissato come *unità* un certo arco, si potrà, in modo analogo a quello tenuto pei segmenti e per gli angoli (nn. 11, 26), definire la *misura di un arco qualsiasi* (rapporto di codesto arco all'arco unità).

Ora ricordiamo che su di una stessa circonferenza (o in conferenze uguali) *gli archi sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro,* in quanto ad angoli uguali corrispondono archi uguali, e all'angolo doppio o triplo e così via corrisponde rispettivamente l'arco doppio o triplo, ecc. (1).

Se allora, fissata una certa unità per gli angoli, adottiamo come *arco-unità* precisamente quello che corrisponde all'an-

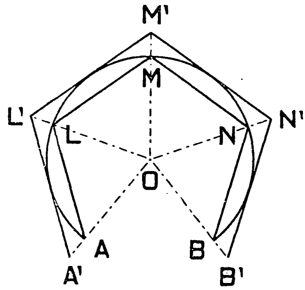
(1) *Geometria:* n. 465.

golo al centro uguale ad 1, avremo manifestamente che la misura di un arco qualsiasi sarà data dallo stesso numero che misura l'angolo corrispondente.

Così si adotta spesso come arco-unità la 360ª parte dell'intera circonferenza, cioè l'arco compreso da un angolo al centro di 1°; e accanto a questa unità fondamentale, che dicesi ancora *grado* (*o arco-grado*), si assumono come unità ausiliari il *minuto* e il *secondo*, cioè gli archi compresi rispettivamente da un angolo al centro di 1′ e di 1″. Rispetto a codeste unità, *la misura di un arco qualsiasi sarà data da quello stesso numero* (in gradi, minuti, secondi) *che dà l'ampiezza dell'angolo al centro corrispondente.*

47. Archi di circonferenze disuguali non si possono confrontare direttamente; ma si rende possibile il loro confronto estendendo ad un arco qualsiasi le considerazioni che ci hanno condotto alla *rettificazione* della intiera circonferenza (nn. 39-41).

Dato un arco AB di una circonferenza di centro O si considerino tutte le poligonali *iscritte* in esso (cioè aventi gli estremi A, B e gli altri vertici sull'arco) e le poligonali *circoscritte* all'arco (cioè aventi gli estremi sui prolungamenti dei raggi OA, OB e i lati tangenti all'arco). Si dimostra, grazie a considerazioni analoghe a quelle del n. 39 che vi è un numero unico e determinato, il quale è maggiore dei perimetri di tutte le poligonali iscritte ed è minore dei perimetri delle poligonali circoscritte all'arco.



È codesto numero che si assume come *lunghezza dell'arco* (rispetto all'unità scelta pei segmenti); e il segmento che ha la stessa lunghezza dicesi « arco rettificato ».

48. Dalla definizione del n. prec. risulta manifestamente che: *Archi di una stessa circonferenza* (o di circonferenze uguali) *che siano uguali, hanno lunghezze uguali.*

Inoltre: *Su di una stessa circonferenza* (o su circonferenze uguali) se *l'arco* AC *è somma di due archi* AB *e* BC, *la lunghezza di* AC *è uguale alla somma delle lunghezze di* AB *e* BC.

Così il doppio, il triplo, ecc. di un arco AB ha una lunghezza doppia, tripla ecc. della lunghezza di AB; in guisa che concludiamo che:

Su di una stessa circonferenza (o su circonferenze uguali) *gli archi sono proporzionali alle rispettive lunghezze.*

49. Di più ancora, per circonferenze disuguali si dimostra il seguente teorema, che comprende come caso particolare quello del n. 43, e la dimostrazione è perfettamente analoga: *Su circonferenze disuguali, ad angoli al centro uguali corrispondono archi le cui lunghezze sono proporzionali ai raggi rispettivi.*

50. Ciò premesso è facile trovare la lunghezza l dell'arco di raggio r che corrisponde ad un angolo al centro di ampiezza α (la quale supporremo qui espressa in gradi ed, eventualmente, in frazioni decimali di grado). Infatti, tenuto conto che la lunghezza dell'intera circonferenza è $2\pi r$ e il corrispondente angolo al centro è di 360 gradi, avremo, per la proporzionalità degli archi ai rispettivi angoli al centro,

$$l : \alpha = 2\pi r : 360$$

e quindi

$$l = \frac{\pi\alpha r}{180}.$$

Se l'ampiezza α fosse data in minuti o in secondi, avremmo rispettivamente

$$l = \frac{\pi\alpha r}{10800} \quad \text{o} \quad l = \frac{\pi\alpha r}{648000}.$$

51. Ma vi è un ulteriore modo di misurare gli archi, che è particolarmente usato negli sviluppi teorici. Su di una circonferenza qualsiasi dicesi *arco radiante* l'arco di lunghezza uguale al raggio, e spesso si assume codesto arco come unità, talchè *la misura in radianti di un arco qualsivoglia è data dal rapporto della sua lunghezza al raggio.*

Perciò se indichiamo con λ la *misura in radianti* di un arco di *lunghezza* l e *raggio* r, avremo

$$\lambda = \frac{l}{r} \quad \text{ossia} \quad l = r\lambda.$$

In particolare *sulla circonferenza di raggio uguale all'unità la misura di un arco in radianti è identica alla sua lunghezza.*

D'altra parte pel n. 49 due archi di raggio disuguale, compresi da angoli al centro uguali, hanno lunghezze l, l'

proporzionali ai loro raggi r, r',

$$\frac{l}{r}=\frac{l'}{r'},$$

cioè *hanno la stessa misura in radianti;* e quindi ancora *la misura in radianti di un arco di raggio qualsiasi è identica alla lunghezza dell'arco di raggio* 1 *compreso dal medesimo angolo al centro.*

La relazione tra l'ampiezza α di un arco e la sua misura λ in radianti si trova ricordando (n. prec.) che è

$$l=\frac{\pi\alpha r}{180} \quad \text{e} \quad \lambda=\frac{l}{r};$$

cosicchè risulta

$$\lambda=\frac{\pi\alpha}{180}$$

e viceversa

$$\alpha=\frac{\lambda\pi}{180}.$$

In particolare l'ampiezza dell'arco radiante sarà data da $\frac{\pi}{180}$ gradi, cioè da $57^\circ\frac{1}{3}$ all'incirca (¹).

Indichiamo qui in una tabelletta le misure in gradi, in unità lineari e in radianti, di taluni archi di una circonferenza di raggio r:

Ampiezza	**Lunghezza**	**Mis.ra in radianti**
45°	$\frac{\pi r}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
180°	πr	π
270°	$\frac{3}{2}\pi r$	$\frac{3\pi}{2}$
360°	$2\pi r$	2π

(¹) Il valore esatto è di 57°17′44″,80.

52. Notiamo infine che la misura in radianti di un arco dipende soltanto dall'angolo al centro corrispondente e non dal raggio, ed è proporzionale all'ampiezza α, come risulta dalla relazione (n. prec.)

$$\lambda = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Perciò si possono senz'altro misurare anche gli angoli in radianti, vale a dire si può *prendere come misura di un angolo qualsiasi la lunghezza dell'arco che codesto angolo comprende sulla circonferenza di raggio* 1 (*angolo-radiante*). Così la misura in radianti di un angolo di 45°, 90°, 180°, 360°, sarà rispettivamente $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π, 2π,.....

Area del cerchio e del settore circolare

53. Determinata la lunghezza della circonferenza, è facile trovare l'*area del cerchio.*

A tale scopo confrontiamo il cerchio dato C coi poligoni iscritti e circoscritti, i quali sono rispettivamente minori (o suvvalenti) e maggiori (o prevalenti) di esso.

Ora è intuitivo (e si dimostrerà poi anche rigorosamente al n. seg.) che, prefissata una qualsiasi unità decimale $\frac{1}{10^m}$, si potranno sempre iscrivere e circoscrivere a C due poligoni, aventi i lati così numerosi e così piccoli, che le loro aree abbiano una differenza minore di $\frac{1}{10^m}$.

Codeste aree dei due poligoni forniranno due *valori approssimati,* a meno di $\frac{1}{10^m}$ (l'uno per difetto, l'altro per eccesso) *dell'area del cerchio;* e basterà considerare successivamente, come al n. 39, le aree dei poligoni regolari, iscritti e circoscritti, a 4, 8, 16.... lati per poter determinare le successive cifre decimali dell'area del cerchio dato.

Ma qui possiamo dire qualcosa di più. Un qualsiasi poligono circoscritto a C si decompone, congiungendone i singoli vertici col centro, nella somma di tanti triangoli aventi per altezza il raggio r del cerchio e per somma delle basi il perimetro del poligono, il quale è maggiore della circonferenza rettificata c (n. 41); cosicchè il poligono è certamente maggiore del triangolo T avente per altezza il raggio r e per base la circonferenza rettificata c. D'altra parte codesto triangolo T è maggiore di ogni poligono iscritto, in quanto questo è la somma di un certo numero di triangoli di altezze tutte minori del raggio e le cui basi hanno una somma (perimetro del poligono) minore della circonferenza rettificata c.

Abbiamo dunque che il triangolo T è, al pari del cerchio dato, maggiore di tutti i poligoni iscritti e minore di tutti i poligoni circoscritti, cosicchè l'area del cerchio non potrà differire da quella del triangolo; cioè: *L'area di un cerchio è uguale a quella di un triangolo avente per altezza il raggio del cerchio dato e per base la circonferenza rettificata.*

Ricordando la regola che dà l'area di un triangolo (n. 31) e tenendo conto che la lunghezza della circonferenza è $2\pi r$ (n. 43), avremo che l'area del cerchio sarà data da

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

ossia da

$$\pi r^2.$$

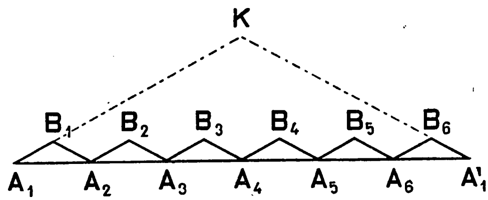
Nota. — Risulta di qui che, se si considerano due cerchi di raggi r ed r', le loro aree A, A' stanno fra loro nel rapporto

$$\frac{A}{A'} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2};$$

cioè *due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.*

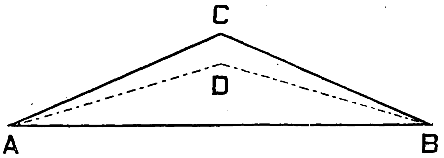
54. A completare le considerazioni del n. prec. basta mostrare che *prefissato un qualsiasi numero* $\frac{1}{10^m}$, *si possono sempre trovare due poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto alla data circonferenza, tali che la differenza delle loro aree sia minore di* $\frac{1}{10^m}$.

A codesto scopo riferiamoci alla figura della pag. 32 (n. 42), che qui per maggiore chiarezza ripetiamo. La differenza tra i poligoni regolari ad n lati, iscritto e circoscritto al cerchio, che è data dalla somma degli n triangoletti isosceli $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$,...., $A_nA_1B_n$, sarà minore del triangolo $A_1A_1'K$ e quindi,



a più forte ragione, del triangolo simile Δ_n che ha la base quadrupla del diametro e gli angoli alla base uguali alla n^{ma} parte aliquota di due angoli retti; cosicchè basterà far vedere come si possa prendere n abbastanza grande perchè l'area di Δ_n risulti minore di $\frac{1}{10^m}$.

Si consideri perciò il triangolo isoscele ABC che ha la stessa base di Δ_n cioè $AB = 8r$ e l'area $\frac{1}{10^m}$ $\left(\text{basta prendere l'altezza uguale a } \frac{1}{4r \cdot 10^m}\right)$ e si scelga un numero n abbastanza grande perchè l' n^{ma} parte di due retti risulti minore di ciascun angolo alla base di ABC. Allora il triangolo Δ_n sarà dato da un triangolo ABD minore di ABC e avremo veramente che la differenza dei due poligoni regolari iscritto e circoscritto, aventi il numero n di lati dianzi determinato, sarà minore di ABC, cioè di $\frac{1}{10^m}$.



55. Considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. 53 permettono di dimostrare che *l'area di un settore circolare è uguale a quella di un triangolo, avente per altezza il raggio del settore e per base il corrispondente arco rettificato.*

Perciò se l è la lunghezza dell'arco ed r è il raggio, l'area del settore sarà data da

$$\frac{1}{2} rl.$$

Se invece della lunghezza dell'arco, si conosce l'ampiezza α dell'angolo al centro corrispondente (espressa in gradi e frazioni decimali di grado) l'area del settore sarà data da

$$\pi r^2 \frac{\alpha}{360},$$

come risulta dalla formola del n. 50, che dà la lunghezza dell'arco di dato raggio e data ampiezza, e come si può anche dimostrare direttamente, osservando che i settori sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro (1).

(1) *Geometria:* n. 466.

III.

PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° E 2° GRADO, RADICI QUADRATE

Interpretazione geometrica di identità algebriche

56. La teoria della misura permette di trattare le questioni geometriche col sussidio dell' Algebra.

Noi cominceremo qui col far vedere come alcune *identità algebriche,* già per se stesse importanti, forniscano, opportunamente interpretate, una dimostrazione facile e immediata di notevoli teoremi di equivalenza tra rettangoli.

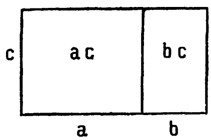
Indicando con a, b, c numeri quali si vogliono, abbiamo identicamente, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma,

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Ora, se supponiamo che i tre numeri considerati siano positivi e ricordiamo la regola che dà l'area di un rettangolo (n. 28), vediamo che l'identità precedente dimostra il seguente teorema:

Il rettangolo di base a + b *e di altezza* c *è equivalente alla somma dei rettangoli di basi* a *e* b *e di altezza* c.

Si tratta di un teorema ben noto [1], la cui dimostrazione diretta è fornita dall'annessa figura, la quale può perciò valere come interpretazione geometrica della identità precedente.

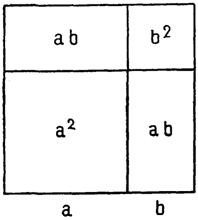


57. Se eseguiamo il *quadrato* (o seconda potenza) del binomio $a + b$, dove a e b sono numeri quali si vogliano, troviamo

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$$

[1] *Geometria:* n. 350.

e quest'identità, ove si suppongano a e b positivi e si ricordino le regole dei nn. 28, 30 fornisce una dimostrazione del seguente teorema (¹):



Il quadrato della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti e del doppio del loro rettangolo.

Uniamo anche qui la figura che dà la dimostrazione diretta.

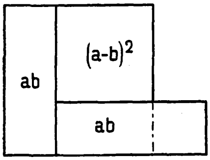
58. L'identità del numero prec., dal punto di vista algebrico, non è distinta da quella che si ottiene sostituendo al numero b il suo opposto $-b$, cioè

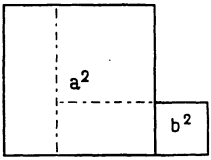
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ma, geometricamente, se supponiamo a e b positivi e $a > b$, codesta identità, scritta sotto la forma

$$(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2,$$

ci dice che (²): *Il quadrato della differenza di due segmenti, aumentato del doppio del loro rettangolo, è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti dati.*





La dimostrazione geometrica diretta è del tutto diversa da quella valida nel caso precedente, come si vede dall'annessa figura.

59. Consideriamo infine l'identità che si ottiene moltiplicando la somma di due numeri per la loro differenza

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

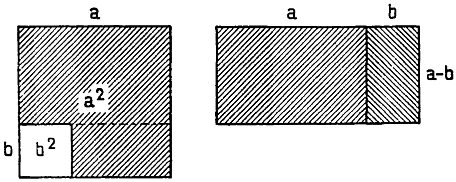
Supposto a e b positivi e $a > b$, concludiamo da questa identità che:

La differenza dei quadrati di due segmenti disuguali è

(¹) *Geometria:* n. 353.
(²) *Geometria:* n. 354.

equivalente al rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza dei due segmenti dati.

Per la dimostrazione geometrica si veda la figura.



Segmenti proporzionali e rettangoli equivalenti

60. Per l'applicazione dell'Algebra alla risoluzione di problemi geometrici è molto utile di mettere in relazione la *proporzionalità dei segmenti* colla *equivalenza dei rettangoli.*

A ciò si può anche arrivare per mezzo di considerazioni geometriche ([1]); ma vi si perviene immediatamente se si approfitta della teoria della misura.

Se quattro segmenti a, b, c, d (dei quali rappresentiamo con le lettere stesse le lunghezze) sono in proporzione, sappiamo già che vale l'uguaglianza aritmetica (n. 16)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

dalla quale risulta senz'altro

$$ad=bc;$$

e viceversa, da quest'ultima uguaglianza si risale alla proporzionalità dei segmenti dati.

Interpretando geometricamente l'uguaglianza dei prodotti ad, bc (n. 28), concludiamo che: *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi e viceversa.*

Come caso particolare: *Se un segmento è medio proporzionale fra altri due, il quadrato del primo è equivalente al rettangolo dei due altri e viceversa.*

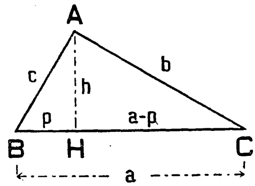
([1]) *Geometria:* nn. 491-497.

Cioè se a, b, c sono segmenti in proporzione continua, si ha:

$$b^2 = ac.$$

61. Le osservazioni precedenti permettono di dedurre algebricamente dai teoremi sui triangoli simili le più importanti relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo e, in particolare, il teorema PITAGORA.

Consideriamo un triangolo ABC, rettangolo in A, e i triangoli ad esso simili che si ottengono abbassando da A l'altezza AH (sull'ipotenusa). Che i tre triangoli ABC, HBA, HAC siano simili risulta dal fatto che sono a due a due equiangoli [1].



Saranno quindi proporzionali i segmenti intorno agli angoli uguali. Se allora indichiamo con a l'ipotenusa, con b e c i cateti (rispettivamente opposti a B e C), con h l'altezza AH e con p la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa, avremo dai due triangoli BHA e AHC

$$p : h = h : a - p$$

ossia

$$h^2 = p(a - p),$$

e quest'ultima uguaglianza, interpretata geometricamente dà un noto teorema di equivalenza: *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza* (relativa all'ipotenusa) *è equivalente al rettangolo dei due segmenti in cui resta divisa l'ipotenusa.*

Se si confrontano invece coll'intero triangolo ABC successivamente i due triangoli minori, si trovano le proporzioni

$$p : c = c : a, \quad a - p : b = b : a,$$

ossia

$$c^2 = ap, \quad b^2 = a(a - p).$$

Lasciando all'alunno di enunciare il noto teorema di equivalenza espresso da ciascuna di codeste uguaglianze [2],

[1] *Geometria:* n. 457. — *Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono proporzionali (essendo omologhi i lati opposti ad angoli uguali).*

[2] *Geometria:* n. 362.

sommiamole membro a membro: otterremo così

$$b^2 + c^2 = a(a - p) + ap$$

ossia

$$b^2 + c^2 = a^2;$$

uguaglianza che esprime manifestamente il teorema di PITAGORA (¹): *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei due cateti.*

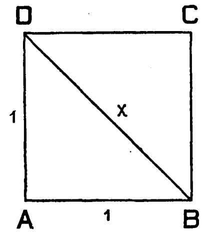
Viceversa, tre numeri a, b, c (positivi) soddisfacenti alla relazione

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

si possono sempre interpretare rispettivamente come ipotenusa e cateti di un medesimo triangolo rettangolo.

62. NOTA. — Possiamo qui dimostrare che, come già preannunziammo al n. 12, *il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti fra loro incommensurabili.*

Preso infatti il lato del quadrato $ABCD$ come unità, e indicata con x la lunghezza della diagonale BD, avremo che nel triangolo rettangolo isoscele ABD il quadrato x^2 dell'ipotenusa dovrà essere uguale alla somma dei quadrati dei cateti, uguali entrambi ad 1, cioè



$$x^2 = 2.$$

Ora di qui risulta subito che x non può essere un numero intero (perchè $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, ecc.), nè può essere eguale ad una frazione $\frac{p}{q}$ (che possiamo supporre ridotta a termini primi fra loro), giacchè l'identità

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{ossia} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

è assurda, in quanto, essendo primi fra loro p e q, sono tali anche p^2 e q^2; cosicchè il quoziente di questi due numeri non può essere uguale al numero intero 2.

(¹) *Geometria:* n. 363.

Problemi di primo grado

63. Abbiamo mostrato con esempi come l'Algebra, in base alla teoria della misura, fornisca un metodo di dimostrazione per molti teoremi di Geometria: ma più importante ancora è il vicendevole aiuto che l'Algebra e la Geometria si recano nella *risoluzione dei problemi geometrici.*

Un problema geometrico, se si suppongono conosciute le misure a, b, c,.... delle grandezze date e si indicano con x, y,.... le misure *incognite* delle grandezze da determinare, *si traduce* in una *equazione* o, secondo i casi, in un *sistema di equazioni* tra a, b, c,...., x, y,....; cosicchè la risoluzione del problema vien ridotta a quella della equazione o del sistema ottenuto, vale a dire alla ricerca di quei numeri (*soluzioni*) che sostituiti alle incognite verificano l'equazione o il sistema.

64. Sappiamo già dal corso precedente che un'equazione si dice *intera* se ambo i membri sono polinomi interi rispetto alle incognite; e che, se vi è una sola incognita, si dice *grado* dell'equazione il massimo esponente da cui è affetta l'incognita stessa ([1]).

Così la più generale equazione di 1° grado sarà della forma

$$ax + b = a'x + b',$$

dove a, b, a', b' rappresentano numeri noti.

Ora un *problema* (algebrico o geometrico) ad una sola incognita si dice *di grado* 1° o 2°,...., se tale è il grado dell'equazione in cui esso si traduce; e noi nel seguito di questo capitolo ci occuperemo appunto di problemi di 1° e 2° grado.

65. Proponiamoci qui in primo luogo il problema di *trasformare un rettangolo di dimensioni* b *e* c *in un rettangolo* (equivalente) *di altezza* a.

Se indichiamo con x la base del rettangolo richiesto, l'area rispettiva sarà ax (n. 28), cosicchè avremo per x l'equazione

$$ax = bc,$$

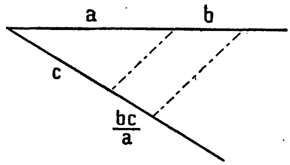
([1]) PINCHERLE: *Lez. di Alg. elem.:* n. 27.

la quale è di primo grado e ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Questa formola ci permette senz'altro di calcolare la lunghezza della base del rettangolo cercato: ma essa si presta anche ad *essere interpretata geometricamente,* così da ricavarne l'indicazione di una *costruzione* pel segmento x.

Infatti, come risulta dall'osservazione del n. 60, essa definisce il segmento x, tale che sussiste la proporzione



$$a : b = c : x;$$

cosicchè il segmento

$$x = \frac{bc}{a}$$

si può determinare con la costruzione, già ricordata, del quarto proporzionale dopo a, b, c (1).

66. Analogamente si costruisce un segmento rappresentato da una espressione della forma

$$x = \frac{bcc_1}{aa_1};$$

giacchè basta costruire successivamente le due quarte proporzionali

$$x_1 = \frac{bc}{a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{x_1 c_1}{a_1}.$$

Ed è manifesto come siffatta costruzione si possa estendere ad ogni espressione della forma

$$x = \frac{bcc_1 c_2 \dots c_n}{aa_1 a_2 \dots a_n}.$$

67. Nota. — Le espressioni dianzi costruite si possono dire di 1° grado, in quanto sono date ciascuna dal quoziente di un certo monomio intero per un altro monomio intero di grado immediatamente inferiore.

E nelle costruzioni dianzi indicate non interviene mai la considerazione del segmento unità 1.

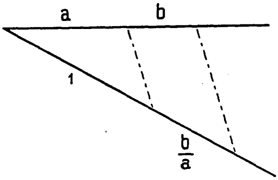
Anche ogni espressione monomia che non sia di 1° grado si può costruire nel modo indicato al n. prec., dopo averla ridotta di 1° grado, dopo avervi introdotti opportunamente, a numeratore o a denominatore,

(1) *Geometria:* n. 451.

dei fattori uguali all'unità 1. Così, per fermarci ai casi più semplici, l'espressione

$$x = \frac{b}{a},$$

in quanto si può porre sotto la forma $x = \frac{b \cdot 1}{a}$, si costruisce prendendo il quarto proporzionale dopo a, b e l'unità 1; e l'espressione



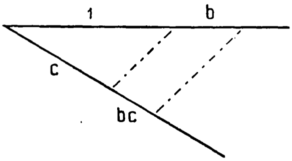
$$x = bc,$$

che può scriversi

$$x = \frac{bc}{1},$$

è data dal quarto proporzionale dopo l'unità 1, b e c; col che (si noti incidentalmente) si ha un modo per *determinare graficamente* il prodotto di due numeri.

Avvertiamo infine che col procedimento del n. prec. e con somme e sottrazioni si potrà anche costruire ogni espressione razionale polinomia rispetto alle misure di dati segmenti a, $a_1, \ldots$, b, c_1 $c_2, \ldots$.



Solo nel caso in cui l'espressione non sia omogenea di 1° grado, bisognerà aver cura di renderla tale mediante l'aggiunta, nei singoli monomi, di opportuni fattori uguali all'unità 1.

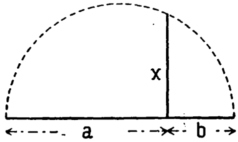
Medie geometriche e radici quadrate

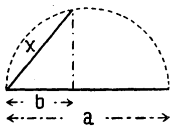
68. Dianzi ci siamo occupati di problemi geometrici di *1° grado.* Consideriamone ora uno di *2° grado,* proponendoci di *trasformare il rettangolo di dimensioni* a *e* b *nel quadrato equivalente,* o, ciò che è lo stesso (n. 60) *di trovare la media geometrica tra i due segmenti* a *e* b.

Se x è il segmento cercato, il problema si traduce subito (nn. 28, 30) nell'*equazione di 2° grado*

$$x^2 = ab. \qquad (1)$$

Geometricamente il segmento x si determina con le note costruzioni del medio proporzionale tra due segmenti [1], che vengono suggerite dalle proprietà del triangolo rettangolo ritrovate al n. 61, e sono richiamate dalle annesse figure.





[1] *Geometria:* n. 460.

Ma qui vogliamo aggiungere sull'equazione (1) qualche osservazione aritmetica. Per semplicità supponiamo che il segmento b sia l'unità, per modo che la nostra equazione si riduca a

$$x^2 = a.$$

Qui x sarà il medio proporzionale tra l'unità ed a, e alla sua lunghezza noi daremo un nome speciale.

Il numero positivo x, il cui quadrato è uguale ad a, dicesi la *radice aritmetica quadrata* (o di indice 2) del numero a e si rappresenta con

$$\sqrt{a},$$

cosicchè per la stessa definizione avremo

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Così, tornando all'equazione (1), rappresenteremo con $\sqrt{ab}$ il numero positivo che la rende soddisfatta (lunghezza della media proporzionale tra a e b).

69. Ricordiamo che la $\sqrt{2}$, cioè il numero positivo x definito dall'equazione

$$x^2 = 2,$$

si è già incontrata al n. 62, come lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1, e là si è dimostrato come esso non sia nè intero nè frazionario: cioè $\sqrt{2}$ *è un numero irrazionale.*

E notiamo che con lo stesso ragionamento del n. citato si dimostra la irrazionalità della radice quadrata di ogni numero intero che non sia quadrato perfetto (come 3, 5, 6, 7, 8, ecc.).

In ogni caso, di una qualsiasi radice quadrata $\sqrt{a}$ possiamo determinare aritmeticamente un valore approssimato quanto vogliamo (per difetto o per eccesso), cercando per tentativi fra i numeri decimali limitati, che hanno il voluto numero di cifre decimali, due consecutivi, i cui quadrati comprendano il numero a.

Così, riferendoci a $\sqrt{2}$, si trova successivamente

$$\begin{gathered} 1^2 < 2 < 2^2 \\ (1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2 \\ (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2 \\ (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2 \\ (1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2, \text{ ecc.} \end{gathered}$$

onde si conclude

$$\sqrt{2} = 1{,}4142.....$$

Fin dalle Scuole medie inferiori si insegnano regole pratiche, che permettono di trovare un po' più rapidamente, i valori approssimati di una qualsiasi radice quadrata; ma ancora più spediti riusciranno codesti calcoli, quando avremo appreso l'uso delle ***tavole dei logaritmi.***

70. La radice aritmetica di a

$$x = \sqrt{a}$$

soddisfa per definizione all'equazione di 2° grado

$$x^2 = a. \tag{1}$$

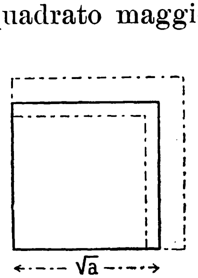
Alla stessa equazione soddisfarà anche il numero negativo $-\sqrt{a}$, perchè

$$(-\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 = a.$$

Il numero $-\sqrt{a}$ si dirà la *radice quadrata negativa* di a; e quando si vorranno designare insieme le due radici quadrate (quella aritmetica o positiva e quella negativa) si scriverà

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

È manifesto che questi sono i soli numeri che soddisfanno all'equazione (1), giacchè ogni altro numero avrà il quadrato maggiore o minore di a (si veda l'unita figura).



Notiamo infine che, siccome il quadrato di ogni numero, tanto positivo che negativo, è sempre positivo, non vi sarà nessun numero (razionale o irrazionale, positivo o negativo) che possa dirsi radice quadrata di un numero negativo; cosicchè, per esempio, al simbolo $\sqrt{-2}$ noi non attribuiremo nessun significato.

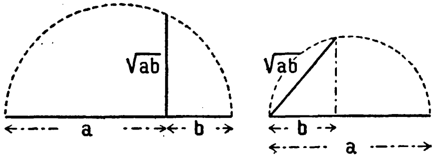
Applicazioni geometriche della estrazione di radice quadrata

71. Si dice *estrazione di radice quadrata* l'operazione che consiste nella ricerca della radice quadrata di un dato numero.

Come si è visto (n. 68), alla estrazione della radice quadrata (aritmetica) del prodotto ab di due numeri (positivi)

$$\sqrt{ab}$$

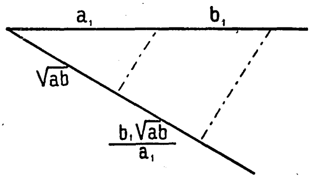
corrisponde geometricamente la costruzione (di cui ripetiamo la figura) della media proporzionale tra i due segmenti di lunghezze a e b.



Così si potrà *interpretare geometricamente* ogni espressione

$$x = \frac{b_1 \sqrt{ab}}{a_1},$$

come quarta proporzionale dopo i segmenti a_1, b_1, $\sqrt{ab}$ (n. 65), e più in generale (cfr. n. 66)



$$x = \frac{b_1 b_2 \sqrt{ab}}{a_1 a_2}, \text{ ecc.}$$

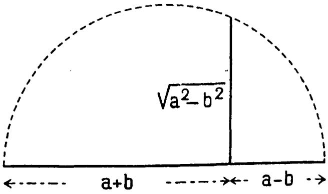
Parimenti si potrà interpretare come media geometrica anche l'espressione

$$x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

in quanto, per l'identità del n. 59, si può scrivere

$$x = \sqrt{(a + b)(a - b)}.$$

E, analogamente a quanto si è detto al n. 67, notiamo che anche altre espressioni, che non siano precisamente della forma considerata dianzi, possono esservi ridotte mettendovi opportunamente in evidenza l'unità 1, come già si è fatto al n. 68 per $\sqrt{a}$ che abbiamo considerato sotto la forma $\sqrt{a \cdot 1}$ (media proporzionale tra 1 ed a).



Così per esempio

$$x = c\sqrt{ab},$$

in quanto si può scrivere

$$x = \frac{c\sqrt{ab}}{1},$$

si potrà interpretare come quarto proporzionale dopo 1, c, $\sqrt{ab}$.

72. Alla interpretazione geometrica di altre espressioni, che contengono estrazioni di radici quadrate, conduce il teorema di Pitagora, il quale dà la relazione caratteristica che deve sussistere tra le lunghezze a, b, c dell'ipotenusa e dei due cateti di un triangolo rettangolo (n. 61):

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Di qui ricaviamo anzitutto la formola

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \tag{2}$$

la quale dà l'espressione dell'ipotenusa per mezzo dei cateti; e in secondo luogo, risolvendo rispetto ad uno dei cateti, p. es. c, troviamo la formola

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \tag{3}$$

che esprime uno dei cateti per mezzo dell'altro e dell'ipotenusa.

Abbiamo così da aggiungere alle espressioni algebriche, che sappiamo interpretare (nn. 65, 66, 71), le (2) e (3); e, combinando le une con le altre, potremo ricavarne altre più complicate, pur sempre interpretabili geometricamente. (Si vedano in proposito gli Esercizi).

73. Le formule (2), (3) sono di uso frequente nella risoluzione dei problemi di geometria. Noi qui, servendoci di esse, daremo qualche altra formola notevole; ed in ciò, come già nei due ultimi numeri, intenderemo parlare sempre di radici quadrate aritmetiche.

In queste deduzioni ci sarà utile conoscere le regole, relative alla estrazione di radice quadrata di un prodotto e di un quoziente, che sono espresse dalle due seguenti identità:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b},$$

e

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

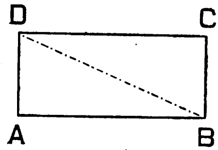
Per dimostrare la prima di queste identità basta verificare che il quadrato del secondo membro è uguale ad ab: ora per una nota regola sul calcolo delle potenze [1] abbiamo appunto

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Ed analogamente [2] si verifica la seconda identità.

74. DIAGONALE DEL RETTANGOLO DI DIMENSIONI a E b:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Nel caso particolare del quadrato dovremo supporre $a = b$ e avremo

$$d = \sqrt{2a^2},$$

ossia (n. prec.)

$$d = \sqrt{2}a.$$

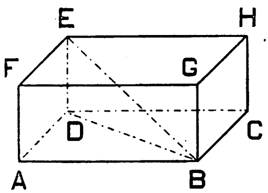
75. DIAGONALE DEL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO. — Similmente se a, b, c sono le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo

$$AB = a, \quad AD = b, \quad AF = c,$$

abbiamo per la diagonale DB della base $ABCD$

$$DB^2 = a^2 + b^2$$

e per la diagonale $d = BE$ del parallelepipedo, dal triangolo BDE rettangolo in D,



$$d^2 = DB^2 + c^2$$

ossia

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

e quindi

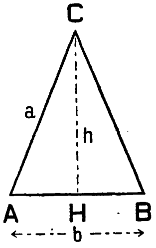
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

76. TRIANGOLO ISOSCELE. — Del triangolo isoscele ABC di base AB indichiamo con a, b, h rispettivamente le lun-

(1) PINCHERLE: *Lezioni di Algebra elementare:* n. 65, *a): Un prodotto si innalza a una data potenza, innalzando a quella potenza i singoli fattori del prodotto e moltiplicando i risultati.*

(2) *Ibidem:* n. 85: *Un quoziente si innalza a una data potenza, innalzando a quella potenza i due termini del quoziente e scrivendo il quoziente dei risultati.*

ghezze del lato, della base e dell'altezza. Siccome i triangoli AHC, BHC sono rettangoli, avremo



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{ossia} \quad a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Di qui ricaviamo

$$a = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}, \quad h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}};$$

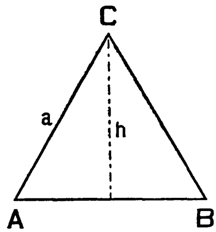
e siccome la uguaglianza precedente si può anche scrivere

$$4a^2 = 4h^2 + b^2 \quad \text{ossia} \quad b^2 = 4(a^2 - h^2)$$

concludiamo (n. 73)

$$b = 2\sqrt{a^2 - h^2}.$$

77. Triangolo equilatero. — Indicati con a ed h il lato e l'altezza del triangolo equilatero, abbiamo che ciascuno dei due triangoli rettangoli in cui esso è diviso dall'altezza, ha per cateti h e $\frac{a}{2}$, cosicchè avremo



$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

ossia

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$

e quindi (n. 73)

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}h.$$

78. Siccome nell'esagono regolare i raggi che vanno a due vertici consecutivi determinano un triangolo equilatero di lato uguale a quello dell'esagono e di altezza uguale all'apotema (1), così servendoci delle formole precedenti, potremo *calcolare l'apotema dell'esagono regolare che ha un certo lato e viceversa.*

79. Notiamo infine che, se è noto il lato l_n del poligono regolare ad n lati, iscritto nel cerchio di raggio r, considerazioni analoghe a quelle dei nn. prec. permettono di calcolare, con sole operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate, tanto il lato l_n' del poligono regolare circoscritto dello stesso numero di lati, quanto il lato l_{2n} del poligono regolare iscritto ad un numero doppio di lati.

(1) *Geometria:* n. 343.

Si rende così effettuabile praticamente il calcolo approssimato di π col procedimento che ci è servito a definire codesto numero dapprincipio (n. 39). Per maggiori particolari su questo e su altri metodi analóghi rimandiamo agli Esercizi.

80. Rettificazione approssimata della circonferenza e quadratura approssimata del cerchio.

Abbiamo detto al n. 44 che il rapporto π della lunghezza della circonferenza al diametro, dal quale dipende la determinazione della misura della circonferenza e del cerchio, è irrazionale. Ma si potrebbe pensare (e così veramente per lungo tempo si è creduto) che π sia un irrazionale calcolabile con sole estrazioni di radici quadrate; il che vorrebbe dire che con costruzioni eseguibili con la riga e col compasso si potrebbe tanto *rettificare la circonferenza* (cioè determinare il segmento avente la stessa lunghezza della circonferenza) quanto *quadrare il cerchio* (cioè determinare un poligono avente la stessa area del cerchio).

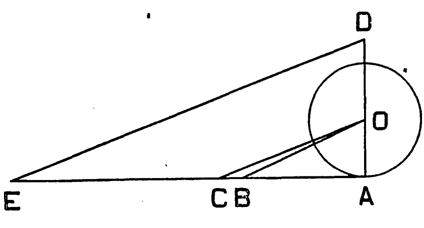
Invece, come già si accennò al n. 44, è stato dimostrato nel 1882 dal Lindemann che π è un *numero trascendente*, vale a dire un numero che non soltanto non è calcolabile con estrazioni di radici quadrate, ma non soddisfa neppure ad alcuna equazione algebrica (a coefficienti razionali). Fu così assodato, in particolare, che non è possibile costruire mediante gli strumenti elementari (riga, compasso, ecc.) la lunghezza della circonferenza che ha un dato raggio, o un poligono che abbia la stessa area del cerchio dato.

È in questo senso, che va intesa, la *impossibilità della rettificazione della circonferenza*, e della *quadratura del cerchio.*

Si possono tuttavia assegnare delle costruzioni eseguibili con la riga e il compasso che conducono ad un segmento il quale diversifichi dalla lunghezza della circonferenza data per un segmento piccolissimo e praticamente trascurabile, o ad un poligono la cui area differisca insensibilmente da quella del dato cerchio.

Daremo qui un esempio dell'una e dell'altra specie di costruzioni.

a) Dato un cerchio O di raggio r, si prenda su di una tangente ad esso, a partire dal punto di contatto A, il segmento AB uguale al diametro aumentato del quinto del raggio, e di seguito a questo, il segmento BC uguale ai due quinti del raggio. Congiunto O con B e con C, si prenda AD uguale ad OB, e da D si conduca la parallela alla OC fino ad incontrare la AC in E. Il segmento AE rappresenta per approssimazione la circonferenza O rettificata.



Infatti, dai triangoli simili ADE, AOC risulta che

$$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AO}.$$

Ma

$$AC=\frac{13}{5}r=\frac{13}{5}OA,\ AD=OB,$$

onde risulta

$$AE = \frac{13}{5} OB.$$

Ora è (nn. 72, 73)

$$OB = r \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2};$$

di qui si conclude che

$$AE = r \cdot \frac{13}{25} \sqrt{146}.$$

Eseguendo il calcolo se ne ricava

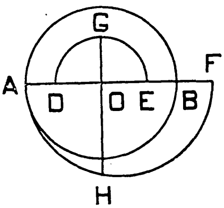
$$\frac{AE}{2r} = 3{,}1415919.....$$

Confrontando questo valore con π, si vede che vi è un errore lievemente superiore a 0,0000007, cosicchè AE rappresenta la circonferenza, per difetto, e ne differisce meno di due milionesimi del raggio.

b) Sul diametro $AB = 2r$ del cerchio dato, si portino, a partire dal centro O e da bande opposte di esso, i segmenti

$$OD = \frac{3}{5} r, \quad OF = \frac{3}{2} r,$$

e dimezzato in E il raggio OB (al cui prolungamento appartiene F), si descrivano da banda opposta rispetto alla AB, le semicirconferenze di diametri DE, AF. Se la perpendicolare in O alla AB interseca in G, H rispettivamente codeste due semicirconferenze, il quadrato di lato GH ha approssimativamente superficie uguale al cerchio dato.



Si ha invero

$$OA = r, \quad OF = \frac{3}{2} r,$$

$$OD = \frac{3}{5} r, \quad OE = \frac{1}{2} r$$

e (n. 61)

$$OA : OH = OH : OF$$

$$OD : OG = OG : OE$$

e quindi

$$OH^2 = \frac{3}{2} r^2, \quad OG^2 = \frac{3}{10} r^2$$

e quindi

$$GH = OH + OG = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} r = r \cdot 1{,}77246.....$$

Poichè

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245...,$$

GH differisce per eccesso dal lato del quadrato che ha la stessa superficie del cerchio, per meno di $\frac{1}{100000}$ del raggio [1].

---

[1] Per le questioni relative alla rettificazione della circonferenza e alla quadratura del cerchio vedi CALÒ: « *Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo* » Art. VIII del Vol. II dei « Collectanea » di F. ENRIQUES.

IV.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Formola generale di risoluzione

81. Nel Cap. precedente siamo stati condotti per via geometrica allo studio di equazioni di 2° grado della forma

$$x^2 = a$$

o, come si suol dire, di *equazioni di 2° grado pure.*

Ora faremo vedere che la risoluzione di ogni altra equazione di 2° grado (ad una sola incognita) si può sempre ridurre a quella di un'equazione pura.

A tale scopo sarà prima utile ricordare che si dicono *equivalenti* due equazioni, quando hanno le *stesse soluzioni* (1); cosicchè per dimostrare l'equivalenza di due equazioni occorre provare che tutte le soluzioni della prima soddisfano alla seconda e viceversa.

Inoltre rammentiamo che i principi fondamentali per la risoluzione delle equazioni sono i seguenti: *Data un' equazione, si ottiene un' equazione equivalente:*

a) *se ad ambo i membri della data si aggiunge una stessa espressione algebrica o, in particolare, uno stesso numero;*

b) *se si moltiplicano ambo i membri dell' equazione data per uno stesso numero diverso dallo zero.*

Discende in particolare dal principio *a*) che in una equazione si può, senza alterarne le soluzioni, trasportare un termine da un membro all'altro, purchè gli si cambi segno.

82. Ciò premesso, consideriamo una qualsiasi equazione di 2° grado ad una sola incognita x.

Potremo, pel principio *a*) or ora ricordato, trasportare tutti i termini in un membro; nel quale avremo così termini in x^2,

(1) PINCHERLE. *Lezioni di Algebra elementare:* n. 196.

termini in x e termini, che non contengono la x o, come si sogliono chiamare, termini noti. Per conseguenza la *forma generale dell'equazione di 2° grado ad una incognita* sarà

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

dove a, b, c designano tre *coefficienti* numerici qualsiansi, cioè indifferentemente positivi o negativi, razionali o irrazionali. Soltanto si può supporre che a non sia nullo, giacchè se ciò fosse, l'equazione si ridurrebbe di 1° grado: così l'equazione (1) sarà equivalente a quella che se ne deduce, moltiplicandone ambo i membri per $\frac{1}{a}$ (n. prec.), cioè ad

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se, per semplicità, i due numeri noti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ si indicano con p, q rispettivamente, l'equazione generale di 2° grado diventa

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

83. I coefficienti p e q possono benissimo annullarsi, e si hanno così due casi particolari in cui l'equazione si risolve immediatamente.

Se è $p = 0$, l'equazione si riduce alla equazione pura

$$x^2 + q = 0$$

che noi abbiamo già studiato ai nn. 68-70. Trasportando il termine noto al secondo membro

$$x^2 = -q,$$

vediamo che se q è positivo (e quindi $-q$ negativo) l'equazione non ammette soluzione alcuna (n. 70); mentre invece, se q è negativo, è soddisfatta dai due numeri fra loro opposti

$$\sqrt{q} \quad \text{e} \quad -\sqrt{q}$$

e da nessun altro all'infuori di questi.

Se poi anche q è nullo, l'equazione

$$x^2 = 0$$

ha l'unica soluzione $x = 0$.

NOTA. — Avvertiamo che nell'uso, generalizzando un nome che si presenta naturale nel caso presente, le soluzioni di una qualsiasi equazione di 2° grado si dicono anche *radici* di essa.

84. Quando sia $q = 0$, l'equazione (2), che si riduce a

$$x^2 + px = 0,$$

si potrà scrivere

$$x(x + p) = 0,$$

cosicchè le sue soluzioni dovranno annullare il prodotto $x(x + p)$. Dovrà dunque essere o

$$x = 0$$

o

$$x + p = 0$$

cioè

$$x = -p,$$

L'equazione ammette dunque le due soluzioni, in generale distinte, 0 e $-p$.

Essa ci fornisce un esempio di equazione di 2° grado *riducibile* al 1°.

85. Esaminati codesti casi particolari, torniamo all'equazione generale

(2) $$x^2 + px + q = 0.$$

Essa si risolve con un artificio, detto del *completamento del quadrato*, suggerito dalla formola che dà lo sviluppo del quadrato del binomio (n. 57).

Presa la (2) sotto la forma

$$x^2 + px = -q,$$

osserviamo che il primo membro, in quanto si può scrivere

$$x^2 + 2x\frac{p}{2},$$

dà due termini dello sviluppo del quadrato del binomio $x + \frac{p}{2}$; cosicchè aggiungendo ad ambo i membri il termine mancante $\frac{p^2}{4}$, otterremo l'equazione, equivalente alla (2) (n. 81, *a*),

$$x^2 + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

la quale potrà addirittura scriversi

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q. \tag{3}$$

Ora il primo membro di quest'equazione, essendo un quadrato perfetto, risulterà, per ogni qualsiasi valore di x, o positivo o nullo, talchè se il secondo membro

$$\frac{p^2}{4}-q$$

è negativo, concludiamo senz'altro che l'equazione non ammette nessuna soluzione (n. 70).

Se è invece

$$\frac{p^2}{4}-q=0,$$

l'equazione si riduce a

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0,$$

per il che si richiede sia soddisfatta l'equazione di 1° grado

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

la quale ammette l'unica soluzione

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Se infine si ha

$$\frac{p^2}{4}-q>0,$$

risulta dalla (3) che $x+\frac{p}{2}$ deve essere uguale ad una delle due radici quadrate (n. 70) di codesto numero positivo, talchè dovremo avere o

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

o

$$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

ottenjamo così per la nostra equazione le due soluzioni

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

che di solito si designano simultaneamente coll'unica formola

$$(4) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

la quale dicesi *formola generale di risoluzione* dell'equazione (2).

Il binomio

$$\frac{p^2}{4} - q,$$

che col suo segno caratterizza i tre casi possibili per il numero di soluzioni ammesse dall'equazione di 2° grado (due, una o nessuna) dicesi *discriminante* dell'equazione (e talvolta anche del trinomio di 2° grado che ne costituisce il primo membro).

Notiamo poi che, come l'alunno verificherà facilmente, la formola generale (4), applicata anche ai casi particolari dei nn. 83, 84, riproduce le soluzioni là determinate.

La precedente discussione si può riassumere nel seguente enunciato: *L'equazione di 2° grado*

$$(2) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

quando il discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q$$

è positivo, ammette le due soluzioni distinte

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

quando il discriminante è nullo, ammette l'unica soluzione

$$-\frac{p}{2};$$

e quando il discriminante è negativo, non ammette soluzione alcuna.

NOTA. — Osserviamo che se il termine noto q è negativo, il discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q$$

è certamente positivo e l'equazione ha perciò due soluzioni distinte.

86. Può tornar comodo posseder la formola di risoluzione per l'equazione di 2° grado considerata nella sua primitiva forma

(1) $$ax^2 + bx + c = 0.$$

Codesta formola di risoluzione si potrebbe ottenere direttamente, grazie ad un artificio analogo a quello usato nel n. prec. per la (2) (completamento del quadrato): ma, più semplicemente, noi sostituiremo nella (4) a p, q i rispettivi valori $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$: otteniamo così

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ossia, riducendo allo stesso denominatore il radicando,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o, infine, in base al n. 73

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Risulta di qui che l'equazione (1) ammette due soluzioni, una o nessuna, secondo che è positivo, nullo o negativo il binomio

$$b^2 - 4ac$$

che coincide nel segno col discriminante $\frac{p^2}{4} - q$ del n. prec., in quanto si ha

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione di 2° grado

87. Riprendiamo l'equazione di 2° grado sotto la forma

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2}$$

e supposto positivo il discriminante, designiamo con x_1, x_2 le due soluzioni, ponendo per fissare le idee

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Sommando membro a membro queste due uguaglianze otteniamo

$$x_1 + x_2 = -p,$$

mentre calcolando, in base all'identità del n. 59, il prodotto delle due soluzioni, troviamo

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q \\ &= q. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned} \right. \tag{5}$$

ossia:

Se in un'equazione di 2° grado, a discriminante positivo, il coefficiente di x² *è ridotto uguale ad* 1, *il coefficiente di x, cambiato di segno, è uguale alla somma delle due soluzioni e il termine noto è uguale al loro prodotto.*

88. Naturalmente se l'equazione si prende sotto la forma (1), le relazioni precedenti diventano

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

89. Le relazioni (5) (o (6)) fra le soluzioni e i coefficienti della equazione di 2° grado permettono di prevedere dai segni dei coefficienti quelli delle soluzioni.

Riferendoci alla equazione (2) avremo anzitutto che, essendo

$$x_1 x_2 = q,$$

le due soluzioni avranno segno uguale o contrario secondo che q è positivo o negativo.

Se è $q > 0$, le due soluzioni, in quanto è

$$x_1 + x_2 = -p,$$

saranno entrambe positive o entrambe negative, secondo che p è negativo o positivo.

Quando invece è $q < 0$, e quindi le soluzioni sono di segno contrario, la

$$x_1 + x_2 = -p$$

ci dice che avrà valore assoluto maggiore quella delle due soluzioni che ha segno contrario a p.

Abbiamo così la seguente tabelletta, in cui si è supposto di rappresentare con x_1 la soluzione di valore assoluto maggiore:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0$$

p	q	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
—	—	+	—
+	—	—	+

Decomposizione di un trinomio di 2° grado in fattori di 1° grado

90. Un'altra importante conseguenza delle relazioni tra soluzioni e coefficienti è la seguente. Tenendo conto delle (5), il trinomio

$$x^2 + px + q$$

si può scrivere

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

ossia

$$(x - x_1)(x - x_2).$$

Cioè: *Il trinomio di 2° grado*

$$x^2 + px + q,$$

quando il discriminante è positivo, è identico al prodotto dei due binomi, che si ottengono sottraendo da x *le due soluzioni dell'equazione corrispondente*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Nello stesso modo, servendoci delle (6), troviamo

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)= \\ &= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2] \\ &= a(x-x_1)(x-x_2). \end{aligned}$$

Da quanto precede risulta che *se un trinomio di 2° grado in* x *si annulla per un certo valore* x_1 *di* x, *esso è divisibile per* $\mathrm{x}-\mathrm{x}_1$, *e viceversa* [1].

91. Al risultato del n. prec. conviene ravvicinare il fatto (già verificato direttamente al n. 85) che se il discriminante è nullo

$$\frac{p^2}{4}-q=0,$$

il trinomio x^2+px+q si riduce al quadrato perfetto

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Similmente, se è

$$b^2-4ac=0,$$

si ha identicamente

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Risoluzione geometrica della equazione di 2° grado

92. Interpretando geometricamente la formola generale di risoluzione della equazione di 2° grado

$$x^2+px+q=0, \tag{2}$$

si perviene a costruzioni, che forniscono per codesta equazione una effettiva risoluzione geometrica.

Ma qui conviene considerare a parte i vari casi, che si verificano a seconda del segno dei due coefficienti p e q. Essi veramente possono presentare quattro diverse combinazioni di segno

$$++,\quad --,\quad -+,\quad +-;$$

ma possiamo limitarci a considerare i due ultimi casi, nei quali p e q hanno segno contrario, giacchè se essi sono di ugual segno, basta prendere come nuova incognita x' la $-x$, cioè porre nella equazione data $x=-x'$, per avere l'equazione

$$(-x')^2+p(-x')+q=0$$

[1] È questo un caso particolare di un teorema che si dimostra nella teoria della divisibilità dei polinomi. Cfr. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra Elementare;* n. 190, *b*).

ossia

$$x'^2 - px' + q = 0,$$

la quale ha i due ultimi coefficienti di segno contrario, e d' altra parte ammette come soluzioni le soluzioni stesse della (2), cambiate di segno; talchè una costruzione geometrica delle une (prese in valore assoluto) fornirà simultaneamente anche le altre.

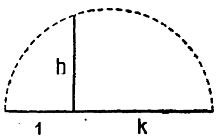
Perciò, se mettiamo in evidenza il segno dei coefficienti e indichiamo con s e k due numeri positivi, basterà considerare i due tipi di equazioni

$$x^2 - sx + k = 0$$
$$x^2 + sx - k = 0.$$

Tanto per l'una, quanto per l'altra, a semplificare le costruzioni che si dovranno poi eseguire per la risoluzione, converrà determinare preventivamente la media proporzionale

$$h = \sqrt{k}$$

tra il segmento 1 e il segmento k, ossia il lato del quadrato equivalente al rettangolo di base k e altezza 1 (n. 68).



Ciò fatto, le nostre due equazioni diventano rispettivamente

α) $$x^2 - sx + h^2 = 0$$

β) $$x^2 + sx - h^2 = 0.$$

93. Cominciando dalla α), riprendiamo la formola generale di risoluzione della (1) (n. 85)

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

e poniamovi

$$p = -s, \quad q = h^2.$$

Otteniamo così per la α) la formola di risoluzione

$$\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - h^2},$$

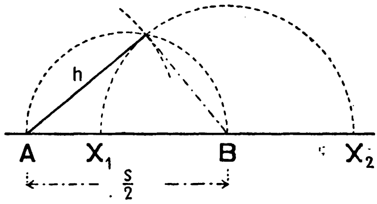
la quale ci dice che, ove sia

$$\frac{s^2}{4} - h^2 > 0$$

ossia, poichè s ed h sono positivi,

$$\frac{s}{2} > h,$$

le due soluzioni della data equazione si ottengono rispettivamente aggiungendo e sottraendo al segmento $\frac{s}{2}$ il segmento $\sqrt{\frac{s^2}{4} - h^2}$, cioè (n. 72) il secondo cateto del triangolo rettangolo, che ha l'ipotenusa $\frac{s}{2}$ e il cateto h. La costruzione effettiva è indicata dall'unita figura, dove le due soluzioni della α) sono rappresentate da AX_1 e AX_2.



Ciò, come si è avvertito, vale sotto l'ipotesi che il discriminante della α) sia positivo. Ma se invece è

$$\frac{s^2}{4} - h^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{s}{2} = h,$$

si ha l'unica soluzione $\frac{s}{2}$ (immediatamente costruibile), mentre se è

$$\frac{s^2}{4} - h^2 < 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{s}{2} < h,$$

l'equazione α) non ammette soluzioni, e, corrispondentemente, la costruzione valida nel primo caso, si presenta impossibile.

Notiamo che nel primo caso considerato, cioè quando è $\frac{s}{2} > h$, appare dalla costruzione suindicata che i due segmenti AX_1, AX_2 della secante condotta da A alla circonferenza di centro B e raggio $\sqrt{\frac{s^2}{4} - h^2}$ ammettono come media proporzionale il segmento di tangente h [1], o, in altre parole, il rettangolo di

[1] *Geometria:* n. 463. — *Condotte da un punto esterno ad un cerchio una tangente e una secante, il segmento di tangente compreso fra codesto punto e il punto di contatto è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi fra quel punto e le due intersezioni con la circonferenza,* ossia, come si suol dire brevemente, *la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la parte esterna.*

lati AX_1, AX_2 è equivalente al quadrato di lato h (n. 60). Inoltre risulta dalla figura stessa (come del resto discende dal n. 87)

$$AX_1 + AX_2 = 2AX_1 + X_1X_2 = 2AX_1 + 2X_1B = \\ = 2(AX_1 + X_1B) = s;$$

onde si conclude che costruendo i segmenti AX_1, AX_2 si è dianzi risoluto il problema di *determinare i lati del rettangolo di perimetro* 2s, *equivalente al quadrato di lato* h.

È questo dunque il problema geometrico, cui corrisponde l'equazione α), come del resto si mette in evidenza scrivendo codesta equazione sotto la forma

$$x(s - x) = h^2.$$

94. Passando all'equazione

$$\beta) \qquad x^2 + sx - h^2 = 0,$$

poniamo nella formola generale di risoluzione (n. 85)

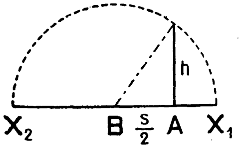
$$p = s, \quad q = -h^2;$$

otteniamo così la formola

$$-\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + h^2},$$

la quale dice che la soluzione positiva della β) si costruisce sottraendo il segmento $\frac{s}{2}$ dal segmento $\sqrt{\frac{s^2}{4} + h^2}$, cioè (n. 72) dall'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $\frac{s}{2}$ ed h; mentre la soluzione negativa, presa in valore assoluto, si ottiene sommando gli stessi due segmenti or ora indicati.

La costruzione effettiva si trova eseguita nell'annessa figura, dove AX_1 rappresenta la soluzione positiva, mentre la AX_2 rappresenta quella negativa.



Risulta da codesta figura che h è la media proporzionale fra X_2A e AX_1, ossia che il rettangolo dei due segmenti X_2A, AX_1 è equivalente al quadrato di lato h (n. 60); mentre d'altra parte si ha (cfr. anche il n. 87)

$$X_2A - AX_1 = X_2X_1 - 2AX_1 = 2BX_1 - 2AX_1 =$$
$$= 2(BX_1 - AX_1) = 2BA = s,$$

cosicchè si conclude che la costruzione suindicata dei due segmenti X_2A, AX_1 fornisce la risoluzione geometrica del problema di *determinare il rettangolo che sia equivalente al quadrato di lato* h *e abbia come differenza dei lati il segmento* s.

È questo appunto il problema geometrico che dà luogo all'equazione β), come si vede anche direttamente scrivendo codesta equazione sotto la forma

$$x(x+s) = h^2.$$

Conviene notare che codesto problema è sempre risolubile, come risulta sia dalla costruzione dianzi indicata, sia dal fatto che l'equazione β) ha il discriminante

$$\frac{s^2}{4} + h^2$$

sempre positivo ed ammette perciò in ogni caso due soluzioni distinte (n. 85).

95. Il problema enunciato pocanzi comprende come caso particolare un problema di 2° grado classico, quello della determinazione della *sezione aurea* di un dato segmento a. Si dice notoriamente sezione aurea di a una sua parte x, tale che il quadrato di essa sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento a e della parte residua $a - x$ [1].

Si ottiene così senz'altro l'equazione

$$x^2 = a(a-x)$$

ossia

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

la quale è del tipo β) ed ammette la formola di risoluzione

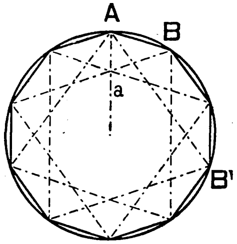
$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La soluzione positiva

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a$$

[1] *Geometria:* n. 401.

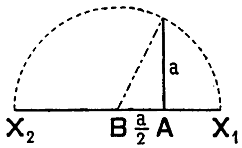
dà la sezione aurea di a, che è notoriamente uguale al lato AB del decagono regolare convesso iscritto nella circonferenza di raggio a [1]; mentre la soluzione negativa, cambiata di segno



$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}+\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,a$$

dà il lato AB' del decagono regolare stellato, iscritto nella stessa circonferenza.

Notiamo che la consueta costruzione della sezione aurea di un segmento (indicata dalla annessa figura) non è altro che la costruzione del n. prec., applicata al presente caso particolare.



Esempi di equazioni riducibili al 2° grado

96. Diamo due esempi di equazioni *riducibili* al 2° grado, vale a dire di particolari equazioni di grado superiore al 2°, la cui risoluzione si riduce, con opportuni artifici, a quella di equazioni di 2° grado.

Consideriamo in primo luogo un'equazione di 4° grado, la quale non contenga potenze dispari dell'incognita (*equazione biquadratica elementare*). Ove si trasportino tutti i termini in un membro, essa avrà la forma

$$ax^4+bx^2+c=0$$

dove a, b, c sono coefficienti numerici che si suppongono noti, e, poichè è lecito supporre a diverso da zero, si potrà ridurre a

$$x^4+px^2+q=0, \tag{7}$$

dove p e q designano i rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$.

Ora codesta equazione si può anche scrivere

$$(x^2)^2+px^2+q=0,$$

cosicchè abbiamo che, se x soddisfa all'equazione (7), il suo quadrato $y=x^2$ (che qui si prende come *incognita ausiliare*) dovrà soddisfare alla

$$y^2+py+q=0. \tag{8}$$

Se la (8) ammette una soluzione positiva y_1, le due radici quadrate

$$\pm\sqrt{y_1}$$

soddisfaranno alla (7); cosicchè, secondo che la equazione ausiliare (8) ammette due soluzioni positive, una o nessuna, l'equazione biquadratica

[1] *Geometria:* n. 404.

ammetterà quattro soluzioni (a due a due uguali in valore assoluto e di segno contrario) o due (fra loro uguali in valore assoluto e di segno contrario) o nessuna.

Il primo caso si verifica (n. 89) per

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad p < 0, \quad q > 0,$$

e le quattro soluzioni sono date dall'unica formola

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

ove si scelgano nei quattro modi possibili i segni; il secondo caso si ha per

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad q < 0$$

e sotto questa ipotesi le due soluzioni sono

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

oppure per

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \quad p < 0$$

e allora le soluzioni si riducono a

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2}}.$$

97. Un'altra specie di equazioni riducibili al 2° grado è data dalle *equazioni di 4° grado reciproche*, cioè aventi uguali i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi, quando siano ordinati secondo le potenze (decrescenti o crescenti) della incognita. Data un'equazione siffatta

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{9}$$

ne deduciamo, dividendo ambo i membri per x^2,

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

ossia

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \tag{10}$$

Se ora prendiamo come incognita ausiliare la

$$y = x + \frac{1}{x},$$

avremo, innalzando al quadrato ambo i membri,

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

ossia

$$y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

cosicchè, sostituendo nella (10), si è condotti alla equazione ausiliare di 2° grado

(11) $$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Se y_1 è una sua soluzione, le eventuali soluzioni della equazione

$$x + \frac{1}{x} = y_1,$$

che si può scrivere

(12) $$x^2 - y_1 x + 1 = 0$$

ed è perciò anch'essa di 2° grado, soddisfaranno anche alla (9).

In tal modo si ottengono tutte le soluzioni della (9); e poichè la (11) può avere al massimo due soluzioni e per ciascuna di esse la (12) può pur essa averne al massimo due, concludiamo che la (9) ammetterà al massimo quattro soluzioni.

V.

RADICI D'INDICE QUALSIASI E CALCOLO DEI RADICALI

Radici cubiche e d'indice qualsiasi

98. La definizione di radice quadrata (nn. 68-70) si estende nel modo più naturale.

Dato un numero positivo a e un numero intero positivo n, dicesi *radice aritmetica* n^ma^, o *di indice* n, del numero a un numero positivo x, la cui potenza n^{ma} sia uguale ad a

$$x^n = a.$$

Codesto numero x si indica con $\sqrt[n]{a}$, talchè abbiamo per definizione

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$

mentre d'altra parte, per la definizione medesima, sarà identicamente

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

99. Come la radice di indice 2 si dice quadrata, così quella di indice 3 si dice *cubica;* e ciò perchè, come vedremo (n. 121), $\sqrt[3]{a}$ è *la lunghezza dello spigolo del cubo di volume* a.

Se a è un numero intero che non sia esattamente la potenza n^{ma} di un certo altro numero intero, si dimostra come al n. 62 che $\sqrt[n]{a}$ non può essere un numero razionale.

In tal caso $\sqrt[n]{a}$ sarà un certo irrazionale, di cui potremo calcolare quante cifre decimali vorremo con un procedimento analogo a quello del n. 69. Qualunque sia a, se vorremo determinare $\sqrt[n]{a}$ a meno di 0,001, basterà trovare quei due numeri decimali aventi tre cifre dopo la virgola, i quali differiscano appunto di 0,001 e abbiano le potenze n^{me} rispettivamente minore e maggiore del numero dato a. Potendosi ciò ripetere per qualsiasi approssimazione, resterà in ogni caso determinato, dal punto di vista teorico, il numero decimale (razionale o irrazionale) che dà la $\sqrt[n]{a}$.

Ma nella pratica codesto procedimento di approssimazione è, per la sua lentezza, inadatto ai calcoli effettivi delle radici; noi impareremo altri metodi assai più rapidi, quando studieremo l'uso delle *tavole di logaritmi.*

100. Per le radici d'indice pari, si può ripetere un'osservazione analoga a quella del n. 70.

Se p. es. l'indice è 4 ed a è al solito un numero positivo, avremo che insieme con la radice aritmetica $\sqrt[4]{a}$ anche il numero opposto $-\sqrt[4]{a}$ ammetterà come quarta potenza il numero a, perchè

$$\left(-\sqrt[4]{a}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a;$$

codesto numero $-\sqrt[4]{a}$ si dirà la radice quarta *negativa* di a.

Ed è manifesto che ogni numero diverso da $\pm\sqrt[4]{a}$ ha una quarta potenza diversa da a.

Così *un numero positivo ammette, per ogni indice pari, due radici, uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

D'altra parte, poichè ogni potenza ad esponente pari di un numero (sia positivo, sia negativo) è positiva, *un numero negativo non può ammettere nessuna radice di indice pari.*

101. Accade in qualche modo il contrario per le radici di indice dispari, per esempio di indice 3.

Invero, considerata la radice aritmetica cubica di a, $\sqrt[3]{a}$, il numero opposto $-\sqrt[3]{a}$ non ha più come cubo a, ma $-a$

$$\left(-\sqrt[3]{a}\right)^3 = -\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = -a.$$

Così, in generale, *quando l'indice è dispari, ogni numero, sia positivo sia negativo, ha una sola radice, la quale ha lo stesso segno del numero considerato* [1].

[1] Perciò, quando l'indice è dispari (e il numero dato è positivo) nel designare la *radice* è superfluo l'aggettivo « aritmetica ».

102. I teoremi dei due nn. precedenti si possono raccogliere nel seguente enunciato:

L' equazione di grado n

$$x^n = a$$

per n pari, *ammette due soluzioni uguali in valore assoluto e di segno contrario se* a *è positivo, e non ne ammette nessuna se* a *è negativo:*

per n *dispari ammette in ogni caso una soluzione ed una sola, la quale ha lo stesso segno di* a.

Calcolo dei radicali

103. Le proprietà ben note delle potenze ([1]) conducono agevolmente ad alcune regole pel calcolo dei radicali, che qui indicheremo, supponendo, per evitare ogni equivoco, che le espressioni sotto i segni di radice (dette *radicandi*) siano tutte positive, e intendendo di riferirci sempre alle radici aritmetiche (o positive).

Se talvolta nel seguito si sarà costretti a considerare radici negative, e in particolare radici d' indice dispari di radicandi negativi, sarà facile decidere caso per caso come si debbano determinare i segni, perchè le regole di calcolo rimangano valide.

104. Anzitutto si estende ai radicali di indice n qualsiasi la regola data al n. 73 per la estrazione della radice quadrata di un prodotto, vale a dire:

La radice n^ma^ *di un prodotto è uguale al prodotto delle radici* n^me^ *dei fattori,* cioè

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,.$$

Ciò si dimostra con lo stesso ragionamento del n. 73; e d' altra parte la regola si estende anche al caso di tre o più fattori:

$$(1) \qquad \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\,.$$

([1]) PINCHERLE: *Lezioni di Algebra Elementare;* nn. 62-65.

105. Se nella prima identità del n. prec. poniamo a^n in luogo di a e ricordiamo (n. 98) che

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

troviamo la identità

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b},$$

la quale ci dice che se fra i fattori del radicando vi è una potenza di esponente uguale all'indice della radice, si può portare fuori del segno di radice la detta potenza, riducendone ad 1 l'esponente: e, viceversa, un fattore esterno si può portare sotto il segno di radice, purchè si innalzi all'esponente uguale all'indice di radice.

106. Spesso la identità (1) del n. 104 si applica in senso inverso, sostituendo al prodotto di più radicali del medesimo indice un unico radicale avente per radicando il prodotto dei radicandi dati.

Così per esempio se vogliamo innalzare alla potenza m^{ma} la $\sqrt[n]{a}$, avremo per la definizione di potenza,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underset{1}{\sqrt[n]{a}}\;\underset{2}{\sqrt[n]{a}} \underset{\dots\dots}{\dots\dots} \underset{m}{\sqrt[n]{a}}$$

e quindi per l'osservazione precedente

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{\underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \underset{\dots\dots}{\dots\dots} \underset{m}{a}}$$

o infine

$$(2) \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dunque *per innalzare un radicale a una certa potenza, basta innalzare all' esponente prefissato il radicando.*

Ciò si può anche esprimere dicendo che *se si deve estrarre da un numero la radice di un certo indice e poi innalzare il risultato ad un certo esponente, è indifferente l' ordine in cui si eseguiscono le due operazioni.*

107. Vale anche pei radicali di indice qualsiasi la regola data al n. 73 per la estrazione di radice quadrata di un quoziente, cioè:

La radice n^{ma} *di un quoziente è uguale al quoziente delle* *radici* n^{me} *dei due termini,* cioè

$$(3)\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Infatti il secondo membro innalzato alla potenza n^{ma} dà

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b},$$

il che vuol dire appunto che quel secondo membro è uguale a $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

108. *La radice* m^{na} *della radice* n^{ma} *di un numero è uguale alla radice di indice* mn *di quel numero,* cioè

$$(4)\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Per dimostrare questa identità basterà mostrare che innalzando $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ all'esponente mn si ottiene a.

Ora notiamo che a tale scopo basta innalzare l'indicato radicale all'esponente m e poi il risultato all'esponente n (1); e in codesto modo si ottiene successivamente

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m=\sqrt[n]{a}$$

e poi

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

109. L'identità (4) dimostrata al n. prec. mostra che ogni radice di indice non primo, si può calcolare estraendo successivamente più radici di indice primo. Così,

(1) Pincherle: *Lezioni di Algebra Elementare;* n. 65, *b*.

per esempio,

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}},$$

$$\sqrt[6]{a}=\sqrt{\sqrt[3]{a}},\quad \sqrt[30]{a}=\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}},\ \text{ecc.}$$

110. Se nella identità (4) dimostrata al n. 108 sostituiamo a^n in luogo di a e ricordiamo (n. 98) che

$$\sqrt[n]{a^n}=a,$$

troviamo la nuova identità

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}, \tag{5}$$

la quale esprime il seguente importante teorema: *Un radicale non muta valore se si innalza il radicando ad un qualsiasi esponente* n *e si moltiplica per lo stesso numero* n *l'indice.*

Questa proposizione permette di ridurre più radicali allo stesso indice senza alterarne il valore. Così se si hanno i radicali

$$\sqrt[m]{a} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{b}$$

essi sono rispettivamente uguali a

$$\sqrt[mn]{a^n} \quad \text{e} \quad \sqrt[mn]{b^m}.$$

Come indice comune a più radicali si può prendere manifestamente qualsiasi multiplo comune ai loro indici, in particolare il loro multiplo comune.

111. L'identità (5) del n. prec., letta da destra a sinistra ci dice che *se si considera una certa radice di una determinata potenza e l'indice e l'esponente hanno un fattore comune, si può sopprimere questo fattore comune senza che resti alterato il valore dell'espressione considerata.*

Così per esempio

$$\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}.$$

VI.

PRISMI E CILINDRI

Prismi equivalenti

112. Come i radicali quadratici hanno la loro naturale origine nei problemi relativi al calcolo di aree piane, così anche i radicali cubici trovano, come vedremo in questo capitolo e nei due successivi, una interpretazione geometrica in ordine ai volumi dei solidi e intervengono nella risoluzione dei problemi relativi.

Noi qui, prima di occuparci di siffatte questioni, daremo alcune nozioni sulla *equivalenza dei poliedri.*

113. Si dicono *equivalenti* due poliedri se è possibile considerarli come somma di poliedri ordinatamente uguali.

Di qui risulta che *somme di poliedri equivalenti sono equivalenti.*

E si dimostra come pel caso dei poligoni [1] che *poliedri equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.*

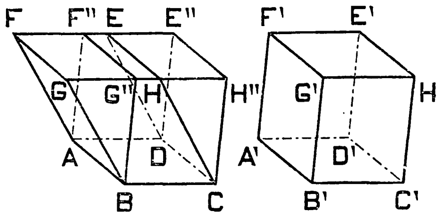
114. Ciò premesso dimostriamo il teorema fondamentale: *Due parallelepipedi aventi basi uguali e altezze corrispondenti uguali sono equivalenti.*

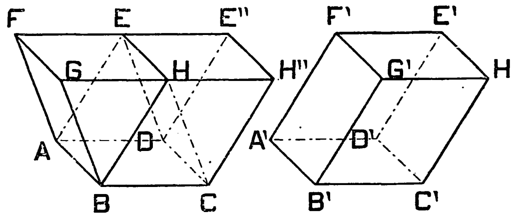
I due parallelepipedi $AB....H$, $A'B'....H'$ abbiano uguali le basi $ABCD$, $A'B'C'D'$ e le altezze corrispondenti; diciamo che essi sono equivalenti.

Sulla base $ABCD$ costruiamo il parallelepipedo $ABCDE''F''G''H''$ uguale ad $A'B'C'....H'$. Le faccie $EFGH$, $E''F''G''H''$ giaceranno in uno stesso piano. Ora se codeste due faccie coincidessero, i due parallelepipedi $AB....H$ e $AB....H''$ sarebbero uguali; onde sarebbero uguali anche $AB....H$, $A'B'....H'$ e il teorema sarebbe dimostrato. Escluso dunque codesto caso, i due parallelogrammi $EFGH$, $E''E''G''H''$, giacenti in uno stesso piano e aventi i lati ordinatamente paralleli, possono essere o no compresi fra le stesse due parallele.

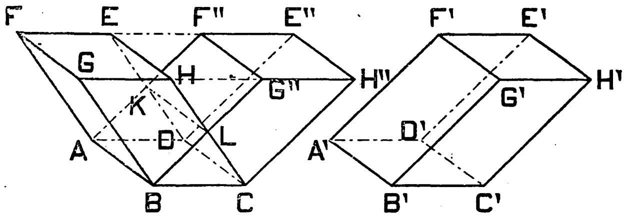
(1) *Geometria:* n. 355.

Esaminiamo anzitutto il primo di codesti due casi; cioè supponiamo che i due parallelepipedi $AB....H$, $AB....H'$ siano contenuti fra i due medesimi piani paralleli. Se i due parallelogrammi $EFGH$, $E''F''G''H''$ hanno comune un parallelogramma $EF''G''H$ (che può anche ridursi ad un solo segmento in cui coincidano EH ed $F''G''$), i due parallelepipedi hanno comune il prisma di base $BCHG''$ e di spigolo laterale BA, e le due parti rimanenti sono due prismi a base triangolare $BG''GFAF''$, $CH''HEDE''$, i quali avendo uguali ordinatamente tutte le faccie sono uguali (1). È allora dimostrato che i due parallelepipedi, essendo somme di parti uguali, sono equivalenti.





Se invece le due faccie $EFGH$, $E''F''G''H''$, pur essendo comprese fra le due medesime parallele, non hanno punti comuni, si riporti di seguito, sul prolungamento di GH a partire da H, un numero sufficiente di segmenti consecutivi uguali

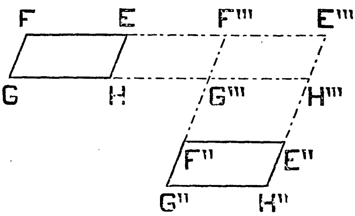


a GH. Ripetendo codesta operazione fino a che si arrivi al primo multiplo di GH maggiore od uguale a GG'', otterremo un estremo appartenente al segmento $G''H''$. Se consideriamo allora i parallelepipedi aventi tutti come base il parallelogramma $ABCD$ e come spigoli opposti ad AD i segmenti

(1) *Geometria:* n. 818. *Due prismi aventi le faccie ordinatamente uguali sono uguali.*

dianzi costruiti sulla retta GH'', avremo, per quanto si è visto dianzi, che il primo è equivalente ad $ABCDH$, l'ultimo ad $ABCDH''$ e ciascuno degli altri tanto al suo precedente come al suo susseguente. Risulta di qui veramente (n. prec.) che $ABCDH$ è equivalente ad $ABCDH''$.

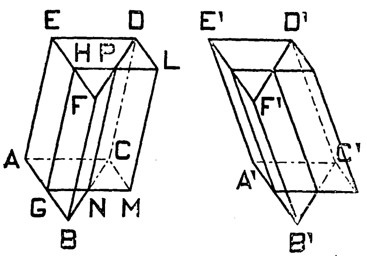
Esaurito così il caso di due parallelepipedi compresi fra i due medesimi piani paralleli, passiamo al caso generale, cioè a quello in cui il parallelepipedo di base $ABCD$ ed uguale ad $A'B'C'D'H'$, non è compreso con $ABCDH''$ fra i due medesimi piani paralleli. Allora le due faccie $EFGH$, $E''F''G''H''$, giacenti ancora in un piano, sono due parallelogrammi uguali, non compresi fra le stesse due parallele, ma aventi i lati paralleli; onde, prolungando in una di esse due lati opposti e nell'altra i due lati opposti non paralleli a quelli, si determinerà un parallelogramma $E'''F'''G'''H'''$ uguale ai due parallelogrammi dianzi considerati, e compreso con ciascuno di essi fra due stesse parallele. Allora i due parallelepipedi aventi la base $ABCD$ comune, e come facce opposte i due parallelogrammi $EFGH$, $E''F''G''H''$, sono ciascuno equivalente al parallelepipedo avente la base $ABCD$ e la faccia opposta $E'''F'''G'''H'''$, onde essi stessi sono equivalenti fra loro (n. prec.); e lo stesso accade dei due parallelepipedi primitivi



$$ABCD....H, \quad A'B'C'D'....H'.$$

115. Il teorema del n. prec. si estende a due prismi quali si vogliano.

Dato, anzi tutto, un prisma triangolare $ABCDEF$, si consideri il parallelepipedo di spigolo AE e avente per base il parallelogramma $AGMC$, contenuto dai segmenti AC e $AG = \frac{AB}{2}$ (parallelogramma equivalente al triangolo ABC). Il prisma e il parallelepipedo sono equivalenti, perchè somme di un prisma (a base trapezoidale) comune e di due prismi triangolari uguali.



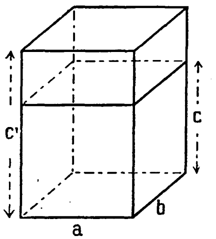
Allora se prendiamo un altro prisma triangolare $A'B'C'D'E'F'$, di base ed altezza rispettivamente uguali a quelle di $ABCDEF$, potremo costruire, come poc' anzi, un parallelepipedo il quale per una parte sarà equivalente al secondo prisma triangolare e per l'altra, avendo base ed altezze rispettivamente uguali a quelle del parallelepido $AMNCD$, sarà pur equivalente a questo. Si può allora concludere che i due prismi triangolari dati, come equivalenti a parallelepipedi equivalenti, sono pure equivalenti fra loro. Cioè: *Due prismi triangolari aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti.*

116. Di qui risulta subito che: *Due prismi quali si vogliano, aventi le basi equivalenti e le altezze uguali, sono equivalenti.*

Se invero si decompongono le due basi in triangoli uguali (1) e pei vertici di questi si conducono in ciascun prisma le parallele agli spigoli rispettivi, i due prismi restano decomposti nella somma di più prismi triangolari, che pel n. prec. sono a due a due equivalenti.

117. Il teor. precedente permette di *trasformare un qualsiasi prisma* P *in un parallelepipedo rettangolo equivalente, la cui base abbia certe prefissate dimensioni* a *e* b.

Invero si trasformi anzitutto il poligono di base del prisma dato P nel rettangolo equivalente, che ha come base il segmento prefissato a (2). Il parallelepipedo rettangolo R che ha come base codesto rettangolo e l'altezza uguale a quella di P è, pel n. prec., equivalente a codesto prisma, ed ha uno spigolo uguale al segmento prefissato a.



Preso allora l'altro segmento prefissato b, basterà trasformare la faccia di R perpendicolare allo spigolo a nel rettangolo equivalente di base b, per ottenere un parallelepipedo rettangolo R', equivalente al prisma dato P e avente due spigoli uguali rispettivamente ai segmenti prefissati a e b.

Importa notare che l'altezza c di codesto parallelepipedo risulta determinata *in modo unico,* perchè se, eseguendo le costruzioni dianzi indicate in altro ordine, ottenessimo una altezza diversa c', i due parallelepipedi, aventi la stessa base di lati a e b e le altezze disuguali c, c', essendo entrambi

(1) *Geometria:* n. 348.
(2) *Geometria:* n. 380.

equivalenti al prisma dato P, dovrebbero essere equivalenti fra di loro. E ciò è assurdo, perchè la nostra intuizione ci assicura che *un poliedro non può essere equivalente ad una sua parte* (postulato dell'equivalenza).

118. Ciò premesso possiamo *confrontare due prismi quali si vogliono* P, P'. Si trasformino a tale scopo in due parallelepipedi rettangoli R, R', aventi entrambi una certa base prefissata. Se R, R' hanno la stessa altezza (e sono perciò uguali) vuol dire che i due prismi dati sono fra loro equivalenti.

In caso contrario uno dei due parallelepipedi, per es. R, avrà altezza maggiore dell'altro e sarà perciò equivalente alla somma di R' e di un altro parallelepipedo; onde risulta che anche il prisma P sarà equivalente alla somma di P' e di un altro poliedro.

Ciò si esprimerà dicendo che P è *prevalente* o *maggiore* di P', o che P' è *suvvalente* o *minore* di P; e si scriverà

$$P > P', \quad P' < P.$$

Misurazione dei prismi

119. Come *unità di misura* dei poliedri, e in generale delle grandezze solide, si assume notoriamente il *cubo dell'unità delle lunghezze*, e indicando con U codesta unità, si dice *misura* o *volume* di una qualsiasi grandezza solida il rapporto di essa ad U (cfr. i nn. 11-12).

Ora, quando si considerano i poliedri come grandezze e in particolare quando si misurano, due poliedri fra loro equivalenti si riguardano come sostituibili l'uno all'altro.

Perciò, dato un prisma P, trasformiamolo nel parallelepipedo rettangolo R avente per base l'unità delle aree, cioè la base U, e teniamo conto del fatto che *due parallelepipedi rettangoli di ugual base sono proporzionali alle rispettive altezze*, come si dimostra con un ragionamento perfettamente analogo a quello usato pei parallelogrammi [1].

Se h è l'altezza di R e ricordiamo che l'altezza di U è l'unità delle lunghezze avremo

$$R : U = h : 1 \quad \text{ossia} \quad R : U = h,$$

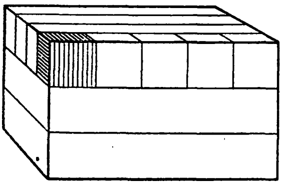
[1] *Geometria:* n. 464.

cioè il volume di R, ossia del prisma dato P, è uguale al numero h che misura l'altezza di R.

120. Ma il procedimento dianzi indicato per determinare il volume di un prisma è tutt'altro che pratico; cosicchè si sono cercate altre regole che permettono di trovare il volume senza che si debba sottoporre il prisma considerato ad alcuna trasformazione.

Cominciamo dal parallelepipedo rettangolo.

Se gli spigoli sono tutti e tre multipli della unità delle lunghezze, risulta senz'altro dalla figura che *il volume del parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle lunghezze dei tre spigoli* (o dimensioni).



Ma, come pei rettangoli, codesta regola si estende anche al caso generale, in cui le tre dimensioni a, b, c sono numeri quali si vogliono. Designando con $pr(a, b, c)$ il volume del parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c e ricordando la proporzionalità dei parallelepipedi rettangoli di ugual base alle rispettive altezze, avremo che

$$pr(a, b, c) : pr(a, b, 1) = c : 1$$
$$pr(a, b, 1) : pr(a, 1, 1) = b : 1$$
$$pr(a, 1, 1) : pr(1, 1, 1) = a : 1.$$

Notando che il parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1, 1, 1 è semplicemente l'unità dei volumi, ricaviamo dalle precedenti proporzioni

$$pr(a, b, c) = c \cdot pr(a, b, 1)$$
$$pr(a, b, 1) = b \cdot pr(a, 1, 1)$$
$$pr(a, 1, 1) = a$$

e quindi appunto

$$pr(a, b, c) = abc.$$

121. Come caso particolare della regola del n. precedente abbiamo che *il volume di un cubo è dato dalla terza potenza (o cubo) della lunghezza dello spigolo.*

Se cioè si designa con l codesta lunghezza e con V il volume del cubo sarà

$$V = l^3.$$

Così risulta (n. 99)

$$l = \sqrt[3]{V}.$$

e si ha appunto l'*interpretazione geometrica della radice cubica* preannunciata al n. 99 e al n. 112.

122. Fino dall'epoca dei Geometri greci ha acquistato una grande celebrità il *problema della duplicazione del cubo*, vale a dire il problema di *costruire un cubo doppio di un cubo dato.*

Gli innumerevoli tentativi per risolvere codesto problema riuscirono infruttuosi; ma oramai noi conosciamo la ragione dell'insuccesso.

Se prendiamo come unità delle lunghezze lo spigolo del cubo dato, questo avrà come volume 1, cosicchè il nostro problema si riduce a quello di costruire il segmento misurato da $\sqrt[3]{2}$.

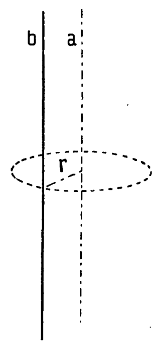
Ora è stato dimostrato che a differenza di ciò che accade per la radice quadrata (cfr. n. 68), non è possibile costruire *con la riga e col compasso* il segmento misurato da $\sqrt[3]{2}$ (1).

123. La regola del n. 120 si può anche enunciare dicendo che il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto dell'area della base per l'altezza.

Ora un prisma qualsiasi è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale (n. 116); cosicchè concludiamo che *il volume di un prisma qualsiasi è dato dal prodotto dell'area della base per l'altezza.*

Cilindri

124. Ai prismi va ravvicinata un'altra classe di solidi geometrici, quella dei cosidetti *cilindri.*



Anzitutto, fissati una retta a ed un segmento r dicesi *superficie cilindrica illimitata* di *asse* a e di *raggio* r l'insieme delle parallele ad a, che hanno da essa la distanza r.

Un punto è *interno* o *esterno* alla superficie secondo che la sua distanza dall'asse è minore o maggiore di r; e il solido costituito dai punti della superficie cilindrica e dai punti interni dicesi *cilindro circolare illimitato.*

Ogni piano perpendicolare all'asse sega la

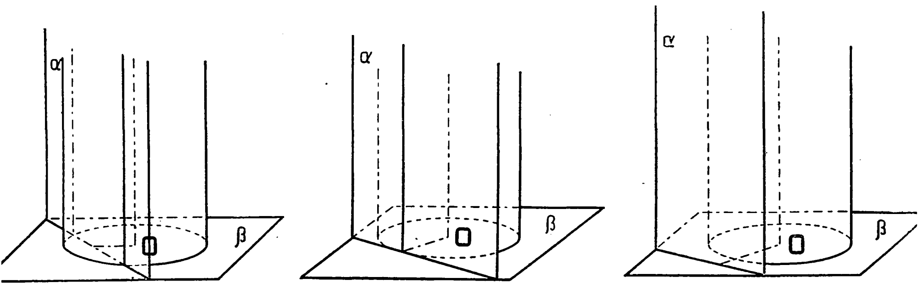
(1) Si veda in proposito l'Art. VII di A. CONTI: *Problemi di 3° grado: Duplicazione del cubo. - Trisezione dell'angolo;* nel vol. II dei *Collectanea* di F. ENRIQUES: 2ª ediz.

superficie cilindrica secondo una circonferenza, avente il centro sull'asse e il raggio r, la quale dicesi *sezione normale* della superficie cilindrica.

Risulta di qui che codesta superficie si può definire cinematicamente come *generata* dalla rotazione intorno all'asse a di una parallela, ad esso rigidamente fissata alla distanza r. Il cilindro è generato, in codesta rotazione, dalla striscia di piano compresa tra l'asse e la parallela mobile. Questa retta mobile, in ciascuna delle sue posizioni dicesi *generatrice* della superficie cilindrica e del cilindro stesso, i quali, per il modo di generazione suaccennato, diconsi anche *di rotazione*.

125. ***Un piano parallelo all'asse di un cilindro circolare ha comuni con la superficie di questo: due generatrici o una sola generatrice o nessun punto secondo che la sua distanza dall'asse è minore, uguale o maggiore del raggio del cilindro.***

Un piano β, perpendicolare all'asse in un punto O, sega la superficie cilindrica secondo una circonferenza di centro O e il piano dato α paral-



lelo all'asse, secondo una retta la cui distanza da O è uguale alla distanza di α dall'asse (1).

Ora codesta retta è secante, tangente od esterna alla circonferenza O secondo che la sua distanza da O è minore, uguale o maggiore del raggio della circonferenza (2), ossia del raggio del cilindro, ed è chiaro che corrispondentemente il piano α ha comune col cilindro due generatrici, una sola o nessun punto.

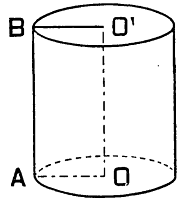
126. Un piano avente comune con un cilindro una sola generatrice dicesi *tangente* al cilindro.

127. La parte di un cilindro circolare illimitato che è compresa tra due sezioni normali chiamasi *cilindro circolare*

(1) *Geometria:* n. 669.
(2) *Geometria:* nn. 183, 186, 194.

retto e si dice *limitato* per opposizione a quello considerato dianzi.

Le due sezioni normali si dicono *basi* e la parte di superficie cilindrica illimitata, compresa fra i due piani, si dice *superficie laterale* del cilindro finito.



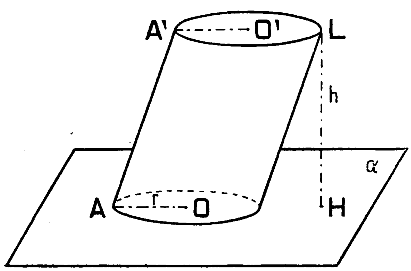
L'insieme delle due basi e della superficie laterale dicesi *superficie totale* o *contorno* del cilindro retto.

La distanza delle due basi si dice *altezza* del cilindro retto ed è uguale alla parte di ciascuna generatrice della superficie cilindrica illimitata che è compresa tra le due basi, e che dicesi *lato* o *apotema* del cilindro finito.

La superficie laterale del cilindro retto si può immaginare generata dalla rotazione di un segmento AB (*lato*) intorno ad una retta OO' ad esso parallela, mentre il cilindro è descritto in codesto stesso movimento di rotazione dal rettangolo $ABO'O$, che ha il lato OO' sull'asse.

128. Le definizioni precedenti si possono generalizzare. Dal n. 124 risulta che una superficie cilindrica circolare illimitata si può immaginare costruita, conducendo pei punti di una sezione normale le perpendicolari al piano di questa.

Più in generale si può considerare la superficie che si ottiene conducendo pei punti di una circonferenza C le parallele ad una retta data, non perpendicolare al piano di C. Anche siffatta superficie si dirà *cilindrica*. Essa è segata dai piani paralleli al piano della circonferenza C secondo circonferenze uguali a questa, mentre invece le *sezioni normali* (giacenti in piani perpendicolari alle generatrici) sono curve ovali, che diconsi *ellissi*. Il solido racchiuso dalla superficie cilindrica considerata e da due sue sezioni circolari (uguali e parallele a C) dicesi *cilindro obliquo*. L'*altezza* di siffatto cilindro è dato dalla distanza dei piani delle due basi ed è perciò minore del *lato*.



Volume del cilindro
Area della superficie cilindrica

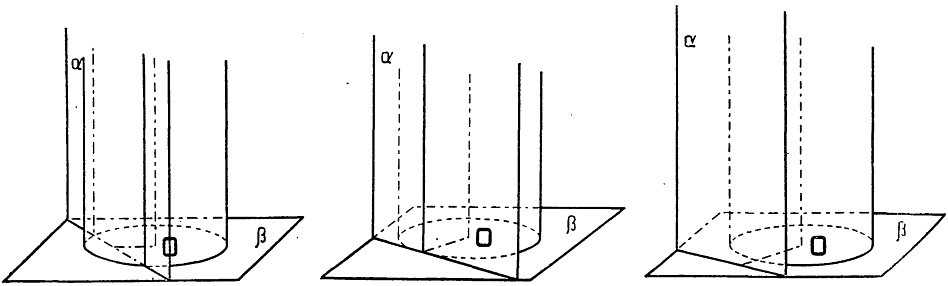
129. Sia dato un cilindro circolare C di raggio r e di altezza h.

Il rispettivo volume si determina agevolmente, ricorrendo alla considerazione dei *prismi iscritti* e *circoscritti*, vale a dire *superficie cilindrica secondo una circonferenza,* avente il centro sull'asse e il raggio r, la quale dicesi *sezione normale* della superficie cilindrica.

Risulta di qui che codesta superficie si può definire cinematicamente come *generata* dalla rotazione intorno all'asse a di una parallela, ad esso rigidamente fissata alla distanza r. Il cilindro è generato, in codesta rotazione, dalla striscia di piano compresa tra l'asse e la parallela mobile. Questa retta mobile, in ciascuna delle sue posizioni dicesi *generatrice* della superficie cilindrica e del cilindro stesso, i quali, per il modo di generazione suaccennato, diconsi anche *di rotazione.*

125. *Un piano parallelo all'asse di un cilindro circolare ha comuni con la superficie di questo: due generatrici o una sola generatrice o nessun punto secondo che la sua distanza dall'asse è minore, uguale o maggiore del raggio del cilindro.*

Un piano β, perpendicolare all'asse in un punto O, sega la superficie cilindrica secondo una circonferenza di centro O e il piano dato α paral-



lelo all'asse, secondo una retta la cui distanza da O è uguale alla distanza di α dall'asse (1).

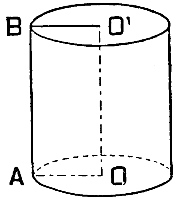
Ora codesta retta è secante, tangente od esterna alla circonferenza O secondo che la sua distanza da O è minore, uguale o maggiore del raggio della circonferenza (2), ossia del raggio del cilindro, ed è chiaro che corrispondentemente il piano α ha comune col cilindro due generatrici, una sola o nessun punto.

126. Un piano avente comune con un cilindro una sola generatrice dicesi *tangente* al cilindro.

127. La parte di un cilindro circolare illimitato che è compresa tra due sezioni normali chiamasi *cilindro circolare*

(1) *Geometria:* n. 669.
(2) *Geometria:* nn. 183, 186, 194.

retto e si dice *limitato* per opposizione a quello considerato dianzi.



Le due sezioni normali si dicono *basi* e la parte di superficie cilindrica illimitata, compresa fra i due piani, si dice *superficie laterale* del cilindro finito.

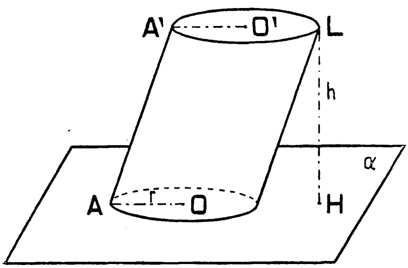
L'insieme delle due basi e della superficie laterale dicesi *superficie totale* o *contorno* del cilindro retto.

La distanza delle due basi si dice *altezza* del cilindro retto ed è uguale alla parte di ciascuna generatrice della superficie cilindrica illimitata che è compresa tra le due basi, e che dicesi *lato* o *apotema* del cilindro finito.

La superficie laterale del cilindro retto si può immaginare generata dalla rotazione di un segmento AB (*lato*) intorno ad una retta OO' ad esso parallela, mentre il cilindro è descritto in codesto stesso movimento di rotazione dal rettangolo $ABO'O$, che ha il lato OO' sull'asse.

128. Le definizioni precedenti si possono generalizzare. Dal n. 124 risulta che una superficie cilindrica circolare illimitata si può immaginare costruita, conducendo pei punti di una sezione normale le perpendicolari al piano di questa.

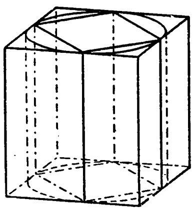
Più in generale si può considerare la superficie che si ottiene conducendo pei punti di una circonferenza C le parallele ad una retta data, non perpendicolare al piano di C. Anche siffatta superficie si dirà *cilindrica*. Essa è segata dai piani paralleli al piano della circonferenza C secondo circonferenze uguali a questa, mentre invece le *sezioni normali* (giacenti in piani perpendicolari alle generatrici) sono curve ovali, che diconsi *ellissi*. Il solido racchiuso dalla superficie cilindrica considerata e da due sue sezioni circolari (uguali e parallele a C) dicesi *cilindro obliquo*. L'*altezza* di siffatto cilindro è dato dalla distanza dei piani delle due basi ed è perciò minore del *lato*.



Volume del cilindro
Area della superficie cilindrica

129. Sia dato un cilindro circolare C di raggio r e di altezza h.

Il rispettivo volume si determina agevolmente, ricorrendo alla considerazione dei *prismi iscritti* e *circoscritti*, vale a dire dei prismi di altezza uguale al cilindro e aventi le basi rispettivamente iscritte o circoscritte alle basi di esso. Risulta di qui che ogni prisma iscritto ha come spigoli laterali altrettante generatrici, mentre ogni prisma circoscritto ha le singole faccie laterali tangenti al cilindro.



Ora è chiaro che i prismi iscritti e circoscritti al cilindro sono rispettivamente minori (o suvvalenti) e maggiori (o prevalenti) ad esso. D'altra parte se P, P' sono le aree delle basi di due prismi l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cilindro, i volumi di questi sono dati (n. 123) da

$$Ph \quad \text{e} \quad P'h;$$

e poichè i poligoni di aree P, P' sono l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio base del cilindro, potremo sempre supporre che essi abbiano un numero abbastanza grande di lati perchè la differenza dei due volumi suindicati

$$P'h - Ph = (P' - P)h$$

risulti minore di un qualsiasi numero prefissato, p. es. di $\frac{1}{10^m}$ $\left(\text{basterà fare in modo (n. 54) che risulti } P' - P < \frac{1}{h \cdot 10^m}\right)$.

Allora i volumi Ph, $P'h$ dei due prismi, i quali comprendono fra loro il cilindro, ci forniscono pel volume di questo due *valori approssimati a meno di* $\frac{1}{10^m}$; e spingendo oltre l'approssimazione potremo calcolare il volume del cilindro con quante cifre vorremo (cfr. il n. 39).

Ma le considerazioni precedenti permettono di precisare il risultato. Le aree P, P' dei due poligoni, l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio base del cilindro, comprendono fra loro l'area πr^2 di codesta base (n. 53)

$$P < \pi r^2 < P',$$

onde ricaviamo, moltiplicando per l'altezza h,

$$Ph < \pi r^2 \cdot h < P'h;$$

e poichè queste disuguaglianze valgono qualunque sia l'approssimazione con cui Ph e $P'h$ danno il volume del cilindro, concludiamo che questo è dato precisamente da

$$\pi r^2 h.$$

Cioè: *il volume di un cilindro circolare limitato di raggio* r *e altezza* h *è dato dal prodotto*

$$\pi r^2 h$$

dell'area della base per l'altezza.

Di qui, indicando con V il volume, si ricava

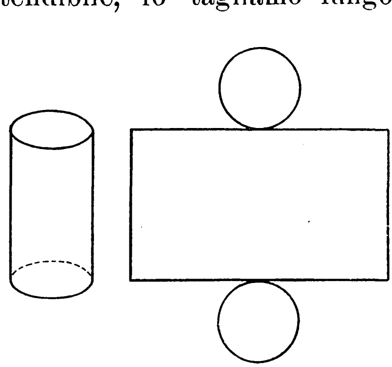
$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}.$$

130. Le considerazioni precedenti e il risultato si estendono senz'altro al caso del cilindro obliquo.

131. La ricerca dell'*area della superficie laterale di un cilindro* conduce ad un problema per noi nuovo, quello di *misurare* rispetto alla unità delle aree, che è *piana*, una *superficie curva.*

Ma la superficie laterale del cilindro appartiene ad una classe particolare di superficie, le cosidette *sviluppabili* (sul piano), per le quali la determinazione dell'area si riconduce, mediante considerazioni intuitive dirette, alla misura di aree piane.

Se, dopo aver costruito un modello concreto della superficie laterale del nostro cilindro mediante un foglio o un qualsiasi velo flessibile e inestendibile, lo tagliamo lungo una generatrice, esso si distende o *si sviluppa* senza pieghe e senza strappi sul piano; e dà luogo in tal modo ad un rettangolo che ha per altezza quella medesima del cilindro e per base quel lembo che dianzi era disposto secondo la circonferenza base.



Si è così condotti nel modo più naturale ad assumere come area S_l della superficie laterale del cilindro l'area nota di codesto rettangolo; cioè, indicando con r, h il raggio e l'altezza (nn. 43, 28)

$$S_l = 2\pi rh.$$

Risulta di qui per l'area totale S_t

$$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

ossia,

$$S_t = 2\pi r(h + r).$$

132. Anche senza ricorrere allo *sviluppo*, si perviene alla stessa definizione precedente, considerando, come pel volume, i prismi iscritti e circoscritti.

La nostra stessa intuizione ci induce a riguardare la superficie laterale del cilindro come compresa fra quelle dei prismi iscritti e quelle dei circoscritti.

Ora se p, p' sono i perimetri delle basi di due prismi, l'uno iscritto e l'altro circoscritto, le aree delle superficie laterali rispettive sono date (n. 34) da

$$ph \quad \text{e} \quad p'h;$$

e basterà supporre che codeste due basi abbiano un numero abbastanza grande di lati, perchè la differenza

$$p'h - ph = (p' - p)h$$

risulti minore di un qualsiasi numero prefissato, p. es. di $\frac{1}{10^m}$ (n. 42).

Si assumeranno allora ph e $p'h$ come *valori approssimati a meno di* $\frac{1}{10^m}$ dell'area cercata; e poichè, considerando la lunghezza $2\pi r$ della circonferenza base, si ha per qualsiasi approssimazione

$$p < 2\pi r < p'$$

e quindi

$$ph < 2\pi rh < p'h,$$

si è senz'altro condotti ad assumere come area della superficie laterale del cilindro il prodotto

$$2\pi rh.$$

133. Se, tenendo presente la regola che dà l'area laterale dei prismi obliqui (n. 35), applichiamo le stesse considerazioni del n. prec. al caso di un cilindro obliquo, vediamo che per avere l'area della relativa superficie laterale, occorre prima misurare la lunghezza della sezione normale, che è in questo caso una ellisse. Ma la *rettificazione dell'ellisse* è un problema che trascende i metodi elementari.

VII.

PIRAMIDI E CONI

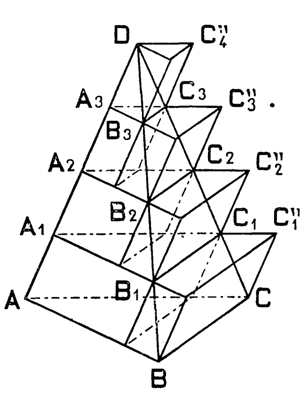
Volume delle piramidi

134. Il volume della piramide non si può determinare così facilmente come pel prisma, perchè in generale non è possibile *trasformare* una piramide in un parallelepipedo equivalente, decomponendo la piramide in parti poliedriche siffatte che, rimesse insieme in modo opportuno, formino un parallelepipedo.

Così per la determinazione del volume delle piramidi, è necessario procedere per approssimazioni successive.

Consideriamo per semplicità un tetraedro $ABCD$ di cui indichiamo con h l'altezza relativa alla base ABC.

Divisa codesta altezza in un certo numero n di parti uguali (nella figura si è preso $n = 4$) si conducano pei punti di divisione i piani paralleli alla base ABC, i quali segheranno il tetraedro secondo certi $n - 1$ triangoli (a partire dalla base) $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$; e si costruiscano i prismi che hanno codesti triangoli come basi superiori e gli spigoli laterali AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$ rispettivamente. Codesti $n - 1$ prismi



$$AC_1, \quad A_1C_2, \ldots, \quad A_{n-2}C_{n-1}$$

sono tutti interni al tetraedro, cosicchè la loro somma, che dicesi *scaloide iscritto*, è certamente *minore* di esso (n. 118).

Se invece consideriamo gli n prismi aventi come basi inferiori i triangoli ABC, $A_1B_1C_1, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ e gli spigoli laterali AA_1, A_1A_2,...., $A_{n-1}D$

$$AC_1'', \quad A_1C_2'', ..., \quad A_{n-1}C_n'',$$

la loro somma, che dicesi ***scaloide circoscritto***, è maggiore del tetraedro.

Il volume V di questo sarà perciò compreso tra i volumi V_n e V_n' dei due scaloidi, che ora calcoleremo. Intanto notiamo che ciascun prisma dello scaloide iscritto è manifestamente uguale al prisma che gli sta immediatamente sopra nello scaloide circoscritto, cosicchè lo scaloide circoscritto si ottiene aggiungendo a quello iscritto il prisma più basso AC_1''.

Ciò premesso, si osservi che tutti i prismi dei due scaloidi hanno l'altezza $\frac{h}{n}$, e che le loro basi sono triangoli simili ad ABC, aventi i lati uguali rispettivamente, a partire dal vertice, ad

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, ..., \quad \frac{n-1}{n}$$

dei lati omologhi di ABC.

Perciò, se si ricorda che i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi (1), e si indica con S l'area della base ABC, si conclude che le aree degli $n-1$ triangoli considerati sono rispettivamente

$$\frac{1}{n^2}S, \quad \frac{2^2}{n^2}S, ..., \quad \frac{(n-1)^2}{n^2}S.$$

Risultano di qui pei volumi V_n, V_n' dei due scaloidi le espressioni:

$$V_n = \frac{1}{n^2}S\frac{h}{n} + \frac{2^2}{n^2}S\frac{h}{n} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}S\frac{h}{n}$$

$$V_n' = \frac{1}{n^2}S\frac{h}{n} + \frac{2^2}{n^2}S\frac{h}{n} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}S\frac{h}{n} + S\frac{h}{n}$$

ossia

$$V_n = S\frac{h}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]$$

$$V_n' = S\frac{h}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2].$$

(1) *Geometria:* n. 513.

Ora, qualunque sia il numero intero n, si ha l'identità (1)

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

la quale cambiando $n-1$ in n, diventa

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

cosicchè risulta

$$V_n = S\frac{h}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$V_n' = S\frac{h}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

o, infine,

$$V_n = \frac{Sh}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$V_n' = \frac{Sh}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

(1) L'identità aritmetica

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

si dimostra agevolmente *per induzione* ossia *argomentando da* n — 1 *ad* n. Invero per $n = 1$ essa è senz'altro verificata, perchè si ha

$$1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

Supposta allora valida l'identità per $n-1$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

avremo, aggiungendo n^2 ad ambo i membri,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 \\ &= n\frac{(n-1)(2n-1)+6n}{6}; \end{aligned}$$

e basta eseguire i calcoli indicati a numeratore per convincersi che codesta ultima espressione è identica a

$$n\frac{(n+1)(2n+1)}{6},$$

cosicchè resta dimostrata per ogni numero intero n l'identità

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Si trovano così pel volume V del nostro tetraedro le disuguaglianze

$$\frac{Sh}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)<V<\frac{Sh}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

le quali sono valide qualunque sia il numero intero n.

I due valori che, secondo queste disuguaglianze, comprendono il volume cercato V, si ottengono moltiplicando $\frac{Sh}{3}$ rispettivamente per

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

e per

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Il primo di questi numeri può riguardarsi come il prodotto di due valori approssimati per difetto dell'unità, e basterà prendere n abbastanza grande perchè codesta approssimazione sia grande quanto si vuole e quindi il prodotto

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

diversifichi da 1, per difetto, meno di un qualsiasi numero prefissato (n. 8). Così per es. prendendo successivamente n uguale a 10, 100, 1000,.... si trovano pel prodotto considerato i valori

$$\begin{gathered}1-0{,}145\\ 1-0{,}01495\\ 1-0{,}0014995, \text{ ecc.}\end{gathered}$$

Analogamente l'altro prodotto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

ove si prenda n abbastanza grande, differisce quanto poco si vuole dall'unità, ma per eccesso: così per $n=10$, 100, 1000, ecc. esso è uguale rispettivamente a

$$\begin{gathered}1+0{,}155\\ 1+0{,}01505\\ 1+0{,}0015005, \text{ ecc.}\end{gathered}$$

Allora, il volume V del nostro tetraedro, il quale deve essere sempre compreso fra i due prodotti che si ottengono moltiplicando $\frac{Sh}{3}$ per le due espressioni dianzi considerate, le quali per n abbastanza grande diversificano da 1 quanto poco si vuole, l'una per difetto e l'altra per eccesso, non potrà manifestamente esser diverso da $\frac{Sh}{3}$.

Si conclude quindi

$$V = \frac{Sh}{3};$$

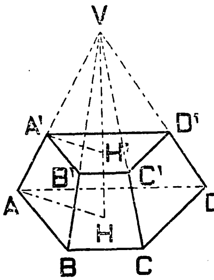
cioè, *il volume di un tetraedro è uguale alla terza parte del prodotto dell'area della base per l'altezza.*

È chiaro come le considerazioni precedenti e il risultato ottenuto si estendano senz'altro alle piramidi a base qualsiasi, onde abbiamo che: *Il volume di una piramide qualsiasi è dato dal terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza.*

135. Poichè ogni poliedro si può decomporre in piramidi, la regola precedente dà in ogni singolo caso, il modo di trovare il volume di un qualsiasi poliedro.

136. Come applicazione della regola del n. 134 troviamo il *volume di un qualsiasi tronco di piramide.*

Un qualsiasi tronco di piramide $ABCDD'A'B'C'$ si può riguardare come differenza di due piramidi $VABCD$ e $VA'B'C'D'$; cosicchè, se indichiamo con S, S' le aree delle due basi $ABCD$, $A'B'C'D'$, con h l'altezza HH' del tronco e con h' l'altezza VH' della piramide minore (cosicchè l'altezza VH della piramide maggiore sarà $h+h'$) il volume V del tronco sarà dato (n. 134)



$$V = \frac{1}{3} S(h+h') - \frac{1}{3} S'h'$$

ossia da

$$V = \frac{1}{3}[Sh + (S-S')h'].$$

Ora a questa espressione si può dare una forma più semplice premettendo un'osservazione geometrica. Le due basi del tronco sono due poligoni simili, cosicchè staranno fra loro come i quadrati di due lati omologhi [1]: cioè

(1) $$S : S' = AB^2 : A'B'^2.$$

[1] *Geometria:* n. 513.

Ma dai triangoli simili ABV, $A'B'V'$ ricaviamo che

$$AB : A'B' = AV : A'V,$$

e, congiunti i piedi H, H' delle altezze con A, A' rispettivamente, troviamo per la similitudine di AHV, $A'H'V$

$$AV : A'V = HV : H'V$$

ossia

$$AV : A'V = h + h' : h'.$$

Di qui e dalla proporzione precedente risulta

$$AB : A'B' = h + h' : h$$

e infine per la (1)

$$S : S' = (h + h')^2 : h'^2$$

ossia

$$\frac{(h + h')^2}{h'^2} = \frac{S}{S'}.$$

Di qui, estraendo la radice quadrata aritmetica di ambo i membri,

$$\frac{h + h'}{h'} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S'}},$$

e, risolvendo rispetto ad h',

$$h' = \frac{h\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}.$$

Questo valore di h' sostituito nella espressione dianzi trovata per V dà

$$V = \frac{1}{3}\left[Sh + \frac{S - S'}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}} h\sqrt{S'}\right].$$

Ma ricordiamo che per la identità del n. 59 si può porre identicamente

$$S - S' = (\sqrt{S} + \sqrt{S'})(\sqrt{S} - \sqrt{S'})$$

cosicchè otteniamo

$$V = \frac{1}{3}[S + (\sqrt{S} + \sqrt{S'})\sqrt{S'}]h$$

o infine

$$V = \frac{1}{3}[S + \sqrt{SS'} + S']h.$$

È questa la formola cercata. Essa, interpretata, ci dice che:

Un tronco di piramide (a basi parallele) *ha volume uguale alla somma di tre piramidi aventi la stessa altezza del tronco, e per basi rispettive le due basi del tronco e la loro media proporzionale.*

Coni

137. Alle piramidi vanno ravvicinati i *coni* che ora definiremo.

Dati una semiretta a di origine A ed un angolo acuto θ, l'insieme delle semirette uscenti da A e formanti con a angoli uguali a θ, dicesi *superficie conica circolare illimitata* di *asse* a e di *vertice* A.

L'angolo θ dicesi *angolo d'apertura* del cono e le semirette dianzi considerate si dicono *generatrici*.

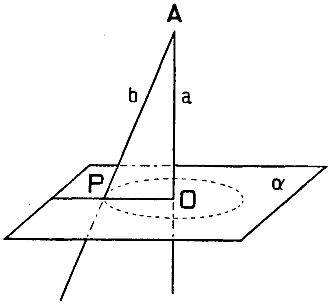
Una semiretta uscente dal vertice del cono, dicesi *interna* o *esterna* secondo che forma coll'asse un angolo minore o maggiore di θ; e si dicono rispettivamente *interni* o *esterni* anche i suoi punti.

Data una superficie conica circolare indefinita, dicesi *cono circolare illimitato* la figura costituita dai punti della superficie stessa e dai punti interni.

È manifesto che il cono si può immaginare generato dalla rotazione dell'angolo θ intorno ad un suo lato tenuto fisso.

Perciò il cono circolare e la sua superficie diconsi anche *di rotazione*.

138. Presa una superficie conica di vertice A e di asse a, un piano α perpendicolare all'asse in un suo punto O è segato dal piano dell'asse a e di una qualsiasi generatrice b del cono secondo una retta perpendicolare ad a (¹) e quindi segante in un punto P la b, che forma con a un angolo acuto (²).



Ora tutti i triangoli rettangoli analoghi ad AOP, cui danno luogo le varie generatrici, saranno fra loro uguali, in quanto hanno comune il cateto OA e uguale l'angolo in A, cosicchè concludiamo che:

Il cono circolare è segato da ogni piano perpendicolare all'asse secondo un cerchio avente il centro sull'asse.

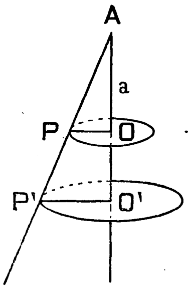
Viceversa si dimostra analogamente che: *Innalzato nel centro di una circonferenza la perpendicolare al piano di essa, le congiungenti un punto di questa coi punti della circonferenza sono le generatrici di una superficie conica, avente per asse la nominata perpendicolare.*

139. Ogni cerchio ottenuto segando un cono con un piano perpendicolare all'asse dicesi *sezione normale* del cono.

(¹) *Geometria*: n. 626.

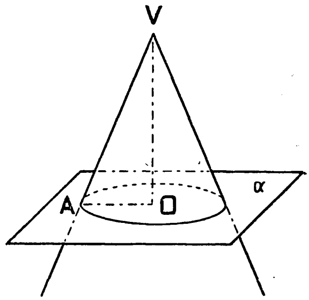
(²) *Geometria:* n. 265. — *Se due rette formano con una trasversale angoli coniugati non supplementari, le due rette si incontrano da quella parte, da cui la somma dei due angoli coniugati è minore di due retti.*

Mentre le sezioni normali del cilindro sono tutte uguali, due sezioni normali del cono hanno raggi OP, $O'P'$ proporzionali alle loro distanze OA, $O'A$ dal vertice e quindi sono esse stesse proporzionali ai quadrati di codeste distanze (n. 53, Nota).



140. Notiamo infine, tralasciando la facile dimostrazione, che: *Un piano passante pel vertice di una superficie conica ha in comune con essa due generatrici o una sola o nessun punto secondo che forma con l'asse un angolo minore o uguale o maggiore dell'angolo di apertura.*

141. Dato un cono circolare ed una sua sezione perpendicolare all'asse, la figura costituita dai punti del cono, che rispetto al piano della sezione cadono dalla stessa banda del vertice chiamasi *cono circolare retto* e si dice *limitato* in opposizione a quello considerato al n. 137.



La nominata sezione del cono indefinito dicesi *base* dal cono finito e la distanza VO del vertice dal piano di essa dicesi *altezza*. I segmenti uguali di generatrici compresi fra il vertice e il piano della base diconsi *apotemi* e l'insieme dei punti appartenenti ad essi dicesi *superficie laterale* del cono. L'insieme della superficie laterale e della base dicesi *superficie totale*.

I punti del cono non appartenenti al cono diconsi *interni* e i punti non appartenenti al cono diconsi *esterni*.

È chiaro che il cono finito si può immaginare generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo AOV intorno ad un cateto (asse) OV.

Fra l'apotema a, il raggio r e l'altezza h (ipotenusa e cateti del triangolo rettangolo or ora accennato) sussiste la relazione

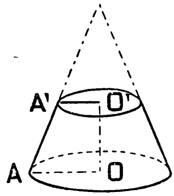
$$a^2 = r^2 + h^2,$$

onde risulta

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}, \quad r = \sqrt{a^2 - h^2}, \quad h = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

142. Dato un cono circolare indefinito e considerate due sezioni, perpendicolari all'asse, la figura costituita dai punti del cono compresi fra i piani delle due sezioni dicesi *tronco di cono* retto.

Le due sezioni considerate diconsi *basi* del tronco e la distanza OO' dei loro piani dicesi *altezza* del tronco di cono.

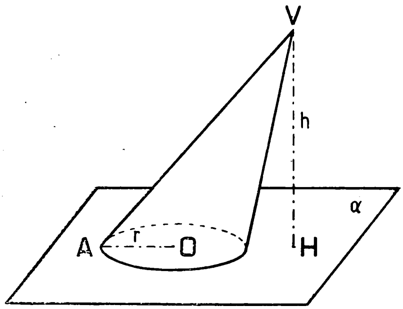


La parte di superficie del cono circolare indefinito compresa fra i piani delle due sezioni, costituisce la *superficie laterale* del tronco di cono e l'insieme di essa e dei due cerchi basi dicesi *superficie totale.*

I segmenti AA' di generatrici del cono compresi fra i detti due piani diconsi *apotemi* del tronco di cono.

Notiamo che nel movimento stesso che genera il cono, la superficie laterale del tronco di cono è generata dalla rotazione del segmento AA' (apotema) attorno alla retta OO' giacente con esso in uno stesso piano e non parallelo ad esso. Il tronco è similmente generato dal trapezio $AOO'A$ intorno al lato OO' perpendicolare alle due basi.

143. Accenniamo qui infine come le definizioni dei nn. 137, 141 si possano generalizzare. Siano dati una circonferenza C e un punto V, fuori del suo piano, e non situato sulla perpendicolare al piano di essa nel suo centro. Le semirette uscenti da V e passanti pei punti di C costituiscono una superficie che dicesi ancora *conica*, ma non è più *di rotazione* (cfr. n. 137). Essa è segata da ogni piano parallelo a quello di C secondo una circonferenza; e il solido racchiuso da una di codeste sezioni circolari e dalla parte di superficie conica che contiene il vertice V dicesi *cono obliquo*

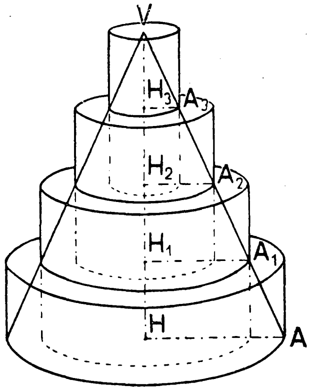


Volume del cono
Area della superficie conica

144. Il volume del cono si determina con un procedimento analogo e quello seguito per le piramidi (n. 134): come là si consideravano i vari scaloidi iscritti e circoscritti, ciascuno dei quali è una somma di prismi, così ora si approssimerà il cono mediante somme di cilindri iscritti e circoscritti. Salvo questa sostituzione le considerazioni che seguono ripetono esattamente quelle del n. 134.

Sia C un cono di raggio di base r e di altezza $VH = h$.

Divisa codesta altezza in un certo numero n di parti uguali HH_1, $H_1H_2, \ldots,$ $H_{n-1}V$ (nella figura si è preso $n = 4$) si conducano pei punti di divisione H_1, $H_2, \ldots,$ H_{n-1} i piani paralleli alla base, i quali segheranno il cilindro secondo $n-1$ cerchi di raggio H_1A_1, H_2A_2,...., $H_{n-1}A_{n-1}$ rispettivamente; e si considerino gli $n-1$ cilindri che hanno come basi superiori codesti cerchi e come altezze rispettivamente HH_1, H_1H_2,...., $H_{n-2}H_{n-1}$. Ciascuno di codesti cilindri è tutto interno al cono, cosicchè la loro somma, che dicesi *scaloide iscritto* al cono, è certamente *minore* di esso.



Se invece si considerano gli n cilindri, che hanno rispettivamente per base inferiore la base del cono ed i cerchi di raggio H_1A_1, H_2A_2,...., $H_{n-1}A_{n-1}$ e come altezze i segmenti HH_1, H_1H_2,...., $H_{n-1}V$, la loro somma, che dicesi *scaloide circoscritto* al cono, è manifestamente maggiore di esso (1).

Perciò il volume V del cono sarà compreso tra i volumi V_n e V_n' dei due scaloidi, che qui ci proponiamo di calcolare.

L'altezza di ciascuno dei cilindri dei due scaloidi è uguale ad $\frac{h}{n}$; e quanto ai raggi dei cerchi basi, notiamo che, per la similitudine dei triangoli $VH_{n-1}A_{n-1}$, $VH_{n-2}A_{n-2}$,...., VH_1A_1 al triangolo VHA, essi, cominciando dal vertice, sono uguali rispettivamente ad

$$\frac{1}{n}r, \quad \frac{2}{n}r, \ldots., \quad \frac{n-1}{n}r,$$

cosicchè le aree di codesti cerchi sono date ordinatamente (n. 53) da

$$\pi r^2\frac{1}{n^2}, \quad \pi r^2\frac{2^2}{n^2}, \ldots., \quad \pi r^2\frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

Di qui in base alla regola che dà il volume del cilindro (n. 129), si deduce che i volumi V_n, V_n' dei due scaloidi, sono dati da

$$V_n = \pi r^2\frac{1}{n^2}\frac{h}{n} + \pi r^2\frac{2^2}{n^2}\frac{h}{n} + \ldots. + \pi r^2\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{h}{n}$$

$$V_n' = \pi r^2\frac{1}{n^2}\frac{h}{n} + \pi r^2\frac{2^2}{n^2}\frac{h}{n} + \ldots. + \pi r^2\frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{h}{n} + \pi r^2\frac{h}{n}$$

(1) Per semplicità, l'alunno, nel disegnare la figura, può limitarsi a tracciare la sezione giacente nel piano VHA.

ossia

$$V_n = \pi r^2 h \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]$$

$$V_n' = \pi r^2 h \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2],$$

o infine, per l'identità ricordata al n. 134 e con le trasformazioni di calcolo là indicate,

$$V_n = \frac{\pi r^2 h}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

$$V_n' = \frac{\pi r^2 h}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Si trovano così pel volume V del cono le disuguaglianze

$$\frac{\pi r^2 h}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) < V < \frac{\pi r^2 h}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

valide qualunque sia il numero intero n; e di qui si conclude, come al n. 134, che deve essere necessariamente

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3};$$

cioè, come per la piramide, *il volume del cono è uguale alla terza parte del prodotto dell' area dalla base per l' altezza.*

145. Lo stesso procedimento del n. prec., applicato ad un qualsiasi *cilindro obliquo* (n. 143), conduce senz'altro, anche in tal caso, alla medesima conclusione.

146. Determiniamo, come applicazione della regola del n. 144, il *volume di un tronco di cono.*

Indicati con r, r' i raggi delle due basi ($r > r'$) e con h l'altezza del tronco, questo si può riguardare come differenza tra due coni, aventi rispettivamente come raggi di base r ed r'. Quanto alle altezze, se indichiamo con h' quella del cono minore, l'altra sarà $h + h'$; e dovremo avere per la similitudine dei due triangoli generatori dei due coni la proporzione

$$h' : h + h' = r' : r,$$

dalla quale risulta

$$h' = \frac{hr'}{r - r'};$$

e quindi, per l'altezza del cono maggiore

$$h + h' = h + \frac{hr'}{r - r'} = \frac{hr}{r - r'}.$$

Ciò posto, i volumi dei due coni saranno dati da

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{hr}{r - r'}, \quad \frac{1}{3}\pi r'^2 \frac{hr'}{r - r'},$$

e il volume V del tronco da

$$V = \frac{1}{3}\pi h \frac{r^3 - r'^3}{r - r'}.$$

Ma si verifica facilmente che

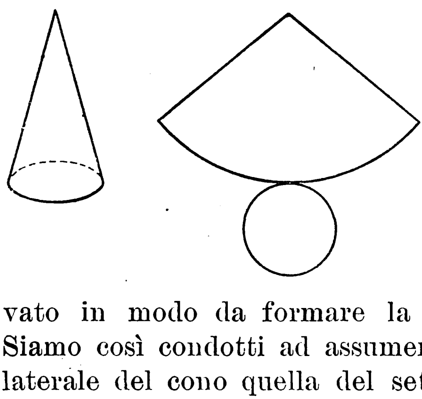
$$\frac{r^3 - r'^3}{r - r'} = r^2 + rr' + r'^2;$$

e quindi si conclude (cfr. n. 136)

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rr' + r'^2).$$

147. La superficie laterale del cono è, come quella del cilindro, *sviluppabile* (sul piano), cosicchè si può desumere da una facile considerazione intuitiva diretta la definizione dell'area relativa.

Si immagini di aver costruito, con un foglio o con un velo flessibile ma inestendibile, un modello concreto della superficie laterale di un cono. Se codesto modello si taglia lungo una generatrice, il foglio o il velo considerato si distende o *sviluppa* sul piano senza pieghe e senza strappi e dà luogo ad un settore di cerchio di raggio uguale all'apotema del cono e avente come lato circolare il lembo che dianzi era incurvato in modo da formare la circonferenza base del cono. Siamo così condotti ad assumere come area della superficie laterale del cono quella del settore circolare indicato; onde, ricordando la regola che dà l'area del settore (n. 55) si conclude che l'*area della superficie laterale di un cono è uguale a quella di un triangolo che ha per altezza l'apotema e per base la circonferenza base rettificata.*



In formola, indicando con S_l, S_t le aree delle superficie laterale e totale e con a l' apotema, si avrà

$$S_l = 2\pi r a,$$

e quindi

$$S_t = 2\pi r a + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi r(a + r).$$

148. L'area laterale di un tronco di cono si ottiene come differenza di quelle di due coni, vale a dire, per il n. prec., delle aree di due triangoli. Si può quindi manifestamente riguardare come uguale all'area di un trapezio avente come altezza l'apotema del tronco e come basi le due circonferenze basi rettificate; cioè (n. 32) *l' area laterale di un tronco di cono è uguale al semiprodotto dell' apotema per la somma delle lunghezze delle circonferenze basi.*

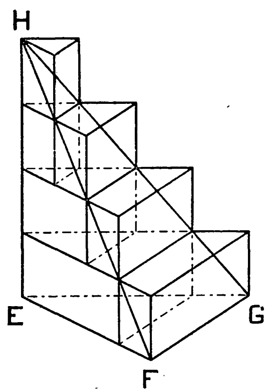
In formole, se S_l è l'area cercata, r ed r' i raggi delle basi ed a l'apotema, avremo

$$S_l = \frac{a(2\pi r + 2\pi r')}{2} = \pi a(r + r').$$

Altra determinazione del volume delle piramidi e dei coni e delle aree delle superficie rispettive

149. Il procedimento, indicato ai nn. 134, 144 per la determinazione dei volumi delle piramidi e dei coni, sembra il più adatto a porre in evidenza l'ordine di idee che guida alla scoperta diretta del risultato. Ma fino dall'antichità sono stati elaborati per questi stessi argomenti altri ordini di esposizione, che presentano minore uniformità, ma offrono il vantaggio di mettere in luce, per via geometrica diretta, talune relazioni cui si riferiscono i teoremi dei nn. precedenti, e, d'altro canto, di evitare l'uso della identità aritmetica che abbiamo dovuto applicare ai nn. 134, 144.

Siffatti procedimenti muovono dal confronto dei tetraedri, aventi uguali le basi e le altezze corrispondenti, in ordine ai quali si stabilisce come primo teorema il seguente: *Tetraedri aventi uguali una base e l' altezza corrispondenti hanno lo stesso volume.*



Valendoci delle notazioni e delle considerazioni del n. 134, confrontiamo il tetraedro $ABCD$ con un altro tetraedro $EFGH$, il quale abbia la base EFG e la corrispondente altezza uguali alla base ABC e all'altezza h di $ABCD$; e, divisa codesta altezza in n parti uguali, consideriamo i relativi scaloidi iscritto e circoscritto, i quali comprenderanno fra loro il dato tetraedro $EFGH$.

I triangoli sezioni del tetraedro $EFGH$, che costituiscono le basi dei prismi di codesti due scaloïdi, sono simili ad EFG e quindi ad ABC ed, a partire dal vertice, hanno i lati rispettivamente uguali ad

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \dots, \quad \frac{n-1}{n}$$

dei lati omologhi di EFG ossia di ABC; talchè risultano ordinatamente uguali alle corrispondenti sezioni del primo tetraedro. In altre parole negli scaloidi iscritti ai due tetraedri, come pure nei due scaloidi circoscritti, i prismi di ugual posto hanno le basi uguali; e poichè hanno tutti la stessa altezza $\frac{h}{n}$, si conclude l'equivalenza dei prismi di ugual posto (n. 116) e quindi ancora dei due scaloidi iscritti, come pure dei due scaloidi circoscritti. Indicato allora, come al n. 134, con V_n il volume di entrambi gli scaloidi iscritti, con V_n' quello dei circoscritti, avremo che tanto il volume V del primo tetraedro quanto il volume $\overline{V}$ del secondo dovranno essere compresi tra V_n e V_n', qualunque sia l'intero n.

Ma, come si è notato al n. 134, la differenza tra V_n e V_n' è data dal volume

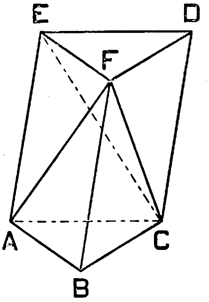
$$S\frac{h}{n}$$

del prisma più basso dello scaloide circoscritto, il quale ha la base ABC e l'altezza $\frac{h}{n}$; cosicchè basterà prendere n abbastanza grande, perchè la differenza $V_n' - V_n$ risulti minore di un qualsiasi numero prefissato, p. es. di $\frac{1}{10}$ o di $\frac{1}{100}$ o di $\frac{1}{1000}$ e così via.

Di qui si conclude che la differenza dei volumi V e $\overline{V}$ dei due tetraedri, che sono sempre compresi tra V_n e V_n', deve essere minore di qualsiasi numero assegnabile, per piccolo che esso sia; il che vuol dire precisamente che V e $\overline{V}$ hanno identiche ordinatamente tutte le cifre decimali, ossia sono uguali. Resta così dimostrato il teorema fondamentale enunciato in principio.

150. Di qui è oramai facile dedurre, in base ad una considerazione geometrica diretta, la regola per il calcolo del volume del tetraedro.

Considerato un qualsiasi prisma triangolare $ABCDEF$, abbiamo che il piano ACF divide il prisma nella piramide $ABCF$ avente base ed altezza uguali al prisma dato, e nella piramide quadrangolare $ACDEF$. Quest'ultima è divisa dal piano ECF nelle due piramidi triangolari $ACEF$ ed $EFDC$, la seconda delle quali ha base ed altezza uguali al prisma. Di qui discende intanto che le due piramidi $ABCF$, $EFDC$ hanno lo stesso volume (n. prec.). Quanto poi alla terza piramide $ACEF$, essa ha la base ACE uguale alla faccia ECD della piramide $EFDC$, e il vertice opposto comune con questa; onde risulta che anch'essa ha volume uguale a codesta piramide $EFDC$. Cosicchè si conclude che il volume del prisma dato è triplo di quello di un tetraedro avente la stessa base e la stessa altezza, o, in altre parole, *il volume di*



un tetraedro è uguale alla terza parte del volume di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Se b ed h sono rispettivamente le misure della base e dell'altezza, il volume del tetraedro sarà perciò dato (n. 123) da

$$\frac{1}{3} bh.$$

Il risultato si estende allora immediatamente ad una piramide qualsiasi. Decomposta invero la base in triangoli, di cui siano b_1, b_2,...., b_n le aree e indicata con h l'altezza, la data piramide risulta somma dei tetraedri di altezza h e di basi b_1, b_2,...., b_n rispettivamente; cosicchè il suo volume sarà dato da

$$\frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} b_2 h + \dots + \frac{1}{3} b_n h$$

ossia precisamente da

$$\frac{1}{3}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)h,$$

dove $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ è l'area della base della piramide.

151. La suaccennata decomposizione di una piramide qualsiasi in tetraedri si estende in qualche modo al cono circolare seguendo un procedimento analogo a quello da noi usato per determinare il volume del cilindro (n. 129).

Confrontiamo il nostro cono di altezza h e di raggio di base r colle *piramidi iscritte e circoscritte*, cioè aventi lo stesso vertice del cono e le basi iscritte o, rispettivamente, circoscritte alla base di esso. Esse comprendono tra loro il cono; talchè, se sono P e P' le aree delle basi di due piramidi, l'una iscritta l'altra circoscritta al cono, il volume V di questo soddisfarà alle disuguaglianze (n. prec.)

$$\frac{1}{3} Ph < V < \frac{1}{3} P'h;$$

e si potrà sempre supporre che i due poligoni di aree P, P', rispettivamente iscritto e circoscritto al cerchio base del cono, abbiano un numero abbastanza grande di lati perchè la differenza dei volumi delle due piramidi

$$\frac{1}{3} P'h - \frac{1}{3} Ph = \frac{1}{3} h(P' - P)$$

risulti minore di qualsiasi numero prefissato, p. es. di $\frac{1}{10^m}$ (n. 54),

Allora i volumi $\frac{1}{3} Ph$ e $\frac{1}{3} P'h$ delle due piramidi, che comprendono il cono, forniscono pel volume V di questo, due valori approssimati a meno di $\frac{1}{10^m}$, e basterà spingere innanzi sufficientemente l'approssimazione per avere di V quante cifre decimali vorremo (cfr. n. 39).

D'altra parte, considerando l'area πr^2 della base del cono, abbiamo in ogni caso

$$P < \pi r^2 < P'$$

e quindi ancora

$$\frac{1}{3} Ph < \frac{1}{3} \pi r^2 h < \frac{1}{3} P'h;$$

e poichè queste disuguaglianze valgono qualunque sia l'approssimazione con cui $\frac{1}{3}P'h$ e $\frac{1}{3}Ph$ danno il volume V del cono, si conclude senz'altro

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

152. La considerazione delle superficie laterali delle piramidi iscritte e circoscritte, conduce nel modo più naturale a definire l'area della superficie laterale del cono, anche senza ricorrere allo *sviluppo* sul piano, di cui ci valemmo al n. 147.

Invero l'intuizione stessa ci fa ritenere la superficie laterale del cono come compresa fra quelle delle piramidi iscritte e circoscritte. Se si prendono due poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio base, e sono p, p' i rispettivi perimetri, l'area laterale della piramide circoscritta, che ha il secondo poligono per base, sarà data da

$$\frac{1}{2}p'a,$$

ove con a si indichi l'apotema comune del cono e della piramide, mentre invece la piramide iscritta, che ha per base il poligono di perimetro p, avrà l'area

$$\frac{1}{2}pa',$$

dove a' rappresenta il rispettivo apotema, il quale sarà minore di a.

Ora manifestamente si potranno prendere due poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio base, i quali abbiano un numero di lati abbastanza grande, perchè tanto la differenza dei due perimetri $p' - p$, quanto la differenza dei due apotemi $a - a'$ risultino minori di un qualsiasi numero prefissato, per piccolo che esso sia (n. 42). Discende di qui che si potrà fare in modo che risulti piccola quanto si vuole, p. es. minore di $\frac{1}{10^m}$, anche la differenza delle aree laterali

$$\frac{1}{2}pa', \quad \frac{1}{2}pa$$

delle due piramidi. Si assumeranno allora questi due numeri come *valori approssimati* a meno di $\frac{1}{10^m}$ dell'area della superficie laterale del cono; e poichè, considerando la lunghezza $2\pi r$ della circonferenza base, si ha, per qualsiasi approssimazione, (nn. 41, 43)

$$p < 2\pi r < p',$$

e quindi ancora

$$\frac{1}{2}pa' < \pi ra < \frac{1}{2}p'a,$$

si è senz'altro condotti ad assumere l'area della superficie laterale del cono uguale a

$$\pi ra;$$

cioè al semiprodotto dell'apotema a per la lunghezza $2\pi r$ della circonferenza base.

VIII.

SFERA

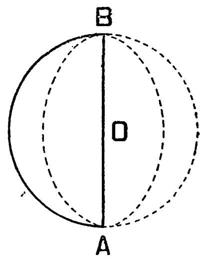
153. Il luogo dei punti dello spazio che hanno da un punto O distanza uguale ad un segmento dato r dicesi *superficie sferica* di *centro* O e *raggio* r.

Ogni segmento, che congiunge il centro O con un punto della superficie sferica, dicesi genericamente *raggio*. Per definizione tutti i raggi sono uguali.

Ogni retta passante pel centro O sega la superficie sferica in due punti A, B. Il segmento AB, doppio del raggio dicesi *diametro* e i punti A e B diconsi diametralmente opposti.

Tutti i diametri di una stessa superficie sferica sono uguali, perchè sono tutti doppi del raggio.

Infine ogni piano passante pel centro di una superficie sferica dicesi piano *diametrale* di essa. Due piani diametrali si intersecano secondo la retta di un diametro; ed è manifesto che: *Ogni piano diametrale di una superficie sferica la interseca secondo una circonferenza di raggio uguale ad essa.*



Perciò ogni circonferenza si può (in infiniti modi) immaginare generata dalla rotazione di una semicirconferenza intorno al suo diametro.

154. Un punto si dice *interno* od *èsterno* ad una superficie sferica secondo che ha dal centro una distanza minore o maggiore del raggio.

La figura costituita dai punti di una superficie sferica e dai punti interni ad essa dicesi *sfera*.

155. Ogni segmento avente gli estremi su di una superficie sferica dicesi *corda* della sfera.

Ogni corda è, salvi gli estremi, tutta interna alla sfera, *ed è minore del diametro.*

Questa proposizione si riporta alla analoga pel cerchio ([1]) considerando la circonferenza, secondo cui è segata la sfera dal piano diametrale contenente la corda data.

156. È infine manifesto che due sfere di ugual raggio sono sovrapponibili o come si suol dire *uguali*; e viceversa.

157. Il criterio per decidere quanti punti una retta può aver comune con una superficie sferica è dato dal seguente teorema: *Una superficie sferica ha comune con una retta due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza di essa dal centro della sfera è minore o uguale o maggiore del raggio.*

Se la retta passa pel centro si è già notato che essa ha comuni due punti colla superficie sferica (n. 153).

Se la retta data non passa pel centro della sfera si consideri il piano diametrale passante per la retta data.

Questo piano sega la superficie sferica secondo una circonferenza che ha comune colla retta data due punti o uno o nessuno, secondo che la distanza della retta dal centro, comune alla circonferenza e alla sfera, è maggiore, uguale o minore del raggio ([2]).

158. Una retta si dice *secante* o *tangente* od *esterna* ad una superficie sferica, secondo che ha comune con essa due punti o uno o nessuno.

Il punto comune ad una sfera e ad una sua tangente dicesi *punto di contatto.*

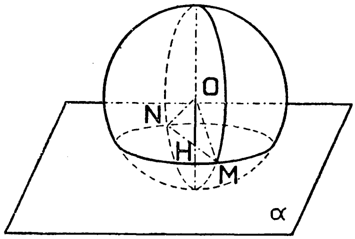
159. Risulta dal teorema del n. 157 che: *Ogni retta perpendicolare ad un raggio di una sfera nel suo estremo, è tangente alla sfera; ed ogni retta tangente ad una sfera è perpendicolare al raggio che va al suo punto di contatto.*

160. Le posizioni in cui può trovarsi un piano rispetto ad una sfera sono caratterizzate dal seguente teorema: *Un piano ha comune con una superficie sferica una circonferenza, o ha comune con essa un sol punto, o non ha con essa nessun punto comune, secondo che la sua distanza dal centro è minore, uguale o maggiore del raggio.*

([1]) *Geometria*: n. 172.
([2]) *Geometria*: nn. 183-201.

Dimostriamo la prima parte; cioè, data una sfera di centro O, e considerato un piano α la cui distanza HO da O sia minore del raggio r della sfera, facciamo vedere che il piano ha comune con la superficie sferica una circonferenza.

Condotto per OH un piano arbitrario β, questo sega la superficie sferica secondo una circonferenza di centro O e raggio r (n. 153) e il piano α secondo una retta, la cui distanza OH da O è minore del raggio r della sfera e della circonferenza. Perciò codesta retta e codesta circonferenza hanno comuni due punti M, N, distinti (ed equidistanti) da H (1). Codesti due punti appartengono alla superficie sferica, e quindi OM è uguale al raggio della sfera. Se allora nel piano α consideriamo la circonferenza di centro H e raggio HM, tutti i punti di essa hanno da O una distanza uguale ad OM, raggio della sfera (2) e quindi appartengono alla superficie sferica.



Analogamente si dimostra che, se il piano α dista da O del raggio, esso ha comune colla sfera un solo punto, cioè il piede della perpendicolare abbassata da O su α; e, se la distanza di O da α è maggiore del raggio, il piano non ha nessun punto comune colla sfera.

E poichè i tre fatti che il piano e la superficie sferica abbiano comune una circonferenza o un punto o nessuno si escludono a vicenda, resta senz'altro dimostrato inversamente che in codesti tre casi la distanza del punto dal piano è rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio.

161. Un piano rispetto a una superficie sferica si dice *secante, tangente* o *esterno*, secondo che ha comune con essa una circonferenza, o un punto o nessun punto.

Il punto comune ad una sfera e ad un piano tangente, dicesi *punto di contatto.*

162. Risulta dai nn. 160, 159 che:

a) *Il piano tangente ad una sfera in un suo punto è perpendicolare al raggio che va a codesto punto di contatto;*

(1) *Geometria*: n. 194.

(2) *Geometria*: n. 632.

e, viceversa, il piano perpendicolare ad una sfera nel suo estremo è tangente ad essa.

b) *Le rette di un piano tangente ad una sfera, che passano pel punto di contatto, sono ivi tangenti alla sfera*; *e, viceversa, le tangenti alla sfera in quel punto giacciono tutte nel piano tangente* [1].

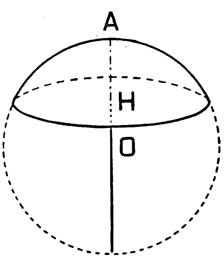
163. Si deduce ancora dalla dimostrazione della prima parte del teorema del n. 160 che: *Se un piano sega una superficie sferica, il raggio della circonferenza sezione è uguale alla proiezione sul piano di un raggio della sfera che passi per uno qualsiasi dei punti della sezione.*

Perciò: *Di tutte le circonferenze sezioni piane di una superficie sferica hanno raggio massimo quelle il cui piano passa pel centro* (aventi raggio uguale al raggio della sfera).

Infatti il cerchio sezione della sfera O con un piano α non passante pel centro (vedi fig. alla pag. prec.), ha per raggio un segmento HM che è cateto di un triangolo rettangolo, di cui è ipotenusa il raggio OM della sfera.

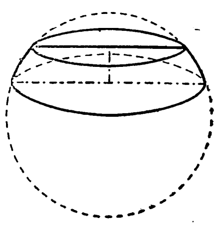
164. Per quanto precede le sezioni dei piani diametrali si dicono *circonferenze massime* della superficie sferica; le altre sezioni piane diconsi *circonferenze minori*. I cerchi corrispondenti diconsi rispettivamente *cerchi massimi* o *cerchi minori* della sfera.

165. Data una sfera, e un piano che la seghi, dicesi *segmento sferico ad una base* ciascuna delle due parti in cui la sfera è divisa dal piano.



Se il piano segante passa pel centro, ciascuno dei due segmenti dicesi più precisamente *emisfero*. Chiamasi poi *calotta sferica* ciascuna delle due parti in cui il piano divide la superficie sferica.

Il cerchio sezione della sfera col piano si dice *base* del segmento sferico e, innalzata nel centro H della base la perpendicolare, la distanza HA di H dalla ulteriore intersezione colla calotta, si dice *altezza* (o *saetta*) del segmento o della calotta.

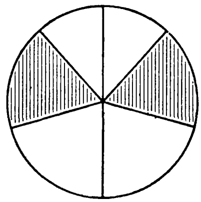


La superficie di un segmento sferico è data da un cerchio e da una calotta.

Si dice poi *segmento sferico a due basi* la parte di sfera compresa tra due piani paralleli,

[1] *Geometria:* n. 626. — Una retta e una pian,a aventi un punto comune, si dicono *perpendicolari*, se tutte le rette giacenti nel piano e passanti per quel punto sono perpendicolari alla retta.

mentre la parte corrispondente di superficie sferica prende il nome di *zona*.



Altezza del segmento e della zona è la distanza dei due piani.

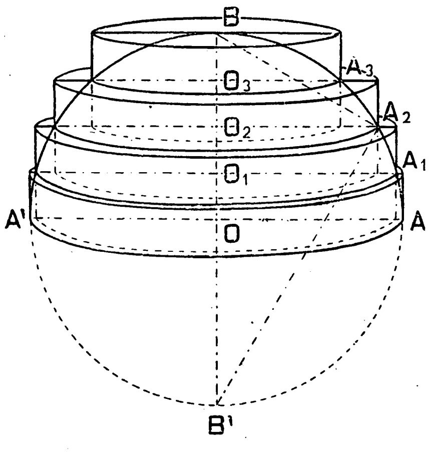
Infine si dice *settore sferico* il solido generato dalla rotazione di un settore circolare intorno ad un diametro del suo cerchio.

Volume della sfera
Area della superficie sferica

166. Per determinare il volume della sfera ci varremo, come per le piramidi (n. 134) e pel cono (n. 144), di un procedimento di successive approssimazioni, fondato sulla considerazione di opportuni scaloidi.

Data una sfera di centro O e raggio r e, presi due raggi perpendicolari OA, OB, consideriamo l'emisfero generato dalla rotazione del settore OAB intorno al raggio OB; e, diviso quest'ultimo raggio in n parti uguali OO_1, $O_1O_2, \ldots,$ $O_{n-1}B$, conduciamo pei punti di divisione i piani perpendicolari ad OB e perciò paralleli al piano base dell'emisfero, i quali segheranno l'emisfero stesso secondo certi $n-1$ cerchi di raggi O_1A_1, $O_2A_2, \ldots,$ $O_{n-1}A_{n-1}$ rispettivamente.

Gli $n-1$ cilindri che hanno codesti cerchi come basi superiori e come altezze rispettivamente OO_1, $O_1O_2, \ldots,$ $O_{n-1}B$, sono tutti interni all'emisfero, cosicchè il loro insieme si dice *scaloide iscritto* ad esso.



Dicesi invece *scaloide circoscritto* l'insieme dei cilindri che hanno ordinatamente le stesse altezze OO_1, $O_1O_2, \ldots,$ $O_{n-1}B$, ma hanno come basi inferiori il cerchio base dell'emisfero e i cerchi, dianzi considerati, di raggio O_1A_1; $O_2A_2, \ldots,$ $O_{n-1}A_{n-1}$.

Manifestamente l'emisfero è compreso tra i due scaloidi (¹), cosicchè se indichiamo con V_n, V_n' i volumi dei

(¹) Per semplicità, l'alunno, nel disegnare la figura, può limitarsi a tracciarne la sezione giacente nel piano diametrale AOB.

due scaloidi e con E quello dell'emisfero, avremo

$$V_n < E < V_n'.$$

Per calcolare V_n e V_n', poichè conosciamo già l'altezza dei singoli cilindri dei due scaloidi, la quale è uguale per tutti ad $\frac{r}{n}$, non resta che determinare i raggi $O_1 A_1$, $O_2 A_2, \ldots,$ $O_{n-1} A_{n-1}$ dei vari cerchi sezioni dell'emisfero, che costituiscono le basi di codesti cilindri; ed anzi, poichè a noi interessa l'area di siffatti cerchi, basterà trovare i quadrati dei raggi indicati (n. 53).

Consideriamone uno, per es. $O_m A_m$, e notiamo che si ha

$$OO_m = \frac{m}{n} r$$

e quindi, essendo $O_m B = r - OO_m$,

$$O_m B = \frac{n - m}{n} r.$$

Ora si ricordi che la distanza di un punto di una circonferenza da un diametro è media proporzionale tra i due segmenti che il suo piede determina sul diametro stesso, in quanto quel punto insieme con gli estremi del diametro determina un triangolo rettangolo ([1]), (n. 61); cosicchè, applicando codesto teorema al segmento $O_m A_m$ e notando che i due segmenti in cui il punto O_m divide il diametro BB' sono dati da

$$O_m B = \frac{n - m}{n} r, \quad B'O_m = B'O + OO_m = r + \frac{m}{n} r = \frac{n + m}{n} r,$$

concludiamo

$$O_m A_m^2 = \frac{n - m}{n} r \times \frac{n + m}{n} r$$

ossia (n. 59)

$$O_m A_m^2 = \frac{n^2 - m^2}{n^2} r^2$$

o infine

$$O_m A_m^2 = r^2 - \frac{m^2}{n^2} r^2;$$

([1]) *Geometria:* n. 317. — *Ogni angolo iscritto in una semicirconferenza è retto.*

avremo cioè cominciando dal raggio della sezione più bassa

$$O_1 A_1^2 = r^2 - \frac{1^2}{n^2} r^2$$

$$O_2 A_2^2 = r^2 - \frac{2^2}{n^2} r^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$O_{n-1} A^2_{n-1} = r^2 - \frac{(n-1)^2}{n^2} r^2 .$$

Moltiplicando codesti $n-1$ quadrati per π e per l'altezza $\frac{r}{n}$ dei cilindri e sommando, otterremo il volume V_n dello scaloide iscritto

$$V_n = \frac{n-1}{n} \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \ldots. + (n-1)^2].$$

Questa espressione non muterà valore, se le aggiungiamo e togliamo $\frac{1}{n} \pi r^3$, dopo di che abbiamo manifestamente

$$V_n = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \ldots. + (n-1)^2 + n^2].$$

Per trovare il volume V_n' dello scaloide circoscritto, si noti che ciascun cilindro di questo è identico a quello immediatamente inferiore dello scaloide iscritto, talchè V_n' risulta uguale a V_n, aumentato del volume del cilindro più basso dello scaloide circoscritto, vale a dire di

$$\pi r^2 \cdot \frac{r}{n} = \frac{\pi r^3}{n} .$$

Si trova così

$$V_n' = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \ldots. + (n-1)^2];$$

e basta applicare l'identità aritmetica e le trasformazioni indicate al n. 134, per ottenere

$$V_n = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$V_n' = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Varranno dunque pel volume E dell'emisfero, qualunque sia il numero intero n, le disuguaglianze

$$\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) < E < \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

dalle quali, ricordando che basta prendere n sufficientemente grande perchè i prodotti

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) \quad \text{e} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

forniscano, con quell'approssimazione che si vuole, l'unità (l'uno per difetto e l'altro per eccesso), si conclude (n. 134, 144)

$$E = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3 .$$

Raddoppiando, abbiamo che *il volume* V *della sfera di raggio* r *è dato da*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Di qui, si ricava inversamente la formola

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

che permette di calcolare il raggio della sfera, quando se ne conosce il volume.

Notiamo che raddoppiando l'espressione del volume dell'emisfero, quale ci fu data direttamente dal procedimento dianzi svolto, otteniamo per il volume della sfera l'espressione

$$V = 2\pi r^3 - 2\frac{\pi r^3}{3},$$

la quale, scritta sotto la forma,

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r,$$

ci dice che *il volume della sfera di raggio* r *è uguale alla differenza dei volumi del cilindro e del cono, che hanno il raggio di base* r *e l'altezza* 2r (Teorema di ARCHIMEDE).

167. L'area della superficie della sfera non si può definire in modo analogo a quello tenuto pel cilindro (n. 131) e pel cono (n. 147), poichè essa non è *sviluppabile*, cioè non si può, nemmeno con opportuni tagli, distendere sul piano senza strappi e senza pieghe.

Tuttavia la nostra intuizione ci induce a ritenere che anche la superficie della sfera sia suscettibile di una misura, la quale si otterrà in via approssimata qualora si pensi di sostituire a codesta superficie quella di un poliedro, che abbia un numero grandissimo di faccette molto piccole, tutte tangenti alla sfera. Questo poliedro, che costituisce per così dire una *sfera faccettata*, si può riguardare come la somma di tutte quelle piramidi, molto acuminate, di vertice nel centro, che hanno come basi le varie faccette e quindi come altezza comune il raggio r; cosicchè il volume del poliedro, che non differisce sensibilmente dalla sfera, si otterrà moltiplicando per $\frac{1}{3}r$ l'area della superficie di essa (n. 134).

In base a siffatta considerazione intuitiva, noi attribuiremo alla superficie della sfera una misura tale che moltiplicata per $\frac{1}{3}r$ dia il volume $\frac{4}{3}\pi r^3$ della sfera stessa; cioè indicando con S codesta misura, porremo

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{1}{3} r = 4\pi r^2 .$$

Avremo dunque che l'*area della superficie della sfera è uguale al quadruplo dell'area* πr^2 *del suo cerchio massimo;* od anche, potendosi scrivere

$$2\pi r \cdot 2r,$$

all'area della superficie laterale del cilindro di raggio r *e altezza* $2r$.

Di qui risulta inversamente

$$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}.$$

168. Il volume della sfera e l'area della sua superficie si possono determinare anche con un altro procedimento di approssimazione, diverso da quello seguito ai nn. prec.

Qui i medesimi corpi geometrici (*solidi di rotazione*) serviranno alla determinazione approssimata tanto del volume come dell'area della superficie: ma nell'ordine delle deduzioni converrà cominciare da quest'ultima.

Dato un arco di circonferenza, dicesi *iscritta* in esso ogni poligonale (convessa) avente gli estremi negli estremi dell'arco e gli altri vertici sull'arco stesso.

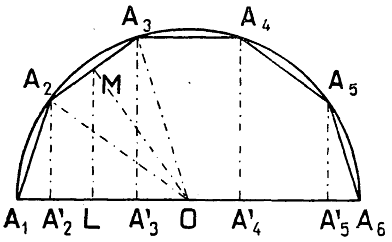
Dicesi invece *circoscritta* all'arco ogni poligonale (convessa), i cui lati siano tangenti all'arco e gli estremi cadano sulle semirette dei raggi della circonferenza che vanno agli estremi dell'arco.

Si dice poi *regolare* una poligonale iscritta o circoscritta ad un arco, la quale abbia uguali tutti i lati.

Una poligonale regolare $A_1A_2....A_n$ iscritta in una semicirconferenza, quando questa ruota intorno al diametro descrivendo una superficie sferica, *genera* una superficie costituita dall'insieme di $n-1$ zone, di cui due sono coniche, e le altre tronco-coniche, a meno che n sia pari, nel qual caso una è cilindrica. L'insieme di codeste zone si dirà una *superficie di rotazione iscritta* nella sfera; mentre si dirà *circoscritta* ogni superficie analoga, generata da una poligonale regolare circoscritta alla semicirconferenza.

Ora il concetto intuitivo che noi tutti abbiamo della superficie sferica ci fa ritenere che essa sia compresa fra le superficie di rotazione, iscritte e circoscritte alla sfera, talchè siamo condotti a cercare le aree S_n, S_n' di queste ultime superficie.

Considerando, per fissare le idee, una superficie di rotazione iscritta, la parte tronco-conica descritta da un lato, non parallelo al diametro della poligonale generatrice, p. es. da A_2A_3, ha l'area (n. 148)



$$2\pi \frac{A_2A_2' + A_3A_3'}{2} A_2A_3$$

ossia

$$2\pi ML \cdot A_2A_3 ;$$

dove ML rappresenta la distanza del punto medio M di A_2A_3 dal diametro. Ora il prodotto $ML \cdot A_2A_3$ si può trasformare, confrontando i due triangoli OMA_2, MLA_2', i quali risultano equiangoli e quindi simili. Invero anzitutto i due triangoli sono entrambi rettangoli ed in secondo luogo il quadrangolo OMA_2A_2', avendo due angoli opposti retti, è iscrittibile in una circonferenza (1), talchè i due angoli $O\widehat{A_2}M$, $M\widehat{A_2'}O$ $(\equiv M\widehat{A_2'}L)$ sono uguali, come iscrittibili in un medesimo arco (2).

Allora per la proporzionalità dei lati dei due triangoli simili, avremo che

$$A_2M : OM = A_2'L : ML$$

e quindi ancora avendosi

$$A_2A_3 = 2A_2M, \quad A_2'A_3' = 2A_2'L,$$

$$A_2A_3 : OM = A_2'A_3' : ML ;$$

(1) *Geometria:* n. 326.
(2) *Geometria:* n. 315.

onde risulta (n. 60)

$$ML \cdot A_2A_3 = OM \cdot A_2'A_3'.$$

Se allora indichiamo con a_n l'apotema OM della poligonale, troviamo che l'area della zona troncoconica generata da A_2A_3 è data da

$$2\pi a_n \cdot A_2'A_3',$$

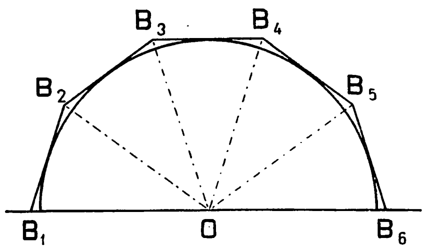
cioè dal prodotto della lunghezza della circonferenza che ha per raggio l'apotema a_n della poligonale per la proiezione $A_2'A_3'$ del lato A_2A_3 sul diametro.

Ciò varrà naturalmente per ciascuna delle varie zone, compresa la eventuale zona cilindrica, per la quale il risultato precedente è dato direttamente dalla regola del n. 131; e allora sommando le varie aree ottenute, le quali hanno il fattore comune $2\pi a_n$ e notando che la somma delle proiezioni dei lati della poligonale sul diametro è lo stesso diametro $2r$, troviamo come area della superficie di rotazione iscritta considerata

$$S_n = 2\pi a_n \cdot 2r$$

cioè il prodotto della lunghezza della circonferenza di raggio a_n per il diametro $2r$.

Ora è chiaro senz'altro che un risultato analogo si otterrà per l'area della superficie di rotazione circoscritta generata dalla poligonale regolare circoscritta alla semicirconferenza $B_1B_2....B_n$, in quanto questa è alla sua volta iscrittibile in una semicirconferenza avente un certo raggio $r_n > r$.



Qui la somma delle proiezioni dei lati sul diametro sarà $2r_n$, mentre l'apotema risulterà uguale ad r, talchè avremo in questo caso per l'area S_n' della indicata superficie l'espressione

$$S_n' = 2\pi r \cdot 2r_n.$$

Ora manifestamente basta iscrivere e circoscrivere alla nostra semicirconferenza due poligonali regolari che abbiano un numero n di lati abbastanza grande, perchè tanto la differenza $r - a_n$ dell'apotema della poligonale iscritta dal raggio, come la differenza $r_n - r$ del raggio della poligonale circoscritta da quello della semicirconferenza risultino minori di un qualsiasi numero prefissato, per piccolo che esso sia. Si potrà così fare in modo, che risulti piccola quanto si vuole, p. es. minore di $\frac{1}{10^m}$, anche la differenza delle aree

$$2\pi a_n \cdot 2r, \quad 2\pi r \cdot 2r_n$$

delle due superficie di rotazione, rispettivamente iscritta e circoscritta. Si assumeranno allora codesti due numeri come *valori approssimati* a meno di $\frac{1}{10^m}$

dell'area della superficie sferica; e poichè, per qualsiasi approssimazione, si ha

$$a_n < r < r_n$$

e quindi ancora

$$2\pi a_n \cdot 2r < 2\pi r \cdot 2r < 2\pi r \cdot 2r_n,$$

si è senz'altro condotti a prendere come area della superficie della sfera appunto il prodotto

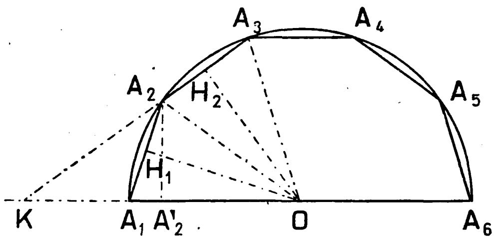
$$2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2.$$

169. Il volume della sfera, di dato raggio r, si può determinare, confrontandolo coi volumi dei solidi di rotazione iscritti e circoscritti, che sono racchiusi dalle superficie di rotazione considerate al n. prec.

Il volume V_n del solido di rotazione generato da una poligonale regolare $A_1A_2....A_n$, iscritta nella semicirconferenza di centro O e raggio r, è la somma dei volumi dei solidi generati, nella rotazione intorno al diametro, dagli $n-1$ triangoli isosceli OA_1A_2, OA_2A_3,...

Cominciando dal primo di codesti solidi parziali, il quale è somma di due coni di raggio di base $A_2'A_2$ e di altezze $A_2'A_1$ e $A_2'O$, troviamo che il rispettivo volume è (n. 144)

$$\frac{1}{3}\pi A_2'A_2^2 \cdot A_1A_2' + \frac{1}{3}\pi A_2'A_2^2 \cdot A_2'O$$



ossia

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{3}\pi A_2'A_2^2 \cdot A_1O.$$

Ma condotta da O ad A_1A_2 la perpendicolare OH_1, la quale ci dà precisamente l'apotema a_n della nostra poligonale, abbiamo, esprimendo in due modi il doppio dell'area del triangolo A_1A_2O (n. 31)

$$A_2'A_2 \cdot A_1O = A_1A_2 \cdot a_n,$$

cosicchè il volume (1) si può scrivere

$$\frac{1}{3}\pi A_2'A_2 \cdot A_1A_2 \cdot a_n.$$

Ma $\pi A_2'A_2 \cdot A_1A_2$ è la metà del prodotto della lunghezza $2\pi A_2'A_2$ della circonferenza di raggio $A_2'A_2$ per A_1A_2, e dà perciò l'area della superficie conica descritta nella solita rotazione da A_1A_2 (n. 147); cosicchè *il volume del solido generato dal triangolo* A_1A_2O *è la terza parte del prodotto dell'area della superficie generata da* A_1A_2 *per la distanza* a_n *di* A_1A_2 *da* O, vale a dire

$$\frac{1}{3}(\text{area sup.}^{\text{ie}}\ \text{gen.}^{\text{ta}}\ \text{da } A_1A_2)\ a_n.$$

Ora questa regola che qui abbiamo trovato pel solido generato dal triangolo OA_1A_2 che ruota intorno ad un suo lato, vale anche per ciascuno dei solidi generati dagli altri triangoli $OA_2A_3, \ldots$.

P. es. il solido generato da OA_2A_3, ove si prolunghi A_2A_3 fino a incontrare in K il diametro, si può riguardare come la differenza dei solidi generati da KOA_3 e da KOA_2, ciascuno dei quali ruota intorno ad un suo lato, cosicchè è applicabile ad entrambi la regola ottenuta or ora.

Si trova così che il volume cercato, in quanto la distanza di AK_3 da O è ancora a_n, è uguale ad

$$\frac{1}{3}\,(\text{area sup.}^{\text{ie}}\ \text{gen.}^{\text{ta}}\ \text{da}\ KA_3)\ a_n - \frac{1}{3}\,(\text{area sup.}^{\text{ie}}\ \text{gen.}^{\text{ta}}\ \text{da}\ KL)\ a_n$$

ossia ad

$$\frac{1}{3}\,(\text{area sup.}^{\text{ie}}\ \text{gen.}^{\text{ta}}\ \text{da}\ A_2A_3)\ a_n,$$

come appunto volevamo dimostrare; e, facilmente si verifica che lo stesso risultato sussiste, quando n sia pari, pel solido generato dal triangolo corrispondente al lato della poligonale parallelo al diametro.

Ciò premesso, sommando i volumi parziali dianzi determinati e raccogliendo il fattore comune $\frac{1}{3}a_n$, troviamo fra parentesi la somma delle aree delle superficie generate da A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, cioè l'area S_n della superficie di rotazione generata dalla poligonale $A_1A_2 \ldots A_n$; cosicchè il volume cercato V_n del solido corrispondente è dato da

$$V_n = \frac{1}{3}\,a_n\,S_n.$$

Ad analoga espressione si perviene pel volume V_n' del solido di rotazione circoscritto (generato dalla poligonale regolare ad n lati circoscritta alla semicirconferenza), con la sola differenza che qui l'apotema della poligonale è dato dal raggio r della sfera; onde risulta, se S_n' indica, come al n. prec., l'area della superficie di rotazione circoscritta,

$$V_n' = \frac{1}{3}\,rS_n'.$$

Poichè la sfera è compresa, qualunque sia n, tra i due solidi di rotazione, iscritto e circoscritto, avremo pel volume V di essa le disuguaglianze

$$\frac{1}{3}\,a_nS_n < V < \frac{1}{3}\,rS_n',$$

e basta prendere l'intero n sufficientemente grande, perchè risultino minori di qualsiasi numero assegnabile tanto la differenza $r - a_n$ quanto la differenza $S_n' - S_n$, cosicchè $\frac{1}{3}a_nS_n$ e $\frac{1}{3}rS_n'$ forniranno pel volume cercato V due valori approssimati quanto si vorrà. Ma d'altra parte noi abbiamo (n. prec.)

$$a_n < r, \quad S_n < 4\pi r^2 < S_n'$$

e quindi ancora

$$\frac{1}{3} a_n S_n < \frac{1}{3} r \cdot 4\pi r^2 < \frac{1}{3} r S_n';$$

e poichè queste disuguaglianze valgono, qualunque sia l'approssimazione con cui $\frac{1}{3} a_n S_n$ e $\frac{1}{3} r S_n'$ danno il volume V della sfera, si conclude che V non può essere diverso da $\frac{1}{3} r \cdot 4\pi r^2$, ossia, come al n. 166,

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

170. Considerazioni analoghe a quelle del n. 168 conducono ad assumere come *area di una zona* (e in particolare di una *calotta*) di altezza h su di una sfera di raggio r *il prodotto*

$$2\pi r h$$

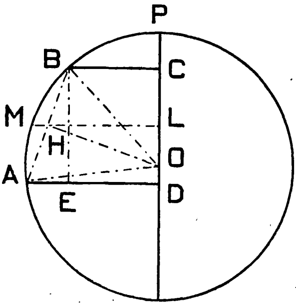
della lunghezza della circonferenza massima della sfera per l'altezza della zona (o calotta).

Dopo di che si stabilisce con procedimento in tutto analogo a quello del n. prec. che il volume di un *settore sferico è uguale ad* $\frac{1}{3}$ *del prodotto dell'area della zona (o calotta) corrispondente pel raggio della sfera, cui appartiene il settore.*

171. In base alle regole date al n. prec., possiamo determinare *il volume di un segmento sferico a due basi* S. Esso sia generato dalla rotazione intorno alla PO del quadrilatero $ABCD$ (di cui AB è un arco circolare) e si ponga

$$OA = r, \quad DA = a, \quad CB = b, \quad CD = h.$$

Il segmento S si ottiene riunendo il tronco di cono T (eventualmente cilindro) generato dal trapezio (o rettangolo) $ABCD$, e il solido (anulare) di rotazione R descritto dal segmento circolare AMB intorno all'asse PO.



Siamo così condotti a determinare anzitutto il volume di codesto solido anulare R. Esso si ottiene dal settore sferico generato da $AMBO$, togliendo il volume del solido di rotazione generato dal triangolo ABO il quale, pel n. 169, è dato dal terzo del prodotto di OH per l'area della superficie troncoconica generata da AB.

Quest'ultima è uguale (n. 168) a

$$2\pi h \cdot OH,$$

onde risulta che il volume del solido generato da ABO è dato da

$$\frac{2}{3} \pi h \cdot OH^2.$$

Ricordando che il volume del settore sferico $AMBO$ è (n. prec.)

$$\frac{2}{3}\pi h \cdot OA^2$$

si trova

$$R = \frac{2}{3}\pi h\,[OA^2 - OH^2].$$

Ma (n. 61) si ha

$$OA^2 - OH^2 = AH^2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Quindi

$$R = \frac{1}{6}\pi h AB^2.$$

Per avere il volume del segmento basta aggiungere ad R il volume del tronco di cono $ABCD$, cioè (n. 146)

$$\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2);$$

onde si ha

$$S = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2) + \frac{1}{6}\pi h AB^2.$$

Ma se da B si abbassa la perpendicolare BE su AD, si ha (n. 61)

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

cioè

$$AB^2 = h^2 + (a - b)^2$$

e sostituendo in S e riducendo, si trova

$$S = \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Interpretando codesta formola si ha che:

Un segmento sferico a due basi ha volume uguale alla semisomma di due cilindri aventi la stessa altezza del segmento, e per basi rispettive le basi del segmento, aumentata della sfera avente per diametro l'altezza del segmento.

172. Ponendo $b = 0$ nella formola ottenuta dianzi, si ottiene pel volume del segmento sferico ad una sola base, in cui a sia il raggio della base ed h l'altezza

$$\frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Se r è il raggio della sfera si ha (n. 61)

$$a^2 = h(2r - h),$$

cosicchè il volume del segmento è anche dato da

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

173. La espressione ottenuta al n. 171 per il volume del segmento sferico a due basi si semplifica se si tien conto del raggio $LM = p$ della sezione del segmento equidistante dalle basi.

Posto

$$PD = x, \quad PC = y, \quad PL = z = \frac{x+y}{2}$$

abbiamo (n. 61)

$$a^2 = x(2r - x), \quad b^2 = y(2r - y)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a^2 + b^2) &= 2rz - \frac{x^2 + y^2}{2} = \\ &= 2rz - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \\ &= 2zr - z^2 - \frac{h^2}{4} = \\ &= p^2 - \frac{h^2}{4}.\end{aligned}$$

Cosicchè da ultimo dalla formola del n. 171 si deduce la seguente notevole formola (del MAC-LAURIN)

$$S = \pi h\left(p^2 - \frac{h^2}{12}\right).$$

IX.

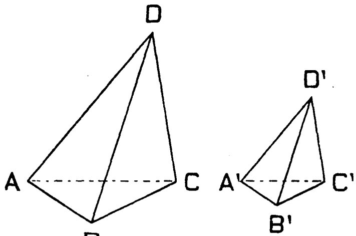
SOLIDI SIMILI

Preliminari

174. Come applicazione della teoria della misura svolta nei capitoli precedenti dimostreremo due notevoli proposizioni sui solidi simili, le quali sono analoghe ai due teoremi di Geometria piana, pei quali i perimetri di due poligoni simili sono proporzionali a due lati omologhi e i poligoni simili stessi sono proporzionali ai quadrati di due lati omologhi.

Ma prima è necessario esporre alcune generalità sulla similitudine nello spazio.

Due poliedri si dicono *simili* se hanno rispettivamente uguali gli angoloidi e ordinatamente simili le faccie che li comprendono.



Dati due poliedri simili, ad ogni elemento (vertice, spigolo, angolo, diedro) dell' uno *corrisponde* un elemento (*omologo*) dell' altro.

Gli angoli e i diedri omologhi sono uguali. Gli spigoli omologhi sono proporzionali.

Come esempi di poliedri simili si possono considerare due poliedri regolari di uno stesso numero di faccie, p. es. due cubi; e possiamo notare che, dati due poliedri simili, l' uno si può sempre riguardare come l' immagine ingrandita o rimpicciolita dell' altro.

175. *Se in due poliedri simili, dai vertici di due angoloidi corrispondenti si conducono i piani che vanno ai lati e alle diagonali delle faccie che non appartengono a codesti due angoloidi, i poliedri rimangono divisi nello stesso numero di tetraedri ordinatamente simili.*

Questa proposizione si deduce dalla definizione del n. prec. con un ragionamento perfettamente analogo a quello con cui si dimostra in Geometria piana la corrispondente proposizione pei poligoni simili ([1]).

176. La definizione di similitudine data al n. 174 pei poliedri si può estendere agli altri solidi da noi considerati sin qui.

Due cilindri o due coni si dicono *simili*, se hanno proporzionali le altezze e i raggi delle basi; e due tronchi di cono si dicono *simili* se hanno proporzionali le altezze, i raggi delle basi minori e i raggi delle basi maggiori.

In altre parole due cilindri o due coni o due tronchi di cono sono simili se tali sono i poligoni (rispettivamente rettangoli, triangoli o trapezii) che li generano ruotando intorno agli assi rispettivi.

Infine due sfere quali si vogliano si riguardano sempre come *simili*.

177. Discende dalle definizioni del n. 174 e del n. prec. che *solidi simili ad un terzo sono simili fra loro.*

178. Per brevità diremo *dimensioni lineari* o semplicemente *dimensioni* di un cilindro, cono o tronco di cono le lunghezze della rispettiva altezza e dei raggi delle basi; e talvolta useremo tale designazione anche per le lunghezze dei lati di un poliedro e pel raggio di una sfera.

Potremo allora dire che *se sappiamo che due solidi sono simili e hanno uguali due dimensioni omologhe, possiamo senz'altro concludere che essi sono uguali.*

Rapporto delle superficie di solidi simili e dei loro volumi

179. Ciò premesso occupiamoci dei teoremi preannunciati, il primo dei quali dice che:

Le superficie di due solidi simili stanno fra loro come i quadrati di due loro dimensioni omologhe.

a) Nel caso dei poliedri le faccie omologhe, in quanto sono poligoni simili, stanno fra loro come i quadrati di due spigoli omologhi; e basta *comporre* ([2]) opportunamente codeste proporzioni per giungere alla proposizione enunciata.

([1]) *Geometria*: n. 503.
([2]) *Geometria:* n. 447.

b) Se si tratta di due cilindri di altezze h, h_1 e di raggi r, r_1 abbiamo per la supposta similitudine

$$\frac{h}{h_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Ma le aree totali rispettive S, S_1 sono date (n. 131) da

$$S=\pi r(h+r), \quad S_1=\pi r_1(h_1+r_1)$$

onde risulta

$$\frac{S}{S_1}=\frac{r(h+r)}{r_1(h_1+r_1)};$$

e poichè, componendo la proporzione che sussiste tra h, h_1, r, r_1, si ha

$$\frac{h+r}{h_1+r_1}=\frac{r}{r_1},$$

si conclude

$$\frac{S}{S_1}=\frac{r^2}{r_1^{\,2}}=\frac{h^2}{h_1^{\,2}}.$$

Analogamente si procede nel caso del cono e del tronco di cono.

E per due sfere di raggio r, r_1 si ha senz'altro dalle espressioni delle loro aree (n. 167)

$$S=4\pi r^2, \quad S_1=4\pi r_1^{\,2}$$

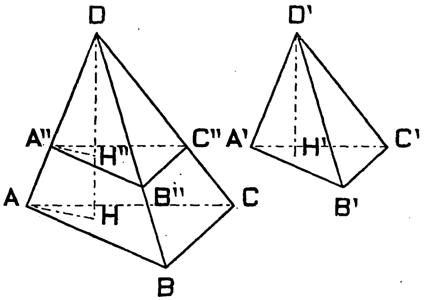
la proporzione

$$\frac{S}{S_1}=\frac{r^2}{r_1^{\,2}}.$$

180. Per poter dimostrare la seconda proposizione che abbiamo in vista, conviene premettere, pel caso dei poliedri, un' osservazione:

In due tetraedri simili due altezze omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi.

Abbassate nei due tetraedri simili $ABCD$, $A'B'C'D'$ le due altezze omologhe DH, $D'H'$, si prendano sugli spigoli dell'angoloide $\widehat{D}$, uguale per ipotesi a $\widehat{D'}$, i tre segmenti DA'', DB'', DC'' ordinatamente uguali a $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$. Il tetraedro $A''B''C''D$ risulta uguale ad $A'B'C'D'$; e di più, in quanto



$$A''B'' : AB = DA'' : DA$$

$$B''C'' : BC = DB'' : DB,$$

gli spigoli $A''B''$, $B''C''$ sono per l'inverso del teorema di TALETE (¹), paralleli ad AB, BC, talchè la base $A''B''C''$ risulta parallela ad ABC (²) e, se H'' è l'intersezione della DH con $A''B''C''$, la DH'' sarà l'altezza di $A''B''C''D$, e perciò uguale alla $D'H'$. Basta allora congiungere H, H'' con A, A'' per concludere dai triangoli rettangoli simili $DH''A''$, DHA (³) che veramente

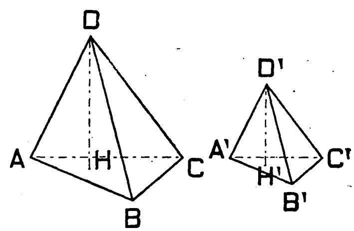
$$DH'' : DH = DA'' : DA$$

ossia

$$D'H' : DH = D'A' : DA.$$

181. Oramai possiamo dimostrare facilmente che *due solidi simili stanno fra loro come i cubi di due dimensioni omologhe quali si vogliano.*

a) Occupiamoci anzitutto di due tetraedri simili $ABCD$, $A'B'C'D'$, pei quali indichiamo con b, b' le aree delle due basi omologhe ABC, $A'B'C'$ e con h, h' le corrispondenti altezze. Il rapporto dei due tetraedri sarà dato allora (n. 134) da



$$ABCD : A'B'C'D' = \frac{\frac{1}{3}bh}{\frac{1}{3}b'h'},$$

ossia da

$$ABCD : A'B'C'D' = \frac{bh}{b'h'}.$$

Ma notiamo in primo luogo che le basi ABC, $A'B'C'$, in quanto sono simili, stanno fra loro come i quadrati di due

(¹) *Geometria*: n. 477.
(²) *Geometria*: n. 782.
(³) *Geometria*: n. 785.

spigoli omologhi, per esempio di AB e $A'B'$ od anche di AD e $A'D'$; cosicchè designate con l, l' le lunghezze di codesti due spigoli, avremo

$$\frac{b}{b'}=\frac{l^2}{l'^2};$$

e d'altra parte, come si è visto al n. prec., le altezze h, h' sono proporzionali ai due spigoli stessi

$$\frac{h}{h'}=\frac{l}{l'},$$

cosicchè, sostituendo nell'espressione del rapporto $ABCD$: : $A'B'C'D'$ a $\frac{b}{b'}$, e ad $\frac{h}{h'}$ i valori trovati, avremo

$$ABCD:ABCD=\frac{l^3}{l'^3};$$

cioè veramente i due tetraedri stanno fra loro come i cubi di due spigoli omologhi.

Allora se, passando al caso generale, sono dati due poliedri simili quali si vogliano P e P', si comincia col decomporli, nel modo indicato al n. 175, in tanti tetraedri che risultano a due a due simili. Ciascuna di codeste coppie di tetraedri simili è, per quanto si è dimostrato or ora, proporzionale ai cubi di due spigoli omologhi dei due poliedri dati. Ma poichè gli spigoli omologhi dei due poliedri simili sono per definizione proporzionali, avremo che tali sono anche i cubi di codesti lati omologhi, onde si conclude che tutte le coppie di tetraedri simili considerate dianzi e tutte le coppie di cubi di spigoli omologhi sono proporzionali. Allora, componendo in modo opportuno le proporzioni così ottenute (1), si trova che veramente i due poliedri stanno fra loro come i cubi di due qualsiansi spigoli omologhi.

b) Per due cilindri di altezze h, h_1 e di raggi r, r_1 i volumi sono dati (n. 129) da

$$V=\pi r^2 h,\quad V_1=\pi r_1^{\,2} h_1,$$

(1) Cfr. *Geometria*: n. 513.

onde nel caso della similitudine, avendosi

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1},$$

risulta

$$\frac{V}{V_1}=\frac{r^2h}{r_1{}^2h_1}=\frac{r^3}{r_1{}^3}=\frac{h^3}{h_1{}^3}.$$

Analogamente pei coni e pei tronchi di cono; e nel caso di due sfere di raggio r, r_1, si ha pei rispettivi volumi (n. 166)

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,\quad V_1=\frac{4}{3}\pi r_1{}^3$$

e quindi senz'altro

$$\frac{V}{V_1}=\frac{r^3}{r_1{}^3}.$$

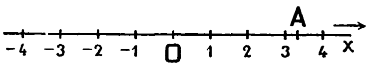
X.

FUNZIONI E DIAGRAMMI

Scale graduate o ascisse sulla retta

182. Si è già accennato (n. 24) come i numeri dotati di segno servano a misurare i segmenti di una retta, quando si considerino come *orientati*. È necessario che ci occupiamo di ciò in modo più preciso.

Una retta qualsiasi x ha *due sensi*, l'uno *opposto* all'altro [1], che noi, per intenderci, sulla figura chiameremo *positivo* l'uno (quello p. es. che va da sinistra a destra) e *negativo* l'altro. Fissato sulla x un punto O, che si dirà *origine* e scelta l'*unità di misura*, ogni punto A della retta ha dall'origine una distanza OA, che è misurata da un certo numero ben determinato, al quale noi daremo il segno $+$ o $-$ secondo che A cade a destra o a sinistra di O.



Così al punto considerato sulla retta x si fa *corrispondere* un numero, che si dice *ascissa* di esso. Reciprocamente, preso un numero qualsiasi (positivo o negativo) a, vi è sulla retta (rispettivamente a destra o a sinistra di O) un punto ben determinato, che ha dall'origine O una distanza misurata da a ossia ammette il numero a come ascissa.

L'origine ha l'ascissa *zero*.

Risulta da quanto precede che su di una retta resta determinata l'ascissa di ciascun punto, quando si siano fissati: *l'origine*, *l'unità di misura* e il *senso positivo*. Ma naturalmente questi si possono scegliere in infiniti modi e, corrispondentemente, si ottengono sulla retta altrettanti *sistemi di ascisse* diversi.

Si può notare che in pratica ci serviamo di ascisse, quando leggiamo la temperatura sulla scala di un termometro; ed anche comunemente si

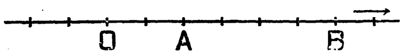
(1) *Geometria*: n. 2.

parla di temperature positive o negative, secondo che si è *sopra* o *sotto* 0°. Così su di una linea ferroviaria, che passi per una certa stazione O, la distanza chilometrica di un treno da O si può riguardare come un'ascissa, assegnandole il segno + o —, secondo che esso si trova da una parte o dall'altra di O; e via dicendo.

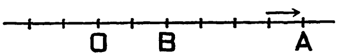
183. Se si è fissato sulla retta un sistema di ascisse, *la distanza* AB *di due punti* A, B *di ascisse* a, b *rispettivamente è data in valore e segno da*

$$AB = b - a.$$

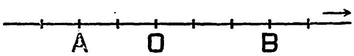
Ciò è evidente se a e b sono positivi ed è $b > a$; ma



$a = 2,\ b = 6;\ \ AB = 6 - 2 = 4$



$a = 6,\ b = 2;\ \ AB = 2 - 6 = -4$



$a = -2,\ b = 3;\ \ AB = 3 - (-2) = 5$

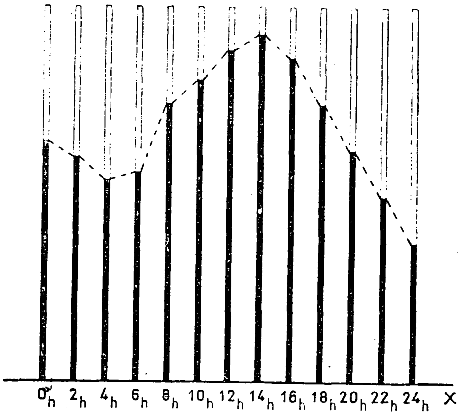
basta esaminare le annesse figure per convincersi che vale la stessa formola anche negli altri casi. (Si considerino anche le altre tre posizioni in cui A, B possono trovarsi rispetto ad O, oltre quelle indicate in figura).

Diagrammi

184. Supponiamo di aver registrato di due in due ore, da una mezzanotte alla successiva (14 Aprile 1914), la temperatura segnata in un determinato luogo (R. Osservatorio Geofisico di Modena) da un certo termometro centigrado e di avere ottenuto i risultati indicati nella tabella seguente:

0^h .... 15,5°	14^h .... 22,5°
2^h .... 14,5°	16^h .... 21°
4^h .... 13°	18^h .... 18°
6^h .... 13,5°	20^h .... 15°
8^h .... 18°	22^h .... 12°
10^h .... 19,5°	24^h .... 9°
12^h .... 21,5°	

L'andamento del fenomeno, che si rileva con qualche fatica dall'esame e dal confronto di codesti dati numerici, si rende intuitivamente manifesto ricorrendo alla seguente rappresentazione grafica. Tracciata su di un foglio una retta x, segniamo su di essa dei punti equidistanti, i quali rappresentino le ore, di due in due, da 0^h a 24^h, e in ciascuno di essi innalziamo una perpendicolare, che sia misurata, rispetto ad una certa unità di misura (che in figura si è preso uguale a 2 mm.) da quello stesso numero che dà la temperatura osservata nell'ora corrispondente. Ci troviamo così ad avere innanzi simultaneamente, l'una accanto all'altra, le immagini della colonnina di mercurio del termometro, quale ci era apparsa successivamente di due in due ore, quando registrammo le nostre osservazioni; ed oramai possiamo a colpo d'occhio valutare come e, approssimatamente, in qual misura sia andata variando la temperatura in quelle 24 ore.



Per rendere poi ancora più visibili codeste variazioni, si congiungono a due a due con tratti rettilinei gli estremi superiori delle perpendicolari dianzi condotte, e si ottiene in tal modo il *diagramma* o *la grafica della temperatura* nelle 24 ore considerate.

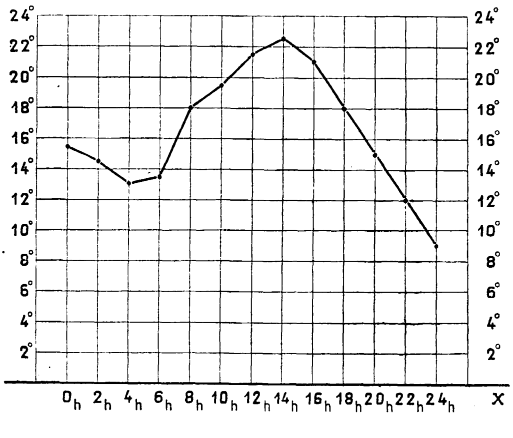
Si rileva così a colpo d' occhio che il *minimo* di temperatura ha avuto una tendenza discendente, in quanto al compiersi delle 24 ore si è registrata una temperatura minore di quella della mezzanotte precedente. E difatti il giorno in cui si registrarono le temperature suindicate segnò il passaggio da un periodo di sereno ad uno di pioggia.

Naturalmente si ottiene un diagramma più preciso se si osserva e si registra la temperatura ad ogni ora o ad ogni mezz'ora o ad ogni 15′, ecc. E l'immagine dell'andamento effettivo del fenomeno si può avere, ricorrendo a qualcuno di quei *termometri registratori*, già descritti in Fisica, che segnano automaticamente su di un foglio, istante per istante, la temperatura, e forniscono così la *curva della temperatura* nell'intervallo di tempo considerato.

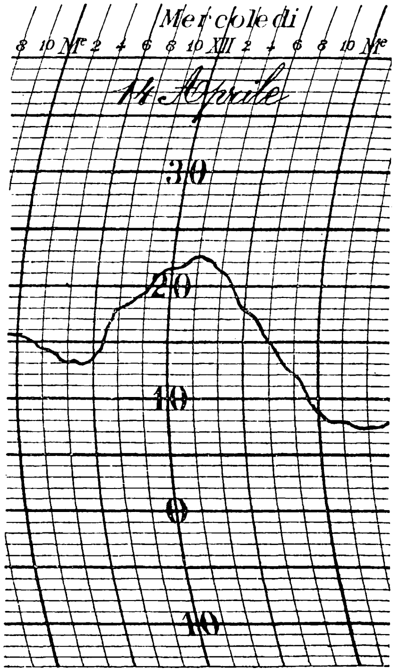
185. Nella pratica, per tracciare i diagrammi, torna comodo servirsi di *carta quadrettata* e, in particolare, di *carta millimetrica* (su cui il lato di ciascun quadrettino è di 1 mm. e le rette della quadretattura sono di 10 in 10 segnate con un tratto un po' più marcato).

Il vantaggio di usare la carta quadrettata sta nel fatto che su ciascuna delle rette *orizzontali* e *verticali* del reticolato è già segnata dalla quadrettatura stessa una graduazione, che permette di valutare a colpo d'occhio le distanze di due punti presi sulla stessa verticale o sulla stessa orizzontale.

Così, riferendoci p. es. alla registrazione grafica delle temperature di cui ci occupammo dianzi, si assume come retta x o *asse dei tempi* una retta orizzontale della quadrettatura e si segna su di essa l'ora delle singole osservazioni fatte nei punti di intersezione colle successive verticali (a partire da una determinata); dopo di che, preso come unità di misura il lato del quadretto o una sua determinata parte aliquota, si possono immediatamente segnare, sulle accennate verticali, i successivi punti del nostro diagramma. P. es. nell'unita figura, che riproduce su carta quadrettata il medesimo diagramma della pag. prec., si è assunto come unità la metà del lato del quadretto, pari a mm. 2 (cioè la stessa unità della precedente figura).



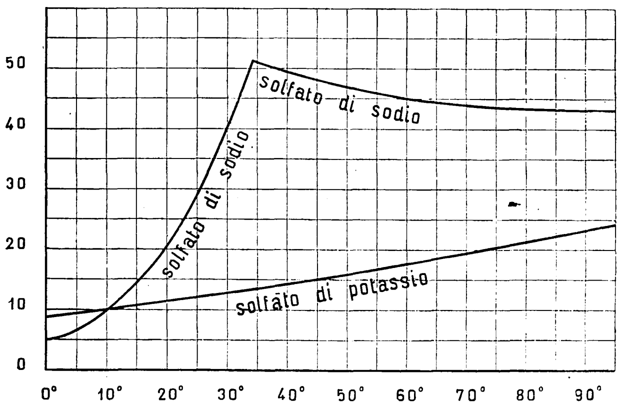
Notiamo che solitamente anche pei *termometri registratori* (e per tutti gli altri strumenti congeneri) si usa *carta quadrettata*. Soltanto qui la punta scrivente, essendo saldata all'estremità di un ago mobile intorno ad un perno fisso, descrive, al variare della temperatura, degli archi di circonferenza (di raggio costante) e perciò si adopra della carta su cui è segnato un reticolato costituito da rette parallele e da archi di circonferenza (di raggio uguale alla distanza fissa della punta scrivente dal rispettivo perno).



186. In ogni scienza di osservazione sono innumerevoli i fenomeni, di cui è vantaggioso considerare la rappresentazione grafica mediante *diagrammi.*

Così, per esempio, sappiamo che la *solubilità* di un certo sale, cioè la quantità massima (in peso) di esso, che si può disciogliere in una determinata quantità di un certo solvente, p. es. in 100 parti di acqua, varia, quando la pressione è costante, al variare della temperatura.

Per rappresentare con un diagramma codesta variazione su di un foglio di carta quadrettata, si segnano su di una retta orizzontale della quadrettatura le successive tem-



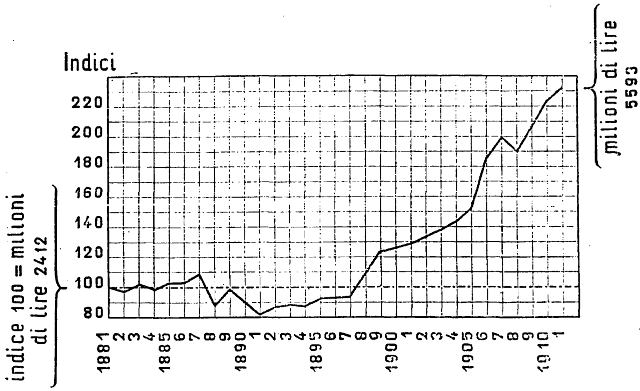
perature considerate e sulle corrispondenti rette verticali le varie solubilità del sale, quali risultano dalla determinazione sperimentale. Congiungendo i punti così determinati con un tratto continuo, si ottiene la *curva della solubilità* del sale considerato.

Nella figura della pag. prec. sono riprodotte due curve di solubilità di andamento molto diverso: quella del *solfato di sodio* e quella del *solfato di potassio.*

Dalla prima si rileva che la solubilità del solfato di sodio, quando la temperatura cresce al di sopra di 0°, *cresce* con notevole rapidità e raggiunge un *massimo* (di 51 circa) corrispondentemente alla temperatura di 28°, superata la quale, torna a diminuire, ma assai lentamente.

Invece la solubilità del solfato di potassio va crescendo costantemente in modo lento e uniforme; tra 0° e 10° è maggiore di quella del solfato di sodio, a 10° è identica ad essa e, per temperature superiori, se ne mantiene sempre minore.

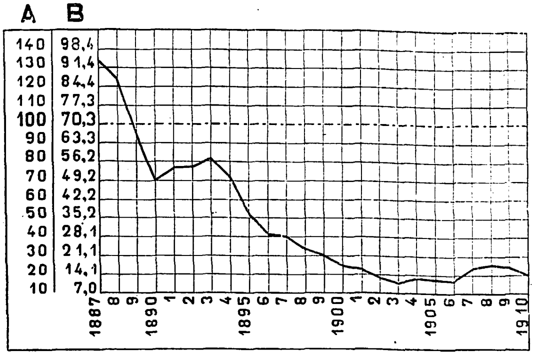
187. Aggiungiamo qui ancora, come esempio di diagramma economico, la grafica del Commercio internazionale



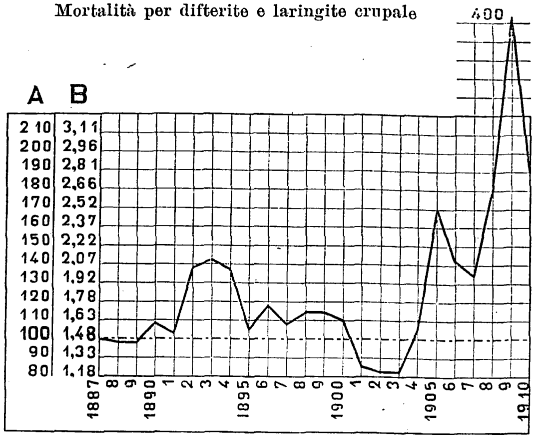
Commercio internaz. dell' Italia (1881-1911)

dell' Italia nel trentennio 1881-1911 (Complesso del Commercio speciale di importazione ed esportazione, esclusi i metalli preziosi), dalla quale appare il notevole progresso dell' attività commerciale del nostro Paese.

Ed infine riproduciamo, i diagrammi della mortalità in Italia dal 1887 al 1910 da una parte per *Difterite e laringite crupale,* dall' altra per *Alcoolismo cronico.* Il primo diagramma illustra i felici risultati delle misure profilattiche contro un morbo, un tempo implacabile; mentre il secondo



Mortalità per difterite e laringite crupale



Mortalità per alcoolismo cronico

documenta l'aggravarsi impressionante di un vero pericolo sociale (1).

(1) I tre ultimi diagrammi sono tolti dall'« *Annuario statistico italiano*; seconda serie, vol. II, 1912 ». La grafica del Commercio internazionale è tracciata prendendo come 100 il valore medio annuo effettivo constatato nel quinquennio iniziale 1881-1885, il quale è stato di *milioni di lire* 2412 e rappresentando successivamente con l'unità della scala verticale il decimo di codesto valor medio, cioè, in cifra tonda, milioni di lire 241. Il massimo corrispondente al 1911 è di milioni 5593. Le altre due grafiche sono tracciate prendendo come base 100, per ciascuna delle due cause indicate, la media nel quinquennio 1889-1891 della percentuale annua dei morti su 100 000 abitanti. Nella colonna *A* sono segnati i cosidetti *numeri indici*, cioè la graduazione della scala, partendo dalla base suindicata; e nella colonna *B*, per ciascun numero indice, è segnata la corrispondente precentuale su ogni 100 000 abitanti.

Funzioni

188. In ognuno dei *fenomeni*, che dianzi rappresentammo graficamente mediante diagrammi, comparivano due grandezze, suscettibili ciascuna di assumere diversi valori: *tempo* e *temperatura*, *temperatura* e *solubilità*, ecc.; e codeste due grandezze apparivano fra loro collegate in modo, che ad ogni valore assunto dall'una *corrispondeva* un determinato valore dell'altra.

In modo più generale si abbia una qualsiasi grandezza x *variabile*, cioè suscettibile di assumere diversi valori; e supponiamo che ad ogni variazione della x corrisponda una certa variazione di un'altra grandezza y, per modo che ad ogni valore assunto dalla x corrisponda un determinato valore per la y. Si dirà in tal caso che la y è *funzione* della x.

Così si dirà che la temperatura, in un determinato luogo, è funzione del tempo; la solubilità di un certo sale è funzione della temperatura, ecc.

189. Tutte le funzioni da noi considerate ai nn. 182-186 si possono dire funzioni *fisiche* od *empiriche*, in quanto sono definite in base a esperienze fisiche e a misurazioni concrete, mediante le quali determiniamo sperimentalmente i valori corrispondenti delle due variabili.

Ma si può anche definire una funzione in modo *algebrico* o *analitico*, fissando quali operazioni di calcolo si debbano eseguire sopra i singoli valori della variabile x per ottenere i corrispondenti valori della y.

Così per esempio l'equazione

$$y = 3x - 2$$

definisce la y come *funzione di* x *razionale intera di 1° grado*; la

$$y = 4x^2 - 5x + 7$$

è una *funzione razionale intera di 2° grado*; la

$$y = \frac{2}{x}$$

è una *funzione razionale fratta*, e così via.

Funzioni siffatte si diranno *funzioni matematiche*. E, se si ripensa ciò che si è detto ai nn. 183-186 sulla rappresentazione geometrica delle funzioni empiriche, appare sin d'ora manifesto il fatto (sul quale insisteremo più innanzi) che anche le funzioni matematiche sono rappresentabili graficamente, p. es., su carta quadrettata, mediante *diagrammi*.

Ora si può dire che nello studio dei fenomeni naturali si mira sempre a ricondurre le funzioni empiriche a funzioni matematiche. Se, dopo avere ottenuto la rappresentazione geometrica di un fenomeno per mezzo di un diagramma, si riesce a scoprire una funzione matematica la quale ammetta il medesimo diagramma, allora si dice che codesta funzione matematica è equivalente alla funzione empirica anzidetta ed esprime, in forma algebrica o analitica, la *legge* del fenomeno considerato.

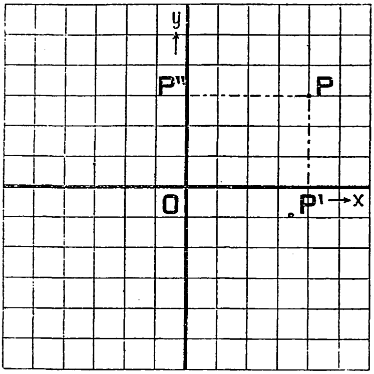
A questo proposito notiamo che il diagramma ottenuto come rappresentazione geometrica di una funzione empirica ci è sempre dato soltanto in via approssimata; e quindi la funzione matematica che esprime una *legge* naturale non può essere definita che per approssimazione.

Anzi se il diagramma del fenomeno è costruito in base ad esperienze ripetute a determinati intervalli, la stessa funzione empirica non risulta definita se non per un gruppo discreto di valori della variabile; e del diagramma non si possiede che un numero finito di punti. Questi tuttavia, se le determinazioni sperimentali sono state abbastanza frequenti, bastano a darci un'idea dell'andamento del fenomeno e se, come nel caso delle temperature o delle solubilità (nn. 183-185), si congiungono a due a due con un tratto continuo, permettono di definire una curva che rappresenta approssimativamente la dipendenza fisica, di cui vogliamo ricercare la legge.

Coordinate cartesiane nel piano

190. In quest'ultima parte del nostro corso dobbiamo studiare talune tra le più semplici funzioni matematiche e le rispettive grafiche. A questo scopo converrà premettere alcune definizioni e osservazioni circa il modo, già usato ai nn. 183-186, di rappresentare coi punti di un piano le coppie di valori corrispondenti di una variabile x e di una sua funzione y.

Preso dunque un foglio di carta quadrettata, fissiamo, segnandole con tratti marcati, una retta orizzontale ed una verticale, che chiameremo rispettivamente *asse* x e *asse* y, e stabiliamo su ciascuno di questi un sistema di ascisse (n. 181), prendendo su entrambi come origine il punto O, in cui si segano i due assi, e come unità il lato del quadretto, e fissando su ciascun asse un senso positivo, p. es. quello indicato in figura dalle due freccie.



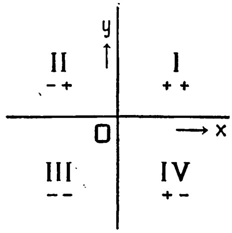
Allora, preso un punto P all'incrocio di due rette della quadrettatura e chiamati P', P'' i punti in cui codeste due rette segano rispettivamente l'asse x e l'asse y, diremo *coordinate* del punto P le ascisse che spettano a P', P'' sui rispettivi assi, cioè le misure dei segmenti OP', OP'' (nella figura esse sono rispettivamente 4 e 3).

Più precisamente, per distinguere codeste due coordinate, si riserba il nome di *ascissa* a quella contata sull'asse x, mentre si dice *ordinata* quella contata sull'asse y.

Dal rettangolo $OP'PP''$ rileviamo che *l'ascissa e l'ordinata del punto* P *sono uguali rispettivamente alle distanze* P''P, P'P, *cioè alle distanze del punto dagli assi* x e y, *contate dagli assi verso il punto.*

Nello stesso modo si definiscono le coordinate di un qualsiasi punto, anche non situato all'incrocio di due rette della quadrettatura. La sola differenza sta in ciò che, mentre i vertici della quadrettatura hanno entrambe le coordinate intere, tutti gli altri punti hanno almeno una delle due coordinate frazionaria o irrazionale.

191. Tenuto conto del senso fissato come positivo su ciascun asse, vediamo che il punto P della fig. del n. prec. ha entrambe le coordinate positive: e lo stesso vale per tutti i punti dell'angolo retto limitato dai due semiassi positivi, o, come noi diremo, del « primo angolo retto degli assi ». Nel secondo angolo retto, cioè in quello limitato dal semiasse y positivo e dal semiasse x negativo, l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva. Così nel terzo e quarto angolo degli assi abbiamo manifestamente per l'ascissa e l'ordinata le combinazioni di segno indicate nell' unita figura schematica.



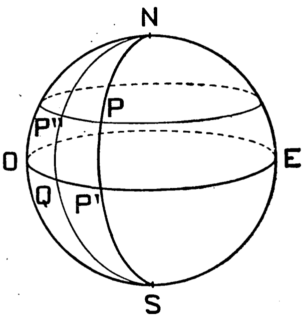
192. Tutti i punti dell'asse x hanno l'ordinata nulla, mentre quelli dell'asse y hanno nulla l'ascissa. Così l'origine O ha nulle entrambe le coordinate.

Tutti i punti di una stessa retta orizzontale hanno la medesima ordinata, la quale è 1, 2, 3,.... oppure — 1, — 2, — 3,...., secondo che si tratta della prima, seconda, terza,.... orizzontale della quadrettatura al di sopra oppure al disotto dell'asse x; e analogamente, su di una stessa verticale l'ascissa è la medesima per tutti i punti e questa ascissa sulle successive verticali della quadrettatura a partire dall'asse y (escluso) verso destra o verso sinistra è rispettivamente 1, 2, 3,.... o — 1, — 2, — 3,.....

193. Abbiamo visto al n. 189 che, fissati sul foglio quadrettato gli assi, ogni punto ha una determinata ascissa e una determinata ordinata. Viceversa, presi ad arbitrio due numeri, dotati di segno x_1 e y_1, il primo come ascissa, il secondo come ordinata, resta individuato nel piano un punto.

Presi invero sull'asse x il punto P' di ascissa x_1 e sull'asse y il punto P'' di ordinata y_1 (fig. al n. 189), è chiaro che il punto P, in cui si segano la verticale passante per P' e la orizzontale passante per P'', ha l'ascissa x_1 e l'ordinata y_1.

194. Le coordinate definite al n. 189 diconsi cartesiane dal nome di Renato Descartes o Cartesio, che nella sua *Géométrie* del 1637 pose per primo a base di un trattato geometrico l'uso di siffatte coordinate, il cui concetto si era venuto prima elaborando traverso le ricerche di molti Geometri anteriori.



Qui notiamo l'analogia che corre tra le coordinate cartesiane nel piano e le *coordinate geografiche* (*longitudine* e *latitudine*) che si usano per determinare la posizione di un punto sul globo terrestre (che si riguarda, in una prima approssimazione, come sferico). Come linee di riferimento, analoghe agli *assi*, si fissano l'*equatore* OE e il *meridiano geografico* NQS (semicircolo massimo limitato ai poli) che passa per un determinato osservatorio (Roma o Parigi o Greenwich ecc.). Preso sul globo un punto P qualsiasi, se il meridiano NPS di P sega l'equatore in P' e il parallelo di P

(circolo minore passante per P, parallelo all' equatore) sega il meridiano NQS in P'', la *longitudine* e la *latitudine* di P sono date dalle misure in gradi degli archi QP' e QP'' rispettivamente.

Rappresentazione grafica delle funzioni di 1° grado

195. Se noi consideriamo tutti i rettangoli che hanno una data dimensione a, l'area rispettiva y dipende dalla seconda dimensione o, come noi oramai diciamo, è funzione di essa. Indicando codesta seconda dimensione con x abbiamo precisamente (n. 28)

$$y = ax.$$

Analogamente l'area y della superficie totale di un cilindro di dato raggio r è funzione dell' altezza x e si ha precisamente (n. 147)

$$y = 2\pi r(x + r).$$

Le due funzioni, così definite geometricamente sono entrambe, dal punto di vista algebrico o analitico, funzioni razionali intere di primo grado. Funzioni di questo tipo si incontrano, come noi stessi vedremo ancora in seguito, in moltissime questioni, geometriche, fisiche, ecc. Perciò noi qui ci occuperemo di esse e della loro rappresentazione geometrica.

La più generale *funzione* (*razionale intera*) *di primo grado* è della forma

$$y = ax + b, \tag{1}$$

dove a e b designano due numeri noti quali si vogliano.

Noi qui ci proponiamo di trovare la grafica di codesta funzione. Perciò ricordiamo in modo generale che per rappresentare graficamente una data funzione y di x, si fissano su di un foglio di carta quadrettata gli *assi* (col loro senso positivo e la unità di misura) e poi considerato per ciascun valore di cui è suscettibile la variabile x il corrispondente valore di y, si cerca nel piano il luogo dei punti, che hanno per ascissa e per ordinata rispettivamente le coppie di valori corrispondenti della x e della y dianzi considerati.

Ciò premesso, per giungere alla determinazione della grafica della funzione generale di 1° grado (1), consideriamo dapprima qualche caso particolare e cominciamo dal più semplice possibile, cioè dalla

$$y = x. \tag{2}$$

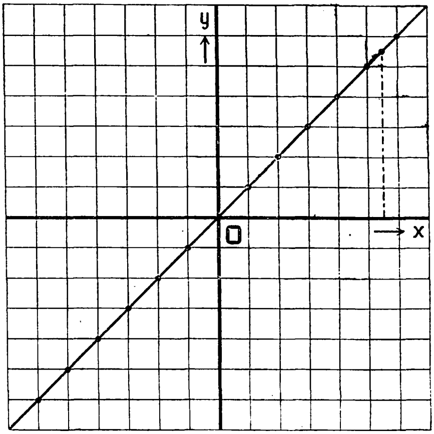
Fissati al solito sul foglio quadrettato i due assi x e y e preso il lato del quadretto come unità, risulta senz'altro dalla (1) che la grafica corrispondente passa pei punti di coordinate

$$0;0 \quad 1;1 \quad 2;2 \quad 3;3....$$

e

$$-1;-1 \quad -2;-2 \quad -3;-3....;$$

i quali si trovano tutti sulla retta bisettrice del primo e del terzo angolo retto degli assi. Ed è manifesto che ogni punto di codesta retta, anche se non coincide con un vertice della quadrettatura, essendo equidistante dai due assi e giacendo nel primo o nel terzo angolo degli assi, ha le due coordinate identiche in valore [1] e segno (n. 190) ed è perciò un punto della grafica della (2).



D'altra parte ogni punto, che non giaccia su codesta bisettrice avrà manifestamente l'ordinata diversa dall'ascissa (almeno nel segno); cosicchè resta dimostrato che *la grafica della*

$$y = x$$

è precisamente la bisettrice del primo e terzo angolo degli assi.

196. Prendiamo in secondo luogo la funzione

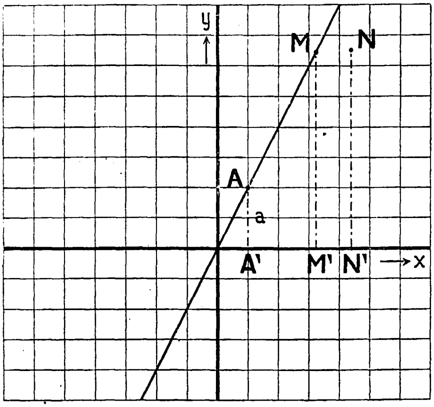
$$y = ax, \tag{3}$$

dove a designa un numero dato, che noi, per fissare le idee, supporremo dapprima positivo.

Anche questa funzione per $x = 0$ si annulla, cosicchè la sua grafica passerà per l'origine; e poichè per $x = 1$ risulta $y = a$, essa passerà anche pel punto A di ascissa $OA' = 1$ e

(1) *Geometria:* n. 125. — *Il luogo geometrico dei punti di un angolo equidistanti dai lati è la semiretta bisettrice dell'angolo.*

di ordinata $A'A = a$ (nella fig. si è preso $a = 2$), il quale per l'ipotesi $a > 0$ giace nel primo angolo retto.



Ora è facile dimostrare che la grafica della (3) è precisamente la retta passante per l'origine O e pel punto A.

Invero abbiamo anzitutto che se M è un altro punto qualsiasi della OA (il quale cadrà necessariamente nel primo o nel terzo angolo retto) e se abbassiamo da M la perpendicolare MM' sull'asse x, il triangolo $OM'M$ risulta simile ad $OA'A$ [1], talchè abbiamo (in valore e segno)

$$\frac{M'M}{OM'} = \frac{A'A}{OA'}$$

ossia, avendosi $OA' = 1$, $A'A = a$

$$\frac{M'M}{OM'} = a, \quad M'M = a \cdot OM';$$

e, poichè OM', $M'M$ sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di M, si conclude che M è precisamente un punto della grafica della (2).

D'altra parte per un qualsiasi punto N che non giaccia sulla retta OA il rapporto

$$\frac{N'N}{ON'}$$

della rispettiva ordinata all'ascissa è certamente diverso da a, cosicchè abbiamo veramente che *la grafica della funzione*

$$y = ax$$

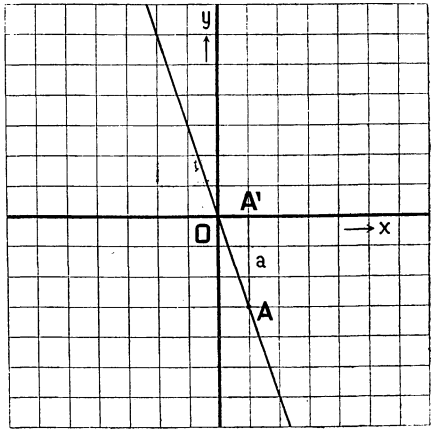
è la retta passante per l'origine e per il punto di ascissa 1 *e di ordinata* a.

(1) *Geometria*: n. 457. — *Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono proporzionali (essendo omologhi i lati opposti ad angoli uguali).*

197. Codesto risultato vale ugualmente nel caso in cui a sia negativo; soltanto allora la grafica della (2), dovendo passare pel punto 1, a di ordinata negativa, e perciò giacente al di sotto dell'asse x, si troverà nel secondo e quarto angolo retto degli assi. Così per esempio la

$$y = -x$$

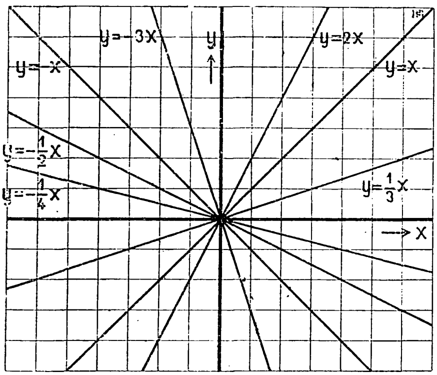
è rappresentata appunto dalla bisettrice del secondo e quarto angolo. (Nell'annessa fig. si ha la grafica della $y = -3x$).



198. Notiamo che in ogni caso al crescere o al diminuire del valore assoluto di a, cresce o diminuisce la distanza $A'A$ del punto A dall'asse x, cosicchè cresce o diminuisce simultaneamente l'angolo che la retta OA forma col semiasse positivo della x.

Poichè dal valore di a dipende l'inclinazione della retta OA sull'asse x, codesto numero dicesi *coefficiente angolare* o *di direzione* della retta considerata.

Nella unita figura abbiamo disegnate varie rette passanti per l'origine, indicando accanto a ciascuna la rispettiva funzione.



È ben chiaro che per tracciare la grafica di una funzione

$$y = ax$$

basta segnarne, oltre l'origine O, un altro punto qualsiasi, anche diverso dal punto A di ascissa 1 e ordinata a; e ciò è senz'altro conveniente quando a sia dato sotto forma di frazione. P. es. la grafica della funzione

$$y = \frac{3}{4}x,$$

che per $x=4$ assume il valore $y=3$, è data dalla retta che congiunge l'origine col punto di ascissa 4 e ordinata 3.

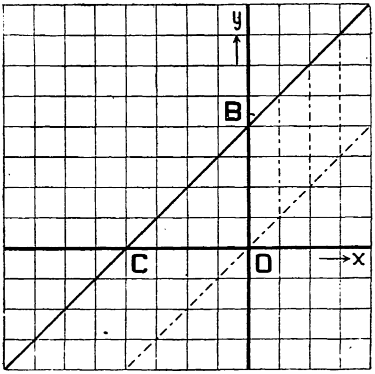
199. Dopo ciò possiamo passare alle funzioni di primo grado binomie e considereremo anzitutto un caso numerico:

$$y = x + 4. \tag{4}$$

Togliendo il termine noto, otteniamo la funzione

$$y = x, \tag{2}$$

che è rappresentata graficamente dalla bisettrice del primo e terzo angolo retto (n. 194); cosicchè, per avere la grafica della nuova funzione (4) basta aumentare di 4 la ordinata di ciascun punto della bisettrice dianzi accennata, il che equivale manifestamente a trasportare codesta bisettrice, parallelamente a se stessa, di una lunghezza 4, nel senso dell'asse y positivo. Se ne conclude che la grafica della funzione



$$y = x + 4$$

è una retta parallela alla grafica della funzione accorciata (n. 135)

$$y = x,$$

e passa precisamente pel punto dell'asse y di ordinata 4.

Passa invece pel punto dell'asse y di ordinata -4 ed è pur sempre parallela alla retta considerata dianzi la grafica della

$$y = x - 4.$$

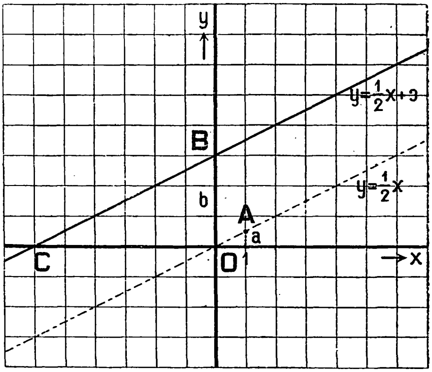
200. Nello stesso modo si costruisce la grafica della funzione di primo grado generale

$$y = ax + b. \tag{1}$$

Considerata la retta r, passante per l'origine, che rappresenta la funzione monomia (n. 196)

$$y = ax,$$

si rileva dalla espressione della funzione (1) che per ottenerne la grafica basta aggiungere (algebricamente) alla ordinata di ciascun punto della r la lunghezza fissa (positiva o negativa) b, il che equivale a far subire alla retta r una traslazione di ampiezza b, nel senso dell'asse y positivo o negativo a seconda del segno di b (nella fig. abbiamo $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$).



Concludiamo quindi, in base a quanto si è detto nei nn. prec., che *ogni funzione di primo grado ammette come grafica una retta.*

201. Poichè la grafica della

$$y = ax + b \tag{4}$$

è parallela a quella della

$$y = ax,$$

il suo angolo con l'asse x dipende soltanto dal valore del coefficiente a (n. 197), il quale dicesi ancora *coefficiente angolare* o *di direzione* della retta.

Risulta di qui che *due funzioni di 1° grado aventi uguali i coefficienti della variabile sono rappresentate da due rette parallele.*

202. Il coefficiente a della variabile x in una funzione di 1° grado

$$y = ax + b$$

(coefficiente angolare della rispettiva grafica) gode di un'altra notevole proprietà. Dato alla x un valore qualsiasi x_0, la y assumerà corrispondentemente il valore y_0 dato da

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Se accresciamo x_0 di 1, la y assumerà corrispondentemente un nuovo valore y_1 dato da

$$y_1 = a(x_0 + 1) + b$$

che si può anche scrivere

$$y_1 = ax_0 + b + a,$$

ossia

$$y_1 = y_0 + a;$$

cioè *tutte le volte che si fa crescere di* 1 *la* x, *la* y *aumenta* (algebricamente) di a. Geometricamente abbiamo che se un punto si sposta sulla retta che rappresenta la funzione (1) e l'ascissa ne aumenta di 1, la ordinata cresce (algebricamente) di a.

203. Risulta dal n. 199 che il termine noto b della

$$(1) \qquad y = ax + b$$

dà l'ordinata del punto B, in cui la grafica corrispondente interseca l'asse y (vedi la fig. del n. 199). Il numero b dicesi perciò *ordinata all'origine* della retta considerata.

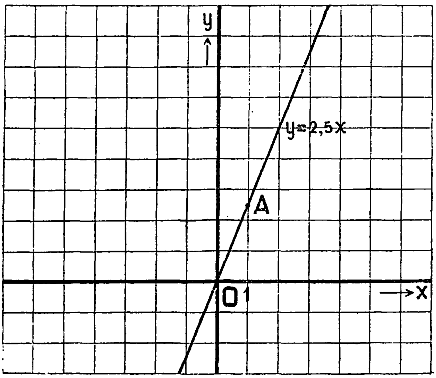
Se si vuole, analogamente, l'ascissa del punto C in cui la retta interseca l'asse x, basta notare che per siffatto valore di x la corrispondente ordinata, cioè il valore corrispondente della funzione y, deve essere nullo, cosicchè si è condotti all'equazione di 1° grado

$$ax + b = 0,$$

risolvendo la quale si trova

$$OC = -\frac{b}{a}.$$

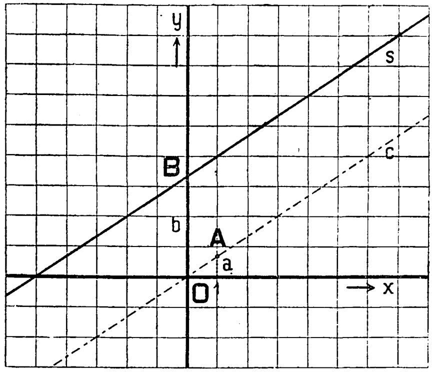
204. Il risultato del n. 199 si inverte; cioè *ogni retta del piano* (che non sia parallela ad un asse) *si può considerare come la grafica di una determinata funzione di 1° grado.*



Presa anzitutto una qualsiasi retta passante per l'origine (e, ben inteso, diversa dagli assi) se ne consideri il punto A di ascissa 1; se a è la sua ordinata (nella fig. si trova $a = 2{,}5$) la retta data è la grafica della funzione

$$y = ax.$$

Se poi si ha una retta s non passante per l'origine (e non parallela ad alcun asse) se ne consideri anzitutto la parallela c, passante per l'origine, e, determinatone il coefficiente angolare a $\left(\text{nella fig. è } a = \frac{2}{3}\right)$, si misuri il segmento OB che la s taglia sull'asse y.

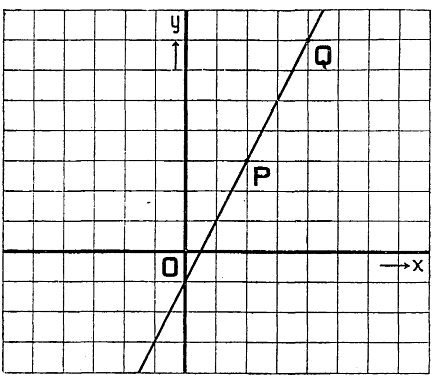


Se è $OB = b$ $\left(\text{nella fig. abbiamo } b = \frac{10}{3}\right)$ la s è la grafica della funzione

$$y = ax + b.$$

205. Risulta senz'altro da quanto si è detto or ora che *due rette parallele hanno il medesimo coefficiente angolare* (cfr. il n. 200).

206. Per trovare la funzione di primo grado che ammette come grafica una data retta si può procedere in un modo diverso da quello del n. 203. Presi sulla retta data due punti P e Q e misurate le rispettive coordinate, siamo condotti al problema di *determinare la funzione di primo grado, la cui grafica passa per due punti di cui si conoscono le coordinate.*



Il modo in cui si risolve il problema sarà sufficientemente chiarito dalla trattazione di un caso numerico concreto. Perciò supponiamo che i punti P e Q abbiano per coordinate (vedi la fig.) 2 e 3 il primo, 4 e 7 il secondo. Si tratta di determinare i coefficienti a e b della funzione

$$y = ax + b$$

in modo che essa per $x = 2$ assuma il valore 3 e per $x = 4$ assuma il valore 7.

Otteniamo così per le incognite a e b il sistema di due equazioni di primo grado

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 2 + b \\ 7 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 7 \,. \end{cases}$$

Codesto sistema si risolve in base a principi ben noti (1). Anzitutto, sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda otteniamo

$$2a = 4$$

onde risulta $a = 2$; e allora dalla prima delle due equazioni si ricava:

$$b = 3 - 2a = -1,$$

cosicchè la funzione cercata sarà

$$y = 2x - 1 \,.$$

Moti uniformi

207. A funzioni di primo grado e, quindi, a grafiche rettilinee danno luogo i *moti uniformi.*

Come si è visto in Fisica, si dice che un punto M si muove, sulla sua traiettoria (che può essere rettilinea, circolare, ecc.) di *moto uniforme*, se gli spazi che il punto percorre sono sempre proporzionali agli intervalli di tempo che esso impiega a percorrerli. Ciò vuol dire che se indichiamo con s lo spazio percorso da M, (misurato, sulla traiettoria, p. es. in centimetri, a partire da un certo punto, *origine degli spazi*) e con t il tempo (misurato in secondi a partire da un certo determinato istante iniziale, *origine dei tempi*) e se sappiamo che all'istante t_0'' il punto M si trovava alla distanza s_0 dall'origine degli spazi, lo spazio $s - s_0$ percorso nell'intervallo di tempo fra t_0'' e t'' dovrà avere all'intervallo stesso $t - t_0$ un rapporto fisso, cioè dovrà essere

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = v ,$$

(1) PINCHERLE: *Lezioni di Algebra elementare:* Cap. IX, e in particolare nn. 230-238.

dove v indica un certo determinato numero. Codesto valore fisso del rapporto suindicato dicesi *velocità* del moto uniforme considerato.

La precedente relazione si può anche scrivere

$$s - s_0 = v(t - t)_0$$

od anche

(5) $$s = vt + s_0 - vt_0;$$

talchè risulta che *nel moto uniforme lo spazio è una funzione di 1° grado del tempo.*

Perciò se rappresentiamo codesta funzione su di un foglio di carta quadrettata (o piano cartesiano) contando i tempi sull'asse delle ascisse e gli spazi su quello delle ordinate, otterremo come *grafica del moto uniforme* considerato, la retta avente come coefficiente angolare la velocità v e per ordinata all'origine il numero $s_0 - vt_0$. Inoltre, come già si sa per dato e del resto si verifica direttamente, la funzione (5) per $t = t_0$ assume il valore s_0, cosicchè la retta suindicata passerà pel punto di coordinate t_0, s_0.

Risulta poi dall'osservazione del n. 200 che codesta retta sarà più o meno inclinata sull'asse x positivo, secondo che sarà maggiore o minore la velocità v del moto uniforme corrispondente; e, in base al n. 201, ritroviamo il risultato ben noto che la velocità nel moto uniforme è data dallo stesso numero che misura lo spazio percorso dal mobile nella unità di tempo.

208. La retta dianzi ottenuta, al pari della stessa funzione (5), rappresenta il moto uniforme senza limiti di tempo, cioè come se esso continuasse da tempi oramai infinitamente lontani e non fosse per arrestarsi mai.

Naturalmente i *tempi negativi* sono quelli anteriori all'istante, da cui convenimmo di misurare i tempi, e gli *spazi negativi* corrispondono alle posizioni assunte dal mobile prima di raggiungere sulla sua traiettoria il punto che assumemmo come origine degli spazi. Così l'ordinata all'origine $s_0 - vt_0$, che è il valore assunto dalla (5) per $t = 0$, indica la distanza (positiva o negativa) a cui si è trovato il mobile, sulla traiettoria, dall'origine degli spazi nell'istante che abbiamo preso come origine dei tempi.

Così se si convenisse di misurare gli spazi precisamente da quel punto, in cui si è trovato il mobile nell'istante $t = 0$, potremmo supporre $s_0 = t_0 = 0$, talchè la (5) si ridurrebbe a

$$s = vt$$

e sarebbe rappresentata semplicemente dalla retta passante per l'origine, di coefficiente angolare v (n. 195).

209. In generale, quando si considera il moto uniforme di un punto M, si assume sulla traiettoria come positivo il senso stesso in cui avviene il moto, per modo che al crescere (in senso algebrico) della variabile « tempo » t, cresce del pari la variabile « spazio » s e, di conseguenza, la velocità v risulta positiva. In tal caso la grafica sarà una retta saliente, cioè tale che i suoi punti di ascissa crescente hanno pur crescente (in senso algebrico) l'ordinata.

Ma talvolta, specialmente se si considerano su di una stessa traiettoria o su traiettorie parallele (come su di una linea ferroviaria a doppio binario) più punti che non si muovono tutti nello stesso senso, si è condotti ad assumere per qualche moto come positivo sulla traiettoria quello opposto al senso del moto stesso, e allora la velocità risulta negativa e la grafica del moto è una retta discendente, cioè tale che i suoi punti di ascissa crescente hanno le ordinate decrescenti.

Orari grafici

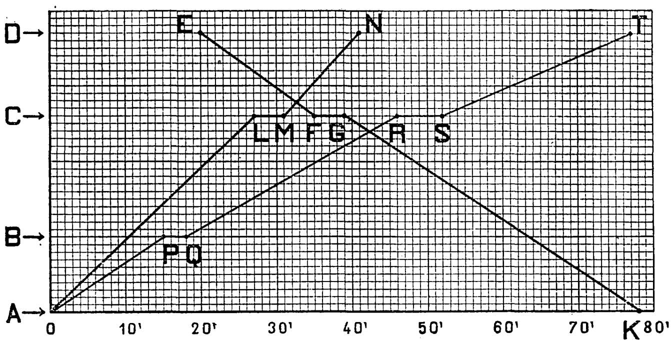
210. Una gran parte dei movimenti che si possono osservare in natura e di quelli che l'uomo produce meccanicamente si possono riguardare approssimatamente uniformi o, quanto meno, si possono immaginare decomposti in varie fasi, in ciascuna delle quali il moto appare sensibilmente uniforme. Così nella rappresentazione dei moti le grafiche rettilinee trovano numerose applicazioni.

Fra queste è notevole la costruzione dei cosidetti *Orari grafici* delle Ferrovie, i quali sono generalmente usati dal personale viaggiante e dagli Ingegneri, e son pure in vendita al pubblico presso le principali Stazioni.

Volendo rappresentare la corsa di un treno sopra una determinata linea ferroviaria, fissiamo al solito due assi e contiamo sull'asse delle ascisse i tempi, su quello delle ordinate le distanze. Poichè si considerano soltanto tempi positivi e le distanze si computeranno a partire da una stazione capo-linea, basterà considerare l'angolo dei due semiassi positivi; e, per fissare le idee ci serviremo di *carta millimetrica* (cioè quadrettata con rette distanti a due a due di 1 mm.) prendendo come unità appunto il mm. e rappresentando con esso il minuto sull'asse dei tempi, il chilometro su quello delle distanze.

La linea ferroviaria, che noi consideriamo, congiunga una stazione A, che prenderemo come origine delle distanze, con una stazione D distante 37 Km., e abbia due stazioni intermedie B e C, rispettivamente a 10 Km. e a 26 Km. da A.

Contiamo i tempi a partire dalla mezzanotte e suppo-



niamo che appunto alla mezzanotte precisa parta da A un treno diretto, il quale si fermi soltanto a C per 4', dai 27' ai 31', e giunga in D ai 41'.

Il moto di un treno fra due fermate consecutive, ove si prescinda dal breve tempo impiegato sul principio per raggiungere la velocità normale e dal rallentamento all'arrivo, si può riguardare come sensibilmente uniforme, talchè si potrà rappresentare mediante un segmento di retta (saliente o discendente); e d'altra parte le fermate alle stazioni intermedie, durante le quali la distanza dalla stazione capo-linea non varia, mentre il tempo si accresce della durata della sosta, saranno rappresentate da tratti orizzontali di lunghezza corrispondente a codesta durata.

Perciò la corsa del diretto suaccennato avrà come grafica la spezzata a tre lati $ALMN$, di cui il lato AL congiungente il punto $t=0$, $s=0$ col punto $t=27$, $s=26$ corrisponde al percorso tra le stazioni A e C, il lato orizzontale LM (lungo mm. 4) rappresenta la fermata in C, e il lato MN, congiungente i punti $t=31$, $s=26$ e $t=41$, $s=37$ indica il percorso tra C e D.

L'altra grafica $APQRST$ rappresenterà la corsa di un altro treno, che si ferma a entrambe le stazioni intermedie B e C ed è più lento del primo, come è messo in evidenza dalla minore inclinazione dei tratti salienti della sua grafica rispetto all'asse dei tempi.

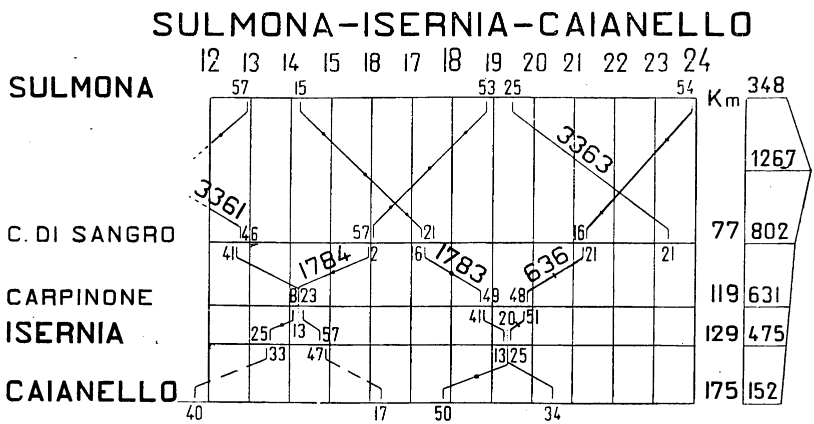
Infine la terza grafica, discendente, rappresenta la corsa di un treno, che corre in senso inverso ai due primi. Esso parte da D 20′ dopo la mezzanotte, arriva in C ai 35′ e ne riparte ai 39′ per giungere alle $1^h 18'$ alla stazione A.

Il punto H, in cui la terza grafica interseca la prima sta ad indicare che i due treni corrispondenti si sono incrociati e precisamente le due coordinate di H ci dicono che codesto incrocio è avvenuto fra 32′ e 33′ dopo la mezzanotte e a circa 27 Km. da A.

Similmente risulta dalla grafica che il terzo treno, appena uscito dalla stazione C ha incrociato il secondo treno.

Siffatti orari grafici permettono di rendersi conto a colpo d'occhio di tutto il movimento di treni di una determinata linea; ed anzi gli Ingegneri quando debbono preparare o modificare un orario, prima ne tracciano graficamente i diagrammi e poi, a norma di questi, fissano in modo preciso le ore delle partenze e degli arrivi dei treni, quali sono registrati nei soliti « Indicatori » usati comunemente dal pubblico.

211. Nella pratica i diagrammi degli « Orari grafici » non sono tracciati precisamente secondo le norme da noi adottate



nella nostra figura schematica del n. prec.; ma vi si introducono talune modificazioni, suggerite da evidenti ragioni di comodità e di economia di spazio.

Così, per esempio, riproduciamo qui dall'Orario grafico ufficiale il diagramma del movimento dei treni viaggiatori sulla linea Sulmona-Caianello tra le 12^h e le 24^h.

Il tratto più marcato corrisponde ad un diretto, quelli con punti corrispondono ad accelerati, quelli semplici ad omnibus.

Qui le distanze chilometriche non sono rappresentate in scala, ma indicate numericamente a destra del diagramma; e accanto è tracciato il profilo altimetrico della strada con la indicazione delle altezze raggiunte (in metri).

Risoluzione grafica di un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite

212. La rappresentazione geometrica delle funzioni di primo grado per mezzo di rette si può utilizzare per risolvere graficamente i sistemi di due equazioni di primo grado a due incognite (1).

Si prenda per esempio, il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y = 1,9 \\ 2x - 35y = -2,8. \end{cases}$$

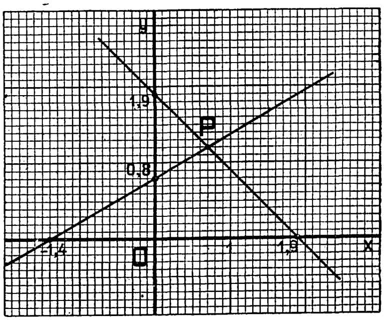
Codesto sistema è *equivalente* (2) (cioè ha le *stesse* soluzioni) di quest'altro

$$(2) \qquad \begin{cases} y = -x + 1,9 \\ y = \frac{4}{7}a - \frac{4}{5} \end{cases}$$

le cui equazioni definiscono certe due funzioni di primo grado. Queste due funzioni sono rappresentate su di un foglio di carta millimetrica (su cui si prenda come unità il cm.), da due rette: la prima dalla congiungente dei due punti di coordinate (n. 203)

$$0;\ 1,9 \quad \text{e} \quad 1,9;\ 0$$

la seconda dalla congiungente dei due punti



$$0;\ 0,8 \quad \text{e} \quad -1,4;\ 0.$$

(1) Cfr. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra elementare:* Cap. IX; § II.
(2) Ibidem: Cap. IX; § I.

E per risolvere il sistema dato, ossia il sistema equivalente (2), basta manifestamente trovare quel valore di x pel quale le due funzioni (2) assumono lo stesso valore; il che geometricamente equivale a cercare le coordinate del punto di intersezione delle due rette che rappresentano le funzioni (2).

Dall' unita figura si rileva che le coordinate di codesta intersezione sono precisamente

$$0{,}7 \quad 1{,}2\,;$$

e, sostituendo direttamente codesti due valori ad x ed y nel dato sistema, si verifica che questa è veramente la sua soluzione.

In questo esempio la rappresentazione grafica fornisce la soluzione esatta del sistema, perchè, data la *scala* del nostro disegno sono valutabili distintamente i *decimi*, i quali bastano alla espressione esatta della soluzione. In ogni caso dalla rappresentazione grafica si desumerà una soluzione approssimata, e il grado di approssimazione dipenderà, volta a volta, dalla *scala* del disegno, nonchè, naturalmente, dalla precisione di questo.

La risoluzione grafica dei sistemi di due equazioni di primo grado a due incognite si presenta particolarmente utile nei problemi relativi a moti uniformi, per esempio per determinare l'istante dell'incontro di due punti che si muovano di moto uniforme e in senso contrario su di una stessa traiettoria, come, in sostanza, già si fece rilevando dagli orari grafici gli incroci dei treni. Si vedano in proposito gli esercizi.

213. La rappresentazione grafica conduce anche, nel modo più naturale, a determinare la condizione perchè un sistema di due equazioni di primo grado tra due incognite ammetta soluzioni.

Il più generale sistema di codesta specie è della forma

$$(3) \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

e per risolverlo graficamente, sotto l'ipotesi che b e b' siano entrambi diversi da zero, basta considerare le coordinate del punto di intersezione delle due rette che rappresentano le due funzioni di primo grado

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}, \end{cases}$$

vale a dire delle due rette di coefficienti angolari $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ e di ordinate all'origine $\frac{c}{b}$, $\frac{c'}{b'}$, rispettivamente (nn. 201, 203).

Risulta di qui senz'altro che il sistema ammette una soluzione unica e determinata, quando le due rette suindicate non sono parallele, ossia quando hanno disuguali i coefficienti angolari, il che richiede

$$-\frac{a}{b} \gtrless -\frac{a'}{b'},$$

ossia

$$ab' - a'b \gtrless 0.$$

Se invece le due rette sono parallele, ma non coincidenti, il sistema non ammette soluzione; e noi sappiamo che ciò si verifica quando le due rette hanno uguali i coefficienti angolari (n. 205) e disuguali le ordinate all'origine (n. 203), cioè

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} \gtrless \frac{c'}{b'}$$

ossia

$$ab' - a'b = 0, \quad bc' - b'c \gtrless 0.$$

Infine, se, come ulteriore caso particolare, si ha che le due rette coincidono, ogni punto dell'una è comune anche all'altra e le due equazioni del sistema sono fra loro equivalenti, talchè si può dire che il sistema ammette infinite soluzioni. Perchè ciò accada è necessario e sufficiente che sia

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

ossia

$$ab' - a'b = 0, \quad bc' - b'c = 0.$$

Lasciamo all'alunno la facile discussione del caso, escluso dapprincipio, in cui b o b' o entrambi codesti coefficienti siano zero; e notiamo come i risultati, cui siano giunti in questo numero, coincidano esattamente con quelli, che si ottengono discutendo algebricamente il sistema (2) [1].

Rappresentazione grafica delle funzioni di 2° grado

214. In molte questioni geometriche, fisiche, ecc. si è condotti a considerare funzioni razionali intere di 2° grado: noi stessi vedremo di ciò qualche notevole esempio nel seguito, ma già fin d'ora basterà pensare all'area di un quadrato come funzione del lato $[y = x^2]$ o all'area del cerchio come funzione dal raggio $[y = \pi x^2]$ o all'area della superficie totale di un cilindro di data altezza h come funzione del raggio $[y = 2\pi x(h + x)]$ e così via.

Noi qui ci occuperemo in generale delle funzioni razionali intere di 2° grado e della loro rappresentazione grafica mediante diagrammi.

La più generale funzione razionale intera di 2° grado è data da

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove a, b, c sono numeri noti quali si vogliono; ma anche qui, come per le funzioni di 1° grado, converrà considerare anzitutto qualche caso particolare, e cominceremo dal più semplice possibile, cioè dalla

$$y = x^2. \tag{1}$$

Per $x = 0$, codesta funzione si annulla, cosicchè intanto la rispettiva grafica passa per l'origine O. Per qualsiasi altro valore della x, sia esso positivo o negativo, il corrispondente valore della y è sempre positivo, il che vuol dire che la nostra grafica non ha nessun punto di ordinata negativa, cioè non scende mai al disotto dell'asse x.

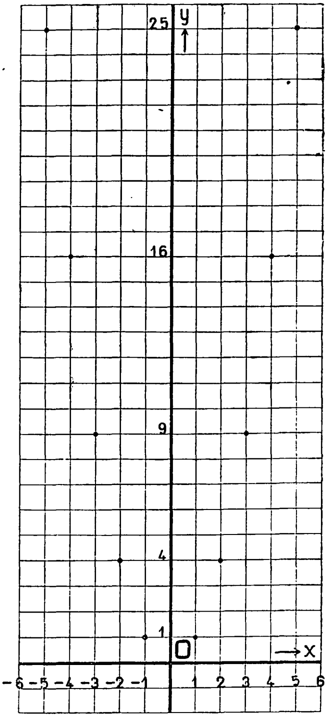
Per avere qualche punto di essa, diamo ad x successivamente i valori interi crescenti 1, 2, 3, 4, 5....; corrispondentemente troviamo per y i valori

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots.$$

i quali crescono anche più rapidamente delle ascisse rispettive, cosicchè la grafica nel primo angolo degli assi si va

(1) Cfr. p. es. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra elementare*: Cap. IX; § II.

allontanando indefinitamente tanto dall'asse x, quanto dall'asse y, ma, per così dire, devia dalla direzione dell'asse orizzontale x verso quella dell'asse verticale y.



Per avere qualche punto della grafica dall'altra parte dell'asse y, diamo ad x successivamente i valori

$$-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \ldots ;$$

si ritrovano così per y ordinatamente gli stessi valori ottenuti dianzi

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \ldots ,$$

e poichè, qualunque sia x, risulta sempre

$$(-x)^2 = x^2,$$

abbiamo in ogni caso che due ascisse uguali in valore assoluto e di segno contrario danno luogo alla medesima ordinata e perciò a due punti situati su di una stessa perpendicolare all'asse y, e ad ugual distanza da parti opposte di esso, cioè a due punti *simmetrici* rispetto all'asse y. In altre parole *la grafica della funzione* (1) *ammette la retta* y *come asse di simmetria.*

Per avere un'idea più precisa dell'andamento di codesta grafica bisogna segnarne altri punti. Così, per esempio, volendo considerare l'intervallo tra $x = 0$ e $x = 1$, diamo ad x successivamente i valori

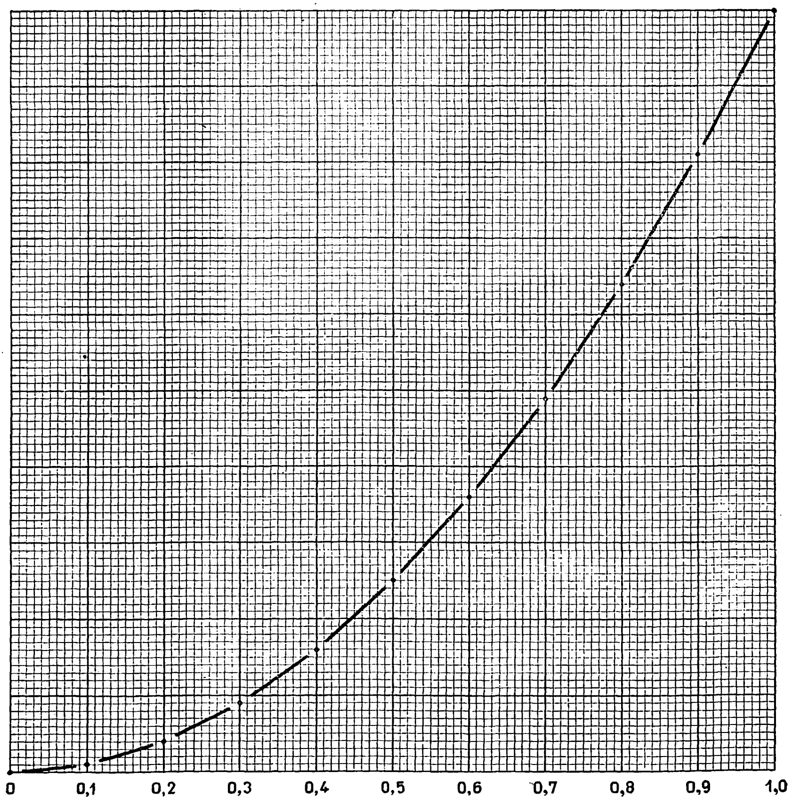
$$0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad \ldots\ldots \quad 0{,}9$$

ai quali corrispondono per y rispettivamente i valori

$$0{,}01 \quad 0{,}04 \quad 0{,}09 \quad \ldots\ldots \quad 0{,}81.$$

Poichè rispetto alla nostra quadrettatura consueta sarebbe impossibile tener conto, anche solo approssimatamente, di centesimi dell'unità, converrà rappresentare il tratto di grafica tra $x=0$ e $x=1$ in una scala maggiore, p. es. su *carta millimetrica*, prendendo come *unità* il *decimetro*. Segnati, allora, come nell'annessa figura, i dieci punti dianzi determinati, basterà congiungerli a due a due con tratti rettilinei per avere un' idea sensibilmente precisa dell'andamento della curva nell'intervallo considerato.

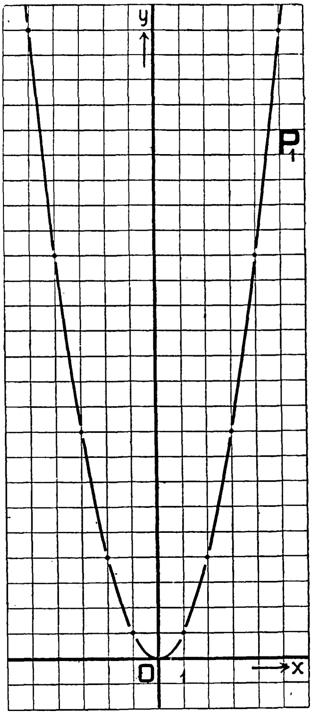
Il quadrato, di 1 dm². di area, dell'annessa figura fornisce l'ingrandimento (nella scala lineare da 1 a 25) del quadretto della figura precedente che ha per vertici opposti l'origine O



e il punto di coordinate 1 ed 1. Immaginando di ridurre l'ultima fig. alla scala della precedente e di ripetere un artificio analogo per gli intervalli da $x=1$ a $x=2$, da $x=2$ a $x=3$ ecc., si trova che la grafica della funzione

$$(1) \qquad y = x^2$$

ha tra $x = -5$ e $x = 5$ la forma indicata dall' unita figura.



Essa, considerata nel piano intero, si prolunga, dall'una e dall'altra parte dell'asse y, indefinitamente, e, come già si notò, è simmetrica rispetto all'asse y.

Siffatta curva dicesi *parabola.*

Essa è intersecata da ogni parallela all'asse x, situata al di sopra di codesto asse, in due punti, la cui distanza diminuisce e diventa minore di ogni segmento assegnabile, se codesta parallela si avvicina indefinitamente all'asse x; finchè quando la parallela giunge a coincidere coll'asse x, le due intersezioni si sovrappongono in O. Perciò si dice che l'asse x è *tangente* alla parabola nel punto O. Questo punto, che è la intersezione della parabola col suo *asse di simmetria,* dicesi *vertice* di essa.

215. Tracciata sul foglio quadrettato la parabola, che rappresenta la funzione

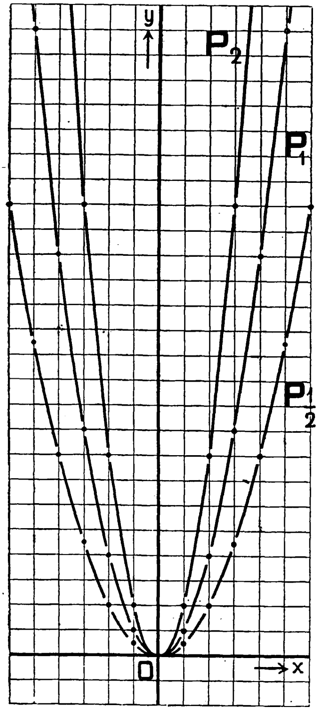
(1) $$y = x^2$$

e che per intenderci designeremo con P_1, è facile dedurne la forma della grafica di un'altra qualsiasi funzione della forma

(2) $$y = ax^2,$$

dove a designa un numero dato diverso da 1.

In ogni caso, poichè per $x = 0$ la (2) si annulla, la grafica rispettiva passerà, qualunque sia a, per l' origine O. Notiamo poi che per avere gli altri punti di codesta grafica, se fosse $a = 2$ basterebbe raddoppiare la ordinata di ogni singolo punto della P_1; come invece, se fosse $a = \frac{1}{2}$, basterebbe ridurre a metà ciascuna di siffatte ordinate.



Così in generale *supposto* a *positivo*, la grafica della (2) si otterrà facendo variare le ordinate dei singoli punti di P_1 nel rapporto $1 : a$, il che conduce manifestamente ad una curva in tutto simile alla P_1, simmetrica al pari di essa rispetto all'asse y e tangente in O all'asse x. Soltanto questa curva sarà interna alla P_1, e più schiacciata di essa verso l'asse y, se è $a > 1$; sarà invece esterna alla P_1 se è $a < 1$, e tanto più allargata verso l'asse x quanto più piccolo sarà il coefficiente a.

In ogni caso, siffatta curva prende il nome di *parabola* di *vertice* O.

È allora facile convincersi che anche quando il coefficiente a è negativo la funzione (2) ha per grafica una parabola. Se p. es. si prende la

$$y = -\frac{1}{2} x^2,$$

è manifesto che, per averne la grafica basta considerare anzitutto la parabola $P_{1/2}$ che rappresenta la

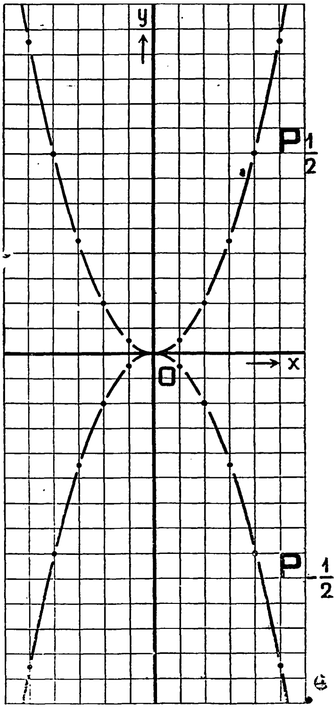
$$x = \frac{1}{2} x^2$$

e poi invertire il segno dell'ordinata di ciascun suo punto, il che equivale a costruire la curva simmetrica della $P_{1/2}$ rispetto all'asse x. Si ha così una parabola identica alla $P_{1/2}$, avente ancora l'asse di simmetria y e il vertice O, ma volgente l'apertura verso il basso (Vedi la fig. alla pag. seg.).

Analoghe osservazioni valgono per ogni altra funzione (2) in cui il coefficiente a sia negativo, cosicchè possiamo oramai concludere, in base alla precedente discussione, che *la funzione di 2° grado*

$$(2) \qquad y = ax^2$$

è sempre rappresentata da una parabola, simmetrica rispetto all'asse y, *avente il vertice nell'origine e volgente l'apertura verso il semiasse* y *positivo o negativo secondo che il coefficiente* a *ha il segno* + o —.



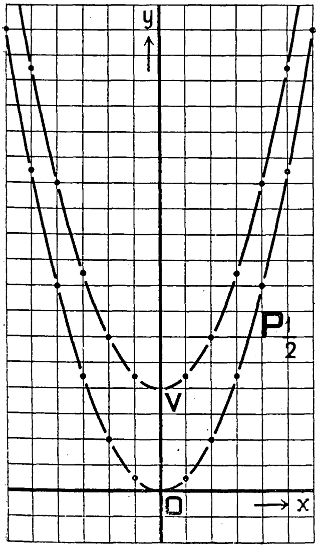
216. Dal precedente risultato è facile dedurre che per ogni qualsiasi funzione di 2° grado, anche non monomia, la grafica è sempre una parabola.

Riferendoci dapprima a casi numerici, consideriamo, per esempio, la

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 4.$$

Da questa espressione stessa risulta che la grafica della nostra funzione si ottiene, aumentando di 4 l'ordinata di ciascun punto della parabola $P_{1/2}$, che rappresenta la funzione accorciata

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$



o, ciò che è lo stesso, facendo subire nel piano alla $P_{1/2}$ una traslazione di ampiezza 4 nella direzione dell'asse y, per modo che il vertice della $P_{1/2}$ si trasporti nel punto V di coordinate 0 e 4 (Vedi l'annessa fig.).

Naturalmente si dovrebbe eseguire sulla $P_{1/2}$ la medesima traslazione in senso inverso, se si volesse la grafica della

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4;$$

e nello stesso modo si vede in generale che *la grafica della funzione*

$$(3) \qquad y = ax^2 + k$$

è una parabola identica a quella che rappresenta la

$$y = ax^2$$

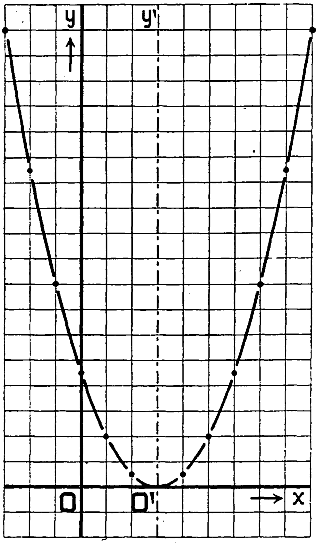
e se ne deduce, trasportando quest' ultima, parallelamente a se stessa, ad avere il vertice nel punto dell'asse y *che ha l' ordinata* k.

217. Consideriamo in secondo luogo la funzione

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2$$

e prendiamo per un momento come asse ausiliare y' delle ordinate la retta perpendicolare all'asse x e passante pel punto O' dell'asse x di ascissa 3.

Se in luogo degli assi x, y, prendiamo gli assi x, y', è manifesto che un qualsiasi punto M del piano avrà rispetto ai nuovi assi la stessa ordinata di prima, mentre la sua nuova ascissa x' sarà uguale alla ascissa primitiva x diminuita di 3



$$x' = x - 3.$$

Allora per rappresentare graficamente la nostra funzione y, cominciamo coll'esprimerla per mezzo della variabile ausiliare x'. Avremo così la funzione

$$y = \frac{1}{2}x'^2,$$

la quale è rappresentata rispetto agli assi x e y' dalla solita parabola $P_{1/2}$, collocata col vertice in O'.

Se allora torniamo agli assi primitivi x, y e riprendiamo la nostra funzione

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2,$$

possiamo dire senz'altro che la rispettiva grafica è identica alla parabola $P_{1/2}$, che rappresenta la

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

e se ne deduce trasportandola parallelamente a se stessa ad avere come vertice il punto dell'asse x di ascissa 3.

Per le stesse ragioni è identica alla $P_{1/2}$ anche la grafica della

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2,$$

ma ha per vertice il punto dell'asse x di ascissa -3.

Così in generale si ha che *la grafica della funzione*

$$y = a(x-h)^2$$

è la stessa parabola che rappresenta la

$$y = ax^2,$$

trasportata parallelamente a se stessa ad avere il vertice nel punto di coordinate 0 *ed* h.

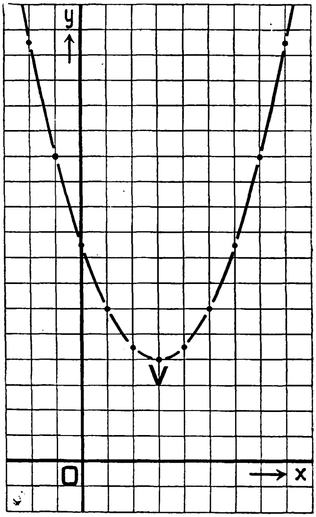
218. Combinando insieme il risultato precedente con quello del n. 216 possiamo enunciare il seguente teorema: *La funzione di* 2° *grado*

$$y = a(x-h)^2 + k \tag{4}$$

è rappresentata dalla parabola che si ottiene da quella che rappresenta la

$$y = ax^2,$$

facendole subire successivamente una traslazione parallela all'asse x, *data in valore e senso da* h, *e una traslazione parallela all'asse* y *data da* k; *o, in altre parole, portandola ad avere come vertice il punto di coordinate* h *e* k.



(In figura abbiamo la grafica della

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4).$$

Si ha così la grafica della più generale funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{5}$$

Invero questa funzione si può scrivere

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$

e quindi ancora completando il quadrato di cui abbiamo tra parentesi i primi due termini (n. 85),

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right] - \frac{b^2}{4a} + c;$$

cosicchè otteniamo infine

$$y = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

e la funzione (5) è ridotta precisamente alla forma (4) ove si ponga

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Perciò *la grafica della* (5) *si ottiene trasportando parallelamente a se stessa la parabola che rappresenta la*

$$y = ax^2$$

ad avere il vertice nel punto di coordinate

$$-\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

L'asse di simmetria della parabola che così si ottiene sarà la retta parallela all'asse y passante pel vertice di cui or ora si sono indicate le coordinate; e la parabola stessa volgerà l'apertura verso l'alto o verso il basso, secondo che a è positivo o negativo.

Risoluzione grafica della equazione di 2° grado

219. Per risolvere graficamente l'equazione di 2° grado

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0$$

basta aver tracciata, una volta per tutte, con molta cura su di un foglio di carta millimetrica la parabola P_1 che rappresenta la funzione di 2° grado (n. 215)

$$y = x^2.$$

Invero, scritta l'equazione data sotto la forma

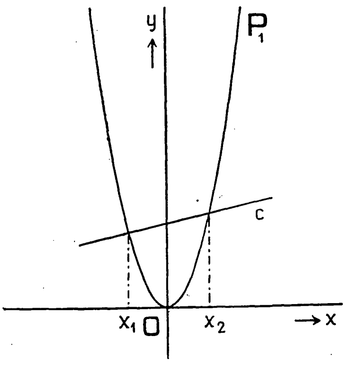
$$x^2 = -px - q,$$

si vede che ogni soluzione di essa fa assumere il medesimo valore alle due funzioni

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -px - q; \end{cases}$$

ed è manifesto che, viceversa, ogni valore di x, che renda uguali codeste due funzioni, soddisfa alla nostra equazione.

Ora codeste due funzioni sono rappresentate rispettivamente dalla parabola P_1 e dalla retta c che ha il coefficiente angolare $-p$ e l'ordinata all'origine $-q$ (nn. 200, 202); e le soluzioni della (1) saranno fornite dalle ascisse delle eventuali intersezioni della retta c con la P_1.



Si potrebbe benissimo dimostrare qui per via geometrica che la retta c interseca la parabola fissa P_1 in due punti o ha con essa un solo punto comune (le è *tangente*) o le è esterna secondo che è (cfr. il n. 85)

$$\frac{p^2}{4} - q > 0 \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q = 0 \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q < 0;$$

ma non ci indugeremo su ciò.

Piuttosto noteremo che il metodo grafico suindicato fornirà le soluzioni della (1) con l'approssimazione di $\frac{1}{10}$ se la P_1 si è descritta sulla carta millimetrica prendendo come unità il cm., con l'approssimazione di $\frac{1}{100}$ se si è preso invece come unità il dm., e così via.

Disuguaglianze di 2° grado

220. La rappresentazione geometrica della funzione di 2° grado per mezzo di una parabola permette di discutere agevolmente *le disuguaglianze di 2° grado*

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$$

cioè di determinare per quali valori di x la funzione

$$y = ax^2 + bx + c$$

sia positiva e per quali sia negativa, e per quali valori di x essa assuma il suo valore *massimo* o *minimo*.

Intanto notiamo che gli eventuali valori di x per cui la y si annulla, cioè le eventuali soluzioni della equazione (n. 86)

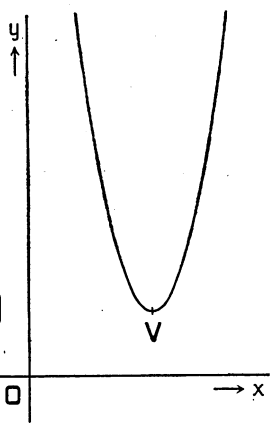
$$ax^2 + bx + c = 0,$$

danno, nella rappresentazione geometrica, le ascisse di altrettanti punti comuni all'asse delle x e alla parabola che rappresenta la y.

Siffatta parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y, volge l'apertura in alto o in basso secondo che a è positivo o negativo ed ha il vertice nel punto di coordinate (n. 218)

$$-\frac{b}{2a} \qquad -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

In base a ciò si caratterizzano subito i casi in cui la parabola non ha punti comuni coll'asse x: bisognerà o che essa abbia il vertice al di sopra dell'asse x e volga l'apertura verso l'alto o che abbia il vertice al di sotto dell'asse x e volga l'apertura verso il basso.



(I)

Il primo caso richiede che sia

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0, \quad a > 0;$$

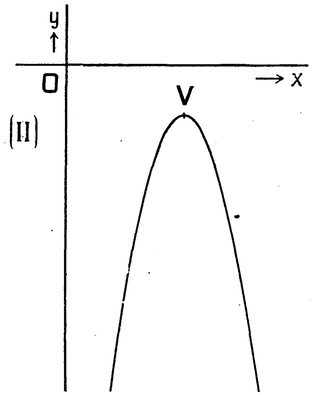
il secondo

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0, \quad a < 0,$$

ossia rispettivamente

(I) $\qquad b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0$

o



(II) $b^2 - 4ac < 0, \quad a < 0.$

Ritroviamo così nuovamente il risultato già noto (n. 86) che la condizione

$$b^2 - 4ac < 0$$

caratterizza le equazioni di 2° grado prive di soluzioni.

Qui possiamo aggiungere, in base all'esame delle figure, che nel caso (I) la funzione è costantemente positiva, ed ha corrispondentemente al vertice, cioè per

$$x = -\frac{b}{2a}$$

il suo valore *minimo*, dato dall'ordinata rispettiva, cioè da

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Nel caso (II) invece la funzione è costantemente negativa e corrispondentemente al vertice raggiunge il suo valore *massimo* (algebricamente).

Possiamo in base a ciò concludere che *la funzione di 2° grado*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

quando il discriminante

$$b^2 - 4ac$$

è negativo, ha per qualsiasi valore il segno del suo coefficiente **a**.

221. Analoghi ai casi or ora considerati sono quelli in cui la parabola ha il vertice sull'asse x, per il che si richiede

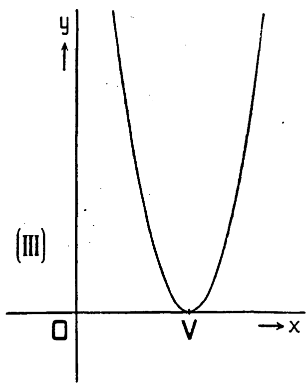
$$b^2 - 4ac = 0.$$

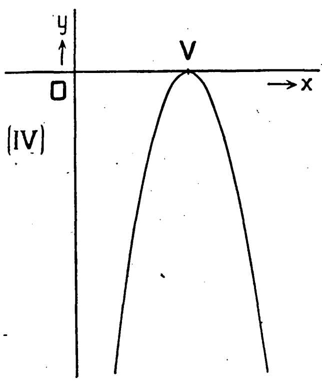
Secondo che sarà

(III) $b^2 - 4ac = 0, \quad a > 0$

o

(IV) $b^2 - 4ac = 0, \quad a < 0,$





la parabola volgerà l'apertura verso l'alto o verso il basso.

Risulta senz'altro dalla figura che in entrambi i casi *la funzione di 2° grado ha per qualsiasi valore di x il segno del suo primo coefficiente* a, *eccezion fatta per il valore*

$$x = -\frac{b}{2a}$$

(ascissa del vertice) *pel quale la funzione si annulla e raggiunge così il suo valore minimo o massimo, secondo che* a *è positivo o negativo.*

Ritroviamo così che quando il discriminante è nullo, l'equazione di 2° grado ammette un'unica soluzione (n. 86). Questa soluzione unica appar qui come prodotta dal sovrapporsi di due soluzioni che si siano indefinitamente avvicinate (cfr. n. 213); perciò essa si riguarda come una *soluzione doppia.*

222. Restano da considerare i due casi, in cui il vertice è al di sopra dell'asse x e la parabola volge la sua apertura verso il basso, oppure, per converso, il vertice è al di sotto dell'asse x e l'apertura volta verso l'alto. Nell'uno e nell'altro caso la parabola intersecherà in due punti l'asse delle x, o, in altre parole, la nostra equazione di 2° grado ammetterà due soluzioni x_1, x_2.

Codesti due casi sono caratterizzati il primo da

$$-\frac{b^2-4ac}{4a} < 0, \quad a > 0;$$

il secondo da

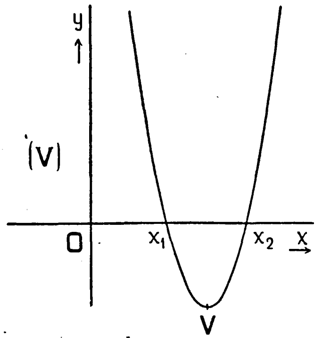
$$-\frac{b^2-4ac}{4a} > 0, \quad a < 0;$$

ossia, rispettivamente, da

(V) $\qquad b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0,$

e

(VI) $\qquad b^2 - 4ac < 0, \quad a < 0.$

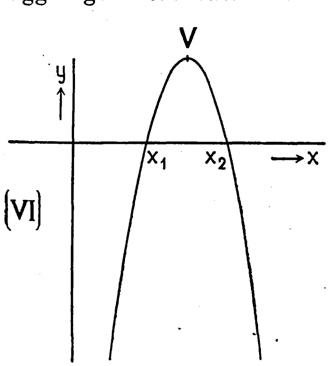


Nel caso (V), come risulta dalla figura, la funzione y è positiva fuori dell'intervallo compreso fra le due soluzioni dell'equazione di 2° grado, negativa entro codesto intervallo, nel cui punto medio (n. 88)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

raggiunge il suo valore *minimo*

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$



Per l'opposto, nel caso (VI) la funzione è negativa fuori dell'intervallo da x_1 a x_2, positiva nell'interno, e raggiunge per

$$x = -\frac{b}{2a}$$

il suo valore *massimo*

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Abbiamo, dunque, che *quando il discriminante è positivo, la funzione di 2° grado si annulla per due valori* x_1 *e* x_2 *della* x; *e, per ogni altro valore di* x, *secondo che questo è esterno o interno all'intervallo da* x_1 *e* x_2, *ha lo stesso segno o segno contrario al coefficiente del suo termine di 2° grado.*

Moto verticale dei gravi

223. Si è visto nella Fisica che un corpo pesante, abbandonato a se stesso a partire dalla posizione di quiete, cade verticalmente, percorrendo spazi, che approssimatamente (prescindendo dalla resistenza dell'aria) si possono riguardare proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli; e precisamente si verifica sperimentalmente che al termine di 1″ dall'inizio della caduta il grave ha percorso m. 4,905.

Perciò se misuriamo il tempo in secondi, a partire dall'istante iniziale della caduta, e lo spazio s in metri a partire dalla posizione di partenza del grave, avremo che lo spazio percorso dopo t'' dal corpo cadente sarà dato, in m., dalla proporzione

$$s : t^2 = 4{,}905 : 1;$$

onde risulta la equazione

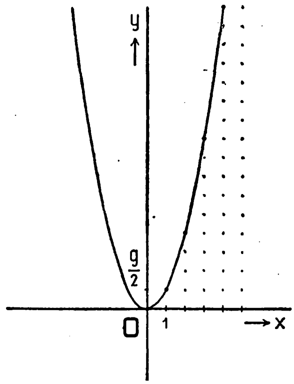
$$s = 4{,}905t^2,$$

la quale, ove si indichi con g il numero 9,810 (cioè la cosiddetta *accelerazione della gravità*), si può scrivere

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \qquad (1)$$

Se rappresentiamo i tempi t sull'asse delle ascisse e gli spazi s su quello delle ordinate, otteniamo come *grafica* di codesto moto di caduta dei gravi una parabola avente il vertice nell'origine, l'asse di simmetria y e l'apertura volta verso l'alto (n. 214).

Se tracciassimo codesta grafica sul foglio, adottando, come si è fatto sin qui, la stessa unità per le ascisse e per le ordinate, otterremmo, in ragione del valore abbastanza grande del coefficiente $\frac{1}{2}g$ (n. 214), una parabola molto schiacciata verso l'asse y e uscente assai presto dai limiti del nostro foglio pel rapido accrescersi delle ordinate. Per ovviare a questo inconveniente, conviene, come spesso si fa nella pratica, ridurre la scala delle ordinate, scegliendo per queste una unità più piccola che per le ascisse; così nell'annessa figura si è rappresentato sull'asse y lo spazio $\frac{1}{2} g$ col medesimo segmento adottato come unità delle ascisse.



224. La libera caduta dei gravi fornisce un esempio di *moto vario*, vale a dire di un moto in cui la velocità v varia da istante ad istante o, come noi possiamo dire, è funzione del tempo t. Precisamente, come si è visto in Fisica, essa è una funzione di 1° grado data dalla equazione

$$v = gt,$$

cosicchè ad ogni unità di tempo subisce un accrescimento costante, uguale all'accelerazione g (n. 201). Per questa costanza dell'accrescimento che la velocità subisce ad ogni secondo, il moto si dice *uniformemente vario;* e più precisamente si dice *uniformemente accelerato*, in quanto la velocità è crescente, mentre si direbbe *uniformemente ritardato* se la velocità subisse ad ogni unità di tempo una variazione costante, ma negativa.

Nel caso presente la grafica della velocità è la retta passante per l'origine, di coefficiente angolare g.

225. In Fisica si è anche studiato il moto di un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con un certo impulso iniziale.

Qui contrariamente a quanto, per ovvie ragioni, si è fatto nel caso precedente, si prendono come positivi gli spazi contati dalla posizione iniziale del grave verso l'alto, come negativi gli spazi contati verso il basso; e, se v_0 indica la velocità iniziale ascendente, si trova

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

mentre per la velocità v, che naturalmente è anche qui funzione del tempo, si ottiene la espressione

$$v = v_0 - gt. \tag{3}$$

Perciò la velocità ad ogni unità di tempo diminuisce di g, talchè si tratta di un moto uniformemente ritardato.

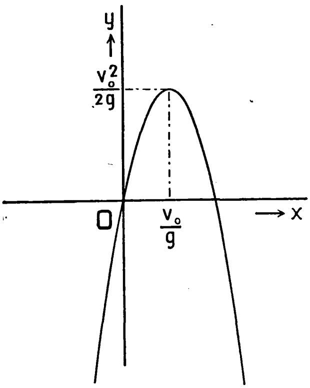
La grafica di codesto moto, vale a dire la curva che rappresenta la funzione s definita dalla espressione (2) è una parabola volgente l'apertura verso l'alto e passante per l'origine, in quanto per $t=0$ la (2) assume il valore $s=0$. Inoltre, ponendo nelle formole del n. 217

$$y=s, \quad x=t; \quad a=-\frac{1}{2}g, \quad b=v_0, \quad c=0,$$

troviamo che la nostra parabola ha per vertice il punto di coordinate

$$\frac{v_0}{g}, \quad \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Ciò vuol dire che la massima altezza, cui giunge il nostro grave, è data da $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ e che essa è raggiunta $\frac{v_0}{g}$ secondi dopo l'istante iniziale.



Per $t > \frac{v_0}{g}$ la funzione (2) è decrescente, cioè il grave ricade; e la simmetria della parabola rispetto alla parallela all'asse y passante pel vertice ci permette di prevedere che il grave si ritroverà, cadendo, nella sua posizione di partenza dopo un numero di secondi doppio di quello cui corrisponde la massima altezza, vale a dire dopo $\frac{2v_0}{g}$ secondi, il che del resto si può confermare direttamente cercando i valori di t pei quali si annulla la (2), cioè le soluzioni dell'equazione di 2° grado

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$$

la quale si risolve immediatamente in quanto può scriversi (n. 84)

$$t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0.$$

Infine per $t > \frac{2v_0}{g}$ la (2) diventa negativa, o, in altre parole, il grave discende al disotto della posizione iniziale e prosegue la sua caduta fino a quando un ostacolo lo arresti.

Notiamo che la grafica della velocità, espressa in questo caso dalla (3), è la retta che ha l'ordinata all'origine v_0 e il coefficiente angolare negativo $-g$. Codesta velocità è costantemente decrescente, e si mantiene positiva da $t=0$ fino al punto in cui la retta interseca l'asse dei tempi, cioè fino al valore di t soddisfacente alla equazione

$$v_0 - gt = 0.$$

È questo il valore

$$t = \frac{v_0}{g},$$

il che è ben naturale, in quanto la velocità non può annullarsi se non nell'istante in cui il grave raggiunge il punto culminante del suo cammino.

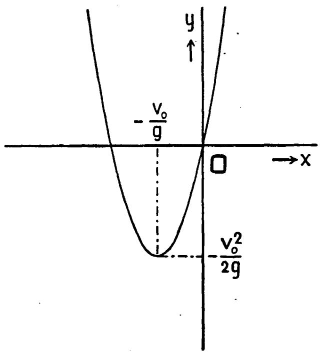
Per $t > \frac{v_0}{g}$ la velocità diventa negativa, e, in valore assoluto, cresce con t indefinitamente.

226. Se si considera infine un grave lanciato verticalmente in basso, per esempio dall'alto di un aerostato, il suo moto avviene sempre in un senso, cosicchè si possono senz'altro prendere positivi gli spazi misurati verso il basso, come nel caso più semplice considerato al n. 222. Allora, se v_0 indica la velocità iniziale discendente, si ha per lo spazio percorso l'espressione

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

e per la velocità la

$$v = v_0 + \frac{1}{2} g t.$$



La grafica del moto è in tal caso la parte giacente nel primo angolo degli assi della parabola, passante per l'origine, volgente l'apertura verso l'alto e avente il vertice di coordinate

$$-\frac{v_0}{g}, \quad -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g},$$

cioè situato a sinistra dell'asse y e al di sotto dell'asse x.

Rappresentazione grafica della funzione $y = \frac{a}{x}$

227. La funzione razionale fratta

$$y = \frac{a}{x} \tag{1}$$

presenta, rispetto alle funzioni considerate sin qui, una particolarità nuova: mentre codeste funzioni erano determinate dalla rispettiva espressione *per ogni qualsiasi valore della variabile* x, la funzione (1) per $x = 0$ non ammette un valore determinato. Corrispondentemente a codesto fatto, anche la relativa grafica presenterà, rispetto alle curve incontrate sin qui, qualche carattere nuovo.

Consideriamo anzitutto il caso particolare più semplice

$$y = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

e cominciamo col segnare su di un foglio di carta millimetrica, su cui siano prefissati certi due assi e si scelga come unità il cm., qualche punto della relativa grafica. Dando ad x i valori interi successivi

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots,$$

otteniamo rispettivamente per y i valori

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \ldots,$$

onde si trovano corrispondentemente altrettanti punti situati nel primo angolo retto degli assi e sempre più vicini all'asse x. Così si rileva dalla (2) che se l'ascissa x cresce indefinitamente, la ordinata rispettiva, che è uguale alla reciproca di essa, andrà continuamente decrescendo, così da scendere mano mano al di sotto di ogni numero assegnabile, pur mantenendosi sempre positiva e diversa da zero.

Dal punto di vista del disegno, se per fissare le idee, ci riferiamo all'annessa figura dove si è preso il cm. come unità su entrambi gli assi, basterà spingersi al punto di ascissa 25 per avere l'ordinata $\frac{1}{25}$, che in figura sarebbe rappresentata da un segmento di $\frac{1}{4}$ di 1 mm., senz'altro inapprezzabile nel disegno; cosicchè graficamente la nostra curva, per ascisse maggiori di 25, si cōnfonderebbe senz'altro col tratto rettilineo, con cui si è segnato l'asse x.

Ma teoricamente la curva, al crescere dell'ascissa, si avvicina indefinitamente all'asse x, mantenendosene sempre distinta. Questo fatto si esprime dicendo che la nostra curva si *avvicina asintoticamente* all'asse x positivo, o ammette codesta retta come *asintoto*.

Se, in secondo luogo, diamo ad x valori positivi, minori di 1 e decrescenti, come

$$0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 0{,}7 \quad 0{,}6 \ldots,$$

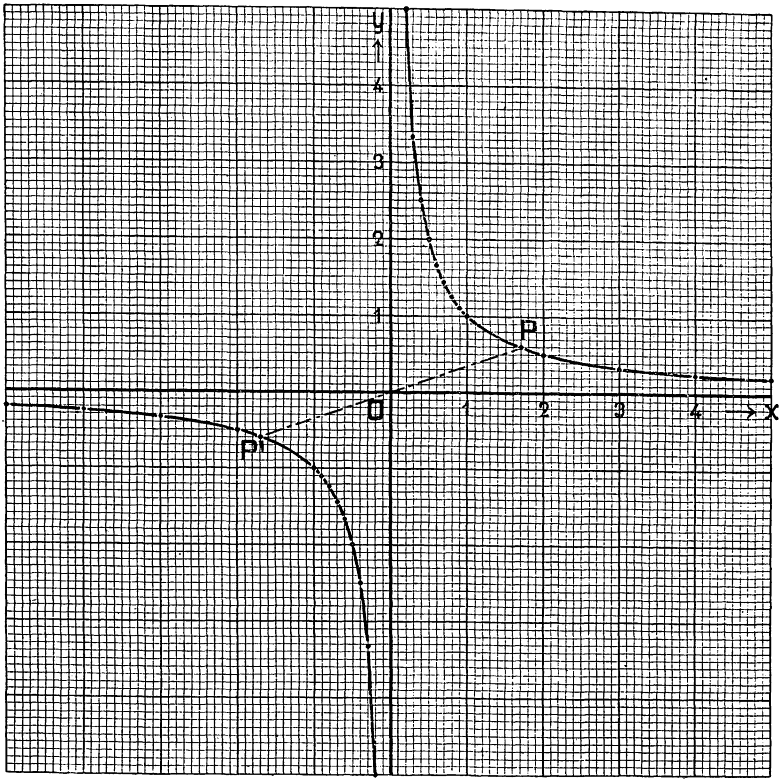
ottenjamo rispettivamente per y

$$\frac{10}{9}\quad\frac{10}{8}\quad\frac{10}{7}\quad\frac{10}{6}\cdots$$

ossia

$$1,\overline{1}\quad 1,25\quad 1,\overline{42857}\quad 1,\overline{6}\ldots;$$

si trovano cioè dei valori positivi crescenti, ed anzi se la x, mantenendosi positiva, decresce indefinitamente, la y diventa



via via maggiore di qualsiasi numero assegnabile; talchè la curva si avvicina asintoticamente anche all' asse positivo y, ed ha perciò nel primo angolo retto degli assi la forma indicata dall' unita figura.

Passando infine a considerare i valori negativi della x, avremo corrispondentemente anche per la y valori negativi; cosicchè i punti della nostra grafica, aventi l' ascissa minore di zero, saranno tutti situati nel terzo angolo degli assi. Inoltre se due punti P, P' della curva hanno ascisse opposte x_1, $-x_1$, anche le loro ordinate

$$\frac{1}{x_1}, \quad \frac{1}{-x_1}$$

sono opposte; il che vuol dire che i due punti P, P' sono fra loro *simmetrici* rispetto all'origine O, cioè allineati con O e situati a ugual distanza da essa e da parti opposte.

Di qui si deduce che per avere i punti della nostra grafica situati nel terzo angolo degli assi, basta costruire i simmetrici rispetto all'origine dei punti di ascissa positiva ottenuti dianzi, o, in altre parole, far ruotare di 180° intorno all'origine la parte di curva situata nel primo angolo degli assi; cosicchè la curva, anche nel terzo angolo, si avvicinerà asintoticamente ai due assi, considerati, naturalmente in senso negativo.

Concludendo si ha che la grafica della (2) è costituita da due parti separate o, come si suol dire, da *due rami*, simmetrici rispetto all'origine O e aventi per asintoti gli assi. Siffatta curva dicesi *iperbole equilatera* di centro O.

228. La forma dell'iperbola mette chiaramente in luce il modo in cui varia la funzione (2) al variare della x. Se la x, partendo da valori negativi e grandissimi in valore assoluto, cresce (in senso algebrico) fino a zero, la y, che inizialmente è negativa, ma piccolissima in valore assoluto, va (algebricamente) decrescendo e supera mano mano in valore assoluto ogni limite assegnabile, finchè per $x = 0$ non ha più alcun senso. Subito dopo, cioè per $x > 0$ e piccolissimo, la y ricompare con valori positivi grandissimi e al crescere indefinito di x decresce, mantenendosi positiva, al di sotto di ogni numero assegnabile.

Per $x = 0$ si dice che *la funzione y è discontinua.*

229. È facile mostrare che, qualunque sia a, la funzione

$$y = \frac{a}{x} \tag{1}$$

è sempre rappresentata da una iperbole equilatera.

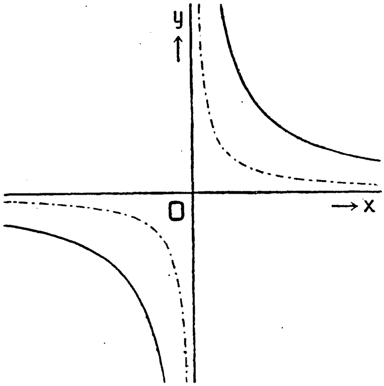
Supponiamo anzitutto $a > 0$ e prendiamo, per fissare le idee, $a = 4$: allora l'equazione

$$y = \frac{4}{x} \tag{3}$$

si può scrivere

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{\frac{x}{2}}.$$

cosicchè la relazione che nel n. 227 si aveva tra x e y, qui ha luogo tra $\frac{x}{2}$ e $\frac{y}{2}$. Ciò vuol dire che se x_1, y_1 sono le coordinate di un punto della grafica della (3), le rispettive metà $\frac{x_1}{2}$, $\frac{y_1}{2}$ saranno le coordinate di un punto della iperbola equilatera del n. 227, onde inversamente i punti della grafica della (3) si otterranno dai punti della iperbola equilatera or ora ricordata, raddoppiando a ciascuno di essi l'ascissa e l'ordinata. In altre parole la (3) è rappresentata dalla iperbola equilatera che si ottiene ingrandendo nel rapporto o *scala* da 1 a 2 la grafica della (2) (n. 227).

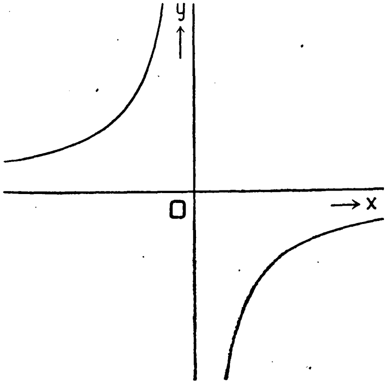


Nello stesso modo, se $a > 0$, basta scrivere la (1) sotto la forma

$$\frac{y}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{a}}}$$

per vedere che la grafica relativa è sempre un'iperbola equilatera, che si ottiene facendo variare nel rapporto $1 : \sqrt{a}$ tanto le ascisse quanto le ordinate della grafica della (2).

230. Se infine è $a < 0$, p. es. $a = -4$, i punti della grafica della funzione



$$y = -\frac{4}{x}$$

si otterranno invertendo il segno delle ordinate dei punti della iperbola che rappresenta la

$$y = \frac{4}{x};$$

cosicchè basterà ribaltare il piano di codesta iperbola su se stesso, facendolo ruotare intorno all'asse x di 180°.

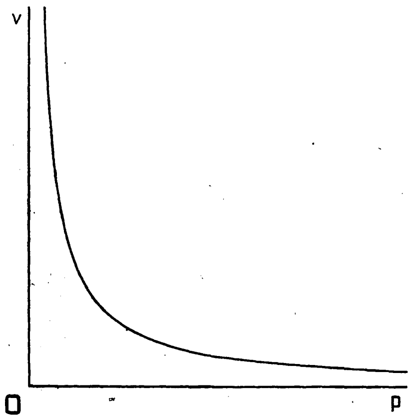
Si otterrà così una iperbola equilatera uguale alla precedente, ma situata nel secondo e quarto angolo degli assi.

In conclusione, *la funzione*

$$y = \frac{a}{x}$$

è sempre rappresentata da una iperbola equilatera, che ha per asintoti i due assi e che giace nel primo e terzo angolo degli assi o nel secondo e quarto, secondo che a *è positivo o negativo.*

231. La iperbola equilatera fornisce la grafica di ogni fenomeno, in cui compaiano due variabili l'una inversamente proporzionale all'altra. Così, per esempio, la *legge del* BOYLE ci dice che, *a temperatura costante, il volume di una data quantità di gas è inversamente proporzionale alla pressione.*



Se, cioè, indichiamo con v il volume di codesta quantità di gas, con p la pressione e con k un certo fattore di proporzionalità, positivo, che dipende dalla temperatura prefissata e dalla natura del gas che si considera, si ha

$$v = \frac{k}{p};$$

e la grafica relativa sarà appunto il ramo di un'iperbole equilatera situato nel primo angolo degli assi.

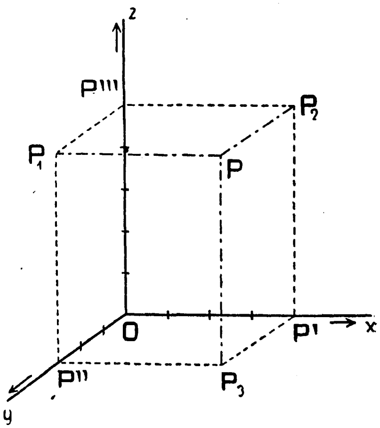
APPENDICE

Cenno sulle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio

232. Il concetto di coordinate cartesiane ortogonali nel piano che abbiamo definito al n. 190 e delle quali abbiamo fatto largo uso nel precedente capitolo, si estende allo spazio, dando così luogo ad un metodo che permette di individuare la posizione di un punto dello spazio per mezzo di *tre* numeri.

P. es., se in una stanza si fissano due pareti, contigue, orientate, per fissare le idee, una a Sud e l'altra ad Ovest, è ben determinato entro la stanza il punto che dista dalla parete a Sud di m. 2,40, da quella ad Ovest di m. 3,75 e dal pavimento di m. 1,15.

Così in generale si prendano nello spazio, per un punto O, che chiamasi *origine*, tre rette x, y, z, a due a due ortogonali, che diremo *assi coordinati* o semplicemente *assi*, e, scelta una unità di misura, si fissi su ciascun asse un senso positivo. Gli assi, presi a coppie, determinano tre piani xy, yz, zx, a due a due ortogonali che si chiamano *piani coordinati*.



Preso allora un punto P, si abbassino da esso le perpendicolari PP_1, PP_2, PP_3 rispettivamente sui tre piani coordinati yz, zx, xy. I tre segmenti P_1P, P_2P, P_3P, paralleli ordinatamente agli assi x, y, z, sono misurati, rispetto all'unità scelta e al senso positivo fissato sui corrispondenti assi, da tre numeri che diconsi le *coordinate cartesiane ortogonali di* P, e si distinguono col nome di *prima*, *seconda* e *terza coordinata*.

La prima coordinata di P, cioè la lunghezza di $P_1 P$, è manifestamente uguale alla ascissa sull'asse x del punto P_1', in cui codesto asse è segato dal piano ad esso perpendicolare, passante per P, cioè dal piano $P_1 P_2 P_3$. Similmente

$$P_2 P = OP_2', \quad P_3 P = OP_3'.$$

I tre piani coordinati dividono lo spazio in otto triedri trirettangoli, a ciascuno dei quali corrisponde per le coordinate dei rispettivi punti una certa disposizione di segni (¹).

I punti del piano xy hanno la terza coordinata nulla; e così quelli dei piani yz e zx hanno nulla rispettivamente la prima e la seconda.

Pei punti dell'asse z sono nulle le due prime coordinate, per quelli dell'asse x la seconda e la terza, per quelli infine dell'asse y la prima e la terza; e l'origine O ha tutte e tre le coordinate nulle.

233. Come ad ogni punto dello spazio corrispondono tre determinate coordinate, così, inversamente, è chiaro che *fissati, in un certo ordine, tre numeri dotati di segno, vi è un punto ed uno solo che ha codesti tre numeri come prima, seconda e terza coordinata rispettivamente.*

La rappresentazione dei punti dello spazio per mezzo delle loro coordinate permette di svolgere tutta la Geometria con procedimenti analitici (*Geometria analitica*); ma anche in molti altri ordini di ricerche scientifiche essa fornisce un utile sussidio e uno strumento fecondo.

(¹) Le disposizioni possibili dei tre segni sono appunto otto: $+++$, $+-+$, $--+$, $-++$, $++-$, $+--$, $---$, $-+-$.

ESERCIZI ED APPLICAZIONI [1]

I.

1. Supposto che le prime cifre decimali esatte di un certo numero π siano date da $\pi = 3{,}1415926....$, si scrivano tutti i possibili valori approssimati di π a meno di 0,001, per difetto e per eccesso, e aventi 4 cifre decimali, e poi tutti i valori approssimati di π a meno di 0,00001, per difetto e per eccesso, e aventi 6 cifre decimali. Nell'uno e nell'altro caso si verifichi per ciascun valore approssimato quante cifre decimali esatte contenga.

2. Se a è un numero decimale, avente più di n cifre dopo la virgola, a ed $a + \frac{1}{10^n}$ hanno identiche le prime $n-1$ cifre decimali, salvo quando la n^{ma} cifra decimale sia uguale a 9. Quando accadrà che le cifre decimali identiche si riducano precisamente ad $n-2$, o ad $n-3$ o ad $n-4$ ecc.?

3. Se a è una lunghezza approssimata a meno di $\frac{1}{10^n}$ di un segmento α, le cifre decimali comuni ad a e ad $a + \frac{1}{10^n}$ sono esatte. Potrà accadere che una cifra di a situata dopo quelle comuni ad $a + \frac{1}{10^n}$ risulti esatta? Quando?

4. Se si sa che a è la misura approssimata di una grandezza a meno di $\frac{1}{10^n}$, ma si ignora il senso della approssimazione, si è

[1] Questa serie ordinata di esercizi e di applicazioni è in buona parte originale; ma nel raccogliere il materiale ci siamo anche valsi, oltrechè dei nostri trattati di *Geometria*, dei libri seguenti:

HOCEVAR: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Obergymnasien*. Wien u. Prag, 1902.

SAINTE-LAGUË: *Introduction au cours de Mathématiques Générales*. Paris, 1913.

SCHÜLKE: *Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik*. Erster Teil. Leipzig u. Berlin, 1906.

TREUTLEIN: *Mathematische Aufgaben* aus den Reifeprüfungen der Badischen Mittelschulen. Leipzig u. Berlin, 1907.

BARDEY-LIETZMANN-ZÜHLKE: *Aufgabensammlung*. Reformausgabe A; für Gymnasien: II Teil: Oberstufe: Leipzig u. Berlin, 1914.

certi che a comprende $n-1$ cifre decimali esatte, salvo quando l'n^{ma} cifra sia uguale a 0 o a 9. Costruire degli esempi in cui le cifre esatte si riducono precisamente ad $n-2$ o ad $n-3$, ecc.

5. Qual'è l'altezza della facciata di una casa, se comprende 127 strati di mattoni e lo spessore di ogni mattone è di cm. 6,5? A quale errore dà luogo per siffatta misura un errore di cm. 0,05 per lo spessore dei mattoni?

6. Con un metro in legno si è misurata una certa lunghezza che si è trovata uguale a m. 84,56. Si è verificata l'esattezza del metro adoprato a meno di 1 mm.: di più ogni trasporto del metro può dar luogo ad un errore di mm. 1,5 ed anche l'ultima lettura è esatta a meno di mm. 1,5. Che cosa possiamo dire circa il valore esatto della nostra lunghezza?

7. Si è misurata una lunghezza con un metro troppo lungo di m. 0,002 e si sono trovati m. 23,45. Qual'è, a meno di $\frac{1}{1000}$, il valore esatto in metri di codesta lunghezza?

	Superficie in Km.²	Popolazione
Italia	286 682	34 696 683
Spagna	497 225	19 155 879
Francia.	536 464	39 601 509
Gran Brettagna e Irlanda	314 961	45 365 599
Impero Germanico.	540 959	64 925 993
Impero Austro-Ungarico (senza Bosnia ed Erzegovina)	624 859	49 408 576
Russia	5 141 446	134 127 900

8. Calcolare, con tre cifre decimali, in quale rapporto sta la superficie dei singoli Stati suindicati a quella dell'Italia.

9. Lo stesso per la popolazione.

10. In quale Stato la densità della popolazione è massima? In quale è minima?

Correzione dei numeri decimali accorciati. — Spesso nella pratica, quando si *accorcia* un numero, trascurandone le cifre decimali da un certo posto in poi (cfr. n. 5), si aumenta di 1 (*si arrotonda*) l'ultima cifra conservata, se la prima cifra soppressa è maggiore di 4. Con ciò si ottiene che per ogni numero decimale accorciato l'errore non supera una mezza unità decimale dell'ultimo ordine conservato; ma può essere un errore in più o in meno. Per lo più nelle tabelle numeriche costruite secondo la convenzione suindicata si contrassegnano in modo speciale, p. es. con un asterisco, i valori approssimati per eccesso, cioè quelli in cui l'ultima cifra è arrotondata.

11. Accorciare, secondo la precedente convenzione, il numero 34,193425 ad 1, 2, 3, 4, 5 cifre decimali e contrassegnare con asterisco i valori approssimati per eccesso.

12. Accorciare il numero 17459 a decine, a centinaia, a migliaie.

13. Accorciare km. 2,4385 a m., a dam., a hm.

ERRORE RELATIVO. — Dicesi *errore relativo* di un numero approssimato il rapporto del limite di approssimazione al valore approssimato (cfr. n. 4); e precisamente dicesi *errore relativo per eccesso* quando il valore approssimato si prenda per difetto.

14. Come vanno modificate le osservazioni dei nn. 6-7 del testo, quando pei dati, anzichè valori approssimati per difetto, si prendano valori accorciati con l'arrotondamento dell'ultima cifra?

15. Analoga domanda per la differenza.

GRADO DI PRECISIONE. — L'inversa dell'errore relativo (cioè il rapporto di un valore approssimato al relativo limite di approssimazione) dicesi talvolta *grado di precisione* del valore approssimato.

Di due valori approssimati dicesi più preciso quello che ha un grado di precisione maggiore.

16. Si è trovato che l'altezza di un colle è data, a meno di m. 5, da m. 910. D'altra parte si è misurata l'altezza di una quercia e si è trovato m. 17,50 con un errore non più grande di m. 0,1. E infine, tracciato con cura su di un foglio di disegno un segmento, si è trovato che esso, a meno di mezzo millimetro, è lungo mm. 83. Qual'è di queste tre misure la più esatta? Quale la meno esatta?

17. Disporre in ordine di precisione crescente i seguenti numeri:

0,548 5,48 54,8 0,5480

supposto che per ciascuno l'errore sia inferiore alla metà dell'unità decimale dell'ultima cifra.

18. L'errore relativo del prodotto di due fattori è (salvo rarissimi casi di eccezione) minore della somma degli errori relativi dei fattori.

Discutere la questione valendosi anche di casi numerici concreti.

La stessa regola vale pel quoziente di due valori approssimati.

19. OPERAZIONI ABBREVIATE — *Moltiplicazione abbreviata* (Regola di OUGHTRED). Per calcolare abbreviatamente con una certa approssimazione il prodotto di due numeri, si scrivono le cifre del moltiplicatore in ordine inverso sotto il moltiplicando, in modo che la cifra delle unità del moltiplicatore risulti sotto la cifra del moltiplicando successiva a quella corrispondente alla approssimazione desiderata.

Poi per le singole cifre del moltiplicatore, a partire dalla destra, si moltiplica il moltiplicando, trascurandone ciascuna volta le cifre che risultano a destra della cifra del moltiplicatore considerata. Questi prodotti parziali si scrivono l'uno sotto l'altro, in modo che risultino in una stessa colonna verticale le rispettive prime cifre a destra, ed, eseguita la somma, si trascura la prima cifra a destra del risultato.

Si avverta che quando si comincia ogni prodotto parziale è bene tener conto del riporto (ove occorra *arrotondato*) cui dà luogo la prima cifra del moltiplicando che si è trascurata.

Esempio. — Qui diamo, come esempio, la moltiplicazione, col solito metodo, di 3,141592 per 2,7182818; e quindi la determinazione con la regola di Ougtred del medesimo prodotto con 4 cifre decimali, dapprima senza tener conto dei riporti e poi coi riporti

	2,7182818 ×
	3,141592
	54365636
2	44645362
13	5914090
27	182818
1087	31272
2718	2818
81548	454
8,5397	323566256

2,7182818	
29 5141,3	
81548	4
2718	2
1087	2
27	1
13	5
1	8
8,5396	2

2,7182818	
29 5141,3	
81548	4
2718	3
1087	3
27	2
13	6
2	4
8,5397	2

20. Ridurre in metri una lunghezza di 384,6543 *tese* (antica misura francese) sapendo che 1 tesa è uguale a m. 1,9490366.

21. *Divisione abbreviata.* — Per trovare abbreviatamente un valore approssimato del quoziente di due numeri dati, si accorcia l'uno o l'altro di questi in guisa che i numeri formati dalle cifre conservate, astrazion fatta dalla virgola, diano la prima cifra significativa del quoziente. E poi si procede come d'ordinario, salvo che i resti delle divisioni parziali si lasciano inalterati (cioè non « si abbassano » cifre) e ad ogni nuova divisione parziale si trascura una cifra a destra del divisore. Di codesta cifra trascurata è bene tener conto per arrotondare, ove sia il caso, la prima cifra del prodotto parziale corrispondente.

Con questo procedimento si ottengono pel quoziente tante cifre significative quante ne comprende il divisore. È manifesto quali semplificazioni si abbiano quando basti ottenere pel quoziente un numero minore di cifre significative.

Esempio. — Si voglia trovare il quoziente di 345,7948 per 8,9475. Ecco come si dispone ed eseguisce l'operazione:

$$\begin{array}{r|l} 345{,}795 & 8{,}9475 \\ \cline{2-2} 77\,370 & 38{,}64 \\ 5\,790 & \\ 422 & \\ 74 & \end{array}$$

22. Si confronti il risultato della precedente operazione abbreviata con quello che si ottiene eseguendo la divisione secondo la regola solita.

23. Esprimere in *yards* una lunghezza di Km. 246,57265, sapendo che uno *yard* (misura inglese) è pari a m. 0,914399.

24. DELAMBRE e MÉCHAIN hanno trovato che la lunghezza del grado di meridiano terrestre è di *tese* 57 008. Quale lunghezza in metri risulta di qui per la tesa?

25. La definizione data al n. 19 per la somma $a + a'$ di due numeri a, a' è indipendente dalla scelta del segmento ausiliare u.

26. Analogamente per la definizione di prodotto e di quoziente di due numeri (n. 20).

27. Se fra i segmenti a, b, c e a', b', c' sussistono le proporzioni

$$a : b = a' : b', \quad b : c = b' : c'$$

sussiste anche la

$$a : c = a' : c'.$$

28. Se sussistono fra i numeri a, b, a', b' le uguaglianze $a = a'$, $b = b'$, sussiste anche la $ab = a'b'$ (n. 20 ed eserc. prec.)

29. Dimostrare in base alla definizione del n. 20 che il prodotto gode della *proprietà distributiva;* cioè che per numeri a, a', a'' quali si vogliano si ha

$$(aa')a'' = a(a'a'').$$

[Posto $a = a : u$, $a' = u : v$, $a'' = v : w$, si ha $aa' = a : v$, $(aa')a'' = = a : w$; ma ecc.].

30. Dimostrare analogamente che il prodotto gode della *proprietà commutativa;* cioè che $aa' = a'a$.

[Posto $a = a : u$, $a' = u : v$ si determini w in modo che sia $v : w = a : u = a$. Allora $aa' = a : v$, $a'a = ...$].

31. Da quale lunghezza vien rappresentata la distanza Bologna-Modena (Km. 37,7) sulla *Carta d'Italia* del « *Touring Club Italiano* » (foglio 18°) che, come è notorio, è disegnata nella scala 1 : 250 000?

32. Una carta è disegnata nella scala di

a) 1 : 25 000 000, b) 1 : 5 000 000, c) 1 : 2 000 000.

Quale distanza corrisponde ad una lunghezza di 1 cm. sulla carta?

33. In quale scala è disegnata una carta se alla distanza di 1 Km. corrisponde una lunghezza di mm. 2,5; o alla distanza di 10 Km. una lunghezza di mm. 62,5 o ad un *miglio inglese* (Km. 1,609) uno *zoll* (= dito, misura tedesca, pari a cm. 2,54)?

II.

34. Si è trovato che le dimensioni di un certo rettangolo, disegnato sul foglio del disegno, sono, a meno di $\frac{1}{2}$ mm., cm. 27,4 e cm. 13,9. Calcolarne l'area e indicare quali cifre se ne possano garantire esatte.

35. Calcolare a meno di 1 mm. l'altezza di un rettangolo avente la base di m. 5,4963.... e l'area di m². 17,59484....

36. Una fotografia larga cm. 84 e alta cm. 64 ha una cornice piana larga cm. 13. Qual'è l'area della cornice?

37. Una stoffa perde, nella prima lavatura, $\frac{1}{20}$ della sua lunghezza e $\frac{1}{16}$ della sua larghezza. Se codesta stoffa è larga dapprima m. 0,80, quale lunghezza bisogna acquistarne per averne, dopo la lavatura, m². 8,55.

38. Un campo ha la forma di un rettangolo: il perimetro è di m. 789 e la differenza tra base ed altezza è di m. 150. Qual'è l'area del campo? Se codesto campo è stato acquistato per L. 10000 e si rivende per L. 35 l'ha., quale è il guadagno totale? Quale il guadagno $^0/_0$?

39. Un giardino ha forma di un rettangolo, la cui larghezza è i $\frac{3}{5}$ della lunghezza. Si circonda di una palizzata, alta m. 1,50, che, posta in opera, costa L. 0,50 il m². Si domanda: 1) quali siano la larghezza e la lunghezza del giardino; 2) il prezzo di esso per ara, compresa la chiusura, se il prezzo di acquisto è stato di L. 660.

40. Un tale si proponeva di comperare un prato, le cui dimensioni dalla mappa risultavano di m. 80 × m. 220: ma egli viene a sapere che il decametro usato nel rilievo della parcella del prato era troppo corto di 1 dm. Egli si rivolge al proprietario, che fa eseguire un rilievo esatto e, per compensare l'errore commesso, aumenta la larghezza del prato di una certa quantità. Determinare codesta quantità.

41. L'area di un triangolo rettangolo è uguale al semiprodotto dei due cateti.

42. L'area di un rombo è uguale al semiprodotto delle due diagonali.

43. L'area di un quadrangolo è uguale al semiprodotto di una diagonale per la somma delle distanze da questa degli altri due vertici.

44. Se r è il raggio del cerchio iscritto a un triangolo di area S si ha (essendo p il semiperimetro)

$$S = pr.$$

45. Se r_1, r_2, r_3 sono i raggi dei cerchi exiscritti compresi negli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ rispettivamente di un triangolo ABC (dove $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ e p è il semiperimetro ed S l'area) si ha

$$r_1 = \frac{S}{p-a}, \quad r_2 = \frac{S}{p-b}, \quad r_3 = \frac{S}{p-c}.$$

46. Un trapezio, di cui una delle basi è doppia dell'altra e l'altezza è m. 24,50 ha l'area di m^2. 264,20. Calcolare le lunghezze delle due basi e l'area del triangolo che si ottiene prolungando i due lati non paralleli.

47. Se l'area di un cerchio è uguale a quella di un poligono regolare, il raggio del cerchio è maggiore dell'apotema e minore del raggio del poligono. [Si confronti l'area del cerchio con quelle dei cerchi iscritto e circoscritto al poligono].

48. Se la lunghezza di una circonferenza è uguale a quella del perimetro di un poligono regolare, il raggio della circonferenza è maggiore dell'apotema del poligono e minore del raggio di esso. [Si confronti la lunghezza della circonferenza con le lunghezze delle circonferenze iscritte e circoscritte al poligono].

49. Le aree di due poligoni regolari di un numero pari di lati, iscritti in un cerchio stanno fra loro come i perimetri dei poligoni regolari, iscritti nel medesimo cerchio, aventi rispettivamente un numero di lati metà del numero dei lati dei due poligoni dati ([1]).

50. Si divida il diametro di una semicirconferenza in n parti quali si vogliano e su ciascuna si descriva una semicirconferenza. Si confronti la lunghezza della semicirconferenza primitiva colla somma delle n semicirconferenze suaccennate.

51. Quale lunghezza si ottiene pel raggio dell'equatore terrestre, se questo si suppone di Km. 40000?

52. Se, come si suole, si assume come raggio dell'equatore terrestre 860 miglia geografiche e come lunghezza dell'equatore stesso 5400 miglia geografiche, vi è accordo fra le due cifre?

([1]) I. Amaldi: *Appunti di Geometria*: Pitagora II, n. 1, 1895-96.

53. Quale cammino percorre in un secondo la Terra nella sua rivoluzione intorno al Sole, se il suo movimento si riguarda circolare ed uniforme? [La distanza della Terra dal Sole si assume di 150 milioni di Km. e si ricordi che l'anno solare è di giorni $365\,{}^1/_4$].

54. Qual'è il cammino percorso in un secondo da un punto dell'equatore terrestre per fatto della rotazione della Terra? [Si assuma il raggio equatoriale di Km. 6370].

55. A quale distanza approssimativa si può leggere, con un errore non maggiore di $1'$, l'ora su di un orologio il cui quadrante ha un diametro di m. 1,50? Si tenga conto del fatto che l'*acutezza visiva* media dell'occhio è di circa $\frac{1}{3000}$, vale a dire che, nel nostro caso, due posizioni vicine dell'indice delle ore appaiono distinte all'occhio, se distano, in punta, di almeno $\frac{1}{3000}$ della distanza dell'occhio dal quadrante.

56. Le ruote anteriori di una carrozza hanno un raggio di cm. 40, quelle posteriori di cm. 73: su di un certo percorso le ruote minori fanno 415 giri più delle grandi. Qual'è la lunghezza di codesto percorso?

57. Quale deve essere la lunghezza del diametro di una circonferenza, perchè su di essa l'arco di $1'$ sia uguale ad 1 mm.?

58. Descritta su di un foglio di carta millimetrica una circonferenza di cm. 5 di raggio, si contino i quadretti contenuti da codesta circonferenza e poi quelli traversati da essa. Di qui, tenendo conto che ciascun quadretto è 1 mm^2, si deducano due valori approssimati, l'uno per difetto e l'altro per eccesso, dell'area del cerchio e si verifichi quale sia l'approssimazione con cui risulta così determinato il numero π.

59. Secondo il REGNAULT il coefficiente di dilatazione lineare del ferro è di 0,0000122. Quale sarà a 60° la superficie di un disco circolare di ferro, che a 0° ha m. 3,75 di diametro?

III.

60. Interpretare geometricamente l'identità

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\,.$$

61. In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio del rettangolo di uno di questi e della proiezione dell'altro su di esso.

62. In un triangolo la somma del quadrato di un lato, opposto ad un angolo acuto, e del doppio del rettangolo contenuto da uno degli altri lati e dalla proiezione su di esso del terzo lato, è equivalente alla somma dei quadrati dei due lati che contengono l'angolo acuto.

63. In ogni triangolo la somma dei quadrati di due lati è equivalente a due volte la somma del quadrato della metà del terzo lato e del quadrato della mediana corrispondente a questo lato.

64. La differenza dei quadrati di due lati è uguale a due volte il rettangolo del terzo lato e della proiezione della corrispondente mediana su di esso.

65. Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell'altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto. [Nel dato triangolo ABC si abbassi l'altezza AD e si conduca il diametro AE del cerchio circoscritto: indi si confrontino i triangoli ABD, AEC].

66. Se R è il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo di lati a, b, c, di semiperimetro p e di area S, si ha

$$R = \frac{abc}{4S} \text{ [eserc. prec.].}$$

67. Dati più segmenti, le cui misure siano designate con a, b, c, d, e, f.... costruire i segmenti [la cui misura sia]:

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2 + d^2} \quad \left(= \frac{a^2}{\frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{a}} + \frac{b^2}{\frac{c^2}{b} + \frac{d^2}{b}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{abc}{d}}, \quad \sqrt{5\frac{abcd}{ef}},$$

$$\sqrt{5a^2 + 2b^2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sqrt{a^2b + c^3}, \quad \sqrt{3\frac{abc}{d} + e^2}, \quad \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{d},$$

$$\sqrt{ab - c^2} \quad (ab > c^2)$$

$$\sqrt{\frac{a^3 + b^2c}{d}} + \sqrt{\frac{e^3 - f^3}{g}} \quad (e > f)$$

$$\sqrt{g\sqrt{a^2 + b^2} + h\sqrt{e^2 + f^2}}$$

$$\sqrt[4]{a^4 + b^4} \quad \left(= \sqrt{a\sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}}}\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{a^2 + 2b^2}\ \sqrt{e + 3f^2}}.$$

68. Dati più segmenti le cui misure siano a, b, c, d.... e dato il segmento unità di misura ($u=1$), costruire i segmenti

$$abc\left(=\frac{abc}{u^2}\right),\quad ab+\frac{3}{7}-c^2,\quad \sqrt{a^2-b}\ (=\sqrt{a^2-bu})$$

$$\sqrt{a+b^2+c^2},\quad \sqrt{5a^2+b},\quad \frac{a+\sqrt{b^2+4cd}}{2e},$$

$$\frac{3d+\sqrt{a^2-bc}}{5e}\ (a^2>bc),\quad \sqrt{3d+\sqrt{a-b^2-c}}\ (a>b^2+c)$$

$$\sqrt{2a+\sqrt{3b+\sqrt{c+d^2}}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a^3-\frac{b^2}{cd}}\sqrt{a^2+5b}}\ \left(a^3>\frac{b^2}{cd}\right)$$

In tutti questi casi le formule debbono essere rese omogenee di 1° grado con un artifizio conveniente.

69. Calcolare, in base alla prima identità del n. 73:

$$\sqrt{2}\sqrt{8};\quad \sqrt{27}\sqrt{3};\quad \sqrt{5}\sqrt{125};\quad \sqrt{3a}\sqrt{12a};$$

$$\sqrt{6}\sqrt{8};\quad \sqrt{3}\sqrt{15};\quad \sqrt{48}\sqrt{128};\quad \sqrt{3a}\sqrt{6a}.$$

70. Trasformare e semplificare:

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{288}+\sqrt{338}$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{243}+\sqrt{75}+\sqrt{192}+\sqrt{507}$$

$$\sqrt{28}-\sqrt{63}+\sqrt{2268}-\sqrt{1792}.$$

71. Raccogliere fuori parentesi un fattore comune nelle seguenti espressioni:

$$2-\sqrt{2};\quad 3-\sqrt{6};\quad \sqrt{2}+\sqrt{6};\quad 2\sqrt{3}+3\sqrt{2};$$

$$5\sqrt{3}-3\sqrt{5};\quad 3+\sqrt{3}+\sqrt{15};\quad 5-2\sqrt{5}+3\sqrt{125}.$$

72. Eseguire e semplificare:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b});\quad (p+\sqrt{pq})(p-\sqrt{pq});$$

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b});\quad (\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}).$$

73. Trasformare le seguenti espressioni in frazioni a denominatore razionale:

$$\sqrt{\frac{1}{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{ab};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}},\quad \frac{a+b}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a-1}{\sqrt{a-1}},\quad \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}},$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a^2+ab}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{ab-b^2}{\sqrt{a-b}}.$$

74. Trasportare sotto il segno di radice il fattore esterno nelle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{3},\quad 3\sqrt{5},\quad 8\sqrt{6},\quad 2\sqrt{\frac{1}{2}},\quad 12\sqrt{\frac{5}{24}},$$

$$(a+b)\sqrt{a-b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}},\quad a\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

75. Dimostrare che

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}\qquad (a>b)$$

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}.$$

76. Dimostrare che da

$$a:b:c=x:y:z$$

segue

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}:\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a:x.$$

77. Calcolare

$$\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{2}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab\right)\left(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}-ab\right).$$

78. Calcolare

$$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{ab}}{a-b}.$$

79. Verificare le notevoli identità:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\sqrt{a + b} \pm \sqrt{a - b} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

80. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\sqrt{x} + 2 = 6, \quad \sqrt{a + 2} = 6,$$

$$5(\sqrt{x} - 4) - 4(\sqrt{x} - 5) = 9$$

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{2} + \frac{8 - \sqrt{x}}{3} = 2$$

$$\frac{9\sqrt{x} - 2}{6} = \frac{15\sqrt{x} + 1}{18} - \frac{15\sqrt{x} - 3}{12}$$

$$\frac{5 + 6\sqrt{x}}{7 - \sqrt{x}} = 3\frac{2}{5}; \quad \frac{\sqrt{2x} + 3}{\sqrt{2x} - 3} = 3,$$

$$\sqrt{3x + 4} = \sqrt{4x - 3}, \quad 2\sqrt{2x + 13} = 5\sqrt{3x - 14},$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + x}} = 3, \quad (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) = x - 6$$

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 7) = (\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} - 6).$$

81. Se la parte intera di un numero a contiene $2r$ o $2r - 1$ cifre, si ottiene $\sqrt{a}$ con l'approssimazione di $\frac{1}{10^n}$, conservando per a $n - r + 1$ cifre decimali esatte e calcolando la radice con $n + 1$ cifre decimali.

La n^{ma} cifra risulta esatta se la $(n - 1)^{ma}$ è minore di 5.

82. L'errore relativo della radice quadrata di un numero approssimato è minore dell'errore relativo (per eccesso) di codesto numero (cfr. la def. dopo l'eserc. 13).

83. Un agrimensore ha trovato come lati di un triangolo rettangolo m. 3, m. 4,59, m. 5,40. Quale è approssimativamente la precisione ottenuta in siffatte misure?

84. Diversi autori hanno in vari tempi proposto pel numero π i seguenti valori approssimati: $\sqrt{10}$ (Arabi); $\frac{49}{16}$ (Bauhayana); $3\frac{17}{120}$ (Tolomeo); 3,1416 (Apollonio); $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ (Nicolò da Cusa); $\frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$ (Koskanski); $\frac{13}{50}\sqrt{146}$ (Specht); $\frac{501 + 80\sqrt{10}}{240}$ (Gergonne).

Si ordinino codesti valori secondo il loro grado di approssimazione.

85. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo ERONE, come area di siffatto triangolo il numero

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)a^2 ?$$

86. La lunghezza della semiconferenza è data approssimativamente dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero iscritti nel cerchio. Di che ordine è l'approssimazione?

87. Dato un cerchio, se ne divida il diametro AB in cinque parti uguali, si prolunghi AB di un segmento BC uguale ad una di queste quinte parti, e sulla tangente in A si prenda il segmento AD uguale a tre di codeste parti. Il perimetro del triangolo ACD è approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza. Qual'è il valore approssimato di π che si ricava dalla precedente costruzione?

88. NICOLÒ DA CUSA (1464) per costruire un triangolo equilatero che ha perimetro uguale ad un dato cerchio, iscrive un quadrato nel cerchio e considera il triangolo equilatero iscritto nel cerchio che ha per diametro la somma del lato del quadrato or ora indicato e del raggio del cerchio dato. Che valore approssimato di π si ricava di qui?

89. Per trasformare un dato quadrato in un cerchio di ugual superficie, i matematici indiani prendevano a partire dal centro del quadrato, sulla parallela a un lato, un segmento uguale alla metà della diagonale, dividevano la parte di questo segmento esterna al quadrato in tre parti uguali e consideravano il cerchio di centro nel centro del quadrato e passante per il primo dei due punti di divisione or ora accennati. Quale valore approssimato di π si ricava di qui?

90. Secondo il celebre pittore e geometra ALBRECHT DURER (1525) il problema precedente si risolve prendendo come diametro gli $\frac{8}{10}$ della diagonale del quadrato. Si ha così per π il valore approssimato $3+\frac{1}{8}$, che compare già in Vitruvio.

91. GERBERTO (più tardi Papa Silvestro II, intorno al 1000) lasciò scritto che un triangolo equilatero che abbia il lato di 30 piedi ha l'altezza di 26 piedi: più tardi egli prese l'altezza inferiore di $\frac{1}{7}$ all'altezza. Quali valori approssimati di $\sqrt{3}$ usava in tal modo GERBERTO? I valori da lui usati di quanto $^0/_0$ si scostavano dai valori esatti?

92. Una strada, la cui lunghezza sulla carta d'Italia del Touring Club italiano (1 : 250000) è di cm. 19,2, ha tra le due estremità un dislivello di m. 310. Si calcoli la lunghezza reale della strada, ricordando che le distanze sulla carta corrispondono a distanze contate in proiezione ortogonale.

93. Su di una tangente ad un cerchio di cm. 12 di raggio si porti, a partire dal punto di contatto, una lunghezza di cm. 16. Qual'è la distanza del punto ottenuto da un punto dell'asse del cerchio situato a cm. 15 dal piano di codesto cerchio?

94. Se si rappresenta la superficie dell'Italia con un quadrato di 5 cm. di lato, che lato debbono avere i quadrati che rappresentano le superficie della Francia, della Spagna, ecc.? [Cfr. la tabelletta a pag. 182].

95. Analogamente per la popolazione [Cfr. la tabelletta a pag. 182].

96. In un triangolo rettangolo i segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede dell'altezza, sono di cm. 9 e cm. 16 oppure di dm. 1,6 e dm. 32 oppure di m. 1,96 e m. 23,04 oppure di dm. 1 e dm. 4 oppure di m. 2 e m. 3. Si calcolino l'altezza e i cateti.

97. Delle tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, la cui superficie totale è di cm.^{2} 568, la prima supera la seconda di cm. 4 ed è inferiore alla terza di cm. 4. Quali sono codeste tre dimensioni?

98. Le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo stanno fra loro come 3 : 4 : 12 e la diagonale è di cm. 91. Calcolare le tre dimensioni.

99. Si divida un cerchio, per mezzo di due circonferenze concentriche, in tre parti di uguale area. Se r è il raggio del cerchio dato, quali saranno i raggi delle due nuove circonferenze?

100. Si circoscriva un cerchio: 1) ad un triangolo equilatero; 2) ad un quadrato; 3) ad un esagono regolare. Qual'è, nei singoli casi, l'area dei segmenti circolari esterni al poligono considerato?

101. L'area di una corona circolare è uguale a quella di un cerchio, avente per diametro una corda del cerchio maggiore tangente al cerchio minore.

102. Dato un cerchio di raggio r, abbiamo che:

a) il lato del quadrato iscritto è $r\sqrt{2}$ e quello del circoscritto è $2r$; qual'è il rapporto delle loro aree?

b) i lati dei triangoli equilateri iscritto e circoscritto sono rispettivamente $r\sqrt{3}$, e $2r\sqrt{3}$;

c) i lati degli esagoni regolari iscritto e circoscritto sono rispettivamente r e $\frac{2}{3}r\sqrt{3}$.

103. Il lato del decagono regolare iscritto al cerchio di raggio r è $r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

104. Il lato del pentagono regolare di raggio r è

$$r\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

105. Il lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti i lati dell'esagono e del decagono regolari iscritti nel cerchio medesimo.

106. Se l, L sono i lati di due poligoni regolari di ugual numero di lati, l'uno iscritto e l'altro circoscritto al cerchio di raggio r, abbiamo

$$L\,\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}}.$$

107. Si calcolino in base agli esercizi 103, 104, 106 i lati del pentagono e decagono regolare circoscritti.

108. Dato un triangolo ABC, se ne indichino con a, b, c le lunghezze dei lati rispettivamente opposti ad A, B, C, con p il semiperimetro e con h_a, h_b, h_c le altezze. Si dimostri che è

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[Si ricordino gli es. 61, 62].

109. L'area S del triangolo ABC è data (es. prec.) da

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

110. Le mediane del triangolo ABC sono date da

$$m_a{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$m_b{}^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}$$

$$m_c{}^2=\frac{2a^2+2b^2-a^2}{4}.$$

111. Le bisettrici del triangolo ABC sono date da

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$s_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

112. Conservando le notazioni precedenti e indicando con r, R i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto ad ABC e con r_1, r_2, r_3 i raggi dei cerchi exiscritti, contenuti rispettivamente negli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, si dimostrino le formule seguenti:

$$S = \sqrt{rr_1r_2r_3},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$4R = r_1 + r_2 + r_3 - r.$$

113. Se indichiamo con p_n, P_n i perimetri dei poligoni regolari di n lati, iscritto e circoscritto a un cerchio, si ha

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n}, \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}.$$

114. Se si forma una successione, i cui termini siano alternativamente i valori inversi delle lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti e iscritti a un dato cerchio, nei quali il numero di lati vada sempre raddoppiandosi, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternativamente medio aritmetico e medio geometrico rispetto ai due termini immediatamente precedenti. [Cfr. es. prec.].

115. Se s_n, S_n sono le aree dei poligoni regolari di n lati iscritto e circoscritto al cerchio, abbiamo

$$S_{2n} = \frac{2S_n s_n}{S_n + s_n}, \quad s_{2n} = \sqrt{s_n S_n}.$$

116. Si formi una successione i cui termini siano alternativamente i valori inversi delle aree dei poligoni regolari iscritti e circoscritti ad un cerchio dato e tali che il numero dei lati vada sempre raddoppiandosi. Codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternativamente medio geometrico e medio aritmetico, ciascuno rispetto ai due termini immediatamente precedenti (Cfr. es. prec.).

117. Si considerino tutti i poligoni regolari aventi un dato perimetro (isoperimetri). Se r_n, a_n sono il raggio e l'apotema di quello fra codesti poligoni che ha n lati, si ha

$$a_{2n} = \frac{a_n + r_n}{2}, \quad r_{2n} = \sqrt{r_{2n}\, a_{2n}}.$$

118. Se si forma una successione, i cui termini siano alternativamente i valori inversi delle lunghezze dell'apotema e del raggio di poligoni regolari isoperimetri, i cui lati vadano sempre raddoppiandosi, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternativamente medio aritmetico e medio geometrico, ciascuno rispetto ai due termini immediatamente precedenti. [Cfr. es. prec.].

119. Si considerino tutti i poligoni regolari equivalenti a un poligono dato. Se r_n, a_n indicano il raggio e l'apotema di quello fra codesti poligoni, che ha n lati, si ha

$$r_{2n} = \sqrt{a_n r_n}, \quad a_{2n} = \frac{\sqrt{2a_n(a_n + r_n)}}{2}.$$

120. Se si forma una successione, i cui termini sono alternativamente le aree dei quadrati del raggio e del quadrato dell'apotema di poligoni regolari fra loro tutti equivalenti e aventi un numero di lati che si vada sempre raddoppiando, codesti termini, a partire dal terzo, saranno alternativamente medio geometrico e medio aritmetico, ciascuno rispetto ai due immediamente precedenti [Cfr. es. prec.].

Nota. — Le quattro proposizioni dei nn. 114, 116, 118, 120 conducono a quattro metodi, fra loro aritmeticamente identici, *per il calcolo numerico di* π.

Per dare un cenno di codesti metodi e metter chiaramente in luce ciò che essi hanno di comune, conviene premettere il seguente *Lemma aritmetico : Se nella successione di numeri*

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2, \ldots,\ a_n,\ b_n, \ldots$$

i due primi sono disuguali e gli altri, a partire dal terzo, sono alternativamente medio aritmetico e medio geometrico dei due immediatamente precedenti

$$a_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}, \quad b_i = \sqrt{a_i b_{i-1}},$$

le due successioni

a) $\qquad a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$

b) $\qquad b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n, \ldots$

sono convergenti; cioè: 1) i numeri dell'una vanno crescendo e quelli dell'altra vanno decrescendo; 2) preso un numero piccolo a piacere, si possono sempre trovare due numeri a_n, b_n, la cui differenza è minore, in valore assoluto, del numero prefissato.

Infatti supposto, per fissare le idee, $a_1 > b_1$, essendo

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

sarà

$$a_2 > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1$$

e

$$a_2 < \frac{b_1 + b_1}{2} = b_1;$$

e similmente, essendo

$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1}$$

sarà

$$b_2 < \sqrt{b_1 b_1} = b_1$$

e

$$b_2 > \sqrt{a_2 a_2} = a_2.$$

Così risulta che la a) è crescente e la b) decrescente.

In secondo luogo dalle

$$b_2 - a_2 = \frac{b_2^2 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2 b_1 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2}{b_2 + a_2}(b_1 - a_2)$$

e dalla

$$\frac{a_2}{b_2 + a_2} < \frac{a_2}{2a_2} = \frac{1}{2}$$

risulta

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{2}(b_1 - a_2);$$

ed essendo

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1),$$

e quindi

$$b_1 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

concludiamo

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{4}(b_1 - a_1).$$

Così in generale si dimostra

$$b_i - a_i < \frac{1}{4}(b_{i-1} - a_{i-1});$$

e perciò le differenze $b_i - a_i$ saranno da un certo punto in poi minori di qualsiasi numero positivo assegnabile.

Analogamente si ragionerà nell'ipotesi $a_1 < b_1$: solo in tal caso risulta che è decrescente la successione a) e crescente la b).

Ciò premesso possiamo dare, come promettemmo al n. 45, un cenno dei metodi pel calcolo di π.

I. — *Metodo dei perimetri.* — Se c è la lunghezza della circonferenza di raggio 1, abbiamo (n. 43)

$$c = 2\pi$$

e quindi

$$\pi = \frac{c}{2}.$$

talchè (n. 41) per avere un valore approssimato (per difetto o per eccesso) di π basta calcolare la lunghezza del semiperimetro di un poligono iscritto o circoscritto al cerchio di raggio 1.

D'altra parte per l'es. n. 114 e il *Lemma aritmetico* dimostrato poc'anzi, le due successioni

$$\frac{1}{P_n}, \quad \frac{1}{P_{2n}}, \quad \frac{1}{P_{4n}}, \ldots.$$

$$\frac{1}{p_n}, \quad \frac{1}{p_{2n}}, \quad \frac{1}{p_{4n}}, \ldots.$$

sono convergenti, qualunque sia il numero n dei lati dei due primi poligoni regolari (iscritto e circoscritto) che si considerano; e in base appunto al n. 114 codeste due successioni si potranno calcolare non appena si conoscano i due primi termini.

Saranno pure convergenti le due successioni

$$(1) \qquad \frac{2}{P_n}, \quad \frac{2}{P_{2n}}, \quad \frac{2}{P_{4n}}, \ldots.$$

$$(2) \qquad \frac{2}{p_n}, \quad \frac{2}{p_{2n}}, \quad \frac{2}{p_{4n}}, \ldots.$$

che per quanto si è detto dapprincipio danno con successive approssimazioni il valore $\frac{1}{\pi}$. Perciò i termini delle (1) (2) daranno altrettanti valori approssimati (rispettivamente per eccesso e per difetto) di $\frac{1}{\pi}$.

Se partiamo dai quadrati circoscritto e iscritto, i primi termini delle (1) (2) sono rispettivamente $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Poichè $\frac{1}{4}$ è medio aritmetico tra 0 e $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ è medio geometrico tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, concludiamo che per avere due successioni convergenti, che definiscano $\frac{1}{\pi}$, basta formare una successione di medie aritmetiche e geometriche, come quella indicata nel Lemma aritmetico, partendo dai numeri 0 e $\frac{1}{2}$.

II. — *Metodo delle aree.* — In base al n. 53 l'area S del cerchio di raggio 1 è data da

$$S = \pi,$$

cosicchè per avere un valore approssimato (per difetto o per eccesso) di π, basta calcolare l'area di un poligono iscritto o circoscritto al cerchio di raggio 1.

D'altra parte discende dall'es. 116 e dal Lemma aritmetico che le due successioni

$$(3) \qquad \frac{1}{s_n}, \quad \frac{1}{s_{2n}}, \quad \frac{1}{s_{4n}}, \ldots$$

$$(4) \qquad \frac{1}{S_n}, \quad \frac{1}{S_{2n}}, \quad \frac{1}{S_{4n}}, \ldots$$

sono convergenti.

Esse definiscono, con successive approssimazioni crescenti, il numero $\frac{1}{\pi}$, e, calcolando un numero sufficientemente grande di termini di esse, si otterrà un valore approssimato di $\frac{1}{\pi}$ con un errore piccolo a piacer nostro.

Poichè $s_4 = 2$, $S_4 = 4$, partendo dai quadrati iscritto e circoscritto si riottiene la stessa successione di medie aritmetiche e geometriche che abbiamo trovato col I metodo.

III. — *Metodo degli isoperimetri.* — Il raggio r di una circonferenza di lunghezza 2 è dato, per il n. 43 da

$$r = \frac{1}{\pi}.$$

E se un poligono regolare ha il perimetro 2, il suo apotema sarà minore di r, cioè di $\frac{1}{\pi}$, e il suo raggio sarà maggiore di $\frac{1}{\pi}$ (Cfr. eserc. 48): cosicchè $\frac{1}{\pi}$ sarà compreso fra i termini delle due successioni convergenti (Cfr. l'es. 118 e il Lemma aritmetico):

$$a_n, \quad a_{2n}, \quad a_{4n}, \ldots$$
$$r_n, \quad r_{2n}, \quad r_{4n}, \ldots$$

dove a_i, r_i sono l'apotema e il raggio del poligono regolare ad i lati, il cui perimetro sia uguale a 2.

Partendo dal quadrato $\left(a_4=\frac{1}{4}, \quad r_4=\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ si riottiene la solita successione numerica, trovata coi due primi metodi.

IV. — *Metodo degli equivalenti.* — Se un cerchio ha l'area uguale ad 1, il suo raggio r è tale che (n. 53)

$$r^2=\frac{1}{\pi},$$

talchè, se r_i, a_i indicano il raggio e l'apotema di un poligono regolare a i lati, e di area uguale ad 1, avremo

$$a_i^2<\frac{1}{\pi}<r_i^2.$$

Perciò $\frac{1}{\pi}$ sarà definito dalle successioni (convergenti per l'es. 120 e il Lemma aritmetico):

$$r_n^2, \quad r_{2n}^2, \quad r_{4n}^2, \ldots.$$
$$a_n^2, \quad a_{2n}^2, \quad a_{4n}^2, \ldots.$$

Se partiamo dal quadrato, per il quale è

$$r_4^2=\frac{1}{2}, \quad a_4^2=\frac{1}{4},$$

riotteniamo la solita successione di medie aritmetiche e geometriche.

121. Calcolare l'area della corona circolare compresa fra le circonferenze iscritta e circoscritta ad un poligono regolare di 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lati.

122. Calcolare l'area del triangolo limitato da tre archi di circonferenza convessi, a due a due tangenti esternamente ed uguali fra loro.

123. Calcolare l'area di un quadrilatero a contorno circolare, i cui lati sieno archi uguali, tangenti a coppie nei vertici, di cui sia dato il raggio. Discussione dei casi possibili.

124. Calcolare l'area del quadrilatero a lati circolari convessi, determinato dalle quattro circonferenze coi centri nei vertici di un quadrato, che hanno per raggio il lato di esso.

125. Dati un quadrato ed un cerchio concentrici di ugual perimetro, calcolare la differenza tra le aree di uno dei quattro segmenti circolari e di uno dei triangoli rettangoli a contorno misto così determinati.

IV.

126. Risolvere le equazioni di 2° grado:

$$x^2 + 6x = 40, \quad x^2 - 6x = 135, \quad x^2 - 4x = 21,$$

$$x^2 - 28x = 60, \quad x^2 - 11x = -28, \quad x^2 + 11x = 42,$$

$$x^2 - \frac{x}{2} = 14, \quad x^2 + \frac{2x}{5} = 27, \quad x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0, \quad x^2 - \frac{1}{20}x = \frac{1}{20},$$

$$x(x-5) + 4(x-3) = 30, \quad 3(5-2x) = 10 + 2x(6x-1),$$

$$(2x+3)(x-4) + 9 = 0, \quad 3x - (x-3)(2x-5) = 5,$$

$$(5x+6)(3x-1) - (2x-3)(x-4) = 82, \quad (x+2)^2 = x + 22,$$

$$(3x-5)^2 = 12x + 1, \quad (x+1)^2 - (x-1)^2 = (x-8)^2,$$

$$2 - \frac{x^2-9}{7} = \frac{3x-7}{5}, \quad 2x - \frac{x^2-7}{4} = \frac{4x-1}{2},$$

$$\frac{x-1}{2} - \frac{3x-x^2}{3} = x + \frac{1}{3}, \quad \frac{x+1}{2} - \frac{x^2-3x}{5} = 5 - \frac{2x+3}{3}$$

$$\frac{3x-2}{x-2} = 3x - 14, \quad \frac{4x-3}{x-4} = x + 12, \quad 2x + 3 = \frac{1}{3x+4}$$

$$\frac{1}{5x} - \frac{1}{7x+3} = \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x-3} + \frac{1}{30} = 0$$

$$\frac{6}{x} - \frac{5x+3}{3x-4} = 14, \quad 2x - \frac{x-3}{2x-5} = 7\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{5x+2} + \frac{5}{3(x+2)} = \frac{1}{x}, \quad \frac{7}{x+18} - \frac{5}{x+2} + \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{x-2}{2x+2} + \frac{2x-3}{3x-1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x-2}{x-1} - \frac{x-6}{2x-8} = \frac{2}{3}$$

$$\left(2x - 3 + \sqrt{5}\right)^2 + 5\left(2x - 3 + \sqrt{5}\right) = 14$$

$$\left(3x - 4\sqrt{5} + 6\right)^2 - 7\left(3x - 4\sqrt{5} + 6\right) + 12 = 0$$

127. Risolvere le equazioni:

$$x - 6\sqrt{x} + 5 = 0, \quad x + 10 = 7\sqrt{x}$$

$$x + \sqrt{x} = 30, \quad x - 3\sqrt{x} = 28$$

$$(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 7) = 3, \quad (5 - \sqrt{x})^2 = 2(7 + \sqrt{x})$$

128. Quale numero differisce, in meno, di 210 dal suo quadrato?

129. Se un numero si aumenta e si diminuisce di 64, il prodotto dei numeri così ottenuti è uguale a 3367. Qual'è codesto numero?

130. Quale numero, aggiunto al suo reciproco, dà $3\frac{11}{14}$?

131. Si decomponga 2160 in due fattori che stiano fra loro nel rapporto 5:3.

132. Intorno ad un giardino quadrato si è tracciato un sentiero largo m. 2 e la superficie di mezzo, destinata alle piantagioni, supera quella occupata dalla strada di m.^{2} 17. Qual'è il lato del giardino?

133. In un cerchio di cm. 13 di raggio si vuol condurre per un punto A, che dista dal centro cm. 5 una corda lunga cm. 25. Quanto sono lunghi i due segmenti in cui la corda è divisa da A?

134. In un cerchio di cm. 20 di raggio si è condotta una corda lunga cm. 24. Quanto dista dal centro il punto d'intersezione delle tangenti al cerchio negli estremi della corda?

135. Dati due cerchi concentrici di raggi di cm. 17 e cm. 25, si conduca una retta su cui la corda determinata dalla circonferenza minore sia uguale ai $\frac{2}{5}$ dell'intera corda. Qual'è la lunghezza della corda e quale la sua distanza dal centro?

136. Da un punto esterno ad un cerchio di cm. 21 di raggio e distante dal centro di cm. 29 si vuol condurre una secante la cui parte interna sia di cm. 9.

137. Il perimetro di un rettangolo è di m. 82 e la diagonale di m. 29. Quali sono le due dimensioni?

138. Se in un rettangolo, avente la diagonale di m. 85 si aumenta di m. 2 ciascuna delle due dimensioni, l'area si accresce di m.^{2} 230. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

139. L'area di un rettangolo è di m.^{2} 168 e il perimetro di m. 62. Quali sono le dimensioni?

140. Si vuol trasformare un rettangolo di cm. $5 \times$ cm. 7 in un altro che abbia il perimetro triplo.

141. Se i lati di un rettangolo avente la diagonale di m. 89 fossero ciascuno più corto di 3 m., la diagonale sarebbe più corta di m. 4. Quali sono le due dimensioni?

142. Se in un rettangolo avente la diagonale di m. 65, il lato minore fosse più corto di m. 17 e il maggiore più lungo di m. 7, la diagonale resterebbe ancora lunga m. 65. Quali sono le due dimensioni?

143. Si decomponga 156 in due fattori la cui somma sia 25.

144. Se il denominatore di una frazione di numeratore 5 si aumenta di 4, la frazione diminuisce di $\frac{5}{24}$. Qual'è la frazione?

145. Una strada parte da un punto A e dopo 2 Km. volta ad angolo retto. A quale distanza da A su codesta strada deve trovarsi un punto B, perchè il cammino da A a B sia k volte maggiore della distanza in linea retta da A a B?

146. Un uccello, che volando orizzontalmente fa 15 m. al secondo, passa a 30 m. di altezza, verticalmente, dalla testa di un cacciatore. A quale punto deve mirare il cacciatore, se si suppone che i pallini percorrano in media 180 m. al secondo?

147. Due treni vanno da Chiusi a Roma. Il primo di essi che impiega 15′ meno dell'altro a percorrere codesta distanza di Km. 165, fa 5 Km. di più all'ora. Quali sono le durate dei due tragitti?

148. Un mugnaio sale col mulo carico di farina ad un paesetto di montagna in $5^h 24'$, mantenendo nella seconda metà del cammino una velocità che è ad ogni ora inferiore di $^1/_2$ Km. a quella mantenuta nella prima metà. Il giorno dopo ridiscende al suo punto di partenza in 3 ore, mantenendo una velocità che supera di 1 Km. per ogni ora la velocità, con cui aveva camminato nella prima parte della salita.

149. Su di un fiume un vaporetto parte, contro corrente, da A verso B e tre ore dopo ne parte un altro da B verso A. Questo incontra il primo dopo 30′ di viaggio e giunge alla meta 45′ dopo che il primo è giunto in B. Quanto è durato il viaggio di ciascun vaporetto?

150. Una tavoletta assira contiene, in caratteri cuneiformi, un elenco dei cubi dei numeri naturali e come 32mo cubo dà il numero 969, dove, ben inteso, codeste tre cifre sono rappresentate da gruppi di 9, 6, 8 cunei. Qual'è la base del sistema di numerazione qui usato?

151. Due escursionisti hanno compiuto ciascuno una escursione a piedi, restando entrambi in viaggio il medesimo tempo. Ma il primo si è preso per via un giorno di riposo ed ha fatto 120 Km. e il secondo, che si è riposato tre giorni ne ha fatto solo 112. Se, camminando ciascuno colla stessa velocità effettivamente mantenuta, il primo si fosse preso tre giorni di riposo e il secondo uno solo, quest'ultimo avrebbe fatto 44 Km. più del primo. Quanti giorni stettero essi in viaggio?

152. L'area di un triangolo è di cm². 13,5 e la base supera l'altezza di cm. 1,5. Quali sono le dimensioni del triangolo?

153. In un rettangolo l'altezza supera di cm. 7 la larghezza e la diagonale è di cm. 17. Determinare le dimensioni.

154. Di un rettangolo si conoscono il perimetro p e la diagonale d; determinare le dimensioni. Caso particolare: $p =$ dm. 8,2 e $d =$ dm. 2,9.

155. Dato un rettangolo di m. $5 \times$ m. 12, se ne aumentino le due dimensioni di una stessa lunghezza in modo che aumenti la diagonale di m. 4; oppure aumenti l'area di cm.² 110. Determinare nell'uno e nell'altro caso di quanto si debbano aumentare le dimensioni.

156. Dati un triangolo e un quadrato, aventi le basi su di una stessa retta, condurre una parallela a questa che tagli dal triangolo e dal quadrato un triangolo ed un rettangolo, la cui somma sia equivalente al triangolo primitivo.

157. Risolvere i seguenti sistemi, riducendoli ciascuno ad un'equazione di 2° grado:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 19 \\ xy = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = h \\ xy = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = h \\ xy = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2a \\ xy = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x - xy + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - xy + 2y = 4 \\ 2x + zy + 2y = 6. \end{cases}$$

158. Si riduca la risoluzione delle seguenti equazioni (*reciproche*) a quella di equazioni di 2° grado, notando che ammettono la soluzione $x = -1$ e dividendone il primo membro per $x + 1$:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

159. Ridurre la risoluzione delle seguenti equazioni (*reciproche*) a quella di equazioni di 2° grado, notando che ammettono la soluzione $x = 1$ e dividendone il primo membro per $x - 1$:

$$x^3 - 2x + 2x - 1 = 0, \quad 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$
$$3x^3 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$
$$4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$$
$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

160. Risolvere le equazioni:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \quad x^4 - 21x^2 = 100,$$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \quad x^4 + 9 = 10x^2,$$
$$(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 73, \quad (x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40,$$
$$10x^2 - 21 = x^4, \quad 6x^4 - 35 = 11x^2,$$
$$a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2,$$
$$x^4 - ax^2 + b^2 = 0, \quad x^4 - 4(a + b)x^2 + 16(a - b)^2 = 0,$$
$$x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$$

161. La diagonale di un rettangolo di m.^{2} 120 di area è lunga m. 17. Quali sono le dimensioni?

162. Risolvere le seguenti equazioni:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$
$$2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$$
$$4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$$
$$6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$$

163. Risolvere i sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 250 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ x + y = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 \\ x + y = 2h \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+2) + y(y+2) = 183 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+4) + y(y-4) = 9 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{y-1} = 0 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

164. Risolvere i sistemi seguenti (nn. 87-88):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ xy = 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1{,}16 \\ 5xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ xy = k \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2h^2 \\ xy = h^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy = 78 \\ y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2a \\ x^2 - xy + y^2 = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 39 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 79 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 59 \end{cases}$$

165. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x - y = a \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12 \\ x - y = 72 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 - y^2 = 56 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2 - (y+3)^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

V.

166. Raccogliere le espressioni seguenti sotto un unico segno di radicale:

$$\frac{a\sqrt{bc}\,\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[5]{2a}\,\sqrt[6]{c^5}},\qquad \frac{\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[4]{2bc^3}}{c\sqrt{abc}\,\sqrt[5]{a}}$$

$$\frac{\sqrt{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt[4]{cz}}{\sqrt[6]{a^2xz}\,\sqrt[5]{bcy}},\qquad \frac{\sqrt[4]{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt{cz}}{\sqrt[8]{a^2bxy}\,\sqrt[6]{c^3z^2}}.$$

167. Risolvere le equazioni:

$$\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)^3=27,\qquad \sqrt{\sqrt[3]{x}+1}=3,$$

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x-29}=0.$$

168. Render razionale il denominatore nelle espressioni seguenti:

$$\frac{\sqrt[4]{8a}}{\sqrt{2\sqrt{2a}}},\qquad \frac{1}{2\sqrt{2a}\,\sqrt[3]{2b}},\qquad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}},\qquad \frac{a}{\sqrt[4]{2}-1},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}},\qquad \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}},\qquad \frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}},\qquad \frac{1}{\sqrt[5]{2}-1}.$$

169. Calcolare:

$$3\sqrt[6]{x^3}-2\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[10]{x^5},\qquad \sqrt[2n]{a^n}-\sqrt[n]{a^{2n}},$$

$$\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[9]{3^3}\cdot\sqrt[6]{5^2},\qquad \sqrt[m]{a^{2m}}\cdot\sqrt[n]{a^{3n}}:\sqrt[r]{a^{5r}},$$

$$\sqrt[3]{2^6}+\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{5^4},\qquad \sqrt[3]{12a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{18ab^2c},$$

$$\left(\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{4}\right)\sqrt[3]{2},\qquad \left(x+\sqrt[3]{x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{xy^2}-y\right),$$

$$\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right).$$

170. Si calcolino o si semplifichino con estrazioni di radici le espressioni seguenti:

$$\sqrt[3]{5a^2b\cdot 25ab^5},\qquad \sqrt[m]{a^{m+n}\,b^{2m+p}}$$

$$3a\sqrt[3]{2b^3}-2b\sqrt[3]{2a^3}.$$

171. Risolvere le seguenti equazioni:

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0, \quad 8x^6 - 215x^3 + 27 = 0$$

$$x^6 + 2x^3 + 2 = 0, \quad x^6 - 2x^3 + 5 = 0$$

$$16x^8 - 257x^4 + 16 = 0, \quad (x+2)^8 - 4(x+2)^4 + 13 = 0$$

$$x^{10} + 33x^5 + 32 = 0, \quad x^{10} - 6x^5 + 10 = 0.$$

172. L'errore relativo della radice cubica di un numero approssimato è minore di $^1/_3$ dell'errore relativo per eccesso di codesto numero.

173. Il numero $\sqrt[3]{31}$ si può assumere come valore approssimato di π. Qual'è il grado della approssimazione?

VI.

174. Disegnare prospetticamente una figura che fornisca la interpretazione della identità

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

175. Un'aula scolastica è alta m. 3,80 e larga m. 4,60. Quanto al minimo, deve essere lunga per bastare per 30 scolari se si deve calcolare che ogni scolaro possa disporre di m.^{3} 2,75 di aria?

176. Per una villa abitata da otto persone si deve costruire un serbatoio d'acqua e si calcola che occorrano ogni giorno per persona 200 l. pel consumo e 300 l. pel bagno; e inoltre, per l'innaffiamento del giardino di 4 a., l. 1,5 per m.^{2} Quale dovrà essere la capacità del serbatoio se si vuol riempirlo una volta al giorno? E se il serbatoio va posto a 15 m. di altezza dal livello della presa d'acqua, quanti cavalli vapore (75 chilogrammi-metro per secondo) deve fornire una macchina per compiere il lavoro occorrente ogni giorno in 3 ore?

177. Il canale di Suez è lungo 170 Km., profondo 9 m. e largo 77 m. alla superficie, 34,5 m. al fondo. Qual'è la cubatura dello scavo compiuto?

178. Un mattone ha le dimensioni di cm. 25 $\times$ cm. 12 $\times$ cm. 6,5, e il peso di kg. 3,9. Un'asse lunga m. 1,5, larga cm. 24 e grossa mm. 8 pesa kg. 2,16. Quali sono le densità rispettive?

179. Un corpo pesa nell'aria kg. 17,7 e nell'acqua kg. 13,8. Qual'è la densità?

180. Un dm.^{3} di aria pesa g. 1,293. Qual'è il peso dell'aria di una camera di m. 8 $\times$ m. 5 $\times$ m. 4? Quale spinta riceve nell'aria un kg. di legno (di densità 0,8) o un kg. di ottone (di densità 8,4)? Quale influenza ha l'aria sulle pesate?

181. L'aria è un miscuglio composto approssimativamente di 23 $^0/_0$ del suo peso di ossigeno e di 77 $^0/_0$ di azoto. Qual'è la composizione in volume dell'aria di una camera di m. 4×5 m. $\times$ m. 3, se la densità dell'ossigeno rispetto all'aria è di 1,111? Qual'è rispetto all'aria la densità dell'azoto?

182. Quanto si immerge una tavola di legno della densità di 0,7, lunga cm. a, larga cm. b, grossa cm. c. 1) nell'acqua: 2) in una soluzione di sale della densità di 1,3?

183. Di una tavola di legno grossa h cm. emergono h_1 cm. Qual'è la densità di quel legno?

184. Un cubo di spigolo a, costituito da una certa sostanza, galleggia sull'acqua emergendone per $\frac{1}{3}$ della sua altezza. Qual'è il peso specifico di quella sostanza? Che spigolo dovrà darsi ad un cubo di un'altra sostanza di peso specifico p, perchè collocato sul primo cubo, lo faccia immergere completamente, finchè l'acqua ne affiori la faccia superiore?

185. In un parallelepipedo rettangolo la dimensione minore e quella media differiscono da quella maggiore di 3 dm. e di 1 dm.: se si aumenta di 1 dm. ciascuno spigolo il volume del parallelepipedo si raddoppia. Quali sono le tre dimensioni?

186. Quanti sassolini di 1 cm.^{3} di volume bisognerebbe gettare in una vasca circolare di 3 m. di diametro, per farne alzare il livello dell'acqua di $\frac{1}{100}$ di millimetro?

187. La sezione di una certa nave da guerra è alla linea di immersione di m.^{2} 1600. Di quanto si aumenta l'immersione se si carica sulla nave: a) l'equipaggio di 700 uomini (calcolandosi che ogni uomo con l'armamento personale pesi 85 kg. in media); b) le provvigioni per l'equipaggio per 100 giorni in ragione di kg. 3 per giorno e per persona; c) di un cannone da cm. 28 del peso di kg. 43 300; d) di 50 cariche costituite ciascuna da una granata di kg. 345 e da kg. 160 di polvere?

188. Se il tubo di una conduttura d'acqua ha una sezione di 1 cm.^{2} e l'acqua ha la velocità di 1 dm. al secondo, quanta acqua passa pel tubo in un secondo, in un'ora, in un giorno? In quanto tempo passerà 1 m.^{3} di acqua?

189. Quant'acqua passa in un'ora, alla velocità di m. 0,8 al minuto per un tubo avente la sezione di cm.^{2} 1 o di cm.^{2} 6 o di cm.^{2} 83 o di cm.^{2} 124,6?

190. Quale sezione ha un tubo, pel quale passano in un'ora, alla velocità di m. 0,6 per secondo, 300 l. o 1 cm.^{3} o 2,350 cm.^{3}?

191. Quale velocità deve aver l'acqua di una conduttura perchè in un tubo cilindrico di 4 cm. di diametro passino in un'ora 6 o 10 o 14 o 18 cm.^{3}?

192. In quanto tempo passeranno in un tubo di 2 cm. di diametro, con la velocità di m. 0,9 al secondo, 100 l. o 1 m.^{3} o 100 m.^{3} o 1000 m.^{3}?

193. Lo sviluppo di un cilindro circolare retto dà un quadrato la cui diagonale è *d*. Calcolare l'area del rettangolo sezione del cilindro con un piano per l'asse e il volume del cilindro stesso.

194. Intorno ad un cilindro circolare retto di metallo di raggio di base di cm. 6 si è costruito un rivestimento cilindrico di legno di uguale altezza. L'intero corpo acquista in tal modo un volume 9 volte maggiore ed una superficie 5 volte maggiore. Qual è l'altezza del cilindro e quale lo spessore del legno?

195. Quanto pesca nell'acqua in posizione verticale un cilindro di legno (di densità 0,8) che ha per sezione per l'asse un quadrato e per diametro di base cm. 50? Si prenda $\pi = 3{,}1416$.

196. Quali sono il raggio e l'altezza di un cilindro, che ha lo stesso volume del cubo di cm. 12 di lato e l'area della superficie laterale uguale a quella della superficie del cubo?

197. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie laterale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

198. Qual'è il raggio di un cerchio, la cui superficie sia uguale alla superficie totale di un cilindro, di cui siano r ed h il raggio della base e l'altezza?

199. Le superficie sviluppate dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno ai suoi lati sono equivalenti. I cilindri stessi sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

200. Il litro per misurare i grani ha la forma di un cilindro circolare, di cui l'altezza è uguale al diametro; nel litro da liquidi l'altezza è doppia del diametro. Calcolare le dimensioni di codesti due recipienti.

201. Calcolare il raggio interno di un tubo di vetro cilindrico, che pesa 90 gr. quando è vuoto, e 200 gr. quando vi si introduce una colonna di mercurio di 9 cm., posto che la densità del mercurio è di 13,568.

202. Per estrarre l'acqua da un pozzo si fa uso di una pompa, il cui tubo ha un diametro interno uguale a d, e il cui stantuffo ha una data corsa h. Il diametro del pozzo è D e la profondità H. Dopo quante corse dallo stantuffo si vuoterà il pozzo?

203. In un torchio idraulico lo stantuffo minore fa una corsa h entro un corpo di tromba di diametro d. Si vuole che dopo n colpi di codesto stantuffo lo stantuffo maggiore si innalzi di H. Quale dovrà essere il diametro interno dal corpo di tromba corrispondente?

204. Trovare il cilindro di massimo volume, che ha una data superficie totale.

205. In un tubo barometrico di cm.^{2} 3 di sezione, la cui lunghezza al di sopra della bacinella di mercurio è di mm. 900, si introduce 1 cm.^{3} d'aria, preso alla pressione esterna di 750 mm. Di quanto scende la colonna di mercurio? Quale deve essere la nuova graduazione del barometro? Si suppone che l'aria segua la legge di BOYLE-MARIOTTE.

206. Un tubo di 1 cm.^{2} di sezione e di 1 m. di lunghezza si immerge verticalmente nell'acqua di un tino, tenendone chiusa l'apertura superiore col dito. A quale altezza entra l'acqua nel tubo, se l'estremità superiore è a 50 cm. al di sopra del livello dell'acqua. La pressione atmosferica si suppone equivalente a quella di una colonna d'acqua di 10 m. d'altezza.

207. Nell'esperienza precedente si solleva il dito, poi lo si ripone sulla bocca superiore del tubo e infine si estrae questo dall'acqua verticalmente. Quale sarà l'altezza dell'acqua nel tubo, quando essa uscirà dall'acqua?

VII.

208. Da un cubo di spigolo a si tagliano via gli 8 tetraedri con angoloide al vertice trirettangolo che si ottengono congiungendo a due a due su ciascuna faccia i punti medi dei lati consecutivi. Qual'è il volume del corpo residuo?

209. Una piramide ha la base comune con un cubo di spigolo a e il vertice nel centro della faccia opposta. Determinare l'area della superficie e il volume della piramide.

210. Il volume di una piramide retta a base quadrata è di m.^{3} 840 e lo spigolo di base di m. 12. Qual'è la lunghezza degli spigoli laterali?

211. Congiungendo i quattro vertici della base di un cubo col punto medio di uno spigolo ad essa parallelo, si determina una piramide. Determinarne il volume e l'area della superficie.

212. Una piramide retta ha per base un rettangolo di m. $20 \times$ m. 24 e gli spigoli laterali di m. 30. Qual'è il volume e qual'è l'area delle piramide? A quale distanza dalla base si dovrà condurre un piano ad essa parallelo per dividere la piramide in due parti di ugual volume?

213. Erodoto racconta di aver appreso dai Sacerdoti egiziani che l'area di ciascuna faccia della piramide di Cheope è uguale al quadrato dell'altezza h della piramide stessa. Dedurre da codesta altezza h il perimetro della base quadrata della piramide e confrontarlo con la lunghezza della circonferenza di raggio h. Inoltre si dimostri che la metà dello spigolo di base si ottiene come media proporzionale tra h e la sua sezione aurea.

214. Alla distanza di m. 1,80 da una parete verticale è collocata una sorgente luminosa (che si immagina ridotta ad un punto) e alla distanza di cm. 60 dalla parete e parallelamente a questa è collocata una tavoletta opaca avente l'area di dm.^{2} 4. Qual'è il volume della regione che rimane all'ombra?

215. Di un tronco di piramide retta a base quadrata sono dati i lati di base a e b $(a > b)$ e lo spigolo laterale s. Calcolare: 1) la superficie totale; 2) l'altezza delle piramide cui appartiene il tronco; 3) il volume del tronco. Caso numerico:

$$a = \text{cm. } 40, \quad b = \text{cm. } 22, \quad c = \text{cm. } 50.$$

216. L'apotema di un cono supera di 3 cm. il diametro di base e la superficie totale è di cm.^{2} 113,24. Calcolare la superficie laterale e il volume.

217. L'altezza di un cono è di cm. 12 e la superficie laterale di cm.^{2} 423,90. Calcolare la superficie totale e il volume.

218. Un cono alto cm. 4 ha una superficie totale di cm.^{2} 75,36. Calcolare il raggio di base e l'apotema.

219. Un cono ha una superficie totale di cm.^{2} 301,44 e una sezione piana per l'asse di cm.^{2} 48. Calcolare il raggio, l'altezza e l'apotema.

220. In un cono retto di dm.^{2} 11,304 di superficie laterale il diametro della base sta all'apotema nel rapporto 10:13. Calcolare il diametro e l'apotema.

221. Lo sviluppo della superficie laterale di un cono dà un settore di raggio di m. 32,867 e di angolo al centro di 90°. Qual'è il volume del cono?

222. La superficie laterale di un cono è uguale al doppio della base. Che relazione intercede tra raggio di base e apotema? Qual'è l'angolo di apertura?

223. Un triangolo rettangolo di cateti a, b (e di ipotenusa c) ruota successivamente intorno a ciascuno dei lati. Se A, B, C designano i volumi dei tre corpi così generati, si dimostri l'esattezza delle seguenti equazioni:

$$aA = bB = cC, \quad \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}.$$

224. Trasformare il solido generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo di cateti a, b intorno all'ipotema in un cilindro di altezza uguale all'altezza del triangolo rettangolo. Calcolare il raggio di base e determinarlo con una costruzione geometrica. Caso numerico: $a = \text{cm. } 1{,}5$; $b = \text{cm. } 2$.

225. Quale superficie ha il corpo generato dalla rotazione intorno all'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele?

226. Un triangolo equilatero ruota intorno ad un asse passante per un vertice e parallelo al lato opposto. Calcolare l'area della superficie e il volume del solido così generato.

227. Quale dev'essere, a meno di 1 cm., l'apotema di un cono equilatero (apotema = diametro di base): 1° perchè l'area della superficie laterale sia di 1 m.^{2}? 2° perchè il volume sia di 1 m.^{3}?

228. Un triangolo equilatero ruota intorno ad un asse parallelo ad un lato e distante da esso dell'altezza del triangolo, dalla parte opposta del triangolo stesso. Calcolare la superficie e il volume del solido di rotazione così generato.

229. Calcolare la superficie e il volume del solido generato dalla rotazione intorno al lato maggiore di un triangolo di lati di cm. 48, cm. 36, cm. 28 oppure di cm. 39,5, cm. 31,2, cm. 24,3, (cfr. es. 109).

230. Un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza di raggio r, ruota, insieme colle tre corde determinate dai punti di contatto dei lati, intorno ad una bisettrice interna. Qual'è il volume del solido generato dei tre triangoli parziali situati ai vertici del triangolo primitivo?

231. Un quadrato di lato a ruota intorno alla diagonale. Qual'è il volume del solido generato in tal modo?

232. Un triangolo isoscele di base b e altezza h e un triangolo equilatero ad esso equivalente ruotano ciascuno intorno alla rispettiva altezza. In quale rapporto stanno i volumi dei due solidi casi generati? Possono essere uguali?

233. Le superficie laterali e i solidi dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi.

234. Dividere la superficie laterale di un cono, o di un tronco di cono, in due parti uguali mediante un piano parallelo alle basi.

235. Qual'è la base del cilindro che ha la medesima altezza e la medesima superficie laterale del tronco di cono, di cui siano r_1, r_2, $(r_1 < r_2)$ i raggi delle due basi ed a l'apotema?

236. Iscrivere in un cono dato un cilindro di volume massimo, o, inversamente, circoscrivere a un cilindro un cono di volume minimo. [Un cilindro si dice *iscritto* in un cono se ha una base sulla base del cono e l'altra base è una sezione circolare del cono].

237. Fra i coni, che hanno un dato apotema, trovar quello di massimo volume.

238. Fra i cilindri iscritti in un dato cono trovare quello che ha la massima superficie totale.

239. Un tronco di cono alto cm. 6 ha il volume di cm.^{3} 571,48 e la superficie laterale di cm.^{2} 314. Calcolare i raggi delle due basi.

240. In un tronco di cono di cm². 376,80 di superficie e di cm. 10 di apotema, i raggi stanno nel rapporto 1:5. Quali sono le loro lunghezze?

241. In un tronco di cono alto cm. 10 e aventi il volume di cm.³ 1224,60 i due raggi delle basi stanno fra loro nel rapporto 1:3. Quali sono le loro lunghezze?

242. La somma dei raggi di base di un tronco di cono alto cm. 21 e avente il volume di cm.³ 2926 è data da cm. 13. Quali sono questi raggi? Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$.

243. In un tronco di cono alto cm. 5 e avente il volume di cm.³ 439,60 i due raggi di base diversificano di cm. 6. Quali sono le loro lunghezze?

244. Un tronco di cono alto cm. 12 ha il volume di m.³ 616. Quali sono le lunghezze dei raggi delle due basi se il loro prodotto è di m.² 15? Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$.

245. Un tronco di cono avente l'altezza di cm. 12 e l'apotema di cm. 13 ha il volume di cm.³ 1670,48. Quali sono le lunghezze dei raggi delle basi?

246. La somma delle basi di un tronco di cono alto m. 3 è di m.² 251,20 e la superficie laterale è di m.² 188,40. Quali sono le lunghezze dei raggi delle due basi?

247. Un tronco di cono, la cui sezione piana per l'asse è iscritta in un cerchio di m.² 67,10 di area, ha la stessa altezza e lo stesso volume di un cono il cui raggio di base è di m. 7. Calcolare l'altezza e i raggi delle basi del tronco.

248. I raggi delle due basi di un tronco di cono e l'apotema sono dati a meno di 1 cm. rispettivamente da m. 15,23; m. 8,45; m. 14,18. Con quale approssimazione si potrà avere: 1°) la superficie totale? 2°) il volume?

249. In un liquido di densità d si tuffa un tronco di cono omogeneo di densità d': i raggi delle basi sono R ed r e l'altezza h. Calcolare l'altezza della parte immersa e il diametro della sezione fatta dal piano di livello del liquido.

VIII.

250. Si può condurre una sfera equidistante da 5 punti dati nello spazio? Vi sono soluzioni? [Dicesi *distanza* di un punto P da una superficie sferica di centro O il *minimo* dei segmenti che da P vanno alla sfera; esso trovasi sulla retta PO].

251. Dimostrare che se due cerchi, situati in piani diversi hanno comune un punto e la tangente in esso, si trovano su di una stessa sfera.

252. Calcolare le lunghezze degli spigoli del tetraedro regolare, del cubo e dell'ottaedro regolare iscritti nella sfera di raggio r.

253. Qual'è il raggio di una sfera che ha lo stesso volume della somma di due cubi, di cui si sa che i volumi diversificano di 7 cm.^{3} e gli spigoli di 1 cm.?

254. In un cerchio massimo di una sfera è iscritto un esagono regolare e per ciascuno dei lati di questo si è condotto il piano perpendicolare al piano del cerchio massimo. La superficie prismatica così definita taglia sulla sfera due poligoni (a lati circolari) uguali. Trovarne l'area e costruire graficamente un cerchio avente la medesima area.

255. In un cono equilatero (diametro di base = apotema) è iscritta una sfera, tangente internamente alla base e alla superficie laterale. In che rapporto stanno: *a*) i volumi, *b*) le superficie totali dei due solidi?

256. Un triangolo equilatero e il cerchio iscritto ruotano insieme intorno all'altezza del triangolo. L'area del cerchio di contatto del cono e della sfera così generati ha un'area di cm.^{2} a. Calcolare il volume della sfera e la superficie laterale del cono. Caso numerico: $a = 3625$.

257. La sfera iscritta in un cono equilatero abbia il volume di 1 m.^{3}. Quali sono le dimensioni del cono? In che rapporto vien divisa la sua superficie laterale dalla circonferenza di contatto con la sfera?

258. Due sfere di raggio uguale a dm. 2 e dm. 3 rispettivamente sono tangenti esternamente fra loro e internamente ad un cono (la prima solo alla superficie laterale, la seconda anche alla base). Qual'è il volume del cono?

259. Due sfere disuguali sono tangenti internamente alla superficie laterale di un cono e la maggiore anche alla base di quello. Se il raggio di base del cono è di dm. 2 e se il volume della sfera maggiore è doppio di quello dell'altra, qual'è l'altezza del cono?

260. Sapendo che il metro è la diecimilionesima parte del quarto del meridiano terreste, calcolare, a meno di 1 Km., l'area della superficie della Terra, supposta sferica.

261. Il volume di una sfera e m.^{3} 1,4286 a meno di 100 cm.^{3}. Con quale approssimazione al più si può ottenere il raggio?

262. Cicerone, trovandosi questore in Sicilia (75 a. C.), scoperse a Siracusa la tomba di Archimede, riconoscendola dal fatto che sulla pietra sepolcrale erano incisi, in memoria di una delle scoperte di quel sommo Geometra, una sfera e un cilindro di ugual volume. Si confrontino le superficie totali di siffatti corpi nelle seguenti tre ipotesi: 1) che il cilindro abbia uguali il diametro di base e l'altezza: 2) che il diametro del cilindro sia uguale a quello della sfera; 3) che l'altezza del cilindro sia uguale al diametro della sfera.

263. Keplero insegna che le distanze di Marte e Giove dal Sole stanno fra loro come i raggi di due sfere che siano l'una iscritta e l'altra circoscritta ad un tetraedro regolare. Qual'è il rapporto di codeste due distanze?

264. In che rapporto stanno fra loro i diametri di due sfere di una medesima sostanza, delle quali l'una pesi il doppio dell'altra?

265. In che rapporto stanno i volumi di una sfera, di un cilindro e di un cono tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro e come raggio delle basi il raggio della sfera?

266. La Terra, il Sole e la Luna, considerati come sfere, hanno raggi che stanno fra loro come $r:108\,r:0{,}27\,r$, e la distanza dei centri della Luna e della Terra è uguale a $60\,r$. Si domanda:

a) Quante sfere uguali alla Terra si potrebbero formare col Sole?

b) Quante sfere si potrebbero costruire col Sole, le quali fossero uguali alla sfera tangente esternamente tanto alla Terra quanto alla Luna?

267. In quale rapporto restano divisi la superficie e il volume di una sfera dal piano di una delle facce del cubo iscritto?

268. Il solido di rotazione generato da un esagono regolare, che ruoti intorno ad un suo lato, è uguale al solido della sfera, il cui raggio è triplo di codesto lato.

269. Se ad una sfera si circoscrivono il cilindro e il cono, il cui apotema sia uguale al diametro della base, la superficie totale del cilindro è media geometrica fra la superficie della sfera e la superficie totale del cono; il cilindro è medio geometrico fra la sfera e il cono. Codeste tre superficie e codesti tre solidi sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

270. Se la superficie di un cerchio minore di una sfera è uguale alla sesta parte della superficie della sfera stessa, il diametro di codesto cerchio, e i lati del quadrato e del triangolo iscritti in esso sono gli spigoli rispettivamente del tetraedro, dell'esaedro e dell'ottaedro regolari, iscritti in codesta sfera.

271. Si trasformi una sfera in un cono di ugual volume, la cui superficie laterale sia tripla della base. Quali sono le dimensioni del cono, espresse per mezzo del raggio della sfera?

272. Con un settore circolare di raggio a e di angolo al centro di 120° si costruisce un cono e a questo si circoscrive una sfera. Come stanno fra loro le superficie totali e i volumi dei due solidi?

273. Ad un cilindro, la cui superficie totale è di cm.^{2} 9680, si può circoscrivere una sfera di cm. 50 di raggio: calcolare l'altezza e il raggio di base del cilindro. Si prenda $\pi = \frac{22}{7}$.

274. Come stanno fra loro le superficie di una sfera, di un cilindro e di un cono, tali che il cilindro e il cono abbiano come altezza il diametro e come raggio delle basi il raggio della sfera?

275. Iscrivere in una sfera un cilindro, di cui la somma delle basi sia uguale alla superficie laterale. (Un cilindro o un tronco di cono si dice *iscritto* in una sfera se le due basi sono cerchi, sezioni parallele della sfera).

276. Calcolare i raggi delle basi di un tronco di cono iscritto in una sfera, conoscendo il volume e l'altezza del tronco.

277. Ad un emisfero di 3 cm. di raggio si vuol circoscrivere un tronco di cono (colla base maggiore sul piano base dell'emisfero e la faccia minore tangente nel suo centro all'emisfero) il quale abbia il volume di cm.^{3} 97,34. Calcolare i raggi delle basi del tronco. Si dimostri prima geometricamente che l'apotema del cono è uguale al raggio della base maggiore.

278. Quali sono le lunghezze dei raggi delle basi di un tronco di cono, circoscritto ad una sfera di raggio r, e avente un volume che sia una volta e mezzo quello della sfera?

279. Un tronco di cono, circoscritto ad una sfera di cm. 6 di raggio, ha un volume di cm.^{3} 1672. Calcolare l'altezza, i raggi di base e l'apotema, prendendo $\pi = \frac{22}{7}$.

280. Iscrivere in una sfera data un cilindro di superficie totale data.

281. Trovare il massimo della superficie laterale, della superficie totale, del volume di un cilindro o di un cono iscritto in una sfera data.

282. Circoscrivere a una sfera data un cono o un tronco di cono di volume massimo.

283. Una calotta, la cui base dista dal centro della sfera di cm. 16 ha l'area di cm.^{2} 20,020. Calcolare il raggio della sfera e l'altezza della calotta, prendendo $\pi = \frac{22}{7}$.

284. I vetri da orologio sono in generale calotte sferiche. Se il diametro di un tal vetro è di cm. 4, quale sarà la saetta della calotta così formata e quanti vetri siffatti si potranno ricavare da una zona sferica di 1 m. di raggio, alta 4 cm. e avente come piano di simmetria il piano dell'equatore?

285. Quale parte della Francia si può vedere dall'alto della torre Eiffel? Questa torre è notoriamente alta 300 m.; e si prenda l'area della Francia uguale a 530000 Km.^{2}. Similmente quale parte della Terra si vede dall'alto di un monte alto 5 km.? Si prenda il raggio della Terra, supposta sferica, uguale a km. 6370.

286. Quale parte della superficie terrestre (supposta sferica) può vedere un aeronauta, che si innalzi in pallone a una altezza h sul livello del mare?

287. Dati in un piano due cerchi concentrici, se per essi si fanno passare due sfere, le quali siano tangenti internamente, la differenza delle due calotte che contengono il punto di contatto, ha superficie uguale alla corona circolare; cioè la calotta maggiore ha superficie uguale alla somma della calotta minore e della corona circolare. Si ha così un esempio di superficie avviluppante uguale alla superficie avviluppata (1).

288. Le zone, che due sfere concentriche intercettano sulle sfere passanti pel centro comune di esse, hanno superficie uguali.

289. Dividere una zona in media ed estrema regione per mezzo di un piano parallelo alle basi.

290. Dividere una sfera per mezzo di un piano, in guisa che l'area della sezione sia uguale alla differenza delle superficie delle due calotte.

291. Conoscendo la lunghezza dell'asse di una caldaia cilindrica, terminata da due emisferi, calcolare le dimensioni della parte cilindrica in modo che la superficie totale della caldaia sia uguale a una superficie data.

292. Un segmento sferico ad una sola base ha il volume di cm.^{3} 141,30, mentre il corrispondente settore sferico ha il volume di cm.^{3} 226,08. Calcolare il raggio della sfera e l'altezza del segmento.

293. Un segmento sferico a due basi di superficie totale di cm.^{2} 307,72 è compreso tra due cerchi uguali i cui piani distano di 8 cm. Calcolare il raggio della sfera, il raggio dei cerchi base, il volume del segmento e la superficie della zona corrispondente.

294. Quali sono i due raggi di una sfera cava, che ha lo spessore di 3 cm. e il volume di 792 cm.^{3}? Si prenda $\pi = \frac{22}{4}$.

295. Un cono, alto cm. 4 e avente il raggio di base di cm. 13 si vuol trasformare in una sfera cava il cui spessore sia di 1 cm. Quali ne saranno i due raggi?

296. Il valore metallico di una sfera cava di argento avente lo spessore di 5 cm. è di L. 11756,25. Quali saranno i due raggi (interno ed esterno) se il peso specifico dell'argento è di 10,5 e 1 kg. di argento costa L. 112,50?

297. Una cassula, il cui interno ha forma di calotta ed è profonda mm. 12, contiene, piena, 38 gr. di mercurio (peso specifico $= 13{,}6$). Quale è la sua superficie interna?

(1) I. Amaldi: *Pitagora*, Anno IX, n. 1-2.

298. Quale è la calotta sferica che ha una superficie data e solido massimo, e reciprocamente, quale è la calotta sferica che ha un volume dato e superficie minima?

299. Calcolare il volume V di una lente biconvessa, conoscendo i raggi r, r' delle due facce e lo spessore s.

$$V = \frac{12}{\pi} \frac{s}{r + r' - s} (s^2 - (r + r')s + 12rr').$$

IX.

300. Dato un cubo, i centri delle facce di esso e i piani pei vertici perpendicolari alle diagonali passanti per essi costituiscono rispettivamente i vertici e le facce di due ottaedri regolari. Qual'è il rapporto della loro superficie? Qual'è quello dei loro volumi?

301. In un tetraedro si iscrive un secondo tetraedro avente per vertici i centri di gravità delle faccie del primo. Dimostrare che i due tetraedri sono simili e calcolare il rapporto delle loro superficie e quello dei loro volumi.

302. Se per ciascun vertice di un tetraedro si conduce il piano parallelo alla faccia opposta, si ottiene un tetraedro simile al dato: qual'è il rapporto delle superficie e quale quello dei volumi dei due tetraedri.

303. Dividere una data piramide con un piano parallelo alla base in due parti proporzionali ad m, n.

304. Iscrivere ad una sfera data un cilindro simile ad un cilindro dato.

305. Trasformare la sfera di cm. 37 di raggio in un cilindro equilatero [altezza = diametro].

306. Trasformare il cubo di m. 2,5 di spigolo in un cono simile al cono che ha il raggio di base e l'altezza rispettivamente di cm. 3 e cm. 4. Si risolva lo stesso problema supponendo che codesto ultimo cono debba avere il raggio di base e l'altezza rispettivamente di cm. 4 e cm. 3.

307. Con 300 g. di argento (peso specifico = 10,5) si vuol costruire un fermacarte costituito da un cubo e da cinque sfere sovrapposte a piramide, di diametro uguale alla metà dello spigolo del cubo. Quali risulteranno le dimensioni del cubo e delle sfere?

X.

308. Un termometro segna 17° sotto zero. La sua temperatura si innalza anzitutto di 20° e poi si abbassa di 1° ad ogni 5 minuti. Quale temperatura segnerà esso dopo un quarto d'ora? Quando segnerà — 15°?

309. Il calendario russo ritarda attualmente di 13 giorni rispetto al nostro. Quali giorni corrispondono in Russia al nostro 1° Gennaio o al 1° Maggio o al 25 Dicembre? Quali date sul nostro calendario corrispondono a codeste stesse date, considerate rispetto al calendario russo?

310. Un tale, il cui orologio corre 8 minuti, esce da casa per recarsi alla stazione 13 minuti prima della partenza del treno. Se egli impiega per fare la strada 25 minuti, quale ritardo dovrà avere il treno, perchè quel tale possa prenderlo?

311. Qual'è la longitudine di Madrid rispetto al meridiano di Roma se rispetto al meridiano di Parigi la longitudine di Madrid e Roma sono rispettivamente di 6°1'30" Ovest e 10°7'3" Est? Quali saranno le longitudini, rispetto al meridiano di Roma, di Londra, Berlino, Vienna, Pietroburgo se le corrispondenti longitudini, rispetto al meridiano di Parigi, sono 2°25'57" Ovest, 11°3'28" Est, 14°2'27" Est, 27°58'8" Est?

312. Un kg. di acqua a 4° ha il volume di 1000 cm.³ e al variare della temperatura t subisce le dilatazioni d indicate in cm.³ dalla unita tabelletta:

$t =$ 0°	4°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$d =$ 0,1	0	0,3	0,9	1,7	2,9	4,3	5,9	7,7	9,7.

Rappresentare su carta millimetrica la grafica della dilatazione rappresentando con 1 cm. sull'asse x 10° e sull'asse y 1 cm³.

313. Rappresentare graficamente l'accrescimento in 20 anni di un capitale di L. 1000 collocato a frutto al $3\,{}^1/_2\,{}^0/_0$.

314. Si sa che il tempo impiegato dalla luce per venire dal Sole alla Terra è dato, al 1° di ciascun mese, dalla tabella seguente:

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
8'10"	8'11"	8'14"	8'18"	8'22"	8'25"
Luglio	**Agosto**	**Settembre**	**Ottobre**	**Novembre**	**Dicembre**
8'27"	8'26"	8'22"	8'19"	8'15"	8'11".

Rappresentare questi tempi con una grafica e ricavarne approssimativamente i tempi corrispondenti al 15 di ciascun mese (*interpolazione*).

315. La tassa per l'emissione dei vaglia postali nel Regno è stabilita come segue:

fino a L. 10			. . . .	cent.	10;
da »	10,01	a L.	25	»	20;
da »	25,01	a »	50	»	40;
da »	50,01	a »	75	»	60;
da »	75,01	a »	100	»	80;

e poi 20 cent. in più per ogni aumento di 100 L. o frazione di 100. L. Rappresentare codesta tariffa con una grafica (notando che la tassa aumenta qui per salti bruschi e non con continuità).

316. Rappresentare graficamente la dilatazione $y = 10\alpha t$ al variare della temperatura t di una sbarra lunga m. 10: *a*) di ferro ($\alpha = 0{,}000012$); *b*) di ottone ($\alpha = 0{,}000019$); *c*) di zinco ($\alpha = 0{,}000029$).

317. Tracciare su carta millimetrica (e dapprincipio si prenda $1 = 1$ cm.) le grafiche delle seguenti funzioni di 1° grado:

$$y = x + 5, \quad y = x - 5, \quad y = -x + 5, \quad y = -x - 5,$$

$$y = 3x, \quad y = -3x, \quad y = 3x + 4, \quad y = 3x - 4,$$

$$y = -3x + 4, \quad y = -3x - 4, \quad y = \frac{3}{5}x, \quad y = \frac{3}{5}x + 2,$$

$$y = -\frac{3}{5} - 3, \quad y = 0{,}1x, \quad y = -0{,}2x + 0{,}9.$$

318. Un ciclista, mantenendo una velocità costante, alle 2 e $^3/_4$ si trova a km. 18 dal suo punto di partenza e alle 3 e $^1/_4$ a km. 27. A quale ora è partito? Risolvere il problema graficamente e algebricamente.

319. Tracciare la grafica del cammino di un pedone che in 4 ore e $^3/_4$ percorre una distanza di km. 23.

320. Un treno riporta, ad ogni cambiamento di rotaia, una scossa facilmente percettibile. Se ciascuna rotaia è lunga 15 m., per quanti secondi bisognerà contare codeste scosse, perchè il numero ottenuto fornisca la velocità (in chilometri all'ora) del treno?

321. Un automobilista vuol percorrere 230 km. in 3 ore. Dopo un'ora di viaggio, per un guasto al motore, è costretto a star fermo un quarto d'ora. Quale velocità dovrà tenere nella seconda parte del viaggio? Rappresentare l'intero viaggio con un diagramma.

322. In una manovra un reggimento marcia, con la velocità di 5 km. all'ora, contro il nemico: un volontario-ciclista, che va 5 volte più veloce, si stacca dal reggimento e, dopo avere incontrato il nemico, torna indietro e si riunisce al reggimento due ore e mezzo dopo la partenza. Si domanda a quale distanza dal nostro reggimento si trova, in codesto istante, il nemico, se si avvicina, marciando anch'esso a 5 km. all'ora? Risolvere il problema graficamente e poi algebricamente.

323. Si misuri una stessa temperatura con un termometro Celsius e con un termometro Fahrenheit ed espressa la seconda misura per mezzo della prima, si tracci su carta quadrettata la grafica della funzione così ottenuta. Notoriamente a 0° C. corrispondono 32° F. e ad ogni aumento di 5° C. corrisponde un aumento di 9° F.

Si deduca dalla grafica quali temperature F. corrispondono a 10° C., 27° C., — 15° C., e quali temperature F. corrispondono a 0° F., 50° F., 117° F.

324. Tracciata sul foglio del diagramma precedente la grafica della temperatura Reaumur, espressa per mezzo della temperatura Celsius, si determini graficamente (e poi si assodi algebricamente) a quale temperatura C. i due termometri F. e R. segnano la medesima temperatura.

325. Si determinino graficamente le soluzioni *intere* delle *equazioni indeterminate di* 1° *grado:*

$$3y-2x-6=0, \quad 5y-4x+15=0$$
$$7y+3x-14=0, \quad 9y+4x+9=0.$$

[Si risolva ciascuna di codeste equazioni rispetto ad y e si rappresenti graficamente su carta quadrettata la funzione così ottenuta].

326. Rappresentare graficamente il moto delle due lancette di un orologio. Determinare in tal modo gli istanti in cui esse si sovrappongono.

327. Due viandanti o due ciclisti percorrono una stessa strada nello stesso senso (oppure in senso inverso). Il primo percorre c_1 km. all'ora, il secondo c_2. Quando e dove essi passeranno pel medesimo punto del loro cammino, se inizialmente si trovavano a k km. di distanza l'uno dall'altro

$c_1=4$	3	3,6	3,9	14,1	13,5
$c_2=5$	4	4,2	4,7	16,5	17,8
$k=2{,}7$	4,2	3,9	3,87	3,4	3.

Risolvere graficamente e poi algebricamente.

328. Due viandanti o ciclisti si sono messi in cammino su di una via rettilinea, partendo da uno stesso punto, il primo con la velocità di c_1 m., l'altro con la velocità di c_2 m. al secondo, e tutti e due nella stessa direzione (oppure in direzioni opposte). Quando accadrà che la loro distanza sia di h m.?

$c_1=8$	1,6	1,3	5	4,8	1
$c_2=5$	1,4	0,8	1,5	1,2	4
$h=78$	1000	700	3000	18000	150.

Graficamente e algebricamente.

329. Due viandanti camminano su di una stessa strada con la velocità di km. 3,8 all'ora il primo e di km. 4,2 il secondo l'uno incontro all'altro (oppure nello stesso senso). A quale distanza erano essi inizialmente, se si incontrano (o l'uno raggiunge l'altro) dopo 3^h oppure dopo $1^h20'$ oppure dopo $36'$? Graficamente e algebricamente.

330. Su di una pista chiusa di m. 1440 di circuito partono insieme due cavalieri dallo stesso punto, colle velocità di m. c_1 e m. c_2 al secondo e nello stesso senso (oppure in opposte direzioni). Quando e dove l'uno vien raggiunto dall'altro (oppure si incontrano)?

$c_1 = 6{,}5$	6	6	5,8	4,5	2,4
$c_2 = 5{,}5$	4	4,8	6,2	6,3	4,8.

Graficamente e algebricamente.

331. Due viandanti partono, con la velocità di m. c_1 e m. c_2 al secondo rispettivamente da due luoghi distanti di km. k e si vanno incontro. Quando e dove si incontrano se il secondo parte un'ora dopo dell'altro (oppure 20 minuti prima)?

$c_1 = 1{,}4$	1,5	1,45	1,55
$c_2 = 1{,}6$	1,2	1,25	1,35
$k = 25{,}74$	13,5	12,51	22,5

Graficamente e algebricamente.

332. Un pedone parte da un punto A e s'incammina alla velocità di km. k_1 all'ora: m minuti dopo gli vien mandato dietro un ciclista che fa k_2 km. all'ora. Quando e dove lo raggiungerà?

$k_1 = 4$	3	4	3	3,5	3,6
$k_2 = 14$	15	16	17	14,7	18
$m = 29$	10	15	28	40	96

Graficamente e algebricamente.

333. Su di una circonferenza si muovono, a partire da uno stesso punto, due punti con le velocità (angolari) di $v_1{}^0$ e $v_2{}^0$ al secondo, in senso opposto (oppure nello stesso senso). Quando e dove si incontreranno (o l'uno raggiungerà l'altro)?

$v_1{}^0 = 5^\circ$	15°	$5{,}4^\circ$	$16{,}8^\circ$	192°	111°
$v_2{}^0 = 7^\circ$	9°	$12{,}6^\circ$	$12{,}0^\circ$	48°	39°

Graficamente e algebricamente.

334. Quando e dove, sotto le ipotesi dell'eserc. prec., accadrà che i due punti siano alla distanza angolare di 90°?

335. Su di una circonferenza si muovono due punti, la cui distanza è di 60°, con le velocità (angolari) di $v_1{}^0$, $v_2{}^0$ al secondo, nello stesso senso. Quando l'uno raggiungerà l'altro, se precede il punto più lento? E quando, se precede il più rapido?

$$v_1^\circ = 15^\circ \quad 37{,}5^\circ \quad 1{,}75^\circ \quad 1{,}85^\circ \quad 120^\circ \quad 180^\circ$$
$$v_2^\circ = \ 3^\circ \quad 22{,}5^\circ \quad 0{,}25^\circ \quad 0{,}65^\circ \quad 90^\circ \quad 30^\circ$$

Graficamente e algebricamente.

336. Su di una pista circolare due ciclisti, partendo dallo stesso punto corrono in senso opposto (oppure nello stesso senso): il primo compie l'intero giro in t_1 secondi, l'altro in t_2 secondi. Dopo quanti secondi si incontreranno (o l'uno raggiungerà l'altro)?

$$t_1 = 60 \quad 90 \quad 56 \quad 36 \quad 60 \quad 112$$
$$t_2 = 30 \quad 60 \quad 42 \quad 45 \quad 84 \quad 144$$

Graficamente e algebricamente.

337. Costruire per punti le grafiche delle funzioni:

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = -0{,}2x^2, \quad y = x^2 + 3, \quad y = -x^2 + 4, \quad y = 2x^2 - 5,$$
$$y = \frac{-1}{2}x^2 - 2, \quad y = x^2 + 3x, \quad y = x^2 - 3x, \quad y = -x^2 + 3x,$$
$$y = x^2 + x - 12, \quad y = x^2 - x - 6, \quad y = 10 - 3x - x^2$$
$$y = x^2 - 7x + 10, \quad y = x^2 - 7x + 6, \quad y = x^2 - 5x - 6$$
$$y = (x - 1)(x - 4), \quad y = (x + 1)(x - 4), \quad y = (1 - x)(x + 4).$$

In ciascun caso si dica se ed in quali punti la parabola intersechi l'asse delle x e l'asse delle y.

338. *a*) Determinare i punti di intersezione delle due parabole

$$y = x^2 - x - 4, \quad y = -3x^2 - 3x + 20.$$

b) Determinare le intersezioni delle due parabole

$$y = 2x^2 - 5x + 7, \quad y = 2x^2 + 8x - 20$$

339. Le due parabole

$$y = -3x^2 - 2x - 4, \quad y = 2x^2 + 7x + 1$$

si intersecano?

340. Discutere i vari casi possibili per le intersezioni delle due parabole

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = a'x^2 + b'x + c'.$$

341. Rappresentare con una grafica l'area della superficie totale di un cubo, considerata come funzione dello spigolo.

342. Similmente per l'area laterale e l'area totale della superficie cilindrica di data altezza come funzione del raggio; pel volume del cilindro di data altezza come funzione del raggio;

per l'area totale della superficie conica di dato apotema come funzione del raggio; pel volume del cono di data altezza come funzione del raggio; per l'area della superficie sferica come funzione del raggio.

343. Si determini quali traslazioni parallele all'asse x e all'asse y si debbano far subire alla parabola $y=x^2$ per ottenere le parabole seguenti:

$$y=(x-2)^2+4, \quad y=(x+3)^2-5$$
$$y=x^2-8x+6, \quad y=x^2+7x+4$$
$$y=x^2+6x-10, \quad y=x^2-3x-2.$$

344. Una parabola uguale alla grafica di $y=2x^2$ deve toccare l'asse x nel punto di ascissa 5 (oppure -7): quale sarà la funzione di 2° grado corrispondente?

345. Una parabola uguale alla grafica di $y=-3x^2$ deve intersecare l'asse x nei punti di ascisse -1 e 2 oppure 3 e 7 oppure $-2{,}5$ e 4,8. Quale sarà rispettivamente la funzione di 2° grado da essa rappresentata? Quale sarà il vertice della parabola ottenuta?

346. Risolvere graficamente, con l'approssimazione di 0,1, le seguenti equazioni di 2° grado:

$$x^2-6x+4=0 \qquad x^2+3x-1=0$$
$$4x^2-3x-4=0 \qquad x^2-3x-4=0$$
$$4x^2+4x-3=0 \qquad 10x^2+15x-324=0.$$

Basterà tracciare una volta per tutte con cura la parabola $y=x^2$ su di un foglio di carta millemetrica (prendendo come unità il cm.) e poi, tracciata una retta con tratto nitido e sottile su di un foglio di carta trasparente, adagiare questo foglio sulla parabola in modo che la retta assuma la posizione voluta, ecc. (n. 219).

347. Determinare il massimo o il minimo delle seguenti funzioni di 2° grado

$$y=x^2+2, \quad y=-2x^2-5$$
$$y=3x^2-4x, \quad y=-5x^2+7x$$
$$y=x^2+3x+4, \quad y=x^2-4x+2$$
$$y=2x^2-\frac{x}{2}+4, \quad y=2x^2-8x+1$$
$$y=(a-x)(b-x), \quad y=(a+x)(b+x)$$
$$y=(a-x)(b+x), \quad y=(a-x)^2+(b+x)^2$$
$$y=2x^2-8x+11, \quad y=-3x^2+6x-1$$
$$y=-2x^2+20x-50, \quad y=3x^2+12x+12$$
$$y=x^2+4x, \quad y=-x^2-6x-2.$$

348. Di tutti i rettangoli aventi un dato perimetro qual'è quello di massima area?

349. Dividere un segmento lungo cm. 24 in due parti, la cui somma dei quadrati sia minima.

350. Dei triangoli, in cui la base e l'altezza hanno una data somma a, qual'è quello di massima area?

351. Iscrivere in un cerchio dato il rettangolo di massima area.

352. Iscrivere in un cerchio dato il rettangolo di massimo perimetro.

353. Iscrivere ad un dato triangolo il rettangolo di massima area. [Il rettangolo deve avere la base sulla base del triangolo e gli altri due vertici sui due lati rimanenti del triangolo].

354. Un tronco di cono ha una data altezza h e i raggi delle basi hanno una data somma s. Quali dovranno essere questi raggi perchè il volume del tronco riesca massimo?

355. Da un dato cerchio ritagliare un settore, che fornisca la superficie laterale del cono di massimo volume. [Si prenda come variabile l'angolo al centro del settore e come funzione il quadrato del volume].

356. Si lanciano in alto due pietre sulla stessa verticale, a t secondi di intervallo, con le velocità v e v'. Si incontreranno? Valersi di grafiche.

357. Si lanciano sulla stessa retta nello stesso senso due mobili, l'uno con moto uniforme, l'altro con moto uniformemente accelerato. Studiare, con l'aiuto di diagrammi, i diversi casi che si potranno presentare riguardo agli incontri dei due mobili.

358. Mostrare che la legge del Boyle si può anche enunciare: *La densità di un gas è proporzionale alla pressione.* Quale sarebbe la grafica di codesta legge rispetto a queste nuove coordinate: densità e pressione?

359. Si risolva graficamente il sistema

$$x+y=3$$
$$xy=1.$$

Risolte le due equazioni rispetto ad y

$$y=-x+3, \quad y=\frac{1}{x}$$

si traccino su carta millimetrata le grafiche delle due funzioni così ottenute (*retta* e *iperbola equilatera*) e si noti che le soluzioni del sistema sono le coppie di coordinate delle intersezioni delle due grafiche.

Analogamente si interpreti geometricamente la risoluzione di ciascuno dei sistemi dell'eserc. 157.

360. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni:

$$y = \frac{1}{4x}, \quad y = -\frac{1}{3x},$$

$$y = \frac{1}{x} + 3, \quad y = \frac{2}{x} - 4.$$

361. Dimostrare che la funzione

$$y = \frac{ax + b}{x}$$

è rappresentata da un'iperbola uguale a quella che rappresenta la

$$y = \frac{b}{x}$$

e ottenuta da questa con una traslazione parallela all'asse y, data in valore e segno da a.

362. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni

$$y = \frac{1}{x - 1}, \quad y = \frac{2}{x + 2}, \quad y = \frac{3}{2 - x}.$$

363. Dimostrare che la funzione

$$y = \frac{b}{x + d}$$

è rappresentata da un'iperbola uguale a quella che rappresenta la

$$y = \frac{b}{x}$$

e deducibile da questa con una traslazione parallela all'asse x di ampiezza data in valore e segno da $-d$.

364. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni

$$y = \frac{1}{x - 2} + 3, \quad y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

$$y = \frac{3x - 1}{x + 5}, \quad y = \frac{4x - 5}{7 - x}.$$

365. Dedurre dagli eserc. 361, 363, quale sia la grafica della funzione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

[Si osservi che essa può scriversi

$$y = \frac{bc - ad}{c[cx + d]} + \frac{a}{c}].$$

366. Dimostrare che: 1) fissati gli assi, pei punti della circonferenza di centro nell'origine e di raggio 5 la somma dei quadrati dell'ascissa e dell'ordinata è 25; cioè le coordinate x, y di ogni punto della detta circonferenza soddisfano all'equazione

$$x^2 + y^2 = 25;$$

2) viceversa, ogni punto le cui coordinate soddisfano all'equazione precedente ha dall'origine la distanza 5.

367. Per quali valori di x resta definita la funzione

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}\ ?$$

Si noti che si tratta di una *funzione a due valori* (cioè tale che, in quell'intervallo di valori di x dove è definita, ha per ogni valore di x due valori). Si dimostri che la rispettiva grafica è la circonferenza di centro nell'origine e di raggio 5. [Basta mandar via il radicale e ricordare l'eserc. prec.].

368. Ripetere gli esercizi precedenti sulle equazioni

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 3$$

che risolte rispetto ad y danno le funzioni

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \quad y = \pm\sqrt{3 - x^2}.$$

Quali sono i raggi delle circonferenze, che forniscono le rispettive grafiche?

369. Risolvere graficamente, mediante *l'intersezione di una retta e di una circonferenza,* il sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x + y &= 7. \end{aligned}$$

Si ricordi l'eserc. 359.

Analogamente si interpretino geometricamente i sistemi dell'eserc. 163.

370. Discutere, servendosi della interpretazione geometrica, i vari casi che si possono presentare per le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x \pm y &= h \end{aligned}$$

371. Risolvere graficamente il sistema

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$xy = -8.$$

La risoluzione si riduce alla ricerca delle *intersezioni di una circonferenza e di una iperbola equilatera.*

Analogamente pei sistemi dell'eserc. 164.

372. Discutere, col sussidio della interpretazione geometrica, i vari casi possibili per le soluzioni del sistema

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$xy = a.$$

INDICE

I.

Misure approssimate e numeri irrazionali

II.

Aree piane: Poligoni e cerchi

III.

Problemi geometrici di 1° e 2° grado. Radici quadrate

IV.

Equazioni di secondo grado

V.

Radici d'indice qualsiasi e calcolo dei radicali

VI.

Prismi e cilindri

VII.

Piramidi e coni

VIII.

Sfera

IX.

Solidi simili

X.

Funzioni e diagrammi

Appendice

Esercizi ed applicazioni