Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche

vol. **I**
Zanichelli, Bologna, 1915.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

DI

FEDERIGO ENRIQUES

PUBBLICATE PER CURA DEL DOTT. OSCAR CHISINI

VOLUME I

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

PREFAZIONE

Scopo e titolo del trattato. — Le questioni che qui vengono studiate sotto il titolo di « teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » hanno formato oggetto d'un insegnamento, proseguito durante più anni all'Università di Bologna. Il dott. OSCAR CHISINI che ha raccolto dapprima quelle lezioni, ha atteso lungamente a svolgerne il disegno traendone anche occasione a ricerche originali; così il suo lavoro ha costituito la trama del trattato, di cui oggi offriamo al pubblico il primo volume, frutto di un'intima ed assidua collaborazione.

Il titolo dell'opera non deve intendersi come promessa di toccare ad un termine ove abbiano risposta i problemi più elevati dalla scienza, ma vuol significare lo spirito generale e lo scopo delle ricerche rispetto a cui il trattato può riguardarsi come introduzione.

A quel modo che la geometria differenziale, i problemi delle tangenti e delle aree, hanno dato origine ad un Calcolo infinitesimale, che si svolge di poi in stretta connessione colle idee geometriche direttrici, allo stesso modo la geometria algebrica — ove confluiscono il metodo delle coordinate e quello delle proiezioni, tutti i diversi ordini di concetti suggeriti dallo studio delle curve — riesce ormai ad una *dottrina qualitativa* delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra e che vorremmo pur designare con questo nome, superando la significazione più ristretta che vi attribuiscono gli specialisti. Siffatta dottrina possiede invero la sua base ugualmente negli algoritmi dell'Aritmetica e nei principî dell'Analisi infinitesimale; anzi lo studio delle singolarità, e in genere delle proprietà *differenziali* delle curve e delle varietà algebriche, forma un capitolo di quell'Analisi, che si maturò — com'è noto — per opera della scuola newtoniana. Ma lo sviluppo ulteriore della dottrina è dominato dalla veduta sintetica delle funzioni considerate nella loro *integrità*, e perciò si riattacca naturalmente al campo delle variabili complesse; del pari a questa concezione d'insieme si sono andati via via conformando i metodi geometrici, elaborati durante il secolo decimonono sotto l'impulso delle idee direttive di MONGE e di PONCELET.

Purismo e ideale classico del trattato. — Lo sviluppo di concetti e di metodi diversi, coltivati per lungo tempo come rami distinti del sapere matematico, la varietà dei linguaggi che riflette differenti intuizioni, tutta la immane somma degli acquisti fatti, impone grave carico allo studioso che miri oggi a far progredire in qualche maniera i problemi attinenti alla più generale considerazione dell'Algebra.

Non è più il tempo in cui possa presumersi di dominare l'intera materia con una sola veduta, come il trattato di SALMON volle fare ordinando lo studio delle curve algebriche sulla base della teoria delle forme invariantive e il CREMONA movendo da pochi principî sintetici sulle polari. La nostra epoca ha superato decisamente il purismo delle scuole analitiche e geometriche, traendo da ciascuna gl'istrumenti della ricerca; il ravvicinamento dei metodi che risponde al programma eclettico di CLEBSCH, ha segnato un reale e fecondo progresso.

Tuttavia i criterî scientifici e didattici onde sorse l'aspirazione puristica non hanno perduto il loro valore, sebbene si esprimano oggi in modi di pensiero meno esclusivi. L'opportunità del successo euristico, che domina ogni altra considerazione, pare a non pochi una ragione di compromesso, sulla quale mal saprebbe fondarsi il trattato organico di un ramo delle Matematiche; anche perchè fra i metodi sopra accennati ve ne sono alcuni che, ottimamente aiutando alla scoperta, sembrano rispondere meno bene al rigore della prova.

Presupposto di tali aspirazioni resta infine l'antico modello classico del trattato, che si riattacca alla venerabile tradizione dell'EUCLIDE: l'idea di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che debba apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sè le incerte e mutevoli suggestioni del concreto, tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca o scopra nuove difficoltà, rompendo l'armonia del sistema.

Ma questo ideale del sistema, che sembra male adattarsi alla particolare materia delle nostre Lezioni, contrasta d'altra parte colla generale filosofia della scienza, frutto della critica moderna. Infatti la critica logica e gnoseologica riesce in ultima analisi a definire il campo della logica ed a riconoscere in ciascuna teoria gli elementi intuitivi di diverso ordine che le conferiscono significato e valore; infine approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, codesta critica oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase d'un processo unico, che sale dal particolare al generale per ridiscendere al particolare.

Vi è luogo a chiedere se questo concepimento dinamico del sapere, che ognor più prende il posto del vecchio concepimento statico, non debba comporre in qualche modo anche l'antitesi tradizionale fra ricerca ed esposizione sistematica, e così fra scienza e storia della scienza. Chi accolga un tale ordine d'idee sarà naturalmente condotto ad un nuovo modo di pensare il trattato, più vicino alla realtà del progresso scientifico.

Criterî trattatistici: rigore e generalità. — Anzitutto giova chiarire che non si vuol togliere al trattato il proprio carattere letterario, che esso deve rimanere esposizione — quanto è possibile perfetta — dei risultati conseguiti in un ordine di problemi, cioè resoconto e sistemazione dello stato attuale della scienza. Ma, come questo stato viene pensato qual grado di uno sviluppo, così diventa importante di esporre accanto alla verità le vie — spesso diverse — che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie.

Ciò non significa punto che si voglia far gettito del *rigore* matematico, che esprime la suprema esigenza di conservazione del nostro sapere; ma al culto del rigore formale che — affettando di bandire ogni manchevolezza — talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore, vuolsi sostituire il culto sincero del rigore concepito come abito di correzione e di critica. Da questo punto di vista acquistano speciale interesse gli errori storici, i paradossi, i sofismi, che spesso hanno segnato la via delle più importanti scoperte.

Anche l'aspirazione comune alla *generalità*, compare in nuova luce secondo i criterî della nostra trattatistica.

Il criterio di ricerca così splendidamente fatto valere da Abel « porre i problemi nell'aspetto più generale per scoprirne la vera natura », designava l'indirizzo dell'Analisi che vuol liberare la conoscenza dei rapporti qualitativi dalle complicazioni accidentali dei calcoli, cioè appunto quell'indirizzo di cui è massima attuazione la teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.

Ma il precetto delle generalità ha ricevuto altra interpretazione presso i geometri contemporanei, specialmente nel nostro paese. Si è eretto a principio di massima che ogni teorema debba enunciarsi sempre nella forma più generale di cui è suscettibile, e cioè per n variabili anzichè per due o per tre, e per un qualsivoglia grado in cambio che per i primi gradi, e così di seguito.

Conviene riconoscere che quest'abito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri, e merita di essere seriamente contrastato. Giacchè in primo luogo, la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini, ed — in secondo luogo — crea nei giovani studiosi la lusinga delle facili generalizzazioni, puramente formali.

La storia della scienza c'insegna che altro è l'ideale della generalità nei grandi fattori del progresso matematico; pei quali il senso vero della conoscenza generale si commisura al particolare significativo che vi è contenuto. Così ad ogni problema compete in qualche modo un proprio grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua vera natura; ed importa che lo studioso apprenda a riconoscere come potenzialmente data in questo la generalizzazione ulteriore.

Comprensione storica della scienza. — Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia. La rigida distinzione che si fa di consueto fra scienza e storia della scienza, è fondata sul concetto di questa come pura erudizione letteraria; così intesa la storia reca alla teoria un estrinseco complemento d'informazione cronologica e bibliografica. Ma assai diverso significato ha la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza, ed ha posto nell'esposizione delle dottrine, per quanto giovi spogliarla — nella misura del possibile — da troppo ingombrante ricchezza di citazioni, che tolga la visione sintetica del progresso nelle sue grandi linee.

Il richiamo al passato non si disgiunge qui dall'interesse del presente, che vi attinge solo la visione di una più larga realtà, e la vivifica ricreando la scoperta.

Uso del trattato. — Il programma che siamo venuti disegnando, conviene ad un'opera ideale d'insegnamento, che nella pratica può esplicarsi per gradi, ed in parte con metodo ciclico, promovendo la partecipazione attiva degli allievi, a cui la verità non deve porgersi come qualcosa di dato, bensì come mèta da guadagnare da sè. Ma il trattato, che vuole fissare una tale opera nella forma immobile dello scritto, urta contro difficoltà che occorre considerare più da vicino. Giacchè il modo d'esposizione che ci è parso ovviare — quanto è possibile — a tali difficoltà, mira a contemperare le esigenze di diversi lettori, anche principianti, ma chiede a ciascuno un'intelligenza attiva nell'uso del trattato, quasi una collaborazione all'opera.

Anzitutto lo studioso deve prefiggersi chiaramente lo scopo della lettura: se questo sia di ottenere rapida informazione di certi resultati o metodi, ovvero di approfondire lo studio di qualche teoria, lumeggiandola sotto più aspetti. Nel primo caso egli trascorrerà senz'altro sulle varie dimostrazioni attenendosi alla più semplice, che è spesso la verifica analitica diretta col riferimento ad uno speciale sistema di coordinate, e — se si tratti d'un principiante — tralascerà gli sviluppi complementari e le note che si riferiscono a questioni più delicate o difficili. La designazione di « *Nota* » attribuita a taluni capitoli e paragrafi o parti di paragrafo, serve appunto di guida all'accennata scelta.

Le varie introduzioni, i richiami, gl'indici (istrumenti di orientamento sintetico!) saranno oggetto di particolare riflessione per chi voglia apprendere l'uso di queste Lezioni. Come criterio di massima ogni libro, ed anche ogni capitolo, sono costruiti in guisa che possano venire studiati come qualcosa a sè, ben inteso nella misura del possibile. Ma, se non andiamo errati, l'unità degli scopi balzerà fuori dalla varietà delle trattazioni, per lo studioso che ne approfondisca l'esame.

Al lettore che ricerchi qui particolarmente le notizie storiche conviene avvertire:

1) Che per la esatta indicazione bibliografica soliamo spesso rinviare ai trattati classici e a monografie informative appositamente scritte per servire come istrumenti di lavoro; di tali opere si trovano — nei luoghi opportuni — elenchi particolareggiati.

2) Che accanto alle citazioni aventi carattere storico occorre spesso (per uso dei principianti) di riferirci a trattati correnti, facilmente distinguibili dall'attento lettore.

3) Che infine il richiamo di un lavoro serve a designare in termini generici la scoperta di un teorema o l'introduzione di un concetto di dimostrazione; resta inteso che — anche in quest'ultimo caso — la dimostrazione viene da noi elaborata e ripensata indipendentemente dall'originale, e — dove occorra — resa completa e rigorosa.

Il vero significato di quest'ultima avvertenza si capirà facilmente ove si ricordi che qui la storia viene guadagnata attraverso la scienza, in servigio della scienza, e non viceversa: anzi vogliam dire che prima abbiamo ripensato — e talora svolto — la materia con piena libertà di spirito costruttivo, poi abbiam cercato di comprenderla storicamente, rendendoci conto dell'origine delle idee. Comunque questo metodo di lavoro possa venir giudicato da altri, esso è proprio a spiegare i pregi e i difetti che per avventura possano riconoscersi al nostro trattato, ed importa perciò che sia noto al lettore: infatti l'epoca in cui gli uomini di scienza nascondevano le traccie del proprio cammino è ormai oltrepassata; la nostra generazione considera giustamente come un dovere di render chiaro in ogni opera scientifica il sistema delle idee costruttive.

Programma. — Resterebbe da spiegare l'estensione ed i limiti del nostro programma. Ma a tale scopo ci sembra che bene provvedano gli elenchi dei capitoli e paragrafi e gl'indici analitici che accompagnano i successivi volumi; come già si può giudicare per il presente.

Diremo soltanto che a questo volume ne seguiranno due altri, attualmente in preparazione; il primo dei quali conterrà lo sviluppo algebrico della teoria delle curve, in rapporto alla polarità e ai covarianti che vi si collegano, le questioni di realità e di continuità, e l'analisi approfondita dei punti singolari; nell'altro (terzo ed ultimo della serie) avrà come oggetto lo studio delle proprietà delle curve, invarianti per trasformazioni birazionali.

È nella natura di un'opera come questa che il più assiduo studio non valga ad evitare difetti e lacune, che soltanto in seguito a successive revisioni e mediante un uso continuato possono avvertirsi e correggersi. A coloro che vorranno in tal guisa aiutarci, in vista di una eventuale edizione ulteriore, esprimiamo fin d'ora la più viva riconoscenza. Frattanto siamo cordialmente grati al sig. AMEDEO AGOSTINI per l'aiuto datoci nella correzione delle bozze di stampa nonchè nel raccogliere ed ordinare il materiale degl'indici.

Bologna, Giugno 1915.

FEDERIGO ENRIQUES

LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

LIBRO PRIMO

INTRODUZIONE

TRATTATI DI GEOMETRIA PROIETTIVA E ANALITICA
utili a consultarsi

« Les Vérités mathématiques ne sont pas si faciles à trouver, qu'on doive chercher du mérite à se fermer quelqu'une des routes qui peuvent y conduire ». (CRAMER, « *Introduction à l'Analyse....* », p. VII).

J. V. PONCELET - *Traité des propriétés projectives des figures* - Parigi, 1822.

A. F. MÖBIUS - *Der barycentrische Calcul* - Lipsia, 1827.

J. STEINER - *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* - Berlino, 1832.

J. PLÜCKER - *System der analytischen Geometrie* - Berlino, 1835.

G. STAUDT - *Geometrie der Lage* - Norimberga, 1847. Traduzione italiana di M. Pieri - Torino, 1889.
— *Beiträge zur Geometrie der Lage* - Norimberga. 1856.

M. CHASLES - *Traité de Géométrie supérieure* - Parigi, Bachelier, 1852.

TH. REYE - *Geometrie der Lage.* - Lipsia 1866. Traduzione italiana di Faifofer, Venezia, Tip. Emiliana, 1884.

G. SALMON - *A Treatise on Conic Sections.* Traduzione italiana di S. Dino - Napoli, Pellerano (4ª ristampa, 1885).

BRIOT et BOUQUET - *Leçons de Géométrie Analytique* - Parigi, 1865.

O. HESSE - *Vorlesungen aus der analitischen Geometrie der gerade Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene* - Lipsia, 1873.

A. Clebsch - « *Vorlesungen über Geometrie* » bearbeitet von F. Lindemann - Lipsia, 1875-76. Trad. francese di A. Benoist - Parigi, 1876, (t. I).

E. D'Ovidio - *Geometria Analitica* - Torino, 1885.

A. Sannia - *Lezioni di Geometria Proiettiva* - Napoli, Pellerano, 1891.

F. Enriques - *Lezioni di Geometria Proiettiva* - Bologna, Zanichelli, 1898, (3ª ed. 1909).

— *Lezioni di Geometria Descrittiva*, per cura di U. Concina - Bologna, Zanichelli' 1902, (2ª ed. 1908).

G. Castelnuovo - *Lezioni di Geometria Analitica* - Roma, Albrighi e Segati, 1903, (3ª ed. 1915).

L. Bianchi - *Lezioni di Geometria Analitica* - Pisa, Spoerri, 1915.

E. Ciani - *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici* - Pisa, Spoerri, 1915.

CAPITOLO I

Le equazioni $f(x) = 0$ e i gruppi di punti sulla retta

1. Il teorema fondamentale dell'Algebra e la definizione dei gruppi di punti sulla retta. — L'equazione algebrica di grado n, a coefficienti reali o complessi,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots + a_n = 0,$$

si può interpretare come equazione d'un gruppo di punti sopra la retta o, in generale, di un gruppo di elementi in una forma di prima specie.

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che:

Ogni equazione di grado n.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

possiede, nel campo complesso, n radici $x_1 x_2 \dots x_n$, distinte o coincidenti, in corrispondenza delle quali il polinomio $f(x)$ si decompone nel prodotto di n fattori lineari

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Dunque: l'*equazione di grado* n f$(x) = 0$ *rappresenta un gruppo di* n *punti* (distinti o coincidenti) le cui ascisse sono le radici dell'equazione stessa.

Ricordiamo che le radici multiple della $f(x) = 0$ sono anche radici della sua derivata, $f'(x) = 0$, e precisamente: se una radice è i-pla per la $f(x) = 0$ è $(i - 1)$-pla per la $f'(x) = 0$, e quindi è radice di tutte le successive derivate fino alla $(i - 1)$-esima; viceversa ogni radice della $f(x) = 0$ che sia i-pla per la $f'(x) = 0$, è multipla per la $f(x)$ secondo $i + 1$. Così l'esame delle eventuali radici comuni alla $f(x)$ e alla $f'(x)$ serve a stabilire se esistano e quali siano i punti multipli, nel gruppo rappresentato dalla

$$f(x) = 0,$$

e la considerazione delle derivate successive permette di determinarne le moltiplicità.

Si consideri la classe delle equazioni di grado n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

dove $a_0 a_1 \dots a_n$ figurano come parametri variabili.

Ad ogni gruppo di valori di questi parametri corrisponde un'equazione, che è di grado n se $a_0 \neq 0$, di grado $n-1$ se, essendo $a_0 = 0$, è $a_1 \neq 0$ ecc.

Ora l'equazione

$$a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

considerata come limite della

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

si riterrà *convenzionalmente* come un'equazione di grado n che ha una *radice infinita*.

Questa convenzione si giustifica osservando che: condizione perchè il prodotto

$$a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

abbia come limite

$$a_1(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

è che sia

$$\lim a_0(x - x_n) = a_1$$

e quindi, per $a_0 = 0$,

$$\lim x_n = \infty.$$

Più generalmente se, non solo a_0, ma i primi r coefficienti

$$a_0\, a_1 \dots a_{r-1}$$

si annullano, sì che l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

si riduca all'equazione di grado $n - r$

$$a_r x^{n-r} + a_{r+1} x^{n-r-1} + \dots + a_n = 0,$$

considereremo quest'ultima equazione come un'equazione di grado n in cui si ha una *radice r-pla all'infinito*.

Qualora si voglia eliminare l'uso dell'infinito, conviene sostituire alla coordinata ascissa x le coordinate omogenee x_1, x_2, ponendo $x = \frac{x_1}{x_2}$. L'equazione $f(x) = 0$ viene così trasformata nella equazione omogenea che si ottiene annullando la *forma d'ordine* n:

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n = 0.$$

Se i coefficienti a_0, $a_1 \dots a_{r-1}$ si riducono allo 0, allora la $f(x_1 x_2)$ risulta divisibile per x_2^r, e quindi in questo caso r fra gli n punti del gruppo rappresentato da $f(x_1 x_2) = 0$ vanno a cadere nel punto $x_2 = 0$, cioè in $x = \infty$. Le condizioni perchè il gruppo rappresentato da $f(x_1 x_2) = 0$ abbia un punto r-plo $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$ si esprimono in generale annullando le derivate d'ordine r:

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{\,i} \partial x_2^{\,k}} = 0 \qquad (r = i + k),$$

nel punto $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$; infatti decomponendo f nei suoi fattori lineari, dovrà f contenere il fattore $(x_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 x_2)^r$, donde seguono appunto le condizioni precedenti $\left(\text{dalle quali viceversa, facendo } x_2 = 1, \text{ segue } f(x) = 0,\ \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{\,r}} = \frac{d^r f}{dx^r} = 0\right)$. Ora calcolando le derivate r-me di f, rispetto ad x_1 e x_2 per $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $(x = \infty)$, si trovano appunto i coefficienti a_0, $a_1 \dots a_{r-1}$.

Alla considerazione di equazioni algebriche $f(x) = 0$ rappresentanti gruppi di punti in cui va incluso il punto all'infinito, si perviene anche quando si studino le equazioni o i gruppi di punti, in rapporto alle trasformazioni omografiche sopra la retta.

Operiamo sulla coordinata x la sostituzione lineare:

$$1) \qquad x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}, \quad \text{cioè} \quad x' = \frac{\delta x - \beta}{\gamma x - \alpha}$$

che si sottintende a determinante non nullo, cioè rappresentante una proiettività non degenere fra le rette x, x'.

Con ciò a $f(x)$ viene trasformata in una funzione fratta

$$2) \qquad \left(\frac{1}{\gamma x' + \delta}\right)^n \bar{f}(x').$$

Si verifica facilmente che, se $f(x)$ non si annulla per $x = \frac{\alpha}{\gamma}$, la $\bar{f}(x')$ risulta di grado n come la $f(x)$, e se, invece, $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ è radice r-pla per la $f(x)$, la $\bar{f}(x')$ si riduce di grado $n - r$. Ora la 2) si annulla per i valori che annullano $\bar{f}(x')$ e inoltre per il valore $x' = \infty$, quindi le radici della $f(x) = 0$ si trasformano nelle radici della $\bar{f}(x')$ ed eventualmente nel punto $x' = \infty$.

Noi considereremo il polinomio $\bar{f}(x')$ come *trasformato di* f(x): per poter considerare le radici di $\bar{f}(x')$ come le trasformate di tutte le radici di $f(x)$, considereremo *convenzionalmente* $\bar{f}(x)$ *sempre di grado* n, ritenendo che $\bar{f}(x) = 0$ abbia una radice (semplice o multipla) all'infinito quando $x = -\frac{\alpha}{\gamma}$ sia radice della $f(x) = 0$.

Questa convenzione può essere eliminata mediante l'introduzione delle coordinate omogenee, che già abbiam visto proprie a chiarire le difficoltà del punto all'infinito. Infatti se sulla forma

$$f(x_1 x_2)$$

si opera la trasformazione omografica

$$\frac{x_1'}{x_2'} = \frac{\alpha \dfrac{x_1}{x_2} + \beta}{\gamma \dfrac{x_1}{x_2} + \delta},$$

cioè

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$x_2' = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

la $f(x_1 x_2)$ viene trasformata in una $\bar{f}(x_1' x_2')$ il cui grado è *sempre* il grado n della f, e le cui radici sono tutte e sole le trasformate delle radici della $f(x_1 x_2) = 0$.

Osservazione. Le cose dette innanzi vengono chiarite ove si ricordi che: se si interpreta la coordinata ascissa di un punto X come coordinata proiettiva, cioè come il birapporto $(\infty\, 0\, 1\, X)$ che il punto X forma coi tre punti $\infty\, 0\, 1$, la trasformazione proiettiva 1) equivale a un *cambiamento di coordinate,* dove si assuma come coordinata del punto X il birapporto $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\beta}{\delta}\,\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\,X\right)$ che X forma coi tre punti $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ (trasformati di ∞, 0, 1).

2. **Invarianti e covarianti.** — Ad un gruppo di n punti sopra la retta:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

appartengono in generale — oltre ai *caratteri* proiettivi *numerici* dipendenti dall'ordine n — delle proprietà proiettive, che si esprimono per mezzo di invarianti e covarianti.

Consideriamo la forma binaria (polinomio omogeneo) associata al polinomio $f(x)$:

$$f(x_1 x_2) = x_2^n f(x) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots a_n x_2^n = 0$$
$$\left(x = \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Se si opera la sostituzione lineare

$$1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}, \quad \text{ossia } x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

la forma $f(x_1 x_2)$ e il polinomio $f(x)$ si cambiano rispettivamente in

$$f(x_1 x_2) = \bar{f}(x_1' x_2') = a_0' x_1'^n + a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \dots + a_n' x_2'^n = 0$$
$$f(x) = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n}\bar{f}(x') = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n}\{a_0' x'^n + a_1' x'^{n-1} + \dots + a_n'\},$$

dove $\bar{f}(x')$ si considera come polinomio *trasformato* di $f(x)$ (§ 1).

Data una funzione razionale dei coefficienti di f:

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n),$$

si consideri la medesima funzione dei coefficienti di $\bar{f}$:

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n').$$

Si dice che φ è un *invariante* (proiettivo) di *peso* p, della forma, o del polinomio, f, se accade che identicamente

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n') = M^p \varphi(a_0 a_1 \dots a_n),$$

designando

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

il modulo o determinante della sostituzione 1) ($M \neq 0$ per sostituzioni non degeneri), e p un intero arbitrario.

Se φ è un invariante, la particolare sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' \\ x_2 = \alpha x_2' \end{cases} \qquad (M = \alpha^2),$$

ha per effetto di moltiplicare i coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ per $t=\alpha^n$. Si avrà dunque

$$\varphi(ta_0, \; ta_1 \dots ta_n) = t^{\frac{2p}{n}} \varphi(a_0 a_1 \dots a_n);$$

cioè *un invariante di peso* p *è funzione* (razionale) *omogenea di grado* $g=\frac{2p}{n}$ dei coefficienti di f. Ciò significa che $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$, ponendo $t=\frac{1}{a_0}$, si riduce ad una funzione

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = a_0^{g}\, \bar{\varphi}\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Ora $\bar{\varphi}$ sarà in generale il quoziente di due funzioni intere

$$\frac{\bar{\varphi}_1\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right)}{\bar{\varphi}_2\left(\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}\right)},$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per la più alta potenza a cui compare a_0, si dedurrà

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{\varphi_1(a_0 a_1 \dots a_n)}{\varphi_2(a_0 a_1 \dots a_n)},$$

dove φ_1 e φ_2 sono due forme i cui gradi differiscono di g; risulterà poi che queste φ_1, φ_2 sono separatamente degl' invarianti.

Abbiamo intanto che: ogni *invariante razionale intero è una forma* nelle $a_0 a_1 \dots a_n$. A questi invarianti-forme si riferiscono le considerazioni seguenti.

Se $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ è una forma invariante, ogni forma $f(x_1 x_2)$ i cui coefficienti soddisfino l'equazione

$$\varphi(a_0 a_1 \dots a_n) = 0,$$

si trasforma — per una qualsiasi sostituzione lineare non degenere — in una $\bar{f}$ per cui è similmente

$$\varphi(a_0' a_1' \ldots a_n') = 0.$$

Reciprocamente sussiste il

Teorema. Se, essendo $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ una forma nei coefficienti di $f(x_1 x_2)$, *l'equazione*

$$\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n) = 0$$

è invariante per sostituzioni lineari ***non degeneri,*** eseguite sopra le variabili omogenee $x_1 x_2$, ***la forma*** $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$ ***è un invariante di*** f.

Supponiamo dapprima che φ sia un polinomio irriducibile, o primo, cioè non decomponibile nel prodotto di due polinomi (forme) φ_1, φ_2; a questo caso ridurremo poi quello escluso.

Occorre richiamare un noto principio sulla divisibilità dei polinomi: se il polinomio $\psi(a_0 a_1 \ldots a_n)$, di grado r, si annulla per tutti i valori delle a_i che annullano un polinomio primo di grado $s \leq r$, $\varphi(a_0 a_1 \ldots a_n)$, il polinomio ψ è divisibile per φ, cioè si ha

$$\psi = \varphi\theta,$$

designando θ un polinomio di grado $r - s$ nelle stesse variabili a_i.

La dimostrazione di questo principio si riconduce ai noti teoremi dell'Algebra sulla teoria della divisione ([1]). Dividendo ψ per φ, considerata come variabile la a_0 e come costanti le $a_1 \ldots a_n$, viene

$$\psi = \varphi\theta + R,$$

dove R si annulla identicamente perchè $\varphi(a_0)$ e $\psi(a_0)$ hanno radici comuni.

La legge di formazione del quoziente mette in evidenza che $\theta(a_0)$ ha i suoi coefficienti funzioni razionali *intere* di $a_1 \ldots a_n$, ogni qual volta accada che il coefficiente di a_0 elevato alla massima potenza non contenga $a_1 \ldots a_n$; e ci si può sempre ridurre a questo caso con una semplice trasformazione lineare intera sulle variabili a_i.

([1]) Cfr. p. es. A. Capelli - *Istituzioni di Analisi algebrica* - Pellerano, Napoli, 1906 - Cap. VI, § 12.

Ciò posto, prendiamo a considerare la forma irriducibile $\varphi(a_0 a_1 \dots a_n)$ nell'ipotesi di invarianza dell'equazione $\varphi = 0$, secondo il nostro enunciato; costruiamo la forma $\varphi(a_0' a_1' \dots a'_n)$, dove le a_i' si esprimono visibilmente come funzioni lineari omogenee delle a_i. Sostituendo queste espressioni, avremo

$$\varphi(a_0' a_1' \dots a_n') = \bar{\varphi}(a_0 a_1 \dots a_n),$$

dove $\bar{\varphi}$ è una forma dello stesso ordine di φ, i cui coefficienti sono funzioni razionali intere ed omogenee di $\alpha \beta \gamma \delta$, coefficienti della trasformazione lineare eseguita su $x_1 x_2$. Secondo l'ipotesi fatta, si ha $\bar{\varphi} = 0$ ogniqualvolta $\varphi = 0$, per $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; si deduce che $\bar{\varphi}$ è divisibile per φ e si ha

$$\bar{\varphi} = \varphi \vartheta,$$

dove ϑ risulta, in questo caso, d'ordine 0, cioè indipendente dalle a_i, ma funzione razionale intera ed emogenea di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ora $\theta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ si annulla per

$$M = \alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

e soltanto per $M = 0$; perciò (essendo M primo) sarà θ divisibile per M, e la divisione potrà ripetersi un certo numero, p, di volte, fino a che si pervenga ad un quoziente h, il quale non dipenda più da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, cioè sia una costante numerica:

$$\theta = hM^p.$$

Facendo poi la sostituzione identica

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2'$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad M = 1,$$

si deduce

$$h = 1$$

e però

$$\theta = M^p.$$

Resta infine da estendere il teorema al caso in cui l'equazione $\varphi = 0$ sia riducibile:

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_q,$$

dove si designano con φ_i i fattori primi di φ. In tal caso basta osservare che per una sostituzione generica $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ non può accadere che un fattore φ_1 venga trasformato in un altro φ_i distinto da esso, giacchè facendo variare con continuità α, β, γ, δ, la sostituzione anzidetta può ridursi all'identità.

Pertanto le equazioni $\varphi_i = 0$ sono invarianti, perciò risultano invarianti le forme φ_i e il loro prodotto. c. d. d.

Corollario. Un invariante razionale fratto $\left(\text{di peso } p \text{ e grado } g = \frac{2p}{n}\right)$ *è il quoziente di due forme invarianti* $\left(\text{di peso } p_1, p_2, \text{ e grado } g_1 = \frac{2p_1}{n}, g_2 = \frac{2p_2}{n}, \text{ con } p_1 - p_2 = p, g_1 - g_2 = g\right)$.

Infatti abbiamo già veduto che il numeratore e il denominatore di φ sono forme (omogenee) nelle a_i; possiamo ora affermare che il carattere invariante di φ porta l'invarianza delle equazioni $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, (supposte senza fattori comuni) per sostituzioni lineari non degeneri eseguite sulle variabili $x_1 x_2$; da ciò segue che le forme φ_1 e φ_2 sono invarianti.

La definizione degli invarianti si lascia generalizzare ove si considerino funzioni razionali

$$\psi(x a_0 a_1 \dots a_n)$$

o

$$\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$$

(omogenee in $x_1 x_2$). Consideriamo la medesima funzione ψ delle nuove variabili $x_1' x_2'$ e dei coefficienti della trasformata di f:

$$\psi(x' a_0' a_1' \dots a_n') \quad \text{o,} \quad \psi(x_1' x_2' a_0' a_1' \dots a_n');$$

si dice che ψ è un *covariante* (proiettivo) di *peso* p, se accade che

$$\psi(x_1' x_2' a_0' a_1' \dots a_n') = M^p \psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$$

dove p è un intero (positivo o negativo).

Si prova come innanzi il

Teorema. Una *funzine razionale* $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 \dots a_n)$ *è covariante* di f, *se l'equazione* $\psi = 0$ *gode* della proprietà d'*invarianza* rispetto alle sostituzioni lineari non degeneri su $x_1 x_2$.

Quindi si dimostra parimente che:

Un covariante ψ *è funzione razionale omogenea di* $a_0 a_1 \dots a_n$

e quoziente di due forme covarianti, intere ed omogenee, nelle due serie di variabili $a_0 a_1 \dots a_n$ ed $x_1 x_2$.

Così lo studio degli invarianti e covarianti si riduce a quello di *forme* invarianti e covarianti, che si raccolgono sotto la designazione comune di *forme invariantive.*

Una forma covariante $\psi(x_1 x_2 a_0 \dots a_n)$ (o $\psi(x a_0 \dots a_n) = x_2^m \psi(x a_0 \dots a_n)$) conterrà le $x_1 x_2$ ad un certo grado m, che prende il nome di *ordine* del covariante; si riserva il nome di *grado* g al grado di ψ rispetto ad $a_0 \dots a_n$. (Per $m = 0$, ψ si riduce a un invariante). *Il peso di un covariante* ψ *vale*

$$p = \frac{ng - m}{2},$$

come si prova eseguendo la sostituzione di modulo α^2:

$$x_1 = \alpha x_1', \quad x_2 = \alpha x_2',$$

che ha per effetto di moltiplicare $a_0 \dots a_n$ per α^n.

Una estensione naturale del concetto d'invariante e di covariante, si ha considerando *invarianti* e *covarianti simultanei* di più forme

$$f_1(x_1 x_2), \quad f_2(x_1 x_2) \dots .$$

In modo affatto generale sussiste evidentemente la proprietà che:

Funzioni invariantive di funzione invariantive sono invariantive.

L'annullamento d'un invariante:

$$\varphi = 0$$

per una certa f, esprime una *particolare condizione proiettiva* a cui deve soddisfare il gruppo G_n di punti:

$$f(x) = 0;$$

tale condizione venendo soddisfatta ugualmente da tutti i gruppi proiettivi a G_n (trasformati di G_n per proiettività non degeneri).

L'annullamento d'un covariante

$$\psi(x) = 0,$$

che sia di ordine $m(>0)$ in x, rappresenta un gruppo di m punti, G_m, che ha col G_n, $f=0$, una definita *relazione proiettiva,* poichè una proiettività (non degenere) trasformante G_n in G_n', trasforma il G_m in un G_m', che si rappresenta annullando il medesimo covariante ψ.

Similmente l'annullamento d'un invariante simultaneo di due (o più) forme (o polinomi) f_1, f_2, esprime una relazione proiettiva dei due gruppi di punti

$$f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0,$$

e l'annullamento d'un covariante simultaneo d'ordine m rappresenta un gruppo di m punti che ha con essi una definita relazione proiettiva.

Le forme invariantive risultano definite reciprocamente dalle relazioni proiettive da esse espresse, a meno di un fattore numerico arbitrario.

Esempi. Eliminando x fra le equazioni di ordine n_1, n_2,

$$f_1(x)=0, \quad f_2(x)=0$$

oppure $x_1 x_2$ fra le equazioni omogenee

$$f_1(x_1 x_2)=0, \quad f_2(x_1 x_2)=0,$$

si ottiene la condizione perchè i due gruppi abbiano un punto comune, la quale viene espressa dall'annullamento del *resultante.* Il resultante R è un invariante simultaneo di f_1, f_2, notoriamente del grado $n_1 n_2$; nel caso di forme lineari

$$f_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2$$
$$f_2 = b_1 x_1 + b_3 x_2$$

si ha

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Si consideri un gruppo di n punti:

$$f(x_1 x_2) = 0;$$

per una sostituzione lineare

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2', \end{cases}$$

le derivate di f si trasformano come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} + \gamma \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \beta \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} + \delta \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_2}; \end{cases}$$

si deduce di qui che il resultante di

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

è un invariante di f; esso dicesi *discriminante* di f, e col suo annullarsi esprime la condizione perchè il gruppo $f=0$ possegga un *punto doppio.*

Se si passa alle coordinate non omogenee:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

il discriminante D di $f(x)$ si può definire come *resultante di f e della sua derivata* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (cfr. §. 1), d'accordo colla relazione d'EULERO

$$nf = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2.$$

Per il polinomio di 2° grado

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

il discriminante vale (a meno d'un fattore numerico):

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2,$$

e per il polinomio cubico ridotto

$$f(x) = x^3 - px + q,$$

si ha

$$D = 27q^2 - 4p^3,$$

come risulta dalla risoluzione delle rispettive equazioni $f(x) = 0$ (cfr. §. 5).

Un covariante simultaneo delle due forme

$$f(x_1 x_2) \quad \varphi(x_1 x_2),$$

è il determinante funzionale o *jacobiano* [1]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

come risulta dalle formule di trasformazione delle derivate, che abbiamo scritto di sopra.

Si deduce che lo jacobiano delle derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

cioè il determinante *hessiano* [2]:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

è un invariante della forma f.

Il peso dello jacobiano è 1, quello dello hessiano è 2.

Fra gli invarianti di $f(x_1 x_2)$ o di $f(x)$, sono da notare in special modo gl'*invarianti assoluti* o di peso (e quindi di grado) 0, i quali permangono assolutamente invariati per una trasformazione proiettiva eseguita su f.

Si può formare un invariante assoluto di $f(x)$ quando siano *dati due invarianti* φ_1, φ_2 *di peso* p_1, p_2 che non siano potenze di un medesimo; *tale è* infatti *il quoziente*

$$\varphi = \frac{\varphi_1^{p_2}}{\varphi_2^{p_1}}$$

che, per una sostituzione di modulo M, diventa

$$\frac{M^{p_1 p_2} \varphi_1^{p_2}}{M^{p_1 p_2} \varphi_2^{p_1}} = \frac{\varphi_1^{p_2}}{\varphi_2^{p_1}}.$$

Giova avvertire esplicitamente che — a differenza degli

(1) Da Jacobi (*Journal für Math.* 22).
(2) Da Hesse (*Journal für Math.* 28, 38, 49, 56).

invarianti relativi (di peso o grado $\neq 0$) — gl'*invarianti assoluti* sono *definiti*, non tanto *in funzione* dei coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ di f, quanto dei loro rapporti, e anzi *del gruppo di punti* G_n rappresentato dall'equazione

$$f(x_1 x_2) = 0 \quad \text{o} \quad f(x) = 0,$$

indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate in cui è scritta l'equazione suddetta. Per un invariante di peso o grado $\neq 0$, ha senso soltanto chiedere se esso si annulli o no per un dato G_n, ma non — nella seconda ipotesi — quale sia il suo valore, che dipende dal fattore di proporzionalità contenuto nei coefficienti di f e — più in generale — dalla scelta del sistema di coordinate omogenee a cui si è riferito il G_n.

Un covariante $\psi(x_1 x_2)$ di $f(x_1 x_2)$ è definito dall'equazione $\psi(x_1 x_2) = 0$ a meno d'un fattore costante, e perciò — a meno d'un tale fattore — si può ritenere definito dalla relazione proiettiva che lega il gruppo di punti $\psi = 0$ a $f = 0$.

3. Espressione delle forme invariantive di $f(x)$ per mezzo delle differenze delle radici. — La costruzione effettiva delle forme invariantive di $f(x)$, si può basare sopra l'osservazione fondamentale che esse si esprimono come funzioni razionali intere delle differenze delle radici di

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

$$\alpha_i - \alpha_k = | \, \mathrm{i\,k} \, |,$$

e delle differenze

$$x - \alpha_k = | \, 0\,\mathrm{k} \, |.$$

Infatti tali invarianti e covarianti φ, ψ, sono funzioni razionali intere omogenee di $a_0 a_1 \dots a_n$ che, divise per una potenza di a_0 di esponente uguale al grado g, si riducono funzioni razionali intere di $\frac{a_1}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}$, e perciò funzioni simmetriche di $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$; ma, poichè le φ, ψ debbono restare assolutamente invariate per ogni trasformazione proiettiva di modulo $M = 1$ ed in particolare per una traslazione

$$x = x' + \alpha_k,$$

così esse potranno farsi dipendere soltanto dalle differenze

$$x - \alpha_k, \quad \alpha_i - \alpha_k.$$

Vediamo come questa osservazione permetta di costruire effettivamente le forme invariantive φ, ψ, riferendoci al caso più semplice degli invarianti.

Si abbia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

La sostituzione

1) $$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}$$

cambia f in

$$f(x) = \frac{1}{(\gamma x' + \delta)^n} \bar{f}(x'),$$

dove

$$\bar{f}(x') = a_0'(x'-\alpha_1')(x'-\alpha_2')\dots(x'-\alpha_n') = (\gamma x' + \delta)^n f(x).$$

Si deduce

$$\bar{f}(x') = (\gamma x' + \delta)^n x^n \left\{ a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\} =$$

$$= (\alpha x' + \beta)^n \left\{ a_0 + \frac{a_i}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right\}.$$

Poniamo

$$x = \infty, \quad x' = -\frac{\delta}{\gamma};$$

si ricava

$$f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n a_0 M^n, \qquad (M = \alpha\delta - \beta\gamma),$$

quindi

$$a_0'\left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_1'\right)\left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_2'\right)\dots\left(-\frac{\delta}{\gamma} - \alpha_n'\right) = \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^n a_0 M^n$$

ossia, moltiplicando i due membri per $(-\gamma)^n$,

2) $$a_0'(\gamma\alpha_1' + \delta)(\gamma\alpha_2' + \delta)\dots(\gamma\alpha_n' + \delta) = a_0 M^n.$$

Ciò posto si consideri p. es. la differenza

$$\alpha_i - \alpha_k = |\,\mathrm{i\,k}\,|.$$

Per la sostituzione 1) questa si cambia in

$$\frac{(\alpha\alpha_i' + \beta)(\gamma\alpha_k' + \delta) - (\alpha\alpha_k' + \beta)(\gamma\alpha_i' + \delta)}{(\gamma\alpha_i' + \delta)(\alpha\gamma_k' + \delta)} = \frac{M(\alpha_i' - \alpha_k')}{(\gamma\alpha_i' + \delta)(\gamma\alpha_k' + \delta)}.$$

Risulta di qui che: ***si ottiene un invariante di f di peso p, moltiplicando per a_0^g un prodotto di p differenze*** $|\,\mathrm{i\,k}\,|$, ***costruito per modo che ogni indice i compaia nel prodotto uno stesso numero g di volte***; siffatti prodotti dipendono in generale ***irrazionalmente*** dai coefficienti di f, ma essi permettono di formare delle funzioni ***simmetriche*** che porgono ***invarianti razionali.***

L'enunciato precedente risulta dall'osservare che, nelle ipotesi fatte, il prodotto di p differenze $|\,\mathrm{i\,k}\,|$ vale

$$\Pi(\alpha_i - \alpha_k) = \frac{M^p\Pi(\alpha_i - \alpha_k')}{\{(\gamma\alpha_1' + \delta)(\gamma\alpha_2' + \delta) \ldots. (\gamma\alpha_n' + \delta)\}^g},$$

dove $2p = ng$; quindi, applicando la formula 2) si ha

$$M^{ng}a_0{}^g\Pi(\alpha_i - \alpha_k) = M^p a_0'^g\Pi(\alpha_i - \alpha_k')$$

cioè

$$M^p a_0{}^g\Pi(\alpha_i - \alpha_h) = a_0'^g\Pi(\alpha_i - \alpha_k'),$$

vale a dire che

$$a_0{}^g\Pi(\alpha_i - \alpha_k)$$

è un invariante, in generale irrazionale, di f, di peso p e grado g.

Si consideri ora una somma, funzione *simmetrica* delle radici,

$$I = \Sigma a_0{}^g\Pi\,|\,\mathrm{i\,k}\,|,$$

i cui termini, costruiti coi prodotti di p differenze $|\,\mathrm{i\,k}\,|$, contengano ciascuno lo stesso numero $g\left(=\frac{2p}{n}\right)$ di volte gli indici $1, 2 \ldots. n$. Allora, come si è già avvertito, I risulta un *invariante razionale* di

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} \ldots. + a_n = 0.$$

L'espressione effettiva di I per i coefficienti $a_0a_1 \ldots. a_n$ si ottiene servendosi delle formule di Newton che danno le somme delle potenze simili delle radici per mezzo delle funzioni simmetriche elementari:

$$\Sigma\alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\Sigma\alpha_i\alpha_k = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0};$$

le funzioni simmetriche intere di $\alpha_1\ldots\alpha_n$ risultano così funzioni razionali *intere* di $\frac{a_1}{a_0}\ldots\frac{a_n}{a_0}$ (1).

Si avrà quindi

$$I = a_0^g\varphi\left(\frac{a_1}{a_0}\ldots\frac{a_n}{a_0}\right),$$

dove φ è una funzione razionale intera, cioè l'*invariante* I *è esso stesso una forma* (polinomio omogeneo) *del grado* g *in* $a_0 a_1 \ldots a_n$.

Reciprocamente è facile riconoscere che una forma invariante di f, espressa per le $|ik|$, deve contenere in ciascun termine lo stesso numero di volte ogni indice i.

Un semplice esempio della costruzione precedente relativa ad

$$f(x) = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

è porto dal *discriminante* (§§ 1, 2) che, dovendo annullarsi per i gruppi $f=0$ dotati di punto doppio, si potrà esprimere (a meno d'un fattore numerico) sotto la forma:

$$D = a_0^{2(n-1)}\Pi\,|ik|,$$

cioè come prodotto dei quadrati delle differenze delle radici. In D compaiono $p = n(n-1)$ fattori; essendo funzione simmetrica delle radici di f, si vede che D è esprimibile razionalmente per i coefficienti, come è ben noto dall'algebra.

(1) Cfr. per esempio: S. Pincherle: *Lezioni di Algebra Complementare.* Bologna, Zanichelli, 1906 - Cap. 2. — A. Capelli: *Istituzioni di Analisi Algebrica.* Napoli, Pellerano, 1902. Cap. - XII - §§ 4, 5 — H. Weber: *Traité d'Algèbre Supérieure.* Trad. fr., Paris, Gauthier Villars, 1898, Cap. IV.

Ora dalla precedente espressione risulta che il discriminante è precisamente un invariante di grado $2(n-1)$ e di peso $n(n-1)$.

La costruzione indicata si estende ai covarianti.

Si ottiene un covariante (razionale) ψ di

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)\ldots.(x-\alpha_n),$$

combinando, in guisa da ottenere una funzione simmetrica di $\alpha_0 \ldots . \alpha_n$, i prodotti delle differenze

$$|\,0\,1\,|\,|\,0\,2\,| \ldots . |\,0\,n\,|$$

$$|\,1\,2\,|\,|\,1\,3\,| \ldots . |\,n-2,\; n\,|,$$

costruiti in modo che gl'indici $1, 2, \ldots . n$ compaiano in ogni prodotto uno stesso numero g di volte; supponendo che l'indice 0 vi compaia m volte, il covariante avrà l'ordine m, il grado g, e il peso $p = \frac{ng-m}{2}$, d'accordo col § 2.

4. **Quaterne di punti.** — Consideriamo un polinomio di 4° grado

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2(x-\alpha_3)(x-\alpha_4),$$

e il gruppo di quattro punti $G_4 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ rappresentato da

$$f(x) = 0.$$

Il procedimento spiegato innanzi ci conduce a considerare gl'invarianti irrazionali del tipo

$$a_0\,|\,1\,2\,|\,|\,3\,4\,|.$$

Il quoziente

$$\frac{|\,1\,3\,|\,|\,2\,4\,|}{|\,2\,3\,|\,|\,1\,4\,|} = (1\,2\,3\,4),$$

che non dipende da a_0, è un invariante assoluto dipendente dalla posizione e (per la sua irrazionalità anche) dall'ordine dei quattro punti. In esso si riconosce il *birapporto* dei punti suddetti, che è notoriamente invariante per trasformazioni proiettive della retta.

Se si muta l'ordine dei quattro punti, per le 24 permutazioni di 1, 2, 3, 4, il birapporto assume 6 valori *general-*

mente distinti; designatone uno qualunque con α, i detti valori sono:

1) $$\alpha, \quad 1-\alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \frac{1}{1-\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Il birapporto $\alpha=(1\,2\,3\,4)$ resta invariato per 4 permutazioni diverse

$$(1\,2\,3\,4)=(2\,1\,4\,3)=(3\,4\,1\,2)=(4\,3\,2\,1),$$

corrispondentemente a 3 *involuzioni permutabili* π_1, π_2, π_3 determinate dalle coppie

$$12\cdot 34, \quad 13\cdot 24, \quad 14\cdot 23$$

che trasformano in se stessa la quaterna G_4.

Le tre coppie di punti doppi di codeste involuzioni, si separano armonicamente a due a due; essendo $\pi_2\pi_1=\pi_3$ ecc., esse formano un gruppo di 6 punti, G_6, che viene rappresentato dall'annullarsi di un covariante del 6° ordine di f, detto *covariante* T (cfr. § 7).

Le tre involuzioni π_1, π_2, π_3, insieme all'identità, formano un *gruppo* [1] *di 4 operazioni* Γ_4 che (per un motivo che vedremo più avanti) si denomina *gruppo trirettangolo* e dal Klein viene chiamato *Vierergruppe.* Infatti il prodotto di due fra le operazioni suddette appartiene al gruppo:

$$\pi_2\pi_1=\pi_3, \quad \pi_3\pi_1=\pi_2, \quad \pi_3\pi_2=\pi_1$$
$$\pi_1^2=\pi_2^2=\pi_3^2=1.$$

In generale il gruppo Γ_4 *è il gruppo di tutte le proiettività della retta che lasciano invariato il* G_4.

Ma — per valori particolari di α — i 6 valori del birapporto possono non essere più distinti, e corrispondentemente si avrà un gruppo più ampio di proiettività che lasciano invariato il G_4. Ciò accadrà evidentemente se il G_4 è costi-

(1) Le nozioni elementari che qui ricorrono sui gruppi di operazioni, e in particolare di proiettività, trovansi definite in Enriques, « G. proiettiva ». Appendice.

Per uno sviluppo della teoria dei gruppi di sostituzioni in rapporto alla risoluzione delle equazioni algebriche, cfr.

L. Bianchi. « Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche ». Pisa, Spoerri, 1900.

tuito da un ciclo di una proiettività ciclica del terz'ordine e da un suo punto unito, oppure da un ciclo di una proiettività del quart'ordine (¹). Viceversa risulterà che questi sono i soli casi possibili.

Per determinare i valori particolari di α corrispondenti alla possibilità sopra indicata, osserviamo che i 6 valori 1) si deducono da uno qualunque di essi, designato con α, mediante le due sostituzioni fondamentali

$$\alpha' = 1 - \alpha,$$
$$\alpha'' = \frac{1}{\alpha}.$$

Se fra i 6 valori 1) ve ne sono due uguali dovrà dunque aversi per uno di questi valori, α,

$$\alpha = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

oppure

$$\alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \pm 1,$$

o finalmente

$$1 - \alpha = \frac{1}{\alpha}, \quad \text{cioè} \quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0,$$

$$\alpha = 1 + \varepsilon \quad \text{o} \quad \alpha = 1 + \varepsilon^2 \quad \text{con} \quad \varepsilon = e^{\frac{\pm 2\pi i}{3}} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Corrispondentemente a questi valori di α si ottengono le *quaterne particolari il cui birapporto ha meno di 6 valori*, cioè:

I) la quaterna con un *punto doppio* per cui il birapporto ha i *tre* valori distinti:

$$1, \quad 0, \quad \infty;$$

II) la quaterna *armonica*, per cui il birapporto ha solo *tre* valori:

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2;$$

(¹) Ricordiamo che una proiettività π si dice ciclica d'ordine o di periodo n se ripetuta n volte (e non meno) dà luogo all'identità ($\pi^n = 1$). Cfr. Enriques,, op. c., § 42. Bianchi, « G. analitica ». § 103, oppure il § 8 del Libro 2° di questo volume, ove si troverà pure l'equazione della proiettività ciclica d'ordine n coi punti uniti $0, \infty$ sotto la forma $x' = \varepsilon x$ con $\varepsilon = e^{\frac{2t\pi i}{n}}$, ($t$ primo con n).

III) la quaterna *equianarmonica* (così designata da Luigi Cremona) per cui il birapporto ha solo *due* valori:

$$1+\varepsilon, \quad \frac{1}{1+\varepsilon}=1+\varepsilon^2.$$

(I detti valori essendo immaginari una quaterna equianarmonica non può avere più di tre punti reali).

Osservazione. Il birapporto di una quaterna di punti G_4, $\alpha=(1234)$, diventa *indeterminato*, e può ritenersi avere qualunque valore, soltanto nel caso in cui la G_4 possieda un *punto triplo* (o in particolare quadruplo).

Tutte le G_4 armoniche sono proiettive fra loro, e una tale G_4 risulta proiettiva a se stessa per $\frac{24}{3}=8$ permutazioni diverse, quindi *il gruppo delle proiettività che lasciano invariata una* G_4 *armonica è un* Γ_8 che consta:

1) dell'identità;

2) delle 3 involuzioni permutabili $\pi_1\pi_2\pi_3$, in cui si corrispondono le tre coppie di G_4;

3) di altre 2 involuzioni permutabili ω_1, ω_2 aventi come coppie di punti doppi le due coppie di punti di G_4 che si separano armonicamente;

4) di 2 proiettività cicliche del 4° ordine ottenute moltiplicando una $\pi=(23)(14)$ per una $\omega=(13)$ o $\omega=(24)$:

$$(23)(14)\cdot(13)=(1234).$$

In tutto si hanno così

$$3+2+2+1=8$$

proiettività.

La possibilità di riguardare un gruppo armonico G_4 come ciclo d'una proiettività del 4° ordine appare anche dall'osservazione che un tale G_4 è proiettivamente identico al gruppo armonico

$$(1 \quad -1 \quad i \quad -i),$$

che è un ciclo della proiettività $x'=ix$.

Tutte le G_4 equianarmoniche sono proiettive fra loro e una tale G_4 risulta proiettiva a se stessa per $\frac{24}{2}=12$ permutazioni, quindi il *gruppo delle proiettività che lasciano inva-*

riate una quaterna G_4 *equianarmonica è un* Γ_{12} che consta delle 12 proiettività seguenti:

1) l'identità;

2) 3 involuzioni permutabili $\pi_1 \pi_2 \pi_3$:

3) 8 proiettività cicliche del 3° ordine che posseggono un punto unito appartenente a G_4 e scambiano ciclicamente gli altri tre punti. Infatti per una scelta opportuna delle coordinate si può assumere come tipo della G_4 equianarmonica la quaterna $(0\,1\,\varepsilon\,\varepsilon^2)$ avente il birapporto

$$(0\,1\,\varepsilon\,\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} : \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} = 1 + \varepsilon^2;$$

codesta G_4 è trasformata in sè dalla proiettività ciclica del 3° ordine coi punti uniti $0, \infty$:

$$y = \varepsilon x.$$

Riassumendo:

Una quaterna G_4 *armonica è ciclo di una proiettività del 4° ordine* (e della sua inversa).

Una quaterna G_4 *equianarmonica è costituita da un ciclo di una proiettività del 3° ordine* (e della sua inversa) *e da un suo punto unito;* la G_4 può considerarsi così definita in 4 modi diversi, prendendo come unito uno qualunque dei suoi punti.

Ora ritorniamo alla considerazione generale del gruppo di 4 punti:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = 0.$$

Possiamo scrivere una espressione razionale del birapporto

$$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = (1\,2\,3\,4),$$

la quale rimanga invariata quando si cambia α in uno degli altri valori 1); tale è l'espressione

$$J = \frac{4(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(\alpha + 1)^2(1 - 2\alpha)^2(2 - \alpha)^2},$$

dove il fattore numerico, 4, è determinato in guisa che si abbia, per

$$\alpha = 1, \quad J = 1.$$

Si avrà così un invariante assoluto J che, essendo funzione simmetrica di 1, 2, 3, 4, si esprimerà razionalmente pei coefficienti di f. Questo invariante razionale J si designa generalmente col nome di *invariante assoluto* di f.

Osservazione. Ogni altro invariante assoluto razionale di f è funzione razionale del birapporto α che determina la condizione di proiettività di due quaterne, e — restando invariato quando si sostituisce ad α uno degli altri valori 1) — si prova dipendere razionalmente da J.

Per quanto si è detto nel § 2, J si esprime come quoziente di due forme invarianti dello stesso grado; dimostriamo che *si ha precisamente*:

$$J = \frac{4i^3}{j^2}$$

dove i, j sono due invarianti *razionali* interi, rispettivamente di grado 2, 3.

A tale scopo scriviamo

$$1 - \alpha + \alpha^2 = 1 - \frac{|13|\,|24|}{|23|\,|14|} + \frac{|13|^2\,|24|^2}{|23|^2\,|14|^2}.$$

Moltiplichiamo per l'invariante irrazionale

$$a_0^2\,|23|^2\,|14|^2$$

che è sempre *diverso da zero* se la quaterna è costituita di punti distinti; si avrà un invariante

$$\begin{aligned} i &= a_0^2\,|23|^2\,|14|^2\,(1-\alpha+\alpha^2) = \\ &= a_0^2\,\{|23|^2\,|14|^2 + |13|^2\,|24|^2 - |23|\,|14|\,|13|\,|24|\}. \end{aligned}$$

Vogliamo provare che i è un invariante *razionale* (di peso 4 e di grado 2).

Perciò considereremo

$$\begin{aligned} i' &= a_0^2\,\{|14|^2\,|23|^2 + |12|^2\,|34|^2 - |14|\,|23|\,|12|\,|34|\} \\ i'' &= a_0^2\,\{|12|^2\,|34|^2 + |13|^2\,|24|^2 - |12|\,|34|\,|13|\,|24|\}; \end{aligned}$$

sarà $i + i' + i''$ funzione simmetrica delle radici $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ e quindi razionale nei coefficienti di f; basterà dimostrare che

$$i = i' = i'',$$

e perciò

$$i = \frac{1}{3}(i + i' + i'').$$

La verifica che $i = i'$ (e analogamente $i = i''$) si compie facilmente osservando che, ove si dividano le espressioni di i e i' per $|23|^2|14|^2$, viene

$$\frac{|13|^2|24|^2}{|23|^2|14|^2} - \frac{|13|\,|24|}{|23|\,|14|} = (1234)^2 - (1234) = \alpha^2 - \alpha$$

$$\frac{|12|^2|34|^2}{|23|^2|14|^2} - \frac{|12|\,|34|}{|23|\,|14|} = (1324)^2 - (1324) = (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha),$$

$$\alpha^2 - \alpha = (1 - \alpha)^2 - (1 - \alpha).$$

Ciò posto avremo

$$J = \frac{4i^3}{j^2}$$

dove

$$j = a_0{}^3|23|^3|14|^3(\alpha + 1)(1 - 2\alpha)(2 - \alpha);$$

e — essendo J, i invarianti razionali — risulterà pure j un invariante razionale (di peso 6 e di grado 3).

Quanto all'espressione di $i = \frac{1}{3}(i + i' + i'')$, vediamo che essa si compone di due parti contenenti simmetricamente le $|ik|$, ciascuna delle quali porge già un invariante razionale (dello stesso grado 2 e peso 4). Ma questi due invarianti non sono distinti perchè differiscono soltanto per un fattore numerico (come vedremo più tardi accadere necessariamente per due invarianti razionali qualsiansi di grado 2); si verifica infatti che

$$|23|^2|14|^2 + |13|^2|24|^2 + |14|^2|23|^2 + |12|^2|34|^2 + |12|^2|34|^2 + |13|^2|24|^2$$

e

$$|23|\,|14|\,|13|\,|24| + |14|\,|23|\,|12|\,|34| + |12|\,|34|\,|13|\,|24|,$$

ove siano divisi per $|23|^2|14|^2$, danno rispettivamente

$$1 + \alpha^2 + 1 + (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 4$$

e

$$\alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha(1 - \alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1,$$

cioè la prima espressione risulta quattro volte la seconda;

quindi, sostituendo a quest'ultima il suo valore, si ottiene l'*espressione normale di* i:

$$i = \frac{a_0^2}{2}\left\{ |23|^2|14|^2 + |13|^2|24|^2 + |12|^2|34|^2 \right\}.$$

Questa espressione permette il calcolo effettivo di i per i coefficienti di f, calcolo che eseguiremo riferendoci a un caso particolare nel parag.° seg.^{te}, limitandoci qui a indicarne il risultato:

$$i = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4.$$

In modo analogo si può dare una espressione simmetrica di j per le differenze $|\mathrm{ik}|$, che si lascia ridurre alla *espressione normale*

$$\begin{aligned} j = a_0^3\Sigma|12|^2|34|^2|13|\,|42| = |12|^2|34|^2|13|\,|42| + |13|^2|24|^2|12|\,|43| + \\ + |14|^2|23|^2|12|\,|34| + |12|^2|43|^2|14|\,|32| + \\ + |13|^2|42|^2|14|\,|23| + |14|^2|32|^2|13|\,|24|, \end{aligned}$$

dove i termini della somma si deducono l'uno dall'altro con le sostituzioni che permettono di dedurre da (1234) gli altri 5 valori del birapporto. Si troverebbe

$$j = 27a_1^2a_4 + 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0a_2a_4 - 9a_1a_2a_3,$$

formula che si può scrivere anche:

$$j = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 12a_0 & 3a_1 & 2a_2 \\ 3a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 2a_2 & 3a_3 & 12a_4 \end{vmatrix}.$$

L'annullarsi dell'invariante di secondo grado, i, esprime la condizione perchè il gruppo $f(x)=0$ sia equianarmonico:

$$1 - \alpha + \alpha^2 = 0;$$

l'*annullarsi* dell'*invariante di terzo grado* j dice invece che il gruppo è *armonico*:

$$(\alpha + 1)(1 - 2\alpha)(2 - \alpha) = 0.$$

Dall' espressione dell' invariante assoluto: $J = \frac{4i^3}{j^2}$, *si deduce che il discriminante di* f:

$$D = a_0^6\Pi|\mathrm{ik}|^2 \equiv 4i^3 - j^2,$$

dove col segno $\equiv$ designamo l'uguaglianza a meno di un fattore numerico k.

Infatti, la condizione perchè la quaterna $f=0$ abbia un punto doppio ($\alpha=1$), si esprime ugualmente ponendo $D=0$ oppure $J=1$, cioè

$$J=\frac{4(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha+1)^2(1-2\alpha)^2(2-\alpha)^2}=\frac{4i^3}{j^2}=1,$$

$$4i^3-j^2=0.$$

Si può calcolare effettivamente il fattore numerico k che entra nella relazione precedente, riferendoci, per esempio, al gruppo armonico $\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ 2\right)$ dato da:

$$x\left(x-1\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-2\right)=0;$$

infatti in questo caso si trova

$$j=0 \qquad \text{(condizione di armonicità)}$$

$$i=\frac{4}{3},\quad D=\frac{16^2}{27^2},\quad k=\frac{4i^3}{D}=27.$$

Si conclude che si ha in generale

$$27D=4i^3-j^2.$$

(Per il calcolo del fattore numerico k può anche valere la quaterna armonica di punti $(-1, 1, 0, \infty)$ rappresentata dall'equazione in cui $a_0=0$:

$$x^3-x=0,$$

dove si ponga $a_0\alpha_4=1$, conformemente al parag.° seguente).

Osservazione. Giova notare che la possibilità di esprimere D per mezzo di i, j si riconosce *a priori* in base al fatto che una quaterna di punti ammette un solo invariante assoluto, funzione del birapporto, e quindi possiede soltanto *due invarianti indipendenti*; altrimenti le potenze convenienti di due invarianti, divise per potenze di un terzo invariante, fornirebbero *due* invarianti assoluti.

5. Risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado. — La nota risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, $f(x)=0$, si può riattaccare alla teoria proiettiva delle quaterne di punti sulla retta, mediante le considerazioni che seguono.

Anzitutto osserviamo che l'equazione cubica

$$x^3 = t,$$

ammette tre radici

$$\alpha = \sqrt[3]{t}, \quad \varepsilon\alpha, \quad \varepsilon^2\alpha,$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

per modo che la terna $x^3 - t = 0$ costituisce un ciclo della proiettività del 3° ordine

$$x' = \varepsilon x$$

(e della sua inversa $x' = \varepsilon^2 x$) dotata dei punti uniti

$$x = 0, \quad x = \infty;$$

in altre parole la terna di punti

$$x^3 = t,$$

presa insieme ai punti $0, \infty$ dà luogo ad una quaterna equianarmonica (cfr. §. 4).

Reciprocamente, se un'equazione cubica rappresenta tre punti che insieme a $0, \infty$ formino un gruppo equianarmonico, cioè tre punti

$$\alpha, \quad \varepsilon\alpha, \quad \varepsilon^2\alpha,$$

l'equazione stessa è della forma

$$(x - \alpha)(x - \varepsilon\alpha)(x - \varepsilon^2\alpha) = x^2 - \alpha^3 = x^3 - t = 0.$$

Ciò posto si consideri un'equazione cubica generale, che — com'è noto — può ridursi alla forma

1) $$x^3 - px + q = 0.$$

Designando con $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ le tre radici, troviamo i due punti m, n che insieme ad $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ formano una quaterna equianarmonica, cioè i due punti uniti della proiettività ciclica del 3° ordine $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ed insieme dell'inversa $(\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2$.

A tale scopo scriviamo l'equazione di una proiettività ciclica del 3° ordine che abbia come punti uniti, non più $0, \infty$, ma m, n; sarà (in luogo di $x^3 = t$)

$$\left(\frac{x-m}{x-n}\right)^3 = t. \tag{2}$$

L'equazione 1) si deve identificare colla 2) quando m, n soddisfino ad un'equazione di 2^0 grado in y che si ottiene annullando l'invariante i della quartica $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-y)$.

Questa equazione di 2^0 grado, da cui dipende la risoluzione dell'equazione cubica, viene senz'altro espressa dall'invariante suddetto che contiene simmetricamente le radici $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ e perciò dipende razionalmente dai coefficienti p, q. Ma si può anche identificare direttamente le equazioni 1) 2), dopo avere sviluppato la 2) che assume la forma

$$x^3 - 3\frac{m-tn}{1-t}x^2 + 3\frac{m^2-tn^2}{1-t} - \frac{m^3-tn^3}{1-t} = 0. \tag{3}$$

Avremo così le equazioni di condizione:

$$m - tn = 0 \tag{4}$$

$$\frac{m^2-tn^2}{1-t} = \frac{-p}{3} \tag{5}$$

$$\frac{m^3-tn^3}{1-t} = -q. \tag{6}$$

Dividendo 6) per 5) e ponendo al posto di t il valore $\frac{m}{n}$ ricavato dalla 4) si ha

$$\frac{m^3-mn^2}{m^2-mn} = m+n = \frac{3q}{p} \tag{7}$$

e ponendo nella 5) al posto di t il suo valore $\frac{m}{n}$ si ha:

$$\frac{m^2-mn}{1-\frac{m}{n}} = -m\,n = \frac{-p}{3} \tag{8}$$

Dalle 7) e 8) si deduce che m e n sono le radici dell'equazione di secondo grado

$$y^2 - \frac{3q}{p}y + \frac{p}{3} = 0, \tag{9}$$

e quindi è

$$10)\quad \begin{cases} m = \dfrac{1}{2}\left(+\dfrac{3q}{p} + \sqrt{\dfrac{9q^2}{p^2} - \dfrac{4p}{3}}\right) \\ n = \dfrac{1}{2}\left(+\dfrac{3q}{p} - \sqrt{\dfrac{9q^2}{p^2} - \dfrac{4p}{3}}\right). \end{cases}$$

Pertanto dalla 2) si ha

$$x = \frac{m - n\sqrt[3]{t}}{1 - \sqrt[3]{t}}$$

e sostituendo a m e n i valori dati dalla 10) si trova per x la nota espressione in funzione dei coefficienti p e q dell'equazione proposta.

Notiamo infine che l'equazione risolvente di 2° grado 9) si ottiene anche annullando il covariante hessiano di

$$f(x_1 x_2) = x_1{}^3 - p x_1 x_2{}^2 + q x_2{}^3,$$

che è

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1 & -2px_2 \\ -2px_2 & -2px_1 + 6qx_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -12px_1{}^2 + 36qx_1x_2 - 4p^2x_2{}^2;$$

dividendo per $12px_2{}^2$ e ponendo $\dfrac{x_1}{x_2} = y$, l'equazione $H = 0$ si riduce alla 9).

La teoria della risoluzione dell'equazione quartica, si può far dipendere dallo studio delle quaterne di punti $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ con un punto all'infinito: $\alpha_4 = \infty$.

Una tale quaterna è rappresentata dall'equazione cubica

$$f_3(x) = x^3 - px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0,$$

considerata come limite d'un'equazione $f_4 = 0$ di 4° grado, ove si ponga

$$a_0 \alpha_4 = 1, \quad a_0 = 0, \quad \alpha_4 = \infty,$$

e quindi

$$a_0 \,|14| = a_0 \,|24| = a_0 \,|34| = 1.$$

Ora si possono calcolare gl'invarianti di f_4:

$$i = \frac{1}{2}\Sigma\,|\,12\,|^2\,|\,34\,|^2 = \frac{1}{2}\{|\,12\,|^2 + |\,23\,|^2 + |\,31\,|^2\},$$

$$j = \Sigma|\,12\,|^2\,|\,34\,|^2\,|\,13\,|\,|\,42\,| = -\,|\,12\,|^2\,|\,13\,| - |\,13\,|^2\,|\,12\,| +$$
$$+\,|\,23\,|^2\,|\,12\,| + |\,12\,|^2\,|\,32\,| + |\,13\,|^2\,|\,23\,| + |\,32\,|^2\,|\,13\,|;$$

si trova

$$i = \Sigma\alpha_i^2 - \Sigma\alpha_i\alpha_k.$$

Ma per una nota formula di NEWTON

$$\Sigma\alpha_i^2 = (\Sigma\alpha_i)^2 - 2\Sigma\alpha_i\alpha_k,$$

e qui (essendo il coefficiente di x^2, $-\Sigma\alpha_i = 0$):

$$\Sigma\alpha_i^2 = -\,2\Sigma\alpha_i\alpha_k,$$

$$i = -\,3\Sigma\alpha_i\alpha_k,$$

cioè

$$i = 3p,$$

d'accordo col fatto che per $p = 0$ le radici di $f = 0$, cioè $\sqrt[3]{q}$, $\varepsilon\sqrt[3]{q}$, $\varepsilon^2\sqrt[3]{q}$, formano, come già abbiamo notato, un gruppo equianarmonico insieme al punto $x = \infty$.

Con un calcolo analogo si trova

$$j = 27q,$$

d'accordo col fatto che per $q = 0$, le radici di $f = 0$ sono

$$0, \quad +\sqrt{p}, \quad -\sqrt{p}$$

e formano un gruppo armonico insieme col punto $x = \infty$.

In luogo dei calcoli effettivi che forniscono i e j, possiamo osservare che le relazioni scritte innanzi risultano dimostrate *a priori*, in base al fatto che le condizioni di equianarmonicità e di armonicità si traducono in

$$p = 0, \quad q = 0.$$

Infatti si avrà

$$i = kp^s, \quad j = hq^r,$$

dove h, k sono fattori numerici. Ma il discriminante dell'equazione di 4° grado con una radice all'infinito, ove si faccia $a_0 \alpha_4 = 1$, diviene il discriminante dell'equazione cubica

$$D = 4p^3 - 27q^2;$$

sarà quindi

$$4i^3 - j^2 = 4k^s p^{3s} - 27h^2 q^{2r},$$

e si deduce intanto

$$r = s = 1,$$

$$i = kp, \quad j = hq.$$

Ora per valutare i fattori numerici k, h, si consideri il gruppo dotato di punto doppio $(-2, 1, 1, \infty)$, che è dato dall'equazione

$$x^3 - 3x - 2 = 0;$$

per esso è

$$p = 3 \quad q = -2,$$

e si trova

$$i = \frac{1}{2}(3^2 + 3^2 + 0^2) = 9$$

$$j = -54,$$

quindi

$$k = 3, \quad h = 27.$$

Dalle espressioni ottenute di p, q per i e j, segue che, quando è data un'equazione di 4° grado

$$f_4(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

che rappresenta una quaterna di punti G_4, si può formare *razionalmente* l'equazione cubica *(risolvente)*

$$f_3(x) = x^3 - px + q = 0,$$

cui corrisponde una quaterna G_4' con un punto all'infinito, proiettiva a G_4. Questo risultato è tanto più degno di nota in quanto che i coefficienti della sostituzione lineare

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

che fa passare da G_4 a G_4', dipendono dalle coordinate dei punti di G_4 cioè sono irrazionali.

Calcolate le radici della *risolvente* $f_3 = 0$, si possono scrivere le equazioni delle tre involuzioni che hanno per centro un punto della terna corrispondente e scambiano gli altri due punti; tali involuzioni sono trasformate dalla sostituzione $x=\frac{\alpha x'+\beta}{\gamma x'+\delta}$ nelle tre involuzioni che lasciano invariato il G_4, e così le equazioni di queste risultano espresse *razionalmente* per le radici di $f_3=0$.

Su tale circostanza si può fondare *la risoluzione dell' equazione di quarto grado.* Infatti, suppongasi che la quaterna di punti rappresentata dall'equazione $f_4(x)=0$ sia trasformata in se stessa da una involuzione

$$xx'-m(x+x')+n=0.$$

Cambiando x, x' in $x+m$, $x'+m$, questa involuzione diviene

$$xx'=m^2-n=k,$$

e l'equazione $\bar{f}_4(x)=0$, trasformata della data, avrà le radici

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3=\frac{k}{\alpha_1},\quad \alpha_4=\frac{k}{\alpha_2}.$$

Scriviamo

$$\bar{f}_4(x)=x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3=0,$$

sarà

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-b_1$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3=b_2-2k;$$

ponendo

$$y_1=\alpha_1+\alpha_3,\quad y_2=\alpha_2+\alpha_4,$$

risulterà

$$y_1+y_2=-b_1$$

$$y_1y_2=b_2-2k$$

e perciò $y_1 y_2$ saranno le radici dell'equazione di 2° grado:

$$y^2-b_1y+(b_2-2k)=0;$$

in funzione di queste radici si esprimeranno le $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, risolvendo ancora l'equazione di 2° grado

$$\alpha+\frac{k}{\alpha}=y,$$

cioè

$$\alpha^2-y\alpha+k=0.$$

In conclusione, dopo determinate le radici della risolvente cubica $f_3(x) = 0$, la risoluzione dell'equazione proposta, $f_4(x) = 0$, si riduce a quella di due successive equazioni di 2° grado, e si ritrovano così le formule note.

Della risoluzione dell'equazione di 4° grado e della sua riduzione ad una risolvente cubica, avremo luogo d'incontrare più avanti un'altra più chiara illustrazione geometrica.

6. **Nota sul calcolo effettivo delle forme invariantive e sulla rappresentazione simbolica.** — L'espressione degli invarianti e covarianti di $f(x)$ o di $f(x_1 x_2)$ per mezzo delle *distanze* (differenze) $|0k|$, $|ik|$, costruite colle radici di $f(x) = 0$ permette, come abbiamo notato, il calcolo effettivo di codeste forme.

Ma a supplire calcoli laboriosi determinandone *a priori* il resultato, si può anche far uso del procedimento di *notazione simbolica* di CAYLEY-ARONHOLD, che risponde a questa *esigenza economica* porgendo un modo sistematico di formazione.

Nella teoria geometrica delle equazioni, che è una *analisi qualitativa*, il problema di codeste formazioni si considera in qualche modo come secondario, giacchè occorre di rado di fondare conclusioni sopra il calcolo effettivo di un invariante o di un covariante, bastando in generale di sapere che esso dipende razionalmente dai coefficienti di f, o che questi entrano nella sua espressione ad un certo grado ecc.

Nondimeno interessa:

1°) di saper leggere le espressioni simboliche d'invarianti e di covarianti, quali si trovano in memorie e trattati classici;

2°) — e soprattutto — di conoscere l'idea fondamentale contenuta nella rappresentazione simbolica, che costituisce un fecondo *principio di conservazione formale rispetto alle degenerazioni.*

Consideriamo una forma f di ordine n, cioè il polinomio omogeneo (di grado n in $x_1 x_2$)

$$1) \qquad \Sigma a_{ik} x_1^{\,i} x_2^{\,k} \qquad (i + k = n),$$

dove la sommatoria contiene

$$\frac{n!}{i!\,k!} = \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots. i}$$

termini simili in $x_1{}^i x_2{}^k$, che si raccolgono in un unico termine ponendo in evidenza il fattore numerico $\binom{n}{i}$.

Consideriamo in particolare la forma f degenerata in un potenza n^{ma}, che scriveremo

$$2) \qquad f = a_x{}^n = (a_1 x_2 + x_1 a_2)^n.$$

La forma 1) s'identifica colla 2), se sono compatibili le equazioni

$$3) \qquad a_1{}^i a_2{}^k = a_{ik},$$

in cui a_1, a_2 compaiono come incognite.

Ogni forma, espressione razionale omogenea, φ, di grado g nelle a_{ik}, si riduce per la 2) ad una forma di grado ng nelle a_1, a_2:

$$\varphi_g(a_{ik}) = \varphi_g(a_1{}^i a_2{}^k), \quad (i + k = n),$$

e dalla φ_g $(a_1{}^i a_2{}^k)$ potrà dedursi la $\varphi_g(a_{ik})$ ove sieno messi in evidenza, senza ambiguità, i prodotti $a_1{}^i a_2{}^k$ da sostituire con a_{ik}.

Volendo adoperare sistematicamente il procedimento di calcolo fondato sulla indicata sostituzione, riguarderemo la forma degenere 2) come una *notazione simbolica* della 1), scrivendo dunque — anche per forme non degeneri — l'eguaglianza simbolica

$$f = a_x{}^n,$$

e fissando che questa rappresentazione debba servire a formare delle espressioni razionali dei prodotti $a_1{}^i a_2{}^k$ $(i + k = n)$, nelle quali i prodotti suddetti sieno da sostituire coi coefficienti effettivi a_{ik}.

Ora vediamo come la rappresentazione simbolica conduca ad un procedimento di formazione delle forme invariantive, di f. Per semplicità di discorso ci riferiremo agli invarianti, e stabiliremo i seguenti teoremi:

Lemma di CAYLEY (¹). Se

$$I = I(a_0 a_1 \ldots. a_n)$$

è un invariante della forma

$$f = a_0 x_1{}^n + a_1 x_1{}^{n-1} x_2 + \ldots. + a_n x_2{}^n,$$

(¹) Fourth memoir upon quantics (Philos. Transactions, 148).

e se si considera un' altra forma

$$\varphi = b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n,$$

l' espressione

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial I}{\partial a_1} b_1 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_n} b_n$$

sarà un invariante simultaneo di f, φ.

Infatti, se si cambia nell' espressione di f, a_i in $a_i + \lambda b_i$, si otterrà un invariante della forma $f + \lambda\varphi$, cioè per una sostituzione lineare di modulo M che trasformi

$$a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots, \quad b_0 x_1^n + b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots$$

in

$$a_0' x_1^n + a_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots, \quad b_0' x_1^n + b_1' x_1^{n-1} x_2 + \dots,$$

si avrà

$$I(a_0' + \lambda b_i', \quad a_1' + \lambda b_1', \dots a_n' + \lambda b_n') =$$
$$= M^h I(a_0 + \lambda b_0, \quad a_1 + \lambda b_1, \dots a_n + \lambda b_n).$$

Questa equazione vale qualunque sia λ e perciò, sviluppando i due membri per le potenze di λ, dovranno uguagliarsi i coefficienti di λ^r per $r = 0, 1, 2 \dots$. Ma, uguagliando i coefficienti di λ, si ottiene

$$\frac{\partial I}{\partial a_0'} b_0' + \frac{\alpha I}{\partial a_1'} b_1' + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_n'} b_n = M^h \left(\frac{\partial I}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial I}{\partial a_1} b_1 + \dots + \frac{\partial I}{\partial a_n} b_n \right),$$

ciò che dimostra l' enunciato.

Il lemma precedente si estende al caso in cui I sia un invariante simultaneo di due o più forme, $f, f_1, \dots$, che contenga i coefficienti a di una di queste, f, ad un grado $g > 1$; aggiungendo una forma $\varphi = b_0 x_1^n + b_1 x_2^{n-1} + \dots$, si prova analogamente che $\Sigma \frac{\partial I}{\partial a_i} b_i$ è un invariante simultaneo di $\varphi f f_1 \dots$.

Se ora s' identifica la forma φ con f ponendo dunque

$$b_i = a_i,$$

l' invariante $\Sigma \frac{\partial I}{\partial a_i} b_i$ — per il teorema d' EULERO – ricade in I.

Ciò posto il nostro lemma conduce ad un procedimento ripetibile da cui si deduce il

Teorema. Ad ogni invariante I (razionale intero) di grado g (>1), di una forma f, corrisponde un invariante simultaneo di g forme $ff_1 \ldots f_{g-1}$, che contiene linearmente i coefficienti di queste forme. Se le forme $f_1 f_2 \ldots f_{g-1}$ s'identificano con f, questo invariante lineare si riduce ad I. In altre parole:

Ogni invariante di grado g(>1) *della forma* f, *si può considerare come limite di un invariante lineare simultaneo di* g *forme, che s'identifichino con* f.

Facciamo un altro passo introducendo la notazione simbolica delle forme.

Si abbiano dunque g forme rappresentate simbolicamente da

$$f = a_x^n, \quad f_1 = b_x^n, \quad f_2 = c_x^n, \ldots .$$

Se I è un invariante lineare simultaneo di $ff_1 f_2 \ldots$, esso si può esprimere simbolicamente come un invariante lineare simultaneo delle forme degeneri a_x^n, b_x^n, $c_x^n, \ldots$, e quindi come un invariante delle forme lineari a_x, b_x, $c_x \ldots$ omogeneo di grado n rispetto alle coppie di variabili $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2 \ldots$.

Invarianti simultanei siffatti si ottengono combinando le *distanze* dei punti $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0, \ldots$ *rese omogenee*, cioè i determinanti elementari

$$(ab) = (a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad (ac) = (a_1 c_2 - a_2 c_1), \ldots,$$

i quali — per una sostituzione lineare su $x_1 x_2$ — si riproducono moltiplicati semplicemente per il modulo. Reciprocamente ogni invariante simultaneo I delle forme lineari a_x, b_x, $c_x \ldots$, omogeneo di grado n rispetto alle coppie di variabili $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2 \ldots$, si esprime per mezzo dei suddetti determinanti elementari, potendosi ripetere qui l'osservazione fondamentale del § 3. Infatti I, diviso per $a_1^n b_1^n c_1^n \ldots$, si riduce ad una funzione razionale di $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{c_2}{c_1} \ldots$ che deve restare asssolutamente invariata per le traslazioni $x = x' + k$, le quali sono particolari sostituzioni lineari di modulo 1, e quindi dipende soltanto dalle differenze

$$\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{c_2}{c_1} - \frac{a_2}{a_1} \ldots;$$

si deduce che I è una combinazione razionale dei determinanti (ab), $(ac) \ldots$. c. d. d.

Si avrà dunque

$$I = \Sigma\alpha\Pi(ab),$$

dove gli α designano coefficienti numerici.

In ogni prodotto $\Pi(ab)$, ciascun simbolo a compare n volte, sicchè — sviluppando — ogni termine della somma si ridurrà al tipo

$$a_1{}^i a_2{}^k b_1{}^r b_2{}^s,$$

dove

$$i + k = r + s = ... = n.$$

Quindi, sostituendo ad

$$a_1{}^i a_2{}^k, \quad b_1{}^r b_2{}^s ....$$

i coefficienti

$$a_{ik} = b_{ik} = ...$$

si otterrà l'espressione effettiva di I per i coefficienti di f.

Riassumendo si ha il

Teorema fondamentale di CLEBSCH [1]. *Ogni invariante di grado* g(> 1) *di una forma* f, *si può rappresentare simbolicamente, introducendo* g *forme equivalenti*

$$f = a_x{}^n = b_x{}^n = ...,$$

mediante una somma di prodotti di determinanti simbolici del tipo (ab), (ac), (bc),...., *in guisa che ciascun termine della somma contenga tra i suoi fattori* n *volte i simboli* a, b, c....

Reciprocamente una espressione di questo tipo, rappresenta un invariante di grado g della forma f.

Osservazione. Non esistono invarianti lineari d'un'unica forma f perchè — ponendo $f = a_x{}^n$ — si ridurrebbero ad invarianti della forma lineare a_x; infatti un punto non può soddisfare ad alcuna condizione proiettiva, quale sarebbe espressa — per il punto $a_x = 0$ — dall'annullamento di un siffatto invariante.

Il teorema fondamentale si estende senza difficoltà ai covarianti:

[1] *Journal für Math.* Bd 59.

Ogni covariante (razionale intero) *di*

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots,$$

ammette una rappresentazione simbolica in cui entrano fattori del tipo (ab) e c_x.

7. Applicazioni ed esempî: forme invariantive delle binarie cubiche e quartiche. — Mostreremo l'importanza del teorema fondamentale di Clebsch sulla rappresentazione simbolica delle forme invariantive, accennando rapidamente come si costruiscano i principali invarianti e covarianti delle forme $f = a_x^n$ d'ordine $n = 2, 3, 4$.

Cominciamo dagli *invarianti*.

La forma *quadratica* $f(x_1 x_2)$ possiede un solo invariante, proporzionale al quadrato della distanza fra i due punti $f = 0$, cioè il *discriminante* D.

Questo è un invariante di 1° grado nei coefficienti di f, quindi si otterrà la sua rappresentazione simbolica ponendo

$$f = a_x^2 = b_x^2.$$

C'è un unico invariante lineare delle due forme, che è

$$(ab)^2,$$

perciò si avrà (a meno di un fattore numerico arbitrario)

$$D \equiv (ab)^2.$$

Sviluppando e ponendo

$$f = \Sigma_{ik} x_1^i x_2^k = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

viene

$$D \equiv (ab) = \frac{1}{2}(a_1^2 - 4a_0 a_2),$$

che si accorda colla espressione del § 2.

Per due forme quadratiche distinte

$$f = a_x^2, \quad \varphi = b_x^2$$

si trova similmente un unico invariante lineare simultaneo, cioè l'*armonizzante* $(ab)^2$, che uguagliato a 0 esprime la separazione armonica delle due coppie

$$f=0, \quad \varphi=0.$$

Passiamo alla *forma cubica*:

$$f=a_x^3=b_x^3=c_x^3=\ldots..$$

Non vi possono essere invarianti di 2° grado, perchè un tale invariante sarebbe rappresentato da

$$(ab)^3,$$

mentre ***il determinante*** (ab) ***cambia di segno permutando i simboli equivalenti*** a, b ***e quindi si ha identicamente***

$$(ab)^3=-(ab)^3=0.$$

Un invariante del 3° grado sarebbe una somma di termini del tipo

$$(ab)^i(bc)^r(ca)^s$$

dove

$$i+r=r+s=i+s=3.$$

Queste equazioni non sono solubili con numeri interi i, r, s, fra i quali non ve ne sieno due nulli; perciò la f non possiede invarianti del 3° grado. Ciò è d'accordo coll'osservazione generale che le forme d'ordine dispari (n), posseggono soltanto invarianti di grado (g) pari, essendo $ng=2p$ (§. 2).

Un invariante di f, del 4° grado, è espresso da

$$(ab)^2(cd)^2(ac)(bd),$$

ed è facile vedere che non ce ne sono altri essenzialmente diversi.

Del resto la forma cubica, non avendo invarianti assoluti, non può possedere due invarianti che non sieno l'uno potenza dell'altro. Da ciò si deduce che l'invariante precedente (a meno di un fattore numerico) esprime il ***discriminante*** D di f, il quale — non avendo radici multiple — non può certo ridursi ad una potenza d'una forma di grado inferiore; dunque si può prendere:

$$D\equiv(ab)^2(cd)^2(ac)(bd)\equiv$$
$$\equiv a_1^2a_2^2-18a_0a_1a_2a_3-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2.$$

Passiamo alla *forma quartica*:

$$f = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 .$$

Qui si ha un *primo invariante di 2° grado,*

$$(ab)^4,$$

che è evidentemente unico e perciò coincide con i a meno di un fattore numerico; si trova, sviluppando i calcoli

$$i \equiv (ab)^4 \equiv a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12 a_0 a_4$$

d'accordo con l'espressione del §. 4.

Si ha poi un *secondo invariante, del 3° grado,*

$$(ab)^2 (bc)^2 (ca)^2,$$

ed è chiaro che un prodotto del tipo

$$(ab)^i (bc)^r (ca)^s$$

non può dare un invariante del 3° grado di f se non per

$$i + r = r + s = i + s = 4$$

$$i = r = s = 2,$$

cioè non vi sono altri invarianti di 3° grado di f.

L'invariante trovato coinciderà dunque con j, a meno d'un fattore numerico, e si avrà, in accordo col § 4:

$$j \equiv (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 \equiv 27 a_1^2 a_4 + 27 a_1 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_0^3 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3 .$$

Citeremo ora i principali *covarianti* delle forme binarie cubiche e quartiche: la forma quadratica non possiede covarianti all'infuori delle potenze di se stessa, giacchè le infinite proiettività che lasciano invariata una coppia di punti (scambiandoli fra loro o lasciandoli fermi) non lasciano invariato alcun altro gruppo di punti della retta.

Per una binaria *cubica*

$$f = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3$$

non esistono covarianti del prim'ordine. Ciò risulta geometricamente dal fatto che i due punti uniti delle proiettività cicliche che lascian invariata una terna di punti (ABC) sono scambiati fra loro dall'involuzione che ha un punto doppio in A e come coniugati i punti BC, sicchè non esiste alcun punto che sia unito insieme per le proiettività lascianti invariata la terna (ABC). Ma quando si procede col metodo di formazione simbolica, si presenta a prima vista un covariante del primo ordine

$$a_x(ab)(ac)(bc)^2;$$

occorre dunque mostrare che questo è identicamente nullo. Ora scambiando i simboli

$$a \text{ e } b, \quad a \text{ e } c$$

e sommando le tre espressioni equivalenti così ottenute, si trova

$$a_x(ab)(ac)(bc)^2 = \frac{1}{3}(ab)(ac)(bc)\,\{(bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x\},$$

dove si ha l'*identità*

$$(bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x = \begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

essendo i termini della prima colonna del determinante combinazioni lineari di quelli delle altre due:

$$(a_x = a_1x_1 + a_2x_2 \ldots.).$$

Esiste per f un solo covariante di 1° ordine (a prescindere da un fattore invariante arbitrario); questo è lo hessiano di f (§. 2) e si esprime con

$$H = (ab)^2 a_x b_x,$$

come si trova anche sviluppando

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

nel modo che vedremo per le quartiche.

Posto uguale a 0, H rappresenta i due punti che presi insieme alla terna $f=0$ costituiscono un gruppo equianarmonico (cfr. §. 5); si ha qui una nuova dimostrazione di tale proprietà, dall'osservazione che i due punti suddetti formano l'unica coppia covariante di $f=0$.

Lo jacobiano di f e H è un covariante cubico di f,

$$Q=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix};$$

posto

$$f=a_x^3=b_x^3=c_x^3$$

e

$$H=(bc)^2 b_x c_x,$$

si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3a_1 a_x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=3a_2 a_x^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=(bc)^2(b_1 c_x+c_1 b_x), \quad \frac{\partial H}{\partial x_2}=(bc)^2(b_2 c_x+c_2 b_x),$$

quindi

$$Q\equiv(ab)^2(cb)c_x^2 a_x.$$

Per trovare il significato geometrico di $Q=0$, basta notare che la f non possiede altri covarianti cubici all'infuori di f stessa e di Q, d'accordo coll'annullarsi identicamente di

$$(ab)(bc)(ca)a_x b_x c_x.$$

Infatti è agevole riconoscere che il gruppo Γ_6 delle proiettività (del terz'ordine ed involutorie) che lasciano invariata la terna di punti (ABC) rappresentata da $f=0$, lasciano invariata soltanto un'altra terna, costituita dai coniugati armonici A', B', C' dei singoli punti A, B, C rispetto agli altri due. Si deduce che $Q=0$ rappresenta appunto la terna $(A'B'C')$.

Si dimostra poi che tutte le forme invariantive di f si possono esprimere razionalmente in funzione del discriminante D, e di f, H, Q.

Per una binaria *quartica*

$$f=a_x^4=b_x^4=c_x^4,$$

si riconosce anzitutto che *non esistono covarianti di ordine dispari* 1, 3....; ciò vale in generale per ogni *forma d'ordine* m *pari*, stante la relazione $2p = ng - m$ fra grado g, peso p, ordine m, che abbiamo trovata al § 2.

Ora si vede che per la quartica non esistono neppure covarianti del secondo ordine, annullandosi identicamente $(ab)^3 a_x b_x$, ed $(ab)(ac)(bc)a_x^2$, che cambiano segno per le trasposizioni dei simboli (ab) e (bc). Invece vi è luogo a considerare un covariante del 4° ordine di f che è fornito dallo hessiano di cui vedremo più tardi l'interpretazione geometrica. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6a_1^2 a_x^3, \ldots.$$

quindi

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_x^2 a_1^2 & a_x^2 a_1 a_2 \\ b_x^2 b_2 b_1 & b_x^2 b_2^2 \end{vmatrix} = (ab)a_1 b_2 a_x^2 b_x^2;$$

e, siccome questa espressione non deve mutare permutando gli indici a b, si avrà

$$H \equiv (ab)^2 a_x^2 b_x^2.$$

Lo jacobiano della quartica f e dello hessiano H porge un covariante del sesto ordine

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv (ab)^2(bc)c_x^3 a_x^2 b_x.$$

Vedremo nel seguito che $T = 0$ rappresenta le tre coppie di punti doppi delle tre involuzioni che lasciano invariata la quaterna $f = 0$.

Si dimostra che tutte le forme invariantive della quartica f si esprimono razionalmente per i, j, f, H, T.

8. Nota storica sulla teoria degli invarianti. — Cfr. i trattati di:

G. SALMON « Lessons introductory to the modern higher algebra » 4ª ed. Dublino 1885 (ed. tedesca aumentata di

W. FIEDLER « Algebra der linearen Transformationen », Lipsia, 1877).

A. CLEBSCH « Theorie der binären algebraischen Formen » Lipsia, 1872. « Vorlesungen über Geometrie » per cura di F. LINDEMANN, Lipsia, 1875, trad. francese, Parigi, 1879.

FAÀ DI BRUNO « Teoria delle forme binarie » (traduzione tedesca con note bibliografiche di WALTER e NOETHER Lipsia 1881).

P. GORDAN « Vorlesungen über Invariantentheorie », Lipsia, 1885-1887.

H. WEBER « Lehrbuch der Algebra », Braunswig 1895-96, (trad. francese. Parigi, 1898).

A. CAPELLI « Lezioni sulla teoria delle forme algebriche », Napoli, 1902.

Vedi pure i rapporti storici di

FR. MEYER « Iahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung » Berlino 1890-91, 1892 (trad. italiana, Giornale di Matematiche, Napoli, vol.[i] 32-33).

H. E. TIMERDING in Pascal's Repertorium I Kap. V, Lipsia e Berlino 1910.

La teoria degli invarianti (estesa più tardi in varii sensi ed anche — fuori dei confini dell'algebra — in ordine ai gruppi di trasformazioni qualsiansi) trae origine essenzialmente dallo sviluppo della Geometria proiettiva (PONCELET, CHASLES, MÖBIUS, PLÜCKER, STEINER) e dalla necessità di tradurre in forma analitica le proprietà proiettive degli enti algebrici; una menzione speciale meritano a questo proposito la teoria del birapporto e la polarità. Tuttavia l'invarianza per trasformazioni lineari dei discriminanti delle forme quadratiche di due e tre variabili, si era già presentata in ricerche aritmetiche di LAGRANGE (Memorie di Berlino 1773) e di GAUSS « Disquisitiones arithmeticae » (1801).

Gl'inizii della teoria degli invarianti propriamente detta si sogliono riattaccare alle memorie di BOOLE (Cambridge Math. Journal 1841-42-44) in cui l'autore considera in generale i discriminanti di forme d'ordine qualunque e ne deduce la formazione di altri invarianti simultanei di più forme.

A queste prime ricerche seguono quelle di CAYLEY, iniziate nel 1845, riprese e proseguite nelle « Memoirs upon quantics » 1854-1861 (Cfr. nelle « Collected math. papers » particolarmente le memorie 4[a] e 5[a] del 1858), quindi le ricerche di

ARONHOLD (Journal für Mathematik 1849-1863), di SYLVESTER (1851-54), di CLEBSCH (iniziate nel 1861), di GORDAN (iniziate nel 1868) ecc.

CAYLEY ed ARONHOLD hanno osservato che le forme invariantive, p. es. una

$$\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 .... a_n)$$

relativa ad una binaria

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + ... + a_n x_2^n,$$

si possono definire come *soluzioni razionali di* certe *equazioni differenziali,* che si ottengono eliminando α, β, γ, δ, dall'espressione di ψ trasformata mediante la sostituzione

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2'. \end{cases}$$

L'uso del *simbolismo* per il calcolo effettivo degli invarianti compare già in CAYLEY; ma ARONHOLD (1858) lo ha riattaccato alla possibilità di sostituire alle forme considerate delle potenze di forme lineari. A CLEBSCH (1861) appartiene il teorema fondamentale della rappresentazione simbolica, che permette di definire le forme invariantive come prodotti simbolici di determinanti di tipo dato.

Ancora a proposito della definizione delle forme invariantive $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 .... a_n)$, deve essere menzionato il teorema dovuto ad ARONHOLD (Journ. für Math. Bd 62), e di cui si hanno dimostrazioni di CLEBSCH, GRAM, CAPELLI, che: « se trasformando $\psi(x_1 x_2 a_0 a_1 .... a_n)$ con una sostituzione lineare

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_1' \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2', \end{cases}$$

la ψ si riproduce moltiplicata per una funzione $\theta(\alpha\beta\gamma\delta)$, deve essere θ una potenza del modulo $M = \alpha\delta - \beta\gamma$ ». Il contenuto essenziale di questo teorema è il teorema che abbiamo dato al § 2 che « le funzioni invariantive sono i primi membri di equazioni invarianti, esprimenti col loro annullamento proprietà proiettive di $f(x_1 x_2) = 0$ ».

Vogliamo ora specialmente notare i progressi conseguiti nella teoria degli invarianti in ordine a due problemi generali: il problema dell'*equivalenza*, e la questione della *base* di un sistema di forme invariantive.

Il problema generale dell'equivalenza o trasformabilità con sostituzioni lineari per forme, e fasci di forme, quadratiche e bilineari con un numero qualunque di variabili, ha dato luogo ad un celebre teorema di WEIERSTRASS (Berliner Berichte 1868). Per forme d'ordine superiore, CLEBSCH (Math. Annalen Bd II, 1870) sembra pel primo aver proposta la questione se l'uguaglianza degli invarianti assoluti, necessaria secondo ARONHOLD, sia anche condizione sufficiente per la possibilità di trasformare linearmente l'una forma nell'altra. Riferendoci al caso delle forme binarie d'ordine n, $f(x_1 x_2)$, $\varphi(x_1 x_2)$, si tratta di esprimere le condizioni di proiettività dei due gruppi di n punti:

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

Se i due gruppi non contengono punti doppi, cioè *per forme con discriminante non nullo, l'equivalenza è caratterizzata* dall'uguaglianza di $n-3$ *invarianti assoluti indipendenti*, funzioni dei birapporti che i punti d'un gruppo formano con tre di essi; gl'invarianti relativi indipendenti sono $n-2$. Ma la proprietà anzidetta non sussiste più in generale per forme con discriminante nullo. Infatti ci sono delle *proprietà proiettive* dei gruppi di punti *che non si possono esprimere semplicemente annullando degli invarianti, ma si traducono nell'annullamento identico di covarianti.*

L'esempio più semplice è offerto dalla condizione perchè una terna o una quaterna di punti si riduca ad un solo punto (triplo o quadruplo). Infatti la binaria cubica f ha un solo invariante, il discriminante, annullando il quale si esprime che la terna $f=0$ possiede un punto doppio, sicchè manca il modo di esprimere, coll'annullamento d'un altro invariante, che la terna si riduca ad un punto triplo. Similmente se una quaterna $f=0$ ha un punto triplo, si annullano insieme i due invarianti indipendenti i ed j, l'invariante assoluto diventando indeterminato, e manca un altro invariante per mezzo del quale possa esprimersi l'esistenza d'un punto quadruplo. Vedremo più tardi che la condizione perchè una forma f d'ordine n si riduca alla potenza n^{ma} d'una forma lineare, si esprime in generale annullando identicamente il covariante hessiano. La risposta generale al problema d'equivalenza è offerta dal

Teorema di GRAM [1]. *Le condizioni d'equivalenza di due forme o sistemi di forme* (con un numero qualunque di variabili) *si esprimono in tutti i casi uguagliando i loro invarianti e annullando identicamente i medesimi covarianti.*

Passiamo al problema della base di un sistema di forme invariantive.

Dopochè CAYLEY e SYLVESTER avevano dimostrato che le forme binarie d'ordine $n \leq 4$ posseggono un numero finito di formazioni invarianti di cui tutte le altre sono combinazioni *razionali*, CAYLEY nel 1856 affrontò la questione generale concernente il sistema degl'invarianti e covarianti d'una forma qualunque e credette erroneamente di poter dare una risposta negativa alla domanda se esista un *numero finito* di forme (costituenti una *base* del sistema) per cui tutte le forme invariantive si esprimano *razionalmente* ».

GORDAN nel 1868 dimostrò per la prima volta il teorema fondamentale che « il sistema degl'invarianti, e covarianti d'una binaria qualunque ammette sempre come base un numero finito di forme ». La dimostrazione dell'A. (da lui stesso ripresa e semplificata più tardi) consiste in una serie di procedimenti di costruzione effettiva delle forme invariantive appartenenti ad una data f, fondati sulla rappresentazione simbolica; vi giuocano in ispecie i così detti *scorrimenti* (CAYLEY) di due forme $f = a_x^n$ $\varphi = b_x^m$ $(n \geq m)$, cioè i covarianti simultanei rappresentati simbolicamente da $(ab)^h a_x^{n-h} b_x^{m-h}$ (per $h = 0, 1, \ldots. m$).

Soltanto nel 1886 MERTENS (Journal für Math. Bd. 100), abbandonando il punto di vista simbolico dell'Algebra formale e l'interesse pratico dell'esecuzione dei calcoli, ha introdotto l'idea di fondare il teorema di GORDAN sull'espressione degl'invarianti e covarianti per mezzo della radici di f. La dimostrazione, in questo ordine d'idee, è stata ulteriormente semplificata da HILBERT (Math. Annalen, Bd 33, 1888).

Diamo un rapido cenno di questa dimostrazione del teorema di GORDAN, riferendoci — per semplicità di discorso — agl'invarianti (razionali interi) di

$$f(x) = a_0(x - x_1) \ldots. (x - x_n).$$

(1) Math. Annalen, Bd 7.

Ogni invariante I è un aggregato simmetrico delle differenze delle radici $|ik|$, e precisamente di prodotti del tipo

$$P = |12|^{e_{12}} |13|^{e_{13}} \dots |n-1, n|^{e_{n-1, n}},$$

dove ciascuno degl'indici 1, 2....n deve figurare uno stesso numero di volte.

Questa condizione si traduce in un sistema di equazioni lineari diofantee

$$e_{12} + e_{13} + \dots + e_{1n} = e_{21} + e_{23} + \dots + e_{2n} = \dots$$
$$= e_{n1} + e_{n2} + \dots + e_{n, n-1}.$$

Tutte le soluzioni (intere e) positive di questo sistema si compongono con un numero finito m di esse, mediante combinazioni lineari a coefficienti interi e positivi

$$e_{ik} = p_1 e_{ik}^{(1)} + p_2 e_{ik}^{(2)} + \dots + p_m e_{ik}^{(m)}.$$

Se ora P_r designa l'invariante irrazionale

$$P_r = \prod_{i, k} |ik|^{e_{ik}^{(r)}},$$

P_r soddisferà ad un'equazione algebrica di grado $n!$ e, per un noto teorema, una potenza qualsiasi di P_r di ordine p_r, si potrà esprimere come funzione lineare omogenea delle potenze d'ordine $0, 1, \dots, n! - 1$, con coefficienti funzioni razionali intere delle somme di potenze simili

$$P_r + \dots, \quad P_r^2 + \dots, \quad P_r^{n!-1} + \dots.$$

In virtù dell'espressione delle e_{ik} mediante le $e_{ik}^{(r)}$ anzidette, l'invariante I si riduce ad una funzione simmetrica

$$I = \Sigma \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \dots \omega_m^{p_m};$$

quindi — introducendo i valori indicati delle potenze $\omega_r^{p_r}$ — si riconosce che I è funzionale intera d'un numero finito d'invarianti costruiti in modo analogo, dove nessuno degli esponenti di ω_r supera $n!$.

Il teorema di GORDAN si estende al caso di forme e di sistemi di forme con un numero qualunque di variabili. Precisamente HILBERT (Math Annalen Bd 36, 1890) è giunto a tale estensione stabilendo il seguente teorema generalissimo:

Ogni sistema di forme ad n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$:

$$F_1 F_2 \dots,$$

costruito con una legge qualsiasi, contiene sempre un numero finito di forme

$$F_{i_1} F_{i_2} \dots F_{im},$$

costituenti una *base*; cioè tutte le F_s si possono esprimere come combinazioni lineari:

$$F_s = A_{s1} F_{i_1} + A_{s2} F_{i_2} + \dots + A_{sm} F_{im},$$

dove le A sono pure forme delle x (i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità definito dai coefficienti delle F).

Chiuderemo queste brevi note ricordando che i più semplici invarianti e covarianti delle forme binarie d'ordine $n = 3$, 4 sono stati trovati da EISENSTEIN (Journal für Math. 1844). La teoria sistematica di codeste forme, con riferimento alla risoluzione delle rispettive equazioni, è stata svolta da CAYLEY (1858).

Nel seguito daremo notizie sulla polarità, e sulle forme ternarie in rapporto alla teoria delle curve piane.

CAPITOLO II

Interpretazioni fondamentali dell' equazione $f(xy)=0$: curve e corrispondenze.

9. Le equazioni $f(xy)=0$ e le curve piane. — Consideriamo l' equazione algebrica

$$f(xy)=0$$

dove f è un polinomio di grado n complessivamente, cioè l' equazione

$$1)\quad \begin{aligned} f(xy) = {} & a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{0,n}y^n + \\ & + a_{n-1,0}x^{n-1} + \dots + a_{0,n-1}y^{n-1} + \dots + a_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

dove i coefficienti a_{ik} posson esser reali o complessi.

Interpreteremo x e y come le due coordinate di un punto, reale o complesso secondo che esse sono ambedue reali o una almeno complessa. Ciò posto chiameremo *curva* (*algebrica*) [1] $f(xy)=0$ l' insieme dei punti *reali* e *complessi* che soddisfano l' equazione 1) cioè le cui coordinate annullano il polinomio f.

Può accadere che il polinomio $f(xy)$ sia decomponibile nel prodotto di due altri polinomi f_1 e f_2 sì che si abbia

$$f(xy)=f_1(xy)f_2(xy):$$

in questo caso le coppie di valori x e y che annullano f sono tutte e sole le coppie che annullano f_1 o f_2: abbiamo

[1] La definizione delle curve *algebriche*, distinte dalle *trascendenti*, risale a R. DESCARTES (« La Géométrie », Leida, 1637 - Oeuvres, Parigi, 1902, pg. 369). Però la considerazione dei punti immaginarii delle curve è molto posteriore, essendosi introdotta soltanto nel secolo scorso, nelle scuole di MONGE e di PLÜCKER (più tardi nella teoria sintetica di STAUDT), mentre gli sviluppi di GAUSS e di CAUCHY hanno posto l' immaginario a base della moderna teoria delle funzioni.

quindi che la curva $f(xy)=0$ è costituita da tutti e soli i punti che appartengono alla $f_1(xy)=0$ o alla $f_2(xy)=0$; la curva $f(xy)=0$ dicesi *riducibile* o *spezzata* nelle due *componenti* f_1 e f_2.

Più in generale, se

$$f(xy)=f_1(xy)f_2(xy)\dots.f_r(xy)$$

diremo che la curva $f(xy)$ è spezzata nelle r curve $f_1, f_2, \dots.f_r$; se poi i polinomi $f_1, f_2, \dots.f_r$ non sono tutti diversi, sì che si può scrivere

$$f=f_1^{r_1}f_2^{r_2}\dots.f_i^{r_i}$$

dove

$$f_1, f_2, \dots.f_i$$

sono tutti diversi fra loro, allora diremo che la curva $f=0$ si compone della *curva* $f_1=0$ *contata* r_1 volte, più la curva $f_2=0$ contata r_2 volte,...., più la curva $f_i=0$ contata r_i volte.

Secondo Newton (1676), le curve algebriche si classificano secondo il loro « ordine »: si definisce come *ordine di una curva* (algebrica)

$$f(xy)=0,$$

il grado complessivo della f(xy) rispetto ad x, y. Se una curva algebrica si *spezza* in due o più altre, l'ordine della curva è dato dalla *somma degli ordini* delle curve che la compongono.

L'ordine di una curva algebrica si può definire geometricamente come il numero delle intersezioni della curva con una retta generica del suo piano. Sussiste infatti il

Teorema: *Una curva d'ordine* n *è incontrata in* n *punti da una retta generica.*

Consideriamo la retta

$$ax+by+c=0:$$

essa incontra la

$$f(xy)=0$$

nei punti le cui coordinate soddisfano al sistema

$$2)\qquad \begin{cases} f(xy)=0 \\ ax+by+c=0. \end{cases}$$

Ricaviamo y dalla seconda di queste due equazioni e sostituiamo il valore nella prima; otteniamo così un'equazione in x:

3) $$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n = 0$$

dove i coefficienti A_0, A_1, ... A_n risultano dipendenti dai parametri a, b, c che determinano la retta.

In particolare

$$A_0 = a_{n,0} - a_{n-1,1}\frac{a}{b} + a_{n-2,2}\frac{a^2}{b^2} + ... + (-1)^n a_{0,n}\frac{a^n}{b^n}.$$

Tolti quindi valori particolari dei parametri a e b, risulta il coefficiente

$$A_0 \neq 0,$$

e l'equazione 3) ha n radici. Parimente, se f non contiene componenti multiple, tolti valori particolari dei parametri a, b, c, le radici della 3) risulteranno tutte distinte. Possiamo così dire che una retta *generica* del piano incontra la $f(xy) = 0$ in n punti.

Supponiamo ora di far variare con continuità i parametri a, b, c che individuano la retta

$$ax + by + c = 0.$$

Potrà accadere che per posizioni particolari della retta, un certo numero r delle radici della 3), α_1, α_2, ... α_r, vengano a coincidere in un'unica radice α, che risulterà multipla d'ordine r; allora i punti P_1, P_2, ... P_r, intersezioni della curva $f(xy) = 0$ con la retta, corrispondenti alle radici α_1, α_2, ... α_r, coincideranno in un'unico punto P, il quale verrà considerato assorbente r ***intersezioni coincidenti*** della curva $f(xy) = 0$ con la retta.

Supponiamo in fine che la retta assuma una di quelle posizioni particolari per la quale A_0 è nullo. Corrispondentemente l'equazione 3) si riduce di grado $n - 1$, ed una delle sue radici se ne va all'infinito. In questo caso noi diremo che la *retta ha comune con la curva* f$(xy) = 0$ un ***punto all' infinito***.

Per illuminare questa convenzione giova introdurre al posto di x e y le coordinate omogenee $\frac{x_1}{x_3}$ e $\frac{x_2}{x_3}$. La 3) allora diviene

$$A_0\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n + ... + A_n = 0,$$

e moltiplicando per x_3^n si riduce alla *forma d'ordine* n:

3') $$f(x_1 x_2 x_3) = A_0 x_1^n + A_1 x_3 x_1^{n-1} + \dots + A_n x_3^n = 0.$$

Se $A_0 = 0$, la 3') si annulla per $x_3 = 0$. Essendo $x_3 = 0$ l'equazione della retta all'infinito, si ha che, quando $A_0 = 0$, la nostra retta e la curva f hanno un punto comune sulla retta all'infinito. Naturalmente se, invece del solo coefficiente A_0, si annullassero tutti i primi r coefficienti, con che $x_3 = 0$ diverrebbe una radice r-pla della 3'), diremo che r delle intersezioni sono riunite all'infinito. Finalmente notiamo che, se una curva d'ordine n è incontrata da una retta in $n+1$ punti, essa contiene tutta la retta, cioè è *riducibile* nella retta e in una curva residua d'ordine $n-1$.

Infatti si assumano gli assi in modo che sia

$$y = k$$

l'equazione della retta che ha $n+1$ intersezioni con la curva d'ordine n

$$f(xy) = 0;$$

si ha allora che l'equazione di grado n:

$$f(x, k) = 0$$

ha $n+1$ radici, e quindi è identicamente soddisfatta.

Consideriamo ora $f(xy)$ come un polinomio in y

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n$$

i cui coefficienti

$$A_1, A_2, \dots A_n$$

sono funzioni di x.

Questo polinomio si annulla per $y = k$, quindi è divisibile per $y - k$, cioè

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n = (y - k)(B_0 y^{n-1} + \dots + B_{n-1})$$

dove i coefficienti B sono funzioni razionali intere della x: quindi, ponendo

$$B_0 y^{n-1} + \dots + B_{n-1} = f_1(xy),$$

si ha

$$f(xy) = (y - k) f_1(xy).$$

Abbiamo così che la curva $f(xy) = 0$ si spezza nella retta

$y = k$ e nella curva residua

$$f_1(xy) = 0$$

che deve avere l'ordine $n - 1$ in quanto l'ordine di una curva riducibile è uguale alla somma degli ordini delle parti che la compongono.

Dopo ciò, ricordando le due convenzioni precedenti sulle intersezioni multiple e quelle all'infinito, potremo dire che « *Una curva di ordine* n *è intersecata da ogni retta che non ne faccia parte in* n *punti*, debitamente computandosi gli eventuali punti multipli e gli eventuali punti all'infinito.

Se nella equazione algebrica $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ si pongono al posto delle variabili le *coordinate di rette*, coefficienti della equazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

l'equazione

$$F(u_1 u_2 u_3) = 0$$

rappresenta una *curva inviluppo* le cui proprietà si desumono da quelle della $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ secondo il *principio di dualità* della *Geometria Proiettiva* [1]: all'ordine della curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ corrisponde la *classe* dell'inviluppo $F(u_1 u_2 u_3) = 0$, che è il numero delle rette di questo che passano per un punto del piano (non facente parte dell'inviluppo).

Consideriamo i coefficienti della $f(xy) = 0$ come parametri variabili: supponiamo che al loro variare la $f(xy)$ si riduca a una $\bar{f}(xy)$ di grado $n - r$. Noi considereremo ancora *convenzionalmente* la $\bar{f}(xy)$ come di grado n, e considereremo la curva

$$\bar{f}(xy) = 0$$

come composta della curva d'ordine $n - r$ i cui punti soddisfano la $\bar{f}(xy) = 0$ e della retta all'infinito contata r volte.

Questa convenzione è d'accordo con la convenzione analoga stabilita per i gruppi di punti sulla retta, e si può giustificare tanto notando che sopra ogni retta del piano r delle intersezioni con la curva $f(xy) = 0$ se ne vanno all'infinito quando l'equazione di questa si riduce di grado $n - r$, quanto

(1) Cfr. p. es. ENRIQUES. *G. Proiettiva*. Cap. II e CASTELNUOVO. *G. Analitica*. Parte III, Cap. I.

introducendo le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 in luogo delle coordinate $x\left(=\frac{x_1}{x_3}\right)$, $y\left(=\frac{x_2}{x_3}\right)$.

Infatti, se l'equazione di grado n

$$f(xy)=0$$

si riduce all'equazione

$$\bar{f}(xy)=0$$

di grado $n-r$, l'equazione

$$f(x_1x_2x_3)=x_3{}^n f(xy)=0$$

si riduce all'equazione

$$x_3{}^r\bar{f}(x_1x_2x_3)=0 \quad \text{dove} \quad \bar{f}(x_1x_2x_3)=x_3{}^{n-r}\bar{f}(xy),$$

cioè all'equazione di una curva che si spezza nella retta $x_3=0$ contata r volte e nella curva residua

$$\bar{f}(x_1x_2x_3)=0$$

d'ordine $n-r$.

Alla considerazione di curve riducibili contenenti come parte la retta all'infinito si è condotti anche dalle trasformazioni proiettive.

Dalla definizione geometrica dell'ordine di una curva, si desume che l'*ordine di una curva non cambia per proiezioni* della curva, in quanto una retta che tagli in n punti la curva si proietta in una retta che taglia ancora in n punti la proiezione della curva. Questo fatto si verifica assai facilmente se la curva è espressa in coordinate omogenee con l'equazione

$$f(x_1x_2x_3)=\Sigma a_{ik}x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^{n-i-k}=0.$$

Infatti, operando la trasformazione omografica

$$4)\qquad \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3, \end{cases}$$

il polinomio

$$f(x_1x_2x_3)$$

viene cambiato in un polinomio

$$f'(y_1 y_2 y_3)$$

che ha il medesimo grado del polinomio f e quindi la curva

e la sua proiezione
$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$
$$f'(y_1 y_2 y_3) = 0$$

hanno il medesimo ordine.

Supponiamo ora che la curva sia rappresentata in coordinate cartesiane con l'equazione

$$f(xy) = 0 .$$

Operiamo l'omografia 4), cioè l'omografia

$$4') \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a_{11} x + a_{12} y + a_{13}}{a_{31} x + a_{32} y + a_{33}} \\[2ex] y' = \dfrac{a_{21} x + a_{22} y + a_{23}}{a_{31} x + a_{32} y + a_{33}} . \end{cases}$$

Con questo la $f(xy) = 0$ viene trasformata nell'equazione

$$\left(\frac{1}{a_{31} x + a_{32} y + a_{33}}\right)^n \bar{f}(x'y') = 0 .$$

Allo stesso modo che nel caso analogo per i gruppi di punti sulla retta, la $\bar{f}(x'y')$ risulta di grado n, come la $f(xy)$, se la $f(xy)$ non contiene il fattore $a_{31} x + a_{32} y + a_{33}$; se invece la $f(xy)$ contiene il fattore $(a_{31} x + a_{32} y + a_{33})^r$, cioè se la curva $f(xy) = 0$ contiene la retta $a_{31} x + a_{32} y + a_{33} = 0$ contata r volte, allora la $\bar{f}(x'y')$ si riduce di grado $n - r$.

Siccome con l'omografia 4') la retta $a_{31} x + a_{32} y + a_{33} = 0$ viene trasportata nella retta all'infinito, così noi *dobbiamo sempre riguardare convenzionalmente la* $\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{x'y'})$ *come di grado* n, sommando alla curva

$$\bar{f}(x'y') = 0,$$

di ordine $n - r$, la retta all'infinito contata r volte, per ottenere la trasformata della curva $f(xy) = 0$.

Osservazione. Osserviamo che la trasformazione omografica 4') può anche essere considerata come cambiamento di coordinate.

Consideriamo infatti x e y come coordinate proiettive, cioè consideriamo la coordinata X di un punto P del piano come il birapporto $(\infty 0\, U_x X)$, dove U_x e X sono le proiezioni sull'asse x fatte dal punto all'infinito dell'asse y del punto P e del punto (unità) U di coordinate 1, 1, e parimenti riguardiamo la coordinata y dello stesso punto P come il birapporto $(\infty 0\, U_y\, Y)$, dove Y e U_y sono le proiezioni sull' asse y fatte dal punto all'infinito dell'asse x del punto P e del punto U. Ciò posto, la sostituzione 4') equivale evidentemente ad assumere come coordinate x e y del punto P, i birapporti analoghi ai precedenti che si ottengono sostituendo ai punti O, x_∞, y_∞, U, i punti

$$x=\frac{a_{13}}{a_{33}},\ y=\frac{a_{23}}{a_{33}};\quad x=\frac{a_{11}}{a_{31}},\ y=\frac{a_{21}}{a_{31}};\quad x=\frac{a_{12}}{a_{32}},\ y=\frac{a_{22}}{a_{23}};$$

$$x=\frac{a_{11}+a_{12}+a_{13}}{a_{31}+a_{32}+a_{33}},\ y=\frac{a_{21}+a_{22}+a_{23}}{a_{31}+a_{32}+a_{33}}.$$

10. Tangente ad una curva. — Abbiamo visto che una curva d'ordine n

$$f(xy)=f(x_1 x_2 x_3)=0$$

è intersecata da ogni retta del suo piano (che non ne faccia parte) in n punti che possono anche non essere tutti distinti.

Supponiamo ora di avere una curva

$$f(x_1 x_2 x_3)=0 \tag{1}$$

irriducibile o, se riducibile, senza parti multiple.

Chiameremo *tangente* in un punto P della f, una retta

$$ax_1+bx_2+cx_3=0. \tag{2}$$

che abbia in P due intersezioni riunite.

Questa definizione risale a DESCARTES (« La Géométrie », 1637 — Oeuvres, t. VI, p. 408). Essa può essere interpretata in due modi che conducono ugualmente alla determinazione della tangente:

Si può considerare la tangente in un punto come *limite* di una secante condotta per esso, quando il secondo punto d'intersezione si avvicina al primo. Questo modo di determinazione, che costituisce una delle origini del Calcolo differenziale, appartiene a BARROW, il maestro di NEWTON, (« Lectiones Geometricae » (1669) — 10ª Lezione) [1].

Ma, per le curve *algebriche*, la definizione cartesiana della tangente si può interpretare anche indipendentemente dai concetti infinitesimali, come ha messo in luce l'abate G. P. DE GUA MALVES nel suo trattato « Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le sécours du calcul différentiel, les propriétes des lignes géométriques de tous les ordres » (Parigi, 1740).

Infatti proponiamoci di determinare i parametri a, b, c, in guisa che la retta 2) risulti tangente alla curva 1).

Se la retta

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

ha nel punto $(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$ due intersezioni riunite con la curva $f(x_1x_2x_3) = 0$, l'equazione omogenea $f\left(x_1,\ x_2, \dfrac{ax_1 + bx_2}{-c}\right) = 0$, (ottenuta sostituendo nella 1) al posto di x_3 il suo valore dato dalla 2), equazione la quale determina le intersezioni della curva $f(x_1x_2x_3) = 0$ con la retta $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, deve avere $\bar{x}_1\bar{x}_2$ come radice doppia, cioè il polinomio

$$4)\qquad f\left(x_1,\ x_2, \frac{ax_1 + bx_2}{-c}\right)$$

deve esser divisibile per

$$(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)^2,$$

e quindi le sue derivate nel punto $x = \bar{x}_1$, $x = \bar{x}_2$ devon essere

$$5)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0.$$

[1] Gli scritti di LEIBNIZ e di NEWTON da cui si suol datare la costituzione dell'organismo del Calcolo differenziale sono, com' è noto: LEIBNIZ « Nova methodus pro maximis et minimis.... » (Acta Eruditorum, Lipsia, 1684), NEWTON « Philosophiae naturalis principia mathematica » (Ginevra, 1688).

Ma è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{a}{-c}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{b}{-c},$$

quindi, perchè la 5) sia soddisfatta, deve essere nel punto $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}:\frac{\partial f}{\partial x_3}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}:\frac{\partial f}{\partial x_3}=\frac{b}{c}.$$

Si conclude adunque che i parametri a, b, c della tangente nel punto $(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$ sono proporzionali alle:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Se indichiamo ora con

$$y_1,\ y_2,\ y_3$$

le coordinate di un punto variabile sulla tangente, e semplicemente con

$$x_1,\ x_2,\ x_3$$

le coordinate del punto di contatto, abbiamo l'equazione della tangente nella solita forma

$$6)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}y_3=0.$$

Dall'esame dell'equazione 6) si vede che *in ogni punto della curva*

$$f(x_1x_2x_3)=0,$$

per il quale non sia contemporaneamente

$$7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=0,$$

esiste sempre *una* e una sola *tangente*. Nei punti invece per-i quali sia

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

ogni retta ha due intersezioni riunite: questi punti si diranno *doppi* se le rette per essi hanno solo due intersezioni ivi riunite con la curva $f = 0$, *multipli* se ne hanno di più.

Sorge quindi la distinzione seguente:

1) Si chiamano *tangenti proprie* (o semplicemente tangenti) le rette che hanno due intersezioni riunite con la curva in un punto *semplice* di essa $\left(\text{punto per cui non si annullano contemporaneamente le } \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$;

2) Si chiamano *tangenti improprie*, le rette passanti per un punto doppio (o i-plo) della curva, che hanno ivi riunite due (o i) intersezioni con la curva.

Notiamo che l'insieme delle tangenti a una curva algebrica

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

costituisce un inviluppo algebrico, cioè le coordinate plueckeriane

$$u_1,\ u_2,\ u_3$$

delle tangenti alla $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, soddisfano un' equazione algebrica

$$F(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Per costruire effettivamente quest' equazione basta eliminare $x_1 x_2 x_3$ fra le tre equazioni

$$\frac{u_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{u_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{u_3}{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}$$

che devono essere contemporaneamente soddisfatte, essendo u_1, u_2, u_3 le coordinate della tangente nel punto $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ variabile sulla $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. La curva inviluppo $F(u_1 u_2 u_3) = 0$ contiene i fasci delle tangenti improprie che hanno come centri i punti doppi (o multipli) della f. Staccati questi fasci, che figurano nell' equazione F un certo numero di volte, resta la *curva inviluppo delle tangenti* proprie della f, e il grado della sua equazione nelle u_1, u_2, u_3 ne designerà la *classe*.

Per approfondire la distinzione fra tangenti proprie ed improprie, vogliamo mostrare che le prime si presentano come *limiti di rette secanti* o rette che uniscono due *punti infinitamente vicini* della curva, nel senso dell'analisi infinitesimale ([1]).

Infatti sia un punto P di coordinate x_1, x_2, x_3, punto semplice della curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$: consideriamo la retta

$$8) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0;$$

questa passa per il punto P in quanto, essendo f *omogenea* (di ordine n), per il *teorema* di Eulero è

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 = nf(x_1 x_2 x_3)$$

e quindi la 8) è soddisfatta se al posto di y_1, y_2, y_3 poniamo le coordinate x_1, x_2, x_3 del punto P che appartiene alla curva. Ora il punto *della curva* infinitamente vicino al punto $(x_1 x_2 x_3)$, ha le coordinate

$$x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \quad x_3 + dx_3,$$

dove dx_1, dx_2, dx_3 devon essere tali da annullare, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, la

$$f(x_1 + dx_1, \ x_2 + dx_2, \ x_3 + dx_3).$$

Ma

$$f(x_1 + dx_1, \ x_2 + dx_2, \ x_3 + dx_3) = \\ = f(x_1 x_2 x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \varepsilon$$

dove ε designa un infinitesimo d'ordine superiore; quindi, essendo $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, i differenziali dx_1, dx_2, dx_3 devon esser

([1]) La considerazione della curva come inviluppo delle sue tangenti, cioè luogo delle intersezioni di tangenti coincidenti (infinitamente vicine) si può far risalire a Descartes (Cfr. la lettera a De Beaume in « Lettres de Descartes », t. I, p. 137, segnalata da Chasles « Aperçu historique.... » ed. 3ª, p. 97).

tali che sia

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = 0.$$

Risulta adunque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + dx_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 + dx_2) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3 + dx_3) = 0,$$

cioè la retta 8) passa effettivamente per il punto della curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ infinitamente vicino a P.

La deduzione precedente, relativa alla curva f, si può anche svolgere col riferirsi ad una equazione $f(xy) = 0$ in coordinate cartesiane, così come si suole nelle applicazioni del calcolo infinitesimale. È lecito anche supporre che la tangente nel punto semplice P non sia perpendicolare all'asse delle x, e quindi che la derivata

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

sia finita, cioè che si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

In questa ipotesi l'equazione della tangente in $P = (x_0 y_0)$ è

9) $$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

dove

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Se il punto P viene assunto come origine delle coordinate, f assume la forma

$$f(xy) = a_{10}x + a_{01}y + \varphi_2(xy) + \dots + \varphi_n(xy) \quad .$$

dove φ_i designa una forma d'ordine i; in tal caso l'equazione della tangente è

$$a_{10}x + a_{01}y = 0.$$

La tangente in un punto semplice $P = (x_0 y_0)$ rappresenta in *prima approssimazione*, cioè a meno di infinitesimi d'ordine superiore ad $x-x_0$, la curva $f(xy)=0$ nell'intorno del punto P.

Infatti si ha, nell'intorno di quel punto,

$$y=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0(x-x_0)+\varepsilon,$$

con ε infinitesimo d'ordine superiore rispetto $x-x_0$.

Si può anche verificare direttamente l'enunciata proprietà, nel modo che segue:

Si metta in P l'origine delle coordinate assumendo gli assi in posizione generica; l'equazione della tangente sarà

$$a_{10}x+a_{01}y=0 \quad \text{con} \quad a_{10}\neq 0, \quad a_{01}\neq 0.$$

Osserviamo ora che, per un punto della curva prossimo all'origine, x e y sono infinitesimi dello stesso ordine: infatti se fosse, per esempio, y infinitesimo d'ordine superiore ad x, $a_{10}x+a_{01}y$ sarebbe infinitesimo del prim' ordine, mentre $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ sarebbero infinitesimi d'ordine superiore, e non potrebbe quindi essere

$$a_{10}x+a_{01}y+\varphi_2+\ldots+\varphi_n=0.$$

Essendo x e y infinitesimi del medesimo ordine, $\varphi_2+\ldots+\varphi_n$, e quindi anche $a_{10}x+a_{01}y$, risultano infinitesimi del second'ordine (almeno). Si conclude che la distanza del punto (xy) dalla retta $a_{10}x+a_{01}y$, che è

$$\frac{1}{\sqrt{a_{10}^2+a_{01}^2}}(a_{10}x+a_{01}y),$$

risulta pur essa infinitesima del second' ordine.

Si può approssimare ulteriormente la curva f nell'intorno del punto P, tenendo conto degli infinitesimi d'ordine 2, 3,...., mediante le *parabole osculatrici* d'ordine 2, 3,..... Infatti essendo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

con $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, esistono, e sono finite, nel punto, tutte le derivate successive della funzione implicita $y(x)$, e quindi vale nell'intorno del punto x_0 la cosidetta formula del TAYLOR abbreviata:

$$10)\quad y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_r(x - x_0)^r + \varepsilon$$

dove

$$a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i y}{dx^i}$$

ed ε designa un infinitesimo d'ordine superiore ad $(x - x_0)^r$.

L'equazione

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_r(x - x_0)^r$$

rappresenta la *parabola d'ordine* r *osculatrice* alla curva nel punto P, cioè la parabola $y = f(x)$ che può essere determinata dalla condizione di possedere in P un contatto $(r+1)$ — punto.

Nel caso particolare in cui

$$a_2 = \dots = a_r = 0,$$

la parabola osculatrice d'ordine r si riduce alla retta tangente (completata con la retta all'infinito contata $r - 1$ volte); pertanto una *tangente* che abbia con la curva un *contatto* (r + 1) - *punto* porge un *approssimazione* della curva stessa *a meno di infinitesimi d'ordine* r + 1.

Nota. La questione di rappresentare con successive approssimazioni l'intorno di un punto semplice di una curva algebrica, si presenta in NEWTON (1), il quale adopera a tale scopo un diagramma, noto sotto il nome di *parallelogramma di Newton*, che dà il modo di formare praticamente le successive equazioni determinanti i coefficienti a_i. Queste considerazioni hanno posto nella storia delle origini del calcolo infinitesimale, segnando in sostanza la scoperta della derivazione delle funzioni implicite, che NEWTON per primo ebbe il merito di considerare, riferendosi a casi concreti di funzioni algebriche. Nella scuola stessa di NEWTON, TAYLOR e MAC-LAURIN (2) spinsero più avanti il problema della rappresentazione di una curva algebrica f nell'intorno di un punto, considerandone la rappresentazione per mezzo della serie infinita a cui conduce

(1) « Methodus fluctionum serierum infinitarum ». Londra, 1736.

(2) B. TAYLOR. « Methodus incrementorum directa et inversa ». Londra, 1717. - « C. MAC-LAURIN. A treatise of fluctions ». Edimburgo, 1742.

il processo di approssimazioni accennate (Serie di TAYLOR e di MAC-LAURIN).

Qui giova avvertire che effettivamente la anzidetta serie

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_r(x - x_0)^r + \dots$$

converge in un intorno sufficientemente piccolo di x_0, e rappresenta in esso la funzione $y(x)$, cioè che le parabole osculatrici d'ordine crescente hanno per limite la curva in un intorno finito del punto di contatto. Per i rami reali, a cui solo si riferivano i geometri prima del secolo XIX, la cosa si può verificare applicando i criteri che a tale scopo si svolgono nella analisi infinitesimale; ma il problema si tratta più semplicemente nella teoria delle funzioni di variabile complessa, nel senso di CAUCHY e di PUISEUX, come vedremo più avanti.

11. **Punti doppi.** — Nel paragrafo precedente abbiamo visto che: condizione perchè la curva

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

ammetta un punto doppio (o multiplo) è che le tre equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

abbiano una radice comune, e quindi che si annulli la loro resultante, cioè il *discriminante* della f, che — in base a un noto teorema sulla *resultante* — viene di *grado* $3(n-1)^2$ nei coefficienti di f.

In altro aspetto si presenta la questione di riconoscere se la curva f possegga come punto doppio un punto O in posizione assegnata. Qui giova assumere coordinate cartesiane e porre l'origine nel punto O.

Se la $f(xy) = 0$ passa per l'origine, nel polinomio

$$f(xy) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{0n}y$$

deve mancare a_{00}.

Consideriamo una retta per O:

$$y = \alpha x;$$

le sue intersezioni con la $f(xy)=0$ si ottengono risolvendo l'equazione

1) $x(a_{10}+a_{01}\alpha)+x^2(a_{20}+a_{11}\alpha+a_{02}\alpha^2)+x^3(a_{30}+\ldots)+\ldots=0$

risultante dalla eliminazione della y fra le due equazioni

$$f(xy)=0$$

e

$$y=\alpha x.$$

Se la retta $y=\alpha x$ è tangente alla curva, deve avere, nell'origine, due intersezioni riunite con essa, e quindi $x=0$ deve essere radice doppia della 1), cioè deve essere

$$a_{10}+a_{01}\alpha=0.$$

Quindi se uno almeno dei coefficienti a_{10} e a_{01} è diverso da zero esiste un' unica tangente nell' *origine*, tangente che, avendo per coefficiente angolare $\alpha=-\frac{a_{10}}{a_{01}}$, ha per equazione l'insieme dei termini di primo grado della f ugguagliato a zero, cioè

$$a_{10}x+a_{01}y=0.$$

Invece, se $a_{10}=a_{01}=0$, qualunque sia il valore di α la 1) comincia col termine in x^2, quindi ogni retta $y=\alpha x$ ha, con la curva, due intersezioni riunite nell'origine.

Adunque *condizione perchè l'origine sia un punto doppio è* che

$$a_{10}=a_{01}=0.$$

Consideriamo ora una curva

$$f(xy)=0$$

che abbia l'origine come punto doppio: la sua equazione sarà

2) $$a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}x^3+\ldots=0.$$

Ci proponiamo di esaminare se esistono rette passanti per l'origine e aventi ivi — non due — ma tre intersezioni riunite.

Supponiamo che

3) $$y=\alpha x$$

sia una retta siffatta.

Eliminando la y dalle 2) e 3), si ha l'equazione

$$x^2(a_{20}+a_{11}\alpha+a_{02}\alpha^2)+x^3(a_{30}+....)+....=0,$$

che per ipotesi deve avere $x=0$ come radice tripla. Condizione perchè questo sia è

$$4) \qquad a_{20}+a_{11}\alpha+a_{02}\alpha^2=0.$$

Siano α_1 e α_2 le due radici di quest'equazione: allora le due rette

$$y=\alpha_1 x$$
$$y=\alpha_2 x$$

hanno con la $f(xy)=0$ un contatto tripunto, e sono le uniche rette siffatte, tranne il caso che sia

$$a_{20}=a_{11}=a_{02}=0,$$

nella quale ipotesi tutte le rette per l'origine avranno tre intersezioni riunite, e l'origine non sarà più propriamente un punto *doppio*, ma un punto *triplo* per la curva.

Le due rette osculatrici

$$y=\alpha_1 x$$
$$y=\alpha_2 x$$

chiamansi *tangenti principali* del punto doppio. Notiamo che il loro insieme costituisce una conica degenere, che ha per equazione i termini di secondo grado della $f(xy)$ uguagliati a zero, cioè

$$a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2=0.$$

Le due tangenti principali in un punto doppio saranno distinte se

$$a_{11}{}^2-4a_{20}a_{02}\neq 0,$$

saranno invece coincidenti se

$$a_{11}{}^2-4a_{20}a_{02}=0.$$

Chiamasi *nodo* (e talvolta anche semplicemente punto doppio) il punto doppio per cui le due tangenti principali siano distinte, *cuspide* il punto doppio di cui le tangenti principali coincidano. La distinzione di queste due specie di punti doppi, e i criterî analitici che vi corrispondono, risalgono al De Gua (op. c., 1740).

Osservazione. Se i coefficienti della $f(xy)$ sono reali, secondo chè

$$a_{11}^2 \gtrless 4a_{02}a_{20},$$

i due valori di α sono reali o immaginari: quindi dal punto di vista della *realità* i nodi si possono distinguere in *nodi propriamente detti*, quando le due tangenti principali sono reali, e in *punti isolati*, quando le due tangenti principali sono immaginarie.

Singolarità duali. Al punto doppio di una curva risponde per dualità la *tangente doppia* e precisamente:

1) Al nodo corrisponde la *tangente doppia propriamente detta* a contatti distinti (reali o no), che cadono generalmente in punti semplici della curva. Come caso particolare può accadere che uno dei punti di contatto si sovrapponga ad un nodo, e la tangente tocchi allora un ramo del nodo stesso.

2) Alla cuspide ordinaria corrisponde la *tangente di flesso* avente un contatto tripunto in un punto semplice della curva (punto di flesso o *flesso*).

Nota. Aggiungeremo ora alcune osservazioni sulla rappresentazione approssimata d'una curva nell'intorno d'un punto doppio.

Anzitutto: *nell'intorno di un nodo la curva può essere sostituita a meno di infinitesimi d'ordine superiore dalle sue due tangenti principali.*

Supponiamo per comodità il nodo posto nell'origine, e gli assi orientati in modo da non coincidere con nessuna delle due tangenti principali. Scriviamo l'equazione della curva, mettendo in evidenza i termini di secondo grado, nella forma

$$(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)+\varphi_3(xy)+\dots+\varphi_n(xy)=0, \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0),$$

dove $\varphi_3(xy)$ rappresenta il complesso dei termini di terzo grado,.... $\varphi_n(xy)$ il complesso dei termini di grado n-^{esimo}.

Si può svolgere un ragionamento analogo a quello che si riferisce al caso dei punti semplici nel § 10. Siano x e y

e coordinate di un punto della curva vicino al punto doppio O sarà allora

$$(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)+\varphi_3(xy)+\ldots.+\varphi_n(xy)=0. \tag{5}$$

Anzitutto debbono essere x e y infinitesimi dello stesso ordine, altrimenti il prodotto $(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)$ sarebbe infinitesimo d'ordine inferiore alla somma degli altri termini. Si deduce che l'anzidetto prodotto $(y-\alpha_1 x)(y-\alpha_2 x)$, comparato ad x, è un infinitesimo del terz' ordine almeno; ma non potendo essere

$$y-\alpha_1 x, \quad y-\alpha_2 x$$

entrambi infinitesimi d' ordine superiore al primo (perchè $(\alpha_1-\alpha_2)x$ è infinitesimo del prim' ordine), una delle due differenze

$$y-\alpha_1 x, \quad y-\alpha_2 x$$

sarà infinitesima del second' ordine (almeno).

Se osserviamo ora che l'equazione

$$f(\bar{x}y)=0$$

ha, per $\bar{x}$ infinitesimo, due radici

$$y=y_1, \quad y=y_2$$

prossime allo zero, si conclude che nell' intorno del punto O, i punti della curva si distinguono in due categorie, cioè nei punti le cui coordinati x, y rendono infinitesimo del second' ordine

$$y-\alpha_1 x,$$

e in quelli che rendono infinitesimo del second' ordine

$$y-\alpha_2 x.$$

Si ha così che, nell' intorno di O, vi sono punti della curva che distano di infinitesimi del second' ordine in parte dalla retta

$$y=\alpha_1 x$$

e in parte dalla retta

$$y=\alpha_2 x.$$

Cioè: *nell' intorno del nodo la curva può essere approssi-*

mata, a meno di infinitesimi del second' ordine, dalle sue tangenti principali.

Ciò posto si può dire che l'equazione $f(xy)=0$, considerata in un intorno finito sufficientemente piccolo del punto O, definisce *due* funzioni implicite distinte

$$y = y_1(x)$$
$$y = y_2(x),$$

che, per valori reali o complessi di x, sono prossime la prima a

$$y = \alpha_1 x$$

e l'altra a

$$y = \alpha_2 x.$$

Codeste funzioni rappresentano due curve distinte nell'intorno del punto O, che si chiamano *rami della curva.*

Le tangenti

$$y = \alpha_1 x, \quad y = \alpha_2 x$$

che hanno servito a separare i due rami li rappresentano anche, come si è visto, in prima approssimazione, cioè a meno di infinitesimi d'ordine superiore a x; ora è facile riconoscere che ciascuna delle due funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, ammette le derivate successive, e perciò i due rami suddetti possono venire rappresentati con approssimazioni d'ordine crescente mediante parabole osculatrici allo stesso modo dell'intorno di un punto semplice. Se non si vuol ricorrere all'analisi degli ordini di infinitesimo, si ottiene effettivamente l'equazione della parabola di second'ordine osculatrice al primo ramo, cioè avente con esso un contatto tripunto, scrivendo l'equazione

$$6) \qquad y = \alpha_1 x + \beta_1 x^2,$$

(parabola tangente alla retta $y=\alpha_1 x$) e determinando β_1 in modo che questa venga ad avere quattro intersezioni riunite con la $f(xy)=0$ nel punto O.

Posto

$$7) \qquad f(xy) = (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x) + \varphi_3(xy) + \dots + \varphi_n(xy)$$
$$\varphi_3 = c_0 x^3 + c_1 x^2 y + c_2 xy^2 + c_3 y^3,$$

si deve annullare il coefficiente di x^3 nella equazione resultante, ottenuta eliminando la y fra le 6) 7); si trova così

$$8)\qquad \beta_1 = -\frac{c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3}{\alpha_1 - \alpha_2} \qquad (\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0).$$

In modo analogo si possono determinare le successive parabole osculatrici ai due rami della curva per O; si può anche riconoscere che le parabole osculatrici al primo (e così al secondo) ramo hanno per limite il ramo stesso in un intorno finito di O, cioè che in quest'intorno i due rami $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono rappresentati da sviluppi in serie di TAYLOR convergenti. Ma non ci arrestiamo su questo punto che dovrà essere chiarito più tardi sotto un aspetto più generale (libro 4°).

Importa ora osservare che le cose dette per il nodo O cessano di valere ove il punto doppio divenga una cuspide; nel qual caso, essendo $\alpha_1 = \alpha_2$, si ha una sola retta osculatrice e quindi manca il fondamento della distinzione dei due rami stabilita di sopra.

Per approfondire lo studio della cuspide, supponiamo che la $f(xy) = 0$ possegga una cuspide nell'origine O; si avrà

$$f(xy) = (y - \alpha x)^2 + \varphi_3(xy) + ... + \varphi_n(xy) = 0,$$

o, prendendo come asse delle x la retta osculatrice (*tangente cuspidale*) $y = \alpha x$,

$$9)\qquad f(xy) = y^2 + \varphi_3(xy) + ... + \varphi_n(xy) = 0.$$

In generale la particolarizzazione imposta al punto doppio di diventare una cuspide, non porta che la tangente cuspidale (in cui vanno a coincidere le due tangenti principali) debba avere un contatto più che tripunto con la curva f; infatti se nella 9) si fa $y = 0$ resta in φ_3 un termine in x^3 che in generale avrà un coefficiente diverso da zero. Una cuspide per cui la *tangente cuspidale* ha *contatto tripunto* (e non d'ordine superiore) con la curva, si dice ***cuspide ordinaria.***

Nell'intorno di una cuspide ordinaria O la curva f *non può essere separata in due rami distinti*

$$y = y_1(x)$$
$$y = y_2(x),$$

per i quali esistano due diversi sistemi di parabole osculatrici; infatti due parabole dello stesso ordine dovrebbero avere in O la stessa tangente, e allora questa avrebbe un contatto quadripunto con la curva composta delle due parabole e quindi con f.

Il significato analitico della osservazione precedente è che l'equazione $f(xy) = 0$, nell'intorno del punto O, non definisce più *due* funzioni implicite distinte $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, corrispondenti a due rami della curva, ma invece *una sola funzione a due valori*, questi valori scambiandosi l'uno nell'altro quando si compie un giro con la variabile complessa x intorno al punto $x = 0$.

Ciò si verifica immediatamente per la curva

$$y^2 = kx^3,$$

che rientra nel tipo 9) ed ha appunto una cuspide ordinaria in O; infatti posto

$$x = \rho e^{i\theta} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

si avrà

$$y_1 = +\sqrt{k}\sqrt{\rho}\, e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

$$y_2 = -\sqrt{k}\sqrt{\rho}\, e^{\frac{3i\theta}{2}},$$

e facendo aumentare θ di π, y_1 e y_2 si scambiano fra loro.

Ora riprendiamo l'equazione generale 9) e poniamo

$$\varphi_3(xy) = -kx^3 + c_1 x^2 y + c_2 xy^2 + c_3 y^3 \qquad (-k = c_0 \neq 0);$$

dimostriamo allora che la cubica $y^2 = kx^3$, porge una rappresentazione approssimata della curva 9), sicchè i due valori della funzione implicita $y(x)$ definiti dalla 9) vengono a scambiarsi come i precedenti y_1, y_2 per un giro della variabile complessa x intorno ad $x = 0$.

La dimostrazione anzidetta si svolge come segue. Anzitutto, come nel caso generale in cui f contiene la forma di secondo grado $\varphi_2 = (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)$, si ha che $\varphi_2 = y^2$ è infinitesimo d'ordine maggiore od uguale a tre rispetto ad x; ma, poichè — per ipotesi — il coefficiente del termine in x^3 è $-k \neq 0$, si deduce che y^2 è infinitesimo dello stesso ordine di x^3, mentre tutti gli altri termini di φ_3, φ_4.... sono infinitesimi d'ordine superiore. Ora se nella 9) si sostituisce ad y

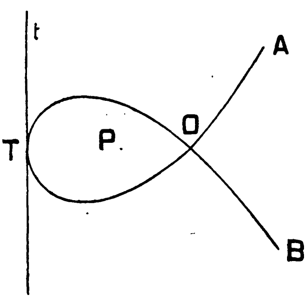
uno dei due valori che diventano infinitesimi con x, la 9) diventa un' identità, e perciò debbono annullarsi separatamente le parti infinitesime di diverso ordine; segue di qui che $y^2 - kx^3$ è un infinitesimo d'ordine superiore a tre, cioè la curva $y^2 = kx^3$ porge un'approssimazione della f a meno di infinitesimi d'ordine superiore a tre.

Osservazione. Ad illuminare le considerazioni precedenti giova confrontare la curva $y^2 = kx^3$ alla

$$y^2 = kx$$

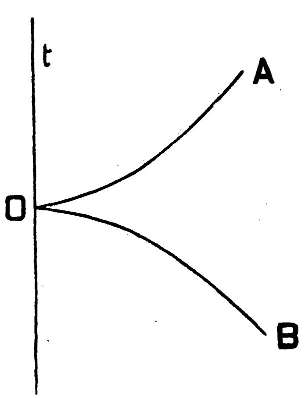
che ha in O un punto semplice ed è tangente all'asse delle y; nell'intorno di $x = 0$ anche la equazione $y^2 = kx$ definisce due valori y_1 e y_2, che similmente si scambiano per un giro della variabile complessa x intorno ad $x = 0$.

L'intorno di O sulla parabola $y^2 = kx$, come quello relativo alla curva f, costituisce dunque *un unico ramo*; e vedremo più tardi che questo può venire rappresentato da una serie $y(x)$ procedente per le successive potenze di $x^{\frac{1}{2}}$.



Si può aggiungere che la curva $y^2 = kx^3$ (o la f) avente in O una cuspide ordinaria, può ritenersi come limite (per $\varepsilon = 0$) di una curva dotata di nodo

$$y^2 = \varepsilon x^2 + kx^3$$



dove il punto $x = -\frac{2\varepsilon}{3k}$, $y = 0$, punto di contatto della tangente, parallela all'asse y, $x = -\frac{3\varepsilon}{3k}$, viene a sovrapporsi al punto doppio O. Una immagine fisica di questo passaggio al limite si può avere considerando le curve suddette nel campo reale: un filo a forma di nodo, come è indicato nella figura, si può trasformare in una cuspide ove si tirino i due capi fissando uno spillo nel punto P.

Allora si vede (riferendosi alle due curve disegnate nella figura) che i due archi AO, BO aventi per estremo comune la cuspide sono limiti dei due archi AOT, BOT aventi per estremo comune il punto semplice T.

12. **Punti multipli.** — Ricordiamo che un punto P della curva $f(xy)=0$ si dice r-plo quando ogni retta passante per esso ha ivi r intersezioni riunite con la curva.

Vediamo quali sono le condizioni perchè la

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x^i y^k = 0 \tag{1}$$

abbia un punto r-plo nell'origine. Affinchè ciò sia, occorre che ogni retta

$$y = \alpha x \tag{2}$$

abbia r intersezioni con la curva, cioè che l'equazione

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}\alpha)x + (a_{20} + a_{11}\alpha + a_{02}\alpha^2)x^2 + \dots + \\ + (a_{r0} + a_{r-1,1}\alpha + \dots + a_{0r}\alpha^r)x^r + \dots = 0,$$

che si ottiene eliminando la y fra le 1) 2), abbia $x=0$ come radice multipla d'ordine r; deve quindi essere

$$a_{00} = a_{10} = a_{01} = \dots = a_{r-1,0} = \dots = a_{0,r-1} = 0.$$

Vale a dire: *condizione perchè la* f$(xy)=0$ *abbia nell'origine un punto* r*-plo è che il polinomio* f *non contenga termini di grado inferiore ad* r.

Per trovare poi quali sono le condizioni perchè sia r-plo un punto P qualunque (non all'infinito) di coordinate

$$x = a \quad y = b,$$

ci si riduce al caso precedente trasportando P nell'origine con la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Poichè

$$a_{ik} = \frac{1}{i!\,k!} \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial x^k},$$

si deduce che: *un punto* r*-plo di* f $(r>1)$ *è caratterizzato* *dall'annullamento simultaneo di* f *e delle sue derivate fino all'ordine* r — 1 (inclusive).

Queste condizioni si estendono, con passaggio al limite, per i punti all'infinito. Ma anche direttamente è facile determinare le condizioni perchè un punto all'infinito sia multiplo d'ordine r per f; basterà determinare queste condizioni nel caso che il punto in questione sia il punto all'infinito di uno degli assi x o y, giacchè ci si riduce sempre a questo caso con un conveniente cambiamento di assi.

Si trova:

condizione perchè la curva

$$f(xy) = 0$$

abbia come r-*plo il punto all'infinito dell'asse* x *è che nel polinomio* f(xy) *manchino i termini di grado* > n — r *ripetto ad* x.

Infatti l'equazione

$$f(xk) = 0,$$

le cui radici danno le intersezioni della $f(xy)$ con la retta

$$y = k$$

parallela all'asse x, deve avere r delle sue n radici riunite all'infinito e quindi deve ridursi al grado $n - r$, sicchè nel polinomio $f(xy)$ la massima potenza di x deve essere $n - r$.

Analogamente: *condizione perchè sia* r-*plo il punto all'infinito dell'asse* y *è che nel polinomio* f(xy) *la massima potenza di* y *sia* n — r.

La condizione perchè sia r-plo il punto all'infinito di uno degli assi, si può dedurre da quella riguardante l'origine.

Introduciamo al posto delle coordinate cartesiane x e y le coordinate omogenee $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, passando così all'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_3^n f(xy) = \Sigma a_{rsp} x_1^r x_2^s x_3^p = 0,$$

dove a_{rsp}, $(r + s + p = n)$, designa il coefficiente indicato prima con a_{rs}. Noi sappiamo che condizione perchè sia r-plo il punto $x = 0$, $y = 0$, cioè il punto

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$$

è

$$a_{00n} = a_{0,1,n-1} = a_{1,0,n-1} = \dots = a_{0,r-1,n-r+1} = \dots = a_{r-1,0,n-r+1} = 0$$

cioè occorre che sian nulli i termini che contengono x_3 a potenza maggiore di $n-r$. Scambiando fra loro x_2 e x_3 si trova che condizione perchè sia r-plo il punto (010), cioè il punto all'infinito dell'asse y, è

$$a_{0,n,0} = a_{0,n-1,1} = \dots = a_{r-1,n-r+1,0} = 0,$$

ed invece scambiando fra loro x_1 e x_3 si trova che condizione perchè sia r-plo il punto (100), cioè il punto all'infinito dell'asse x, è

$$a_{n,0,0} = a_{n-1,1,0} = \dots = a_{n-r+1,r-1,0} = \dots = a_{n-r+1,0,r-1} = 0.$$

Infine noteremo che: *le condizioni per l'esistenza d'un punto* r-*plo* ($r>1$) *della curva* $f(x_1\, x_2\, x_3)=0$, rappresentata in coordinate omogenee, *si esprimono in generale annullando — nel punto — le derivate d'ordine* $r-1$ *di* f_x:

$$\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_1{}^i \partial x_2{}^h \partial x_3{}^k} = 0. \qquad (i+h+k=r-1)$$

Infatti, per $x_1=x_2=0$, $x_3=1$, si verifica che queste derivate si riducono — a meno di fattori numerici — ai coefficienti di f sopra indicati. E, quando si tratti di un altro punto qualunque, basta effettuare un cambiamento di coordinate, portando in esso il punto (001).

Alle suddette condizioni si arriva anche direttamente col *metodo di* IOACHIMSTHAL [1] cercando le intersezioni di f colla retta luogo dei punti

$$x_i = \lambda y_i + \mu z_i,$$

che congiunge (y_i) (z_i). Infatti le intersezioni suddette si ottengono annullando la $f(\lambda y_1+\mu z_1,\ \lambda y_2+\mu z_2,\ \lambda y_3+\mu z_3)$ sviluppata per λ, μ colla formula binomiale; se $\lambda=0$, $\mu=1$ debbono dare una radice r-pla per valori fissati delle y_i, qualunque sieno le z_i, si deducono appunto le condizioni perchè (y_i) sia punto r-plo.

Chiamiamo *tangenti principali* in un punto r-plo di una curva le rette passanti per il punto e aventi ivi riunite (almeno) $r+1$ intersezioni con la curva.

[1] *Journal für Math.* Bd 33, pg. 371, (1846).

Vediamo quante siano e come si trovino queste tangenti principali.

Supponiamo per comodità che il punto r-plo sia l'origine: allora l'equazione della curva è

$$3)\quad f(xy)=a_{r0}x^r+a_{r-1,1}x^{r-1}y+\ldots+a_{0r}y^r+a_{r+1,0}x^{r+1}+\ldots+a_{0n}y^n=0.$$

Se la retta passante per l'origine

$$4)\qquad y=\alpha x$$

ha $r+1$ intersezioni con la $f(xy)=0$, l'equazione

$$x^r(a_{r,0}+a_{r-1,1}\alpha+\ldots+a_{0,r}\alpha^r)+$$
$$+x^{r+1}(a_{r+1,0}+a_{r,1}\alpha+\ldots+a_{0,r+1}\alpha^{r+1})+\ldots=0,$$

che si ottiene eliminando la y fra le 3) 4), ha $x=0$ come radice $(r+1)$-pla; quindi: condizione perchè la retta $y=\alpha x$ sia una tangente, è

$$5)\qquad a_{r0}+a_{r-1,1}\alpha+\ldots+a_{0r}\alpha^r=0.$$

Siccome esistono r valori di α che soddisfano la 5), così in un punto r-plo esistono r tangenti principali; tangenti che, naturalmente, possono esser tutte distinte, o anche — a gruppi — coincidenti.

Osserviamo inoltre che il complesso dei termini di grado r di $f(xy)$, uguagliato a zero, dà l'equazione

$$a_{r0}x^r+a_{r-1,1}x^{r-1}y+\ldots+a_{0r}y^r=0,$$

che rappresenta le r tangenti principali nell'origine.

In particolare *una curva d'ordine* n, *che abbia in* O *un punto* n-*plo, si riduce a* n *rette per* O, costituenti le sue n tangenti principali.

Notiamo infine che, se l'origine è un punto r-plo, e non di molteplicità più elevata, i coefficienti a_{r0}, $a_{r-1,1}$, ... a_{0r} non posson essere tutti nulli, e quindi l'equazione 5) non può ammettere più di r radici. Si deduce che: *condizione perchè un punto sia* r-*plo è che esistano per esso* r *rette, e non più di* r, *aventi ivi* r + 1 *intersezioni con la curva.*

Nota. L'analisi fatta nel caso del punto doppio si ripete in modo affatto simile per il punto r-plo.

In un punto r-plo ($x=0$, $y=0$) a tangenti (principali) distinte vi sono r rami (lineari) della curva toccati appunto da queste rette e distinti fra loro; per ogni ramo vi sono parabole osculatrici di tutti gli ordini ecc.

Invece la funzione implicita $y(x)$ che, per assi in posizione generale, ha r determinazioni nell'intorno del punto $x=0$, può dar luogo ad un numero minore di rami (superlineari) nell'ipotesi che le r tangenti principali non siano distinte.

Supponiamo dapprima che tutte le r tangenti coincidano in un'unica tangente a contatto $(r+1)$-punto (e non più elevato), tangente che può assumersi come asse x. Allora l'equazione della curva si riduce alla forma

$$y^r - kx^{r+1} + C_1 x^r y + \dots + C_r y^r + \varphi_{r+1} + \dots + \varphi_n = 0,$$

dove $k \neq 0$. In tale ipotesi lo stesso ragionamento fatto per il caso della cuspide (§ 11) permette di dedurre che, per i punti della curva appartenenti all'intorno dell'origine, y^r è infinitesimo d'ordine $r+1$ come x^{r+1}, e di ordine inferiore a tutti gli altri termini, quindi $y^r - kx^{r+1}$ è infinitesimo d'ordine superiore ad $r+1$. Si conclude che la curva f nell'intorno dell'origine, può essere approssimata dalla curva

$$y^r = kx^{r+1},$$

la quale si può ritenere come limite — per $\varepsilon = 0$ — della

$$y^r = \varepsilon x^{r-1} y + kx^{r+1},$$

che ha nell'origine un punto r-plo a tangenti distinte.

Segue da ciò che gli r valori della funzione $y(x)$ formano *un* solo ramo (*ramo cuspidale ordinario d'ordine* r), dove la retta che va da un punto qualunque all'origine O apparisce come limite di r tangenti per il punto; l'unicità del ramo per O è d'accordo con l'osservazione geometrica che se vi fossero due rami tangenti all'asse x, questo avrebbe un contatto più che $(r+1)$ - punto con f.

Supponiamo in secondo luogo che fra le r tangenti principali della f nel punto r-plo O, ve ne siano $s < r$, $(s > 1)$, coincidenti in un'unica retta con contatto $(r+1)$ - punto, retta che assumiamo come asse delle x: l'equazione della curva diventa

$$6) \qquad y^s(y - \alpha_1 x) \dots (y - \alpha_{r-s} x) + C_0 x^{r+1} + \dots = 0$$

dove
$$\alpha_i \neq 0, \quad C_0 \neq 0.$$

In tale ipotesi fra gli r valori della funzione implicita $y(x)$ che diventano infinitesimi con x, ve ne sono s per cui y è infinitesimo d'ordine superiore ad x (mentre i rimanenti sono vicini ad $\alpha_1 x, \ldots$); divisa per x^{r-s} la 6) diviene

$$y^s\left(\frac{y}{x}-\alpha_1\right)\ldots\left(\frac{y}{x}-\alpha_{r-s}\right)+C_0 x^{s+1}+\ldots=0,$$

nella quale il prodotto $\left(\frac{y}{x}-\alpha_1\right)\ldots\left(\frac{y}{x}-\alpha_{r-s}\right)$ è prossimo a una costante D_0 per i valori di y corrispondenti al ramo tangente all'asse x.

Pertanto, come nel caso precedente, si conclude che y^s è infinitesimo dell'ordine di x^{s+1} e, posto $k=-\frac{C_0}{D_0}$, y^s-kx^{s+1} è infinitesimo d'ordine superiore a x^{s+1}.

Concludendo: *se nel punto* r-*plo O vi è una tangente principale* s-*pla con contatto* (r + 1) - *punto la curva* f *possiede un ramo* (cuspidale d'ordine s) *tangente all'asse* x, *rappresentato approssimativamente dalla curva* $y^s=kx^{s+1}$.

I casi esaminati non esauriscono lo studio delle singolarità delle curve algebriche, ma costituiscono soltanto le così dette singolarità ordinarie. Un punto r-plo si dice costituire una *singolarità ordinaria* se ha r tangenti distinte, oppure se possiede tangenti principali multiple aventi con la curva un contatto $(r+1)$ - punto e non più elevato.

Nel caso delle singolarità *straordinarie*, consideriamo un ramo tangente nell'origine all'asse x, l'analisi infinitesimale permette subito di concludere che per i punti di esso vi sono almeno due termini dell'equazione $f(xy)=0$ che diventano infinitesimi dello stesso ordine minimo; sarà per esempio $x^a y^b$ infinitesimo come $x^c y^d$ dove $a>c$, $b<d$; allora dividendo per $x^c y^d$, e ponendo $\mu=a-c$, $\nu=b-d$, si troverà che x^μ è infinitesimo come y^ν, dove $\mu>\nu$, e si dedurrà che l'anzidetto ramo può essere approssimato con una curva del tipo:

$$y^\nu=kx^\mu.$$

Una tale curva dotata d'un punto ν-plo straordinario per $\mu > \nu + 1$ possiede effettivamente un solo ramo se μ e ν sono primi fra loro, altrimenti consta di più rami che possono approssimare uno o più rami della curva f.

Osserveremo infine che *per dualità*:

1) Al punto r-plo a tangenti distinte corrisponde la tangente r-pla propriamente detta con r contatti distinti.

2) Al ramo cuspidale ordinario d'ordine s corrisponde la tangente $(s+1)$ - punta in un punto semplice.

Per *notizia storica* aggiungiamo che l'approssimazione delle curve in un punto singolare, la quale non aveva dato luogo ad una speciale analisi per parte di NEWTON, s'incontra nell'opera citata di DE GUA (1740), il quale cadde in un errore rilevato da EULERO (Acc. Berlino, 1749) e CRAMER, ritenendo la prima approssimazione sempre sufficiente a caratterizzare i punti singolari; il tema è stato svolto poi da CRAMER e da PUISEUX con la introduzione degli sviluppi in serie di potenze fratte, come vedremo nella teoria generale delle singolarità (libro 4°).

13. **Curve passanti per punti assegnati.** — I coefficienti dell'equazione di una curva $f(xy) = 0$ si possono ritenere come parametri, o *coordinate omogenee*, da cui dipende la posizione della curva entro la famiglia di tutte le curve dello stesso ordine tracciate nel piano (PLÜCKER); invero l'equazione $f = 0$ dipende, non da questi coefficienti, ma soltanto dai loro mutui rapporti.

Se una curva

$$1) \qquad f(xy) = a_{n0}x^n + a_{n-11}x^{n-1}y + ... + a_{00} = 0,$$

o, in coordinate omogenee,

$$f(x_1 x_2 x_3) = \Sigma a_{ikl} x_1{}^i x_2{}^k x_3{}^l \qquad (i + k + l = n)$$
$$(a_{ikl} = a_{ik})$$

deve passare per un punto, sostituendo le coordinate di questo nella equazione 1) si ottiene una *condizione lineare* nei coefficienti di f. Ora i coefficienti a_{ikl} di una forma ternaria sono tanti quante sono le combinazioni con ripetizione di 3 elementi ad n ad n, cioè

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + 1;$$

ciò si esprime dicendo che il sistema (lineare) delle curve d'ordine n ha $N = \frac{n(n+3)}{2}$ *dimensioni*.

Una curva d'ordine n può quindi essere determinata, entro questo sistema, mediante N condizioni lineari *indipendenti*.

In particolare *esiste una curva del piano determinata dalla condizione di passare per* N *punti generici* $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_N y_N)$; l'equazione della curva è

$$2)\quad \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} y \ldots y^n & x^{n-1} & x^{n-2} y \ldots y^{n-1} \ldots\ldots x & y & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} y_1 \ldots y_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} y_1 \ldots y_1^{n-1} \ldots\ldots x_1 & y_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_N^n & x_N^{n-1} y_N \ldots y_N^n & x_N^{n-1} & x_N^{n-2} y_N \ldots y_N^{n-1} \ldots\ldots x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I minori di questo determinante, complementari degli elementi della prima linea, son proporzionali ai valori dei coefficienti a_{ik} desunti dalle equazioni di condizione

$$f(x_r y_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots N);$$

proveremo che la 2) non si riduce a un'identità, cioè che gli anzidetti minori della prima linea non sono identicamente nulli quando $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_N y_N)$ sono punti generici del piano, e perciò N punti generici determinano una curva che passa per essi, mentre gruppi particolari di N punti, le cui coordinate annullino insieme i predetti minori, apparterranno ad infinite curve d'ordine n, caso di cui più tardi vedremo numerosi esempi.

Si prova che i menzionati minori non possono annullarsi per valori generici di $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... $x_N y_N$, facendo vedere che essi non s'annullano *identicamente* in corrispondenza a valori arbitrari di codeste coordinate. Infatti se uno di questi determinanti deve essere identicamente nullo, considerando in esso le $x_1 y_1$ come variabili, si deduce che saranno identicamente nulli i suoi minori complementari della prima linea, che sono minori d'ordine $N-2$ del determinante 2). È chiaro che questa osservazione fornisce un procedimento ricorrente, per cui il supposto annullamento identico del determinante 2), dove $x_1 y_1, \ldots x_{N-1} y_{N-1}$ abbiano valori arbitrari, porta l'annullamento dei termini dell'ultima linea, il che è evidentemente assurdo.

Il passaggio di una curva per due punti distinti A e B equivale, come abbiamo detto, a due condizioni lineari; se si fa variare il punto B avvicinandolo ad A in una direzione determinata, al limite le due condizioni permangono, cioè *la condizione imposta ad una curva di passare per un punto ed avere ivi una data tangente equivale a due condizioni lineari,* che si possono considerare come *esprimenti il passaggio della curva per un punto* (proprio) A e per un *punto* (improprio) B, *infinitamente vicino ad* A.

Infatti, siano $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ le coordinate del punto A, e

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

l'equazione della retta che debba essere tangente in A alla curva f. Sarà allora, per $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_3 = \bar{x}_3$,

3) $$\frac{\partial f}{\partial x_1} : a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2} : a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_3} : a_3 .$$

Siccome le derivate contengono linearmente i coefficienti a_{ikl} della f, così le 3) ci danno due equazioni lineari cui soddisfano i coefficienti a_{ikl}, equazioni che esprimono la condizione necessaria e sufficiente acciocchè la curva f passi per il punto A e abbia ivi la tangente assegnata.

Analogamente avremo che anche *il passaggio per* r *punti infinitamente vicini, succedentisi sopra una parabola d'ordine* r $-$ 1, *porta* r *condizioni lineari,* cioè i coefficienti di una curva che passi per un punto A e abbia quivi r intersezioni riunite colla parabola suddetta, debbono soddisfare a r equazioni lineari caratteristiche.

Supponiamo per comodità che il punto A sia l'origine. Sia

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{r-1} x^{r-1}$$

l'equazione della parabola d'ordine $r-1$, osculatrice in A alla nostra curva $f(xy)=0$, che per semplicità supponiamo non si riduca a una parabola d'ordine inferiore completata dalla retta all'infinito.

La risultante delle due equazioni

$$f(xy)=0$$

e

$$y=b_1x+b_2x^2+\ldots.+b_{r-1}x^{r-1},$$

dovrà avere come r-pla la radice $x=0$. Ora questa risultante è

4) $$\Sigma a_{ik}x^i(b_1x+b_2x^2+\ldots.+b_{r-1}x^{r-1})^k=0$$

che, ordinata per le potenze di x, possiamo scrivere

4') $$A_0+A_1x+\ldots.+A_{n(r-1)}x^{n(r-1)}=0$$

dove i coefficienti $A_0, A_1, \ldots. A_{n(r-1)}$ risultano evidentemente funzioni lineari dei coefficienti a_{ik} della curva f.

Se la 4) deve avere come multipla d'ordine r la radice $x=0$, dovrà essere

5) $$A_0=A_1=\ldots.=A_{r-1}=0.$$

Si hanno così r equazioni lineari nelle a_{ik}, che esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva f passi per r punti infinitamente vicini, venuti a coincidere col punto A movendosi sopra la parabola

$$y=b_1x+b_2x^2+\ldots.+b_{r-1}x^{r-1}.$$

E si noti che le suddette r equazioni sono certo *indipendenti*, perchè la i^{ma} contiene il coefficiente b_i che non figura nelle precedenti.

Osservazione. Ciò che abbiamo detto vale ancora nel caso di riducibilità escluso nel ragionamento precedente, cioè quando si abbiano r punti infinitamente vicini succedentisi su di una parabola di ordine minore di $r-1$, o in particolare sopra una retta; soltanto le condizioni imposte non riusciranno più indipendenti se il numero r dei punti assegnati supera l'ordine della parabola moltiplicato per n.

Riassumendo: il teorema che « il passaggio di una curva per r punti porta r condizioni lineari » vale non soltanto quando codesti punti sono propri (distinti fra loro) ma anche se i punti del gruppo si fanno coincidere con uno di questi, O, mediante avvicinamento successivo lungo una parabola, cioè se $i-1$ punti del gruppo sono punti impropri infinitamente vicini ad O sopra una parabola.

Osservazione. Si badi che invece: la *condizione* imposta ad una curva di *toccare una retta* data, in un *punto non assegnato* di essa, *non è lineare*.

Occupiamoci ora di valutare le condizioni imposte ad una curva che debba possedere un punto r-plo in posizione assegnata.

È lecito assumere codesto punto come origine delle coordinate; si vede allora che le condizioni predette sono espresse dall'annullamento di $\frac{r(r+1)}{2}$ coefficienti (Cfr. § 11). Si conclude che la *condizione perchè una curva passi con la molteplicità* r *per un punto dato* O *si traduce in* $\frac{r(r+1)}{2}$ *condizioni lineari*.

Se in O viene *assegnata* una *tangente principale* si ha un'*ulteriore condizione lineare* per la curva, la quale si può considerare come esprimente il passaggio ulteriore della curva per un punto infinitamente vicino ad O in una data direzione.

L'imposizione di un punto r-plo O ad una curva f, equivale già essa stessa all'imposizione fatta ad f di passare per O e per un certo numero di punti ad esso infinitamente vicini. Infatti se il punto O deve essere r-plo per la curva $f(xy)=0$, occorre, e basta, che esistano r rette per O aventi ivi r intersezioni riunite.

Ora imporre a una curva che passa già per O di avere quivi r intersezioni riunite con una data retta, porta altre $r-1$ condizioni lineari; così imponendo alla curva f di avere r intersezioni riunite in O con r rette passanti per O, si ottengono $1+r(r-1)$ condizioni lineari. Ma poichè un punto r-plo impone $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni, le $1+r(r-1)$ condizioni suddette devono essere non indipendenti appena sia $r>2$, e precisamente fra di esse $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ devono essere conseguenza delle altre. Vediamo come ciò accada.

Quando s'impone a una curva f di passare per O si ha una prima condizione, quando le s'impone poi di avere r intersezioni con una prima retta per O si hanno $r-1$ condizioni, e altre $r-1$ se ne hanno quando s'impone alla curva di avere r intersezioni con una seconda retta per O.

Ma con ciò il punto O è divenuto un punto doppio per la curva (passando per esso due rette che hanno ivi più di una intersezione), perciò quando s'impone alla f di avere r intersezioni con una terza retta per O, le nuove condizioni sono $r-1$. Siccome poi, per il fatto che esistono tre rette che hanno in O più di due intersezioni riunite, O è divenuto un punto triplo, quando s'impone alla f di avere r intersezioni con una quarta retta per O, le nuove condizioni sono $r-3$ anzichè $r-1$, e così via; finalmente quando s'impone alla f di avere r intersezioni con la r-esima retta, si aggiunge alla f, che ha già ivi un punto $(r-1)$plo, una sola condizione.

Si vede così che delle $1+r(r-1)$ condizioni che esprimono l'esistenza di r rette passanti per O ed aventi ivi r intersezioni riunite,

$$1+2+3+\dots+(r-1)=\frac{(r-1)(r-2)}{2}$$

sono conseguenze delle altre, d'accordo coi risultati innanzi stabiliti.

Tenendo conto delle condizioni indipendenti, il calcolo fatto innanzi porta direttamente a valutare le condizioni corrispondenti all'imposizione d'un punto r-plo, le quali sono

$$1+2+3+\dots+r$$

condizioni lineari successive.

La prima dice che la f passa per O, le due successive che la f passante per O ha ivi due tangenti e perciò un punto doppio, le tre successive che la f avente un punto doppio in O ha tre rette con un contatto tripunto e così via.

14. Sistemi lineari di curve. — Le considerazioni che seguono si riferiscono in generale alle condizioni lineari imposte ad una curva, delle quali il passaggio per un punto, semplice o multiplo, è un caso particolare. Per comodità scriveremo i coefficienti dell'equazione $f(xy)=0$ con un solo indice progressivo:

$$a_0,\ a_1, \dots a_N \qquad \left(N=\frac{n(n+3)}{2}\right).$$

Abbiamo già rilevato che: N condizioni lineari indipendenti determinano *una* curva. Si impongano invece alle coordinate della curva $s = N - r$ condizioni lineari indipendenti:

$$1) \qquad \begin{cases} u_{10}a_0 + u_{11}a_1 + \dots + u_{1N}a_N = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{s0}a_0 + u_{s1}a_1 + \dots + u_{sN}a_N = 0; \end{cases}$$

allora tutti i sistemi di soluzioni delle 1) si ottengono per combinazione lineare di $r+1$ sistemi di soluzioni (indipendenti)

$$a_0^{(h)},\ a_1^{(h)}, \dots a_N^{(h)} \qquad (h = 0,\ 1, \dots r),$$

ponendo:

$$a_i = \lambda_0 a_i^{(0)} + \lambda_1 a_i^{(1)} + \dots + \lambda_r a_i^{(r)},$$

mentre le a_i soddisfacenti alla 1) non possono esprimersi tutte per combinazione lineare di meno che $r+1$ soluzioni.

Pertanto: *le curve del sistema determinato da* N — r *condizioni lineari indipendenti, si esprimono come combinazioni lineari di* r + 1 *curve* (indipendenti) *del sistema stesso*:

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r$$
$$(f_h = a_0^{(h)} x^n + \dots).$$

Sono *curve* (linearmente) *indipendenti* del sistema, $r+1$ curve qualsiansi, una delle quali non si ottenga come combinazione lineare delle altre; ciò si riconosce esaminando se la matrice dei coefficienti ha la caratteristica $r+1$.

Il teorema precedente è invertibile:

Le ∞^r *curve* f *che si ottengono come combinazioni lineari di* r + 1 *curve indipendenti, si possono determinare mediante un sistema di* N — r *equazioni lineari indipendenti a cui soddisfano i coefficienti di* f.

Infatti queste equazioni si ottengono eliminando $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_r$ fra $r+2$ equazioni del tipo

$$\lambda_0 a_i^{(0)} + \lambda_1 a_i^{(1)} + \dots + \lambda_r a_i^{(r)} = a_i;$$

prendendo, in ciascun gruppo di $r+2$ equazioni, $i = 0, 1, \dots r, h$, (dove $h = r+1, \dots N$), si ottengono così precisamente $N - r$ equazioni indipendenti.

Se $f_0, f_1, \dots f_r$ sono $r+1$ curve d'ordine n linearmente indipendenti, il sistema di tutte le curve ottenute come combinazioni lineari di esse si dice *sistema lineare di dimensione* r (o ∞^r). Una curva si può considerare come un sistema lineare ∞^0 (determinato da N condizioni lineari per le a_i).

Segue dai teoremi precedenti che:

Un sistema lineare di dimensione r *è determinato ugualmente da* r + 1 *curve indipendenti scelte entro di esso* (il caso di eccezione corrisponde alla scelta di $r+1$ curve appartenenti a un sistema di dimensione $r-1$ contenuto nel dato).

Osservazione. Se qualcuna delle curve date, p. es., $f_0(xy)=0$, è d'ordine $m<n$, il sistema lineare $\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots.+\lambda_r f_r=0$ è formato di curve d'ordine n fra le quali si trova la curva f_0 da cui siamo partiti, completata colla retta all'infinito contata $m-n$ volte.

Un punto comune alle curve $f_0, f_1, \ldots. f_r$, è comune a tutte le curve del sistema lineare $\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots.+\lambda_r f_r=0$, e dicesi *punto-base* per esso; punto-base r-plo, se è r-plo per le f_i e quindi per tutte le curve del sistema. I punti base d'un sistema lineare $|f|$ si dicono *distinti* (per opposizione a punti base *infinitamente vicini*) se in ciascun punto base r-plo, O, le f hanno tangenti variabili: una tangente fissa equivale ad un punto base infinitamente vicino ad O.

Le curve d'un sistema lineare ∞^r

$$f=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots.+\lambda_r f_r=0,$$

che vengano assoggettate a $s\leq r$ nuove *condizioni lineari* indipendenti, formano un *sistema lineare di dimensione* r — s *contenuto nel dato.* Questo sistema può essere definito mediante s equazioni lineari indipendenti fra i parametri λ.

Così in particolare si ottengono sistemi lineari contenuti nel sistema $|f|$ imponendo alle curve f di esso:

1) di passare per punti dati

2) o di possedere dati punti multipli

3) o di appartenere a un secondo sistema lineare (che può ritenersi determinato mediante condizioni lineari fra i coefficienti)

4) o di contenere una curva φ d'ordine $m<n$ come parte fissa: infatti tutte le curve riducibili $f=\varphi\psi$ formano un sistema lineare $\left(\text{di dimensione } \frac{(n-m)(n-m+3)}{2}\right)$.

Le osservazioni precedenti si possono precisare cercando la dimensione del sistema lineare formato dalle curve d'ordine n che sono comuni a due sistemi di curve dello stesso ordine, di dimensioni r, s. Il primo sistema essendo definito da $N-r$ condizioni indipendenti e il secondo da $N-s$, il sistema delle curve comuni sarà in generale di dimensione $r+s-N$ (supposto $r+s \geq N$); ma può darsi che i due gruppi di condizioni definitrici dei due sistemi dati abbiano fra loro particolari legami, sicchè presi insieme costituiscano $N-r+N-s=2N-(r+s)$ condizioni non indipendenti; in tal caso il sistema delle curve comuni ai due sistemi ∞^r e ∞^s avrà la dimensione $t > r+s-N$.

Due sistemi lineari di dimensioni r, s, *le cui curve comuni formino un sistema lineare di dimensione* t, (t $\geq$ r + s − N), *appartengono a un medesimo sistema lineare di dimensione* (*minima*) r + s − t.

Infatti questo sistema resta determinato da $r+s-t+1$ curve indipendenti, delle quali $t+1$ comuni ai due sistemi dati, $r-t$ appartenenti al primo e $s-t$ appartenenti al secondo.

Chiamasi *fascio* il sistema lineare di dimensione 1:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0,$$

e *rete* il sistema lineare di dimensione 2:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Se un sistema lineare ∞^r ($r > 1$) contiene due curve φ_1, φ_2, esso contiene il fascio $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$, giacchè le φ_1, φ_2 possono assumersi fra le $r+1$ curve indipendenti che definiscono il sistema.

Viceversa sussiste il

Teorema fondamentale. Se un sistema Σ *di curve di ordine* n *contiene il fascio determinato da due sue curve qualsiansi, esso è lineare.*

Siano infatti f_0 e f_1 due curve del sistema Σ.

Consideriamo il fascio

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0. \tag{2}$$

Se le curve di questo fascio esauriscono tutto il sistema Σ

il nostro teorema è già dimostrato, se no esisterà una curva f_2 di Σ fuori del fascio, cioè indipendente dalle f_0 e f_1.

Ora ogni curva della rete

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \tag{3}$$

non è altro che una curva del fascio

$$\mu_0(\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1) + \mu_1 f_2 = 0$$

e quindi appartiene al sistema Σ, in quanto vi appartengono le curve $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ e $f_2 = 0$. Se le curve della rete 3) esauriscono il sistema Σ, il nostro teorema è dimostrato, se no esisterà una curva f_3 di Σ indipendente dalle f_0, f_1, f_2. Allora, come nel caso precedente, si vede che tutte le curve del sistema lineare di dimensione 3

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \tag{4}$$

appartengono a Σ.

È chiaro ormai come il ragionamento si prosegua fino a che sia costruito un sistema lineare di dimensione r, dato che Σ contenga $r+1$, e non $r+2$ curve linearmente indipendenti ($r \leq N$). Il sistema lineare ∞^r, costruito in tal modo, esaurisce Σ, giacchè altrimenti vi sarebbe in Σ una curva fuori di esso e quindi $r+2$ curve indipendenti. Pertanto il teorema è dimostrato.

Sieno $|f|$ e $|\varphi|$ due sistemi lineari di curve d'ordine n, m:

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$
$$\varphi = \mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1 + \dots + \mu_s \varphi_s = 0.$$

Le curve composte

$$f\varphi = (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r)(\mu_0 \varphi_0 + \dots + \mu_s \varphi_s) = \Sigma \lambda_i \mu_h f_i \varphi_h = 0$$

formano un sistema lineare che dicesi *minimo sistema somma* di $|f|$ e $|\varphi|$: in questo sistema figurano come parametri le quantità

$$\nu_{ih} = \lambda_i \mu_h.$$

In particolare il minimo sistema somma di f con se stesso dicesi *sistema doppio* di $|f|$.

In modo analogo si definiscono: la *somma* di *s sistemi lineari*, e in particolare il *sistema s*-plo d'un sistema lineare dato.

Il sistema n-*plo della rete delle rette del piano è il sistema di tutte le curve d'ordine* n. Infatti l'equazione generale d'ordine n:

$$f(xy) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_N = 0,$$

o, se si vuole l'equazione omogenea,

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_N x_3^n = 0,$$

mostra che la f è combinazione lineare di gruppi di n rette. Anzi il sistema delle curve d'ordine n viene definito dai gruppi di n rette formati coi lati del triangolo fondamentale per le coordinate

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

contati r, s, t volte $(r + s + t = n)$; l'ultimo lato essendo la retta all'infinito, nel sistema cartesiano.

Osservazione. Se in luogo di tre rette se ne considerano due sole ($x = 0$, $y = 0$ o $x_1 = 0$, $x_2 = 0$), le combinazioni lineari dei gruppi di n rette formati con esse, dan luogo a tutti i gruppi di n rette passanti per il punto comune alle date (punto base n-plo per il sistema così definito).

15. Invarianti e covarianti. — La definizione e le proposizioni fondamentali sugli invarianti e covarianti, si estendono dalle forme binarie $f(x_1 x_2)$, trattate nel cap. I, alle forme ternarie $f(x_1 x_2 x_3)$ e quindi ai polinomi associati $f(xy)$

$$\left(x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_1}{x_3}, \quad f(x_1 x_2 x_3) = x_3^n f(xy)\right).$$

Un invariante di f è una funzione razionale dei coefficienti di f che, quando si effettui una sostituzione lineare

$$1) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 \\ x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3 \\ x_3 = \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_2 + \alpha_{33} y_3, \end{cases}$$

si riproduce moltiplicata per una potenza del modulo

$$M = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Un covariante è una funzione razionale dipendente altresì omogeneamente da x_1, x_2, x_3 (o in modo non omogeneo da x, y), che gode dell'indicata proprietà.

Le definizioni precedenti si estendono in modo ovvio agli invarianti e covarianti *simultanei* di più forme.

Accanto agl' invarianti e covarianti vi è luogo a considerare ***contravarianti*** di una o più forme $f(x_1 x_2 x_3)$, cioè forme invariantive che contengono i coefficienti di f e le variabili ***contragredienti*** $u_1\ u_2\ u_3$, coordinate delle rette del piano

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

le quali subiscono la sostituzione lineare associata alla 1):

$$\begin{aligned} u_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + A_{13} v_3 \\ u_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + A_{23} v_3 \\ u_3 &= A_{31} v_1 + A_{32} v_2 + A_{33} v_3 \end{aligned}$$

dove A_{ik} designa il minore complementare di α_{ik} in M.

Inoltre si presentano *forme miste* contenenti insieme le variabili

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \quad \text{ed} \quad u_1,\ u_2,\ u_3.$$

Un controvariante di f è un invariante simultaneo di f e del ***controvariante identico*** u_x; ed una forma mista è un covariante simultaneo di f ed u_x.

L' annullamento d' un invariante della forma ternaria $f(x_1 x_2 x_3)$ esprime una proprietà proiettiva dalla curva $f = 0$. L'annullamento d' un covariante d'ordine m rappresenta una curva d'un certo ordine m, che ha con f una definita relazione proiettiva. L' annullamento d' un contravariante di classe m, cioè di grado m rispetto alle variabili u, rappresenta una curva-inviluppo di classe m; la corrispondente curva-luogo rappresentata in coordinate di punti, è un covariante di f. Le forme miste uguagliate a zero rappresentano ***corrispondenze*** fra punti e curve-inviluppo, legate invariantivamente alla f.

Nota sulla rappresentazione simbolica. Limitandoci, per semplicità alle forme invarianti di una data f, indichiamo come si estenda la rappresentazione simbolica e il teorema fondamentale di Clebsch (§ 6), che l'A. ha dato appunto per un numero qualunque di variabili.

Scriviamo una forma ternaria come sommatoria

$$f(x_1 x_2 x_3) = \Sigma a_{ikl} x_1^{\,i} x_2^{\,k} x_3^{\,l} \qquad (i+k+l=n),$$

dove i termini simili in $x_1^{\,i}$, $x_2^{\,k}$, $x_3^{\,l}$ si raccoglieranno in un un unico termine affetto dal coefficiente numerico

$$\frac{n!}{i!\,k!\,l!}.$$

Allora si vede che la f si può rappresentare *simbolicamente* con

$$f = a_x^{\,n} = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n,$$

ove si facciano le *sostituzioni*

$$a_1^{\,i} a_2^{\,k} a_3^{\,l} = a_{ikl}.$$

Ciò posto, rappresentiamo la f, introducendo più serie di simboli equivalenti, con

$$f = a_x^{\,n} = b_x^{\,n} = c_x^{\,n} = \ldots..$$

Si dimostra, come al § 6 per le binarie, che ogni invariante φ di f, del grado g, si può ritenere come limite di un invariante simultaneo lineare nei coefficienti di g forme f_0, f_1, $f_2, \ldots f_{g-1}$ che s' identifichino con f.

Perciò, ponendo

$$f = a_x^{\,n} = b_x^{\,n} = c_x^{\,n} = \ldots,$$

dove la a, b, c,.... designano g serie di simboli equivalenti, l' invariante φ verrà rappresentato simbolicamente da un invariante simultaneo delle forme lineari a_x, b_x, c_x,..., omogeneo di grado n rispetto alle g serie di variabili $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$,...

Un tale invariante simultaneo si esprime per i determinanti elementari

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \ldots.,$$

cioè per le *aree dei triangoli* $a_x b_x c_x = 0$,..... *rese omogenee*. Infatti la φ divisa per $a_3^{\,n} b_3^{\,n} c_3^{\,n}$ si riduce ad una funzione razionale $\bar{\varphi}$ dei rapporti

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{b_3}, \quad \beta_2 = \frac{b_2}{b_3}, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{c_3}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{c_3}, \ldots,$$

la quale deve restare assolutamente invariata per le sostituzioni lineari di modulo 1 effettuate sopra $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{y_1}{y_3}$, e quindi in ispecie per le *omografie affini equivalenti*, che conservano le aree [1]. Ma con una trasformazione siffatta si può portare un gruppo di rette

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + 1 = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + 1 = 0, \quad \gamma_1 x + \gamma_2 y + 1 = 0,$$

in un altro gruppo qualsiasi soddisfacente alla condizione che le aree dei triangoli formati colle rette del primo siano uguali a quelle formate colle rette del secondo; si deduce che $\bar{\varphi}$ dipende soltanto dalle aree predette, cioè dai determinanti

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}, \ldots;$$

per conseguenza φ si esprime per i determinanti (abc) c. d. d.

Questi determinanti omogenei sono d'altronde invarianti di peso 1 delle terne di forme $a_x b_x c_x, \ldots$

Si conclude che *ogni forma invariante di*

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots,$$

ammette una rappresentazione simbolica caratteristica, come somma di prodotti di fattori del tipo (abc); entrano nell'espressione precisamente g (≥ 3) serie di simboli equivalenti, per gl'invarianti di grado g e le lettere a, b, c,.... figurano, in ciascun termine della somma, precisamente n volte.

Come esempio consideriamo la forma quadratica

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2,$$

o il polinomio associato

$$f(xy) = a_{10} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2_{23} y + a_{33}.$$

[1] Cfr. p. es. ENRIQUES « G. proiettiva » § 50.

Vi è un solo invariante, che è del grado 3, cioè il *discriminante*, definito a meno di un fattore numerico da

$$D \equiv (abc)^2 \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

L'unicità di questo invariante risulta dall'osservazione che se vi fosse un secondo invariante I diverso da una potenza di D, il quoziente di due potenze convenienti di D e I fornirebbe un invariante assoluto, mentre f non possiede invarianti assoluti, perchè tutte le coniche irriducibili ($D \neq 0$) sono proiettive.

Il teorema fondamentale della rappresentazione simbolica si estende facilmente alle forme *covarianti*; la *rappresentazione simbolica di tali forme è caratterizzata* dal fatto che vi entrano *soltanto fattori del tipo* (abc) *e* d_x; per avere la rappresentazione simbolica di *contravarianti e forme miste* converrà considerare anche fattori del tipo (abu).

Come esempio daremo l'espressione simbolica del covariante hessiano

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

analoga del resto a quella trovata per lo hessiano delle binarie nei casi $n = 3, 4$.

A tale scopo scriviamo

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n,$$
$$\frac{\partial f}{x_1} = n a_1 a_x^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = n a_2 a_x^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = n a_3 a_x^{n-1},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = n(n-1) a_1^2 a_x^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = n(n-1) a_1 a_2 a_x^{n-2},$$

e le formule analoghe; avremo, tralasciando i fattori numerici:

$$H \equiv \begin{vmatrix} a_x^{n-2} a_1^2 & a_x^{n-2} a_1 a_2 & a_x^{n-2} a_1 a_3 \\ b_x^{n-2} b_2 b_1 & b_x^{n-2} b_2^2 & b_x^{n-2} b_2 b_3 \\ c_x^{n-2} c_3 c_1 & c_x^{n-2} c_3 c_2 & c_x^{n-2} c_3^2 \end{vmatrix}$$
$$= (abc)\, a_1 b_2 c_3\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}.$$

Ma l'espressione di H non deve mutare scambiando gli indici a, b, c in tutti i modi possibili; sommando le espressioni così ottenute, si avrà un'espressione di H simmetrica rispetto alle tre serie di simboli, cioè

$$H \equiv (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}.$$

Chiuderemo questo breve cenno sulla teoria degli invarianti delle forme ternarie, menzionando il *principio di trasporto* di Clebsch (Journal für math. 59), che permette di dedurre forme contravarianti di una data $f(x_1 x_2 x_3) = a_x^n = b_x^n$, dagli invarianti delle forme binarie. Se si sega la curva $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ con una retta

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

e s'impone al gruppo sezione di soddisfare una condizione proiettiva, questa si traduce in un'equazione contravariante a cui deve soddisfare la retta $(u_1 u_2 u_3)$.

S'indichino con $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ due punti della nominata retta; le coordinate dei punti della retta medesima saranno:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 y_1 + \xi_2 z_1 \\ x_2 = \xi_1 y_2 + \xi_2 z_2 \\ x_3 = \xi_1 y_3 + \xi_3 z_3. \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni in f si ottiene una forma binaria:

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) &= \varphi(\xi_1 \xi_2) = \\ &= [\xi_1(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + \xi_2(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n = \\ &= (\xi_1 a_y + \xi_2 a_z)^n = \alpha_\xi^n = \beta_\xi^n. \end{aligned}$$

Ora se per la forma φ si annulla un invariante espresso simbolicamente da

$$I = \Sigma k \Pi(\alpha\beta),$$

si trova che l'inviluppo delle rette secanti la f in gruppi per cui $I = 0$ è dato dalla forma contravariante

$$\Sigma k \Pi(abu) = 0.$$

16. Le equazioni $f(xy)=0$ e le corrispondenze tra forme di prima specie. — Anzichè come rappresentante una curva piana, l'equazione algebrica

$$f(xy)=0$$

può essere interpretata come equazione di una *corrispondenza* (xy) fra i punti x, y di due rette (o fra gli elementi di fasci di raggi o di piani ovvero fra i punti di due coniche prospettive a due tali fasci ecc.).

La corrispondenza che si ottiene quando il polinomio f possiede i *gradi* m, n *separatamente* rispetto ad x, y, si designa come *corrispondenza* $[m, n]$ per significare che *a un punto x corrispondono* n *punti y e a un y* m *punti x.*

Infatti possiamo determinare i corrispondenti del punto x scrivendo f sotto la forma:

$$1)\ f=y^n(a_{nm}x^m+\ldots.+a_{n0})+y^{n-1}(a_{n-1,\,m}x^m+\ldots.+a_{n-10})+\ldots.+ \\ +(a_{0m}x^m+\ldots.+a_{00})=0.$$

Dato ad x un valore particolare $\bar{x}$, la 1) diventa in generale un'equazione di grado n in y, la quale determina n punti (distinti o coincidenti) omologhi ad $\bar{x}$; per i valori particolari di x, radici dell'equazione

$$a_{nm}x^m+\ldots.+a_{n0}=0,$$

si deve dire, secondo la convenzione del § 1, che uno dei punti corrispondenti ad x è all'infinito; vi saranno anzi r punti corrispondenti ad x riuniti all'infinito se x annulla insieme i coefficienti di y^n, $y^{n-1}, \ldots. y^{n-r+1}$ nell'equazione 1).

L'equazione 1) può essere ordinata similmente rispetto alle potenze di x; così appare che ad ogni punto y corrispondono nella corrispondenza *inversa* (yx) precisamente m punti distinti o coincidenti, non escluso il caso che qualcuno di questi vada all'infinito.

I punti corrispondenti ad $x=\infty$ e a $y=\infty$ si possono trovare, senza bisogno di introdurre le coordinate omogenee, in base all'osservazione fatta innanzi; così ad $x=\infty$ corrispondono gli n punti

$$a_{nm}y^n+a_{n-1m}y^{n-1}+\ldots.+a_{0m}=0.$$

È da notare che uno di questi punti va all'infinito se $a_{nm} = 0$ e in generale l'*equazione*

$$f(xy) = 0$$

***rappresentante una corrispondenza* [m, n] *farà corrispondere a ciascuno dei punti* $x = \infty$, $y = \infty$ *l'altro punto contato* r *volte, se il grado complessivo del polinomio* f *vale* $m + n - r$ $(r > 0)$.**

Per $m = n = 1$, ***la corrispondenza algebrica* [1, 1] *fra due rette è una proiettività.*** Questa semplice osservazione (fatta da CHASLES nel 1855 (« Comptes rendus de l'Acad. de France », t. 41, pg. 1097) ha importanti applicazioni. P. es. proiettando una conica da due dei suoi punti, si hanno due fasci di raggi in corrispondenza algebrica [1, 1] e così si riconosce, senza calcoli o costruzioni, che i due fasci sono proiettivi (noto teorema di STEINER).

Nota storica [1]. Le corrispondenze algebriche [1, 2] si trovano considerate nella citata Nota di CHASLES; quelle d'indice m, n qualunque, s'incontrano in DE JONQUIÈRES « Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'ordre quelconque » (Journal de Math., t. 6, serie II, p. 113, 1861) e quindi nella « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » del CREMONA, pubblicata nelle Memorie di Bologna lo stesso anno 1861.

Corrispondenze riducibili e degeneri. La corrispondenza fra le rette x e y definita dall'equazione

$$f(xy) = 0$$

si dirà *riducibile* quando il polinomio f sia decomponibile nel prodotto di due fattori f_1 e f_2, cioè quando

$$f(xy) = f_1(xy) f_2(xy).$$

La corrispondenza si dirà invece *irriducibile* quando una tale decomposizione non sia possibile.

La corrispondenza riducibile $f = f_1 f_2 = 0$ ***è somma delle due corrispondenze*** f_1, f_2, cioè, il gruppo dei punti che la

[1] Cfr. la *Nota storica* di C. SEGRE (Bibliotheca Mathematica di Eneström, n.° 2. Stoccolma, 1892).

corrispondenza f fa corrispondere a un punto $\bar{x}$ è dato dalla somma dei gruppi che le f_1 ed f_2 fanno corrispondere al medesimo $\bar{x}$.

Un caso particolare di riducibilità merita speciale considerazione.

Supponiamo che $f(xy)$ contenga il fattore $x - a$, cioè sia

$$f(xy) = (x - a)f_1(xy).$$

In questo caso l'equazione

$$f(x\bar{y}) = 0$$

ammette sempre la radice $x = a$ qualunque sia il valore di $\bar{y}$, cioè nella nostra corrispondenza ad ogni punto y corrisponde il punto fisso $x = a$ e solo $n - 1$ punti variabili al variare di y. Noi chiameremo *degenere* ogni corrispondenza per la quale ad un punto variabile corrisponda, nella diretta o nella inversa, un gruppo che possiede qualche punto fisso.

Ogni corrispondenza degenere ha un'equazione del tipo precedente, cioè se la corrispondenza definita dalla

$$f(xy) = 0$$

ha come punto fisso il punto $x = a$, $f(xy)$ è divisibile per $x - a$:

$$f(xy) = (x - a)f_1(xy).$$

Infatti se ad ogni punto y corrisponde il punto $x = a$, viceversa al punto $x = a$ deve corrispondere un qualunque valore y, cioè l'equazione

$$f(ay) = 0$$

deve essere identicamente soddisfatta, e quindi $f(xy)$ deve contenere il fattore $x - a$.

La corrispondenza degenere definita dalla

$$(x - a)f_1(xy) = 0,$$

si può considerare come una corrispondenza riducibile alla somma delle corrispondenze

$$f_1(xy) = 0$$

e

$$x - a = 0,$$

dove si definisca la $x - a = 0$ come corrispondenza [1, 0] con un punto eccezionale: a ogni y corrisponde in questa il punto $x = a$, e a un x generico (diverso da a) non corrisponde nessun y, mentre al punto eccezionale $x = a$ corrisponde un qualunque y.

17. Curve rappresentative d'una corrispondenza e trasformazioni quadratiche. — Alla corrispondenza $[m, n]$

$$f(xy) = 0,$$

si può associare la curva data dalla medesima equazione o, più generalmente, la *curva rappresentativa* generata come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci A, B in corrispondenza $[m, n]$, dove le x, y vengano interpretate come coordinate proiettive degli elementi (raggi) di questi fasci. Quando A, B sieno posti nei punti all'infinito degli assi x, y, e la retta all'infinito AB venga fatta corrispondere ai valori $x = \infty$, $y = \infty$, la curva rappresentativa, definita dalla precedente costruzione geometrica, ricade nella $f(xy) = 0$ (definita in dipendenza dalla scelta dell'origine delle coordinate ortogonali e dell'unità di misura).

Per riguardo a questa speciale rappresentazione accade che: *alla corrispondenza* $f(xy) = 0$ *più generale* (in cui non si corrispondono i punti $x = \infty$, $y = \infty$) viene *associata* una *curva rappresentativa* $f(xy) = 0$, che è una *particolare curva d'ordine* $m + n$, avente un punto m-plo nel punto all'infinito dell'asse x e un punto n-plo nel punto all'infinito dell'asse y (§ 11). Se invece si fanno corrispondere i punti all'infinito degli assi x, y, diviene nullo il coefficiente di $x^m y^n$ in f: $a_{mn} = 0$, (§ 14), e la retta all'infinito si stacca (una o più volte) dalla curva rappresentativa della corrispondenza, la quale si riduce quindi d'ordine minore di $m + n$. In particolare la *curva generale* d'ordine n, $f(xy) = 0$, non passante per i punti all'infinito degli assi x, y, *rappresenta una corrispondenza* $[n, n]$ *particolare* fra le due rette x, y, dove a ciascun punto all'infinito corrisponde l'altro contato n volte.

Facciamo astrazione dallo speciale modo di costruzione della *curva rappresentativa* in cui la curva è data — in coordinate cartesiane — dalla stessa equazione $f(xy) = 0$ della corrispondenza, riferendoci alla *generale costruzione geometrica* spiegata innanzi. Allora *la curva* rappresentativa *definisce* la *corrispondenza* $f(xy) = 0$ soltanto *a meno di una trasformazione proiettiva sulle due rette* x, y, cioè a meno di una sostituzione lineare sulle due variabili *prese separatamente*; si può quindi fare in modo che la corrispondenza rappresentata sia sempre generale nel senso che non si corrispondano i punti $x = \infty$, $y = \infty$, o all'opposto che abbia questa particolarità.

La curva rappresentativa della corrispondenza, la quale si può ridurre omograficamente al caso in cui i punti A e B siano i punti all'infinito degli assi x e y, sarà d'ordine $n + m$, oppure d'ordine minore di $n + m$, in dipendenza di una circostanza che tiene al modo della rappresentazione: l'ordine si abbassa se i fasci A e B hanno il raggio comune unito (*proiezione prospettiva*), cioè se questo raggio corrisponde a due punti omologhi delle rette x e y.

La corrispondenza $f(xy) = 0$ supposta data fra le due rette x, y, definisce la curva rappresentativa soltanto a meno di una trasformazione piana in cui i fasci A e B vengano sostituiti da due fasci proiettivi di raggi.

Studiamo brevemente le trasformazioni piane generate dalla proiettività fra due coppie di fasci di raggi AA', BB', dove si fanno corrispondere le intersezioni dei raggi omologhi.

È noto che se alla retta AB corrisponde ugualmente nelle due proiettività la retta $A'B'$, la trasformazione generata è un'omografia, perchè a una retta p, considerata come asse di prospettività dei due fasci prospettivi A, B, corrisponde la retta p', asse dei due fasci prospettivi omologhi A', B' [1].

Suppongasi invece che alla retta AB corrispondano due rette diverse per A' e B', e supponiamo anzi, come accade in generale, che le due rette siano ambedue distinte da $A'B'$ e però s'incontrino in un punto C' fuori dalla retta $A'B'$. Allora a una retta generica p del primo piano, considerata come asse di prospettività dei due fasci A, B, corrisponderà nel secondo piano una conica generata dai due fasci proiettivi omologhi A', B', e tutte le coniche così definite passeranno per i tre punti A', B', C' [2].

[1] Cfr. p. es. F. Enriques. *G. Proiettiva*, § 45.
[2] *G. Proiettiva*, § 82.

Similmente alle rette generiche del secondo piano corrisponderanno, nel primo, le coniche per tre punti A, B, C.

Prendiamo i triangoli ABC e $A'B'C'$ come fondamentali per le coordinate $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, essendo

$$A=(100),\quad B=(010),\quad C=(001),$$

e similmente

$$A'=(100),\quad B'=(010),\quad C'=(001);$$

assumiamo poi come punti unità due punti omologhi. Allora la proiettività tra i fasci A, A' fa corrispondere alla retta

$$\frac{x_2}{x_3}=\lambda \quad \text{la retta} \quad \frac{y_3}{y_2}=\lambda,$$

giacchè la sostituzione lineare effettuata sopra $\frac{x_2}{x_3}$ porta per ipotesi 0, ∞, 1 in ∞, 0, 1; si avrà quindi

$$\frac{y_3}{y_2}=\frac{x_2}{x_3},$$

e similmente

$$\frac{y_1}{y_3}=\frac{x_3}{x_1},\quad \frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_2},$$

ossia le formule della trasformazione saranno

$$y_1\equiv\frac{1}{x_1},\quad y_2\equiv\frac{1}{x_2},\quad y_3\equiv\frac{1}{x_3},$$

cioè, sotto forma intera,

1) $$y_1\equiv x_2x_3,\quad y_2\equiv x_3x_1,\quad y_3\equiv x_1x_2.$$

Segue di qui che alle rette

$$a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=0$$

del piano y corrispondono, nel piano x, le coniche della *rete*

$$a_1x_2x_3+a_2x_3x_1+a_3x_1x_2=0,$$

dotata dei tre *punti base* (100), (010), (001).

Questi tre punti base A, B, C (e allo stesso modo A', B', C' nel piano y) sono punti eccezionali o *fondamentali*, le cui coordinate rendono nulli tutti e tre i valori delle y calcolate mediante la formula 1); perciò il corrispondente di un punto fondamentale è *indeterminato*. Ma avvicinandosi al punto $A = (100)$ secondo una certa direzione $\frac{dx_2}{dx_3}$, si trova

$$y_1 = 0, \quad y_2 = dx_2, \quad y_3 = dx_3,$$

e perciò *ai punti infinitamente vicini ad* A *corrispondono i punti propri della retta fondamentale* $y = 0$ (congiungente $B'C'$).

Le formule 1) definiscono una *trasformazione quadratica*, cioè una sostituzione razionale di secondo grado, razionalmente invertibile. Reciprocamente si assuma una trasformazione quadratica

$$2) \qquad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1 x_2 x_3) \\ y_2 = \varphi_2(x_1 x_2 x_3) \\ y_3 = \varphi_3(x_1 x_2 x_3) \end{cases}$$

dove le φ_1, φ_2, φ_3 sono forme di second'ordine, e dove si suppone che le 1) riescano *razionalmente* invertibili; allora si può, *in generale*, costruire geometricamente la 2) mediante la proiettività fra due coppie di fasci A, A' e B, B'.

Infatti alle rette

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

corrispondono per la trasformazione 2) le coniche della *rete*

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 = 0,$$

e alle rette di un fascio, di centro P, corrispondono le coniche di un fascio con quattro punti base. Fra questi punti uno solo potrà variare al variare di P, giacchè — stante la condizione di invertibilità — al punto P deve corrispondere un solo punto variabile P'. Infatti fra una retta e la conica omologa si ottiene una corrispondenza [1, 4], da cui deve staccarsi la corrispondenza [1, 1] data fra i punti generici della conica e quelli della retta, sicchè (§ 15) resta una corrispondenza degenere [0, 3] dove i tre punti corrispondenti a quelli della retta sono punti fissi. Si hanno così tre *punti base* per la rete di coniche, i quali tuttavia possono essere surrogati da un contatto o da un'osculazione delle coniche predette.

Escluso questo caso particolare, si avranno tre punti base A, B, C, che sono punti fondamentali della trasformazione, e quindi, entro la rete, tre fasci di coniche riducibili, costituite dai tre lati del triangolo ABC e da una retta qualsiasi per il vertice opposto. Ora i tre fasci predetti (del piano x) corrisponderanno a tre fasci di rette A', B', C', e — siccome ad un punto generico del piano x non può corrispondere un punto appartenente alla retta $B'C'$ (altrimenti la corrispondenza non riuscirebbe invertibile) — così a una retta per A' corrisponderà una retta per A. Si deduce che la trasformazione quadratica fra i due piani y, x si può porre riferendo proiettivamente le coppie di fasci A, A' e B, B' (oppure C, C'), cioè *una trasformazione quadratica generale si costruisce* (in tre modi) *mediante la proiettività fra due coppie di fasci di raggi* A, A′ e B, B′, e perciò si lascia rappresentare con le *equazioni normali* 1).

Soltanto la trasformazione quadratica ove le coniche φ_1, φ_2, φ_3 si osculano in *un* punto (caso in cui i tre punti fondamentali divengono infinitamente vicini) non può essere generata mediante la proiettività fra due coppie di fasci di raggi. Infatti il caso in cui le coniche predette abbiano comuni *due* punti, e la tangente in uno di essi (B') (cioè il caso in cui vi sono due punti fondamentali infinitamente vicini) corrisponde alla trasformazione particolare generata dalla proiettività fra i fasci A, A' e B, B', quando alla retta AB corrisponde la retta $A'B'$ per A', e una retta diversa per B'. L'equazione di questa trasformazione si riduce alla forma normale

$$y_1 \equiv x_2 x_3, \quad y_2 \equiv x_1 x_2, \quad y_3 \equiv x_3^2.$$

Nota storica. Una particolare trasformazione quadratica s'incontra già in Poncelet (« Traité des propriétés projectives des figures », 1822, pg. 198), il quale ebbe a considerare la corrispondenza fra le coppie di punti d'un piano che sono coniugati rispetto a due coniche.

Dieci anni più tardi Steiner (nella « Systematische Entwickelung.... ») definiva la trasformazione quadratica ottenuta come *proiezione sghemba* da due rette, cioè la corrispondenza che si ottiene fra i punti di due piani distinti la cui congiungente incontri due rette sghembe date.

La trasformazione quadratica si trova quindi incidentalmente considerata da Plücker (Journal für Math. Bd 5, 1830), e studiata sistematicamente dal MAGNUS (« Nouvelles méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie ». Journ. für Math. Bd 8, 1832; « Aufgaben und Lehrsätze.... ». Berlino, 1833).

Ritorniamo alla corrispondenza $f(xy)=0$; potremo ora affermare che la *curva rappresentativa della corrispondenza* — costruita mediante due fasci A, B — *è definita a meno di una trasformazione quadratica di cui* A *e* B *sono punti fondamentali.*

Si abbia una curva d'ordine n dotata di due punti di molteplicità r e s, $(r+s\leq n)$; questa curva rappresenta una corrispondenza $[n-r,\ n-s]$ tra i fasci su nominati.

Si eseguisca nel piano una trasformazione quadratica che abbia come punti fondamentali i due punti A, B e un terzo punto C (fuori della retta AB), il quale sia dotato per la curva di una certa molteplicità $t\geq 0$. Allora alla curva f che interseca le coniche per ABC in $2n-(r+s+t)$ punti variabili, corrisponderà una curva che incontra le rette in altrettanti punti, cioè una curva d'ordine $n'=2n-(r+s+t)$.

Questa curva passerà per i punti fondamentali del piano trasformato, A', B', C', con certe molteplicità r', s', t', e poichè essa rappresenta ancora una corrispondenza $[n-r,\ n-s]$ fra i fasci A' e B', si dovrà avere

$$n'-r'=n-r$$
$$n'-s'=n-s$$

e analogamente

$$n'-t'=n-t.$$

Si deduce

$$r'=2n-(s+t)$$
$$s'=2n-(r+t)$$
$$t'=2n-(r+s),$$

d'accordo con l'osservazione che la f interseca la retta BC fuori di B, C in $r'=2n-(s+t)$ punti, ai quali corrispondono i punti infinitamente vicini ad A' della curva trasformata.

Osservazione. Nel § 13 si è presentata una estensione dell'ordinario concetto di punto, cioè la considerazione di punti impropri infinitamente vicini a un punto proprio dato, sopra rette o parabole per esso. È notevole che i punti infinitamente vicini a un punto O nell'intorno del *prim' ordine*, cioè i punti che corrispondono a tangenti e vengono rappresentati da differenziali del prim' ordine, si possono anche introdurre per mezzo di una trasformazione quadratica che abbia in O un punto fondamentale, giacchè, come abbiamo visto nel § 16, essi corrispondono ai punti propri della retta fondamentale omologa. Con ripetute trasformazioni quadratiche si possono quindi definire i punti infinitamente vicini ad O negli intorni successivi d'ordine 1, 2, 3,...., la cui analisi completa, ove si presentano casi non riducibili a quello dei punti successivi sopra una parabola, formerà oggetto della teoria generale delle singolarità delle curve che svilupperemo più avanti. Ma intanto, limitandoci ai punti dell' intorno del prim' ordine, vogliamo illuminarne il concetto ponendolo in relazione con quello dei punti all' infinito introdotti nella Geometria proiettiva. Le osservazioni che occorrono a tale scopo, ci condurranno a formulare un principio fondamentale di cui vedremo nel seguito importanti applicazioni. A tale scopo è consacrato il paragrafo che segue.

18. La geometria astratta, e il concetto dei punti infinitamente vicini. — La Geometria considerata come scienza deduttiva, appare un organismo logico in cui i concetti fondamentali di « punto », « retta », « piano » ecc., e quelli definiti mediante questi, figurano soltanto come elementi di alcune relazioni logiche primitive (i postulati) e di altre relazioni logiche che ne vengono dedotte (i teoremi). La legittimità di tali deduzioni non dipende affatto dal contenuto intuitivo di quei concetti. Da questa osservazione si può trarre un principio generale, molto fecondo, che informa tutta la moderna geometria: *il principio della sostituibilità degli elementi geometrici.*

Si abbiano dei concetti, comunque definiti, i quali vengano convenzionalmente designati coi nomi di « punto », « retta » e « piano »; e suppongasi che tra di essi intercedano le relazioni logiche fondamentali enunciate dai postulati della Geometria (o anche soltanto da quelli che stanno a base della Geometria proiettiva). Tutti i teoremi di detta Geometria avranno ancora significato e validità ove si intenda di considerarli, non più come esprimenti relazioni fra « punti », « rette » e « piani » nel senso intuitivo delle parole, ma invece come relazioni fra i concetti dati, i quali sono stati convenzionalmente designati coi detti nomi.

In altre parole: *la Geometria, considerata come scienza astratta, può ricevere interpretazioni diverse da quella intuitiva, fissando che gli elementi* (punti, rette, piani,....) *di essa sieno concetti comunque determinati, tra i quali intercedano le relazioni logiche espresse dai postulati.*

In particolare ciò vale anche per la Geometria del piano, purchè si tenga conto di tutte le proposizioni fondamentali che permettono di costruirne il sistema senza uscire dal piano.

Il primo esempio di sostituibilità degli elementi geometrici (dopo quello offerto dalla Geometria sferica) s'incontra nel *principio di dualità* della Geometria proiettiva, elaboratosi attraverso il metodo delle polari reciproche di PONCELET e formulato come principio filosofico da GERGONNE (1826) (1).

Il vero fondamentó di questo principio apparve mediante il concetto generale della corrispondenza reciproca per opera di MÖBIUS, che ebbe a rilevare il carattere simmetrico della relazione di appartenenza di due elementi duali (2); e fu messo in più chiara luce da PLÜCKER (3) mercè l'uso delle coordinate di rette e di piani.

Attraverso il concetto esteso delle corrispondenze (MÖBIUS) e la generalizzazione delle coordinate entro diverse famiglie di enti (PLÜCKER), si prepara il ravvicinamento di « diverse Geometrie » quali « interpretazioni di una medesima geometria astratta ».

Il classico « Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea » del BELTRAMI (1865, Opere, t. I, p. 262) e una Nota di HESSE su « Ein Uebertragsprincip » (4) (1866), offrono esempio di questo passaggio, che più tardi doveva diventare di uso frequente e sistematico nelle opere di LIE, KLEIN e dei geometri contemporanei.

Crediamo utile di riferire qui l' *interpretazione della « Geometria delle coppie di punti della retta » come « Geometria dei punti del piano »*, che si trova appunto nella citata Nota di HESSE.

Si chiamino « punti » le « coppie di punti d'una retta *a* », e si chiamino « rette » le « involuzioni di coppie di punti appartenenti ad *a* ».

(1) Annales de Math., 17.
(2) Barycentrische Calcul, 1827, p. 436.
(3) « Analytisch-geometrische Entwickelungen », II Theil, 1830. — Cfr. Abhandlungen, t. I, p. 619.
(4) Journal für Math. Bd 66.

Con questa sostituzione di parole tutte le proprietà del sistema delle coppie di punti sulla retta divengono proprietà di un « piano α » definito dal punto di vista della Geometria proiettiva.

Infatti la sostituzione anzidetta significa che gli stessi parametri omogenei u_1, u_2, u_3 vengono interpretati: una prima volta come coefficienti dell'equazione di 2° grado

$$u_1 \xi_1^2 + u_2 \xi_1 \xi_2 + u_3 \xi_2^2 = 0$$

che rappresenta una coppia di punti (ξ) sulle retta a, e una seconda volta come coordinate d'un punto nel piano α.

Per rendere più chiara la traduzione, sotto l'aspetto geometrico, conviene operare nel piano α una reciprocità, prendendo dunque u_1, u_2, u_3 come coordinate della retta

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Allora la traduzione da farsi verrà indicata come segue:

coppia di punti di a = retta di α,
involuzione su a = punto (fascio) di α.

Ad una involuzione degenere di a, dotata d'un punto fisso P, corrisponderà in α un punto P' che, variando P su a, descriverà una curva C, cioè la curva di 2° ordine:

$$x_1 = \xi^2, \quad x_2 = \xi_1 \xi_2, \quad x_3 = \xi_2^2;$$

ciò è d'accordo col fatto che una coppia $P_1 P_2$ di a appartiene a *due* involuzioni degeneri, sicchè la retta corrispondente su α sega C in *due* punti.

Ora fra C ed a intercede una corrispondenza (1, 1) proiettiva; ad ogni « coppia $P_1 P_2$ » di a corrisponde la « retta di α » che congiunge i punti omologhi P_1', P_2', appartenenti a C.

Per tal modo, se si parte da una conica C, che sia riferita ad a con una proiezione da un suo punto, la corrispondenza di Hesse viene posta semplicemente: ad ogni retta di α corrispondono le proiezioni dei punti che essa ha comuni con C, e — conforme ad un noto teorema della Geometria proiettiva — le coppie di una involuzione su C (provenienti da un'involuzione data su a) riescono allineate con un punto — immagine dell'involuzione di a.

Vediamo come il concetto della Geometria astratta permetta di porre nel piano una trasformazione quadratica, specialmente notevole dal punto di vista metrico.

Consideriamo i cerchi del piano π, passanti per un punto O, ritenendo in particolare le rette per O come *cerchi* di *raggio infinito*.

Confrontiamo le proprietà fondamentali del nominato sistema di cerchi colle proprietà del piano rigato; vediamo che le une si traducono nelle altre quando si sostituisca alla parola « retta » la parola « cerchio per O » lasciando invariata la parola « punto », e con le avvertenze che seguono.

In tal modo si ottiene una interpretazione della Geometria astratta del piano, dove:

1) i « punti diversi da O » vengono *chiamati* « punti », occorrendo altresì considerare *un* punto — all' infinito — comune a tutti i cerchi di raggio infinito per O;

2) i « cerchi per O » vengono *chiamati* « rette » (1).

In questa interpretazione — che riesce perfetta per la Geometria dei punti reali — i *cerchi tangenti* in O figurano come *rette parallele*, e perciò l' introduzione dei punti infinitamente vicini ad O, per riguardo alla nominata Geometria dei cerchi, si deve ritenere come equivalente all' introduzione dei punti all' infinito nella ordinaria Geometria proiettiva.

Se si pone una *omografia* fra il piano rigato e il piano concepito come sistema dei cerchi per O, si ottiene una trasformazione quadratica che ha come punti fondamentali: O e i punti ciclici del piano (punti immaginari all' infinito comuni a tutti i cerchi del piano); la qual trasformazione realizza — per così dire — l' interpretazione della nostra Geometria astratta. In essa ai punti all' infinito del piano corrispondono i punti infinitamente vicini ad O.

Un caso particolare della trasformazione quadratica anzidetta è l' *inversione rispetto ad un cerchio* di centro O; questo caso particolare si distingue per il carattere involutorio della corrispondenza (coincidenza della trasformazione diretta colla inversa).

(1) Cfr. ENRIQUES. *G. Proiettiva*. Appendice III.

19. Appendice: iperspazî. — Nel seguito avremo luogo di considerare non soltanto equazioni algebriche $f(x) = 0$ o $f(xy) = 0$, ma anche equazioni e sistemi di equazioni fra tre e più variabili. Nel caso di tre variabili ne cercheremo allora l'interpretazione conforme alla Geometria analitica dello spazio; avremo dunque: superficie $f(xyz) = 0$, oppure curve gobbe, intersezioni complete o parziali di due superficie, che vengono rappresentate da sistemi di due o di più equazioni fra le coordinate x, y, z, etc. Ma — ponendoci da un punto di vista astratto e cercando un aiuto alla facoltà immaginativa — non vi è alcun motivo di limitare le rappresentazioni geometriche alle tre dimensioni. Il postulato restrittivo che qui s'introduce [1], conforme alla nostra intuizione dell'ordine sensibile, si può lasciar cadere nella Geometria astratta, costruendo così una teoria generale delle varietà o spazî ad n dimensioni.

Soprattutto c'interessa di definire gli *spazî lineari*, in cui si ha una semplice e naturale estensione dell'ordinaria Geometria proiettiva.

Una varietà di elementi (punti) che corrispondano biunivocamente senza eccezione ai rapporti di $n + 1$ coordinate (proiettive) omogenee

$$x_0,\ x_1, \ldots x_n,$$

verrà denominato uno *spazio* (lineare) S_n *ad* n *dimensioni*, quando sia definito entro la varietà un sistema di *linee* o varietà ad una dimensione, chiamate *rette*, per modo che « due punti (x_i), (x_i') appartengano a una retta » e le coordinate dei punti di questa siano

$$\lambda x_i + \mu x_i'.$$

(1) L'ipotesi delle tre dimensioni significa che lo spazio si può generare col movimento triplo di un punto: il movimento semplice genera una linea, il movimento della linea genera una superficie, il movimento di una superficie genera un solido o l'intero spazio. L'ipotesi anzidetta si introduce d'ordinario nel sistema dei postulati geometrici, con riferimento a particolari enti, per esempio alle sfere o ai piani. Così il postulato delle tre dimensioni può enunciarsi dicendo che una sfera divide lo spazio in due parti per modo che una linea (continua) congiungente un punto interno e un punto esterno ha almeno un punto comune con la sfera. Più comunemente il postulato suddetto figura nella geometria elementare attraverso la proposizione che « due piani aventi a comune un punto hanno a comune una retta ». Cfr. l'articolo « Sui concetti di retta e di piano » di U. Amaldi nei Collectanea di F. Enriques « Questioni riguardanti le Matematiche Elementari » Volume I. Bologna-Zanichelli, 1912.

Osservazione. È ovvio che la definizione dello S_n può esser data ugualmente in rapporto a coordinate proiettive non omogenee, delle quali occorre allora considerare anche i valori infiniti.

La definizione dello S_n suppone, come abbiamo detto, la definizione della linea retta, congiungente due punti o proiettante l'uno di essi dall'altro: congiungendo i punti di una retta $a = BC$ con un punto A fuori di questa, ossia proiettando la retta dal punto A, si ottiene una varietà a due dimensioni S_2 o « *piano* » ABC, luogo dei punti le cui coordinate sono combinazioni lineari di quelle di A, B, C. Similmente, proiettando un piano da un punto fuori di esso, si ottiene uno spazio a tre dimensioni S_3, e in generale con r proiezioni successive $(r < n)$ si definiscono gli *spazî lineari* S_r contenuti in S_n; in particolare gli S_{n-1} di S_n diconsi *iperpiani*. Un *iperpiano* di S_n è *rappresentato da un'equazione lineare*

$$u_x = u_0 x_0 + u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = 0,$$

che si ottiene eliminando le λ fra le n relazioni

$$x_i = \lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} + \dots + \lambda_n x_{ni} \qquad (i = 0, 1, \dots n)$$

le quali esprimono che l'iperpiano passa per gli n punti indipendenti

$$x_{k0}, x_{k1}, \dots x_{kn} \qquad (k = 1, 2, \dots n),$$

che servono a definirlo.

Si deduce facilmente che gli S_r, $(r < n - 1)$, possono essere definiti come intersezioni di $n - r$ iperpiani indipendenti, cioè mediante $n - r$ equazioni lineari indipendenti.

Inoltre, le note proposizioni sulla teoria dei sistemi di equazioni lineari omogenee si traducono nelle seguenti *proposizioni fondamentali della geometria proiettiva dello* S_n.

Un iperpiano e una retta che non giaccia in esso hanno un punto in comune.

Più in generale un S_r, $(0 < r < n)$, e un S_{n-r}, che siano indipendenti, cioè non appartengano a un S_{n-1}, hanno un punto comune.

Un S_r e un S_h, con $r + h > n$, i quali appartengano ad un S_n e non ad uno spazio di dimensione inferiore, hanno comune un S_{r+h-n}.

Quest'ultima proposizione può ritenersi valida anche per $r+h=n$, nel qual caso si riduce alla precedente purchè si consideri il punto come uno spazio S_0 a *zero dimensioni*.

Per $r+h<n$, un S_r e un S_h contenuti nello S_n non hanno in generale punti comuni (e in tal caso diconsi *sghembi*); un S_r e un S_h (*incidenti*) i quali abbiano comune uno spazio S_t $(t \geq 0)$ appartengono ad uno spazio minimo S_{r+h-t} da essi determinato, e non ad uno spazio di dimensioni inferiori.

I *sistemi lineari* ∞^n di curve piane, *porgono* una *illustrazione* delle anzidette proprietà dello *spazio* S_n. Ciò si rende chiaro ove si chiamino « punti » le curve del sistema e « rette » i « fasci di curve contenuti in esso », richiamando i teoremi del § 14 e in particolare il teorema fondamentale che corrisponde alla generazione dello S_n con proiezioni successive.

Sussiste nello spazio S_n un *principio di dualità* che si ottiene scambiando le coordinate x_i dei punti con le coordinate u_i dei piani $u_x=0$; mentre i punti vengono così scambiati cogli iperpiani, le rette si scambiano con gli S_{n-2} (base di un fascio di iperpiani), e in generale gli S_r con gli S_{n-r-1}.

Una sostituzione lineare omogenea sulle variabili x_i, o ugualmente sulle u_i:

$$x_i' = \sum_k \alpha_{ki} x_k \qquad (i,\ k=0,\ 1, \ldots n),$$

pone fra gli spazi (x_i), (x_i') una *omografia*, la quale — nell'ipotesi che sia il determinante $|\alpha_{ik}| \neq 0$ — costituisce una trasformazione, o corrispondenza, biunivoca *non degenere*, dotata della proprietà caratteristica che « ai punti di uno spazio lineare S_r contenuto in uno dei due S_n dati corrispondono i punti di uno spazio lineare S_r contenuto nell'altro ». Se la sostituzione lineare ha luogo fra le x_i e le u_i' (e quindi fra le u_i e le x_i') si ottiene fra i due S_n una *correlazione* o *reciprocità*, dove ai punti di un S_r corrispondono gli iperpiani per un S_{n-r-1}, venendo così associati gli spazi duali; la correlazione può ritenersi astrattamente come una omografia fra uno dei due S_n e lo S_n duale dell'altro, quindi — per spazi distinti, ove non è limitata la scelta dell'elemento « punto » — le proprietà della correlazione sono identiche a quelle della omografia.

L'omografia fra due S_n si può determinare fissando ad arbitrio $n+2$ coppie di punti o di iperpiani corrispondenti, con la condizione che gli $n+2$ elementi scelti in uno spazio siano tali che $n+1$ qualsiansi fra essi siano indipendenti (punti non giacenti in un iperpiano, o iperpiani non passanti per un punto), potendosi con ciò determinare le α_{ik} nel modo ben noto per $n=3$. Se si suppone che nei due spazi si corrispondano i punti

$$(1\,0\ldots.0),\ldots.(0\,0\ldots.1) \quad \text{ed} \quad (1\,1\ldots.1),$$

ossia gli iperpiani

$$x_i=0,\ x_i'=0 \ \text{ e } \ x_0+x_1+\ldots.+x_n=0,\ x_0'+x_1'+\ldots.+x_n'=0,$$

le equazioni dell'omografia, prescindendo da un fattore di proporzionalità, si riducono alla forma

$$x_i'=x_i \qquad\qquad (i=0,1,\ldots.n);$$

appare così che l'*omografia* entro lo spazio si può considerare come la più generale *trasformazione delle coordinate proiettive* $x_0, x_1, \ldots. x_n$.

Anzi, se lo spazio S_n è dato geometricamente con le sue rette (o i suoi iperpiani), le più generali coordinate (proiettive) per cui le equazioni degli iperpiani sono lineari, si possono stabilire ponendo una omografia fra lo S_n dato e lo S_n analitico i cui punti sono i gruppi $(x_0, x_1, \ldots. x_n)$; sicchè il sistema delle coordinate riesce fissato in rapporto alla scelta arbitraria dei punti $(100\ldots.0)$, $(010\ldots.0)$, $\ldots.(000\ldots.1)$, $(111\ldots.1)$ [1].

Nota sulle coordinate di rette. Gli S_r, $(0<r<n-1)$, contenuti in un S_n possono determinarsi come gli S_0 e gli S_{n-1} per mezzo di coordinate; ma queste non appariscono più come le coordinate proiettive dei punti di uno spazio lineare. Un S_r si può determinare per mezzo di $r+1$ punti indipendenti che gli appartengono o per mezzo di $n-r$ iperpiani indipendenti passanti per esso; con le coordinate di questi punti, o iperpiani, si formeranno due matrici, e i determinanti d'ordine massimo estratti da queste forniranno due gruppi di coordinate dello S_r, che si dimostrano esser proporzionali e fra cui sussistono certe

[1] Cfr. ENRIQUES. *G. Proiettiva.* Appendice.

relazioni quadratiche. Così al sistema degli S_r e a quello degli spazi duali S_{n-r-1} competeranno le medesime coordinate. Per semplicità ci limiteremo a spiegare la cosa riferendoci alle coordinate delle rette, o degli S_{n-2}, incominciando dal caso $n=3$.

Consideriamo adunque una retta dello spazio S_3 determinata da due dei suoi punti

$$A=(a_0 a_1 a_2 a_3),\quad B=(b_0 b_1 b_2 b_3).$$

Scriviamo la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right|;$$

i *determinanti* estratti da questa

$$p_{ik}=a_i b_k - a_k b_i,$$

considerati a meno d'un fattore, ***non dipendono dalla scelta dei punti* A *e* B *sulla retta***, ma ***soltanto dalla retta*** medesima che — come vedremo — viene da essi determinata, e perciò possono assumersi come *coordinate omogenee* di questa. Infatti sostituiamo ad A, B i punti $(\lambda a_i + \mu b_i)$, $(\lambda' a_i + \mu' b_i)$: si avrà

$$\left|\begin{array}{cc} \lambda a_i + \mu b_i & \lambda a_k + \mu b_k \\ \lambda' a_i + \mu' b_i & \lambda' a_k + \mu' b_k \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{array}\right| = (\lambda\mu' - \lambda'\mu) p_{ik}.$$

Occorre notare che le p_{ik} non possono essere tutte contemporaneamente nulle, anzi fra le p_{01}, p_{02}, p_{03} ce ne è almeno una diversa da zero, altrimenti le a_i risulterebbero proporzionali alle b_i e i punti A e B non sarebbero più distinti.

Tenuto conto della relazione $p_{ik}=-p_{ki}$, si hanno sei p_{ik} sostanzialmente distinte, i cui mutui rapporti corrispondono alle rette dello spazio; ma le sei p_{ik} non possono assumersi ad arbitrio: *sussiste* infatti *la relazione quadratica*

1) $$P=p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}=0,$$

che si deduce sviluppando per i minori di second'ordine delle due prime linee il determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora si assumano ad arbitrio le p_{01}, p_{02}, p_{03} in modo che una di esse sia diversa da zero, p. es. $p_{01} \neq 0$; quindi si assumano ancora ad arbitrio le p_{12}, p_{13}; dopo ciò facciamo vedere che a questi valori delle p_{ik} corrisponde una retta ben determinata, che possiamo costruire, per esempio, come congiungente due punti $(01a_2a_3)$, $(10b_2b_3)$, intersezioni di essa coi piani coordinati $x_0 = 0$, $x_1 = 0$.

Infatti si ha

$$a_2 = -\frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad a_3 = -\frac{p_{03}}{p_{01}}$$

$$b_2 = \frac{p_{12}}{p_{01}}, \quad b_3 = \frac{p_{13}}{p_{01}},$$

dove, usufruendo del fattore di proporzionalità, si può anche supporre $p_{01} = 1$.

Resta quindi determinata anche la p_{23} che viene definita direttamente in funzione lineare delle precedenti p_{ik} per mezzo dell'equazione 1).

Pertanto le sei p_{ik} legate dalla 1) determinano senza eccezione le rette dello spazio e così appariscono coordinate omogenee di essa; la conoscenza dei cinque valori

$$p_{01}, \quad p_{02}, \quad p_{03}, \quad p_{12}, \quad p_{13}$$

vale a determinare una retta soltanto nell'ipotesi $p_{01} \neq 0$; nel caso $p_{01} = 0$ la relazione 1) non vale più a determinare la p_{23}, che si deve assumere fra le cinque p_{ik} date per individuare la retta secondo il procedimento precedente. Appunto per evitare eccezioni, nella determinazione delle rette mediante coordinate occorre considerare anzichè cinque, sei coordinate omogenee, legate da una relazione quadratica. Da questo punto di vista le *rette dello spazio* S_3 *si possono riguardare come i punti di una quadrica* $P = 0$ (varietà del second'ordine) *in un* S_5.

La *condizione di incidenza* di due rette (p_{ik}), (p'_{ik}) è

$$p_{01}p'_{23}+p_{02}p'_{31}+p_{03}p'_{12}+p'_{01}p_{23}+p'_{02}p_{31}+p'_{03}p_{12}=$$
$$=\Sigma p_{ik}p'_{lm}=\Sigma\frac{\partial P}{\partial p_{lm}}p'_{lm}=0.$$

Infatti in tali ipotesi essendo coplanari i punti A, B e A', B' che determinano le due rette, si ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ b_0' & b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix}=0;$$

sviluppando per i minori estratti dalle prime due linee si trova appunto la condizione precedente.

Ora, in luogo di determinare una retta per mezzo di due punti A e B e quindi coi minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

si può considerare la retta come intersezione di due piani $u_x=0$, $v_x=0$, e quindi individuarla coi minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

$$q_{ik}=u_iv_k-u_kv_i=-q_{ki}.$$

Per le q_{ik} si ripete per dualità tutto ciò che è stato detto delle p_{ik}; ma è interessante dimostrare che le nuove coordinate si riducono alle precedenti, cioè si ha, a meno di un fattore di proporzionalità: $p_{ik}\equiv q_{lm}$.

A tale scopo cerchiamo la condizione di incidenza fra una retta (p_{ik}) e una (q_{ik}): scriviamo che la retta intersezione dei piani $u_x=0$ e $v_x=0$ contiene un punto di coordinate $\lambda a_i+\mu b_i$; eliminando λ e μ viene

$$\begin{vmatrix} u_0a_0+u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3 & u_0b_0+u_1b_1+u_2b_2+u_3b_3 \\ v_0a_0+v_1a_1+v_2a_2+v_3a_3 & v_0b_0+v_1b_1+v_2b_2+v_3b_3 \end{vmatrix}=0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \Sigma p_{ik} q_{ik} = 0.$$

Ora per esprimere la coincidenza di due rette (p_{ik}) e (q_{ik}) scriviamo che le rette (p'_{ik}) incidenti alla (p_{ik}) sono incidenti anche alla (q_{ik}); dovranno risultare identiche le due equazioni lineari nelle $p'_{01}, \ldots p'_{23}$:

$$\Sigma p_{ik} \, p'_{lm} = 0$$

$$\Sigma q_{lm} \, p'_{lm} = 0,$$

onde si deduce

$$p_{ik} \equiv q_{lm} .$$

Le cose dette si estendono facilmente alle coordinate degli S_r negli S_n. Ci limiteremo per semplicità, al caso delle rette e dei loro spazi duali S_{n-2}, rimandando per una esposizione più generale dell'argomento al trattato di E. Bertini: « Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi », Pisa, Spoerri, 1907 (Cap. 2°, §§ 14-17).

La retta congiungente due punti $A = (a_0 \, a_1 \ldots a_n)$, $B = (b_0 b_1 \ldots b_n)$ verrà determinata mediante i minori estratti dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \ldots a_n \\ b_0 & b_1 \ldots b_n \end{Vmatrix},$$

cioè dai mutui rapporti delle $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = -p_{ki}$, i quali dipendono dalla retta e non dalla scelta dei punti A, B sopra di essa. Le p_{ki} essenzialmente distinte sono $\frac{n(n+1)}{2}$, ma fra di esse intercedono le relazioni quadratiche trinomie

2) $$P_{iklm} = p_{ml} p_{ki} + p_{mk} p_{il} + p_{mi} p_{lk} = 0$$

che si ottengono annullando il determinante

$$\begin{vmatrix} a_m & a_l & a_k & a_i \\ b_m & b_l & b_k & b_i \\ a_m & a_l & a_k & a_i \\ b_m & b_l & b_k & b_i \end{vmatrix},$$

sviluppato per i minori estratti dalla matrice delle prime due linee.

Le relazioni 2) permettono di determinare tutte le p_{ik} in funzione di $2n-1$ di esse, per esempio delle

$$p_{01},\ p_{02}, \dots p_{0n}\, p_{12} \dots p_{1n}$$

dove si suppone $p_{01} \neq 0$. Si costruisce quindi, come per $n=3$, una retta determinata che corrisponde ai mutui rapporti delle *coordinate omogenee* p_{ik}.

In modo duale un S_{n-2} si può determinare in S_n come intersezione di due iperpiani $u_x=0$, $v_x=0$, e quindi per mezzo delle coordinate omogenee

$$q_{ik} = u_i v_k - u_k v_i,$$

che sono i minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0 & u_1 \dots u_n \\ v_0 & v_1 \dots v_n \end{vmatrix};$$

queste q_{ik} risultano legate da relazioni quadratiche trinomie simili alle 2):

$$Q_{iklm} = q_{ml} q_{ki} + q_{mk} q_{il} + q_{mi} q_{lk} = 0.$$

La condizione di incidenza di una retta e di un S_{n-2} viene espressa dalla equazione bilineare

$$\Sigma p_{ik} q_{ik} = 0,$$

come si deduce con lo stesso ragionamento svolto per $n=3$.

Le coordinate di una retta si possono anche introdurre considerando questa come intersezione di $n-1$ iperpiani indipendenti

$$u_x^{(1)} = 0, \dots u_x^{(n-1)} = 0:$$

si presentano allora come coordinate i minori d'ordine $n-1$ estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & \dots u_n^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_0^{(n-1)} & u_1^{(n-1)} & \dots u_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

e dualmente si dica per le coordinate di un S_{n-2}.

Ma, come per il caso $n=3$, si riconosce che le nuove coordinate risultano proporzionali alle precedenti.

In questa introduzione non spingeremo più avanti lo sviluppo della Geometria proiettiva iperspaziale, alla quale ci occorrerà di ritornare nel seguito. Osserveremo soltanto che — una volta compreso lo spirito della generalizzazione — alcune proprietà, stabilite per la ordinaria geometria del piano e dello spazio, si trasporteranno immediatamente agli spazi a più dimensioni, e in tal caso potranno senz'altro ritenersi note. In altre questioni accade invece d'incontrare difficoltà essenziali e novità inaspettate, che esigono un esame particolarmente approfondito.

Notizia storica. Il linguaggio della Geometria a più dimensioni si trova incidentalmente usato dai matematici con scopi diversi, p. es. LAGRANGE (1) assimila la Meccanica alla Geometria di uno spazio a quattro dimensioni. Ma il concetto di varietà ad un numero qualunque di dimensioni, come oggetto di trattazione matematica, viene svolto da A. CAYLEY nel 1843 (2) — secondo un punto di vista esclusivamente analitico — e poi da H. GRASSMANN (3) (1844) e da B. RIEMANN (4) (1866), i quali intendono così di costruire una estensione dell'ordinario continuo geometrico, di cui il filosofo HERBART aveva veduto la possibilità.

Già con GRASSMANN appare in tutta la sua generalità il pensiero della Geometria astratta, posto a fondamento di siffatta estensione.

RIEMANN sviluppa una definizione genetica ricorrente delle varietà ad n dimensioni, il concetto delle quali darà luogo a spiegazioni e considerazioni critiche nel cap. III.

Lo studio della Geometria a più dimensioni può essere svolto estendendo l'insieme delle ordinarie nozioni metriche oppure delle proiettive. Le ricerche di RIEMANN mirano all'estensione delle proprietà metriche (o metrico-differenziali) inerenti alla così detta Geometria sopra le superficie, e pongono i fondamenti della teoria delle *varietà a curvatura costante*. Ma un'estensione di carattere più elementare e

(1) « Théorie des fonctions analytiques ». Parigi, anno V, pag. 223. Oeuvres 9, pag. 337.

(2) Cambridge math. Journal 4 (1843/5) pag. 119; Papers 1, pag. 55.

(3) « Die lineale Ausdehnungslehre ». Lipsia 1884. Prefazione p. IX-X.

(4) « Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen ». Habilitationschrift, Gottinga 1854. (Abh. Ges. Gött. 13 (1866-67) trad. franc. L. Laugel. Parigi, 1898).

immediato della Geometria metrica ordinaria, è data da C. JORDAN (1) (1875) e per la più generale metrica non euclidea da E. D'OVIDIO (2) (1876-77); quest'ultimo fa uso anche della dualità e della proiettività fra spazi S_n.

Per la teoria delle equazioni algebriche, ha maggiore importanza la considerazione degli S_n in senso proiettivo, che appunto abbiamo introdotta nelle pagine precedenti. Qui sono da citare specialmente CAYLEY: (3), HALPHEN (4), CLIFFORD (5); ma conviene aggiungere che in numerosi lavori di SALMON, NÖTHER, CLEBSCH ecc. si cerca spesso negl'iperspazî una immagine della teoria degli enti algebrici, e che similmente immagini iperspaziali ricorrono nei lavori di KLEIN, LIE ecc.

In una memoria di CAYLEY (6) s'incontra anche il primo esempio di applicazioni della Geometria degli iperspazi seguendo il *metodo delle proiezioni*, che diviene poi oggetto di trattazione sistematica in G. VERONESE « Behandlung der proiectivischen Verhältnisse.... » (Mathem. Annalen t. 19 — 1881).

Il VERONESE ha anche assegnato la definizione genetica degli spazi S_n con proiezioni successive e più tardi ha analizzato i postulati che stanno a base della Geometria iperspaziale (7); i quali — per quanto concerne la Geometria proiettiva — sono stati pure investigati da AMODEO e FANO (8). In sostanza i postulati che servono a definire lo S_n proiettivo come varietà di « *punti* », richiedono:

1) l'esistenza di *una* sotto-varietà « la *retta* » che contiene due punti arbitrari;

2) che, dati tre punti A, B, C, non in linea retta, la retta proiettante da A un punto della BC e la retta proiet-

(1) « Essai sur la Géometrie à n dimensions ». Bulletin de la Société Math. de France, t. III (1875).

(2) « Le relazioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni ... ». Memorie dell'Acc. dei Lincei, 1876-77.

(3) « On the Curves wich satisfy given Conditions ». « A Memoir on Abstract Geometry ». (Phil. Transactions, 1867-69).

(4) « Recherches de Géometrie à n dimensions ». (Bullettin de la Société math., 1873).

(5) « On the Classification of Loci ». (Phil. Transactions, 1878).

(6) « Sur quelques Théorèmes de la géométrie de position ». Crelle, t. 31.

(7) « Fondamenti di Geometria a più dimensioni.... ». Padova, 1891.

(8) F. AMODEO: Atti dell'Acc. di Torino, t. 26 (1890-91). — G. FANO: « Giornale di Matematiche », t. 30 (1892).

tante da B un punto della AC abbiano un punto comune (*postulato del piano* sotto la forma di PIERI);

3) che lo S_n venga esaurito con n proiezioni successive;

4) un postulato che permetta l'introduzione delle coordinate proiettive sulla retta ([1]).

Accanto ai lavori del VERONESE, la scuola italiana deve menzionare specialmente quelli di C. SEGRE (contenuti nelle memorie e negli Atti dell'Accademia di Torino, a datare dal 1884), dove l'applicazione degli iperspazi è svolta soprattutto nel senso della Geometria astratta. In fine ricorderemo il già citato libro di E. BERTINI, dove potrà trovarsi una esposizione generale dei più recenti resultati conseguiti in Italia sulla Geometria proiettiva degli iperspazi.

Il concetto delle coordinate degli spazi lineari di un S_n è contenuto nell'« Ausdehnungslehre » di GRASSMANN (1844), ma non fu avvertito dai geometri che, a cagione della astrattezza e del simbolismo, furono distolti dalla lettura di quel libro pur ricco di idee feconde ed originali. Indipendentemente da GRASSMANN le coordinate p_{ik} delle rette di S_3, legate da una relazione quadratica, sono state quindi introdotte da CAYLEY ([2]) e da PLÜCKER ([3]). KLEIN ([4]) ha avuto l'idea di sviluppare la Geometria dello spazio rigato riguardando questa forma come una quadrica dello spazio lineare S_5. L'estensione che concerne le coordinate degli spazi lineari contenuti in un S_n è stata accennata da CLEBSCH ([5]) e da JORDAN (*l. c.* 1875); ma la determinazione del grado e della forma delle relazioni (quadratiche) fra tali coordinate appartiene al D'OVIDIO ([6]); l'argomento è stato poi ripreso e trattato in modo più geometrico dal VERONESE (*l. c.*).

La considerazione degli iperspazî fa sorgere la questione

([1]) Cfr. F. ENRIQUES: Rendic. Istituto Lombardo (2) 27 (1894), e varie memorie di M. PIERI dal 1894 al 1898 nei volumi dell'Accademia di Torino e dell'Istituto Lombardo.

([2]) Quartely Journal 3 (1860), Papers IV (pag. 446).

([3]) Philos. Trans. 155 (1865). « Neue Geometrie des Raumes ». Lipsia, 1868-69.

([4]) « Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie ». (Math. Ann. Bd 5-1892).

([5]) « Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie ». Abhand. der K. Gesell. der Wisseschaften zu Göttingen. Bd. 17 (1872) § 2.

([6]) « Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari ». Atti dell'Acc. di Torino, t. 12 (1876-77).

metafisica circa la possibilità di un ordine reale a più di tre dimensioni [1]. È appena necessario avvertire che lo sviluppo della Geometria iperspaziale come teoria matematica è affatto indipendente da tale problema. Ciò riesce chiaro senz'altro se ci si riferisce al senso astratto o alla traduzione analitica della Geometria. Nondimeno si è sempre autorizzati a figurarsi i punti, le rette, i piani e gli spazî S_3, contenuti in un S_n, secondo l'ordinaria intuizione di tali enti, così come fa il VERONESE, e quindi a formarsi una specie di *intuizione delle figure iperspaziali* che è sintesi d'intuizioni parziali collegate in un nesso logico. La deduzione di proprietà della Geometria dello spazio S_3 mediante proiezioni da spazi superiori, fa appello direttamente a questo modo di rappresentazione.

Ora a siffatto procedimento si può obiettare che « l'essere contenuto in un S_n con $n > 3$ potrebbe eventualmente costituire un postulato limitativo per lo S_3 ». Ma quando si ricorre alla traduzione analitica del ragionamento — che è resa possibile dai postulati dello S_3 — un tal dubbio viene eliminato, perchè alle variabili x_0, x_1, x_2, x_3, si possono sempre aggiungere altre variabili $x_4, \ldots x_n$ [2].

---

[1] Cfr. p. es. CLIFFORD « Il senso comune nelle Scienze esatte » trad. it., Milano, Dumolard, 1886, e — in connessione colle più recenti teorie elettro-magnetiche — gli sviluppi sullo spazio-tempo di MINKOWSKI.

[2] Cfr. SEGRE « Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche » (Rivista di Matematica, 1901).

CAPITOLO III

Nota sul significato dell' espressione " in generale ,, e sui computi di costanti.

20. **Prefazione.** — Abbiamo veduto (nei §§ 8, 14) che l'equazione algebrica $f(xy)=0$, presa come equazione d'una curva, ha *in generale* il grado complessivo uguale ai gradi separati rispetto ad x, y. Invece la $f(xy)=0$, concepita come equazione d'una corrispondenza fra rette, ha *in generale* gradi separati diversi rispetto ad x, y, essendo il grado complessivo di f eguale alla somma di codesti gradi separati.

Quindi un'equazione come la

$$f(xy)=a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}=0$$
$$(a_{20}a_{02}\neq 0),$$

che dal primo punto di vista è *generale*, appare invece *particolare* (o *eccezionale*) dal secondo punto di vista, perchè rientra nella classe di equazioni

$$Ax^2y^2+Bx^2y+Cxy^2+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}=0$$

per

$$A=B=C=0,$$

e reciprocamente.

Ne segue che la qualifica di « generale » applicata ad un'equazione $f(xy)=0$ non ha senso finchè non si dichiari sotto quale aspetto si voglia considerare la f, assegnando la *classe* (di curve o corrispondenze con dati caratteri) di cui vuolsi considerare come elemento.

Questa osservazione urta l'opinione comunemente ricevuta che attribuisce inconsapevolmente un senso assoluto alla generalità o eccezionalità di un ente, cioè costituisce un *paradosso* che deve essere chiarito. Il chiarimento deriva da un ordine d'idee fondamentale per lo sviluppo delle Matematiche moderne, che non ha del resto una speciale connessione cogli enti algebrici, ma porta — anche in questo campo — larghe applicazioni.

Connesso a quest'ordine d'idee è il principio comunemente noto sotto il nome di *computo di costanti*, che — usato da PLÜCKER e da CLEBSCH come criterio di compatibilità d'un sistema di equazioni — acquista un posto cospicuo nello sviluppo della teoria geometrica delle equazioni.

In ragione della sua importanza, conviene esaminare rigorosamente le difficoltà a cui codesto principio dà luogo, segnalando le garanzie della sua corretta applicazione, le quali vengono lumeggiate da curiosi paradossi e da errori storici.

Forse nessun altro capitolo della scienza può, meglio di questo, illustrare la veduta filosofica che la storia dell'errore è parte essenziale della storia della verità!

21. **I paradossi dell'infinito.** — Cominciamo da alcune semplici osservazioni, sulle classi finite e sulle successioni numerabili, che si possono riattaccare ad un celebre paradosso.

Sia data una *classe* costituita da un numero finito di oggetti (*elementi*) $a_1, \ldots a_n$:

$$(a) = (a_1, \ldots a_n).$$

Nel linguaggio comune si dice che una proprietà A appartiene *in generale* agli elementi di (a) se il numero m degli a cui non spetta la proprietà A è *assai più piccolo* del numero $(n - m)$ degli a cui tale proprietà appartiene, ossia se $\frac{m}{n}$ è *assai piccolo.*

Codesta locuzione non ha un significato matematico preciso. Si può conferirglielo convenendo di riguardare n assai più grande di m, quando il rapporto $\frac{m}{n}$ resta inferiore a un dato limite $\varphi(n) < \frac{1}{2}$.

Suppongasi in particolare che si abbia una successione di classi, (a_n), proseguibile indefinitamente ed in cui il numero degli elementi vada crescendo; p. es. la successione delle classi

$$(a_n) = (a_{n,1}\, a_{n,2} \ldots a_{n,n}),$$

per

$$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots .$$

Si dirà che gli *elementi* della *classe* n$^{\text{ma}}$ *della successione* posseggono *in generale* una certa proprietà A, se — designando con m_n il numero degli a_n cui non spetta tale proprietà — si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{n} = 0.$$

E, se ciò accade, si dirà anche — brevemente — che *gli elementi della successione*

$$S = a_{11} a_{21} a_{22} \ldots. a_{n1} \ldots. a_{nn} \ldots.$$

posseggono *in generale* la proprietà A, o che gli elementi che non la posseggono sono *eccezionali* nella successione S.

Infatti la circostanza che sia

$$\lim \frac{m_n}{n} = 0,$$

si avvererà per qualsiasi partizione in classi degli elementi della successione data, purchè le classi di $n = 1, 2, 3, \ldots.$ elementi successivamente costruite, vengano formate con elementi successivi rispetto all'ordine di S.

Esempio. Nella successione dei numeri interi

$$S = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots.,$$

i *quadrati perfetti* sono *eccezionali,* i numeri della successione sono *in generale non quadrati.*

Infatti due quadrati successivi

$$p^2, \quad (p+1)^2,$$

differiscono fra loro per $2p + 1$; e però se gli elementi di S vengono partiti in classi C_n, formate successivamente con numeri interi crescenti, e dove n va crescendo, accade che ad ogni C_n apparterrà un numero m_n di quadrati tale che

$$\lim \frac{m_n}{n} = 0.$$

Ora rileviamo che:

Se gli elementi di una successione S *posseggono in generale una certa proprietà* A, *il significato di questo fatto è essen-*

zialmente relativo all'ordine della successione; prendendo gli stessi elementi della classe S *in un altro ordine, si può dare origine ad una successione* Σ *i cui elementi non posseggano in generale la suddetta proprietà* A.

Consideriamo la successione dei numeri interi

$$S = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots.,$$

e separiamo i quadrati e i non quadrati, formando le due successioni:

$$S' = 1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots.$$

$$S'' = 2,\ 3,\ 5,\ \ 7,\ 8,\ 10, \ldots.;$$

formiamo quindi la successione

$$\Sigma = 2,\ 1;\quad 3,\ 4,\ 9;\quad 5,\ 16,\ 25,\ 36; \ldots.,$$

nella quale appare evidente una partizione in classi C_n, composte successivamente di $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots.$ elementi.

Nella classe C_n figura lo n^{mo} termine della successione S'' ed $n - 1$ quadrati (elementi di S'). La proporzione dei non quadrati agli elementi di C_n è dunque espressa dal rapporto $\frac{1}{n}$ che, per $n = \infty$, ha per limite zero.

La successione Σ comprende nel suo insieme tutti i numeri interi (elementi di S) ma in essa i quadrati sono il caso generale, i non quadrati l'eccezione!

Il fatto così messo in luce è inaspettato e prende l'aspetto d'un paradosso; infatti una vaga nozione comune ci farebbe dire che « nella classe dei numeri interi, il numero dei quadrati è minore del numero dei non quadrati » mentre la costruzione precedente ci fa apparire rovesciabile questa affermazione.

Dobbiamo dunque esaminare la proposizione surriferita e chiederci se, ed in qual senso, si abbia diritto di parlare del numero degli oggetti d'una classe infinita e di dire che questo debba esser *maggiore* di quello d'una sua parte, in un senso che esclude l'*uguaglianza*.

A tale scopo giova ricordare che il concetto del *numero naturale*, nel suo significato *cardinale*, nasce, per astrazione, dal confronto di *classi* (finite) *equivalenti*

$$(a_1 a_2, \ldots a_n),\quad (b_1 b_2 \ldots b_n); \ldots.$$

cioè tali che possa stabilirsi una *corrispondenza biunivoca* fra i loro elementi [1].

Ora vale per le classi finite la seguente induzione dell'esperienza (*postulato*): « Una classe $(a_1 .... a_n)$ non può essere equivalente ad una sua parte ». In modo ricorrente, da n ad $n+1$, questo principio si stabilisce per tutte le classi finite. Ma non può estendersi (con induzione infinità) per $n = \infty$, poichè è vietato alla nostra mente di compiere infiniti atti, e i ragionamenti (*trascendenti*) che contravvengono a tale divieto risultano fondamentalmente viziati. Così accade precisamente che una *classe infinita*

$$a_1, a_2, ... a_n, ...$$

è equivalente ad una sua parte.

Già GALILEO [2] fa rilevare il paradosso che la serie dei numeri naturali

$$1, 2, 3, ... n, ...$$

è equivalente a quella dei quadrati

$$1, 2^2, 3^2, ... n^2, ...,$$

poichè ad n si può associare univocamente n^2, e al termine n^2 della seconda serie il termine n della prima. CAUCHY e BOLZANO sviluppano il medesimo paradosso ed altri simili; p. es. la serie dei numeri interi

$$1, 2, 3, ... n, ...$$

è equivalente alla serie dei numeri pari

$$2, 4, 6, ... 2n, ...,$$

o alla serie dei numeri successivi ad 1:

$$2, 3, 4, ... n' = n + 1, ...$$

Per mezzo di queste osservazioni si chiarisce che, ove si voglia parlare di un numero cardinale infinito corrispondente

(1) Cfr. l'Art. di F. ENRIQUES « I numeri reali » nei Collectanea « Questioni riguardanti le Matematiche elementari ». Vol. I, Bologna, Zanichelli, 1912.

(2) « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze ». Dialogo 1°.

alla classe 1, 2,.... n,...., non è possibile ritenere questo numero come « propriamente maggiore », cioè maggiore e diseguale, rispetto a quello corrispondente ad una sua parte infinita, quale è p. es. la serie dei quadrati. Quindi non deve più meravigliarci che, a seconda dell' ordinamento della serie data, i non quadrati o i quadrati possano apparire in esso più frequenti.

22. **Potenza d' un insieme secondo Cantor.** — I paradossi dell' infinito, riferiti nel paragrafo precedente, hanno dato origine alla teoria generale degl' insiemi, di GIORGIO CANTOR, e in ispecie al concetto di *potenza*.

CANTOR ha avuto il merito di rilevare che i paradossi precedenti non significano l' impossibilità di confrontare classi o insiemi infiniti e di ragionare sulla loro equivalenza; essi implicano non già che il concetto di questa equivalenza sia assurdo, ma che *cade per le classi infinite il postulato che una classe non può essere equivalente ad una sua parte.* In altre parole la *prevalenza* di due classi non esclude la loro equivalenza.

Ora classi equivalenti si dicono avere *ugual potenza*, e la potenza — così definita per astrazione — si riduce al numero cardinale ordinario per le classi finite e porge una estensione di questo concetto.

È lecito dire che la potenza d' un insieme infinito è un *numero cardinale infinito*, ma ai numeri infiniti siffatti non si applicheranno le regole valide pei numeri ordinarî (finiti); non si potrà eseguire su di essi gli ordinarî calcoli, nè confondere i numeri infiniti cardinali coi numeri infiniti che nascono per estensione dei numeri *ordinali* (*transfiniti* di CANTOR), perchè l' identificazione dei numeri cardinali cogli ordinali cessa di valere al di là degl' insiemi finiti.

Nonostante queste difficoltà, la considerazione delle potenze di CANTOR conduce a qualche resultato positivo, che qui vogliamo richiamare [1].

Def. Ogni insieme che ha la potenza della serie dei numeri naturali 1, 2,.... n,.... dicesi *numerabile*.

[1] Per le dimostrazioni cfr. p. es. l' esposizione di questa teoria contenuta nell' Art. citato di ENRIQUES su « I numeri reali ».

Teor. I. L'insieme di tutti i numeri razionali (frazioni) è numerabile.

II. La retta, presa come insieme dei suoi punti, ha la stessa potenza di un segmento. E così il piano ha ugual potenza di un quadrato ecc.

III. Il segmento, cioè l'insieme dei numeri reali compresi in un certo intervallo, *non* è numerabile; la sua potenza è *propriamente maggiore* di quella d'un insieme numerabile contenuto in esso.

IV. Il segmento, o la retta (x), ha uguale potenza di un quadrato o di un cubo ecc. o di una *varietà ad* n *dimensioni* $(\mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots . \mathrm{x}_\mathrm{n})$.

Fermiamoci un momento sopra un esempio relativo all'ultimo teorema. Essendo dato un quadrato $ABCD$ entro cui abbiasi da scegliere un punto P, il caso che P non appartenga alla diagonale o ad un'altra linea AC, si ritiene come *generale* rispetto a quello in cui P stia su AC; e quest'ultimo caso (*eccezionale*) appare dotato di una *probabilità infinitesima* rispetto al primo. L'intuizione che si traduce con questo linguaggio non è già — come si potrebbe credere — che la potenza del segmento (o della linea) AC sia propriamente minore di quella del quadrato, poichè — come è detto sopra — i due insiemi hanno ugual potenza. La *eccezionalità* dei punti della diagonale (o della linea) entro il quadrato, ha un *significato relativo all'ordine doppio* in cui sono disposti i punti del quadrato (*varietà a due dimensioni*). Essa significa dunque che se si pensano i punti del quadrato in una *disposizione reticolare*, p. es. mediante le parallele ai lati AB, BC, « *sopra ogni linea del reticolo* l'insieme dei punti eccezionali (appartenenti alla linea AC) ha una *potenza* propriamente *minore* dell'insieme dei rimanenti punti ».

Qui conviene citare il *Teorema di* NETTO. Gli elementi di una classe o varietà V, sieno posti in corrispondenza biunivoca coi gruppi di n numeri reali (*coordinate*) $x_1, x_2, \ldots . x_n$, entro un campo continuo (determinato p. es. da n intervalli finiti di variazione per le x_i), e gli stessi elementi di V sieno poi fatti corrispondere ai gruppi di m numeri $y_1, y_2, \ldots . y_m$, in un certo campo, sicchè risulti fra le x e le y una corrispondenza biunivoca

$$1) \qquad \begin{cases} y_i = f_i(x_1 \ldots . x_n) & (i = 1, \ldots . m) \\ x_r = \varphi_r(y_1 \ldots . y_m) & (r = 1, \ldots . n); \end{cases}$$

se questa *corrispondenza biunivoca* è *continua* (cioè se le f e φ sono funzioni continue) si ha necessariamente

$$n = m.$$

In altre parole, il numero n che esprime le *dimensioni* della varietà V risulta definito, non già in rapporto alla potenza dell'insieme V, ma in rapporto ad un *criterio ordinale*, che corrisponde ad un *sistema di coordinate* x ed ugualmente a tutti i possibili sistemi di coordinate che se ne deducono con una *trasformazione continua* 1).

Noi non riferiremo qui la dimostrazione del teorema di NETTO, che è alquanto delicata quando si voglia stabilirla rispetto a funzioni f e φ soddisfacenti soltanto alla condizione della continuità. Osserveremo soltanto che nel caso di funzioni *derivabili*, e meglio ancora nel caso di *funzioni analitiche* cioè sviluppabili in serie di potenze, la dimostrazione si dedurrebbe agevolmente dai noti teoremi d'inversione del Calcolo.

Il caso, che a noi interessa nel seguito, delle varietà algebriche, rientra appunto qui come caso particolare, ma può anche trattarsi in modo diretto. Su questo caso soltanto fermeremo un poco la nostra attenzione.

23. Varietà algebriche: dimensioni, elementi generici. — Si abbia un insieme (sistema, varietà) di enti geometrici v (curve, corrispondenze, superficie ecc.) algebricamente definiti in guisa da comportare una certa arbitrarietà. Ogni v si suppone suscettibile di *variazione continua* in funzione di certi elementi geometrici (p. es. di punti), e l'insieme degli elementi v si suppone essere una *varietà continua* V, tale cioè che si possa passare per variazione continua da un « *elemento* » v di V a un altro qualsiasi. In tutti i casi in cui v riesca determinato per mezzo di un numero finito di parametri (ipotesi che sta a fondamento delle seguenti considerazioni), v si può riguardare astrattamente come un « punto » di uno spazio S_r ad r dimensioni, e la definizione di V si riduce a quella delle *varietà algebriche* di punti in S_r. Esponiamo questa definizione cominciando dal caso più semplice.

Nello spazio S_{n+1}, dove si assumono come coordinate non omogenee $x_1, \ldots. x_n$, x_{n+1} (ovvero coordinate omogenee

$x_0, x_1, \ldots x^{n+1})$, l'equazione algebrica

$$f(x_1 \ldots x_n x_{n+1}) = 0$$

rappresenta una *varietà algebrica ad* n *dimensioni* o ∞^n (ipersuperficie di S_{n+1}); questa varietà si dice ***riducibile*** se f si spezza nel prodotto di due polinomi f_1 e f_2, ***irriducibile*** nel caso opposto.

Osservazione. Nella precedente definizione le dimensioni della $f=0$ sono valutate facendo corrispondere *una* dimensione ad una variabile *complessa*, sicchè la stessa varietà $f=0$ si dovrà considerare come un *continuo a* 2n *dimensioni* dal punto di vista della sua *rappresentazione reale*, ove figurano come parametri le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie delle $x_1, \ldots x_n$.

Il giudizio sulla irreducibilità della varietà f si riconduce a quello relativo ad una curva algebrica, grazie al seguente

Lemma. La *varietà*

$$f(x_1 \ldots x_{n+1}) = 0$$

è *riducibile* o *irreducibile secondochè* è *tale* la *curva sezione piana* di essa con un piano generico di S_{n+1}.

È chiaro anzitutto che una f riducibile dà luogo a curve sezioni riducibili sopra ogni piano che non appartenga ad f. La proprietà inversa si dimostra con un semplice ragionamento che esponiamo in breve riferendoci al caso della superficie di S_3, $(n=2)$. Supponiamo che la sezione della superficie $f=0$ con un piano generico si spezzi in due (o più) curve distinte $C_1, C_2, \ldots$, e consideriamo — in questo piano — una retta r, non appartenente alla superficie, che incontri C_1 e C_2 in punti diversi; allora facendo rotare il piano attorno ad r, la curva sezione di f si comporrà di curve variabili C_1 e C_2 incontranti r in gruppi di punti fissi distinti; per tal modo le due curve variabili suddette si possono separare razionalmente per tutti i valori del parametro da cui dipende il piano per r: si deduce che le suddette curve descrivono superficie $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ razionalmente distinte, facenti parte di f. Resta ancora a considerare il caso in cui la sezione piana di $f=0$ sia una curva multipla; ma se ciò avviene p. es. per tutti i piani $z = \text{cost}$, si deduce che tutti i punti di $f=0$ sono multipli e soddisfano alle equazioni $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$: la nota teoria della divisione dei polinomi c'insegna allora che $f(x_1 x_2 x_3)$ è riducibile (e si riduce ad una potenza di un polinomio primo).

Il lemma stabilito chiarisce il concetto delle varietà

$$f(x_1 \dots x_n x_{n+1}) = 0$$

irreducibili.

L'equazione

$$f(x_1, \dots x_n x_{n+1}) = 0,$$

contenga x_{n+1} ad un certo grado d; si può supporre $d > 0$ ove si escludano posizioni particolari degli assi coordinati, ed anzi (mercè un eventuale cambiamento di coordinate) si può supporre che d sia uguale al grado complessivo di f rispetto alle x_i: ciò equivale ad escludere che si stacchi da $f = 0$ un *cilindro* parallelo all'asse x_{n+1}, che è rappresentato da un'equazione $\varphi(x_1 \dots x_n) = 0$.

Ciò posto, la $f = 0$ definisce x_{n+1} come *funzione algebrica* a d valori delle n variabili $x_1 \dots x_n$, che possono ritenersi — in questo senso — come *coordinate algebriche*, determinanti gruppi di d punti della varietà f. Se ad $x_1, \dots x_{n-1}$ si danno valori costanti generici, x_{n+1} diventa funzione algebrica a d valori di x_n; questa funzione sarà riducibile quando sia riducibile la varietà f; viceversa se la detta funzione è riducibile, la f potrà essere irriducibile (come avviene p. es. per la superficie

$$f = (x + y)^2 - z = (x + y - \sqrt{z})(x + y + \sqrt{z}) = 0),$$

ma soltanto nel caso che i piani coordinati

$$x_1 = \text{cost}, \dots x_{n-1} = \text{cost}$$

abbiano una posizione particolare rispetto ad f: con un cambiamento di coordinate si può sempre escludere codesta relazione particolare degli assi alla varietà; allora, se la varietà è irreducibile, la *funzione algebrica* x_{n+1} risulta funzione algebrica *irreducibile rispetto alle* n *variabili* $x_1, \dots x_n$ *separatamente*. Se si tengono ferme $n - 1$ fra le suddette variabili, e si fa percorrere un cammino continuo chiuso alla rimanente x_i nel suo piano complesso, i d punti della varietà f che corrispondono alle coordinate algebriche $x_1, \dots x_n$ possono venire scambiati fra loro, ed in tal guisa (per un conveniente cammino) uno di essi può essere portato in uno qualsiasi dei rimanenti $d-1$; la possibilità di questo scambio mette in evidenza che non esiste nessun criterio algebrico atto a distinguere i d punti corrispondenti alle stesse coordinate $x_1, \dots x_n$.

La definizione delle varietà algebriche ad n dimensioni si estende al caso di varietà contenute in uno spazio $S_r(x_1 \dots x_r)$ (1) con $r > n+1$ dimensioni: dicesi *varietà algebrica ad* n *dimensioni*, V_n, *in* S_r, il luogo dei punti le cui *coordinate* sono *funzioni razionali di* n *variabili indipendenti* e *di una funzione algebrica di esse*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1 \dots y_n y_{n+1}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r = \varphi_r(y_1 \dots y_n y_{n+1}), \\ f(y_1 \dots y_n y_{n+1}) = 0, \end{cases}$$

per modo che — invertendo — le $y_1, \dots y_{n+1}$ risultino funzioni razionali dei punti x_i di V_n.

La varietà V_n è riducibile o irriducibile come la f; in particolare sono certo irriducibili le V_n *razionali* (caso in cui $x_1, \dots x_r$ sono funzioni razionali di n variabili indipendenti $y_1, \dots y_n$, la $f=0$ riducendosi ad $y_{n+1} = \text{cost.}$).

Una varietà V_n (la quale sega gli S_{r-n} di S_n non giacenti su di essa, in un numero finito di punti) viene *proiettata* semplicemente da un S_{r-n-2} non avente particolari relazioni con V_n, secondo gli S_{r-n-1} generatori di una varietà (cono di specie $r-n-1$) ad $r-1$ dimensioni; la nota teoria dell'eliminazione permette di formare razionalmente l'equazione di codesto cono, in funzione dei coefficienti delle φ; a sua volta le coordinate dei punti di V_n risultano funzioni razionali dei punti della varietà ad n dimensioni, sezione del detto cono proiettante con un S_{n+1} generico. E poichè — per una scelta conveniente del sistema di coordinate — si può sempre supporre che tale sia lo S_{n+1}:

$$x_{n+2} = \dots = x_r = 0,$$

si deduce che una *varietà ad* n *dimensioni* di S_r è *definita*,

(1) Cfr. la definizione delle curve gobbe in Enriques « G. Descrittiva ». Parte II, § 21.

rispetto ad assi coordinati generici, *ponendo* $x_{n+2}, \dots x_r$ *funzioni razionali di* $x_1, \dots x_{n+1}$ legate da un' equazione algebrica: le $x_1, \dots x_n$ possono ritenersi *coordinate algebriche* corrispondenti a *gruppi di* d (>0), *punti di* V, i quali sono *non separabili* razionalmente se V è *irriducibile.*

Alla definizione delle varietà algebriche V_n ad n dimensioni in S_r, $(r > n + 1)$, si arriva anche in base alla considerazione dei sistemi generali di equazioni in $x_1, \dots x_r$ (¹); una V_n si può definire come intersezione di $s \geq r - n$ ipersuperficie di S_r. Qui occorre dimostrare che: l' *intersezione di un sistema d' ipersuperficie* (aventi punti comuni),

$$f_i(x_1 \dots x_r) = 0, \qquad (i = 1, \dots n),$$

è *costituita* di un numero finito di *varietà algebriche*, nel senso definito innanzi, ed eventualmente anche da un numero finito di *punti* che — per estensione — si riterranno costituire varietà a zero *dimensioni.*

Si può svolgere questa dimostrazione notando anzitutto che l' intersezione predetta si lascia separare in parti, ciascuna delle quali incontra in un numero finito di punti uno spazio generico S_{t-n} per un certo valore di n; una tale V_r viene proiettata da un S_{r-n-2} generico secondo un cono, la cui equazione può formarsi razionalmente in funzione dei coefficienti delle f_i (teoria dell' eliminazione), e costituisce quindi una varietà ad n dimensioni i cui punti sono funzioni razionali di quelli dell' ipersuperficie sezione del nominato cono con un S_{n+1}.

Giova avvertire espressamente che l' intersezione di più ipersuperficie può comporsi di varietà con dimensioni diverse; p. es.: tre superficie di second' ordine passanti per una conica di S_3 han comune la conica (varietà a *una* dimensione) e due punti (varietà a zero dimensioni); tre ipersuperficie di S_4 passanti per una superficie di second' ordine si segano in questa superficie e in una conica ecc.

La nozione della dimensione n *d' una varietà algebrica deve ritenersi definita per le varietà irreducibili e per le varietà composte di parti irreducibili di ugual dimensione* n; non si può parlare della dimensione per l' intersezione di più iper-

(¹) Cfr. p. es. BERTINI, « Introduzione.... ». Cap. 9°.

superficie di S_r quando questa risulti composta di varietà di diversa dimensione, a meno che non si convenga di trascurare le parti di dimensione inferiore.

La nozione di « punto » o « elemento » *generico* di una varietà, cioè la distinzione fra proprietà spettanti *in generale* ai punti d'una varietà e proprietà che spettano solo a punti *eccezionali*, acquista ora un significato preciso per tutte le varietà algebriche.

Si dice che una proprietà spetta in generale ai punti d'una varietà V_n, ad n dimensioni, se i punti di V_n per cui essa non è soddisfatta formano — entro V_n — una varietà o un insieme di varietà a meno di n dimensioni.

Sopra una varietà V_n *irriducibile*, una proprietà che si traduca con una condizione algebrica a, verrà soddisfatta da *tutti* i punti V_n o soltanto da punti eccezionali di varietà V_s, con $s < n$ dimensioni; nel secondo caso la proprietà *negativa* (che consiste nel non soddisfare ad a) spetterà *in generale* al punto di V_n, salvo l'*eccezione* delle anzidette varietà V_s.

Il significato che così viene precisato delle parole « generale », « eccezionale », è del tutto conforme all'uso comune di tali parole che già è occorso talora innanzi per particolari varietà.

Ora la definizione della dimensione d'una varietà algebrica dà luogo ad una questione fondamentale: quando si scelgano diversi modi di determinazione mediante coordinate algebriche, uno stesso sistema di enti può apparire, una volta come una varietà algebrica ad n dimensioni dello S_r $(x_1 \ldots . x_r)$, ed una seconda volta come una varietà algebrica ad m dimensioni di un S_t

$$(y_1 \ldots . y_t) \qquad\qquad (r \geq n, \ t \geq m);$$

sorge allora la domanda se debba risultare necessariamente $n = m$.

La risposta affermativa a tale domanda può darsi indipendentemente dal teorema di NETTO (ricordato nel § 22) e costituisce il seguente

Teorema fondamentale sull'invarianza delle dimensioni. Si abbia fra due varietà algebriche irreducibili V_n, V_m, ad n, m dimensioni, una corrispondenza algebrica $[p, q]$ dove a un punto generico della V_n corrispondano $q (> 0)$ punti generici di V_m, e viceversa ad un punto generico di V_m corrispondano $p(>0)$ punti generici di V_n; l'*esistenza di una tale corrispondenza* [p, q] (p > 0, q > 0) *fra le* V_n, V_m, *porta che queste varietà abbiano le stesse dimensioni, cioè*

$$n = m.$$

Le V_n e V_m si supporranno date entro due spazi

$$(x_1 x_2 \ldots x_r), \quad (y_1 y_2 \ldots y_t)$$
$$(r \geq n, \ t \geq m),$$

escludendo che sia su V_n $x_i = \text{cost}$, e la corrispondenza $[p, q]$ sarà definita da equazioni del tipo $f_i(x_1 \ldots x_r, \ y_1 \ldots y_t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ fra le x, y. Pongasi per esempio che sia

$$n > m,$$

e facciamo vedere che tale ipotesi conduce ad un assurdo.

Scriviamo $x_1 = \text{cost}$. Questa equazione aggiunta alle $f_i = 0$ definisce entro V_n una varietà V_{n-1} ad $n-1$ dimensioni. Ai punti di V_{n-1} corrisponderanno punti eccezionali entro V_m, altrimenti ad un punto generico di V_m non corrisponderebbero punti generici di V_n, come si è supposto. Dunque alla V_{n-1} corrisponderà entro V_m una varietà algebrica V_{m-1} avente (al massimo) $m-1$ dimensioni. Questa V_{m-1} potrà essere irriducibile o riducibile, ed in quest'ultimo caso le si sostituirà una parte irriducibile.

Ciò posto applichiamo ripetutamente il procedimento precedente, ponendo

$$x_2 = \text{cost.}$$
$$x_3 = \text{cost.}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Arriveremo infine ad una corrispondenza fra una varietà V_h con $h \geq 1$ dimensioni e un gruppo V_o di un numero finito (>0) di punti entro V_m. Tale corrispondenza dovrebbe associare ad ognuno dei punti di V_o un numero finito di punti di V_h. Dunque V_h dovrebbe contenere un numero finito di punti; il che è assurdo, avendosi

$$h > 0.$$

24. Famiglie di enti algebrici dipendenti da numeri interi arbitrari. — Abbiamo veduto che l'espressione « in generale » assume un significato preciso per tutte le varietà algebriche ad un numero qualsiasi di dimensioni; ma ci sono famiglie di enti algebrici che non possono ritenersi come varietà (algebriche) ad un numero finito di dimensioni, nè comporsi con un numero finito di tali varietà; per queste famiglie la distinzione fra « generale » ed « eccezionale » non ha più significato, se non relativamente ad un modo speciale di classificazione degli enti che esse contengono. A siffatta circostanza tiene il paradosso da cui abbiamo preso le mosse (§ 18).

Si ha appunto un esempio delle anzidette famiglie considerando la totalità delle equazioni algebriche $f(xy)=0$ (curve piane o corrispondenze fra due rette); invero questi enti non formano una varietà algebrica a un numero finito di dimensioni, ma si lasciano ripartire in classi, come elementi di una serie di varietà le cui dimensioni vanno crescendo. Questa classificazione può essere fatta secondo diversi punti di vista. Se le $f(xy)=0$ sono concepite come curve, la *classificazione* dipende da *un numero intero arbitrario*, cioè dal grado complessivo della f che designa l'ordine della curva: abbiamo visto che le curve d'ordine n formano un sistema di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$.

Se invece la $f(xy)=0$ viene concepita come equazione di una « corrispondenza $[m, n]$ », la classificazione delle f dipende da *due numeri interi arbitrari*, cioè dai gradi separati m e n. Scrivendo

$$f(xy)=f_{m0}(x)y^n+f_{m1}(x)y^{n-1}+\ldots.+f_{mn}(x)=0,$$

si mette in evidenza che la $f(xy)$, dei gradi m, n, contiene

$$(n+1)(m+1)$$

coefficienti, quindi le *corrispondenze* $[m, n]$ fra due rette *formano una varietà* ad

$$mn+m+n$$

dimensioni.

Ora, entro il sistema delle curve piane d'ordine n, sono *eccezionali* quelle che hanno i punti all'infinito degli assi x, y

come multipli secondo r, s con

$$r + s = n;$$

infatti il loro sistema ha la dimensione del sistema delle corrispondenze $[r, s]$, cioè

$$rs + r + s,$$

mentre il sistema totale delle f_n ha la dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{(r+s)(r+s+3)}{2} = (rs + r + s) + \frac{r^2 + s^2 + r + s}{2}.$$

Parimente entro il sistema delle corrispondenze $[m, n]$ rappresentato dalle equazioni $f(xy) = 0$ di grado n separatamente rispetto ad x, y, sono *eccezionali* le corrispondenze in cui si corrispondono i punti all'infinito di x, y, contati n volte; infatti il loro sistema ha la dimensione del sistema delle curve piane d'ordine n, cioè

$$\frac{n(n+3)}{2} < n^2 + 2n.$$

Nondimeno ad ogni curva piana d'ordine n corrisponde univocamente una corrispondenza $[r, s]$ dove $r \leq n$, $s \leq n$; e ad ogni corrispondenza $[r, s]$ una curva piana d'ordine $n \leq r + s$. La totalità delle curve piane e la totalità delle corrispondenze algebriche tra forme di prima specie costituiscono famiglie equivalenti.

La cosa non ci parrà più strana se riflettiamo che (come si è accennato) codeste famiglie non dipendono più da un numero finito di parametri, ma debbono considerarsi come varietà ad *infinite dimensioni*. Il paradosso che tiene al doppio modo di classificazione degli enti di questa varietà concepiti come « curve » o « corrispondenze » riproduce in questo campo il paradosso che ha formato oggetto del § 20.

L'osservazione che precede mette in evidenza il valore relativo e convenzionale delle classificazioni nei problemi algebrici ove entrino in gioco classi continue dipendenti da interi arbitrari.

25. Computo di costanti. — Abbiansi due varietà algebriche irriducibili V_n, V_m, ad n, m dimensioni; i punti della prima verranno determinati mediante n coordinate algebriche $x_1, \dots x_n$, e i punti della seconda mediante m coordinate algebriche $y_1, \dots y_m$.

Le coppie costituite da un punto di V_n e da un punto di V_m sono gli elementi di una varietà V_{n+m}, ad $n+m$ dimensioni, corrispondendo alle $n+m$ coordinate algebriche $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_m$. Se le V_n, V_m sono definite, entro spazi a più che n, m, dimensioni, da due sistemi di equazioni $f_i(x_1 x_2 \dots) = 0$, $\varphi_h(y_1 y_2 \dots) = 0$, basta unire questi due sistemi per definire la V_{n+m} entro lo spazio $(x_1 x_2 \dots y_1 y_2 \dots)$. È facile riconoscere che la V_{n+m} delle coppie è irriducibile, tali essendo V_n e V_m; altrimenti risulterebbero riducibili le sezioni di V_{n+m} con gli spazi

$$\begin{cases} y_1 = \text{cost.} \\ y_2 = \text{cost.} \\ \dots\dots \end{cases}$$

Una varietà algebrica irriducibile, V_q, ad un certo numero q di dimensioni, contenuta nella V_{n+m} delle coppie, porge l'immagine di una *corrispondenza irriducibile* fra le dette varietà: la corrispondenza così definita nel senso più generale, agirà effettivamente sui punti delle due varietà o fra punti di varietà meno ampie contenute in esse, secondo che è possibile, o meno, di trovare coppie di punti omologhi di cui faccia parte un punto qualsiasi di V_n o di V_m. Reciprocamente ogni corrispondenza fra le V_n e V_m (o fra varietà contenute in esse) è rappresentata da una varietà irriducibile, o da un insieme di varietà, sopra V_{n+m}; in quest'ultimo caso la data corrispondenza si lascia separare in più altre.

Supponiamo che fra le varietà V_n, V_m interceda una corrispondenza irriducibile, per modo che ad un punto generico di V_n corrispondano ∞^r punti di $V_m (r \geq 0)$, e reciprocamente un punto generico di V_m corrisponda ad ∞^s punti di $V_n (s \geq 0)$; in tale ipotesi l'immagine della corrispondenza è una varietà V_q, la cui dimensione q, può essere determinata in funzione dei numeri n, r, m, s; infatti si ottengono coordinate capaci di determinare un numero finito di elementi di V_q aggiungendo alle $x_1, x_2, ... x_n$, coordinate di un punto di V_n, le $y_1, y_2, ... y_r$ coordinate dei punti della V_r corrispondente; si ottiene quindi

$$q = n + r.$$

In modo analogo si trova

$$q = m + s.$$

Ricordando il teorema d'invarianza delle dimensioni, si deduce:

$$n + r = m + s$$

cioè

$$n = m + s - r$$

oppure

$$r = m + s - n.$$

Questa relazione costituisce un principio di uso frequente nel *computo delle costanti arbitrarie.*

A chiarimento di tale metodo vogliamo svolgere alcuni esempii. Ma, prima di ciò, giova notare, una volta per tutte, che per l'applicazione del principio sopra enunciato basta sapere che le varietà V_n e V_m sono irriducibili e che nella corrispondenza tra di esse gli omologhi di un punto dell'una formano sull'altra una varietà di cui è definita la dimensione; in tal caso se la corrispondenza fosse riducibile si potrebbe considerare soltanto una parte irriducibile di essa. Del resto nei casi che avremo a considerare avverrà in generale che la corrispondenza sia definita mediante funzioni razionali y_i delle x_i e di parametri arbitrari, sicchè essa risulterà senz'altro irriducibile, a prescindere — tutt'al più — da un fattore degenere di essa.

a) *Dimensioni dello spazio rigato.*

Questa dimensione incognita venga designata con n.

Consideriamo la varietà ausiliaria V_m costituita dalle stelle di raggi (punti) dello spazio: si ha $m = 3$. Prendiamo come corrispondenti una retta e una stella quando la retta appartiene alla stella: si ha così che a ogni retta corrispondono ∞^1 $(r = 1)$ stelle, e viceversa a ogni stella ∞^2 rette $(s = 2)$: sarà dunque

$$n = m + s - r = 3 + 2 - 1 = 4.$$

cioè: lo spazio rigato è una varietà a 4 dimensioni.

La dimensione, n, dello spazio rigato può essere valutata anche nel seguente modo.

Si consideri la varietà a 6 dimensioni, V_6, costituita dalle coppie di punti dello spazio, e si osservi che ogni coppia di punti determina una retta, mentre viceversa sopra ogni retta ci sono ∞^2 coppie di punti, si dedurrà

$$n = 6 + 0 - 2 = 4.$$

b) *Curve d' ordine* n *determinate da* $\frac{n(n+3)}{2}$ *loro punti generici.*

Sappiamo che il sistema delle curve d'ordine n ha $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni. Ora le dimensioni di questa varietà si possono valutare nel seguente modo: consideriamo un gruppo di $N = \frac{n(n+3)}{2}$ punti appartenenti a una curva d'ordine n: i gruppi siffatti, ***corrispondenti*** ad una curva, sono ∞^N; si deduce che un gruppo di N punti generici scelti sopra una curva d'ordine n non può appartenere ad infinite curve d'ordine n, e quindi *una curva generale d' ordine* n *si può sempre ritenere determinata da* $N = \frac{n(n+3)}{2}$ *dei suoi punti*, presi in modo generico (Cf. § 13).

c) *Dimensione del sistema delle cubiche gobbe.*

Ricordiamo che la cubica gobba è definita come ulteriore intersezione di due coni quadrici aventi una generatrice comune non di contatto [1]. Per determinare quale sia l'infinità delle cubiche gobbe nello spazio ordinario, osserviamo che ogni cubica determina ∞^2 coppie di coni con una generatrice comune, che la proiettano da due punti di essa; d'altra parte i coni quadrici sono ∞^8, e i coni quadrici che hanno il vertice sopra un altro cono e posseggono con esso una generatrice a comune si riducono a ∞^6; pertanto le coppie di coni quadrici con una generatrice a comune sono ∞^{14}, e la dimensione del sistema delle cubiche gobbe vale

$$n = 14 - 2 = 12.$$

A questo stesso risultato si perviene anche osservando che — in base alla definizione — una cubica gobba è deter-

(1) Cfr. ENRIQUES, « G. descrittiva ». Parte II, § 22.

minata da 6 punti (per la irriducibilità della curva si richiede che quattro di questi non stiano in un piano). Ora le sestuple di punti dello spazio sono ∞^{18}, e le sestuple formate coi punti di una cubica sono ∞^{6}, sicchè si trova

$$n = 18 - 6 = 12.$$

Altri esempi che recano maggior frutto di conseguenze s'incontreranno in appresso.

26. **La compatibilità delle equazioni algebriche e il principio di Plücker-Clebsch.** — Il principio del computo delle costanti può essere adoperato in altro modo, come criterio per riconoscere la compatibilità, o il grado d'indeterminazione, dei sistemi di equazioni algebriche con più incognite; in questo senso appunto il detto principio è stato adoperato da Plücker (che ne ha fatto largo e fecondo uso, sebbene non sempre corretto) e trovasi formulato da Clebsch nella « Commemorazione di Plücker » (1) quantunque Clebsch stesso dovesse poi ingannarsi talvolta nella sua applicazione (2).

Per riconoscere il senso preciso e il valore del principio di Plücker-Clebsch, prendiamo le mosse dai noti teoremi dell'Algebra relativi ai sistemi di equazioni.

Cominciamo dal caso tipico in cui si abbiano n equazioni con n incognite:

$$1)\qquad \begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) = 0, \end{cases}$$

dei gradi rispettivi $d_1, \dots d_n$. Eliminando $n-1$ incognite, per esempio $x_2, \dots x_n$, si ottiene un'equazione *resultante*

$$R(x_1) = 0,$$

che è in generale di grado $D = d_1 d_2 \dots d_n$ (3) (sulla dimostrazione geometrica di questo teorema, e sui modi di formazione

(1) Göttingen Abhandlungen. Bd 63, (2 Dec. 1871), pg. 24.

(2) Cfr. il Rapporto di Brill e Nöther sullo sviluppo della teoria delle funzioni algebriche (Jahresbericht der Deutschen. Math. Vereinigung. Bd 3, pg. 343, anno 1892-93).

(3) Cfr. p. es. Capelli, « Istituzioni di Analisi Algebrica ». Napoli, Pellerano, 1902. Cap. XIII, § 7.

effettiva della resultante avremo occasione di ritornare in seguito nella teoria delle curve). Alle radici della $R=0$ corrispondono le soluzioni del sistema 1); nel caso che R si riduca ad una costante, diversa da zero, le equazioni stesse si dicono *incompatibili*, non esistendo soluzioni finite del sistema 1).

La eccezione della incompatibilità si toglie introducendo soluzioni infinite o riducendo le equazioni omogenee col cambiamento di x_i in $\frac{x_i}{x_0}$ e con la moltiplicazione per una potenza conveniente di x_0. Allora il sistema 1) diventa

$$2)\qquad \begin{cases} f_1(x_0 x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_0 x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

dove f_i designa una *forma* di grado d_i e dove si tratta — com'è noto — di determinare valori finiti proporzionali alle x_i che ne dieno i mutui rapporti; in questo caso la resultante R è una forma di grado D in x_0, x_1: *le* n *ipersuperficie* $f_1=0, \dots f_n=0$ *hanno sempre* D *punti comuni* (distinti o coincidenti) oppure *infiniti*, costituenti curve o varietà di punti comuni; l'ultima ipotesi ha luogo quando R si annulli identicamente (caso d'*indeterminazione* del sistema). *L'incompatibilità del sistema* 1) *si traduce nella condizione che il sistema* 2) *ammetta come conseguenza l'equazione* $x_0=0$.

Per un sistema di n equazioni (non omogenee) con n incognite, la compatibilità è il caso *generale*, *l'incompatibilità* è un caso d'*eccezione*, che implica condizioni algebriche fra i coefficienti delle equazioni date. Che partito può trarsi da questa osservazione? Le difficoltà di trarne un effettivo vantaggio risultano chiare nel problema delle *equazioni canoniche*, quale si è presentato nelle ricerche di Plücker (1).

Si abbia un'equazione algebrica di dato grado n, per esempio fra due variabili x e y, i cui coefficienti siano funzioni razionali di certi parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ essenzialmente finiti, per esempio forme omogenee delle α_i:

$$\varphi(\alpha_i xy) = 0;$$

(1) Cfr. anche per i riferimenti dei precedenti lavori di questo autore, la sua « Theorie der Algebraischen Curven ». Bonn, 1839.

se l'equazione della curva generale d'ordine n,

$$f(xy) = 0,$$

oppure l'equazione della curva appartenente ad una determinata famiglia, si può identificare con la φ per certi valori dei parametri α_i, si dice che la φ è una *forma canonica* a cui può ridursi l'equazione f.

Se, in particolare, alcuni dei parametri α_i si possono considerare come coefficienti di una sostituzione eseguita sopra le x, y, la φ, in cui si diano a codeste α_i valori arbitrari, si dice costituire una *forma canonica a cui può ridursi la* f *con la sostituzione* indicata. Per esempio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

è forma canonica a cui può ridursi l'equazione del cerchio

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

con una traslazione degli assi.

Per ridurre l'equazione

$$f(xy) = \Sigma a_{rs} x^r y^s = 0$$

alla forma canonica

$$\varphi(\alpha_i xy) = 0,$$

occorre in generale risolvere un sistema di equazioni del tipo

$$3) \qquad a_{rs} = \psi_{rs}(\alpha_i),$$

dove le ψ_{rs} designano funzioni razionali; codeste equazioni si ottengono identificando la f con la φ.

Ora se il numero dei parametri α_i è (almeno) uguale a quello dei coefficienti a_{rs}, si è indotti a ritenere che per valori generali delle a_{rs} il sistema 3) sia compatibile, e quindi la f generale ammetta φ come forma canonica. Questa *induzione* è *errata* come dimostra il seguente

Sofisma di PLÜCKER. Con un cambiamento di assi coordinati ortogonali l'equazione di un cerchio si può sempre ridurre alla forma

$$x^2 + y^2 = 1!$$

La pseudo-dimostrazione di questo sofisma si svolge come segue: l'equazione generale del cerchio $(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$, contiene tre coefficienti; un cambiamento delle coordinate ortogonali, eseguito sull'equazione $x^2+y^2=1$, introduce tre parametri, sicchè la trasformata di questo si può identificare con l'equazione generale del cerchio risolvendo un sistema di tre equazioni con tre incognite; le quali debbono ritenersi compatibili per valori generici dei coefficienti b, c, d.

L'insegnamento che si trae da questo esempio, è che il sistema di equazioni 3) (dove pure il numero di incognite sia uguale a quello delle equazioni) può riuscire incompatibile per valori generici delle a_{rs}; in tal caso a valori generici delle α_i corrispondono valori particolari delle a_{rs}, a valori a_{rs} generici corrispondono valori particolari delle α_i, fra cui qualcuno infinito.

Ora notiamo che all'impossibilità di ridurre l'equazione generale del cerchio alla forma $x^2+y^2=1$, corrisponde la circostanza che questa riduzione, quando è possibile, si effettua in un numero infinito di modi: il sistema delle tre equazioni a tre incognite da cui essa dipende, diventando compatibile, diventa anche indeterminato. Questa circostanza contrassegna il caso di eccezione dei sistemi di n equazioni con n incognite che sono incompatibili per valori generici dei cofficienti, ritenuti come variabili. Sussiste infatti il seguente

Principio di PLÜCKER-CLEBSCH. Se un sistema di n equazioni ad n incognite

$$1) \qquad f_i(x_1 \ldots . x_n)=0 \qquad (i=1, \ldots . n),$$

in cui compaiono coefficienti a_r variabili, è incompatibile per valori generici degli a_r; ogniqualvolta esso diventi compatibile per valori particolari degli a_r, diventa in pari tempo indeterminato; quindi: ***si può affermare la compatibilità del sistema per valori generici dei coefficienti, se esso sia compatibile e determinato per valori particolari.***

Più in generale: *se un sistema di* $\mathrm{m}=\mathrm{n}-\mathrm{r}$ *equazioni ad* n *incognite* $(\mathrm{r} \geq 0)$, *è compatibile ed ammette* ∞^r *soluzioni (e non* ∞^{r+1}) *per valori particolari dei coefficienti, esso è compatibile (ammettendo* ∞^r *soluzioni) per valori generici di essi.*

Questo principio più generale si riduce al precedente aggiungendo r equazioni del tipo $x_i=\text{cost.}$; basterà dunque occuparsi di giustificare il principio più ristretto.

Giova cominciare dal caso in cui le equazioni 1) sono lineari; appunto questo caso — a cui conduce già la spiegazione del cosidetto paradosso di CRAMER [1] — sembra aver suggerito a PLÜCKER l'uso più generale del suo principio [2].

Se le equazioni

$$f_i = a_{io} + \Sigma a_{ir} x_r = 0 \qquad \begin{pmatrix} r = 1, \dots n \\ i = 1, \dots n \end{pmatrix}$$

sono incompatibili, ciò significa che fra le $n+1$ equazioni omogenee

$$4) \qquad \begin{cases} f_i = \Sigma a_{ir} x_r = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \dots n \\ i = 1, \dots n \end{pmatrix}$$

l'ultima è una conseguenza delle prime n, per valori generici dei coefficienti a_{ir}. Questa condizione porta che sia *in generale*, e quindi *sempre*, il determinante

$$\Delta = | a_{rs} | = 0.$$

Ora, se, per valori particolari dei parametri che entrano nei coefficienti, accade che $\Delta = 0$, si deduce che ciascuna delle $n+1$ equazioni precedenti è conseguenza delle rimanenti ogni qual volta queste siano indipendenti fra loro; in particolare dunque, se le prime n equazioni sono indipendenti, esse portano di conseguenza $x_0 = 0$; se invece esse ammettono soluzioni per cui $x_0 \neq 0$, non sono più indipendenti, cioè formano un sistema indeterminato. c. d. d.

Indipendentemente dalla formazione del determinante Δ, il teorema si dimostra anche osservando che se le equazioni 4), considerate per valori generici dei coefficienti, ammettono un sistema di soluzioni in cui $x_0 = 0$, un tale sistema di soluzioni si avrà sempre in ogni caso particolare; se dunque in un caso particolare si aggiunge un secondo sistema di soluzioni in cui $x_0 \neq 0$, il sistema delle equazioni 4) diventa indeterminato. (Qualora il sistema 4) fosse già indeterminato di grado r, diventa indeterminato di grado $r+1$).

Ciò posto passiamo ad un sistema di n equazioni dei gradi $d_1, \dots d_n$, che prendiamo già ridotte alla forma omogenea

$$2) \qquad f_i(x_0 x_1 \dots x_n) = 0.$$

(1) Cfr. L 2°, § 15.

(2) Cfr. l'introduzione alla citata « Theorie der Algebraischen Curven ».

L'ipotesi è che, per valori generici dei coefficienti, il sistema 2) abbia come conseguenza l'equazione $x_0 = 0$. Il ragionamento seguente vale a provare in generale che se — per valori particolari dei coefficienti — le equazioni 2) ammettono soluzioni in cui $x_0 \neq 0$, esse ne ammettono infinite. Infatti le ipersuperficie 2) posseggono $D = d_1 \dots d_n$ punti comuni, appartenenti all'iperpiano $x_0 = 0$; se — per valori particolari dei coefficienti — si trova un nuovo punto comune alle dette ipersuperficie, per cui $x_0 \neq 0$, avendosi più di D intersezioni se ne avranno infinite, cioè il sistema 2) diventerà indeterminato. Tuttavia per rendere completo questo ragionamento occorrerebbe stabilire in modo speciale che:

1) le infinite soluzioni del sistema 2), dedotte dall'esistenza di un punto-soluzione fuori dell'iperpiano $x_0 = 0$, corrispondono a una curva, o varietà, passante per questo punto, e quindi non giacente tutta nell'iperpiano $x_0 = 0$;

2) ove le equazioni $f_i = 0$ costituiscano già in generale un sistema indeterminato (portante per conseguenza $x_0 = 0$) le infinite intersezioni delle n ipersuperficie $f_i = 0$ *equivalgono* a D intersezioni, sicchè l'ipotesi di un nuovo punto comune permette di trarre analoghe consegnenze.

In luogo di esaminare le questioni delicate che abbiamo segnalate, porgeremo qui una dimostrazione geometrica del principio di Plücker-Clebsch, riattaccandolo al principio del computo delle costanti del precedente paragrafo.

A tale scopo ci riferiremo ad un sistema di $m \leq n$ equazioni già risoluto rispetto ad m dei suoi coefficienti variabili, come accade pei sistemi di equazioni a cui conduce il problema delle forme canoniche. Si abbia dunque il sistema di equazioni (non omogenee)

$$5) \qquad y_i = \psi_i(x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le ψ_i sono funzioni razionali (intere o fratte).

Le equazioni 5), dove si considerino le x_i come variabili arbitrarie, definiscono una varietà algebrica V ad un certo numero di dimensioni, contenuta nello $S_m(y_1 \dots y_m)$; se questa varietà non esaurisce tutto lo spazio S_m (che è una varietà irriducibile), bisogna che la dimensione di V sia al più $m-1$; ma fra V e lo spazio $S_n(x_1 \dots x_n)$ intercede una corrispondenza rappresentata dalle equazioni 5), per la quale ad ogni (x) generico corrisponde *un* (y) generico di V; bisogna dunque che un punto generico di V sorga da ∞^r (con $r \geq n - m + 1$) punti (x). Conviene aggiungere che la corrispondenza anzidetta può essere riguardata come irreducibile, tralasciando eventualmente una corrispondenza degenere che figuri in essa come fattore; si può quindi escludere il dubbio che gli ∞^r punti (x) omologhi di un (y) generico di V sieno punti eccezionali, costituenti una varietà entro S_n (p. es. giacente nell'iperpiano all'infinito).

In parole: se il sistema 5) è incompatibile per valori generici delle y_i, i valori delle y_i che lo rendono compatibile gli conferiscono un grado d'indeterminazione $r > n - m$.

Ossia: *Il sistema* 5) *è certo compatibile per valori generici delle* y_i *ove esso sia compatibile, con un grado d'indeterminazione* n — m (e non più), *per valori particolari.*

Lo stesso ragionamento fondato sul computo delle costanti (§ 25) conduce alla conclusione più generale seguente:

Se fra due varietà algebriche irreducibili V_n, V_m, *ad* n, m *dimensioni, intercede una corrispondenza per cui ad un punto generico di* V_n *corrispondano* ∞^r *punti di* V_m ($r \geq 0$), *e se — reciprocamente — i punti di* V_m *che nascono da punti generici di* V_n *corrispondono ad* ∞^s *punti di questa varietà, dove*

$$0 \leq s \leq n + r - m,$$

si deduce che i punti generici di V_m *nascono effettivamente da*

$$\infty^{n+r-m}$$

punti (non eccezionali) *di* V_n.

Altrimenti i punti di V_m omologhi a punti generici di V_n formerebbero una varietà (eccezionale) con $m' < m$ dimensioni e si avrebbe

$$m' + s = n + r.$$

Il precedente enunciato esprime la forma geometrica più generale del principio di Plücker-Clebsch, *criterio di compatibilità delle equazioni basato su un computo di costanti.* L'esatta applicazione della regola richiede di verificare, non solo che

$$n + r - m \geq 0,$$

ma che effettivamente un punto di V_m non può nascere da più che ∞^{n+r-m} punti generici di V_n. Inoltre non bisogna dimenticare la condizione sopra espressa circa la *irreducibilità*, particolarmente di V_m. Sotto queste condizioni il principio di PLÜCKER-CLEBSCH, rigorosamente fondato, si applica direttamente, nella forma geometrica dell'enunciato precedente.

Valga come esempio la

Inversione del teorema di STEINER *che due fasci proiettivi generano una conica.*

Basta all'uopo il seguente ragionamento semplicissimo.

Nel piano, le coppie di fasci di raggi proiettivi sono ∞^7 e formano una varietà (razionale) irreducibile; ma se una conica deve essere generata da due fasci proiettivi, i centri di questi dovranno scegliersi sulla conica e dopo ciò la proiettività tra i fasci risulterà determinata, sicchè ogni conica ammetterà *al più* ∞^2 generazioni proiettive; le coniche essendo ∞^5, si deduce che la conica più generale può essere generata come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di fasci proiettivi (ed ammette appunto ∞^2 generazioni siffatte).

Osservazione. La condizione dell'irreducibilità di V_m appare necessaria dal seguente

Sofisma. In ogni terna di punti della retta che formi un gruppo armonico col punto all'infinito, ciascuno dei tre punti divide per metà il segmento degli altri due.

Sappiamo che se una terna ABC forma un gruppo armonico col punto all'infinito della retta, vi è in essa un punto che biseca la coppia (cioè il segmento) degli altri due. Ora il nostro ragionamento si svolgerà come segue: le terne date (formanti gruppi armonici col punto all'infinito) sono ∞^2, e le coppie di punti di codeste terne sono pure ∞^2; ma ci sono — fra esse — ∞^2 coppie bisecate dal terzo punto della terna, dunque *ogni* coppia di punti d'una terna che formi gruppo armonico col punto all'infinito viene bisecata dal terzo punto della medesima terna.

Il ragionamento suppone che la varietà V_2 delle coppie di punti, estratte dalle nostre ∞^2 terne, sia irreducibile, sicchè non possa distinguersi in essa una parte della stessa dimensione 2; invece in una terna la coppia dei punti coniugati armonici si distingue razionalmente dalle altre due, e così la varietà V_2 si spezza in due parti.

LIBRO SECONDO

IL PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA E LE SUE APPLICAZIONI

CAPITOLO I

Le involuzioni e i gruppi finiti di proiettività sulla retta.

1. Principio di corrispondenza. — Nel libro primo (§ 16), abbiamo definito le corrispondenze algebriche $[m, n]$

$$f(xy) = 0$$

fra rette punteggiate o forme di prima specie. Le considerazioni che seguono si riferiscono al caso di rette sovrapposte, dove cioè si assumano x e y come coordinate di punti variabili sopra una medesima retta. È poi ovvio come queste considerazioni si applichino ugualmente alle altre forme di prima specie, cioè ai fasci di raggi e di piani, od anche — come talora occorrerà nel seguito — a corrispondenze definite sopra una conica, i cui punti si possono far corrispondere biunivocamente (per proiezione) a quelli di una retta.

Data una corrispondenza fra punteggiate sovrapposte, si presenta il problema dei *punti uniti*, cioè il problema di determinare quali e quanti siano i punti x che coincidono con uno dei loro omologhi.

Poniamo, nella equazione $f(xy) = 0$, $y = x$; verrà un'equazione $F(x) = f(xx) = 0$ che vale a determinare i punti uniti, e che non sarà mai identicamente soddisfatta se — come *supporremo nel seguito* — la corrispondenza $f(xy) = 0$ *non contiene* come *fattore l'identità.*

Ora il grado complessivo della $f(xy)$ si deve ritenere uguale ad $m + n$, riducendosi soltanto nel caso che il punto all'infinito figuri fra i punti uniti un certo numero di volte (L. 1° §§ 1, 15); tenuto conto di ciò si può enunciare il

Principio di corrispondenza: Una corrispondenza [m, n] *sopra una retta ammette sempre* m + n *punti uniti,* computandosi come *i* punti sovrapposti ogni punto unito (a distanza finita o infinita) che corrisponda a una radice *i*-pla di $F(x) = 0$.

Questo principio viene talora impropriamente designato come « principio di CHASLES »; ma, quantunque lo CHASLES abbia largamente contribuito a diffonderne l'applicazione, non si può attribuirgliene la priorità, che risale alla Nota di DE JONQUIÈRES « Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque » (1861). In codesta Nota, come già dicemmo, s'introduce per la prima volta l'uso di corrispondenze $[m, n]$ d'indici qualunque, e la determinazione dei punti uniti di una corrispondenza vi figura come metodo per valutare l'ordine dei luoghi geometrici.

Subito dopo il CREMONA, nella sua « Introduzione » dello stesso anno 1861, adottava sistematicamente tale metodo, facendo una volta per tutte la dimostrazione che una corrispondenza $[m, n]$ ha $m + n$ punti uniti. A questo tipo di dimostrazione lo CHASLES mosse l'obbiezione che il grado dell'equazione che dà i punti uniti può abbassarsi, e il DE JONQUIÈRES e il CREMONA accolsero dapprima l'osservazione, ritenendo che il numero $m + n$ dei punti uniti sia suscettibile di riduzione in casi particolari. Ma nel gennaio 1864 il CREMONA scriveva al DE JONQUIÈRES rilevando che l'eccezione sopra accennata non sussiste, ove si tenga conto del punto all'infinito che, in questo caso, figura fra i punti uniti. Lo CHASLES, che non parve subito persuaso da questi argomenti comunicatigli dal DE JONQUIÈRES, poco dopo esponeva quello che fu poi chiamato principio di corrispondenza nel suo corso della Sorbona e in una Nota dei Comptes Rendus del 27 giugno 1864; ivi quel principio figura sotto il nome di *lemma* e viene basato sulla dimostrazione del CREMONA [1].

Nelle numerose applicazioni del principio di corrispondenza, s'incontra la difficoltà essenziale di determinare la *molteplicità* secondo cui un punto appartiene al gruppo dei punti uniti. Per codesta determinazione conviene muovere in generale dal fatto che un punto unito *a* corrisponde a una

[1] Cfr. la Nota storica di C. SEGRE nella « Bibliotheca Mathematica » di G. ENESTRÖM, (1892).

radice dell'equazione $f(ay)=0$. Supposto che a sia radice r-pla della predetta equazione, cioè che a coincida con r dei suoi corrispondenti, si domanda se, e come, possa determinarsi la molteplicità di a nel gruppo dei punti uniti.

Il problema non ammette in generale una risposta determinata: per chiarire la cosa conviene riferirsi alla curva $f(xy)=0$ immagine della corrispondenza, le cui intersezioni con la retta $y=x$ forniscono i punti uniti.

Supponiamo che la retta $y=x$ abbia una intersezione doppia con la curva f nel punto $A=(aa)$: bisogna distinguere due casi:

1) La retta $y=x$ è tangente propria della curva. In questo caso $x=a$ è radice doppia dell'equazione $F(x)=f(xx)=0$, ma l'equazione $f(ay)=0$ ammette $y=a$ come radice semplice, e così pure la $f(xa)=0$, cioè il punto a coincide con uno solo dei suoi omologhi nella corrispondenza diretta e nella inversa.

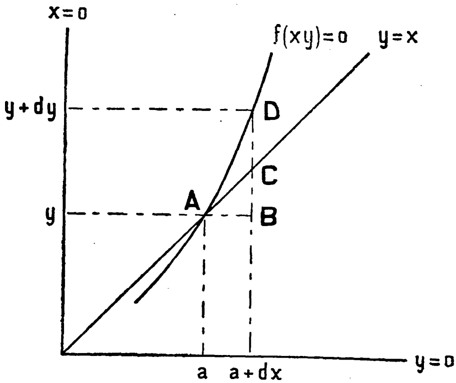
2) Il punto A è doppio per la curva f, della quale $y=x$ è una tangente impropria. In questo secondo caso a è radice doppia tanto per l'equazione $F(x)=f(xx)=0$ quanto per le $f(ay)=0$, $f(xa)=0$; può accadere che a abbia per una di queste due equazioni (o anche per ambedue) una molteplicità maggiore di 2, in ordine alla circostanza che una tangente principale per A sia parallela ad uno degli assi coordinati.

Reciprocamente, supponiamo che il punto a coincida con due dei suoi punti omologhi nella corrispondenza (xy), cioè che a sia radice doppia dell'equazione $f(ay)=0$. In tal caso la retta $y=a$ ha con f due intersezioni riunite in A, e si possono distinguere i due casi in cui essa sia tangente propria o impropria. Nel primo caso la retta $y=x$ non tocca f in A, e perciò il punto a figura come *semplice* nel gruppo dei punti uniti. Nel secondo caso A figura come *doppio* almeno in codesto gruppo.

È particolarmente notevole il fatto che il punto A risulterà doppio per la curva f *se a coincide con due dei suoi omologhi contemporaneamente nella corrispondenza (xy) e nella inversa (yx)*, sicchè in tale ipotesi *a conterà almeno due volte nel gruppo dei punti uniti* della corrispondenza.

Un criterio generale per la valutazione delle molteplicità dei punti uniti di una corrispondenza viene offerto da un calcolo di infinitesimi, che costituisce la cosidetta *regola di* ZEUTHEN.

Supponiamo dapprima che la curva $f(xy) = 0$ abbia in A un punto semplice; allora distinguiamo 3 casi:



1) la f non tocca nessuna delle due rette $x = a$, $y = x$;

2) la f tocca la retta $x = a$;

3) la f tocca la retta $y = x$.

Nell'ipotesi 1) ad un punto x nell'intorno di a corrisponde *un* y appartenente al medesimo intorno, cioè un solo y per cui $y - x$ diventa infinitesimo con $x - a$.

Il rapporto degli infinitesimi $\frac{y-x}{x-a}$ si può calcolare riferendosi alla figura:

$$y - x = CD = BD - BC = BD - AB = dy - dx$$
$$x - a = dx, \text{ quindi}$$

$$\frac{y-x}{x-a} = \frac{dy-dx}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1;$$

perciò, essendo per ipotesi $\frac{dy}{dx}$ finito e $\neq 1$, « $y - x$ è infinitesimo del prim'ordine rispetto ad $x - a$ ».

Nell'ipotesi 2) ad ogni x nell'intorno di a corrispondono *due o più* y nel medesimo intorno per cui il rapporto degli infinitesimi $\frac{y-x}{x-a} = \frac{dy}{dx} - 1$ risulta infinito come $\frac{dy}{dx}$. Se la f ha un contatto semplice con la retta $x = a$, i valori di y prossimi ad a sono due, e ciascun dy diventa infinitesimo d'ordine $\frac{1}{2}$ rispetto a dx; se più generalmente si tratta di un contatto r-punto (cioè d'ordine $r - 1$, $r \geq 2$) i valori di y prossimi ad a sono in numero di r e ciascun dy è infinitesimo d'ordine $\frac{1}{r}$ (Cfr. L. 1°, § 10). In ogni caso se si assume $x - a$ come infinitesimo-unità « la somma degli ordini di infinitesimo delle differenze $y - x$ è eguale ad 1 ».

Nell'ipotesi 3) ad ogni x nell'intorno di a corrisponde *un* y appartenente al medesimo intorno, e tale che il rapporto $\frac{y-x}{x-a}$ diventa infinitesimo.

Si può precisare l'ordine di infinitesimo rispetto ad $x-a$, preso come unità, supponendo che la curva f abbia con la retta $y=x$ un contatto r-punto ($r \geq 2$); in tal caso (L. 1°, § 10) « $y-x$ è un infinitesimo d'ordine r rispetto ad $x-a$ ».

In tutti i casi 1) 2) 3) si trova dunque che « la molteplicità del punto a nel gruppo dei punti uniti della corrispondenza, ossia nel gruppo delle intersezioni della curva f con la retta $y=x$, è uguale alla somma degli ordini di infinitesimo delle differenze $y-x$ ».

Ora supponiamo che la curva f possegga in A un punto di molteplicità $r>1$, con r tangenti distinte: allora (L. 1°, § 10) la curva f nell'intorno del punto A si lascia distinguere in r rami, e le intersezioni di f con le due rette $x=a$ e $y=x$ si ottengono intersecando separatamente i singoli rami. Si deduce la

Regola di ZEUTHEN [1]. Per valutare la molteplicità che spetta ad un punto a nel gruppo dei punti uniti della corrispondenza $f(xy)=0$, si consideri la corrispondenza (xy) nell'intorno del punto a, dove ad ogni x corrisponderà in generale un certo numero $s \geq 1$ di y prossimi ad a: $y_1, y_2, \dots y_s$, ciò posto si sommino gli ordini di infinitesimo delle differenze $y_i - x$ comparate ad $x-a$, la *somma di questi ordini di infinitesimo fornisce la molteplicità del punto unito* a.

Questa regola è assolutamente generale, cioè vale non soltanto nel caso — che s'incontra di solito nelle applicazioni — in cui la singolarità della curva rappresentativa f nel punto A sia un punto r-plo a tangenti distinte, ma anche se codeste r tangenti coincidono in parte fra loro, avendosi nel punto una singolarità ordinaria o straordinaria.

A tale scopo basta notare che la dimostrazione svolta si fonda essenzialmente sulla osservazione che segue: sia l un ramo lineare di curva passante per l'origine O, e si conduca per O una retta qualsiasi o; una parallela a questa sega il ramo l in uno o più punti prossimi ad O, quest'ultimo caso

[1] Cfr. ZEUTHEN. Note sur le principe de correspondence. Bulletin de Sc. Math. 5, pag. 186, (1873).

corrispondendo all'ipotesi che o sia tangente ad l; in ogni caso le inverse degli ordini di infinitesimo delle distanze di codesti punti da o danno una somma indipendente dalla posizione di o, giacchè se o ha un contatto r-punto ($r > 1$) con l le nominate intersezioni diventano r e gli ordini di infinitesimo delle loro distanze da O diventano pure r. Ora la proprietà anzidetta non solo si estende a curve composte di rami lineari, ma permane ancora ove si considerino rami non lineari.

Si può infatti sostituire in ogni caso un ramo, o gruppo di rami, tangenti all'asse x, con la curva $y^r = kx^s$ che ne porge un'approssimazione, dove si può supporre per esempio $s > r$ (Cfr. § 12). Una retta o prossima all'origine ha in generale r intersezioni con la curva e le distanze di questi punti dalla parallela per l'origine sono infinitesimi del prim'ordine, sicchè la somma delle inverse degli ordini vale r; se invece si considera una parallela all'asse x si hanno s ($> r$) intersezioni, le distanze dell'asse sono infinitesimi d'ordine $\frac{s}{r}$, e perciò la somma delle inverse di questi ordini vale ancora r.

Ritorniamo alla rappresentazione della corrispondenza $f(xy) = 0$ con la curva immagine che ha la medesima equazione, per notare ciò che può dirsi nel caso speciale delle *corrispondenze simmetriche*.

Dicesi simmetrica una corrispondenza $[n, n]$ $f(xy) = 0$ che, riguardata come operazione, non si distingue dalla sua inversa.

La condizione perchè ciò accada è che la curva rappresentativa possegga come asse di simmetria la retta $y = x$. Permutiamo fra loro x, y nell'equazione

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x^i y^k = 0,$$

l'equazione deve restare invariata, sicchè il grado rispetto ad x sarà uguale al grado rispetto ad y, sarà cioè $n = m$, inoltre dovrà aversi

$$f(xy) = \rho f(yx);$$

ma ripetendo il medesimo scambio segue

$$f(xy) = \rho^2 f(xy), \quad \rho^2 = 1.$$

Ora, se $\rho = -1$, sarà

$$a_{00} = a_{11} = \ldots . = a_{nn} = 0,$$

e

$$f(xy) = \Sigma a_{ik}(x^i y^k - x^k y^i)$$

si annulla identicamente per $x = y$ e perciò contiene il fattore $y - x$.

Questo caso resta dunque escluso dall'ipotesi fatta in principio che la corrispondenza $f(xy) = 0$ non contenga come fattore l'identità. Pertanto una corrispondenza simmetrica, liberata eventualmente dal fattore identità, è rappresentata dall'annullarsi del polinomio simmetrico

$$\Sigma a_{ik} x^i y^k \quad \text{dove} \quad a_{ik} = a_{ki}.$$

Per le corrispondenze simmetriche, se $y = a$ è radice doppia (almeno) della $f(ay) = 0$ anche $x = a$ è radice doppia della $f(xa) = 0$, quindi (come si è visto innanzi) *un punto* a *che coincide con due* (almeno) *dei suoi coniugati* (omologhi) *conta almeno due volte nel gruppo dei punti uniti.* Reciprocamente: *ogni punto* a *che figuri due volte nel gruppo dei punti uniti coincide con due* (almeno) *dei suoi coniugati.* Infatti il punto $A = (aa)$ risulta allora doppio per la curva f. Questo fatto che risulta intuitivo dall'immagine reale della curva, si giustifica analiticamente osservando che il coefficiente angolare della tangente in A deve valere

$$-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = 1,$$

laddove si ha in A

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

sicchè il primo membro dell'uguaglianza risulterebbe uguale a -1, e si arriverebbe ad un assurdo, ove non fosse come dobbiamo dimostrare (L. 1°, § 11)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Una determinazione più precisa dei risultati precedenti ha luogo per una classe particolare di corrispondenze simmetriche che vengono denominate involuzioni e che formano l'oggetto di questo capitolo.

Osservazione. Termineremo questo paragrafo accennando ad un avvertimento di diverso ordine di cui avremo luogo di apprezzare l'importanza nelle applicazioni del principio di corrispondenza. Spesso accade che la riduzione d'un problema alla ricerca dei punti uniti d'una corrispondenza introduca delle *soluzioni estranee* che non appartengono propriamente al problema proposto e *debbono essere scartate.* Lo scarto può esser parziale o anche totale, come nell'esempio assai istruttivo dei cosidetti *poligoni di* PONCELET.

Si cerchi di costruire un poligono semplice di n lati, p. es. un triangolo, iscritto in una conica C e circoscritto ad una conica K. A tale scopo, partendo da un punto P di C, si manderà per P una tangente a K, fino ad incontrare C ulteriormente in P', quindi si manderà per P' la tangente a K — diversa da $P'P$ — ad incontrare C in P'', e così via; il punto $P^{(3)}$ costruito in tal modo è suscettibile di due determinazioni: P_1 e P_2, e la corrispondenza in cui a P si associano P_1 e P_2 è una corrispondenza simmetrica [2, 2]. È chiaro che se P è un vertice d'un triangolo iscritto in C e circoscritto a K, deve essere P uno dei 4 punti uniti dell'anzidetta corrispondenza [2, 2]; ma i 4 punti comuni alle due coniche C e K figurano come soluzioni improprie del problema, che debbono essere scartate. Così CAYLEY (1871) deduce che il problema non ha soluzioni proprie a meno che la corrispondenza suddetta si riduca all'identità.

Dunque: non esiste in generale alcun triangolo (o poligono) iscritto ad una conica e circoscritto ad un'altra; l'esistenza d'un tale triangolo (o poligono) corrisponde ad una relazione fra le due coniche e porta di conseguenza l'esistenza di infiniti altri triangoli (o poligoni) analoghi, cioè la *chiusura* delle poligonali che danno origine alla corrispondenza [2, 2] sopra nominata ([1]).

([1]) Cfr. PONCELET « Traité des propriétés projectives » nn. 565 e segti. Per notizie sui numerosi sviluppi a cui questo problema ha dato origine Cfr. LORIA « Il passato e il presente delle principali teorie geometriche ». Cap. I, n. 13.

2. Le corrispondenze [1, 2] e la proiettività involutoria. — Consideriamo una corrispondenza [1, 2] fra due rette: su una di esse distendiamo la variabile t e sull'altra la variabile x.

Questa corrispondenza sarà data dall'equazione

$$f(tx) = 0,$$

di primo grado in t e di secondo grado in x, equazione che definisce t come funzione razionale fratta di secondo grado del tipo

$$t = \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{b_0 x^2 + b_1 x + b_2}.$$

Notiamo che la t assume ogni valore $\bar{t}$ due volte, e precisamente nei due punti x radici dell'equazione

$$\varphi(x) = \bar{t};$$

queste coppie di punti in cui la t assume un medesimo valore si chiamano coppie *di livello* della funzione t.

Ora *le coppie di livello della funzione* φ *costituiscono una involuzione*, cioè sono coppie di punti coniugati in una proiettività involutoria.

Infatti il punto $\bar{x}'$ che insieme a un punto prefissato $\bar{x}$ costituisce una coppia di livello della φ, soddisfa l'equazione di 2° grado

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = 0,$$

la quale ammette le due radici $\bar{x}$ e $\bar{x}'$. Riduciamo la $\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = 0$ a forma intera e dividiamo per $x - \bar{x}$, avremo

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0) x\bar{x} + (a_0 b_2 - a_2 b_0)(x + \bar{x}) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0.$$

Si vede così che il punto $\bar{x}'$ è il coniugato di $\bar{x}$ nell'involuzione

$$Axx' + B(x + x') + C = 0,$$

dove

$$A = a_0 b_1 - a_1 b_0; \quad B = a_0 b_2 - a_2 b_0; \quad C = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Fra le coppie di livello della funzione $\varphi(x)$ hanno particolare interesse la coppia degli *zeri* e la coppia dei *poli*, cioè le coppie di punti in cui la φ assume rispettivamente i valori 0, ∞. Se a_0 e b_0 sono entrambi diversi da 0, allora per $x=\infty$ la $\varphi(x)$ assume il valore $\frac{a_0}{b_0}$, finito e diverso da zero, in quanto

$$\lim_{x=\infty}\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x^2+b_1x+b_2}=\lim_{x=\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}}=\frac{a_0}{b_0};$$

e così la coppia degli zeri è data dalle radici del numeratore, e quella dei poli dalle radici del denominatore.

Supponiamo ora che a_0 o b_0 siano nulli, sia per esempio $a_0=0$. Allora una delle radici del numeratore và all'∞ e $\lim\limits_{x=\infty}\varphi(x)=0$, come si verifica facilmente: sicchè anche in questo caso si può dire che la coppia degli zeri è data dalle radici del numeratore. Ciò vale anche se insieme $a_0=a_1=0$, caso in cui la coppia degli zeri si riduce al punto all'infinito contato due volte.

Analoghe considerazioni valgono per la coppia dei poli nel caso in cui al denominatore della $\varphi(x)$ si abbia $b_0=0$, o anche $b_0=b_1=0$.

Notiamo ora che la $\varphi(x)$ è determinata dai suoi poli e dai suoi zeri a meno di un fattore moltiplicatore.

Infatti dati gli zeri, cioè le radici del numeratore

$$a_0x^2+a_1x+a_2,$$

questo è determinato a meno di una costante moltiplicativa λ, e così pure, dati i poli, il denominatore resta determinato a meno di una costante moltiplicativa μ. Quindi dalle coppie degli zeri e dei poli la φ resta determinata a meno del fattore $\frac{\lambda}{\mu}$. Perchè adunque la φ sia completamente determinata occorre dare anche la coppia di punti in cui essa acquista un qualunque valore prefissato, per esempio il valore 1. Notiamo però che mentre la coppia degli zeri e quella dei poli possono essere assunte ad arbitrio, dei due punti in cui la φ ha il valore 1 uno solo può essere scelto in modo arbitrario, restando l'altro determinato di conseguenza.

Abbiamo dimostrato che le coppie di livello di una funzione razionale di secondo grado $\varphi = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ appartengono ad un' involuzione; facciamo ora vedere reciprocamente che:

Le coppie di punti coniugati in una proiettività involutoria I *sono le coppie di livello di una funzione di secondo grado* $\varphi = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$.

Infatti prendiamo due coppie di punti coniugati nella I, una come coppia di zeri e l'altra come coppia di poli di una funzione razionale di secondo grado $\varphi = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ (la quale resta così determinata a meno di una costante moltiplicativa, che potremo fissare ad arbitrio). Le coppie di livello della funzione $\varphi(x)$, così costruita, appartengono ad un' involuzione coincidente con la I, avendo con essa due coppie in comune.

Nella costruzione della funzione φ abbiamo adunque arbitraria la scelta di tre coppie, nei punti delle quali si assegnano a φ i valori 0, ∞, 1: facciamo vedere che il cambiamento di queste 3 coppie equivale ad una proiettività sul parametro t.

Infatti sia $\psi(x)$ un'altra funzione che abbia come coppie di livello le coppie della involuzione I e prenda i valori 0, ∞, 1 rispettivamente nelle coppie

$$\varphi(x) = t_0, \quad \varphi(x) = t_\infty, \quad \varphi(x) = t_1;$$

queste condizioni determinano la $\psi(x)$.

Operiamo sul parametro t la trasformazione

$$\tau = \frac{mt + n}{pt + q},$$

tale che ai valori

$$t = t_0, \quad t = t_\infty, \quad t = t_1$$

corrispondano i valori

$$\tau = 0, \quad \tau = \infty, \quad \tau = 1;$$

la

$$\varphi(x) = t$$

si trasforma in una

$$\overline{\psi}(x) = \tau,$$

e $\overline{\psi}(x)$ assume precisamente i valori 0, ∞, 1 dove la $\varphi(x)$

assumeva i valori t_0, t_∞, t_1; si conclude che la funzione $\overline{\psi}(x)$ coincide con $\varphi(x)$, ciò che dimostra l'asserto.

Prendendo come coppia di zeri e di poli i punti doppi dell'involuzione a, b, la $\varphi(x)$ si riduce alla forma $k\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)^2}$, e per $a=0$, $b=\infty$ diventa $\varphi=kx^2$.

3. **Le involuzioni d'ordine n e il teorema di Lüroth.** — Abbiamo visto come i punti coniugati in una proiettività involutoria costituiscano le coppie di livello di una funzione razionale (fratta) di secondo grado: l'involuzione resta così definita come serie algebrica di coppie di punti tale che ogni coppia sia individuata da un suo punto.

Questa definizione contiene direttamente quella di DESARGUES (1) che introduce le involuzioni dotate di centro come insieme delle coppie le cui distanze da un punto danno un prodotto costante. Ora si può dare una generalizzazione della involuzione che risale a PONCELET (1816) (2) ed è stata svolta da DE JONQUIÈRES (3) (1859).

L'involuzione di second'ordine definita innanzi, nasce (come già avvertiva lo CHASLES nei Comptes Rendus il 24 dec. 1855) da una corrispondenza [1, 2] fra la retta su cui è steso il parametro t e quella su cui è stesa la variabile x, corrispondenza data dall'equazione

$$\varphi(x)=t.$$

Ciò posto consideriamo una corrispondenza [1, n] fra la t e la x; essa sarà data dall'equazione

$$\varphi(x)=t,$$

dove ora φ è una funzione razionale (fratta) di grado n. Per ogni valore $\bar{t}$ della t, abbiamo per x gli n valori radici del-

(1) « Brouillon proiect d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cone avec un plan ». Parigi, 1639. - Cfr. Oeuvres-Parigi, Leiber, 1864. Vol. I. — Precisamente DESARGUES chiama *involution* la relazione fra tre coppie di punti che soddisfano alla condizione del testo.

(2) Cfr. « Applications d'Analyse et de Géométrie ». Parigi, 1864, t. II, pg. 218.

(3) « Généralisation de la théorie de l'involution ». Annali di Mat., Serie II. Roma, 1859, (pag. 86).

l' equazione

$$\varphi(x) = \bar{t}.$$

Avremo così sulla x una serie semplicemente infinita di gruppi di n punti che sono gruppi di livello per la funzione $\varphi(x)$, la quale assume lo stesso valore in ciascun punto di ogni gruppo. Anche qui, come per $n = 2$, ogni punto individua un gruppo, poichè, fissato per x un valore $\bar{x}$, resta fissato il valore $\bar{t} = \varphi(\bar{x})$ e quindi gli altri $n - 1$ punti in cui φ assume lo stesso valore $\bar{t}$.

Questa serie dei gruppi di livello della funzione φ s'indicherà col simbolo g_n^1 e si chiamerà *involuzione d'ordine* n.

Mettendo in evidenza il numeratore e il denominatore di φ, scriviamo

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

dove, essendo n il massimo grado dei polinomi φ_1 e φ_2, questi due polinomi vengono considerati ambedue come di grado n. L'equazione dell'involuzione sarà

$$\varphi_1(x) - t\varphi_2(x) = 0,$$

ovvero, ponendo $t = -\frac{\mu}{\lambda}$,

$$\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = 0;$$

e, come nel caso $n = 2$, le radici di $\varphi_1(x) = 0$ saranno gli zeri, e le radici di $\varphi_2(x) = 0$ i poli della $\varphi(x)$. Se il coefficiente di x^n in $\varphi_1(x)$, oppure in $\varphi_2(x)$, è uguale a zero (cioè se uno dei due polinomi è effettivamente di grado $< n$), il punto all'infinito fa parte del gruppo degli zeri o rispettivamente del gruppo dei poli della g_n^1, e ben inteso vi figura r (> 1) volte se si annullano altresì i coefficienti di $x^{n-1}, \ldots x^{n-r+1}$.

Come per il caso di $n = 2$ si possono scegliere ad arbitrio gli n zeri e gli n poli di una funzione razionale φ di grado n, che risulta così determinata a meno di una costante moltiplicativa. Se fra gli zeri o fra i poli si assume il punto all'∞ contato un certo numero r di volte, allora rispettivamente il numeratore o il denominatore della φ risulta di grado $n - r$.

In modo identico a quello tenuto per $n = 2$ si dimostra che: « una proiettività sul parametro t equivale a un cambiamento del gruppo dei poli e degli zeri e del gruppo-unità (ove $\varphi = 1$) ».

L'involuzione g^1_n sopra una retta: $\varphi(x) = t$, è una serie semplicemente infinita di gruppi di n punti la quale gode le due seguenti proprietà:

a) è algebrica, cioè definisce sulla retta una particolare corrispondenza algebrica (simmetrica);

b) è tale che ogni punto appartiene a *un* gruppo della serie.

Queste proprietà porgono una nuova definizione della involuzione g^1_n: sussiste infatti il

Teorema di Lüroth [1]. *Sulla retta, ogni serie algebrica semplicemente infinita di gruppi di* n *punti, tale che ogni punto appartenga ad un gruppo, è costituita dai gruppi di livello di una funzione razionale di grado* n.

Siano G e G' due gruppi di n punti (propri) distinti della nostra serie algebrica. Costruiamo la funzione razionale $\varphi(x)$ che ha per zeri i punti di G e per poli i punti di G'.

Per ipotesi, dato un punto qualunque $x = x_1$ della retta, restano algebricamente determinati i punti coniugati $x_2, \ldots x_n$, che, insieme ad x_1, costituiscono il gruppo della serie algebrica cui appartiene x. Consideriamo la funzione

$$\Phi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n),$$

che in ogni punto x ha per valore la somma dei valori della f nei punti del gruppo individuato da x; si vuol dimostrare che codesta $\Phi(x)$ è una funzione razionale.

A tale scopo occorre introdurre l'equazione algebrica $f(xy) = 0$ che per $x = x_1$ dà gli $n - 1$ valori coniugati $y = x_2, \ldots x_n$; la

$$\varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)$$

è una funzione simmetrica delle radici di $f(y) = f(x_1 y) = 0$, la quale si esprime razionalmente per i coefficienti di $f(y)$ e quindi per x; segue che anche

$$\Phi(x) = \varphi(x_1) + (\varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n))$$

è funzione razionale di x.

[1] Cfr. Math. Annalen. Bd 9.

Ora la funzione Φ riprende evidentemente lo stesso valore nei punti che appartengono ad un gruppo della serie algebrica data; quindi i gruppi di livello della Φ contengono i gruppi della serie algebrica. Facciamo vedere che la Φ è di grado n, e perciò codesti gruppi contengono solo n punti, sicchè essi coincidono con i gruppi della serie algebrica, la quale risulta così costituita dai gruppi di livello della Φ.

A tale scopo, basta notare che la Φ diviene infinita solo nei punti in cui sia infinito $\varphi(x_1)$ o $\varphi(x_2)$.... o $\varphi(x_n)$ cioè nei punti di G', che risultano per la Φ poli di primo ordine, essendo tali per la φ. All'infinito φ, e quindi anche Φ, assume un valore finito. Adunque la $\Phi(x)$ risulta una funzione razionale di grado n.

Si può osservare che a questa conclusione si arriva anche senza far uso dell'equazione algebrica $f(xy)=0$ quando si tenga conto che $\Phi(x)$ risulta funzione analitica ad un valore, della variabile complessa x, con n poli (1).

Notiamo infine che, la Φ e la φ, funzioni di grado n con lo stesso gruppo di zeri e di poli, differiscono solo per una costante moltiplicativa, quindi i gruppi di livello della Φ coincidono con quelli della φ, cioè la serie algebrica data è la g^1_n:

$$\varphi(x)=t.$$

Nota. A chiarire il significato del teorema di Lüroth giova rilevarne due aspetti principali.

Anzitutto codesto teorema assegna la condizione particolare che vale a distinguere le involuzioni fra le corrispondenze simmetriche.

Una corrispondenza simmetrica $[m, m]$, concepita come un'operazione π, si può caratterizzare dicendo che « se a un punto generico A corrispondono $A_1 \dots A_m$, ad A_1 corrisponde un gruppo di m punti contenente A, (ma non in generale $A_2 \dots A_m$) » ossia « la corrispondenza π^2, che è $[m^2, m^2]$, quando π è simmetrica si riduce alla somma della identità contata m volte e di una corrispondenza $[m(m-1), m(m-1)]$ ». Ora si può dire che « l'involuzione d'ordine $n=m+1$ è una corrispondenza π simmetrica tale che (per $n>2$) π^2 è riducibile

(1) Cfr. p. es. Bianchi. Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa. Pisa, Spoerri, 1901, pag. 165.

alla somma dell'identità contata m volte e della π stessa contata $m-1$ volte ».

D'altra parte una serie algebrica di gruppi di n punti sopra la retta, si può definire (indipendentemente dal concetto di corrispondenza) mediante un sistema di equazioni algebriche

$$(1) \qquad \begin{cases} \psi_1(X_1 X_2 \dots X_n) = 0 \\ \psi_2(X_1 X_2 \dots X_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi_m(X_1 X_2 \dots X_n) = 0, \end{cases}$$

che leghino le funzioni simmetriche elementari $X_i = \Sigma x_1 x_2 \dots x_i$, delle ascisse $x_1, x_2, \dots x_n$ degli n punti, le quali X_i possono assumersi come coordinate dei « gruppi di n punti ». Se la varietà definita dalle 1) è di dimensione 1, la serie semplicemente infinita di gruppi così determinata, che può supporsi priva di punti fissi, dà luogo a una corrispondenza algebrica (non degenere) sopra la retta. Infatti si assegni ad x_1 un certo valore, p. es. $x_1 = 0$; la condizione di compatibilità delle equazioni

$$X_i = \Sigma x_1 x_2 \dots x_i,$$

si traduce in una equazione fra le $X_1 \dots X_n$ da aggiungersi al sistema 1), in questo caso nell'equazione

$$X_n = x_1 x_2 \dots x_n = 0,$$

che vale a rendere determinato il sistema 1) e perciò a definire un numero finito di gruppi $(x_2 \dots x_n)$, formati ciascuno di $n-1$ punti corrispondenti ad x_1 e variabili con esso.

I valori di $X_1 \dots X_{n-1}$ forniscono l'equazione d'uno di questi gruppi di $n-1$ punti

$$y^{n-1} - X_1 y^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} X_{n-1} = 0;$$

moltiplicando fra loro tutte le equazioni analoghe, si ottiene l'equazione $f(xy) = 0$ che rappresenta la corrispondenza sopra definita.

Ciò posto, si può dire che « una serie ∞^1 di gruppi di n punti, definita sopra la retta da un sistema di equazioni algebriche 1), e tale che ogni punto appartenga ad *un* gruppo, si può porre in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta t, sicchè le equazioni della serie si riducano a

$$t = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \dots = \varphi(x_n) \text{ ».}$$

4. **Involuzioni con punti fissi.** — Consideriamo l'involuzione di second'ordine data dalle coppie di livello della funzione $\varphi(x)$, che scriviamo mettendo in rilievo gli zeri e i poli

1) $$\varphi(x) = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(x - \beta_1)(x - \beta_2)} = t.$$

La 1) ridotta a forma intera dà:

2) $$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = t(x - \beta_1)(x - \beta_2).$$

Facciamo variare β_1 con continuità, tendendo ad α_1. Allora, per ciascun valore di t una delle radici della 2) tende al valore α_1, giacchè se nella 2) poniamo $\beta_1 = \alpha_1$ essa risulta soddisfatta, qualunque sia il valore di t, per $x = \alpha_1$.

Consideriamo ora la funzione $\bar{\varphi}(x) = \dfrac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}{(x - \alpha_1)(x - \beta_2)}$, in cui un polo ($\beta_1$) coincide con uno zero (α_1), ritenendola come limite di una funzione φ per cui un polo sia vicinissimo ad uno zero. Avremo allora che le coppie di livello della $\bar{\varphi}$ saranno le coppie limiti delle corrispondenti coppie della φ e quindi tutte conterranno il punto $x = \alpha_1$, cioè saranno costituite da un sol punto variabile e dal punto fisso α_1. In questo caso la proiettività involutoria in cui si corrispondono i punti delle coppie di livello della φ, risulterà degenere, ad ogni punto della retta corrispondendo il punto α_1.

Ciò si verifica direttamente scrivendo l'equazione della proiettività suddetta sotto la forma

$$Axx' + B(x + x') + C = 0,$$

dove A, B, C si esprimono per mezzo delle formule del § 2 facendo in esse $a_0 = 1$, $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $a_2 = \alpha_1\alpha_2$, $b_0 = 1$, $b_1 = -(\alpha_1 + \beta_2)$, $b_2 = \alpha_1\beta_2$:

$$A = \alpha_2 - \beta_2, \quad B = \alpha_1(\beta_2 - \alpha_2), \quad C = \alpha_1^2(\alpha_2 - \beta_2);$$

infatti il coniugato di un punto x è allora

$$x' = -\frac{C + Bx}{B + Ax},$$

sicchè, essendo in questo caso $B^2 = AC$, cioè $\frac{C}{B} = \frac{Bx}{Ax}$, risulta

$$x' = -\frac{B}{A} = \alpha_1,$$

qualunque sia x.

Le considerazioni fatte si estendono alle involuzioni d'ordine n qualunque.

Consideriamo un'involuzione g_n^1 costituita dai gruppi di livello di una funzione razionale

$$\varphi(x) = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}{(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n)}.$$

Se β_1 viene a coincidere con α_1, la g_n^1 viene ad avere il punto α_1 come fisso, cioè appartenente a tutti i suoi gruppi, giacchè α_1 è radice dell'equazione

$$(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) = t(x - \alpha_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n),$$

qualunque sia il valore di t. Gli altri $n - 1$ punti di un gruppo della g_n^1 varieranno in generale con t e formeranno i gruppi di una g_{n-1}^1 *residua del punto fisso*, la quale resta definita dall'equazione

$$(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = t(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n).$$

Ove accada che r *poli* di $\varphi(x)$ vengano a *coincidere con* r *zeri*, si avranno r *punti fissi* della g_n^1 (distinti o no), e i punti variabili daranno luogo ad una g_{n-r}^1 residua irriducibile. La $\varphi(x)$, scritta come quoziente di due polinomi d'ordine n, possiederà r punti d'*indeterminazione apparente* nei punti fissi suddetti.

Il caso in cui una g_n^1 possieda dei punti fissi si può ritenere come un caso di *degenerazione* della g_n^1, essendo degenere la corrispondenza $[1, n]$ che gli dà origine; la degenerazione sarà *parziale* se ci sono r punti fissi con $r < n$. Le g^1_n *totalmente degeneri*, costituite da n punti fissi della retta, *saranno escluse* dalle considerazioni seguenti.

Osservazione. Il caso in cui vi siano punti fissi, cioè il caso degenere, è il solo caso in cui una involuzione g^1_n nasca da una corrispondenza $[1, n]$ riducibile, giacchè se una tale corrispondenza si riduce alla somma di due altre $[r, s]$, $[p, q]$, si ha

$$r + p = s, \quad s + q = n,$$

e quindi r o $p = 0$ (Cfr. L. 1°, § 16).

Ma, come vedremo più avanti (§§ 7, 8) l'involuzione stessa può essere riducibile come corrispondenza $[n-1, n-1]$, pure essendo irriducibile la corrispondenza $[1, n]$ che le dà origine.

5. Punti doppi. Applicazione ai sistemi di curve: teorema di Bertini. — Chiamasi punto doppio (o i-plo) di una g^1_n, un punto che figura contato due (o i) volte in un gruppo della serie.

Una involuzione g^1_n, *d'ordine* n, *possiede* 2n — 2 *punti doppi* (i quali tuttavia possono ridursi a un minor numero di punti multipli, da contarsi nel modo che preciseremo più avanti).

Infatti l'involuzione concepita come corrispondenza $[n-1, n-1]$ possiede $2n-2$ punti uniti (§ 1). Per avere l'equazione dei punti doppi dell'involuzione

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = t,$$

giova scrivere anzitutto l'equazione della corrispondenza fornita dall'involuzione stessa. Questa è rappresentata da

$$\varphi(x) = \varphi(y),$$

dove tuttavia viene aggiunto ai coniugati di un punto anche se stesso. Riduciamo l'equazione suddetta a forma intera e liberiamola del fattore che rappresenta l'identità, avremo l'equazione della corrispondenza sotto la forma

$$f(xy) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x)}{x - y} = 0.$$

Questa equazione è apparentemente di grado $2n - 1$, essendo φ_1 e φ_2 di grado n, ma in realtà si riduce al grado complessivo $2n - 2$ perchè il coefficiente di $x^n y^n$ in

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x)$$

si annulla identicamente; infatti poniamo

$$\varphi_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$
$$\varphi_2(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n,$$

il coefficiente di $x^n y^n$ tanto in $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ come in $\varphi_1(y)\varphi_2(x)$ sarà ugualmente $a_0 b_0$.

Ora facendo $y = x$ nell'equazione della corrispondenza si ottengono i punti uniti dati da

1) $$\left(\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\varphi_2(x)}{x - y}\right)_{y=x} = 0.$$

Se in luogo di eseguire prima la divisione per $x - y$ si pone nel primo membro della 1) $y = x$, esso assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; pongasi allora $y = x + h$, e si cerchi il limite per $h = 0$. Applicando la regola dello Hôpital viene

2) $$\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

I punti doppi dell'involuzione g_n^1 si possono anche determinare scrivendo che l'equazione

$$\varphi_1(x) - t\varphi_2(x) = 0,$$

considerata per un certo valore di t, deve avere una radice doppia, la quale perciò deve soddisfare insieme all'equazione predetta e alla sua derivata, cioè al sistema

3) $$\begin{cases} \varphi_1(x) - t\varphi_2(x) = 0 \\ \varphi_1'(x) - t\varphi_2'(x) = 0. \end{cases}$$

La ricerca dei punti doppi si può effettuare eliminando t od x, fra le equazioni 3).

Se si elimina x si trova un'equazione resultante di grado $2n-1$ in t, $R(t)=0$, la quale tuttavia ammette la radice $t=\frac{a_0}{b_0}$ cui corrisponde la soluzione $x=\infty$ del sistema 3); infatti per quel valore di t si abbassano di 1 tanto l'ordine di $\varphi_1 - t\varphi_2$ come quello della sua derivata. Siccome $x=\infty$ non è, in generale, un punto doppio della g^1_n, l'anzidetta radice di $R(t)=0$ deve essere scartata, e così $R=0$ si abbassa al grado $2n-2$.

Lo scarto della radice $x=\infty$, soluzione impropria del nostro problema, si effettua senz'altro ove, in luogo di eliminare x, si cerchino le soluzioni del sistema 3) eliminando t. Allora si trova che x è radice della già scritta equazione

$$2)\qquad \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

Questa è apparentemente di grado $2n-1$, ma in realtà di grado $2n-2$, poichè il coefficiente di x^{2n-1} è

$$na_0b_0 - na_0b_0 = 0,$$

Osservazione. Si può mettere in evidenza che l'equazione del gruppo dei punti doppi di una g^1_n è di grado $2n-2$, introducendo coordinate emogenee. L'equazione della g^1_n si scriverà sotto la forma

$$\lambda\varphi_1(x_1x_2) + \mu\varphi_2(x_1x_2) = 0, \qquad \left(t = -\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

e i punti doppi si otterranno eliminando λ e μ fra le equazioni

$$\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = 0,$$

ciò che conduce ad annullare lo jacobiano

$$J(\varphi_1\varphi_2) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}.$$

Nelle considerazioni che seguono ritorniamo all'uso delle coordinate non omogenee.

Se $\bar{x}$ è un punto i-plo per la $g^1_n (i > 2)$, allora $x = \bar{x}$ è radice i-pla della

$$\varphi_1(x) - \bar{t}\varphi_2(x) = 0$$

e $(i-1)$-pla della

$$\varphi_1'(x) - \bar{t}\varphi_2'(x) = 0,$$

e quindi ancora $(i-1)$-pla per l'equazione 2).

Si ha così che *un punto* i-plo *della* g^1_n *conta come* i — 1 *punti doppi.*

A questo resultato si arriva anche applicando alla corrispondenza involutoria la regola di ZEUTHEN (§ 1). Un punto i-plo per la g^1_n può sempre supporsi corrispondere al valore $t = 0$ e cadere nel punto $x = 0$. Allora $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, nell'intorno del punto zero, è — a meno di infinitesimi d'ordine superiore — $\frac{a_{n-i}}{b_n} x^i$, dove sarà $b_n \neq 0$ se $x = 0$ non è un punto fisso per la g^1_n. Ora nell'intorno di $x = 0$ i coniugati di un punto $x = \sqrt[i]{\frac{b_n}{a_{n-1}} t}$, sono, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\varepsilon x, \ \varepsilon^2 x, \dots \varepsilon^{i-1} x,$$

dove ε indica una radice primitiva i-esima dell'unità, perciò le distanze del punto x dai suoi $i-1$ coniugati prossimi ad $x = 0$, sono infinitesime del prim'ordine rispetto ad x; la somma di questi ordini di infinitesimo fornisce la molteplicità $i-1$ del punto i-plo, nel gruppo dei punti doppi della g^1_n.

Per completare l'esame dei punti doppi di una g^1_n resta soltanto da considerare il caso in cui questa abbia dei punti fissi.

Un punto fisso della g^1_n *assorbe due punti doppi*, giacchè tolto quel punto resta una g^1_{n-1} con $2n-4$ punti doppi. Ciò si verifica direttamente per l'involuzione

$$(x - a)\psi_1(x) - t(x - a)\psi_2(x) = 0$$

giacchè allora, per $\varphi_1 = (x - a)\psi_1$, $\varphi_2 = (x - a)\psi_2$, l'equazione 2) diviene

$$(x - a)^2(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)) = 0.$$

In modo affatto simile si vede che un *punto fisso* r-plo per la g^1_n conta per $2r$ *punti doppi.*

Possiamo riassumere i risultati ottenuti enunciando il

Teorema. Si abbia una involuzione d'ordine n, g^1_n, la quale possegga: h punti fissi di molteplicità

$$r_1, r_2, \dots r_h,$$

e k punti multipli, per la serie privata dei punti fissi, di molteplicità

$$i_1, i_2, \dots i_k,$$

sussiste allora *l'uguaglianza*

$$2(r_1 + r_2 + \dots + r_h) + i_1 + i_2 + \dots + i_k - k = 2n - 2.$$

Osservazione. Come si vede, per le involuzioni g^1_n, a differenza di ciò che avviene in generale per le corrispondenze $[n-1, n-1]$, si arriva ad assegnare in modo preciso le molteplicità secondo cui i punti multipli figurano nel gruppo dei $2n-2$ punti doppi (uniti per la corrispondenza).

Questa circostanza è in rapporto col fatto che per l'involuzione non possono aversi due punti multipli infinitamente vicini, i quali non cadano in un punto fisso o in un punto di molteplicità superiore. Ciò è ben noto per $n = 2$: una involuzione di coppie di punti non può dar luogo ad una proiettività parabolica, se non è degenere.

Supponiamo, in generale, che una involuzione g^1_n, dipendente da un parametro λ, possegga un punto r-plo e un punto s-plo variabile col detto parametro, i quali si avvicinino indefinitamente per $\lambda = 0$.

Poniamo, per semplicità, che uno dei due punti multipli resti fermo in $x = 0$, e corrisponda al valore $t = 0$; la distanza x dei due punti multipli e la differenza (t) fra i valori che t prende in essi, diventeranno insieme infinitesime; ma poichè t è una funzione razionale di x (la quale può supporsi non avere un polo nel punto $x = 0$, per $\lambda = 0$), sarà t infinitesimo d'ordine maggiore od uguale ad x. Nel primo caso si può ritenere che si avvicinino indefinitamente un punto r-plo e un punto s-plo appartenenti al medesimo gruppo, sicchè nasce un punto $(r+s)$-plo. Esaminiamo più da vicino il secondo caso, riferendoci all'ipotesi più semplice: $r=s=2$. Avremo per $\lambda=0$ una involuzione $\varphi_1(x)-t\varphi_2(x)=0$, dove l'equazione $\varphi_1(x)=0$ ammetterà la radice doppia $x=0$, sicchè si potrà scrivere

$$\varphi_1(x)=x^2(a_{n-2}+a_{n-3}x+\dots\dots+a_0x^{n-2})\,; \quad (a_n=a_{n-1}=0)\,;$$

in secondo luogo l'equazione

$$\varphi_1(x)-dt\cdot\varphi_2(x)=0$$

ammetterà una radice doppia $\alpha\,dt$, e perciò si avrà identicamente

$$(x-\alpha\,dt)^2(c_{n-2}+c_{n-3}x+\dots\dots+c_0x^{n-2})=$$
$$=x^2(a_{n-2}+a_{n-3}x+\dots\dots+a_0x^{n-2})-dt(b_n+b_{n-1}x+\dots\dots+b_0x^n)\,;$$

si deduce

$$b_n\,dt=c_{n-2}\alpha^2dt^2$$

e quindi

$$b_n=0,$$

ossia

$$\varphi_2(x)=x(b_{n-1}+b_{n-2}x+\dots\dots+b_0x^{n-1})\,;$$

ciò significa che l'involuzione

$$\varphi_1(x)-t\varphi_2(x)=0$$

ha un punto fisso per $x=0$.

In modo analogo: se per una involuzione contenente un parametro variabile, si avvicinano indefinitamente un punto r-plo e un punto s-plo $(s\leq r)$, che debbano ritenersi come appartenenti a gruppi essenzialmente distinti, l'involuzione limite possiede un punto fisso contato $s-1$ volte, a cui si sovrappone (per $r>s$) un punto $(r-s+1)$-plo della serie residua g^1_{n-s+1}.

Giova avvertire che *il gruppo dei* $2n-2$ *punti doppi di una involuzione* g^1_n, *che non sia totalmente degenere, non può mai diventare indeterminato.*

Infatti se l'involuzione

$$\varphi_1(x) - t\varphi_2(x) = 0$$

deve dar luogo a indeterminazione dei punti doppi, l'equazione di essi

2) $$\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = 0,$$

cioè

$$\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)},$$

deve ridursi ad una identità. Integrando viene quindi

$$\log \varphi_1(x) = \log \varphi_2(x) + \log k \qquad (\log k = \text{cost.})$$

cioè

$$\varphi_1(x) = k\varphi_2(x);$$

ciò significa che la involuzione data è totalmente degenere.

A questa stessa conclusione si arriva con considerazioni puramente algebriche, notando che se si suppongono soppressi i fattori comuni di φ_1 e φ_2 non può accadere che il polinomio φ_1, primo con φ_2, divida il prodotto $\varphi_2\varphi_1'$.

D'altra parte il teorema sopra enunciato risulta chiaro sotto l'aspetto geometrico, ove si noti che, nel caso di indeterminazione dei punti doppi, ogni gruppo dell'involuzione possiederebbe un punto doppio (o multiplo) variabile, ed allora, considerando due gruppi infinitamente vicini, si avrebbero due punti doppi (o multipli) infinitamente vicini; il che è stato escluso nella precedente osservazione.

Corollario. *Il gruppo generico di una g^1_n irriducibile non possiede punti doppi.*

Una semplice applicazione delle osservazioni precedenti conduce anche a stabilire il

Teorema di Bertini *sui punti doppi delle curve d'un sistema lineare* [1]: se la curva generica di un sistema lineare, senza parti fisse, possiede dei punti doppi o multipli, questi sono fissi, cioè cadono nei punti base del sistema.

[1] Rendic. Istituto lombardo (1880).

Basterà dimostrare il teorema per il fascio

$$\lambda\varphi_1(xy) + \mu\varphi_2(xy) = 0,$$

determinato da due curve generiche del sistema, giacchè i punti che sono base per ogni fascio contenuto nel sistema sono base per il sistema.

Il ragionamento procede per assurdo.

Se la curva generale del fascio $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$ è dotata d'un punto doppio variabile, questo descriverà una curva ψ sulla quale si avrà $\frac{\mu}{\lambda}$ funzione di una delle coordinate, per es.:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \theta(x).$$

Consideriamo una curva φ del fascio dotata di un punto doppio A, ed una curva variabile φ', prossima a φ, dotata di un punto doppio A' che si avvicina ad A.

La retta AA' ha come posizione limite, a, la tangente in A alla curva ψ. Il nostro fascio sega sopra la retta AA' una g^1_n dotata dei due punti doppi A e A'; al limite si avrà sopra a una g^1_n contenente come punto fisso A. Infatti la distanza AA' si può ritenere un infinitesimo dello stesso ordine della differenza delle ascisse x (escluse posizioni particolari degli assi), e la differenza dei valori di $\frac{\mu}{\lambda}$ che corrispondono ai due gruppi di cui A e A' sono punti doppi diviene certo infinitesima dello stesso ordine dell'incremento di x, quando A sia un punto generico della curva ψ; invero si ha

$$d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \theta'(x)dx,$$

dove, per quanto si è supposto, non è $\theta = 0$. Resta così provato, in contraddizione all'ipotesi fatta, che il punto A appartiene a tutte le curve $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$, e quindi che la curva ψ da esso descritta deve costituire una parte fissa del fascio.

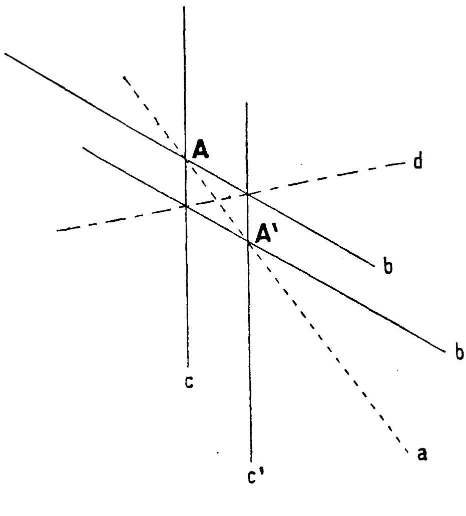
Nota. Il ragionamento si può svolgere anche in altra forma come corollario della osservazione più generale espressa dal seguente

Teorema sui fasci determinati da due curve con punto doppio infinitamente vicino: se una curva φ', dotata di un punto doppio variabile A', si avvicina indefinitamente a una curva fissa φ, dotata di punto doppio A, per modo che la retta AA' tenda ad una retta a, il *fascio limite* determinato dalle due curve infinitamente vicine, *possiede* A come *punto base semplice*: inoltre si ha in A una *tangente fissa* che è la retta *coniugata armonica* di a *rispetto* alle *tangenti principali* di φ.

Pongasi dapprima che φ' s'avvicini a φ in guisa che la retta a sia distinta dalle tangenti principali b, c della φ.

Il fascio determinato da φ e φ' sega sopra la retta AA' una g_n^1 che ha come punti doppi A e A'; al limite si ottiene sopra a una g_n^1 che ha come punto fisso A; altrimenti, se la distanza AA' fosse infinitesima d'ordine inferiore rispetto alla distanza delle due curve φ e φ', A risulterebbe punto triplo per il gruppo segato da φ sopra a, il che contraddice all'ipotesi che a sia distinta da b e c. Il caso in cui a coincida con una delle tangenti b o c non può dar luogo ad una eccezione per il teorema precedente, in quanto si può ritenere come limite del caso generale, ove si modifichi per continuità la legge di variazione della φ' tendente a φ.

Ora il nostro fascio limite si potrà ritenere definito dalla curva φ, avente in A un punto doppio, e da un'altra curva generica passante per A, la cui tangente d sarà dunque fissa per le curve del fascio. Per determinare d riferiamoci al caso generale in cui b e c siano distinte fra loro e distinte da a. Si considerino le rette b' e c' prossime a b e c, che sono definite come tangenti principali della φ' in A'; la retta d è limite della congiungente i punti bc' e $b'c$, e quindi è la coniugata armonica di a rispetto a b, c.



La relazione fra le rette a, b, c, d si conserva per continuità anche quando esse cessino di essere distinte. Si hanno allora i seguenti casi particolari:

1) se a coincide con b, restando b e c distinte, allora d coincide con b e quindi le curve del fascio hanno in A un contatto tripunto;

2) se b e c coincidono, cioè *se la* φ *ha in* A *una cuspide* mentre A' si avvicina ad A secondo una direzione a diversa dalla tangente cuspidale, allora d coincide con la tangente cuspidale b, e perciò tutte le curve del fascio hanno ancora in A contatto tripunto;

3) il caso in cui φ ha una cuspide, A, e A' tende ad A secondo la direzione della tangente cuspidale ($a \equiv b \equiv c$), si può riguardare come caso limite del precedente od anche come caso limite di quello in cui b e c si avvicinino ad una bisettrice a del loro angolo. Questa considerazione mostra che la retta d, dovendo coincidere ad un tempo con a e con la perpendicolare ad a, diviene indeterminata, d'accordo con la circostanza che qualunque retta d del fascio A è coniugata armonica di a rispetto ad una coppia di rette coincidenti con a. In conclusione se una curva φ' con punto doppio si avvicina indefinitamente ad una curva dotata di cuspide A, in guisa che la direzione d'avvicinamento del punto doppio sia la tangente cuspidale, il fascio limite possiede in A un punto base doppio.

Importa avvertire che *il precedente teorema è invertibile nel caso generale*: un fascio di curve con un punto base semplice A ove si abbia una tangente fissa d, si può ritenere in generale determinato come fascio limite da una curva avente in A un punto doppio e da un'altra curva prossima alla prima il cui punto doppio si avvicini ad A.

Infatti, se imponiamo alle curve del fascio di possedere in A una seconda tangente — diversa da d — si definisce nel fascio una curva φ che ha in A un punto doppio, le cui tangenti principali b e c saranno in generale distinte fra loro e distinte da a. In questa ipotesi proviamo che il fascio contiene una curva φ' infinitamente vicina a φ, che possiede un punto doppio A' sulla retta a coniugata armonica di d rispetto a b e c.

Pongasi A nell'origine delle coordinate:

$$A \equiv (00),$$

e siano b e c simmetriche rispetto all' asse x:

$$\varphi = x^2 - \alpha^2 y^2 + \ldots;$$

il fascio delle curve tangenti ad $y = 0$ che contiene φ sarà

$$f = (x^2 - \alpha^2 y^2 + a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} x y^2 + \ldots) + \\ + \lambda (b_{01} y + b_{20} x^2 + b_{11} x y + b_{02} y^2 + \ldots) = 0.$$

Se il punto $(0y)$ deve essere doppio per una curva $f = \varphi'$ del fascio, prossima a φ, si deve avere

$$f(0y) = -\alpha^2 y^2 + \ldots + \lambda (b_{01} y + b_{02} y^2 + \ldots) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,y} = a_{12} y^2 + \ldots + \lambda (b_{11} y + \ldots) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,y} = -2\alpha^2 y + \ldots + \lambda (b_{01} + 2 b_{02} y + \ldots) = 0;$$

e — trascurando gli infinitesimi del second' ordine rispetto ad y — basterà prendere, nella terza equazione,

$$b_{01} \lambda = 2\alpha^2 y;$$

così per λ infinitesimo si avrà nel fascio una curva dotata di punto doppio $\left(0, \frac{b_{01}\lambda}{2\alpha^2}\right)$ prossimo ad A, purchè sia

$$\alpha \neq 0, \quad b_{01} \neq 0.$$

Si vede poi che per $\alpha = 0$ si ha una eccezione essenziale al teorema, giacchè l'avvicinamento di una curva con punto doppio ad una curva φ dotata di cuspide A, nella direzione della tangente cuspidale $x = 0$, dà sempre luogo ad un fascio limite con punto doppio in A; infatti per $\alpha = 0$ il calcolo precedente dà come condizione di compatibilità della terza equazione:

$$b_{01} = 0,$$

confermando così la deduzione relativa al caso 3).

Si osserverà che nella dimostrazione precedente compariscono soltanto i termini di f di grado non superiore a 2. Perciò si possono sostituire le curve del fascio colle *coniche* *approssimanti* rappresentate annullando codesti termini, cioè si può riferire le nostre considerazioni ad un fascio di coniche dotato di due punti base infinitamente vicini A, D e di altri due punti base distinti B e C (rispettivamente su b e c). Allora spostando D su d, si ottiene un fascio di coniche che ha per limite il dato, a cui appartengono due coniche degeneri $CA \cdot BD$ e $CD \cdot BA$ aventi per limite la conica degenere $bc = BA \cdot CA$.

Questa considerazione geometrica cade in difetto se B e C, e quindi b e c, vengono a coincidere; d'accordo col fatto che un fascio di curve tangenti a d e con punto base semplice A, il quale contenga una curva φ dotata di cuspide con tangente cuspidale a diversa da d, non possiede più una curva φ', prossima a φ, che abbia un punto doppio vicino ad A nella direzione a.

6. Nota sulla determinazione delle involuzioni con punti doppi assegnati: interpretazione iperspaziale. — Abbiamo veduto che una involuzione g^1_n sopra la retta, possiede $2n-2$ punti doppi.

Un semplice conto di costanti permette, come vedremo, di riconoscere che codesti punti doppi si possono dare ad arbitrio, e che vi è, in generale, un *numero finito di* g^1_n *le quali posseggono* $2n-2$ *punti doppî assegnati.*

Mentre una corrispondenza $[m, m]$ generale dipende da un'equazione

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x^i y^k$$

con $(m+1)^2$ coefficienti arbitrari (L. 1°, § 24), per una corrispondenza simmetrica si hanno $\frac{(m+1)^2-(m+1)}{2}$ condizioni $a_{ik} = a_{ki}$ (Cfr. § 1) e perciò restano $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coefficienti arbitrari, ossia le corrispondenze simmetriche sono $\infty^{\frac{m(m+3)}{2}}$.

Ora, se si vuole che una corrispondenza $[m, m]$ simmetrica sia data da una involuzione g^1_n $(n = m+1)$, si hanno ulteriori condizioni che potrebbero scriversi in base alla osservazione del § 4. Ma questo procedimento non mette in luce facilmente il numero delle costanti che rimangono arbitrarie per una involuzione, il quale si trova invece come segue. Le coppie di gruppi di n punti, date ad arbitrio sulla retta, costituiscono una varietà a $2n$ dimensioni; una coppia siffatta determina una g_n^1, ma viceversa una g_n^1 nasce in tal modo da ∞^2 coppie di gruppi in essa contenuti; si deduce (L. 1°, § 25) che le g_n^1 formano una varietà a $2n-2$ dimensioni.

Ora ad ogni g_n^1 corrisponde un gruppo di $2n-2$ punti doppi; e siccome i gruppi di $2n-2$ punti della retta formano una varietà a $2n-2$ dimensioni, si deduce che $2n-2$ punti, dati ad arbitrio, sono doppi per un numero finito di g_n^1, come abbiamo sopra enunciato.

Il problema di determinare le involuzioni g_n^1 che posseggano $2n-2$ punti doppi assegnati conduce a uno sviluppo analitico interessante per i rapporti che esso ha con la definizione delle coordinate di rette nello spazio a 3 o più dimensioni. Ne daremo qui un rapido cenno.

Scriviamo l'equazione dell'involuzione g_n^1 come corrispondenza, secondo il § 3, sotto la forma

$$\frac{(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n)(b_0y^n+b_1y^{n-1}+\dots+b_n)-(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n)(a_0y^n+a_1y^{n-1}+\dots+a_n)}{x-y}=0,$$

cioè

$$1)\qquad \sum\frac{(a_ib_k-a_kb_i)(x^{n-i}y^{n-k}-x^{n-k}y^{n-i})}{x-y}=0 \qquad \begin{pmatrix}i=0,1,2\dots n\\ k=0,1,2\dots n\end{pmatrix};$$

dividendo per 2, la 1) si può anche scrivere

$$2)\qquad \sum_{i>k}\frac{(a_ib_k-a_kb_i)(x^{n-i}y^{n-k}-x^{n-k}y^{n-i})}{x-y}=0,$$

dove la sommatoria 2) è estesa solo ai termini per cui $i>k$.

Eseguiamo la divisione indicata nella 2) ponendo:

$$\frac{x^{n-i}y^{n-k}-x^{n-k}y^{n-i}}{x-y}=x^{n-i-1}y^{n-k}+x^{n-i-2}y^{n-k+1}+\dots+x^{n-k}y^{n-i-1},$$

la 2) si cambia nella

$$3)\qquad \Sigma(a_ib_k-a_kb_i)(x^{n-i-1}y^{n-k}+x^{n-i-2}y^{n-k+1}+\dots+x^{n-k}y^{n-i-1})=0.$$

Questa equazione della corrispondenza involutoria $[n-1, n-1]$, mette in evidenza che l'involuzione g_n^1 dipende dai determinanti

$$p_{ki} = a_k b_i - a_i b_k = - p_{ik},$$

che sono i minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 \, a_1 \, \dots \, a_n \\ b_0 \, b_1 \, \dots \, b_n \end{vmatrix},$$

i quali a loro volta risultano definiti, a meno di un fattore, quando è data l'involuzione. Infatti si verifica che il determinante p_{ik} non dipende dalla scelta dei due gruppi di zeri e di poli

$$\varphi_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
$$\varphi_2(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0,$$

presi a definire la g_n^1:

$$t = \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

ma soltanto dalla g_n^1 stessa; invece se al posto di $\varphi_1(x) = 0$ si prende come gruppo di zeri

$$\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = \Sigma a_r' x^r = 0,$$

si ha

$$a_r' = a_r + \lambda b_r,$$

$$\begin{vmatrix} a_i' & a_k' \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_i & b_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix},$$

e analogamente se si cambia anche il gruppo dei poli.

Pertanto le $p_{ik} = - p_{ki}$ si possono ritenere come *coordinate omogenee* di una g_n^1; ma esse non sono assumibili ad arbitrio, giacchè il loro numero è $\frac{n(n+1)}{2}$ mentre una g_n^1 dipende da $2n-2$ costanti arbitrarie; si avranno invero fra le p_{ik} le relazioni quadratiche trinomie

4) $$P_{iklm} = p_{lm} p_{ki} + p_{mk} p_{il} + p_{mi} p_{lk} = 0$$

che abbiamo determinato nel § 19 del libro 1° e che, come abbiamo veduto, permettono di calcolare tutte le p_{ik} in funzione di $2n-1$ fra esse. Poniamo nell'equazione 3) $y=x$, e identifichiamo l'equazione dei punti doppi così ottenuta con una equazione assegnata di grado $2n-2$

$$5) \qquad \alpha_0 x^{2n-2} + \alpha_1 x^{2n-3} + \dots + \alpha_{2n-2} = 0;$$

si ottengono in tal guisa $2n-1$ equazioni lineari omogenee nelle p_{ik}, che, aggiunte al sistema 4), determinano un numero finito di soluzioni, cui corrispondono le g_n^1 che hanno come gruppo di punti doppi il gruppo rappresentato dall'equazione 5).

Il problema di cui otteniamo in tal modo la soluzione si può anche interpretare come relativo alla geometria iperspaziale, facendo così risultare la ragione dell'analogia formale che appare fra le coordinate delle g_n^1 sopra la retta e le coordinate di rette in un S_n.

A tale uopo valgono le considerazioni seguenti.

È noto come la teoria delle involuzioni g_2^1 sopra la retta riesca illuminata quando si trasportino le involuzioni sopra una conica proiettiva alla retta ([1]): allora una g_2^1 viene segata dalle rette di un fascio, e il fatto che una g_2^1 sia determinata dai suoi due punti doppi viene messo in evidenza da ciò che un fascio può esser determinato mediante le due tangenti alla conica che gli appartengono.

Quest'ordine di considerazioni si estende facilmente alle g_3^1. Si perviene a ciò nel modo più semplice e luminoso, richiamando il concetto della geometria astratta (L. 1°, § 18).

Le terne di punti sopra la retta si possono considerare astrattamente come « punti » ovvero come « piani » di uno spazio proiettivo, cioè come elementi di una forma fondamentale di terza specie, dove una g_3^1 venga assunta come forma di prima specie, cioè come « retta = punteggiata », ovvero come « retta = fascio di piani ». Riferiamoci alla prima interpretazione e facciamo vedere brevemente come essa si giustifichi.

([1]) Cfr. p. es. Enriques. « G. Proiettiva ». Cap. X.

Si consideri l'equazione generale di una terna di punti

$$u_0 x^3 + u_1 x^2 + u_2 x + u_3 = 0,$$

e si assumano le $u_0 u_1 u_2 u_3$ come coordinate proiettive omogenee di un punto dello spazio. Questa convenzione basta a fissare il senso della traduzione della nostra geometria astratta. Una retta dello spazio, congiungente i due punti (u_i) e (v_i), i cui punti hanno coordinate del tipo

$$\lambda u_i + \mu v_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

rappresenterà la g^1_3

$$\lambda(u_0 x^3 + u_1 x^2 + u_2 x + u_3) + \mu(v_0 x^3 + v_1 x^2 + v_2 x + v_3) = 0.$$

Parimenti un piano dello spazio, i cui punti hanno coordinate del tipo

$$\lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i,$$

(dove le u_i, v_i, w_i sono linearmente indipendenti, cioè le w_i non sono combinazioni lineari delle u_i, v_i) rappresenterà la serie ∞^2 di terne

$$\lambda(u_0 x^3 + ... + u_3) + \mu(v_0 x^3 + ... + v_3) + \nu(w_0 x^3 + ... + w_3) = 0$$

che dicesi *involuzione doppiamente infinita* o g^2_3.

Alla interpretazione anzidetta corrisponde per dualità quella in cui le $u_0 u_1 u_2 u_3$ vengono assunte come coordinate di piani, cioè le terne di punti della retta vengono denominate « piani » dello spazio astratto; qui le g^1_3 danno ancora « rette = fasci di piani », mentre le g^2_3 danno « punti = stelle di piani ».

Ora, rispetto a questa seconda interpretazione, consideriamo quei punti $(y_0 y_1 y_2 y_3)$ dello spazio, ossia quelle stelle di piani

$$u_0 y_0 + u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

a cui corrispondono g^2_3

$$u_0 x^3 + u_1 x^2 + u_2 x + u_3 = 0,$$

dotate di un punto fisso; prendendo per x l'ascissa di questo punto si dovrà avere (a prescindere da un fattore di proporzionalità)

$$6)\qquad \begin{cases} y_0 = x^3 \\ y_1 = x^2 \\ y_2 = x \\ y_3 = 1. \end{cases}$$

Il luogo dei punti (y) anzidetti è dunque la *cubica gobba* rappresentata dal sistema 6), la quale è riferita all'asse x per proiezione dalla sua tangente

$$y_0 = y_1 = 0.$$

Allora si vede che la rappresentazione delle terne della retta x sui piani dello spazio, si ottiene semplicemente riportando ogni terna sopra la cubica e costruendo poi il piano determinato dai tre punti. Quindi le terne di una g_3^1 sono segate sopra la cubica dai piani di un fascio.

Riprendiamo adesso il problema di determinare le g_3^1 che posseggono quattro punti doppi assegnati. In relazione alla cubica 6) questo problema si trasforma come segue: sono dati sulla cubica quattro punti A, B, C, D, si tratta di determinare le rette r per le quali i piani rA, rB, rC, rD riescono tangenti alla cubica in A, B, C, D; in altre parole si considerino quattro tangenti alla cubica a, b, c, d (tangenti nei punti A, B, C, D) si tratta di determinare le rette r coincidenti colle a, b, c, d. Questo problema ammette come è noto due soluzioni, giacchè le rette incidenti alle a, b, c formano una quadrica, che incontra la retta d in due punti.

Se si introducono le coordinate plueckeriane p_{ik}, il problema precedente conduce a risolvere un sistema di cinque equazioni, una delle quali è quadratica e le altre lineari: la prima, $P = 0$, è la relazione fondamentale fra le p_{ik}, le altre esprimono l'incidenza della retta r con le a, b, c, d.

Le cose dette si estendono facilmente per $n > 3$: i gruppi di n punti sopra la retta si possono denominare « punti » ovvero « iperpiani » di un S_n, dove una g_n^1 viene assunta come « retta » o rispettivamente come « fascio di iperpiani (S_{n-2}) ». Ciò equivale a considerare i coefficienti dell'equazione

$$\varphi(x) = u_0 x^n + u_1 x^{n-1} + \dots + u_n = 0$$

come coordinate di un punto o di un iperpiano in un S_n.

Nella prima interpretazione ad un iperpiano di S_n corrisponde una *involuzione di dimensione* n-1 g_n^{n-1}:

$$\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + ... + \lambda_n \varphi_n(x) = 0,$$

dove le φ_i designano polinomi di grado n linearmente indipendenti. Nella seconda interpretazione le g_n^{n-1} sopra la retta corrispondono ai punti dello spazio S_n.

Ora, rispetto a questa seconda interpretazione, consideriamo quei punti $(y_0 y_1 .... y_n)$ dello S_n, ossia quelle stelle di iperpiani

$$u_0 y_0 + u_1 y_1 + ... + u_n y_n = 0,$$

a cui corrispondono g_n^{n-1}

$$u_0 x^n + u_1 x^{n-1} + ... + u_n = 0$$

dotate di un punto fisso; prendendo per x l'ascissa di questo punto si dovrà avere, a prescindere da un fattore di proporzionalità:

$$7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = x^n \\ y_1 = x^{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = 1. \end{array} \right.$$

Il luogo dei punti (y) anzidetti è dunque la *curva* (*razionale normale*) *d'ordine* n di S_n, rappresentata dal sistema 7), la quale viene riferita all'asse x per proiezione dallo S_{n-2} osculatore (che ha con essa un contatto $(n-1)$-punto):

$$y_0 = y_1 = ... = y_{n-2} = 0.$$

Si vede così che la rappresentazione dei gruppi G_n di n punti della retta x sugli iperpiani di S_n, si ottiene semplicemente proiettando ogni G_n dal suddetto S_{n-2} sopra la curva 7), e costruendo poi l'iperpiano determinato dagli n punti: quindi i G_n di una g_n^1 sono segati sopra la curva 7) dagli iperpiani di un fascio.

Allora il problema di determinare una g_n^1, con punti doppi assegnati, si riduce alla determinazione degli S_{n-2} di S_n, che sono incidenti a $2n-2$ rette, tangenti della curva 7). La determinazione di questi S_{n-2} dipende dalla risoluzione di un sistema di equazioni dove figurano come incognite le coordinate del detto S_{n-2}: nel sistema figurano $2n-2$ equazioni lineari esprimenti l'incidenza dello S_{n-2} alle $2n-2$ rette sopra nominate, e le relazioni quadratiche fondamentali fra le coordinate dello S_{n-2}. Il sistema stesso riesce in generale determinato; più difficile è indicare il numero delle sue soluzioni, giacchè si tratta di un sistema di equazioni, con particolari legami, il cui numero supera quello delle incognite.

Il numero anzidetto fu determinato, per via algebrica, da Fr. Mayer (Math. Annalen Bd 21) e da Stephanos nella sua Thèse del luglio 1884; più tardi, coi metodi della geometria enumerativa, da Schubert (Math. Annalen Bd. 26); esso vale

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1},$$

cioè vi sono tanti S_{n-2} di S_n incidenti a $2n-2$ rette. Per $n=4$ questo numero diviene 5 e può trovarsi con facile ragionamento geometrico: Cfr. Segre « Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a 4 dimensioni ». Circolo Mat. di Palermo, t. 2, (1888).

Termineremo questo paragrafo accennando alla elegante *dimostrazione geometrica del teorema* di Lüroth che viene data dal Segre [1] riferendosi alla interpretazione iperspaziale della Geometria dei gruppi di punti della retta.

Si consideri dapprima sulla conica C_2 una serie algebrica di coppie di punti, γ_2^1, tale che ogni punto determini *una* coppia. Le rette congiungenti le coppie della γ_2^1 formano un inviluppo algebrico tale che per ogni punto di C_2 ne passa *una*. Se l'inviluppo fosse di classe $\nu > 1$, la conica — luogo di punti per cui passano meno di ν rette dell'inviluppo — ne farebbe parte, e allora dovrebbe essere toccata dalle rette che congiungono le coppie della γ_2^1, mentre queste coppie sono formate di punti distinti. Segue che la γ_2^1 è una g_2^1 segata su C_2 dalle rette d'un fascio.

[1] Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito — n.° 23, nota terza — (Annali di Matematica 1904).

Il ragionamento si estende ad una serie algebrica γ_n^1 di gruppi di $n > 2$ punti, tale che un punto determini *un* gruppo. Per esempio per $n = 3$, si considereranno le terne di γ_3^1 sulla cubica gobba C_3; i piani determinati da queste terne non potranno formare una serie di classe $\nu > 1$ perchè avrebbero un inviluppo cui apparterrebbe C_3 e toccherebbero C_3.

7. Involuzioni composte. — Supponiamo di avere una corrispondenza $[1, r]$ fra la retta su cui è stesa la variabile t e la retta su cui è stesa la variabile y, corrispondenza definita dalla

$$t = \psi(y) = \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)},$$

e un'altra corrispondenza $[1, s]$ fra i punti della retta y e i punti di una retta x, che sia definita dall'equazione

$$y = \theta(x) = \frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)}.$$

Come *prodotto* di queste due corrispondenze abbiamo una corrispondenza $[1, n]$, con $n = rs$, fra t ed x, la quale viene definita da

$$t = \psi\{\theta(x)\},$$

equazione che, ridotta a forma intera, diviene

$$1)\qquad \theta_2{}^r(x)\left\{\psi_1\left\{\frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)}\right\} - t\psi_2\left\{\frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)}\right\}\right\} = \varphi_1(x) - t\varphi_2(x) = 0.$$

L'equazione 1) rappresenta sulla retta x una involuzione g_n^1 tale che ogni suo gruppo di $n = rs$ punti si compone di r gruppi della g_s^1 rappresentata da $\theta(x) = y$; una tale g_n^1 dicesi appunto *composta* con la g_s^1.

Una g_n^1 composta mediante una g_s^1 $(n = rs)$ dà luogo ad una *corrispondenza* $[n - 1, n - 1]$ *riducibile*. Infatti i corrispondenti di un punto x si lasciano distinguere in due gruppi, uno dei quali formato dagli $s - 1$ punti coniugati di x nella g_s^1, e l'altro dagli $n - s$ punti rimanenti; così la corrispondenza suddetta si riduce alla somma di due corrispondenze, una

$[s-1,\ s-1]$ e l'altra $[n-1,\ n-1]$; quest'ultima risulta come prodotto di due corrispondenze $[1,\ r-1]$ e $[1,\ s]$.

Queste osservazioni geometriche traducono le considerazioni algebriche seguenti: l'equazione della corrispondenza $[n-1,\ n-1]$ che (a parte il fattore $x-x'$) è

$$2)\qquad \psi\{\theta(x)\} = \psi\{\theta(x')\}$$

è riducibile, contenendo il fattore

$$\theta(x) - \theta(x');$$

l'equazione in x'

$$3)\qquad \frac{\psi\{\theta(x)\} - \psi\{\theta(x')\}}{\theta(x) - \theta(x')} = 0$$

è generalmente irriducibile; la sua risoluzione si può far dipendere da quella delle due equazioni d'ordini $r-1$, s

$$\frac{\psi(y) - \psi(y')}{y - y'} = 0,$$

$$y' = \theta(x');$$

dato x si porrà $y = \theta(x)$ nella prima equazione e si calcolerà y'; la risoluzione della seconda equazione fornirà x'.

Questo modo di risoluzione dipende dal legame dell'equazione 3) con la

$$t = \psi\{\theta(x)\}.$$

Nota. La proprietà di un'equazione

$$t = \varphi(x)$$

che sia riducibile alla forma

$$t = \psi\{\theta(x)\},$$

cioè la proprietà di una involuzione g^1_n che sia composta mediante una g^1_s $(n = rs)$, si esprime nella teoria dei gruppi di sostituzioni dicendo che l'equazione in x: $t = \varphi(x)$, ha un *gruppo imprimitivo* (¹). Trattandosi qui di una equazione algebrica $x(t)$, ad n rami $x_1, x_2, ... x_n$, il gruppo anzidetto (relativo ad un campo di razionalità definito da t, dai numeri-coefficienti di φ, e da eventuali irrazionalità numeriche) è il gruppo di monodromia generato dalle sostituzioni su $x_1, x_2, ... x_n$ che si producono facendo compiere a t un giro, nel suo piano complesso, attorno ai singoli punti di diramazione, cioè ai punti t cui corrispondono gruppi dell'involuzione g_n^1 dotati di un punto doppio. L'imprimitività del nominato gruppo di sostituzioni si mette in evidenza osservando che ad ogni t corrispondono $n = rs$ punti x, i quali si lasciano distribuire in r gruppi di s punti ciascuno, i detti gruppi corrispondendo ai valori $y_1, y_2, ... y_r$ radici dell'equazione $t = \psi(y)$: un giro di t che non involga alcun punto di diramazione della funzione $y(t)$ lascia fermi $y_1, y_2, ... y_r$ e quindi i gruppi di s punti omologhi, permutando in generale fra loro i punti di un medesimo gruppo; invece un giro di t che scambi, per esempio, fra loro y_1 e y_2, scambia contemporaneamente tutti gli x del primo gruppo con gli x del secondo.

Se una involuzione g_n^1 è composta con una g_s^1 (n = rs), *i punti doppi della g_n^1 sono dati dai $2s - 2$ punti doppi della g_s^1 e da $2r - 2$ gruppi di s punti della g_s^1 stessa:*

$$2n - 2 = 2s - 2 + (2r - 2)s.$$

Infatti si consideri un gruppo G_n della g_n^1 composto con r gruppi della g_s^1:

$$G_n = G_s' + G_s'' + ... + G_s^n;$$

si avrà un punto doppio di G_n se uno dei G_s possiede un punto doppio, oppure se due di questi G_s coincidono; quest'ultimo fatto avviene in corrispondenza dei punti doppi della g_r^1: $t = \psi(y)$.

(¹) Cfr. p. es. L. Bianchi. « Lezioni sulla Teoria dei gruppi di sostituzioni.... » Pisa - Spoerri 1900, §§ 12, 71. Del resto riprenderemo più avanti questo ordine di considerazioni. Qui abbiamo voluto soltanto accennarvi per chi abbia qualche conoscenza dell'argomento.

Non è escluso che i due casi da cui hanno origine i punti doppi della g^1_n si sovrappongano.

Osservazione. Il *teorema* precedente *non* è *invertibile.* Infatti, si assuma p. es. $r = 2$, e si cerchi di costruire una involuzione g^1_{2s} che abbia come punti doppi $2s$ punti formati da due gruppi G, G' di una g^1_s ed i $2s - 2$ punti doppi di questa (cfr. § 6): di tali g^1_{2s} ne esistono più di una per $s > 1$, mentre vi è una sola g^1_{2s} composta colle coppie della g^1_s, che possiede G, G' come coppie di gruppi coincidenti; la costruzione della suddetta g^1_{2s} composta si riduce alla costruzione di una g^1_2 di cui sono dati i punti doppi, sopra una retta in corrispondenza $[1, s]$ colla retta data.

8. **Involuzioni cicliche.** — Una proiettività π chiamasi *ciclica di periodo* o di *ordine* n se applicata successivamente n volte (e non meno di n volte) riporta ogni punto A in se stesso, vale a dire se la sua potenza n-esima, π^n, lascia fermo ogni punto A.

Ora affinchè una proiettività π sia ciclica di periodo n (o divisore di n) è sufficiente che esista un punto A il quale resti invariato per la π^n. Questo *è ben noto* nel caso di $n = 2$, cioè nel caso delle proiettività involutorie: vediamolo per $n > 2$.

Indichiamo con A_1 il punto in cui π porta A, con A_2 il punto in cui π porta A_1,.... con A_{n-1} il punto in cui π porta A_{n-2}: siccome π^n lascia invariato A, avremo che π porta A_{n-1} in A, e quindi π^n lascia fermi anche gli altri punti $A_1, \ldots A_{n-1}$.

Essendo $n > 2$ si ha che la proiettività π^n, lasciando fermi più di due punti è l'identità, cioè lascia fermo ogni altro punto. Risulta da ciò che applicando successivamente n volte la proiettività π a un qualsiasi punto B si ricade nel punto B stesso, vale a dire la proiettività π è ciclica di periodo n.

Chiamasi *ciclo* di una proiettività ciclica π di periodo n, l'insieme degli n punti A, $A_1, \ldots A_{n-1}$ in cui la π porta successivamente il punto A. Per i cicli di una proiettività sulla retta vale il

Teorema. *I cicli di una proiettività ciclica di periodo* n *costituiscono i gruppi di una* g^1_n.

Questo risulta immediatamente dal teorema di LÜROTH, tenuto conto che ogni punto individua il ciclo al quale appartiene. Dello stesso teorema possiamo anche dare una dimostrazione analitica, la quale ha il vantaggio di fornire la costruzione effettiva della nominata g^1_n.

Ricordiamo che una proiettività (parabolica) che abbia un solo punto unito (reale o immaginario) può sempre scriversi nella forma

$$1) \qquad x' = x + a,$$

bastando a tale oggetto operare una sostituzione lineare di coordinate che porti all'infinito l'unico punto unito della proiettività; analogamente, una proiettività che abbia due punti uniti (reali o immaginari) può sempre scriversi nella forma

$$2) \qquad x' = ax,$$

bastando a tale oggetto operare una sostituzione lineare di coordinate che porti i due punti uniti, uno nell'origine e l'altro all'infinito ([1]).

Dalla formula 1) deriva che una proiettività parabolica non può mai essere ciclica, e quindi tutte le proiettività cicliche hanno due punti uniti distinti (tipo 2).

Se poi la proiettività π definita da

$$x' = ax$$

è ciclica di periodo n, la proiettività π^n che risulta definita da

$$x' = a^n x$$

dovrà essere l'identità, e quindi

$$a^n = 1,$$

$$a = e^{\frac{2r\pi i}{n}} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

dove r è primo con n, cioè a è una radice primitiva dell'unità.

([1]) Cfr. per es. BIANCHI, « Geometria Analitica », § 102.

Consideriamo ora la g_n^1 definita dall'equazione

$$x^n = t.$$

È evidente che il gruppo di questa g_n^1 che contiene un punto x_1 contiene anche gli altri punti:

$$x_2 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot x_1$$

$$x_3 = e^{\frac{4\pi i}{n}} \cdot x_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = e^{\frac{(n-1)2\pi i}{n}} \cdot x_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot x_{n-1},$$

cioè il gruppo $(x_1 x_2 \dots x_n)$ coincide col ciclo della proiettività π cui appartiene x_1.

Chiamasi *involuzione ciclica d'ordine* n *la* g_n^1 *formata dai cicli di una proiettività ciclica di periodo* n.

Siccome ogni involuzione ciclica d'ordine n può essere ridotta, per quanto abbiamo detto sopra, al tipo

$$x^n = t,$$

così essa ha due punti n-pli, uno nello zero e l'altro nel punto all'infinito; questi due punti assorbono tutti i $2n-2$ punti doppi dalla g_n^1, perchè un punto n-plo conta per $n-1$ punti doppi (§ 5).

Ora si ha qui una proprietà caratteristica per le involuzioni cicliche; sussiste infatti il

Teorema. Una g_n^1 *che possieda due soli punti multipli* (d'ordine n) *è un' involuzione ciclica.*

Per dimostrarlo portiamo con una proiettività i due punti n-pli, uno nello zero, l'altro nel punto all'infinito: allora la funzione razionale t che ha gli n zeri riuniti nel primo punto, e gli n poli riuniti nell'altro è data da

$$t = ax^n,$$

dove è anche lecito prendere $a = 1$. È poi evidente che i gruppi della g_n^1 definita da

$$t = x^n$$

sono i cicli della proiettività

$$x' = e^{\frac{2\pi i}{n}} x.$$

Osservazione. Quando n è un numero composto, cioè $n = rs$ (con $r > 1$, $s > 1$), l'involuzione ciclica g_n^1 si può ritenere composta mediante i gruppi della g_r^1 o della g_s^1 cicliche che hanno i medesimi punti multipli. A loro volta queste risultano composte se r, s non sono numeri primi, e così dati i fattori primi $p, p_1, p_2, \ldots$ di n, si può costruire la g_n^1 partendo da una g_p^1 ciclica semplice e componendo con questa una $g_{pp_1}^1$, poi componendo con la $g_{pp_1}^1$ una $g_{pp_1p_2}^1$ etc.

Quando n è numero primo, l'involuzione ciclica g_n^1 non è composta, ma tuttavia dà luogo sempre ad una *corrispondenza* [n — 1, n — 1] *riducibile* nella somma di $n-1$ proiettività.

Nota. L'equazione

$$t = ax^n$$

rappresenta una forma normale a cui può sempre ridursi l'equazione di una g_n^1 ciclica

$$t = f(x),$$

mediante sostituzioni lineari su t ed x. Codesta forma normale mette in evidenza che « *l'equazione di una* g_n^1 *ciclica possiede come gruppo di monodromia un gruppo ciclico d'ordine* n ».

Reciprocamente se la funzione algebrica $x(t)$, definita da $t = f(x)$, ha un gruppo di monodromia ciclico d'ordine n, (cioè se, girando attorno ai punti di diramazione t, nel piano della variabile complessa x, si producono sopra gli n rami di $x, x_1 \ldots x_n$, le sostituzioni d'un gruppo ciclico) allora la g_n^1 corrispondente alla funzione razionale f è una involuzione ciclica.

Per dimostrarlo pongasi che il gruppo di monodromia di $x(t)$ sia formato dalle potenze della sostituzione ciclica

$(x_1 x_2 \ldots . x_n)$. Allora x_2 sarà una funzione razionale di x_1 di periodo n:

$$x_2 = \theta(x_1),$$

sicchè gli n rami della funzione algebrica $x(t)$ verranno dati da

$$x_1, \quad \theta(x_1), \quad \theta\{\theta(x_1)\} = \theta^2(x_1), \ldots \quad \theta^{n-1}(x_1).$$

Ora risulterà anche x_1 funzione razionale di x_2 e perciò — essendo $\theta(x_1)$ una funzione razionale razionalmente invertibile — dovrà essere $\theta(x_1)$ una funzione lineare di x_1. Ciò posto si vede che i punti di un gruppo della g^1_n formano un ciclo di una proiettività sopra la retta x. Si deduce che la g^1_n è ciclica. c. d. d.

Il teorema stabilito appartiene ad un ordine di idee suscettibile di larga estensione e di importanti applicazioni. Così, per es. nel caso in cui n sia un numero primo, si può domandare che cosa siano le g^1_n corrispondenti a gruppi metaciclici, e si riesce a caratterizzarle in base alla proprietà che ogni gruppo di punti G_n contenente un punto r-plo $(r < n)$ ne contiene $\frac{n-1}{r}$. Segue di qui un semplice modo di esprimere la condizione di risolubilità mediante radicali per le equazioni di grado primo contenenti linearmente un parametro ([1]).

9. **Le involuzioni del quart'ordine.** — Si abbia, sopra la retta, una g^1_4:

$$\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = 0. \tag{1}$$

L'invariante assoluto di una quaterna G_4 della g^1_4 è una funzione razionale dei coefficienti della 1) e quindi del rapporto $\frac{\mu}{\lambda}$:

$$J = \frac{4i^3\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{j^2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

([1]) Cfr. Chisini. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », aprile, 1915.

Se J deve assumere un certo valore k, si ha l'equazione in $\frac{\mu}{\lambda}$

$$4i^3 - kj^2 = 0.$$

Per $k = 1$ questa equazione (annullamento del discriminante) corrisponde ai gruppi della g_4^1 che posseggono una coincidenza, i quali sono 6. Si deduce che:

In una g_4^1 *vi sono in generale* 6 *quaterne di punti per cui l'invariante assoluto* (cioè il birapporto) *assume un dato valore. Ma vi sono soltanto* 2 *quaterne equianarmoniche e* 3 *armoniche.*

Infatti se J deve essere di grado 6 rispetto a $\frac{\mu}{\lambda}$ (o ai coefficienti della 1)) bisogna che i sia di grado 2 ed j di grado 3. Queste deduzioni sono del resto convalidate dalle espressioni effettive di i, j (cfr. L. 1°, §§ 4, 7).

Esisteranno g_4^1 particolari per cui tutte le quaterne abbiano lo stesso birapporto? In altre parole, può darsi che l'equazione

$$J\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = k$$

divenga generalmente incompatibile, assumendo J un valore indipendente da $\frac{\mu}{\lambda}$?

Per rispondere alla domanda, consideriamo i gruppi della g_4^1 dotati di punto doppio, e supponiamo — dapprima — che si tratti di una g_4^1 irriducibile.

Il birapporto di un G_4 con punto doppio è $\alpha = 1$ e l'invariante assoluto $J = 1$; ma tale equazione è impossibile per una g_4^1 irriducibile (§ 5) se (α ed) J deve avere un valore costante $\left(\text{rispetto a } \frac{\mu}{\lambda}\right)$, essendo questo valore diverso da 1 per ogni altro gruppo della g_4^1 che non possiede un punto doppio. Si deduce che i gruppi G_4 cui s'imponga un punto doppio debbono contenere un punto ν-plo, con $\nu = 3$ o 4, risultando così per essi indeterminato il corrispondente birapporto ed J.

Ora si avranno, nella g_4^1, r gruppi dotati di un punto

ν_1-plo, ν_2-plo, ... ν_r-plo, e sussisterà l'equazione d'analisi indeterminata

$$\sum_1^r (\nu_i - 1) = 6 \qquad (\S\ 5).$$

Dovendo essere

$$4 \geq \nu_i \geq 3,$$

si deduce per le g_4^1 *irriducibili che hanno un birapporto costante:*

I) $$r = 2, \quad \nu_1 = \nu_2 = 4$$
oppure
II) $$r = 3, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 3.$$

Nel caso I) *la* g_4^1 *è ciclica* (§ 8) *e tutti i suoi gruppi sono armonici* (L. 1°, § 4).

Nel caso II) *tutti i gruppi della* g_4^1 *sono equianarmonici.*

Infatti ci sono tre gruppi, dotati d'un punto triplo, per cui l'invariante $i\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ è nullo; ma, poichè questo invariante è di grado 2 in $\frac{\mu}{\lambda}$, sarà *identicamente*

$$i\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = 0.$$

Si può costruire effettivamente una tale g_4^1 equianarmonica, partendo da due quaterne che hanno un punto triplo rispettivamente nel punto 0 o ∞:

$$x^3(x-1) = 0, \quad x - a = 0.$$

Si otterrà la g_4^1:

$$\lambda x^3(x-1) + \mu(x-a) = 0,$$

che possiede in generale altri due punti doppi, per cui

$$\lambda(x^4 - x^3) + \mu(x-a) = 0$$

$$\lambda(4x^3 - 3x^2) + \mu = 0$$

$$x^2 - x = (x-a)(4x-3),$$

ossia

$$3x^2 - (4a+2)x + 3a = 0;$$

affinchè questi due punti coincidano fra loro, deve essere

$$(4a+2)^2-4\cdot 9a=0,$$

cioè

$$4a^2-5a+1=0,$$

$$a=\frac{5}{8}\pm\frac{\sqrt{25-16}}{8}=1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{4}.$$

Scartiamo il valore 1 che corrisponde a una g_4^1 con un punto fisso: *si ottiene una* g_4^1 *equianarmonica partendo da quattro punti* ABCD *tali che il birapporto* (DBAC) $=\frac{1}{4}$ *e costruendo la* g_4^1 *determinata da* A^3B, C^3D.

Le g_4^1 *riducibili* i cui gruppi hanno birapporto costante si determinano pure facilmente. Sono:

III) la g_4^1 che ha un punto doppio fisso (discriminante identicamente nullo);

IV) la g_4^1 (equianarmonica) che si compone delle terne di una proiettività ciclica del 3° ordine e di uno dei suoi punti uniti fissi;

V) la g_4^1 (armonica) che si compone delle coppie di una g_4^1 e dei suoi punti doppi come punti fissi.

Istituiamo ora un' altra ricerca sulle g_4^1, relativa alle g_4^1 *irriducibili* che sono *composte* colle coppie di una g_4^1.

In tale ipotesi la g_4^1 possiede due punti doppi M, N, che sono 2 fra le 6 coincidenze della g_4^1, e ci sono in generale nella g_4^1 altri due gruppi con due coincidenze ciascuno, costituite da due coppie (AB) e (CD) della g_4^1 (cfr. § 7), che separano armonicamente M, N.

È lecito assumere ad arbitrio due coppie siffatte per mezzo di due equazioni di 2° grado

$$\varphi(x)=0, \quad \psi(x)=0;$$

allora l' equazione di una g_4^1 composta si riduce al tipo

$$\lambda\varphi^2+\mu\psi^2=0.$$

Che cosa accade se le coppie AB, CD si separano armonicamente fra loro?

Consideriamo le proiettività involutorie π_2, π_3 che hanno come punti doppi rispettivamente A, B e C, D; esse sono permutabili colla

$$\pi_1 = (AB)(CD)$$

avente come punti doppi MN, e generante la g_2^1 mercè cui si compone g_4^1. Esse trasformano in se stessa la g_2^1 e la g_4^1 e — insieme all' identità — formano un *gruppo* (trirettangolo) *di* 4 *operazioni*, Γ_4:

$$\pi_2\pi_1 = \pi_3, \quad \pi_3\pi_1 = \pi_2, \quad \pi_3\pi_2 = \pi_1$$

$$\pi_1^2 = \pi_2^2 = \pi_3^2 = 1.$$

Consideriamo un punto P_4 diverso da A, B, C, D, M, N; le involuzioni π_1, π_2, π_3 portano P_4 in tre punti distinti: P_1, P_2, P_3. Ora il punto P_1 è portato da π_1 in P_4, da $\pi_2 = \pi_3\pi_1$ in P_3, da $\pi_3 = \pi_2\pi_1$ in P_2; similmente anche P_2, P_3 sono portati da π_1, π_2, π_3, in altri punti della medesima quaterna $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, la quale risulta dunque determinata ugualmente da ciascuno dei suoi punti. Questa proprietà — dipendente dal fatto che le π_1, π_2, π_3, $\pi_4 = 1$, costituiscono un *gruppo* Γ_4 — porta che le quaterne analoghe a $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, ossia *le quaterne invarianti per* Γ_4 *formano una* g_4^1 (teorema di LÜROTH, § 3).

Questa g_4^1 contiene le quaterne $(AB)^2$, $(CD)^2$, cioè $\varphi^2 = 0$, $\psi^2 = 0$, e quindi non differisce dalla g_4^1:

$$\lambda\varphi^2 + \mu\psi^2 = 0.$$

Pertanto *la* g_4^1 *determinata da due coppie* (AB) e (CD) *che si separano armonicamente, contate due volte, si può considerare in tre modi diversi come composta colle coppie di una* g_2^1: *le tre coppie di punti doppi delle tre* g_2^1, sono AB, CD e la coppia MN che le separa armonicamente entrambe; esse *formano il covariante* T (L. 1°, § 7) *di tutte le quaterne della* g_4^1.

Infatti, se una quaterna di punti viene rappresentata da una forma quartica $f(x_1 x_2)$, lo hessiano $H(x_1 x_2)$ rappresenta una quaterna covariante di f, la quale è mutata in se stessa dal gruppo Γ_4 contenente le tre involuzioni che lasciano ferma la f; la g_4^1 generata dal gruppo Γ_4 viene dunque rappresentata da

$$\lambda f + \mu H = 0.$$

Ora il covariante T è stato definito come jacobiano di f ed H,

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

e perciò $T = 0$ rappresenta i punti doppi della g_4^1:

$$\lambda f + \mu H = 0.$$

Si può aggiungere che questa g_4^1 resulta definita come insieme delle quaterne di punti che hanno un medesimo covariante T.

10. **Gruppi finiti di proiettività sulla retta.** — Una elegante applicazione della formula che dà i punti doppi di una g_n^1 è l'*analisi di* KLEIN che permette di determinare tutti i *gruppi* finiti di proiettività sulla retta, cioè i gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile complessa x, ai quali corrisponde una importante classe di equazioni algebriche.

Codesti gruppi vengono designati col nome di *gruppi dei poliedri regolari*, perchè — come vedremo nella nota storica che segue (§ 11) — essi trovano una immagine nei gruppi di rotazioni della sfera in se stessa, corrispondenti ad una piramide o doppia piramide regolare iscritta ed ai poliedri regolari.

Ricordiamo che in generale un *gruppo* (finito) *di* n *operazioni*:

$$\Gamma = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n,$$

è definito dalla proprietà seguente [1]:

[1] Cfr. p. es. il trattato di L. BIANCHI, « Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche ». Pisa, Spoerri 1900.

Il prodotto di due operazioni di Γ appartiene a Γ:

$$\pi_k \pi_i = \pi_s.$$

In particolare se π è un'operazione di Γ, appartengono a Γ le potenze

$$\pi^2, \quad \pi^3, \ldots.$$

e si ha quindi

$$\pi^r = 1,$$

designandosi con 1 l'*identità*; si dimostra facilmente che l'*ordine di ciclicità* r è un *divisore* di n: quindi anche i gruppi finiti di n proiettività sulla retta, saranno composti di proiettività cicliche il cui ordine è un divisore di n, e conterranno l'identità.

Ciò posto, si abbia sulla retta un gruppo finito Γ_n, formato da un certo numero $n (> 1)$ di proiettività. Un punto A_1, che non sia unito per alcuna proiettività (non identica) del gruppo, viene trasformato in altri $n - 1$ punti distinti $A_2, \ldots. A_n$; ed il gruppo di punti

$$G_n = (A_1 A_2 \ldots. A_n),$$

riesce determinato ugualmente da ciascuno dei suoi punti.

Al variare di A_1 si ha una serie algebrica di G_n analoghi, che è (§ 3) una involuzione g_n^1 (la quale sarà in generale composta colle involuzioni corrispondenti ai sottogruppi ciclici di Γ_n; cfr. § 7). Esiste pertanto una funzione razionale di grado n

$$y = f(x),$$

che prende lo stesso valore nei punti di ogni G_n, cioè ad ogni gruppo finito Γ_n di proiettività sulla retta corrisponde un'equazione $y = f(x)$ di cui le radici $x_1, x_2, \ldots. x_n$, funzioni algebriche di y, si deducono l'una dall'altra mediante le sostituzioni lineari del gruppo Γ_n.

Ora osserviamo che se la g_n^1 contiene un gruppo G_n dotato d'un punto di coincidenza ν-plo, anche tutti gli altri punti di G_n sono ν-pli, cioè G_n si compone di $\frac{n}{\nu}$ punti che contano ciascuno ν volte. Infatti vi è almeno una proiettività di Γ_n che porta il punto ν-plo A di G_n in un altro punto qualsiasi B di G_n e trasforma il gruppo G_n in se stesso, quindi anche B deve essere ν-plo per G_n.

Ciò posto si abbiano nella g_n^1 r gruppi dotati rispettivamente di $\frac{n}{\nu_1}, \frac{n}{\nu_2}, \ldots \frac{n}{\nu_r}$ coincidenze, d'ordine $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$; il numero totale delle coincidenze vale

$$2n-2=\sum_{i=1}^{i=r}\frac{n}{\nu_i}(\nu_i-1) \qquad (\S\ 5).$$

Si ha dunque

1) $$2-\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{i=r}\left(1-\frac{1}{\nu_i}\right).$$

Questa uguaglianza dovendo essere soddisfatta da numeri interi

$$n,\ r,\ \nu_1, \ldots \nu_r \quad (n \geq 2,\ \nu_i \geq 2),$$

si trae anzitutto

$$r>1, \quad r<4,$$

giacchè per $r=1$ il secondo membro è <1 mentre il primo è ≥ 1, e per $r \geq 4$ il secondo membro risulta >2 mentre il primo è certo <2.

Dunque si ha

$$r=2 \quad \text{o} \quad r=3.$$

Per $r=2$, 3 l'equazione d'analisi indeterminata 1) dà luogo ad un numero finito di soluzioni che possiamo facilmente determinare, tenendo conto che deve essere

$$2 \leq \nu_i \leq n.$$

Per $r=2$ la 1) diviene

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}=\frac{2}{n},$$

da cui si deduce, per n qualunque,

I) $$\nu_1=\nu_2=n.$$

Per $r=3$ la 1) diviene

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}=1+\frac{2}{n}.$$

Almeno una delle ν_i deve essere $=2$, altrimenti il primo membro risulta ≤ 1; sia p. es.

$$\nu_1 = 2.$$

La 1) diventa

2) $$\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

Se un'altra delle ν_i è uguale a 2, p. es.

$$\nu_2 = 2,$$

segue

$$\nu_3 = \frac{n}{2}.$$

Si ottiene così la soluzione:

II) $$\nu_1 = \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = m, \quad n = 2m,$$

con m qualunque.

Se invece si suppone che i due numeri ν_2, ν'_3 sieno ambedue >2, uno almeno di essi dovrà essere uguale a 3, p. es.

$$\nu_2 = 3,$$

altrimenti il primo membro della 2) risulterebbe $\leq \frac{1}{2}$.

Posto $\nu_2 = 3$, si ha

3) $$\frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{n}$$

da cui

$$\nu_3 < 6,$$

e quindi si trovano le seguenti soluzioni della 1):

III) $$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = \nu_3 = 3, \qquad n = 12$$

IV) $$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 4, \qquad n = 24$$

V) $$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 5, \qquad n = 60.$$

La nostra analisi mette dunque in luce *5 tipi possibili di gruppi finiti di proiettività sulla retta:*

I) II) III) IV) V).

La dimostrazione dell'*esistenza effettiva* e la *costruzione* di codesti gruppi, escono propriamente dai limiti di un'applicazione della formula che dà le coincidenze di una involuzione g^1_n, nè d'altra parte è richiesta per procedere oltre nella lettura di queste Lezioni. Tuttavia, rimandando per un più ampio sviluppo del tema, al citato trattato del BIANCHI (Cap. IV e VII), vogliamo qui indicare rapidamente come i gruppi suddetti possono venire definiti geometricamente:

I) *Il gruppo* $\Gamma_n = (\nu_1 = \nu_2 = n)$ *è il gruppo ciclico*, generato dalle potenze di una proiettività ciclica d'ordine n, e può definirsi come il gruppo delle proiettività coi punti uniti 0 e ∞, che lasciano invariante un ciclo:

$$G_n = (1\ \varepsilon \ldots \varepsilon^{n-1}) \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right).$$

Infatti la g^1_n corrispondente a Γ_n contiene due gruppi A^n, B^n costituiti da un punto n-plo (cfr. § 8).

II) *Il gruppo* $\Gamma_{2m} = (\nu_1 = \nu_2 = 2,\ n = 2m)$ *è costituito dalle* $2m$ *proiettività che trasformano in sè un ciclo d'una proiettività d'ordine* m:

$$G_m = (1\ \varepsilon \ldots \varepsilon^{m-1}) \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}\right).$$

[Per $m = 2$ il $\Gamma_{2m} = \Gamma_4$ è il gruppo trirettangolo (L. 1°, § 4)].

Anzitutto osserviamo che il G_m resta invariante per $2m$ proiettività formanti necessariamente un gruppo, cioè per le m proiettività del gruppo ciclico Γ_m:

$$y = \varepsilon x,$$

e per le m proiettività involutorie, permutabili con Γ_m, che scambiano i punti uniti 0, ∞ di Γ_m ed hanno un punto unito appartenente a G_m (e di conseguenza anche un secondo punto unito in G_m, se m è pari).

Il gruppo Γ_{2m} così ottenuto è del tipo II), possedendo due gruppi di punti di coincidenza: il G_m $(\nu_1 = 2)$, e il $G_2 = (0\ \infty)$, quest'ultimo costituito di coincidenze m-ple $(\nu_2 = m)$.

Viceversa per ogni Γ_{2m} del tipo II) esistono due gruppi di punti di coincidenza $G_m(\nu_1 = 2)$ e $G_2(\nu_2 = m)$. Ci sono m proiettività di Γ_{2m} che lascian fermo un punto di G_2, e queste lascian fermo necessariamente anche l'altro e formano un gruppo ciclico Γ_m (sottogruppo invariante di Γ_{2m}). Le m proiettività di Γ_{2m} che scambiano i due punti del G_2 sono involutorie e permutabili col Γ_m; moltiplicando queste involuzioni per quelle proiettività cicliche si ha il Γ_{2m}.

III) *Il gruppo* $\Gamma_{12} = (\nu_1 = 2,\ \nu_2 = \nu_3 = 3,\ n = 12)$ *è il gruppo delle* 12 *proiettività che lasciano invariata una quaterna di punti equianarmonica.*

Infatti ci sono nella g^1_{12} due gruppi G_4 di punti tripli, ognuno dei quali è invariante per le 12 proiettività di Γ. Questi G_4 sono dunque equianarmonici (cfr. L. 1°, § 4).

IV) *Il gruppo* $\Gamma_{24} = (\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 3,\ \nu_3 = 4,\ n = 24)$, *si può definire come il gruppo delle* 24 *proiettività che lasciano invariante una sestina di punti* G_6, *costituita da tre coppie* $(0, \infty;\ 1, -1;\ i, -i)$ *che si separano armonicamente a due a due,* cioè da un ciclo di una proiettività del 4° ordine $(1, i, -1, -i)$ e dai suoi punti uniti $(0\ \infty)$.

Infatti il Γ_{24} possiede un gruppo G_6 di punti invariante. Ci sono 4 proiettività di Γ_{24} che hanno come punto unito un punto A di G_6; consideriamo una di queste, π, non identica; essa lascia invariato il rimanente gruppo G_5 di 5 punti; ma poichè l'ordine di π è divisore di 24, ci sarà in G_5 un altro punto unito per π, sia p. es. B. Dico che il gruppo costituito dalle 4 proiettività di Γ_{24} che hanno un punto unito in A, possiede un altro punto unito fisso B, ed è un gruppo ciclico dal 4° ordine. Se così non fosse, si avrebbero tre involuzioni π_1, π_2, π_3 aventi uno stesso punto doppio in A e tre punti doppi diversi B, C, D, e la quaterna $ABCD$ dovrebbe essere mutata in sè dalle tre involuzioni suddette, sicchè dovrebbero separarsi armonicamente le coppie AB, CD e contemporaneamente le AC, BD, ciò che è assurdo.

Ciò posto il Γ_{24} si può costruire nel seguente modo: Si assuma un ciclo di una proiettività ciclica del 4° ordine, che, mediante una conveniente trasformazione di coordinate, può ridursi a: $1,\ i,\ -1,\ -i$, e ad esso si aggiungano i punti uniti $0,\ \infty$.

La sestina di punti

$$G_6 = (0,\quad \infty,\quad 1,\quad -1,\quad i,\quad -i)$$

è costituita da 3 coppie $(0\ \infty)$ $(1\ -1)$ $(i\ -i)$ che si separano armonicamente a due a due; questa definizione, essendo simmetrica rispetto alle tre coppie del G_6, mette in luce che il G_6 stesso può considerarsi in tre modi come formato da un ciclo del 4° ordine e dai rispettivi punti uniti. Le proiettività che lasciano invariata la sestina G_6 sono:

6 proiettività del 4° ordine, e quelle che nascono da queste per moltiplicazione, cioè:

$3+6=9$ proiettività involutorie,

8 proiettività del 3° ordine e l'identità; in tutto appunto 24 proiettività formanti un Γ_{24}.

Si verifica l'asserzione precedente designando i punti $0, \infty, 1, -1, i, -i$ di G_6 con gli indici 1, 2, 3, 4, 5, 6 e facendo i prodotti delle sostituzioni fondamentali

$$(3546), \quad (1526), \quad (1324);$$

infatti

$$(1526)(3546) = (154)(263),$$

$$(1526)^2 = (12)(56)$$

$$(12)(56)(3546) = (12)(36)(45) \qquad \text{ecc.}$$

V) *Il gruppo di proiettività* $\Gamma_{60} = (\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 3,\ \nu_3 = 5,\ n = 60)$ *si può definire come il gruppo delle* 60 *proiettività che lasciano invariato un gruppo di* 12 *punti*, G_{12}, *costituito da* 6 *coppie di punti (associati) per modo che i* 10 *punti del* G_{12} *residui d'una coppia si compongano di due cicli d'una proiettività del* 5° *ordine che ha come uniti i punti della coppia.*

Nell'involuzione g^1_{60} corrispondente a Γ_{60} ci deve essere un gruppo invariante G_{12} ($\nu_3 = 5$). Ci sono 5 proiettività che hanno come punto unito un punto A di G_{12}, e siccome queste hanno un ordine di ciclicità divisore di 60 e trasformano in sè il gruppo di 11 punti residui di A, così posseggono come secondo punto unito un altro punto del G_{12}. Come nel caso IV) si prova che questo secondo punto unito è uno stesso punto B per tutte le proiettività non identiche di Γ_{60} che hanno il punto unito A, e perciò che queste, insieme all'identità, compongono un gruppo ciclico del 5° ordine. Se così non fosse si avrebbero 4 involuzioni aventi un punto doppio comune e formanti gruppo coll'identità, mentre il prodotto di due (diverse) involuzioni siffatte non può essere una involuzione.

Ciò posto resta dimostrato che il G_{12} invariante per Γ_{60} deve dividersi in 6 coppie di punti associati e che le proiettività cicliche del 5° ordine che hanno come uniti i punti d'una coppia trasformano in sè il gruppo dei rimanenti 10 punti del G_{12}. Questa conclusione è dedotta dall'ipotesi che il Γ_{60} esista. Si tratta di riconoscere l'effettiva esistenza di un G_{12} che goda le proprietà suindicate, il quale risulterà invariante, per un gruppo di 60 proiettività Γ_{60}.

A tale scopo si consideri sulla retta una proiettività ciclica del 5° ordine coi due punti uniti 0, ∞, e si prendano due cicli di essa a partire da due punti a, b, non appartenenti al medesimo ciclo ($b^5 \neq a^5$):

$$a, \quad a\varepsilon, \quad a\varepsilon^2, \quad a\varepsilon^3, \quad a\varepsilon^4$$

$$b, \quad b\varepsilon, \quad b\varepsilon^2, \quad b\varepsilon^3, \quad b\varepsilon^4$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right).$$

Se i due cicli suddetti insieme a 0, ∞ formano un G_{12}, invariante per un Γ_{60}, i 5 punti d'un ciclo non potranno certo dividersi in coppie di punti associati, e perciò vi sarà almeno un punto del primo ciclo cui è associato un punto del secondo (risulta poi a posteriori che non vi sono in un ciclo due punti associati). Esprimiamo la condizione perchè i 12 punti nominati formino un G_{12}, dove a, b siano associati. Una condizione siffatta si tradurrà in una condizione proiettiva per la quaterna di punti $a\,b\,0\,\infty$, la quale condizione dovrà essere simmetrica rispetto ad a, b, e perciò darà un'equazione capace di determinare i due valori reciproci del birapporto

$$\alpha = (a\,b\,0\,\infty) = \frac{a}{b}$$

$$\frac{1}{\alpha} = (b\,a\,0\,\infty) = \frac{b}{a},$$

e quindi la somma

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Per semplicità poniamo il punto unità delle coordinate in uno dei due punti a, b, assumendo p. es.

$$b = 1, \quad \alpha = a.$$

L'involuzione determinata dalle coppie $(01)(\infty\alpha)$ trasformerà la proiettività ciclica coi punti uniti 0, ∞, nella proiettività ciclica coi punti uniti 1, α, la quale deve appartenere al gruppo Γ_{60}; perciò anche quella involuzione apparterrà al Γ_{60} e dovrà trasformare in sè il G_{12} e quindi il sistema di 8 punti

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \quad \alpha\varepsilon, \quad \alpha\varepsilon^2, \quad \alpha\varepsilon^3, \quad \alpha\varepsilon^4.$$

Scriviamo la condizione perchè ciò avvenga.

L'equazione dell'involuzione determinata dalle coppie (01) $(\infty\alpha)$ è

1) $$\frac{\alpha(x-1)}{x-\alpha}=x'.$$

Se la sostituzione 1) deve scambiare ε^r con ε^h, deve aversi

$$\alpha\frac{\varepsilon^r-1}{\varepsilon^r-\alpha}=\varepsilon^h,$$

2) $$\alpha=\frac{1}{\varepsilon^{-h}+\varepsilon^{-r}-\varepsilon^{-(h+r)}};$$

se invece la stessa sostituzione deve scambiare ε^s con $\alpha\varepsilon^{-t}$, deve aversi

$$\alpha\frac{\varepsilon^s-1}{\varepsilon^s-\alpha}=\alpha\varepsilon^{-t},$$

3) $$\alpha=\varepsilon^s+\varepsilon^t-\varepsilon^{s+t}.$$

Ora si riconosce che la 1) non può scambiare fra loro i quattro punti $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, nè portarli tutti e quattro in punti dell'altro ciclo $(\alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon^2, \alpha\varepsilon^3, \alpha\varepsilon^4)$, giacchè la formula 2) o la 3) dovrebbe dare uno stesso valore per α corrispondente a coppie di numeri r, h o s, t essenzialmente distinte, mentre fra le radici immaginarie dell'equazione binomia $x^5=1$ non sussiste una relazione del tipo

$$\varepsilon^r+\varepsilon^h-\varepsilon^{r+h}=\varepsilon^s+\varepsilon^t-\varepsilon^{s+t}$$

con

$$r \neq h \neq s \neq t:$$

infatti le tre forme possibili di una tale relazione:

$$\varepsilon+\varepsilon^3-\varepsilon^4=\varepsilon^2+\varepsilon^4-\varepsilon, \quad \varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3=\varepsilon^3+\varepsilon^4-\varepsilon^2, \quad \varepsilon+\varepsilon^4-1=\varepsilon^2+\varepsilon^3-1,$$

si escludono subito osservando che ε soddisfa soltanto all'equazione irriducibile di 4° grado

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Ciò posto la 1) scambierà fra loro due punti ε^r, ε^h del primo ciclo, e porterà gli altri due punti di quel ciclo in punti dell'altro: p. es. ε^s in $\alpha\varepsilon^{-t}$, e quindi, per lo stesso valore di α, dato dalla 3), ε^t in $\alpha\varepsilon^{-s}$. Allora i valori di α dati dalle formule 2) e 3) dovranno essere uguali, cioè si avrà

$$4) \qquad \frac{1}{\varepsilon^{-r}+\varepsilon^{-h}-\varepsilon^{-(r+h)}}=\varepsilon^s+\varepsilon^t-\varepsilon^{s+t},$$

dove

$$r \not\equiv h \not\equiv s \not\equiv t \not\equiv 0 \quad (\text{mod. } 5),$$

ossia dove r, h, s, t sono, a parte l'ordine, i numeri 1, 2, 3, 4. Ora se si suppone

$$s+t \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 5),$$

i numeri $-r$, $-h$ riusciranno congrui a s, t, sicchè si dovrà avere

$$\frac{1}{\varepsilon^s+\varepsilon^t-\varepsilon^{s+t}}=\varepsilon^s+\varepsilon^t-\varepsilon^{s+t},$$

relazione che non sussiste perchè porterebbe per ε un' equazione di quarto grado diversa dalla equazione irriducibile

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Si conclude

$$s \equiv -t \qquad (\text{mod. } 5)$$

e quindi si hanno per α i due valori possibili

$$\alpha'=\varepsilon+\varepsilon^4-1=\frac{1}{\varepsilon^2+\alpha^3-1},$$

$$\alpha''=\varepsilon^2+\varepsilon^3-1=\frac{1}{\varepsilon+\varepsilon^4-1}$$

(l'identità $\alpha'\alpha''=1$ si deduce eseguendo il prodotto).

In conclusione la condizione posta per l'esistenza del nostro G_{12} determina la relazione proiettiva della coppia di punti a, b con la coppia di punti 0, ∞, fissando il valore della somma

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Quando questa relazione sia soddisfatta i due cicli della proiettività del quint'ordine coi punti uniti $0, \infty$, costruiti a partire da a, b, formano insieme ad a, b un gruppo di punti G_{12} che viene trasformato in se stesso da una seconda proiettività ciclica del quint'ordine coi punti uniti a, b; le due proiettività del quint'ordine generano per moltiplicazione un gruppo di proiettività Γ_{60}, il quale consta di:

24 proiettività cicliche del quint'ordine,

20 proiettività cicliche del terz'ordine e 15 involuzioni, le quali prese insieme all'identità costituiscono appunto 60 proiettività.

11. Nota storica sui gruppi dei poliedri regolari. — La determinazione dei gruppi finiti di proiettività sulla retta è dovuta ad F. Klein (Erlanger Berichte, 1874) e s'incontra con una precedente ricerca sulle equazioni differenziali di H. A. Schwarz (1871), di cui parleremo più avanti. Klein ha fatto l'osservazione fondamentale che, riferendosi alla rappresentazione di Gauss - Riemann della variabile complessa x sopra una sfera, i gruppi di sostituzioni lineari sopra la x si possono interpretare come gruppi di rotazioni della sfera in se stessa, e quindi possono determinarsi coll'intuizione, come rispondenti ai solidi regolari iscritti (o ai polari circoscritti), cioè ad una piramide regolare (gruppi I, II) oppure ad uno dei cinque poliedri platonici (tetraedro nel caso III, ottaedro o cubo nel caso IV, icosaedro o dodecaedro nel caso V). A tale scopo basta riferire la sfera al piano della variabile complessa x, mediante proiezione stereografica, e scrivere le formule di Cayley che rappresentano — con sostituzioni lineari su x — le rotazioni della sfera attorno ai tre assi coordinati; mediante queste si compongono tutte le rotazioni della sfera su se stessa, che rispondono così alle più generali sostituzioni lineari

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta}.$$

Vogliamo aggiungere che si possono risparmiare i calcoli accennati, in base al ragionamento che segue.

Le proiettività binarie — concepite come *elementi* — possono assumersi rappresentate dalle relazioni bilineari $axx' + bx + cx' + d = 0$. Prendendo a, b, c, d come coordinate proiettive dei punti dello spazio S_3 si ottiene una rappresentazione di STEPHANOS, (Math. Annalen, Bd 22), in cui le proiettività binarie corrispondono ai punti di S_3; alle rette e ai piani di S_3 corrispondono sistemi di proiettività detti rispettivamente *fasci* e *reti*; alle proiettività *degeneri* per cui $ad - bc = 0$, rispondono in S_3 i punti d'una *quadrica* Q.

Ora si considerino in altro modo le proiettività sulla retta x, come *operazioni* atte a trasformare le proiettività-elementi. Una trasformazione siffatta muta un fascio di proiettività in un fascio e una proiettività degenere in un'altra proiettività degenere, quindi alle proiettività-operazioni rispondono in S_3 omografie trasformanti in sè la quadrica Q, le quali lasciano invariato il punto O rappresentante la proiettività identica. Ma con una omografia (immaginaria) la quadrica Q si può trasformare in una sfera, portando O nel suo centro; allora le ∞^3 omografie (reali) che trasformano la sfera in sè e lasciano fermo il punto O (e quindi il suo piano polare all'infinito) sono le rotazioni intorno ad O. Queste rotazioni si rispecchiano dunque in proiettività sulla retta x, e perciò i gruppi di rotazioni della piramide o doppia piramide regolare e dei poliedri platonici, offrono immagine di gruppi di proiettività binarie. Si ottengono così le immagini di tutti i tipi trovati I, II, III, IV, V.

Precisamente:

I) La piramide regolare con n facce laterali, che può supporsi iscritta nella sfera in guisa che la base sia iscritta in un circolo equatoriale, ammette un gruppo ciclico di rotazioni in sè costituito dalle n potenze di una rotazione d'ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ attorno all'asse.

II) La doppia piramide regolare, ottenuta aggiungendo alla precedente la simmetrica rispetto al piano equatoriale, si sovrappone a se stessa, oltrechè per le precedenti rotazioni che lasciano invariata ciascuna delle piramidi, anche per le n rotazioni di ampiezza π intorno agli n assi che dal centro vanno ai vertici e ai punti medi dei lati della base comune alle due piramidi.

Per $n = 2$ il gruppo si riduce alle tre rotazioni di π attorno a tre assi ortogonali (*gruppo trirettangolo*).

III) Il tetraedro regolare si sovrappone a se stesso per:

8 rotazioni di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ attorno alle quattro altezze,

e per 3 rotazioni di ampiezza π attorno ai tre assi congiungenti i punti medi degli spigoli opposti;
in tutto 12 operazioni (insieme all'identità) che corrispondono — come si vede — alle proiettività del gruppo III,

IV) Il cubo (o l'ottaedro polare) si soprappone a se stesso per 24 rotazioni, cioè:

9 rotazioni attorno alle tre congiungenti i centri delle facce opposte, di cui 6 d'ampiezza $\frac{\pi}{2}$ e 3 d'ampiezza π,

8 rotazioni d'ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ attorno alle 4 congiungenti i vertici opposti,

e 6 rotazioni d'ampiezza π intorno alle 6 congiungenti i punti medi degli spigoli opposti;
in tutto, aggiungendo l'identità, 24 operazioni corrispondenti a quelle del gruppo IV.

V) L'icosaedro ha 12 vertici, 20 facce e 30 spigoli. Il suo gruppo consta di 60 rotazioni corrispondenti a quelle del gruppo V che sono (lasciando da parte l'identità):

20 rotazioni d'ampiezza $\frac{2\pi}{3}$ intorno alle 10 congiungenti i centri delle facce parallele opposte,

15 rotazioni di π intorno alle 15 congiungenti i punti medi degli spigoli opposti,

e 24 rotazioni d'ampiezza $\frac{2\pi}{5}$ attorno ai 6 assi congiungenti i vertici opposti.

Ai gruppi finiti di proiettività binarie corrispondono le *equazioni differenziali lineari del 2° ordine integrabili algebricamente* (1). Appunto lo studio di tali equazioni ha condotto SCHWARZ, (Journal für Math, Bd 75), a trattare un problema sui triangoli sferici che equivale sostanzialmente a quello dei gruppi finiti di sostituzioni lineari. Infatti, se l'equazione del 2° ordine a coefficienti razionali

$$y'' + a(x)y' + b(x) = 0$$

deve essere integrabile algebricamente, le sostituzioni lineari

(1) Per la teoria generale delle equazioni differenziali lineari cfr. FUCHS (Journal für Math. Bd 66, 68).

(omogenee) sui due integrali fondamentali $y_1 y_2$, ottenute girando attorno ai punti critici nel piano della variabile complessa x, debbono dar luogo ad un gruppo finito.

FUCHS nel 1875 (Cfr. Journal für Math., Bd 81) partendo dalla precedente osservazione fondamentale, ha trovato certe forme invarianti $f(y_1 y_2)$ d'ordine $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, che corrispondono ai gruppi di punti di minimo ordine invarianti per i diversi tipi di gruppi finiti di proiettività. E quindi KLEIN (1876), riattaccandosi alle sue precedenti ricerche geometriche, ha potuto esaurire la questione reciproca (trattata prima da JORDAN, Comptes rendus, t[i] 82, 83) della « determinazione di *tutti i tipi* d'equazioni differenziali lineari del 2° ordine integrabili algebricamente ». Successivamente GORDAN nel 1877 (Math. Annalen Bd 12) ha studiato per primo le forme binarie che ammettono trasformazioni lineari in se stesse, in base a metódi puramente algebrici.

Rileveremo infine i legami dei gruppi dei poliedri regolari, e in ispecie dell'icosaedro, colla teoria della risoluzione delle equazioni algebriche di 5° grado per mezzo di funzioni modulari-ellittiche, teoria dovuta a HERMITE (1), KRONECKER, BRIOSCHI e ricostruita appunto in rapporto all'icosaedro da KLEIN nelle sue « Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade », (Lipsia 1884). In codesta teoria ha speciale importanza lo studio del modo secondo cui le rotazioni della sfera permutano fra loro i sei assi dell'icosaedro. Segando i sei assi con un piano si ottiene in questo una configurazione incontrata da CLEBSCH (2) (1871) e da lui designata col nome di *decuplo esagono di* BRIANCHON: è un esagono completo, invariante per un gruppo di 60 omografie piane che lascian ferma una conica, i cui quindici lati formano dieci esalateri semplici di BRIANCHON, cioè sono tangenti a sei a sei a dieci coniche.

Per rappresentarsi semplicemente la figura, (quantunque non in modo simmetrico rispetto ai sei punti che la costituiscono) conviene segare i sei assi dell'icosaedro con un piano perpendicolare a uno di essi e non passante per il

(1) Cfr. p. es. BIANCHI « Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa.... ». Pisa, 1901 (§§ 193-194).

(2) *Math. Annalen*, Bd 4, pg. 336. Cfr. CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen* Bd II (Lipsia, 1891), pag. 578.

centro della sfera; l'esagono sarà formato dai cinque vertici, 1, 2....5, di un pentagono regolare e dal suo centro 6; la conica fondamentale invariante per le 60 omografie che lasciano fermo questo esagono sarà la proiezione del cerchio all'infinito delle sfere, sicchè la polarità rispetto ad essa sarà l'antipolarità relativa al cerchio di distanza del piano dal centro (1). Qui si vede che i quindici lati dell'esagono completo si segano a due a due in 105 punti che si raggruppano come segue: 60 intersezioni vengono a cadere nei sei vertici dell'esagono (10 per ciascuno); le altre 45 si dividono in due gruppi, uno di 15 punti (semplici) e l'altro di 10 punti da contare 3 volte: appartengono al primo gruppo i punti 16·34, 16·25, 34·25 e gli analoghi ottenuti rotando intorno al centro 6 di 2π; appartengono invece al secondo gruppo i punti in cui concorrono i tre lati 16, 23, 45 oppure 16, 24, 35 e gli analoghi. Ricordando che sei punti sono vertici di un esalatero semplice di Brianchon quando si trovano a coppie sopra tre rette passanti per un medesimo punto, si deduce la proprietà fondamentale della configurazione, che sopra abbiamo enunciata.

---

(1) Cfr. per es. Enriques, *G. Descrittiva*, § 17.

Capitolo II

Teoria elementare delle curve piane

12. Introduzione: trattati classici e riferimenti storico-bibliografici. — Nel Libro primo abbiamo ricapitolato le nozioni fondamentali sulle curve algebriche piane (tangenti, punti doppi e multipli) che si trovano alla base della Geometria analitica o delle applicazioni geometriche dell' Analisi infinitesimale. Lo sviluppo ulteriore della teoria delle curve può essere proseguito secondo due ordini paralleli di concetti, che s' intrecciano nella storia, ma che danno luogo a due trattazioni indipendenti. Riservando al Libro seguente l' esposizione fondata sulla polarità (e lo studio dei covarianti che vi si collega), esporremo qui la teoria elementare delle curve, basandoci sulle « determinazioni di numero » e sui « computi di costanti ».

La determinazione del numero designante il grado di un' equazione, che può ottenersi analiticamente colla formazione effettiva dell' equazione stessa, si lascia ridurre in modo uniforme al principio di corrispondenza (§ 1), che — in questo senso appunto — diventa uno dei fondamenti della nostra teoria. Usando qui sistematicamente tale principio, ci occorre avvertire che le principali applicazioni fattene (il così detto teorema di Bézout, le formule di Plücker e le conseguenze che ne dipendono) sono molto anteriori al principio stesso, (applicato alla dottrina delle curve da Chasles e da Zeuthen).

I « computi di costanti » che costituiscono il secondo fondamento della nostra trattazione, si riducono al caso elementarissimo (che già ricorre in Cramer) dove si tratta di numerare le costanti arbitrarie che figurano nelle soluzioni di un sistema di equazioni lineari, cioè il grado d' indeterminazione del sistema. S' invoca, a tal uopo, il teorema fondamentale che: Un sistema di n equazioni lineari omogenee ad $n+1$ incognite $x_0, x_1, \dots x_n$, vale a determinare univocamente i mutui rapporti di queste (cioè un sistema di numeri proporzionali alle x_i), salvo il caso d' indeterminazione in cui esista un sistema lineare ∞^r di soluzioni ($r > 0$); in tal caso fra le n equazioni date ve ne sono $n - r$ indipendenti e tutte le altre sono conseguenza di queste. Soltanto in qualche Nota complementare, che ha un ufficio accessorio d' informazione, accenniamo all' uso che si potrebbe fare di un principio più elevato concernente la numerazione delle costanti per sistemi di equazioni non lineari (in rapporto alla Nota che costituisce il Cap. III del Libro I).

Stimiamo utile d' indicare qui i principali trattati classici sulla teoria elementare delle curve e i riferimenti a cui lo studioso può ricorrere per notizie storiche e bibliografiche. La citazione dei Trattati si riferisce ugualmente alla materia di questo capitolo e a quella del seguente Libro; tuttavia la bibliografia speciale sulla polarità viene rimandata a codesto Libro.

Trattati classici:

R. DESCARTES - *La Géométrie* - Leida, 1637.

I. NEWTON - *Geometria analytica sive specimina artis analyticae.* Redazione postuma di HORSLEY, 1779.
— *Enumeratio linearum tertii ordinis* - 1704.

C. MAC-LAURIN - *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis* - Londra, 1720.
— *A treatise of algebra in three parts with an appendix: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus*, 1ª ed., Londra, 1748, 4ª ed., 1788. Traduzione francese con aggiunte del trattato sulle linee in E. DE JONQUIÈRES « *Mélanges de Géométrie pure* », Parigi, 1856. (Questo trattato postumo è il vero fondamento delle teorie sintetiche delle curve e in ispecie della cubica).

J. P. DE GUA - *Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le sécours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres* - Parigi, 1740.

L. EULER - *Introductio in analysim infinitorum.* 1748.

G. Cramer - *Introduction à l' analyse des lignes courbes algébriques* - Ginevra, 1750. (Opera di lettura istruttiva e piacevole).

Anonimo - *Traité des Courbes Algébriques* - 1756. Attribuito da Chasles a *Dionis du Séjour et Goudin.*

J. Plücker - *Theorie der algebraischen Kurven*, Bonn, 1839. Opera di lettura istruttiva anche per i metodi che vi s' incontrano, quantunque il largo uso fatto del computo delle costanti, non sia accompagnato dalle dovute cautele. Cfr. L. 1°, § 26. Nota.

G. Salmon - *A treatise on the higer plane curves* - Dublino, 1852. Traduzione tedesca ampliata da Fiedler: *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 1882. Traduzione francese di Chemin: *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*) - II edizione, Parigi, 1903. (Modello insuperato di trattazione analitica delle curve coi metodi della teoria degli invarianti).

L. Cremona - *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* - Bologna, 1861. Cfr. Opere, tomo I, pag. 312 - (Trattatello rappresentativo delle scuole sintetiche cui appartengono: Steiner, Chasles, De Jonquières, etc., concepito con elevato senso d'arte).

A. Clebsch - *Vorlesungen über Geometrie* bearbeitet von J. Lindemann - Lipsia, 1875-76. Traduzione francese di A. Benoist - Parigi, 1879. (Opera in gran parte postuma, svolta coi metodi della teoria delle forme invariantive, e ispirata al concetto di ravvicinare diverse ed elevate dottrine matematiche; ricca di resultati che per una gran parte escono dai limiti di una teoria elementare delle curve, quale qui si disegna).

Riferimenti storici e bibliografici:

M. Chasles - *Aperçu historique sur l' origine et le developpement des méthodes en géométrie.*

A. Clebsch - *Zum Gedächtniss an Julius Plücker*. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen - Bd 60, 1871. (Plücker's Ges. Werke. Introduzione).

A. BRILL und M. NÖTHER - *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.* Rapporto alla *Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, pubblicato nel: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* - Bd 3, 1892-93.

G. LORIA - *Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche* - III edizione, Clausen - Torino, 1907.

H. T. TIMERDING - *Pascal's Repertorium der Höheren Mathematik: II Teil, Geometrie* - Capitoli XIII, XVII, XVIII, rispettivamente di L. BERZOLARI, G. GIRAUD, E. CIANI-Teubner, Lipsia, 1910.

13. **Intersezioni di due curve.** — Già MAC-LAURIN nella sua « Geometria Organica » (1720), pag. 136, esprimeva l'opinione che due curve d'ordine n, m si seghino in nm punti. La dimostrazione di questo teorema fondamentale, connessa con l'eliminazione della y fra due equazioni $f(x\,y) = 0$, $\varphi(x\,y) = 0$, appartiene a EULERO (Accademia di Berlino 1748) e a CRAMER, che la svolge nell'Appendice del suo trattato; più completamente trovasi in BÉZOUT (¹), da cui il teorema viene generalmente designato, sebbene il rigore vi sia stato introdotto soltanto più tardi, per opera di LAGRANGE e di GAUSS.

Del teorema fondamentale anzidetto CHASLES (²) ha dato una dimostrazione basata sul principio di corrispondenza, che qui riferiamo; essa vale anche a lumeggiare geometricamente il procedimento di formazione della resultante di due equazioni algebriche. Naturalmente nel far uso del principio di corrispondenza aggiungeremo quelle cautele che abbiamo visto richiedersi per una rigorosa applicazione.

Teorema di BÉZOUT. *Due curve piane* C_m *e* C_n *d'ordine* m, n, *senza parti comuni, s'intersecano in* mn *punti.*

Prendiamo nel piano due punti A e B non appartenenti a nessuna delle due curve, e tali che la retta AB non sia tangente nè alla C_m nè alla C_n, e non passi per alcuno dei punti comuni alle due curve. Sia a una retta generica per A: essa interseca la C_m in m punti P_1, P_2,.... P_m. Proiettiamo

(¹) Cfr. *Théorie générale des équations algébriques* - Parigi, 1779.

(²) Comptes Rendus, 1872 - Journal de Mathématique, 1873.

questi punti da B; otteniamo così m rette $b_1, b_2, \dots b_m$, ciascuna delle quali interseca la C_n in n punti, si hanno così sulla C_n mn punti $Q_1, Q_2, \dots Q_{mn}$. Proiettiamo questi punti Q dal punto A: otteniamo mn rette $a_1', a_2', \dots a'_{mn}$.

In questo modo da ogni retta a del fascio A si passa ad mn rette a' dello stesso fascio; viceversa ogni retta a' sorge da mn rette a. Resta così fissata fra gli elementi del fascio A una corrispondenza $[mn, mn]$, la quale ammetterà $2mn$ elementi uniti. Vediamo come essi sorgono.

Supponiamo, per semplicità, che la C_m e la C_n siano in posizione affatto generale, cioè che nessuno dei loro punti comuni sia multiplo per una delle due curve o punto di contatto per esse. Allora se $\bar{a}$ è un raggio che passa per un punto $\bar{P}$ comune alla C_m e alla C_n, uno dei punti $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots \bar{Q}_{mn}$ relativi ad $\bar{a}$, viene a coincidere con $\bar{P}$, e quindi uno degli mn raggi corrispondenti ad $\bar{a}$ viene a coincidere con $\bar{a}$ stesso. Inoltre gli mn raggi corrispondenti al raggio AB, coincidono pure, evidentemente, col raggio AB stesso.

Dimostriamo che non vi sono altre coincidenze della corrispondenza $[mn, mn]$, fuori di quelle che nascono nei due modi sopra accennati. Infatti, se un raggio a coincide con uno dei suoi omologhi a', deve trovarsi su a uno dei punti $Q_1, Q_2, \dots Q_{mn}$; quindi o uno di questi punti coincide con uno dei punti $P_1, P_2, \dots P_m$ staccati da a sulla C_m, ed è allora uno dei punti comuni alle due curve C_m e C_n, o la a passa per B.

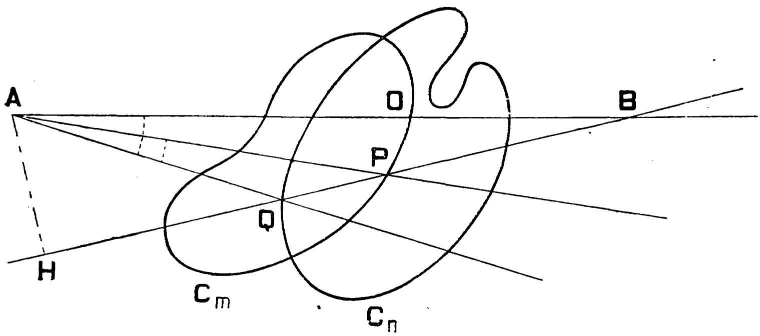
Ora possiamo affermare che il numero delle intersezioni delle due curve sarà $2mn - x$, designando x la moltiplicità del raggio AB nel gruppo degli elementi uniti della corrispondenza $[mn, mn]$ costruita entro il fascio A. Resta a far vedere che

$$x = mn.$$

A tale scopo valuteremo x con la regola di ZEUTHEN (§ 1).

Consideriamo un raggio AP vicino ad AB, il quale formi con esso un angolo infinitesimo dx. Sia AQ uno qualunque dei raggi omologhi ad AP. Dimostriamo che l'angolo $\widehat{PAQ}$ è infinitesimo del primo ordine rispetto a dx: x risulterà allora uguale alla somma degli ordini di mn infinitesimi analoghi, e perciò $x = mn$.

Sia O il punto infinitamente vicino a P in cui la AB interseca la C_m. Il segmento OP risulta infinitesimo del primo ordine, in quanto AB non è tangente alla C_m. Quindi anche l'angolo OBP risulta infinitesimo del prim'ordine, e tale risulta anche la distanza AH del punto A dalla retta BP. Il



segmento PQ è un segmento finito; perciò esso è visto dal punto A secondo un angolo che è infinitesimo dello stesso ordine di AH, cioè del prim'ordine.

Resta così dimostrato che l'angolo PAQ è un infinitesimo del prim'ordine, e per quanto abbiam detto, si conclude che le due curve C_m e C_n hanno mn punti comuni. c. d. d.

Ma non è detto che gli mn punti comuni a due curve C_m e C_n debbano essere necessariamente distinti. Anzi si verifica immediatamente che:

a) Se un *punto* P è *r-plo* per la C_m e *s-plo* per la C_n, allora il raggio AP coincide con rs dei suoi corrispondenti, e (tenuto conto della regola di ZEUTHEN) si deduce che esso assorbe rs coincidenze della corrispondenza, cioè il punto P assorbe rs *intersezioni* almeno. Ne assorbe precisamente rs, se le tangenti principali dell'una curva sono distinte da quelle dell'altra;

b) Se due curve hanno in un punto semplice P un *contatto r-punto*, nel qual caso nell'intorno di P i punti dell'una distano dai punti dell'altra di un infinitesimo d'ordine r, allora, come mostra la regola di ZEUTHEN, nel raggio AP si riuniscono r coincidenze, cioè il punto P assorbe r *intersezioni*;

c) Se un punto P è r-plo per C_n ed s-plo per C_m, ed inoltre un ramo lineare di una delle due curve per P ha un contatto i-punto ($i > 1$) con un ramo lineare dell'altra, allora il numero (rs) delle intersezioni assorbite in P, aumenta di $i - 1$ ecc.

Osservazione. Segue dal teorema di BÉZOUT che, se due curve $f(xy)=0$ e $\varphi(xy)=0$ d'ordine m, n, hanno più che mn punti comuni, le due curve sono riducibili e hanno una parte comune. Questa parte viene rappresentata annullando il massimo comun divisore dei due polinomi f e φ, che si ottiene col metodo delle divisioni successive, riguardando y come un parametro.

Siano $f(xy)=0$ e $\varphi(xy)=0$ le equazioni delle due curve C_m e C_n.

Supponiamo di assumere come punto A il punto all'infinito dell'asse y, e come punto B il punto all'infinito dell'asse x. La x può essere presa come parametro a determinare i raggi del fascio A, e la y come parametro determinante i raggi del fascio B. Ciò posto la ricerca dei raggi del fascio A che sono uniti per la corrispondenza sopra definita, conduce alla ricerca dei valori della x per i quali le due equazioni

$$f(xy)=0$$

e

$$\varphi(xy)=0$$

hanno una radice comune, cioè per cui è soddisfatta l'equazione *resultante*

$$R(x)=0.$$

Siccome fra i $2mn$ raggi uniti della corrispondenza c'è la retta all'infinito contata mn volte, così l'equazione $R(x)=0$, cui soddisfano gli elementi uniti, si riduce dal grado $2mn$ al grado mn, dando in questo modo *solo* i valori della x cui corrispondono punti comuni alle due curve.

Vediamo pertanto che il metodo fondato sul principio di corrispondenza per determinare le intersezioni di due curve

$$f(xy)=0$$
$$\varphi(xy)=0,$$

coincide in sostanza col metodo della *eliminazione di y*, quale si sviluppa d'ordinario nell'Algebra.

Le considerazioni precedenti porgono non soltanto il grado della *resultante*, ma anche un modo di *formazione effettiva*, e precisamente quello che viene designato come primo metodo di EULERO o metodo di EULERO-CRAMER. (Confronta il paragrafo sulle intersezioni di due curve nel Libro terzo). Infatti quelle considerazioni conducono a scrivere il prodotto delle differenze

$$\Pi(y_i - y'_k),$$

che — contenendo simmetricamente le y_i e y_k', radici delle equazioni $f(y) = 0$ e $\varphi(y) = 0$, a coefficienti razionali in x — risulta una funzione razionale $R(x)$. Ma sulla formazione effettiva del resultante daremo ampi ragguagli nel luogo accennato del libro terzo. Qui ci limitiamo a osservare che la resultante $R(x) = 0$ delle equazioni

$$f(xy) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(xy) = 0,$$

la quale è in generale di grado mn, può abbassarsi di grado. Questa circostanza (come già vide EULERO) corrisponde all'esistenza di *punti all'infinito comuni* alle due curve $f = 0$, $\varphi = 0$ (Cfr. L. 1°, § 9). Ciò appare anche dal fatto che il grado della resultante R resta sempre mn ove le f e φ siano rese omogenee, ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3};$$

si tratta allora della forma binaria

$$R(x_1 x_3) = x_3^{mn} R(x),$$

che si ottiene come resultante delle forme ternarie

$$f(x_1 x_2 x_3) = x_3^{m} f(xy),$$

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = x_3^{n} \varphi(xy),$$

coll'eliminazione di x_2.

L'introduzione delle anzidette *soluzioni asintotiche* serve ad ogni modo a rimuovere ogni eccezione dalla teoria della resultante. In particolare il caso in cui la resultante $R(x)$ di $f(xy) = 0$ e $\varphi(xy) = 0$ si riduce di grado 0 (non identica), cioè il caso d'*incompatibilità* delle equazioni $f(xy) = 0$, $\varphi(xy) = 0$ è il caso in cui le *soluzioni comuni* alle equazioni predette sono *soltanto all'infinito*. Da questo punto di vista *non si potrà più parlare di incompatibilità* di un sistema di due equazioni a due incognite, *se non* in quei casi *dove la natura* *della questione escluda le soluzioni infinite* (o un certo numero di soluzioni eccezionali).

Nota. La estensione della teoria della eliminazione a sistemi di equazioni con più incognite, può essere ottenuta ancora col metodo geometrico di Chasles, e per tal modo si raggiunge anzi un risultato più significativo di quello che è contenuto negli ordinari trattati di algebra. L'estensione a cui qui si accenna è dovuta a Fouret [1].

Anzitutto osserviamo che in forza del teorema sulle intersezioni di due curve piane, due *superficie* (algebriche) *d'ordine* m, n *hanno comune una curva* (algebrica) *d'ordine* mn, come si vede segando le due superficie con un piano generico. Ora il teorema sulla eliminazione, per cui *tre superficie degli ordini* m, n, p (non aventi infiniti punti comuni) *hanno* mnp *intersezioni*, si potrà ritenere come caso particolare del seguente:

Una superficie d'ordine n *e una curva* (*piana o gobba*) *d'ordine* r, *che non contenga una parte giacente sopra la superficie, posseggono* nr *intersezioni.*

Sia C la curva d'ordine r (cioè intersecata da un piano generico in r punti) ed F la superficie d'ordine n (cioè intersecata da una retta generica in n punti). Scelgansi una retta e un punto generici a e A; condotto per a un piano α, questo segherà in r punti la C i quali da A verranno proiettati in nr punti di F; si avranno quindi altrettanti piani α' che proietteranno da a questi punti. La corrispondenza fra piani α e α', nel fascio di asse a, avrà $2nr$ piani uniti; ma fra queste coincidenze nr vengono assorbite dal piano aA; le altre nr danno le intersezioni di C con F.

L'accennato procedimento si estende senz'altro alle varietà a più dimensioni e conduce a dimostrare che: *nello spazio* S_n, a n dimensioni, n *varietà* ad $n-1$ dimensioni *d'ordini* m_1, m_2, ... m_n, *posseggono* $m_1 m_2 \dots m_n$ *intersezioni* (distinte o no), salvo il caso che esse abbiano comuni infiniti punti, formanti una curva o varietà più estesa.

Infatti la dimostrazione di questo teorema si riduce sempre a determinare le intersezioni di una curva con una varietà, e quindi non dà luogo a nuove considerazioni. Una difficoltà essenzialmente nuova s'incontra invece nel problema

[1] *Bulletin de la Société Mathématique*, t. 1, (1873), pg. 122, 258.

di intersecare due superficie di S_4 e così di seguito; ma di ciò discorreremo più avanti.

14. Il principio di Lamé e la proprietà caratteristica dei sistemi lineari. — Come caso particolare del teorema di BÉZOUT si ha che: due curve piane d'ordine n, senza parti comuni, hanno n^2 intersezioni (o un numero minore d'intersezioni multiple, equivalenti ad n^2).

Si considerino due curve d'ordine n, senza parti comuni: $\varphi = 0$, $\psi = 0$; le curve d'ordine n appartenenti al fascio

$$\lambda\varphi + \mu\psi = 0$$

passano per gli n^2 punti comuni alle curve φ e ψ.

Viceversa G. LAMÉ ([1]) ha enunciato come principio evidente (traendone numerose applicazioni) che « ogni curva f passante per gli n^2 punti comuni alla φ e alla ψ è una combinazioni lineare di queste ». Questo principio si giustifica intanto se una delle tre curve f, φ, ψ, p. es. la f, sia irriducibile: *se la curva irriducibile f passa per gli n^2 punti comuni a φ e a ψ si ha*

$$f = \lambda\varphi + \mu\psi.$$

Infatti si consideri un punto generico P della curva f, fuori del gruppo $\varphi = 0$, $\psi = 0$; per P passa *una* curva del fascio $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, giacchè il passaggio per P si traduce in un'equazione lineare che vale a determinare il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$; codesta curva ha con f, $n^2 + 1$ punti comuni, si deduce che — essendo f irriducibile — f coincide colla suddetta curva del fascio $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$.

Osservazione. La condizione espressa nell'enunciato, che la curva f passi per gli n^2 punti comuni a φ e a ψ, conserva un significato algebrico preciso anche quando la φ e la ψ posseggano punti multipli comuni, con qualsivoglia contatto; essa significa, in ogni caso, che la resultante ottenuta dall'eliminazione di y (o di x) fra le equazioni $f = 0$, $\varphi = 0$,

([1]) « Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie » (Parigi, 1818, pg. 27).

coincide colla resultante analoga di φ, ψ:

$$R(f\varphi) = R(f\psi) = R(\varphi\psi).$$

Prima di esaminare più precisamente le condizioni di validità del principio di LAMÉ, fissando la restrizione che occorre all'uopo ove si lasci cadere ogni ipotesi di irriducibilità, vediamo come il teorema stabilito permetta di dedurre la

Proprietà caratteristica del fascio: Se un sistema algebrico (irriducibile) semplicemente infinito di curve irriducibili è tale che per un punto generico del piano passi una curva di esso, il sistema è un fascio.

Si considerino i punti del piano che sono intersezioni di due curve f del sistema: codesti punti sono eccezionali, giacchè per un punto generico passa una sola f; segue da ciò che essi sono punti fissi comuni a tutte le curve del sistema (irriducibile). Infatti la determinazione delle curve del sistema passanti per un punto del piano viene a dipendere in generale da un'equazione algebrica che ha una sola radice e perciò è di primo grado; se per un punto particolare accade che la suddetta equazione abbia due radici, essa risulta identicamente soddisfatta da quel punto.

Ciò posto il sistema delle curve f, aventi un certo ordine n, è tale che una qualunque di esse passa per i punti comuni a due altre curve generiche: è dunque il caso di applicare il principio di LAMÉ.

Osservazione. L'irriducibilità del sistema ∞^1 che gioca nella dimostrazione precedente, è una conseguenza dell'ipotesi che per un punto generico passi *una* curva del sistema, almeno se si esclude il caso di un sistema formato di sistemi di dimensione diversa (dei quali non si può dire propriamente che abbiano la dimensione uno): altrimenti ciascuno dei sistemi componenti conterrebbe almeno una curva passante per un punto.

Quanto alla restrizione che le curve del sistema siano irriducibili, essa non è necessaria per la validità del teorema: la *proprietà caratteristica del fascio si estende ai sistemi di curve riducibili*, purchè *prive* di *parti multiple* variabili. Senza entrare a tale proposito in una critica minuta, basterà osservare che la dimostrazione più generale del teorema consegue dal teorema di LÜROTH (§ 3). Infatti si consideri una serie di curve d'ordine n, tale che per un punto generico ne passi *una*, f. Segando con una retta $y = \text{cost.}$ si avranno i gruppi di n punti di una g^1_n (teorema di LÜROTH), quindi, designando con φ e ψ due curve della serie, sarà identicamente

$$f = \lambda(y)\varphi + \mu(y)\psi.$$

Ma in modo analogo, segando con una retta $x = \text{cost.}$, si trova

$$f = \lambda'(x)\varphi + \mu'(x)\psi.$$

Si deduce che

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \mu',$$

sono costanti (indipendenti da x, y).

L'osservazione precedente relativa ai sistemi ∞^1 di curve riducibili permette ora di riconoscere sotto quali condizioni il principio di LAMÉ si estenda al caso di curve φ, ψ, f riducibili.

Supponiamo che una curva (riducibile) f passante per i punti comuni a due curve (riducibili) φ e ψ dello stesso ordine, non appartenga al fascio $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$; le curve $\lambda\varphi + \mu\psi + \nu f = 0$ formeranno una rete, tale che due curve generiche di essa si segheranno soltanto nei punti fissi del gruppo base, per cui $\varphi = \psi = f = 0$. Anche le componenti irriducibili di due curve generiche della rete (supposte spezzate) si segheranno parimente nei punti base della rete. Ciò posto si considerino le ∞^1 curve della rete che passano per un punto generico, P, del piano; ognuna di tali curve possiederà una componente irriducibile C passante per P. Ma vi sarà una sola C comune alle suddette ∞^1 curve per P, altrimenti due C distinte si segherebbero in un punto fuori del gruppo base della rete. Si deduce che le curve C, poichè ne passa *una* per un punto, formano un fascio di curve generalmente irriducibili. Le curve della rete risultano composte con le C del fascio, giacchè la C che passa per un punto generico di una curva della rete fa parte di essa.

La conclusione è che il principio di LAMÉ cade in difetto soltanto se le curve d'ordine n della rete, e in particolare quindi le $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$, si compongono ciascuna di un certo numero r (> 1) di curve d'ordine m di un fascio, essendo $n = rm$. Questa eccezione è essenziale, perchè, considerando un fascio di curve d'ordine m, i gruppi di r curve di esso formano un sistema (lineare) ∞^r tale che due curve qualunque si segano nei punti base.

Possiamo ora enunciare il resultato ottenuto, contemplando anche il caso, dapprima escluso, in cui le curve $\varphi=0$, $\psi=0$ abbiano una parte comune, visto che: sommando ad un fascio una curva fissa si ottiene ancora un fascio.

Principio di Lamé: *Una curva f la quale passi per i punti comuni a due curve φ e ψ del medesimo ordine, appartiene al loro fascio:*

$$f=\lambda\varphi+\mu\psi;$$

fa eccezione il caso in cui, tolte le eventuali parti comuni, le curve φ, ψ, f, si compongano con le curve di un fascio.

Il teorema che assegna la proprietà caratteristica del fascio si estende ai sistemi lineari di dimensione $r>1$. Si ha dunque la

Proprietà caratteristica dei sistemi lineari ∞^r: Se un sistema algebrico (irriducibile) ∞^r $(r\geq 1)$ di curve, prive di parti multiple variabili, è tale che per r punti generici del piano passa *una* curva di esso, il sistema è lineare.

Il teorema è già stato dimostrato per $r=1$: dimostriamolo per $r>1$ valendoci del procedimento d'induzione completa; supponiamo dunque che esso sia stato stabilito per i sistemi di dimensione $r-1$. Supponiamo dapprima che due curve generiche f abbiano intersezioni variabili, fuori dei punti-base comuni a tutte le curve del sistema. Consideriamo un punto P comune a due f generiche, fuori dei punti base; la condizione lineare esprimente il passaggio delle f per P non è identicamente soddisfatta per tutte le f del dato sistema, quindi le f per P formano un sistema ∞^{r-1}; ma poichè in questo sistema esiste una curva passante per altri $r-1$ punti generici assegnati, il sistema stesso sarà lineare e conterrà il fascio determinato da due f che gli appartengono; si deduce che anche il dato sistema ∞^r contiene il fascio determinato da due f generiche, e perciò è un sistema lineare.

Il ragionamento che precede non è applicabile al caso in cui le f generiche non abbiano intersezioni variabili e quindi constino, a meno di parti fisse, di un certo numero $n\,(\geq r)$ di curve φ d'un fascio. In tale ipotesi le f passanti per un punto P generico, hanno comune la curva φ per P e (secondo la supposizione fatta) formano un sistema lineare ∞^{r-1}; entro il sistema lineare ∞^{r} delle f si hanno ∞^{1} sistemi lineari ∞^{r-1} siffatti, i quali a due a due hanno comune il sistema lineare ∞^{r-2} contenente due φ come parti fisse. Bisognerà provare che i suddetti ∞^{1} sistemi lineari appartengono ad uno stesso sistema lineare ∞^{r}, che comprende la totalità delle f riducibili.

Questa prova riesce evidente ove si ricorra al linguaggio degli iperspazi; si tratta di mostrare che « in uno spazio lineare S_m (rappresentante tutti i gruppi di m curve del fascio φ aumentati delle eventuali componenti fisse delle f, o se si vuole nello spazio di tutte le curve d'ordine n) quantisivogliano S_{r-1} a due a due incidenti, cioè secantisi secondo S_{r-2}, e non passanti per un medesimo S_{r-2}, stanno in un medesimo S_r ». Ora è chiaro che un qualsiasi S_{r-1} incidente a due S_{r-1} e non passante per il loro S_{r-2} comune, appartiene allo S_r da essi determinato.

Così il teorema resta provato anche nel caso in cui le f sieno (riducibili) senza intersezioni variabili. E si può notare che la prova fornita in questo caso si può assumere come prova generale del teorema, perchè essa è applicabile (con semplici modificazioni di parole) anche al caso dapprima trattato.

La questione relativa alla possibilità di definire un sistema lineare ∞^{r} di curve mediante la condizione che r punti determinino una curva di essa, fu posta e risoluta da F. Enriques (Lincei, 2 luglio 1893) con riferimento al caso generale dei sistemi di curve tracciati sopra una supercie qualunque. La dimostrazione del teorema così ottenuto è stata semplificata da C. Segre (1894) e per il caso particolare dei sistemi di curve del piano (o di ipersuperficie dello S_n) da E. Bertini (1897) nel suo citato libro sugli iperspazi (pg. 222). Il Bertini prende come punto di partenza il teorema di Lüroth; a noi è parso interessante ricollegare la proprietà caratteristica dei sistemi lineari di curve piane ad un principio anche più semplice, quale è (almeno per curve irreducibili) il principio di Lamé.

Osservazione. Il caso di sistemi di curve con parti doppie o multiple costituisce un' effettiva eccezione al teorema, giacchè « contando due o più volte le curve d'un sistema lineare non si ottiene un sistema lineare ». Infatti se $f = \lambda\varphi + \mu\psi$, $f^2 = \lambda^2\varphi^2 + \mu^2\psi^2 + 2\lambda\mu\varphi\psi$ non è combinazione lineare di φ^2 e ψ^2.

Dal principio di LAMÉ, richiamando il teorema di BERTINI sui punti multipli delle curve d'un sistema lineare (§ 5), si deduce ora il

Teorema di BERTINI *sui sistemi lineari di curve riducibili*: Se le curve generiche d'un sistema lineare sono riducibili, le parti variabili di esse (ottenute prescindendo da componenti fisse) sono irriducibili oppure sono composte colle curve d'un fascio.

Infatti le parti variabili del sistema formano un sistema lineare; se queste parti sono riducibili, le loro componenti irriducibili non possono segarsi in punti variabili (che sarebbero punti doppi variabili pel sistema); si deduce che esse si segano a due a due nei medesimi punti, e perciò formano un fascio.

15. Il paradosso di Cramer e le relazioni fra i punti base di un fascio di curve. — Il fatto che due curve d'ordine n, $f=0$ e $\varphi=0$, si seghino in n^2 punti, costituisce una apparente contraddizione al teorema che $\frac{n(n+3)}{2}$ punti del piano determinano una curva d'ordine n, almeno quando si dimentichi di aggiungere la condizione restrittiva, richiesta da quel teorema, che gli $\frac{n(n+3)}{2}$ punti sieno generici, per modo che il passaggio di una curva d'ordine n per essi si traduca in un sistema di equazioni lineari indipendenti capace di *determinare* la costruzione della curva.

L'osservazione che $\frac{n(n+3)}{2}$ punti, scelti fra le n^2 intersezioni di due curve d'ordine n, non determinano più una curva di quell'ordine, risale al MAC-LAURIN (1720), trovandosi a pag. 137 della sua « Geometria organica », senza essere accompagnata da alcun tentativo di spiegazione. La difficoltà viene spiegata, col riconoscimento dell'indeterminazione della curva, da EULERO in « Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper ». (Acad., Berlino, 1748) e da CRAMER nella « Introduction à l'analyse.... » (§ 48), che dice aversi in ciò un « véritable paradoxe ». Appunto da quest'ultimo autore è venuto il nome di « paradosso di CRAMER ».

Ma il vero significato geometrico del paradosso di CRAMER è stato messo in chiara luce da LAMÉ. Gli n^2 punti intersezioni di due curve φ e ψ, d'ordine n, senza parti comuni, impongono soltanto $\frac{n(n+3)}{2}-1$ condizioni alle curve di codesto ordine che debbano passare per essi; siccome queste curve appartengono in generale al fascio $\lambda\varphi+\mu\psi=0$ (§ 14), così il passaggio delle curve d'ordine n per le intersezioni di φ e ψ equivarrà precisamente a $\frac{n(n+3)}{2}-1$ condizioni indipendenti, onde: fra gli n^2 punti (semplici) comuni alla φ e alla ψ, ve ne sono $\frac{n(n+3)}{2}-1$ che impongono alle curve d'ordine n condizioni indipendenti, e tutte le curve del detto ordine passanti per quei punti passano di conseguenza per i restanti.

La conclusione precedente è stata dedotta coll'applicazione del principio di LAMÉ, che non può dar luogo al caso d'eccezione quando le curve φ e ψ si seghino in n^2 punti *semplici* (giacchè in tale ipotesi esse non possono risultare composte colle curve irriducibili d'un medesimo fascio). Pertanto si può enunciare che:

Le curve d'ordine n *che passano per* $\frac{n(n+3)}{2}-1$ *punti generici del piano, passano di conseguenza per altri*

$$n^2-\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti, che vengono determinati come intersezioni di due curve tracciate per i primi.

Così in particolare: tutte le *cubiche per otto* punti generici del piano *passano* di conseguenza *per* un *nono*.

Ma l'osservazione precedente s'interpreta di solito nel senso che « scelti *ad arbitrio* $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti fra le n^2 intersezioni di due curve d'ordine n (supposte semplici), codesti $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti offrono condizioni indipendenti alle curve d'ordine n soggette a passare per essi, le quali di conseguenza debbono passare per i rimanenti ». Tale asserzione si può ammettere come vera *in generale*, basandosi sulla simmetria di tutti i gruppi di punti contenuti nel gruppo G_{n^2} base di un fascio di curve d'ordine n: $\lambda f+\mu\varphi=0$; è chiaro infatti che la distinzione dei gruppi contenuti nel G_{n^2} corrisponde a condizioni particolari imposte alla resultante delle equazioni $f=0$, $\varphi=0$. Ma vi sono delle eccezioni, di cui più tardi daremo esempio, e perciò conviene giustificare l'affermazione precedente per il caso del fascio di cubiche in cui essa è vera senza restrizione (almeno nell'ipotesi di punti base semplici e di fasci di cubiche irriducibili). Dimostriamo dunque che: date due cubiche $f=0$, $\varphi=0$, senza parti comuni, le quali si seghino in nove punti semplici: $P_1, P_2, \ldots P_9$, le condizioni di passaggio di una cubica per codesti nove punti sono tali che *una qualsiasi* di esse è conseguenza delle rimanenti, e così, p. es., le cubiche passanti per $P_1, \ldots P_8$ passano necessariamente per P_9.

Facciamo la dimostrazione per assurdo: Supponiamo adunque che l'equazione esprimente il passaggio per P_9 non sia conseguenza delle rimanenti otto equazioni sopra nominate. Se ciò accade queste equazioni dovranno alla lor volta non essere indipendenti, e una di esse, per esempio quella che esprime il passaggio per P_8, sarà conseguenza delle altre sette: si avrà allora che tutte le cubiche passanti per $P_1, P_2, \ldots P_7$ dovranno passare anche per P_8.

Ora questa conclusione non può sussistere: infatti si può trovare una cubica composta di una conica e di una retta che passi per $P_1, P_2, \ldots P_7$ e non per P_8.

Per svolgere questa deduzione in modo rigoroso, procediamo come segue. Notiamo dapprima che i punti $P_1, P_2, \ldots P_7$ non possono a coppie esser allineati con P_8; infatti essi sono in numero dispari, e non possono tre di essi trovarsi su di una medesima retta per P_8, perchè questa risulterebbe parte comune alle $f=0$, $\varphi=0$, di cui conterrebbe quattro punti. Potremo adunque supporre che la retta P_7P_8 non contenga nessuno degli altri sei punti $P_1, \ldots P_6$. Consideriamo due punti A e B della retta P_7P_8: esiste una cubica che passa per i nove punti $P_1, \ldots P_7, A, B$. Questa cubica dovrà per ipotesi passare anche per P_8, ma avendo quattro intersezioni con la retta AB si spezzerà in questa retta e in una conica residua C_2, che dovrà passare per $P_1, P_2, \ldots P_6$. Consideriamo ora la cubica formata dalla conica C_2, e da una retta qualsiasi che passi per P_7 e non per P_8: questa cubica contiene i sette punti $P_1, \ldots P_7$ e non il punto P_8; si ottiene così la cubica che si voleva costruire.

Abbiamo dunque dimostrato che sussiste senza restrizioni il

Teorema. *Tutte le cubiche che passano per otto fra i nove punti d'intersezione di due cubiche $f=0$, e $\varphi=0$ (supposti semplici) passano di conseguenza per il nono punto.*

Osservazione. Il teorema precedente continua a sussistere se due o più punti comuni alle due cubiche f e φ diventano infinitamente vicini, rimanendo semplici per le due curve, giacchè sappiamo che un contatto i-punto porta in generale i condizioni, come il passaggio per i punti distinti (L. 1°, § 13).

Anche se una delle due cubiche, per es. φ, possiede un punto doppio A, che sia semplice per l'altra, si può dire che il teorema continua a sussistere, dovendosi intendere che il passaggio di una cubica per le due intersezioni di f e φ assorbite in A, significhi passaggio per A e contatto con la f.

Ma un' *eccezione essenziale* al teorema si ha nel caso che la f e la φ posseggano un *punto doppio comune*, giacchè tutte le cubiche aventi lo stesso punto doppio soddisfano a tre condizioni ed hanno ivi quattro intersezioni riunite con le f, φ. Una cubica che abbia lo stesso punto doppio e passi per quattro punti fra le ulteriori intersezioni della φ con la ψ, ha otto intersezioni a comune con esse, senza passare necessariamente per la nona!

La proprietà del gruppo dei punti base di un fascio di cubiche permette di dare (con Plücker [1]) una elegante dimostrazione del noto

Teorema di Pascal:

Se un esagono $ABCDEF$ è inscritto in una conica K, le tre coppie di lati opposti

$$AB,\ DE;\quad BC,\ EF;\quad CD,\ FA$$

s'incontrano in tre punti P, Q, R che appartengono a una medesima retta.

Per dimostrarlo consideriamo le tre cubiche seguenti:

1) La cubica C_3 costituita dalla conica K e dalla retta PQ.

2) La cubica C_3' costituita dalle tre rette AB, CD, EF.

3) La cubica C_3'' costituita dalle 3 rette BC, DE, FA.

[1] *Analytisch-geometrische Entwickelungen.* (Essen, 1828-31) Bd 1, pag. 267. Nota.

Notiamo che la C_3' e la C_3'' s'intersecano nei nove punti A, B, C, D, E, F, P, Q, R, e che la C_3 passando per otto di essi, cioè per i punti A, B, C, D, E, F, P, Q, deve passare anche per il nono punto, cioè per R: ma la conica K non contiene R, quindi R deve trovarsi sulla retta PQ, cioè i tre punti P, Q, R devon essere allineati.

Un caso particolare a cui dà luogo il fascio di cubiche, notevole anche per le conseguenze che ne dipendono, è quello in cui i nove punti base siano comuni a due terne di rette.

Consideriamo una cubica f e due rette a e b, che la seghino nei punti (distinti o coincidenti) A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3; le rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 segheranno f rispettivamente in tre punti C_1, C_2, C_3. Ora i 9 punti

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\quad B_1,\ B_2,\ B_3,\quad C_1,\ C_2,\ C_3$$

sono comuni alla cubica f e all'altra cubica costituita dalle tre rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, quindi ogni altra cubica passante per otto di quei punti contiene anche il nono. Ma una cubica siffatta è costituita dalla terna delle rette a, b, $c = C_1C_2$; si deduce che c passa per C_3, cioè: *i tre punti* C_1, C_2, C_3, *sono in linea retta.*

Questa osservazione dà luogo ad un primo corollario.

Facciamo coincidere la retta b con la a, in guisa che A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 vengano sostituite dalle tangenti ad f in A_1, A_2, A_3, e quindi C_1, C_2, C_3 divengano i così detti *tangenziali* di A_1, A_2, A_3; avremo il

Teorema di MAC-LAURIN [1]. Se tre punti A_1, A_2, A_3 di una cubica sono in linea retta, i loro tangenziali sono pure sopra una retta (che seguendo SYLVESTER si dirà *satellite* della prima).

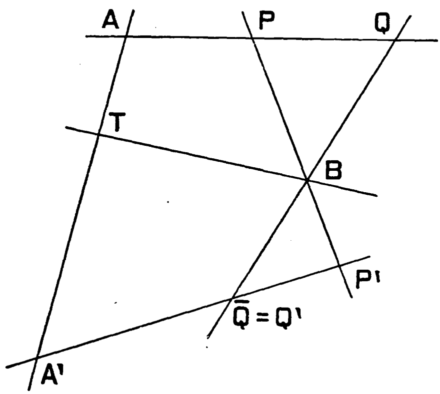
Il teorema che precede dà luogo anche a una seconda conseguenza interessante:

Sopra una cubica f si considerino le *coppie dei punti allineati con un punto fisso* della curva, A; se codeste coppie vengono proiettate sopra la cubica da un altro punto B di essa,

[1] Cfr. il « Trattato sulle curve del 1748 » (trad. fr. DE JONQUIÈRES pg. 223) ove il teorema viene dimostrato basandosi sulla considerazione della retta polare d'un punto (L. 3°).

le proiezioni ottenute risultano pure *allineate con un punto* A' della curva: questo punto A' è l'ulteriore intersezione della f con la retta che unisce A col punto T, tangenziale di B.

Sia adunque T l'ulteriore intersezione della cubica f con la tangente in B, siano P, Q le ulteriori intersezioni della f con una retta generica passante per A e siano infine P', Q' le ulteriori intersezioni con le rette PB, QB.



Ora noi dobbiamo dimostrare che i punti A' P' Q' sono allineati. A tale oggetto basterà far vedere che il punto $\overline{Q}$, ulteriore intersezione della f con la retta $A'P'$, coincide col punto Q'.

Si considerino le tre cubiche seguenti: la cubica f data, la cubica φ somma delle tre rette

$$AP + BT + A'P',$$

e infine la cubica ψ somma delle tre rette

$$AT + PB + QB:$$

queste hanno in comune gli otto punti A, P, Q, T, B contato due volte, A', B': quindi hanno in comune anche un altro punto; cioè il punto $\overline{Q}$, nono punto comune alle f e φ, coincide col punto Q', nono punto comune alle f e ψ. c. d. d.

16. Teoremi più generali sui gruppi di punti comuni a due curve. — LAMÉ a pg. 30 del citato opuscolo ha avvertito la possibilità di estendere il suo principio a curve d'ordine diverso. Questa estensione ha condotto ad alcuni teoremi che qui ricordiamo:

Teorema di GERGONNE (¹). *Se fra gli* n^2 *punti comuni a due curve d'ordine* n, f e φ, *ve ne sono* mn ($m < n$) *appartenenti ad una curva irriducibile,* ψ, *d'ordine* m, *i rimanenti* $(n-m)n$ *punti appartengono a una curva d'ordine* $n-m$ (di cui sono le intersezioni complete con f e φ).

Infatti si consideri il fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$; una curva di

(¹) Annales de Math., tomo 17, 1827.

questo, soggetta a contenere un punto generico della ψ, conterrà questa ψ (essendo la ψ irriducibile); si deduce che per certi valori di λ e μ:

$$\lambda f + \mu\varphi = \psi\theta,$$

dove $\theta = 0$ è una curva d'ordine $n - m$ che passa per i punti del gruppo base del fascio $\lambda f + \mu\varphi = 0$, da cui vengano tolti gli mn punti intersezione di ψ.

Osservazione. Il teorema precedente continua a valere se la ψ è ***riducibile***, per es. in due curve ψ_1 e ψ_2, d'ordine m_1 e m_2, purchè i ***punti comuni alle*** ψ_1, ψ_2 ***non*** cadano ***nei punti base del fascio*** $\lambda f + \mu\varphi = 0$. Infatti in tale ipotesi i punti di intersezione della curva ψ_2 con la f d'ordine n, apparterranno ad una curva d'ordine $n - m_1$, la quale dovrà quindi contenere ψ_2, avendo con essa $m_2 n > m_2(n - m_1)$ intersezioni.

Ciò che precede si può anche esprimere dicendo che: se una curva φ d'ordine n passa per i punti comuni a un'altra curva f dello stesso ordine e a una ψ d'ordine inferiore, supposta passare semplicemente per i detti punti, la prima curva è una combinazione lineare delle altre due: $\varphi = \lambda f + \theta\psi$. Di qui si trae il

Teorema di JACOBI [1]. Gli mn punti comuni ad una curva f d'ordine n e a una curva ψ d'ordine m ($m \leq n$) che non abbia punti doppi su f, offrono

$$mn - p, \qquad \left(p = \frac{(m-1)(m-2)}{2}\right),$$

condizioni indipendenti alle curve d'ordine n che debbono contenerli, di guisa che *le curve d'ordine* n *che passano per* mn — p *punti generici di una curva d'ordine* m, *passano di conseguenza per altri* p *punti fissi di questa.*

Infatti le curve d'ordine n che passano per le intersezioni di f e ψ formano il sistema lineare $f + \theta\psi = 0$, essendo θ un qualsiasi polinomio d'ordine $n - m$; ed il suddetto sistema lineare ha la dimensione

$$\frac{(n-m)(n-m+3)}{2} + 1 = \frac{n(n+3)}{2} - mn + p.$$

[1] « De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum... » (Journal für Math., t. 15, 1836).

Segue, in particolare, dal teorema di JACOBI che, mentre gli n o $2n$ punti, intersezioni di una curva d'ordine n con una retta o con una conica, offrono condizioni indipendenti alle curve d'ordine n, i $3n$ punti comuni a una curva f d'ordine n e ad una cubica ψ, sono tali che le curve d'ordine n passanti per $3n-1$ di essi passano di conseguenza per l'ultimo.

Osservazione. Il teorema precedente dà il modo di costruire fasci di curve d'ordine n per cui esistono particolari gruppi di $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti scelti fra gli n^2 punti base, che offrono condizioni non indipendenti alle curve d'ordine n, per modo che le curve d'ordine n passanti per un tal gruppo non passino di conseguenza per i rimanenti punti base del fascio. Invero si prenda $n=4$, e si considerino due quartiche f_1, f_2, passanti per dodici punti di una cubica; questi dodici punti imponendo soltanto undici condizioni alle quartiche, presi insieme ad un altro punto comune ad f_1 e f_2, costituiscono un gruppo di tredici punti per cui passa una rete anzichè un fascio di quartiche. Ed è chiaro come questo esempio si possa generalizzare.

Ora giova avvertire che « fra i *dodici punti comuni ad una quartica e ad una cubica irriducibile*, supposti distinti, sempre undici *qualsiansi* offrono alle quartiche condizioni indipendenti, sicchè *le quartiche passanti per undici punti scelti ad arbitrio fra i dodici passano* di conseguenza *per il dodicesimo* ». Infatti, se così non fosse, si avrebbe sulla cubica un gruppo di undici punti tale che, tutte le quartiche per dieci di essi: 1,.... 10, passerebbero per il punto undici; ma ciò è impossibile giacchè si possono costruire delle quartiche composte di una retta e di una cubica, passanti per 1,.... 10 e non per 11. La dimostrazione di ciò si svolge come segue.

Pongasi che esistano undici punti 1,.... 11, tali che tutte le ∞^4 quartiche che passano per i primi dieci passino per l'undicesimo, e si ammetta dapprima che la retta congiungente il punto 11 col 10 non contenga nessuno dei punti 1,.... 9; in tal caso i punti 1,.... 9 sono base per un fascio di cubiche φ che si ottengono come parti delle ∞^1 quartiche (riducibili) assoggettate a passare per i punti 1,.... 10 (e quindi per 11) e per altri tre punti della retta che congiunge 10 con 11; ora una φ non passante per i punti 10 e 11, insieme ad una retta generica per 10, dà luogo a una quartica che non contiene 11. In secondo luogo, qualora la retta che congiunge i punti 10 e 11 contenga per es. il punto 9, si avranno ∞^2 cubiche passanti per i punti 1,.... 8, il che contraddice a quanto si è visto nel § 15; invero basterà imporre alle ∞^4 quartiche passanti per 1,.... 10 (e quindi per 11) di contenere altri due punti della retta che unisce 10 e 11.

Una applicazione interessante del teorema di JACOBI completato dall'osservazione che precede, è la seguente:

Sopra una cubica (irriducibile) f si considerino sette punti (semplici) 1,.... 7, e per essi si mandi una cubica generica φ a segare la prima nei punti 8, 9; le coppie di punti 8, 9 sono allineate con un punto fisso di f, indipendente dalla variazione di φ. Codesto punto si chiama il *coresiduale dei sette punti* 1,.... 7 sopra f (SYLVESTER) [1].

Per dimostrare l'asserto, si consideri una seconda cubica φ', diversa da φ, la quale seghi f nei punti 8', 9'; la quartica composta di φ e della retta 8'9', sega la cubica f nei punti 1,.... 7, 8, 9, 8', 9' e in un dodicesimo punto fisso.

Nota. Il teorema di JACOBI e quello di GERGONNE che gli serve di base, possono essere riassunti in un teorema più generale.

Se una curva ψ d'ordine n passa per gli mq punti semplici comuni a due curve f, φ d'ordine m, q, si ha

$$\psi = Af + B\varphi,$$

dove A e B sono due polinomi degli ordini $n - m$, $n - q$.

E quindi, se fra le mn intersezioni semplici della curva ψ con la curva f, ve ne sono mq appartenenti alla curva φ, le rimanenti $m(n - q)$ appartengono a una curva d'ordine $n - q$ (la curva $B = 0$).

Il secondo teorema (di PLÜCKER) sostanzialmente equivalente al primo, si dimostra nell'ordine di idee di questo paragrafo soltanto con qualche restrizione: Cfr. p. es. CREMONA « Introduzione... » (Opere, Tomo I, pag. 360. Nota dei revisori, pag. 484). Più tardi ne daremo invece una dimostrazione affatto generale per modo che la « geometria sopra una curva », che vi si fonda, riuscirà libera da qualsiasi limitazione.

(1) Cfr. il trattato di SALMON, cap. V, sez. I, (trad. fr. pg. 196).

Nella citata « Introduzione.... » di CREMONA si troverà anche esposto il seguente teorema che, sotto forma rigorosa, può essere enunciato come segue:

Teorema di CAYLEY [1]. Fra le mq intersezioni di due curve d'ordine m e q, senza punti doppi comuni, e nell'ipotesi

$$m \leq n, \quad q \leq n, \quad n < m + q,$$

vi sono

$$mq - \frac{(m+q-n-1)(m+q-n-2)}{2}$$

punti tali che tutte le curve d'ordine n passanti per essi passano di conseguenza per i rimanenti.

17. Generazione proiettiva di Steiner. — Nel libro 1°, § 17 si è visto in qual modo una curva algebrica piana d'ordine n si possa generare come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci in corrispondenza $[n, n]$, o in corrispondenza $[n-r, n-s]$ ove si prendano come centri dei fasci due punti multipli della curva secondo r, s. Si possono assegnare per le curve d'ordine n anche altre generazioni interessanti, le quali si presentano come una diretta generalizzazione di quelle che valgono a definire le coniche nella geometria proiettiva e sono dovute a STEINER e GRASSMANN. (Cfr. § 18).

Si considerino due fasci di curve degli ordini m, n:

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0, \quad \lambda'\psi_1 + \mu'\psi_2 = 0,$$

e si ponga fra gli elementi di essi una corrispondenza algebrica biunivoca, la quale verrà rappresentata da una relazione bilineare fra $\frac{\lambda}{\mu}$ e $\frac{\lambda'}{\mu'}$; una tale relazione si chiamerà *proiettività fra i due fasci.* Assumendo come corrispondenti le curve

$$\varphi_1 = 0 \quad \psi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \psi_2 = 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad \psi_1 + \psi_2 = 0,$$

le equazioni della anzidetta proiettività si riducono a

$$\lambda' \equiv \lambda, \quad \mu' \equiv \mu.$$

[1] « On the Intersections of Curves » (Cambridge, Math. Journal III, 1843).

Data una proiettività fra due fasci di curve d'ordine n, m, *il luogo delle intersezioni delle curve omologhe è una curva* (f_{n+m}) *d'ordine* $n+m$; *che passa, evidentemente, per i punti base dei due fasci di curve generatori.*

Infatti segando con una retta generica si ottiene su questa una particolare corrispondenza $[n, m]$ (che è una proiettività fra i gruppi di una g^1_n e di una g^1_m), la quale possiede $n+m$ punti uniti: questi sono le intersezioni della curva f_{n+m} generata dai due fasci proiettivi suddetti.

La f_{n+m} riesce riducibile, pur ritenendosi irriducibili le curve generiche dei due fasci generatori, se accade che vi siano due curve omologhe appartenenti rispettivamente ai due fasci che abbiano una parte in comune.

Ma si può anche avere una f_{n+m} riducibile di cui una parte sia luogo di gruppi di s punti $(s < mn)$ comuni alle curve generatrici φ e ψ. Un semplice esempio illustrativo di questo caso si può dare come segue: si consideri un fascio di coniche φ e una retta a per un suo punto base A; le coniche φ si faranno corrispondere ai punti variabili che esse segano su a; ciò posto si consideri un fascio di raggi che proietta da un punto esterno i punti di a, questo fascio di raggi e il fascio delle coniche φ risultano proiettivi e la cubica generata si spezza nella retta a e in una conica residua.

La f_{n+m} potrà avere dei punti doppi (o multipli). Per esaminare quando ciò accada mettiamoci nell'ipotesi più semplice in cui la curva generica di ciascuno dei due fasci è priva di punti doppi. Allora vediamo che:

1) In primo luogo un punto P che non sia punto base per ambedue i fasci, e che sia intersezione semplice di due curve omologhe φ e ψ, è certo un punto semplice per f_{n+m}. Infatti se si considerano due curve φ e ψ, vicine alle nominate, queste s'intersecano in un solo punto P' vicino a P, e la retta PP' è la tangente in P ad f_{n+m};

2) Se invece P è punto di contatto di due curve omologhe, p. es. di φ_1 e ψ_1, sopra la tangente p in P questo punto figura come punto doppio di due gruppi omologhi delle g^1_n e g^1_m proiettive; ma, sopra un'altra retta q per P, il detto punto apparterrà semplicemente a gruppi omologhi delle g^1_n e g^1_m segate dai due fasci di curve φ, ψ e perciò — in generale — costituirà un punto unito semplice della corri-

spondenza $[n, m]$ così definita. La condizione che P costituisca un punto unito doppio per la corrispondenza $[n, m]$ sulla retta q appare una nuova condizione indipendente da quella che la p sia tangente a φ_1 e a ψ_1. Dunque *in generale* un punto di contatto di due curve omologhe φ e ψ sarà un punto *semplice* per la curva generata f_{n+m}; diventerà *doppio* se è soddisfatta una *condizione complementare*, che la regola di Zeuthen permette di esprimere analiticamente;

3) La condizione complementare anzidetta non è in generale soddisfatta se una sola delle due curve, p. es. φ_1, ha in P un punto doppio. Ma se P è *doppio* per le φ_1, ψ_1 la considerazione geometrica svolta innanzi mette in evidenza che esso è *doppio* (almeno) per f_{n+m}.

4) Se un punto P è un punto base comune per i due fasci di curve φ, ψ, sopra ogni retta per esso il punto P è punto fisso per le g^1_n, g^1_m segate dai due fasci, quindi conta (almeno) per due coincidenze della nostra corrispondenza $[n, m]$. Si deduce che φ è un punto doppio per la f_{n+m}, che, soltanto in casi particolari, possiede una moltiplicità superiore.

Le cose dette si convalidano e precisano colla trattazione analitica del problema, la quale può ottenersi applicando la regola di Zeuthen, ma anche (con uguale semplicità quanto ai calcoli) mediante l'esame diretto dell'equazione $f_{n+m}(xy) = 0$ che si ottiene eliminando λ e μ fra le

$$\lambda\varphi_1(xy) + \mu\varphi_2(xy) = 0$$

$$\lambda\psi_1(xy) + \mu\psi_2(xy) = 0.$$

Scriviamo

$$f_{n+m} = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = 0,$$

che è un'equazione d'ordine $n + m$; e poniamo che l'origine delle coordinate O, appartenga alle curve omologhe φ_1 e ψ_1; avremo

$$\varphi_1 = a_{10}x + a_{01}y + ..., \quad \varphi_2 = a_{00}' + a_{10}'x + a_{01}'y + ...$$

$$\psi_1 = b_{10}x + b_{01}y + ..., \quad \psi_2 = b_{00}' + b_{10}x + b_{01}'y + ...;$$

e quindi

$$f_{n+m} = (a_{10}b'_{00} - a_{00}'b_{10})x + (a_{01}b_{00}' - a_{00}'b_{01})y + ...$$

Affinchè O sia doppio per la curva f_{n+m}, occorre che sia

$$\begin{cases} a_{10}b_{00}' - a_{00}'b_{10} = 0 \\ a_{01}b_{00}' - a_{00}'b_{01} = 0. \end{cases}$$

Queste condizioni si soddisfano prendendo:

$$a_{00}' = b_{00}' = 0,$$

oppure

$$a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 0,$$

colla condizione complementare

$$a_{01}b_{00}' - a_{00}'b_{01} = 0.$$

Nel primo caso l'origine O è punto base per i due fasci di curve φ, ψ; nel secondo caso la prima equazione

$$a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 0$$

dice che le curve omologhe φ_1, ψ_1 hanno in O la stessa tangente

$$a_{10}x + a_{01}y = b_{10}x + b_{01}y = 0.$$

Se O non è punto base per il fascio delle φ ed è doppio per φ_1:

$$a_{00}' \neq 0, \quad a_{10} = a_{01} = 0,$$

le condizioni perchè O sia doppio per f_{n+m} si riducono a

$$b_{10} = b_{01} = 0,$$

cioè consistono nell'essere O punto doppio anche per ψ_1.

Dall'esame fatto segue che: se si assumono due fasci generatori di curve irriducibili φ e ψ, senza punti (base) doppi, la *curva* f_{n+m} risulta *in generale priva* essa stessa di *punti doppi*. Infatti nell'ipotesi più generale i due fasci non avranno punti base comuni, essi possiederanno bensì un numero finito di curve tangenti, ma per questi punti di contatto non verrà soddisfatta la trovata condizione complementare; quanto alle curve (particolari) dei due fasci che sono dotate di punto doppio, non avverrà in generale nè che esse si corrispondano, nè che abbiano comune il loro punto doppio, mentre dovrebbero verificarsi insieme queste due condizioni per ottenere in tal guisa un punto doppio corrispondente all'ipotesi 3).

Ora la generazione indicata conduce a proporre la *questione inversa*: data una curva generale d'ordine $n+m$, è possibile generarla come luogo delle intersezioni di curve d'ordine n, m, che si corrispondano entro due fasci proiettivi?

È chiaro che soltanto una risposta affermativa a tale domanda, quale effettivamente otterremo, potrà conferire una importanza fondamentale alla generazione anzidetta, nella teoria generale delle curve piane.

Per dimostrare che una curva d'ordine $n+m$, $f(xy)=0$, può essere generata mediante due fasci proiettivi di curve φ e ψ, d'ordine n, m, occorre far vedere che il polinomio f può scriversi sotto la forma

1) $$f=\varphi_1\psi_1-\varphi_2\psi_2.$$

Ora l'identità 1) si traduce in

$$\frac{(n+m)(n+m+3)}{2}+1$$

equazioni di secondo grado non omogenee, per mezzo delle quali, dati i coefficienti di f, si debbono determinare valori finiti dei coefficienti a, a', b, b' delle φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2. Se si contano le equazioni, si trova che il loro numero è inferiore a quello delle incognite e quindi si è tratti a concludere che la generazione della f per mezzo dei fasci di curve φ, ψ sia effettivamente possibile in infiniti modi. Ma questo ragionamento ha soltanto un valore di presunzione, e non può tenersi come probativo, se non si dimostri che le equazioni predette sono *compatibili* (Cfr. la Nota in fine a questo paragrafo). Giova quindi cercare un'altra dimostrazione del teorema, la quale si fonda sul teorema di Gergonne (§ 16).

Su questa base è facile dimostrare che:

La curva generale d'ordine $n+1$ $(n>1)$ *può essere generata mediante due fasci proiettivi, l'uno di rette e l'altro di curve d'ordine* n.

Sia f una curva d'ordine $n+1$, e per un punto generico A di essa si mandi una retta a a segare la curva f in altri n punti $A_1,\dots A_n$. Per questi n punti si mandi poi una curva φ d'ordine n a segare f in altri $(n+1)n-n=n^2$ punti $P_1,\dots P_{n^2}$. Si tratta di provare che questi n^2 punti P sono base per un fascio di curve d'ordine n, intersecanti le rette per A nei gruppi di n punti allineati con A stesso; il qual fascio risulta così riferito proiettivamente al fascio A.

Ora si mandi per A una seconda retta b, a segare ulteriormente f negli n punti $B_1, \dots B_n$; i punti

$$A,\ B_1, \dots B_n,\ A_1, \dots A_n,\ P_1, \dots P_{n^2},$$

in numero di $n+1+n+n^2=(n+1)^2$, sono le intersezioni delle due curve d'ordine $n+1$: f e $\varphi+b$. Ma gli n punti $A, A_1, \dots A_n$ si trovano sopra la retta a, quindi per il teorema di GERGONNE i rimanenti punti appartengono a una curva d'ordine n, cioè esiste una seconda curva d'ordine n diversa da φ, che passa per gli n^2 punti P e per $B_1, \dots B_n$. c. d. d.

In modo perfettamente analogo si dimostra che:

La curva generale f, *d'ordine* n + 2 *si può generare mediante due fasci proiettivi, l'uno di coniche e l'altro di curve d'ordine* n.

A tale scopo si scelgano, sopra f, quattro punti generici A_1, A_2, A_3, A_4 come base del fascio di coniche; e per le $2(n+2)-4=2n$ intersezioni ulteriori di una conica con f, si mandi una curva d'ordine n a segare f in altri $(n+2)n-2n=n^2$ punti; si dimostra come innanzi che questi n^2 punti sono base per un fascio di curve d'ordine n, intersecanti le coniche per A_1, A_2, A_3, A_4 in gruppi di punti della f.

Dopo avere dimostrata la generazione di f mediante fasci di curve φ e ψ d'ordine n, m, nei casi $m=1, 2$, si dovrebbe trattare la questione per $m>2$. Ma qui interviene la difficoltà che gli m^2 punti base del fascio di curve ψ non possono più assumersi ad arbitrio sopra la curva f. Tuttavia si arriva anche in questo caso a dei teoremi generali come si può leggere nella « Introduzione.... » del CREMONA (Opere, t. I, pg. 367-378). Dal quale trattato riferiamo la

Costruzione di CHASLES [1] *per la cubica piana determinata da 9 punti:*

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ L.$$

Si consideri il fascio di coniche che ha per punti base A, B, C, D, e si riferiscano i suoi elementi (coniche) alle rette tangenti per A; si ha così fra il fascio di coniche e il fascio di rette una corrispondenza algebrica [1, 1], cioè una proiet-

(1) Comptes rendus, 1853.

tività. Ora si considerino le cinque coniche del fascio suddetto che passano per E, F, G, H, L; le indicheremo con

$$(ABCD)\ (E,\ F,\ G,\ H,\ L).$$

Si tratta di determinare nel piano un punto O, tale che le cinque rette

$$O(E,\ F,\ G,\ H,\ L),$$

proiettanti da O i cinque punti indicati, formino un fascio proiettivo a quello delle anzidette coniche e quindi al fascio delle cinque rette

$$A(E,\ F,\ G,\ H,\ L).$$

A tale scopo si noti che O dovrà appartenere a due luoghi geometrici: alla conica che, conforme a un noto teorema di CHASLES, costituisce il luogo dei punti per cui il birapporto dei raggi

$$O(E,\ F,\ G,\ H) = A(E,\ F,\ G,\ H),$$

e alla conica luogo dei punti per cui il birapporto

$$O(F,\ G,\ H,\ L) = A(F,\ G,\ H,\ L).$$

Queste due coniche, aventi già in comune i punti F, G, H, si segano in un quarto punto O, che è il centro richiesto. Il fascio di rette O, e il fascio proiettivo di coniche per A, B, C, D, generano la cubica che viene definita dai nove punti A, B, C, D, E, F, G, H, L (supposti in posizione generale nel piano).

Nota. Il computo di costanti che induce a ritenere la generabilità delle curve mediante fasci proiettivi è suscettibile di fornire la dimostrazione rigorosa del teorema, ricorrendo al criterio che abbiamo designato col nome di principio di PLÜCKER-CLEBSCH (L. 1°, § 26). In base al quale si dimostra che una curva generale f d'ordine $n+m$ può ridursi alla forma canonica

$$f = \varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2 = 0,$$

dove $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0$ è l'equazione di un fascio di curve d'ordine n, e $\psi_1 + \lambda\psi_2 = 0$ è l'equazione di un fascio di curve d'ordine m proiettivo al primo.

Un fascio di curve d'ordine n $\left(\text{come una retta dello spazio } S_{\frac{n(n+3)}{2}}\right)$ dipende da

$$n(n+3)-2$$

costanti arbitrarie, e così un fascio di curve d'ordine m da

$$m(m+3)-2$$

costanti. Una proiettività fra due fasci introduce altre tre costanti, e così le generazioni mediante fasci proiettivi di curve φ e ψ, dipendono da

$$n(n+3)+m(m+3)-1$$

costanti.

Si ammetta che la curva generata nasca in generale da

$$\infty^k$$

generazioni diverse ($k \geq 0$); allora il sistema delle curve generate nel modo anzidetto è di dimensione

$$n(n+3)+m(m+3)-1-k.$$

Questo sistema è contenuto in quello

$$\infty^{\frac{(n+m)(n+m+3)}{2}}$$

di tutte le curve d'ordine $n+m$; quindi si avrà

$$n(n+3)+m(m+3)-1-k \leq \frac{(n+m)(n+m+3)}{2},$$

ossia

$$k \geq \frac{1}{2}\left\{(n-m)^2+3(n+m)\right\}-1.$$

Si proverà che il sistema delle curve generate mediante la costruzione di Steiner è *tutto* il sistema lineare delle curve d'ordine $n+m$, (varietà irriducibile), e quindi che la curva generale d'ordine $n+m$ è generabile in tal guisa, ove si dimostri che è d'altra parte

$$k \leq \frac{1}{2}\left\{(n-m)^2+3(n+m)\right\}-1,$$

e quindi

$$k = \frac{1}{2} \left\{ (n-m)^2 + 3(n+m) \right\} - 1 .$$

Limiteremo la dimostrazione al caso più semplice:

$$m = 1 .$$

In tal caso si ha una curva d'ordine $n+1$, f_{n+1}. Per generare questa curva con due fasci proiettivi di rette ψ e di curve φ d'ordine n, si scelga anzitutto ad arbitrio il centro A del fascio di rette sopra la curva f_{n+1}, scelta dipendente da una costante arbitraria, e si mandi per esso una retta ψ ad incontrare f_{n+1} in altri n punti (ciò che introduce una seconda costante); per codesti punti passa un sistema (lineare) di curve d'ordine n di dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} - n$$

(e non maggiore); una curva φ di tale sistema sega f_{n+1} in

$$n(n+1) - n = n^2$$

punti fuori di ψ; se questi punti sono base per un fascio di curve d'ordine n, si ha una generazione della f_{n+1} mediante un fascio di rette per A ed un fascio proiettivo di curve d'ordine n, ove alla retta ψ corrisponde la curva φ sopra considerata.

Il computo delle costanti arbitrarie da cui dipendono le generazioni anzidette, conduce ora al numero

$$1 + 1 + \frac{n(n+3)}{2} - n = \frac{1}{2} \left\{ (n-1)^2 + 3(n+1) \right\},$$

ma bisogna togliere 1 perchè gli stessi fasci generatori e la medesima proiettività fra di essi corrisponde ugualmente a una diversa scelta della retta a condotta per A, sicchè la relativa costante arbitraria figura soltanto in modo apparente.

Si deduce che il numero delle costanti arbitrarie da cui dipendono le anzidette generazioni di una curva d'ordine $n+1$ è in ogni caso

$$k \leq \frac{1}{2} \left\{ (n-1)^2 + 3(n+1) \right\},$$

il segno $<$ valendo per l'ipotesi in cui gli n^2 punti costruiti come ulteriori intersezioni di φ, f_{n+1} non fossero base per un fascio di curve φ.

Dal confronto colla diseguaglianza precedente, si conclude che è sempre

$$k = \frac{1}{2}\left\{(n-1)^2 + 3(n+1)\right\} - 1,$$

e così il teorema della generazione risulta stabilito rigorosamente, per la f_{n+1} generale, mediante il principio del computo delle costanti.

18. **Nota storica: il problema della generazione e la teoria sintetica delle curve.** — Gli antichi hanno conosciuto la generazione meccanica di particolari curve, impiegate per la risoluzione dei problemi, come p. es. la cissoide di Diocle e la concoide di Nicomede ([1]).

Nello stesso modo la descrizione delle curve viene concepita da Newton, che — oltre ad avere perfezionato le soluzioni di quegli antichi problemi — al termine della sua « Enumeratio », insegna un modo meccanico per descrivere curve algebriche di qualsiasi ordine, e in particolare dei primi ordini: ma la generazione di Newton (per curve d'ordine > 2) conduce a curve dotate di punti doppi, p. es. a cubiche con un punto doppio e a quartiche con due punti doppi.

Il problema di descrivere curve senza singolarità, che il Newton aveva giudicato « inter difficiliora », venne risoluto da Mac Laurin ([2]). Questi comincia a dare una costruzione delle coniche mediante la rotazione di due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ attorno ai loro vertici: se il punto comune ad a, a' scorre sopra una retta, il punto comune a b, b' descrive una conica. Questa costruzione si generalizza considerando i movimenti di più angoli soggetti a diverse condizioni, ove i vertici sieno suscettibili di variare sopra rette: in tal modo si ottengono le curve d'ordine superiore. Il caso più semplice si ha considerando due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$, dove il vertice del primo resti fisso, mentre il vertice del secondo scorra sopra una retta; se

([1]) Cfr. p. es. l'Articolo 7° sui « Problemi di terzo grado » di A. Conti nei « Collectanea » di F. Enriques: « Questioni riguardanti le Matematiche elementari ». Bologna, Zanichelli, 1914, vol. II.

([2]) « Descriptio linearum curvarum universalis », 1719.

oltre a ciò si impone alla retta a' di passare per un punto fisso, e all'intersezione aa' di muoversi sopra una retta, il punto bb' descrive una cubica avente come punto doppio il vertice dell'angolo $\widehat{ab}$.

Al perfezionamento dei metodi meccanici per la generazione delle curve algebriche, hanno lavorato vari geometri: citiamo in particolare GRASSMANN nei §§ 145-148 della « Ausdehnungslehre » (1844) e in due memorie del « Journal für Mathematik » (1846, 1851). Ai quali lavori si può riattaccare la costruzione delle curve con *sistemi articolati* dovuta a KEMPE (1876) (¹).

Frattanto appare la tendenza a considerare la generazione delle curve, non più dal punto di vista dell'interesse pratico della loro descrizione, ma piuttosto come un modo di definizione teorica, che possa servir di base a una trattazione sintetica. Questa tendenza si afferma nell'opera dei ricercatori che hanno costituito l'organismo della Geometria proiettiva, e segna una reazione allo spirito dominante la geometria analitica. Qui occorre citare, in prima linea il teorema relativo alla generazione proiettiva di una conica mediante due fasci proiettivi di raggi, di STEINER e CHASLES (²). STEINER stesso (Accad., Berlino, 1848) (³) ha notato che questo teorema si estende, potendosi generare una curva d'ordine $m+n$ mediante due fasci proiettivi di curve d'ordine m, n. Le brevi parole che egli dedica a questo soggetto porgono una indicazione sufficientemente chiara della strada che fu percorsa poi dal CREMONA nella sua citata « Introduzione.... », movendo, come egli dice, dall'intendimento di dimostrare molti teoremi che STEINER aveva semplicemente enunciati. È interessante notare che STEINER non parte dai fasci per generare la curva

(¹) Cfr. « How to draw a straight line ». Londra, 1877, pag. 33 e KÖNIGS « Leçons de Cinématique ». Parigi, 1897, cap. 11.

(²) La teoria delle proiettività che sta a base di questo teorema appartiene a MÖBIUS (1827). Il teorema anzidetto trovasi in STEINER. « Systematische Entwickelung », 1832. Cfr. Opere, tomo I, pag. 329. Il teorema inverso venne rigorosamente dimostrato da CHASLES (Géométrie supérieure, 1852). CHASLES fin dal 1829, e STAUDT nel 1831, avevano riconosciuto che il luogo d'un punto dal quale quattro punti dati in un piano sono proiettati secondo quattro raggi formanti un dato birapporto è una conica. (Cfr. SEVERI « Complementi di Geometria proiettiva », Bologna, Zanichelli, 1906, pg. 215).

(³) Cfr. Opere, t. II, pag. 496.

d'ordine $m+n$, ma propone addirittura la questione inversa in cui si tratta di costruire i fasci generatori, data la curva.

Tre anni più tardi (1851) GRASSMANN nel « Journal für Mathematik » (Bd. 42) scriveva — col suo simbolismo — l'equazione della curva d'ordine $m+n$ generata da due fasci proiettivi di curve d'ordine m, n; la quale appare ad un computo di costanti come la curva generale dell'ordine $m+n$.

Allo stesso argomento si riferiscono numerosi lavori di CHASLES nei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia, dal 1853 al 1857, e nel Journal de Mathématique (1854), nonchè una memoria di DE JONQUIÈRES (Journal des Savants étrangers, 1858). Ma i conti di costanti che qui vengono usati per dimostrare la generabilità di una curva data, senza esaminare la questione della compatibilità delle equazioni, danno luogo ad errori, che sono stati messi in luce dalla critica di BOBEK (Math. Annalen, 1885) e di KÜPPER (ibidem, 1888).

La dimostrazione rigorosa dei teoremi di generazione delle curve è pôrta, per il caso più generale, da KÜPPER (ibidem, 1897).

La generazione di una curva d'ordine $m+n$, mediante fasci proiettivi di curve d'ordine m, n, permette di dare una definizione induttiva puramente sintetica delle curve d'ordine $n=2, 3, 4, \ldots$. Questa definizione appunto è stata assunta come base della trattazione di E. KÖTTER « Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven » (Berliner Abhandlungen, 1887).

La definizione delle curve mediante due fasci proiettivi generatori, non ha in generale il pregio della simmetria; perciò si sono ricercati altri modi di generazione, fra i quali merita speciale menzione la cosidetta *corrispondenza plurilineare fra* n *fasci di raggi*. Questa relazione, (a cui si è naturalmente condotti dalle descrizioni meccaniche di NEWTON, MAC-LAURIN e GRASSMANN, e che può dirsi contenuta nel simbolismo di quest'ultimo) è stata studiata — nel caso più semplice — dall'AUGUST nella sua dissertazione di Berlino del 1862, poi dallo SCHUBERT (Math. Annalen, Bd. 17), dal LE-PAIGE in varie memorie dell'Accademia del Belgio (1879-83), e — in modo sintetico — dal CASTELNUOVO in una memoria dell'Istituto Veneto (1887). La corrispondenza plurilineare è la generalizzazione della proiettività, che si ottiene legando le coordinate di n forme di prima specie con una equazione di primo grado separatamente rispetto ad esse: il luogo dei punti del piano che appartengono contemporaneamente ad n raggi omologhi di n fasci in corrispondenza n-lineare, è una curva d'ordine n.

Reciprocamente è facile riconoscere come, ammessa questa generazione per le curve generali d'ordine $n-1$, si deduca che essa è capace di fornire le curve generali d'ordine n, adoperando il teorema che la curva d'ordine n è generata da due fasci proiettivi di rette e di curve d'ordine $n-1$.

Ora la corrispondenza plurilineare porge una definizione simmetrica delle curve, che il DE PAOLIS aveva preso a fondamento di una trattazione sintetica, cui dedicò gli ultimi anni della sua vita. Della teoria edificata dal DE PAOLIS, di cui egli aveva dato — conversando — qualche notizia a scolari ed amici, rimane soltanto un cenno nella Nota postuma pubblicata per cura del SEGRE « Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni » (Rendic., Lincei, 1894); la quale fa seguito a due ampie memorie (Società italiana delle Scienze, 1890 e Accad. di Torino, 1892) destinate a costruire una teoria geometrica pura capace di sostituire i teoremi fondamentali dell'Algebra.

Un'altra definizione sintetica induttiva delle curve d'ordine qualunque (da n a $n+1$) si può ottenere sulla base della *polarità*; essa s'incontra nella già citata comunicazione di STEINER all'Accademia di Berlino, del 1848. È noto d'altronde come STAUDT abbia costruito appunto in tal modo la teoria sintetica delle coniche.

Si consideri una rete di curve d'ordine n

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

che venga riferita *proiettivamente* al piano punteggiato (in guisa che a ogni fascio di curve della rete corrisponda una retta del piano); il luogo dei punti che appartengono alla curva omologa è una curva f d'ordine $n+1$, come segue immediatamente dal principio di corrispondenza.

La proiettività fra la rete e il piano anzidetti si può porre scrivendo

$$x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_2, \quad x_3 = \lambda_3,$$

ed allora l'equazione della curva f vien data da

$$f = x_1 \varphi_1(x_1 x_2 x_3) + x_2 \varphi_2(x_1 x_2 x_3) + x_3 \varphi_3(x_1 x_2 x_3) = 0 .$$

Ricordando il teorema d'EULERO sulle funzioni omogenee, appare reciprocamente che ogni f d'ordine $n+1$ può essere definita in tal modo, ponendo

$$\varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \varphi_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Il modo particolare di costruzione che così si ottiene per la f, è in rapporto con la teoria della polarità di cui tratteremo nel libro terzo; nel quale riferiremo pure la definizione sintetica delle polari.

Infine conviene dire che il problema della teoria sintetica delle curve, se pure non completamente esaurito dalle ricerche sopra menzionate, appartiene ad una fase storica oggi superata. I tentativi ispirati da concetti puristici hanno valso ad affinare l'istrumento geometrico; dopo ciò le limitazioni di metodo sembrano ora meno opportune, di fronte ai grandi problemi che gli enti algebrici offrono all'investigazione del geometra.

19. La classe di una curva e il paradosso di Poncelet. — In questo paragrafo e nei seguenti, parlando di una curva algebrica sottintenderemo la *restrizione* che essa sia *irriducibile*, sebbene le considerazioni che andiamo a svolgere potrebbero in gran parte estendersi a curve riducibili, purchè prive di parti multiple.

Ricordiamo che una curva algebrica $f(xy) = f(x_1 x_2 x_3) = 0$, può essere riguardata come inviluppo delle sue tangenti proprie, ed allora viene rappresentata da un'equazione tangenziale $F(u_1 u_2 u_3) = 0$; dicesi *classe* della curva il grado di F, che designa il numero delle tangenti di f passanti per un punto.

Consideriamo una curva, C_n, generale d'ordine n (senza punti doppi); la sua classe può essere valutata, senza bisogno di calcoli algebrici (1) come semplice applicazione del principio di corrispondenza (2). A tale scopo procederemo nel modo seguente:

Prendiamo nel piano due punti O e A, che non si trovino sulla curva, e tali che la retta AO non risulti tangente

(1) Cfr. la Teoria delle polari nel L. 3°.

(2) Cfr. ZEUTHEN. *Nouvelles Annales*, serie II, tomo 6, (1867).

alla curva. Sia a una retta generica per A: essa interseca la C_n in n punti $P_1, P_2, \ldots P_n$. Proiettiamo questi punti da O: otteniamo n rette, che incontrano ulteriormente la C_n in $n-1$ punti ciascuna, e nel complesso staccano sopra la C_n $n(n-1)$ punti: $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n(n-1)}$. Proiettiamo questi punti da A: otteniamo $n(n-1)$ rette $a'_1, a'_2, \ldots a'_{n(n-1)}$.

Si ha così nel fascio A una corrispondenza che ad ogni retta a fa corrispondere $n(n-1)$ rette a'; evidentemente ogni retta a' sorge da $n(n-1)$ rette a, cioè si ha una corrispondenza $[n(n-1), n(n-1)]$; e vi saranno per essa $2n(n-1)$ elementi uniti.

Ora è evidente che se un raggio a coincide col suo omologo a', esso o va a un punto P, punto di contatto con una tangente uscente da O, o coincide con la retta AO. Siccome poi tutti i raggi che vanno ai punti di contatto, coincidono coi loro omologhi, così per avere il numero delle tangenti uscenti da O, occorre defalcare dal numero $2n(n-1)$, il numero delle coincidenze assorbite dal raggio AO. Ma gli $n(n-1)$ raggi omologhi ad AO coincidono con AO stesso; e quindi è facile vedere, applicando come per le intersezioni di due curve (§ 13) la regola di Zeuthen, che la retta AO assorbe precisamente $n(n-1)$ coincidenze. Si conclude che le tangenti uscenti da O sono $n(n-1)$, cioè che la classe di una curva generale d'ordine n vale $m = n(n-1)$.

Il resultato che « la curva generale d'ordine n ha la classe $m = n(n-1)$ » si trova già nel citato anonimo « Traité des Courbes Algébriques » del 1750 (pag. 88), tuttavia Waring nel 1762 riteneva che le tangenti a una curva d'ordine n potessero salire ad n^2, e assai più tardi (1827) — nonostante la pubblicazione di Poncelet del 1818 — Gergonne era tratto dal principio di dualità a credere che l'ordine d'una curva uguagli la classe. Infatti l'applicazione della legge di dualità conduce a questo paradosso: se una curva generale d'ordine n è di classe $m = n(n-1)$, una curva di classe m sarà d'ordine $m(m-1)$, e quindi una curva generale d'ordine n risulterebbe anche d'ordine $n(n-1) \} n(n-1) - 1 \{$!

Il *paradosso*, che porta il nome *di* Poncelet, fu spiegato appunto da Poncelet [1]: una curva generale d'ordine n non è più un inviluppo generale di classe $n(n-1)$. Interven-

[1] « Annales de Mathématiques ». T. 8, (1818). Journal für Math. Bd 8, (1831), (cfr. « Traité.... » 2ª ed., t. II, pg. 216 e segti.

gono circostanze particolari che abbassano la valutazione fatta precedentemente.

Cerchiamo di renderci conto in qual modo una curva C_n, d'ordine n, possa riuscire di classe $m < n(n-1)$; riguardando la C_n (irriducibile come curva luogo di punti) quale limite di una curva generale, appare chiaro che ciò possa accadere soltanto quando dall' inviluppo si distacchino dei fasci di tangenti improprie (che costituiscono curve inviluppo d'ordine zero), cioè quando la C_n possegga qualche punto doppio o multiplo (L. 1°, § 11). PONCELET riconobbe che per la C_n dotata di un punto doppio, il fascio col centro in questo punto si stacca in generale due volte dal relativo inviluppo (come è evidente per la conica spezzata in due rette), ma nel caso di una cuspide il detto fascio si stacca una terza volta, (d'accordo con la circostanza che le rette che vanno alla cuspide sono da riguardare come tangenti a rami, limiti di tangenti proprie della curva (Cfr. L. 1°, § 11); più in generale un punto i-plo diminuisce la classe di $i(i-1)$ o più unità.

Ora la spiegazione precisa del paradosso di PONCELET, consiste in questo, che: una curva generale d'ordine n, la quale è priva di punti doppi, possiede invece un numero finito di tangenti doppie e di flesso, singolarità duali dei nodi e delle cuspidi, che eventualmente possono venire assorbite da singolarità più elevate.

Attraverso a tali considerazioni di continuità ed anche mercè la considerazione delle curve polari (cfr. L. 3°), PONCELET fu condotto a riconoscere due relazioni che legano l'ordine e la classe di una curva alle sue singolarità puntuali e tangenziali; relazioni che PLÜCKER ebbe poi a completare nel 1834 (1) con l'aggiunta di una terza relazione essenzialmente nuova, ottenendo così quel gruppo di formule che vengono designate col nome di *formule di* PLÜCKER.

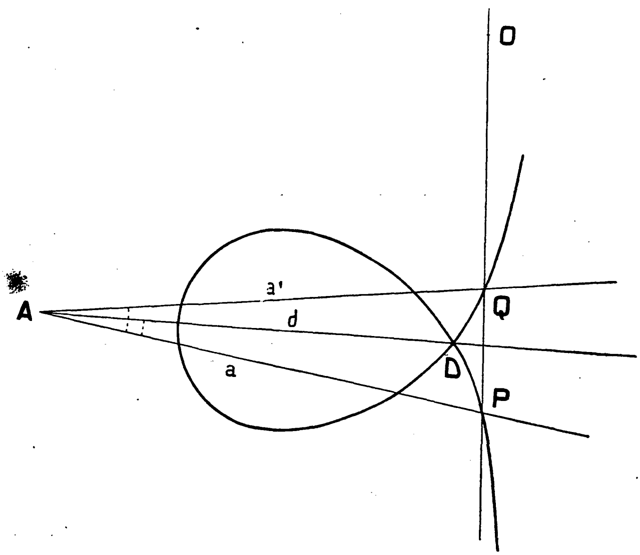
L'abbassamento della classe m in rapporto a punti doppi e cuspidi, può essere determinato collo stesso procedimento che ci ha servito per calcolare m (ZEUTHEN, 1867).

Riprendiamo infatti la corrispondenza definita, in rapporto alla curva C_n, entro un fascio di raggi A, facendo l'ipotesi che C_n possegga un punto doppio D. Si vede allora

(1) Cfr. per la dimostrazione la « Theorie der Algebraischen Curven » del 1839, pg. 200 e segti.

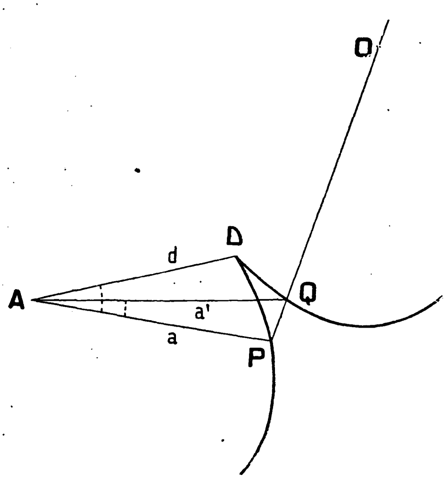
che due delle rette omologhe alla retta $d = AD$, coincidono con la AD stessa; applicando la regola di ZEUTHEN si dimostra facilmente che la retta AD assorbe di fatto: *due* coincidenze, se il punto doppio D ha le tangenti distinte, e *tre* se il punto doppio è una cuspide ordinaria.

A tale scopo basta riferirsi alle annesse figure. Dalla prima



risulta, per il caso del nodo, che l'ordine di infinitesimo dell'angolo $\widehat{aa'}$ è

$$\text{ord}\, aa' = \text{ord}\, PQ = \text{ord}\, DP = \text{ord}\, ad,$$



sicchè i due raggi che vengono a coincidere con d contano ciascuno per *uno* nel numero delle coincidenze ivi assorbite.

Invece riferendosi alla seconda figura si valuteranno gli ordini di infinitesimo, tenendo presente che la cuspide ordinaria viene approssimata da una cubica $y^2 = kx^3$ (L. 1°, § 11) per modo che la distanza PQ è infinitesimo d'ordine $\frac{3}{2}$ rispetto a PD; si troverà

$$\text{ord } aa' = \frac{3}{2} \text{ ord } ad,$$

e perciò i due raggi che vengono a coincidere in d conteranno ciascuno per $\frac{3}{2}$. c. d. d.

Si ottiene pertanto la relazione

$$1) \qquad m = n(n-1) - 2\delta - 3k,$$

che esprime la classe m di una curva d'ordine n, dotata di δ nodi e k cuspidi ordinarie.

L'applicazione del principio di dualità permette di dedurre dalla 1) una relazione correlativa ove entrano l'ordine, la classe e le singolarità tangenziali.

A tale scopo giova richiamare l'osservazione, a cui si è accennato nel L. 1°, § 11, che la singolarità duale di un punto doppio è una tangente doppia; precisamente: al nodo, punto in cui si hanno due tangenti proprie costituite dalle tangenti principali, corrisponde per dualità la tangente doppia propriamente detta, a contatti distinti, e i punti di contatto sono generalmente punti semplici della curva, poichè le tangenti principali del nodo figurano generalmente come semplici nell'inviluppo delle tangenti proprie; invece alla cuspide corrisponde per dualità una tangente doppia che ha un solo punto di contatto del second'ordine, cioè una tangente di flesso, la quale può ritenersi tangente alla curva nel punto di contatto e nel punto infinitamente vicino.

Si possono precisare le osservazioni precedenti mostrando che:

1) La tangente doppia, d, corrispondente per dualità a un nodo D, tocca effettivamente la curva in punti semplici R e S, salvo il caso che una tangente principale, r, del nodo tocchi altrove la curva oppure sia tangente di flesso per il relativo ramo (R diviene allora doppio o multiplo oppure cuspide con tangente principale d). La deduzione rigorosa di ciò si ottiene osservando che preso O in un punto generico di r, la r viene a contare una volta sola fra le tangenti per O alla curva, salvo nel caso sopra menzionato.

2) La tangente doppia, d, corrispondente, per dualità, a una cuspide D, è effettivamente una tangente di flesso ordinaria avente contatto tripunto in un punto semplice, se D è cuspide ordinaria e se si esclude il caso in cui la retta r, tangente cuspidale in D, tocchi altrove la curva. Invero preso il punto O su r, nelle anzidette condizioni r conta una volta sola fra le tangenti per O.

Ciò posto supponiamo che la nostra curva d'ordine n e classe m possegga soltanto come singolarità tangenziali delle tangenti doppie ordinarie, cioè τ tangenti doppie propriamente dette a contatti distinti e i tangenti di flesso (ordinarie); avremo, come relazione duale della 1) la

$$2) \qquad n = m(m-1) - 2\tau - 3i.$$

Le formule 1) 2) si riferiscono a una curva dotata di *singolarità elementari*: nodi, cuspidi, tangenti doppie e di flesso. Il caso in cui esistano singolarità più elevate, si riduce al precedente, seguendo un'idea di CAYLEY, col far vedere che *ogni punto multiplo equivale* agli effetti delle suddette formule *ad un certo numero di nodi* e *di cuspidi*, e correlativamente *ogni tangente multipla equivale ad un certo numero di tangenti doppie e di flesso*; l'equivalenza potendosi anche definire in rapporto a possibili variazioni della curva, secondo il *principio di continuità.*

Ma l'esame che occorre per stabilire il resultato accennato verrà svolto più tardi in modo esauriente, sulla base della teoria generale delle singolarità. Qui ci limitiamo a notare come il metodo svolto innanzi conduca a riconoscere che: *un punto* r-plo P a *tangenti distinte equivale*, per l'abbassamento della classe, a $\frac{r(r-1)}{2}$ *punti doppi*, d'accordo con l'intuizione di P come limite di $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, intersezioni di r rami prossimi ad r rette per un punto. Infatti se P è un punto r-plo di C_n, il raggio OP coincide con $r(r-1)$ dei suoi corrispondenti nel fascio O e conta almeno per $r(r-1)$ coincidenze, anzi precisamente per tante se i rami per P hanno tangenti distinte.

Osservazione. Il procedimento usato sopra permette anche di determinare quante sono le tangenti uscenti da un punto O che appartenga alla curva, non contando la tangente in O.

Se O è un punto semplice, si trova nel fascio A una corrispondenza $[n(n-2),\ n(n-2)]$ con $2n(n-2)$ elementi uniti, dei quali $(n-1)(n-2)$ almeno sono assorbiti dalla retta AO; si deduce che il numero delle rette uscenti da O e tangenti altrove alla curva è in generale $n(n-1)-2$, ossia è uguale alla classe diminuita di due, d'accordo con l'osservazione che la tangente alla curva nel punto O si può considerare come limite di due tangenti vicine che s'incontrino in un punto (fuori della curva) prossimo ad O. Tuttavia la deduzione precedente patisce eccezione se la tangente in O è una tangente di flesso, nel qual caso la retta AO assorbe più di $(n-1)(n-2)$ raggi uniti della corrispondenza: l'eccezione si toglie ove si consideri la tangente di flesso come una *tangente altrove* alla curva condotta per O, della quale il punto di contatto sia venuto infinitamente vicino ad O.

L'analisi precedente si estende al caso in cui il punto O sia r-plo per la curva C_n; si ha allora nel fascio A una corrispondenza $[n(n-r-1),\ n(n-r-1)]$. Nell'ipotesi che le r *tangenti principali* per O siano *distinte* ed abbiano contatto $(r+1)$-punto, la AO assorbe $(n-r)(n-r-1)$ coincidenze, e però si deduce che *il numero delle tangenti altrove ad una curva condotte dal punto r-plo* O *è uguale alla classe diminuita di* $2r$, d'accordo con l'osservazione che ciascuna delle tangenti principali appare come limite di due tangenti infinitamente vicine.

20. Determinazione dei flessi. — Per brevità diremo *flesso* (ordinario) d'una curva, un punto semplice in cui la tangente ha un contatto tripunto (punto di contatto d'una tangente di flesso ordinaria).

Ci proponiamo di valutare il numero dei flessi di una curva C_n, d'ordine n, priva di punti doppi.

Sia A un punto del piano della C_n, non appartenente alla curva. Mandiamo per A una retta generica a: essa interseca la C_n in n punti $P_1 P_2 \dots P_n$. Costruiamo le tangenti nei punti $P_1 P_2 \dots P_n$; ciascuna di queste interseca ulteriormente la C_n in $n-2$ punti (*tangenziali* dei punti P); si ottengono così $n(n-2) = n^2 - 2n$ punti:

$$Q_{11}\, Q_{12} \dots Q_{1,\,n-2} \quad Q_{21}\, Q_{22} \dots Q_{2,\,n-2} \dots \quad Q_{n1}\, Q_{n2} \dots Q_{n,\,n-2};$$

proiettando i punti Q dal punto A si hanno $n(n-2)$ rette a', che facciamo corrispondere alla a.

Per costruire la corrispondenza inversa, vediamo da quante rette a sorga una medesima retta a'. La retta a' sega la C_n in n punti Q; da ciascun punto Q partono $n(n-1)-2$ tangenti alla C_n, quindi ogni punto Q è tangenziale di $n(n-1)2-$ punti P, e perciò ogni retta a' sorge da

$$n\}n(n-1)-2\{=n^3-n^2-2n$$

rette a.

Abbiamo adunque nel fascio A una corrispondenza

$$[n^2-2n,\ n^3-n^2-2n]$$

la quale possiede

$$n^3-4n$$

coincidenze.

Ora se la retta a deve coincidere con una delle sue omologhe a', accadrà che: o uno dei punti P coincida con uno dei punti Q (nel qual caso P sarà un flesso), o un punto P e un punto Q siano allineati con A (nel qual caso la a sarà tangente alla C_n).

Ma le tangenti alla C_n uscenti da A sono $n(n-1)$ e per ciascuna di esse $n-2$ rette a' coincidono con la tangente stessa. È facile verificare, con la regola di ZEUTHEN, che ciascuna delle tangenti nominate assorbe effettivamente $(n-2)$ coincidenze della nostra corrispondenza. Si ha quindi che i flessi sono tanti quante le coincidenze residue (supposte distinte), cioè

$$n^3-4n-\}n(n-1)(n-2)\{=3n(n-2).$$

Suppongasi ora che la curva C_n abbia un punto doppio. In questo caso il numero dei flessi diminuisce: vogliamo vedere di quanto.

Costruiamo nel punto A la corrispondenza come nel caso precedente. Si ha che ad ogni retta a corrispondono ancora $n(n-2)$ rette a'. Cerchiamo da quante rette a sorga una retta a'. La retta a' taglia ancora la C_n in n punti Q, ma da ogni punto Q escono solo $n(n-1)-4$ tangenti, perciò la nostra è una corrispondenza

$$[n^3-n^2-4n,\ n^2-2n],$$

la quale ha quindi

$$n^3-6n$$

coincidenze.

Ora una retta a coincide con una delle sue omologhe a' quando passa per un flesso, quando è una tangente uscente da A, o infine quando è la retta che va al punto doppio.

Le tangenti uscenti da A sono

$$n(n-1)-2$$

e ciascuna di esse assorbe, come nel caso precedente, $(n-2)$ coincidenze. Vediamo quante coincidenze assorba la retta che va al punto doppio, supponendo che questo sia un nodo.

Sia $\bar{a}$ una retta a quella infinitamente vicina. La $\bar{a}$ taglia i due rami della curva uscenti dal punto doppio in due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini al punto doppio. La tangente in P_1 taglia il ramo su cui si trova P_2 in un punto Q_1 infinitamente vicino al punto doppio, e analogamente la tangente in P_2 dà un punto Q_2 infinitamente vicino al punto doppio. Si ha così che due delle rette omologhe ad $\bar{a}$ sono ad essa infinitamente vicine, e si vedrebbe facilmente che distano di infinitesimi del prim'ordine: quindi la retta che unisce A col punto doppio assorbe due coincidenze. Si deduce che i flessi (supposti distinti) sono

$$n^3-6n-(n-2)\{n(n-1)-2\}-2=3n(n-2)-6.$$

Se invece di un solo nodo si avessero δ nodi, con lo stesso procedimento si troverebbe che il numero dei flessi è

$$3n(n-2)-6\delta.$$

E si può aggiungere l'osservazione che: se la curva ha *un punto r-plo a tangenti distinte*, questo, come si verifica ripetendo lo stesso procedimento, diminuisce il numero dei flessi di $3r(r-1)$, cioè *conta*, allo stesso modo che nei riguardi della classe, *come* $\frac{r(r-1)}{2}$ *punti doppi*.

Suppongasi ora che la C_n abbia una cuspide (ordinaria), e non altri punti multipli.

In questo caso le tangenti alla curva uscenti da un punto Q della curva stessa si riducono a

$$n(n-1)-5,$$

quindi i raggi uniti della nostra corrispondenza si riducono a

$$n(n-2)+n\{n(n-1)-5\}=n^3-7n.$$

Le tangenti alla curva uscenti da A sono

$$n(n-1)-3,$$

e la retta che congiunge A con la cuspide assorbe, come prima, ancora due coincidenze. Pertanto i flessi si riducono a

$$n^3 - 7n - (n-2)\{n(n-1) - 3\} - 2 = 3n(n-2) - 8.$$

Più in generale consideriamo una *curva dotata* di δ *nodi e k cuspidi*: applicando il medesimo procedimento si trova che il *numero dei flessi* (supposti distinti) è dato da

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$$

Osservazione. Se la curva non possiede punti di molteplicità > 2 e le sue cuspidi sono ordinarie, una riduzione del numero dei flessi (cioè una radice multipla della relativa equazione) può aversi soltanto in corrispondenza a *tangenti aventi un contatto s-punto colla curva* ($s > 3$). Precisamente il punto di contatto, P, di una tale tangente *assorbe $s-2$ flessi.* Ciò risulta dalla stessa costruzione della corrispondenza precedente, ove si vede che il raggio AP assorbe $s-2$ coincidenze.

Può anche accadere che un flesso si sovrapponga ad un nodo P, ove una tangente principale venga ad avere un contatto tripunto (o s-punto) col relativo ramo, cioè quattro intersezioni colla curva ivi riunite; allora la retta AP assorbe sette (o più) coincidenze della corrispondenza. È escluso invece che un flesso possa cadere in una cuspide *ordinaria*, chè una tale sovrapposizione porterebbe per la tangente cuspidale un contatto quadripunto.

21. Ricapitolazione delle formule di Plücker: caratteri delle cubiche e delle quartiche. — Riassumiamo i risultati ottenuti nei §§ 13, 14, riferendoci al caso di curve dotate di *singolarità elementari*, cioè di nodi e cuspidi ordinarie e delle singolarità duali (tangenti doppie e flessi).

Una tale curva possegga l'ordine n, la classe m, δ punti doppi, k cuspidi, τ tangenti doppie ed i flessi; questi numeri sono legati dalle *tre relazioni*

1) $$m = n(n-1) - 2\delta - 3k$$
2) $$n = m(m-1) - 2\tau - 3i$$
3) $$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$$

Queste relazioni sono indipendenti: dalla 3) per dualità si ha la

4) $$k = 3m(m-2) - 6\tau - 8i,$$

che non è una nuova relazione ma una conseguenza delle altre tre precedenti, come si può verificare facilmente.

Risolvendo la 2) rispetto a τ e sostituendo al posto di m, n, i valori dati dalle 1) e 3), si trova

$$=\frac{1}{2}\,n(n-2)(n^2-9)-[n(n-1)-6]\,(2\delta+3k)+2\delta(\delta-1)+6\delta k+\frac{9}{2}\,k(k-1)$$

e dualmente

$$=\frac{1}{2}\,m(m-2)(m^2-9)-[m(m-1)-6]\,(2\tau+3i)+2\tau(\tau-1)+6\tau i+\frac{9}{2}\,i(i-1).$$

Notiamo anche due relazioni duali di se stesse che si deducono dal sistema delle 1), 2), 3): moltiplicando la 1) per la 3) e sottraendo la 3) si ottiene

7) $$3m-i=3n-k,$$

formula che si suole anche scrivere:

$$3(m-n)=i-k;$$

e dalle 1), 2), tenendo conto dalla 7), si ricava

8) $$\frac{n(n+3)}{2}-\delta-2k=\frac{m(m+3)}{2}-\tau-2i$$

oppure

9) $$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\delta-k=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-\tau-i.$$

Le relazioni 1), 2) (scoperte, come abbiam detto da PONCELET) e le 3), 4), 5), 6), 7), si trovano in una Nota di PLÜCKER [1] del 1836 e poi nella sua « Theorie der algebraischen Kurven » (Parte II, § 4) e — nel comune uso — da PLÜCKER prende nome l'intero gruppo delle formule anzidette.

In virtù di queste formule, che — come abbiam detto — costituiscono tre relazioni indipendenti, i 6 caratteri di una curva algebrica

$$n,\quad \delta,\quad k,\quad m,\quad \tau,\quad i$$

sono legati fra loro in guisa che dati tre di essi i rimanenti risultano determinati. Ci si può domandare se 6 valori di

$$n,\quad \delta,\quad k,\quad m,\quad \tau,\quad i,$$

i quali soddisfino alle relazioni 1), 2), 3), corrispondano sempre

[1] « Note sur les points singuliers des courbes ». Abhandlungen I, 334.

e la retta che congiunge A con la cuspide assorbe, come prima, ancora due coincidenze. Pertanto i flessi si riducono a

$$n^3 - 7n - (n-2)\} n(n-1) - 3 \{ - 2 = 3n(n-2) - 8.$$

Più in generale consideriamo una *curva dotata* di δ *nodi e* k *cuspidi*: applicando il medesimo procedimento si trova che il *numero dei flessi* (supposti distinti) è dato da

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$$

Osservazione. Se la curva non possiede punti di moltepljcità > 2 e le sue cuspidi sono ordinarie, una riduzione del numero dei flessi (cioè una radice multipla della relativa equazione) può aversi soltanto in corrispondenza a *tangenti aventi un contatto s-punto colla curva* ($s > 3$). Precisamente il punto di contatto, P, di una tale tangente *assorbe* $s-2$ *flessi*. Ciò risulta dalla stessa costruzione della corrispondenza precedente, ove si vede che il raggio AP assorbe $s-2$ coincidenze.

Può anche accadere che un flesso si sovrapponga ad un nodo P, ove una tangente principale venga ad avere un contatto tripunto (o s-punto) col relativo ramo, cioè quattro intersezioni colla curva ivi riunite; allora la retta AP assorbe sette (o più) coincidenze della corrispondenza. È escluso invece che un flesso possa cadere in una cuspide *ordinaria*, chè una tale sovrapposizione porterebbe per la tangente cuspidale un contatto quadripunto.

21. **Ricapitolazione delle formule di Plücker: caratteri delle cubiche e delle quartiche.** — Riassumiamo i risultati ottenuti nei §§ 13, 14, riferendoci al caso di curve dotate di *singolarità elementari*, cioè di nodi e cuspidi ordinarie e delle singolarità duali (tangenti doppie e flessi).

Una tale curva possegga l'ordine n, la classe m, δ punti doppi, k cuspidi, τ tangenti doppie ed i flessi; questi numeri sono legati dalle *tre relazioni*

1) $$m = n(n-1) - 2\delta - 3k$$
2) $$n = m(m-1) - 2\tau - 3i$$
3) $$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$$

Queste relazioni sono indipendenti: dalla 3) per dualità si ha la

4) $$k = 3m(m-2) - 6\tau - 8i,$$

che non è una nuova relazione ma una conseguenza delle altre tre precedenti, come si può verificare facilmente.

Risolvendo la 2) rispetto a τ e sostituendo al posto di m, n, i valori dati dalle 1) e 3), si trova

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - [n(n-1)-6](2\delta+3k) + 2\delta(\delta-1) + 6\delta k + \frac{9}{2} k(k-1)$$

e dualmente

$$\delta = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) - [m(m-1)-6](2\tau+3i) + 2\tau(\tau-1) + 6\tau i + \frac{9}{2} i(i-1)$$

Notiamo anche due relazioni duali di se stesse che si deducono dal sistema delle 1), 2), 3): moltiplicando la 1) per la 3) e sottraendo la 3) si ottiene

$$7) \qquad 3m - i = 3n - k,$$

formula che si suole anche scrivere:

$$3(m-n) = i - k;$$

e dalle 1), 2), tenendo conto dalla 7), si ricava

$$8) \qquad \frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2k = \frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2i$$

oppure

$$9) \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i.$$

Le relazioni 1), 2) (scoperte, come abbiam detto da Poncelet) e le 3), 4), 5), 6), 7), si trovano in una Nota di Plücker [1] del 1836 e poi nella sua « Theorie der algebraischen Kurven » (Parte II, § 4) e — nel comune uso — da Plücker prende nome l'intero gruppo delle formule anzidette.

In virtù di queste formule, che — come abbiam detto — costituiscono tre relazioni indipendenti, i 6 caratteri di una curva algebrica

$$n, \quad \delta, \quad k, \quad m, \quad \tau, \quad i$$

sono legati fra loro in guisa che dati tre di essi i rimanenti risultano determinati. Ci si può domandare se 6 valori di

$$n, \quad \delta, \quad k, \quad m, \quad \tau, \quad i,$$

i quali soddisfino alle relazioni 1), 2), 3), corrispondano sempre

[1] « Note sur les points singuliers des courbes ». Abhandlungen I, 334.

a una curva effettivamente esistente. A questa domanda non si è data finora una risposta, che forse si può presumere affermativa in base agli esempî finora considerati.

Nota. Per quanto abbiamo visto il sistema delle formule di Plücker importa sostanzialmente due dimostrazioni: il calcolo della classe, cioè la formula 1) (da cui per dualità si passa alla 2)), e il calcolo del numero dei flessi che fornisce la formula 3), a cui si può surrogare la dimostrazione di un' altra formula del sistema, per esempio della 8) o della 9). Ora il Cremona [1] ha proposto di *dimostrare* semplicemente *l' equazione*

$$8)\qquad \frac{n(n+3)}{2}-\delta-2k=\frac{m(m+3)}{2}-\tau-2i,$$

in base ad un computo di costanti, come segue:

Se una curva $f(x_1 x_2 x_3)=0$ deve avere un nodo in posizione non assegnata, ciò equivale ad *una condizione*; infatti a tal uopo basta che le tre curve $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ abbiano un punto comune. Invece se la curva deve avere una cuspide, si aggiunge una condizione ulteriore, che si può esprimere, per esempio, con la coincidenza delle due tangenti principali; sicchè il possesso di una cuspide porta *due condizioni*. Quindi il sistema di tutte le curve d'ordine n con δ nodi e k cuspidi, avrà la dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2}-\delta-2k;$$

e, in virtù del principio di dualità, il sistema delle curve di classe m dotate di τ tangenti doppie ed i flessi, avrà la dimensione

$$\frac{m(m+3)}{2}-\tau-2i.$$

Perciò, se i numeri n, δ, k, m, τ, i competono al medesimo sistema di curve, le due dimensioni anzidette dovranno essere uguali.

Questa semplice ed elegante dimostrazione non è però esente da critica: occorrerebbe infatti dimostrare che le $\delta+2k$ condizioni esprimenti che una curva d' ordine n possiede δ nodi e k cuspidi sono sempre condizioni *indipendenti*, di guisa che

[1] Introduzione, § 101. Opere, Tomo I, pag. 405.

il sistema delle nominate curve non ha una dimensione più alta. Il dubbio che qui si solleva costituisce una questione assai delicata. Pertanto ci limiteremo a provare che δ nodi e k cuspidi impongono alle curve d'ordine n condizioni indipendenti quando δ e k sono abbastanza piccoli, sicchè esistano curve irriducibili possedenti δ nodi e k cuspidi, con date tangenti, in posizione generica assegnata. Si ha così un sistema lineare di dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} - 3\delta - 5k;$$

facendo variare i nodi e le cuspidi, nonchè le relative tangenti, si ottiene quindi un sistema non lineare di dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2k.$$

Le formule di PLÜCKER che legano i caratteri di una curva piana permettono di determinare quali siano i caratteri possibili per le curve di un dato ordine. Come esempio facciamo qui l'analisi dei casi cui danno luogo le curve *irriducibili* del terzo e quarto ordine.

Cominciamo col considerare le curve del terz' ordine. Osserviamo che una curva del terz'ordine irriducibile non può possedere due punti doppi nè una tangente doppia propriamente detta, poichè in ambedue i casi si staccherebbe una retta. Avremo adunque

$$\delta + k < 2, \quad \tau = 0,$$

e i valori possibili di δ e k saranno i seguenti:

$$\begin{cases} \delta = 0, & k = 0, \\ \delta = 1, & k = 0, \\ \delta = 0, & k = 1, \end{cases}$$

Tenuto conto che $\tau = 0$, le prime due formule di PLÜCKER danno nei varî casi:

$$\left.\begin{matrix} n = 3, & \delta = 0, & k = 0, \\ m = 6 & \tau = 0 & i = 9; \end{matrix}\right\} p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (\delta + k) = 1$$

$$\left.\begin{matrix} n = 3 & \delta = 1 & k = 0, \\ m = 4 & \tau = 0 & i = 3, \\ \\ n = 3 & \delta = 0 & k = 1, \\ m = 3 & \tau = 0 & i = 1. \end{matrix}\right\} p = 0.$$

Passiamo all'esame delle curve del quart'ordine.

Una curva del quart'ordine irriducibile, la quale si supponga dotata soltanto di singolarità elementari, possiede al più tre punti doppi, giacchè, se ne possedesse quattro, per questi e per un punto semplice passerebbe una conica che avrebbe nove intersezioni con la quartica, e però si staccherebbe da essa o avrebbe comune con essa una retta.

Ora, per l'esame della quartica, non essendo più $\tau = 0$, non bastano le prime due formule di PLÜCKER, ma occorrono tutte e tre le 1) 2) 3).

Mediante queste formule si trovano i casi seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} n=4\;, & \delta=0\;, & k=0\;, \\ m=12, & \tau=28, & i=24; \end{array}\right\} p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(\delta+k)=3$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=4\;, & \delta=1\;, & k=0\;, \\ m=10, & \tau=16, & i=18; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=0\;, & k=1\;, \\ m=9\;, & \tau=10, & i=16; \end{array}\right\} p=2$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=4\;, & \delta=2\;, & k=0\;, \\ m=8\;, & \tau=8\;, & i=12; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=1\;, & k=1\;, \\ m=7\;, & \tau=4\;, & i=10; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=0\;, & k=2\;, \\ m=6\;, & \tau=1\;, & i=8\;; \end{array}\right\} p=1$$

$$\left.\begin{array}{lll} n=4\;, & \delta=3\;, & k=0\;, \\ m=6\;, & \tau=4\;, & i=6\;; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=2\;, & k=1\;, \\ m=5\;, & \tau=2\;, & i=4\;; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=1\;, & k=2\;, \\ m=4\;, & \tau=1\;, & i=2\;; \\ & & \\ n=4\;, & \delta=0\;, & k=3\;, \\ m=3\;, & \tau=1\;, & i=0\;. \end{array}\right\} p=0$$

Osservazione. Per la cubica e la quartica generali si ha $\delta = k = 0$ e però i caratteri sono quelli segnati nei rispettivi primi casi.

22. Proprietà fondamentali della cubica. — La conoscenza dei caratteri della cubica generale, di cui abbiamo dato il quadro nel § 21, ci permette di dare forma precisa alla teoria della cubica, quale si può svolgere come conseguenza del teorema dei nove punti base di un fascio, stabilito nel § 15.

Le proposizioni elementari di questa teoria si riferiscono al birapporto delle quattro tangenti condotte per un punto alla cubica e alla configurazione dei nove flessi; a queste proprietà riattaccheremo anche la determinazione delle coniche pluritangenti e osculatrici.

Anzitutto abbiamo veduto che la cubica senza punti doppi è di classe 6, e pertanto per un punto della cubica passano quattro tangenti altrove alla curva. Dimostriamo ora il

Teorema di SALMON [1]: *Le quattro tangenti alla cubica condotte da un suo punto variabile hanno un birapporto costante.*

Sieno A, A' due punti della cubica f; si tratta di far vedere che il birapporto delle quattro tangenti ad f condotte per A è uguale al birapporto delle quattro tangenti per A'.

Indichiamo con T l'ulteriore intersezione della f con la retta AA'. Consideriamo una delle quattro tangenti alla cubica che escono da T: sia B il punto di contatto. Sappiamo (§ 15) che punti di f allineati con A vengono proiettati da B in punti allineati con A'. Così sorge fra i due fasci di raggi A e A' una corrispondenza [1, 1], dove si consideri come omologo di un raggio a per A il raggio a' per A' che contiene i due punti P' e Q' segati su f da a. Dunque (L. 1°, § 16), i fasci A, A' sono proiettivi; nella proiettività così stabilita alle tangenti condotte ad f per A corrispondono le tangenti per A', e quindi i birapporti delle due quaterne di tangenti sono uguali.

c. d. d.

Osservazione. Le due quaterne suddette sono proiettive in quattro modi; le quattro proiettività si ottengono in cor-

[1] SALMON (Journ. für Math., Bd 42 - 1851) ha dimostrato questo teorema sulla base della polarità, come vedremo in appresso (L. 3°). La dimostrazione del testo si può riattaccare, oltrechè a dimostrazioni ispirate a concetti più elevati, anche a quella che s'incontra nell'« Introduzione » del CREMONA (Opere, t. I, pag. 459, c) dove lo sviluppo più laborioso reca però il vantaggio di assegnare le effettive proiezioni e sezioni con le quali si passa, dal gruppo delle tangenti per un punto A, a quello delle tangenti per un altro punto A'.

rispondenza alla scelta del punto B che è uno dei punti di contatto delle tangenti ad f per T.

In luogo del birapporto α delle quattro tangenti condotte da un punto della cubica, si può considerare l'invariante assoluto della quaterna (¹)

$$J = 4\,\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(\alpha+1)^2(1-2\alpha)^2(2-\alpha)^2},$$

che non dipende dall'ordine delle quattro rette; questo invariante assoluto avrà per la cubica un valore determinato (indipendente dal centro del fascio) e costituirà quindi un *invariante assoluto della cubica*, esprimibile razionalmente per i coefficienti della sua equazione.

Ma di tale espressione non vogliamo qui occuparci, rimandando agli sviluppi del libro terzo.

Veniamo alla

Proprietà fondamentale della configurazione dei flessi: la retta che unisce due flessi di una cubica interseca la cubica in un altro flesso.

Infatti i flessi sono punti che coincidono coi loro tangenziali; se si congiungono due flessi F_1 e F_2 e si determina il terzo punto di intersezione F_3 della retta con la cubica, la retta satellite della F_1F_2 (§ 15) sarà la F_1F_2 stessa, e quindi anche F_3 coinciderà col suo tangenziale, e sarà un flesso.

c. d. d.

Osservazione. Il ragionamento si estende al caso in cui f possieda un nodo: *i tre flessi della cubica dotata di nodo sono in linea retta.*

La scoperta della proprietà fondamentale dei flessi risale a Mac-Laurin (²) (1748) che la dedusse, sostanzialmente come qui abbiamo fatto, dal teorema citato nel § 15. Mac-Laurin aveva in vista soltanto i flessi reali che sono in numero di tre; il suo teorema doveva divenire più significativo quando si presero in considerazione anche i flessi immaginari e si riconobbe, con Plücker (³) (1835), che vi sono in tutto nove

(¹) Cfr. L. 1°, § 4, pag. 24.
(²) Trad. De-Jonquières, pag. 231.
(³) « System der Analytischen Geometrie ».

flessi; lo studio approfondito della configurazione formata da questi nove punti è dovuto ad HESSE [1] (1844, 1847).

Anzitutto avvertiamo che i nove flessi di una cubica generale (senza punti doppi) sono sempre distinti, perchè la coincidenza di due porterebbe una retta con contatto quadripunto (§ 20).

Ora le coppie formate coi nove flessi sono $\frac{9 \cdot 8}{2}$; ciascuna di queste determina una retta contenente tre flessi e nascente quindi da tre coppie; dunque ci sono

$$\frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 12$$

rette siffatte, ossia: *i nove flessi d' una cubica senza punti doppi appartengono a 3 a 3 a 12 rette* (che diremo *rette di* MAC-LAURIN).

Per ogni flesso vi saranno $\frac{8}{2} = 4$ rette di Mac-Laurin, giacchè la congiungente il detto flesso ad uno degli altri 8 ne contiene un terzo; quindi *le dodici rette di* Mac-Laurin *formano quattro trilateri contenenti ciascuno i nove flessi* [2]. Si costruirà un trilatero siffatto, abc, scegliendo una prima retta di Mac-Laurin, a, e poi una seconda, b, fuori delle $3 \cdot 3 + 1 = 10$ che passano per un flesso appartenente ad a; si hanno nove rette che congiungono un flesso posto su a e uno posto su b; fuori di codeste nove rette e delle a, b, resta un' unica retta c, che contiene i tre flessi non appartenenti ad a, b.

Si possono designare i nove flessi con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, per modo che le nove rette di Mac-Laurin vengano rappresentate come segue:

123,	148,	157,	169,
456,	259,	268,	358,
789,	367,	349,	247;

dove appare che le quattro terne di rette scritte nella stessa verticale contengono tutti i nove flessi.

(1) Journal für Math., Bd. 28, pag. 89 e 97 e Bd. 38, pag. 257.

(2) PLÜCKER. Op. cit., pag. 284.

Un flesso può essere caratterizzato, dal seguente

Teorema di PONCELET [1]: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto F della cubica sia un flesso è che le tre coppie di punti della curva segate da tre trasversali per* F *appartengano ad una conica.*

Sieno AA', BB', CC', tre coppie di punti della cubica allineati con F; allora le rette AA', BB', CC', hanno comune colla cubica i nove punti base d'un fascio di cubiche:

$$A,\ A',\ B,\ B',\ C,\ C',\ F,\ F,\ F.$$

Si deduce che se A, A', B, B', C, C', stanno su una conica K, la tangente $r = FF$, formando insieme a K una cubica per otto di quei punti, deve contenere anche il nono, cioè la tangente r ha in F un contatto tripunto. Se invece si sa che F è un flesso, la conica determinata da A, A', B, B', C, presa insieme ad r ($= FFF$), forma una curva che passa per C', sicchè C' appartiene alla detta conica.

Il teorema di PONCELET conduce ad importanti conseguenze.

Anzitutto esso permette di riconoscere che la proprietà espressa dal teorema di MAC-LAURIN caratterizza la configurazione dei nove flessi d'una cubica:

Nove punti del piano tali che la retta che ne congiunge due ne contenga un terzo, appartengono ad un fascio di cubiche di cui sono i flessi [2] (un tal fascio si chiamerà — con CREMONA — *fascio sizigetico*).

Infatti, nell'ipotesi ammessa, i nove punti si trovano — a tre a tre — su dodici rette, che si possono designare come innanzi, e formano quindi quattro trilateri: per il principio di LAMÈ i detti trilateri appartengono ad un fascio di cubiche passanti per i nove punti. Ma preso uno di questi punti, designato con 1, vi sono tre coppie di punti 48, 57, 69, allineate con 1 e tali che i sei punti 4 5 6 7 8 9 appartengono alla conica spezzata 456·789; così appare che 1 è un flesso per le cubiche del fascio nominato.

[1] Journal für Math., Bd 8, (1832), n. 156. Cfr. « Traité », 2ª ed. t. II, pg. 156.

[2] HESSE, l. c., 1844, pervenne a questo teorema dimostrando che una cubica del fascio sizigetico ha la sua hessiana nel fascio stesso, (cfr. L. 3°).

Un secondo corollario evidente del teorema di PONCELET permette di affermare che:

I coniugati armonici d'un flesso F, *rispetto alle coppie di punti* (AA', BB', CC') *della cubica allineati con* F, *si trovano sopra una retta* (1), che si determina — facendo variare CC' e tenendo fisse le coppie AA' e BB' — come polare di F rispetto alla conica $K = AA'BB'CC'$. Questa retta ha ricevuto il nome di *polare armonica del flesso; le sue intersezioni colla cubica sono i punti di contatto delle tre tangenti condotte ad essa dal flesso* (fuori della tangente di flesso). Invero per un punto P della cubica passano in generale quattro tangenti altrove alla curva; ma quando P va a cadere in un flesso F, una di codeste tangenti diviene la tangente di flesso.

Chiamiamo A, B, C le intersezioni della polare armonica di F colla cubica, e D l'intersezione della stessa polare armonica con la tangente di flesso; sarà $(ABCD)$ il birapporto invariante della cubica. Ciò posto si riconosce che l'uguaglianza degli invarianti assoluti porge la condizione sufficiente, oltrechè necessaria, per la proiettività di due cubiche.

Invero si abbiano due cubiche K e K' con uguale invariante assoluto; sia F un flesso della prima, sieno A, B, C le intersezioni di K colla polare armonica di F, e D l'intersezione di questa retta colla tangente (di flesso) in F; sia F' un flesso della cubica K' ed A', B', C', D' i punti della relativa polare armonica costruiti analogamente ad A, B, C, D.

Per ipotesi

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

ed esiste in generale *una* proiettività fra le punteggiate $ABCD$, $A'B'C'D'$, in cui a D risponde D'. Assumasi ancora una retta per F che seghi la cubica K in due punti P, Q, ed una retta per F' (secante la cubica K' in due punti M', N') la quale formi colle $F'A'$, $F'B'$, $F'C'$ un birapporto uguale a quello formato dalla FPQ colle FA, FB, FC. Vi sarà fra i piani delle due cubiche una omografia, determinata dalle coppie AA', DD', FF', PM', in cui si corrispondono i punti

$$\begin{matrix} A & B & C & D & F & P \\ A' & B' & C' & D' & F' & M' \end{matrix}$$

(1) Cfr. *Prop. IX* di MAC-LAURIN in Trad. DE JONQUIÈRES, pg. 228.

e così un'altra omografia in cui si corrispondono

$$\begin{matrix} A\,B\,C\,D\,F\,P \\ A'B'C'D'F'N'. \end{matrix}$$

Ciascuna di queste omografie muta la cubica K in un'altra che tocca K' in A', B', C', ha un flesso in F' con tangente $F'D'$, ed ha con K' un altro (decimo) punto comune, cioè M' o N'; si deduce che la trasformata di K coincide con K'. Per ognuno dei nove flessi, F', di K' si trovano così *due* omografie trasformanti K in K'; se ne avranno invece *quattro* o *sei* se $(ABCD)$ è un gruppo armonico o rispettivamente equianarmonico, riferibile proiettivamente ad $(A'B'C'D')$ — in guisa che D e D' si corrispondano — in due o tre modi diversi, cioè nel caso delle *cubiche* che si designeranno come *armoniche* e *equianarmoniche*. Si conclude che: ***Due cubiche, senza punti doppi, aventi lo stesso invariante assoluto, sono proiettive fra loro generalmente in* 18 *modi diversi; due cubiche armoniche sono proiettive in* 36 *modi e due cubiche equianarmoniche in* 54 *modi.***

I teoremi che abbiamo esposti stanno a base di un più largo sviluppo della teoria della cubica, che comprende in particolare il gruppo delle proiettività trasformanti in se stessa la curva o il fascio sizigetico, da essa definito, e la configurazione delle polari armoniche (cui spettano proprietà correlative della configurazione dei flessi). Questo studio verrà svolto nel Libro terzo, ove potrà essere illustrato dalla considerazione delle curve covarianti che vi si riattaccano. Qui ci limiteremo a rilevare l'interessante costruzione delle coniche biosculatrici e tritangenti alla cubica, la quale si ottiene come segue.

Esistono nove sistemi ∞^1 ***di coniche biosculatrici*** (cioè aventi due contatti tripunti) ***ad una cubica generale; essi sono caratterizzati dalla proprietà che i punti di contatto sono allineati con un flesso*** [1].

Infatti sia una conica K osculatrice alla cubica nei punti A e B, e sia F la terza intersezione della retta AB colla cubica; la retta AB contata tre volte sega la cubica nei nove punti AAA, BBB, FFF, e la tangente in F presa insieme colla conica K forma una cubica passante per gli

(1) Cfr. Poncelet, l. c., n. 161, « Traité », pg. 157.

otto punti AAA, BBB, FF, la quale passa di conseguenza una terza volta per F; si deduce che F è un flesso. Viceversa, ammettendo che F sia un flesso, si deduce che la conica per $AAABB$ oscula la cubica anche in B.

Siccome un flesso è tangenziale di tre punti posti sulla polare armonica, si ha il corollario evidente:

Vi sono 27 *coniche aventi un contatto sestipunto con una cubica; i* 27 *punti di contatto* (punti *sestatici* della curva) *sono le intersezioni della curva colle* 9 *polari armoniche dei flessi.*

Questo resultato, che (quando si abbiano i *nove* flessi della cubica) non aggiunge nulla al teorema di Poncelet del 1833, trovasi enunciato da Steiner nel 1846 ([1]), il quale determina la configurazione dei 27 punti sestatici.

La costruzione delle coniche tritangenti ad una cubica si può far dipendere dal seguente teorema, che discende immediatamente dal teorema dei nove punti base del fascio di cubiche:

I tre punti di contatto di una conica tritangente hanno i loro tangenziali in linea retta, e viceversa: se tre punti A, B, C di una cubica hanno i tangenziali in linea retta, essi sono i punti di contatto di una conica (che può ridursi a una retta contata due volte).

Il teorema precedente permette di costruire le coniche tritangenti alla cubica di cui siano dati due punti di contatto A e B. Siano A' e B' i tangenziali di A e B e sia C' il terzo punto di intersezione della retta $A'B'$ con la cubica. Vi saranno quattro punti C_1, C_2, C_3, C_4 aventi come tangenziale C'; uno di questi sarà la terza intersezione della retta AB con la cubica; gli altri tre saranno i punti di contatto di tre coniche tritangenti per A, B.

Aggiungiamo che *se* A, B, C, *sono i punti di contatto di una conica tritangente, altri tre punti* $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, *della cubica, che stiano con* ABC *sopra una conica* φ, *sono pure i punti di contatto di una conica tritangente.* Ciò segue immediatamente dal teorema di Jacobi (§ 16): infatti la quartica $\varphi^2 = 0$ sega sulla cubica i dodici punti

$$A, A, \quad B, B, \quad C, C$$
$$\bar{A}, \bar{A}, \quad \bar{B}, \bar{B}, \quad \bar{C}, \bar{C};$$

([1]) Journal für Math., Bd 32, pag. 182.

i primi sei stanno per ipotesi sopra una conica, quindi la conica che passa per $\bar{A}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ passa una seconda volta per $\bar{C}$, cioè riesce tangente alla cubica anche in esso.

Si osserverà che, tenendo fermi ABC e facendo variare sulla cubica i punti $\bar{A}$ e $\bar{B}$, riesce determinata la scelta di *una* fra le tre coniche tritangenti che hanno $\bar{A}$ e $\bar{B}$ come punti di contatto. Si deduce che *le coniche tritangenti ad una cubica* (escluse le rette doppie) *si distribuiscono in tre sistemi* ∞^2, per modo che due punti qualunque della cubica sono punti di contatto per una conica appartenente a ciascun sistema.

In ciascuno dei sistemi predetti si trovano nove coniche, con contatto sestipunto: si ottengono tre di queste coniche appartenenti a sistemi diversi, considerando i tre punti in linea retta A, B, C che hanno come tangenziale un flesso F. Si ha qui una seconda prova che A, B, C sono punti sestatici, giacchè in ognuno di essi vengono a coincidere tre punti i cui tangenziali sono le tre intersezioni infinitamente vicine della cubica con una tangente di flesso.

Nota. Vogliamo osservare con Plücker [1], la forma canonica dell'equazione della cubica in rapporto a tre tangenti di flesso a, b, c i cui punti di contatto si trovino sopra una retta d:

$$abc - \lambda d^3 = 0;$$

essa esprime che la cubica data appartiene al fascio delle due cubiche $abc = 0$, e $d^3 = 0$.

Ora la precedente equazione canonica racchiude nove costanti essenziali, dipendendo dalle otto coordinate delle rette a, b, c, d e dal parametro λ; così — nell'ordine di idee di Plücker — si riconosce subito che è l'equazione di una cubica generale (la deduzione è rigorosa perchè è escluso il caso di eccezione avendosi un numero finito di tangenti di flesso). La considerazione precedente mette subito in evidenza che la cubica generale possiede tre flessi in linea retta; la proprietà fondamentale della configurazione esprime qualche cosa di più, e per dedurla occorrerebbe ancora sapere *a priori* che le coppie dei flessi di una cubica variabile formano una varietà *irriducibile.*

Nel caso che le tre tangenti di flesso a, b, c non passino per un punto, l'equazione canonica precedente si può ridurre

[1] Journal für Math., Bd 34, pg. 329.

— con una sostituzione lineare — alla forma

$$x_1 x_2 x_3 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3)^3 = 0,$$

(è facile riconoscere che la d non può mai passare per il punto comune a due delle a, b, c). Quest'equazione rappresenta dunque la cubica generale, ed in essa λ si esprime facilmente come funzione del birapporto delle quattro tangenti condotte alla cubica da un suo punto. La riduzione accennata riesce impossibile se le tre tangenti a, b, c passano per un punto; ma, come vedremo nel Libro terzo, ciò porta che la cubica sia *equianarmonica* e che la retta d appartenga ad un particolare trilatero in rapporto ad essa; così la riduzione all'anzidetta *forma canonica* riesce ancora possibile partendo da una delle altre nove rette di Mac-Laurin.

D'altra parte l'equazione

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + k\, x_1 x_2 x_3 = 0,$$

dipendente dal sistema delle coordinate (8 costanti arbitrarie) e dal parametro k, rappresenta pure una forma canonica a cui può ridursi la cubica generale. Hesse [1] deduce la possibilità di tale riduzione da questo computo di costanti, che riesce legittimo ove si riconosca che la riduzione stessa è possibile soltanto in un numero finito di modi. Infatti è facile verificare che la cubica così rappresentata ha come flessi le intersezioni colle rette del trilatero fondamentale: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, cioè i novi punti:

$$\begin{array}{ccc}
(\ 0, \quad 1, \ -1) & (\ 0, \quad 1, \ -\varepsilon) & (\ 0, \quad 1, \ -\varepsilon^2) \\
(-\varepsilon^2, \quad 0, \quad 1) & (-1, \quad 0, \quad 1) & (-\varepsilon, \quad 0, \quad 1) \\
(\ 1, \ -\varepsilon, \quad 0) & (\ 1, \ -\varepsilon^2, \quad 0) & (\ 1, \ -1, \quad 0),
\end{array}$$

dove ε designa una radice cubica dell'unità.

Nel Libro terzo insegneremo a fare effettivamente la riduzione accennata, partendo dai quattro trilateri formati dalle dodici rette di Mac-Laurin, e ne svilupperemo le conseguenze, approfondendo lo studio del fascio sizigetico di cubiche che si ottiene dall'equazione precedente al variare di k.

[1] Journal für Math., Bd 28, pg. 90.

23. Il genere d'una curva e la sua invarianza per trasformazioni quadratiche. — Nel seguito, salvo avviso in contrario, ci riferiremo sempre a curve dotate di singolarità elementari.

Le formule 7) e 8) o 9) del § 15, che sono duali di se stesse, definiscono ciascuna un carattere della curva che coincide col suo duale; il più importante è il carattere definito dall'ultima formula, che si chiama *genere della curva*, cioè il numero:

$$1)\qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i,$$

che — per una curva dotata di punti r-pli ordinarî — vale

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\Sigma r(r-1)}{2}.$$

Introducendo il genere, la classe m di una curva viene data dalla relazione

$$2)\qquad m = 2n + 2p - 2 - k,$$

come si verifica immediatamente. La relazione 2) si può enunciare in una forma più semplice, che mette in evidenza il *significato caratteristico del genere* p. A tale scopo ricordiamo che i punti di una curva nell'intorno di una cuspide appartengono a un solo ramo; ogni retta che vada alla cuspide ha due intersezioni infinitamente vicine con un ramo della curva, e quindi può essere considerata come tangente a un ramo della curva (L. 1°, § 11). Allora possiamo dire che *le tangenti a rami della curva* passanti per un punto *sono* in ogni caso:

$$2n + 2p - 2.$$

Osservazione. Questo risultato si estende senz'altro al caso che la curva possieda un punto r-plo a tangenti distinte; ma vale la pena di notare che ancora *le rette per il punto r-plo tangenti altrove a rami della curva sono*

$$2\nu + 2p - 2,$$

designando $\nu = n - r$ il numero delle intersezioni variabili della curva con una retta generica per il punto multiplo.

Nell'analisi del § 16 si è riconosciuto che il carattere p non può diventare negativo per le cubiche e quartiche irriducibili. Ora possiamo dimostrare in generale che:

Il genere di una curva irriducibile non può essere negativo, cioè il numero s $(= \delta + k)$ dei punti doppi di una curva irriducibile d'ordine n, vale al massimo $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Si abbia una curva f dotata di

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

(o più) punti doppi: dimostriamo che essa è riducibile. Infatti esiste certo almeno una curva, φ_{n-1}, d'ordine $n-1$, passante per quegli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ punti doppi e per altri

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right)=2(n-1)+1=2n-1$$

punti semplici di f; allora le due curve f e φ_{n-1} s'intersecano in

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right)+2n-1=n(n-1)+1$$

punti, e quindi hanno una parte in comune: la curva f è *riducibile*. c. d. d.

Abbiamo visto che un punto r-plo, a tangenti distinte, va computato nelle formule di PLÜCKER come equivalente a $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi: perciò un tal punto r-plo diminuisce il genere di $\frac{r(r-1)}{2}$. Ora *il genere di una curva irriducibile che possegga punti r-pli* $(r \geq 2)$ *vale sempre* $p \geq 0$. Infatti si può ripetere la dimostrazione precedente nell'ipotesi che f possegga punti di molteplicità > 2, obbligando la φ_{n-1} a passare $r-1$ volte per ogni punto r-plo.

Si può dimostrare che esistono curve (irriducibili) d'ordine n aventi il massimo numero di punti doppi

$$s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

e quindi il genere $p=0$. A tale scopo basta valutare il numero dei punti doppi di una *curva razionale*, cioè di una curva rappresentata parametricamente mediante due funzioni razionali

$$3)\qquad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

in guisa che i valori di t corrispondano biunivocamente ai punti della curva. Per semplicità supporremo che φ, ψ siano funzioni razionali fratte d'ordine n aventi il denominatore comune:

$$\varphi(t)=\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)},\quad \psi(t)=\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}$$

(caso a cui si può sempre ridurre la rappresentazione parametrica precedente). Allora la curva 3) è d'ordine n, giacchè l'equazione che fornisce le intersezioni di essa con una retta

$$ax+by+c=0$$

è

$$a\varphi_1(t)+b\varphi_2(t)+c\varphi_3(t)=0.$$

La curva 3) possiederà un punto doppio in relazione ad ogni coppia di valori di t: t_1, t_2, a cui corrispondono i medesimi valori finiti di x, y; cotesto punto sarà un nodo se t_1 e t_2 sono distinti, giacchè ai due intorni di t_1 e t_2 corrisponderanno i due rami della curva per il punto doppio, nel caso limite in cui t_1 e t_2 divengano infinitamente vicini si otterrà una cuspide.

Ciò posto la ricerca dei punti doppi della curva 3) conduce a determinare le coppie di punti, appartenenti alla retta t, che sono coniugati insieme rispetto alle due g_n^1:

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}=x,\quad \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}=y,$$

le quali g_n^1 hanno comune il gruppo dei poli di x, y: $\varphi_3(t)=0$ (cfr. § 3).

Le coppie comuni a due g_n^1 sopra una retta sono formate dai punti uniti della corrispondenza $[(n-1)^2, (n-1)^2]$ che si ottiene come prodotto delle corrispondenze $[(n-1), (n-1)]$

definite dalle due involuzioni. Si hanno $2(n-1)^2$ punti uniti, e perciò

$$(n-1)^2$$

coppie di punti comuni a due g_n^1; ma poichè nel nostro caso queste g_n^1 posseggono un G_n a comune, cui corrispondono valori infiniti di x e y, defalcheremo dal numero precedente il numero $\frac{n(n-1)}{2}$ delle coppie formate col G_n, ed otterremo così

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

coppie, in generale distinte dalle precedenti, cui corrisponderanno altrettanti punti doppi della curva 3). (Il caso in cui una delle coppie trovate non sia propriamente fuori del G_n porta che qualcuno dei punti doppi della curva 3) se ne vada all'infinito: nel caso generale i punti all'infinito non sono doppi per essa).

Riassumendo: le *curve razionali d'ordine n posseggono il massimo numero di punti doppi*: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; naturalmente questi possono essere assorbiti da punti di maggiore molteplicità, restando sempre *il genere* $p=0$. Così accade, per es., per una curva d'ordine n dotata di un punto $(n-1)$-plo, quale è la

$$y=\frac{a_0x^n+\dots+a_n}{b_0x^{n-1}+\dots+b_{n-1}}.$$

Qui le due g_n^1, da considerare sulla retta t, sono

$$x=t\,\frac{b_0t^{n-1}+\dots+b_{n-1}}{b_0t^{n-1}+\dots+b_{n-1}},\quad y=\frac{a_0t^n+\dots+a_n}{b_0t^{n-1}+\dots+b_{n-1}},$$

e le $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ coppie comuni — tolto il G_n comune $b_0t^{n-1}+\dots+b_{n-1}=0$, $t=\infty$ — sono ancora le coppie estratte dal G_{n-1}:

$$b_0t^{n-1}+\dots+b_{n-1}=0,$$

che insieme ad un t qualunque forma un gruppo della prima g_n^1 e insieme a $t=\infty$ un gruppo della seconda; a codesto G_{n-1} corrisponde sulla curva il punto $y=\infty$ dell'asse y, che è $(n-1)$-plo per la curva stessa.

Ora, riassumendo i resultati ottenuti: *il genere di una curva irriducibile si può definire come il numero dei punti doppi che le manca per raggiungere il massimo* compatibile col suo ordine.

L'importanza fondamentale del genere, nella teoria delle curve, è in rapporto con la sua invarianza per trasformazioni biunivoche (della curva o del piano), che avremo luogo di riconoscere in seguito.

Dimostriamo intanto il

Teorema: *Il genere di una curva algebrica piana è invariante per trasformazioni quadratiche*, e più precisamente, limitandoci qui al caso più semplice: se due curve dotate soltanto di punti doppi o multipli a tangenti distinte, si corrispondono in una trasformazione quadratica del piano, le due curve hanno lo stesso genere.

Infatti si supponga dapprima che la trasformazione quadratica possegga punti fondamentali distinti: ABC nel primo piano e $A'B'C'$ nel secondo (cfr. L. 1°, § 17). I lati del triangolo fondamentale ABC dovranno supporsi non contenere punti multipli della f fuori di A, B, C, altrimenti, come si vede facilmente, la curva trasformata f' possiederebbe singolarità straordinarie. La f sia d'ordine n e passi per A, B, C con le molteplicità r_1, r_2, r_3. Alla curva f, che sega le coniche per A, B, C in $2n-(r_1+r_2+r_3)$ punti variabili, corrisponderà nel secondo piano una curva f' d'ordine $2n-(r_1+r_2+r_3)$; e poichè f sega la retta AB in $n-(r_1+r_2)$ punti fuori di A, B, la f' passerà per C' con la molteplicità $n-(r_1+r_2)$, e così passerà per A', B', con le molteplicità $n-(r_2+r_3)$ e $n-(r_1+r_3)$; ogni altro punto i-plo di f fuori di A, B, C, si trasformerà evidentemente in un punto i-plo (parimente ordinario) per f'. Allora i due generi di f e f' risultano uguali, come viene indicato dalla seguente uguaglianza

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum\frac{r(r-1)}{2}-\sum\frac{i(i-1)}{2}=$$

$$=(2n-\Sigma r-1)(2n-\Sigma r-2)-\sum\frac{\{n-(r_h+r_k)\}\{n-(r_h+r_k+1)\}}{2}-\sum\frac{i(i-1)}{2}.$$

Ora il teorema si estende al caso in cui la trasformazione abbia punti fondamentali infinitamente vicini.

Brevemente la conservazione del genere si può fondare in tutti i casi sull'osservazione che vi sono nei due piani due fasci di rette A, A' che si corrispondono, per modo che alle tangenti per A corrispondono le tangenti per A': designando con n' il numero delle intersezioni variabili delle rette per A con f, sarà ancora n' il numero delle intersezioni variabili delle rette per A' con f', e quindi indicando con p, p' i generi delle due curve si avrà — per quanto abbiam visto innanzi —

$$2n' + 2p - 2 = 2n' + 2p' - 2,$$

da cui

$$p = p'.$$

Osservazione. La prima dimostrazione cade in difetto se la curva f possiede un punto i-plo ($i > 1$) sopra una retta fondamentale, per esempio sulla BC, giacchè allora non vi è un punto proprio della f' che gli corrisponda; ma in tal caso la f non possiede più in A' un punto $\{n - (r_2 + r_3)\}$-plo ordinario, giacchè vi sono i tangenti di esso che coincidono in una retta avente un contatto $\{n - (r_2 + r_3) + i\}$-punto; ed è naturale di dire che la f' possiede allora un punto i-plo (improprio) infinitamente vicino al punto multiplo A'. Se si tiene conto di questo nella valutazione del genere di f', il teorema di invarianza resta ancora verificato. Ciò risulta anche dalla seconda dimostrazione, ove si supponga estesa la definizione del genere in guisa che valga sempre la formula che dà il numero delle tangenti (a rami) per un punto qualsiasi. Ma basti qui avere accennato ad un argomento che si riferisce alla teoria generale delle singolarità superiori. (Cfr. L. 4°).

Nota storica. Il concetto del genere p di una curva proviene dalla teoria delle funzioni abeliane. Contenuto solo implicitamente nella memoria di Abel sulle trascendenti che da lui prendono nome, compare nella teoria di Riemann (1857) come numero capace di definire la connessione della superficie che offre una rappresentazione reale dei punti reali e complessi della curva. (Cfr. Cap. III). Nelle lezioni sulla teoria delle funzioni abeliane di Weierstrass (1863-69) quel numero viene introdotto attraverso considerazioni algebriche e designato col nome di *rango*.

Clebsch riattaccandosi alle ricerche di Riemann, in una nota dél « Journal für Mathematik », (1) (1863), rilevava la grande importanza del numero p, che compare nel computo delle $(2n+2p-2)$ tangenti condotte ad una curva d'ordine $m+n$ per un punto m-plo, e, avvertendo che esso costituisce un carattere invariante per qualsiasi trasformazione birazionale della curva, ne traeva anche una dimostrazione trascendente della terza formula di Plücker.

Più tardi Clebsch (2) stesso osservava che « in luogo di dividere le curve secondo gli ordini, facendo delle sottodivisioni in rapporto al numero dei punti doppi, si possono dividere in *generi*, secondo il valore del numero p ». Da ciò è venuto il nome di *genere* con cui il numero p viene comunemente designato fin dalla seconda nota sulle trasformazioni del Cremona (3), 1865. Cayley (4) alla medesima epoca occupandosi della classificazione delle curve in ordine al numero p, lo designava col nome di *deficienza* (deficiency, defect) per riguardo al fatto che esso esprime il numero dei punti doppi che manca a una curva d'ordine n per averne il massimo. Qui giova avvertire che il teorema sul massimo numero dei punti doppi che può avere una curva irriducibile d'ordine n, fu riconosciuto fino da Mac-Laurin (Geometria Organica, pag. 137): Clebsch ha dimostrato poi (1864) che le curve per cui è raggiunto il massimo sono le curve razionali.

L'importanza fondamentale del genere deriva appunto dalla accennata invarianza rispetto a trasformazioni birazionali, ed appare nello studio della così detta geometria sopra la curva (L. 5°).

24. Nota sul genere della corrispondenza e sul discriminante delle funzioni algebriche. — L'invarianza del genere per trasformazioni quadratiche eseguite sulla curva

$$f(xy)=0,$$

va messa in relazione colla circostanza che il *genere* si può definire non soltanto come un carattere della curva, ma anche

(1) Bd. 63.
(2) Journal für Mathematik, Bd 64, pag. 43.
(3) Opere, tomo II, pag. 218.
(4) Papers VI.

come un *carattere della corrispondenza* rappresentata dall'equazione $f(xy)=0$, (cfr. L. 1°, § 17).

Consideriamo l'equazione algebrica

$$f(xy)=0$$

come equazione di una corrispondenza $[m, n]$, e supponiamo dapprima — per semplicità — che questa corrispondenza sia generale, nel senso che al punto all'infinito di ciascuna retta corrisponda sull'altra un gruppo di punti propri e distinti, caso a cui ci si può sempre ridurre con una conveniente trasformazione proiettiva su una delle variabili. Immagine della corrispondenza sarà allora una curva f_{m+n}, d'ordine $m+n$, che avrà come n-plo il punto dell'infinito, A, dell'asse x e come m-plo il punto all'infinito, B, dell'asse y.

Ricerchiamo i *punti critici* x a cui corrispondono due y coincidenti. Questi punti sono dati dalle tangenti condotte per B alla curva, e sono precisamente (§ 22)

$$2n+2p-2,$$

dove

$$p=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=mn-(m+n)+1$$

designa il *genere della corrispondenza*, ossia il genere della curva f_{m+n}, che si suppone priva di punti multipli fuori di A, B.

Similmente vi sono

$$2m+2p-2$$

punti critici y a cui corrispondono due x coincidenti.

Suppongasi ora che la f_{m+n} possegga un nodo $O=(x_0y_0)$, le cui tangenti principali non siano parallele agli assi. Il punto x_0 figura, contato due volte, come un punto critico sulla retta x perchè la retta BO conta due volte come una tangente impropria della curva. (Cfr. § 18).

Vi è però una sostanziale differenza fra un tale punto x_0 e un punto critico x_1 corrispondente a una tangente propria della f_{m+n} per B. Infatti nell'intorno del nodo O la curva f_{m+n} è costituita da due rami lineari che possiamo sostituire con le loro tangenti, così come possiamo sostituire con le rispettive tangenti i rami relativi ai restanti $n-2$ punti omologhi di x_0; ciò significa che la corrispondenza (xy) può essere rappresentata approssimativamente, nell' intorno del punto x_0, come la *somma di n proiettività*, due delle quali fanno corrispondere ad x_0 il medesimo y_0 (l'approssimazione vale a meno di infinitesimi del second'ordine). Invece per l'intorno del punto critico x_1 (cui sono associati due y_1 coincidenti) la corrispondenza (xy) non si lascia più decomporre in n corrispondenze [1, 1] approssimativamente proiettive, ma soltanto in $n-2$ corrispondenze siffatte e in una corrispondenza [1, 2] irriducibile; invero i due punti che corrispondono a un punto x di codesto intorno risultano (approssimativamente) coniugati in un' involuzione che ha come punto doppio y_1, e l'impossibilità di distinguere in questa la proiettività diretta dalla inversa significa appunto l'impossibilità di distinguere due rami della funzione $y(x)$. Si può costruire l'involuzione anzidetta considerando la parabola osculatrice alla f_{m+n} nel punto $(x_1 y_1)$: su questa parabola le rette $x=$ cost. segano un' involuzione, che si proietta ortogonalmente sull' asse y, nell'involuzione anzidetta.

Un punto critico x_0, *nell' intorno* del quale (come per un punto generico) la *corrispondenza* (xy) *si decompone* in *n corrispondenze* [1, 1], si dice un *punto critico apparente*, mentre un punto critico x_1, nel cui intorno la *corrispondenza* (xy) si decompone in $n-2$ corrispondenze [1, 1] e in una *corrispondenza* [1, 2] *irriducibile*, si dice *punto di diramazione*; in questo intorno due valori della funzione algebrica $y(x)$ non sono funzionalmente distinti, perchè si permutano l'uno coll' altro quando si compie un giro della variabile complessa x avvolgendo il punto di diramazione x_1. (Cfr. L. 1°, § 11).

Ora suppongasi che la curva f_{m+n} possegga δ *nodi* (oltre i punti multipli A, B); il suo genere, cioè *il genere della corrispondenza, varrà*

$$p = mn - (m+n) + 1 - \delta,$$

e il numero dei punti di diramazione sarà ancora, per la corrispondenza (x, y)

$$2n + 2p - 2,$$

e per la corrispondenza inversa (y, x)

$$2m + 2p - 2.$$

I punti critici della corrispondenza (x, y) sono rappresentati complessivamente annullando il discriminante della funzione algebrica $y(x)$:

$$\Delta(x) = \Pi(y_i - y_k),$$

che è il resultante delle due equazioni

$$f(xy) = 0$$

e

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = 0$$

(la quale esprime che l'equazione $x(y) = x$ ha una radice doppia). Ora fra le radici di $\Delta(x) = 0$ vengono a comparire, oltre i punti x per cui propriamente $\frac{dx}{dy} = 0$ $\left(\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial x} \neq 0\right)$, anche quelli per cui $\frac{dx}{dy}$ è indeterminato $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$, giacchè — nel calcolo del discriminante Δ — all'equazione $\frac{dx}{dy} = 0$ si sostituisce $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. I punti della prima specie sono i punti di diramazione della corrispondenza (xy), rappresentati complessivamente dall'annullamento di un fattore $\Delta_1(x)$ di $\Delta(x)$; l'altro fattore, che è un quadrato perfetto $\Delta_2^2(x)$, rappresenta i punti critici apparenti, ciascuno dei quali assorbe due radici dell'equazione $\Delta(x) = 0$.

Nelle ipotesi fatte (corrispondenze ordinarie) *il discriminante $\Delta(x)$ di $y(x)$ si decompone nel prodotto*

$$\Delta(x) = \Delta_1(x)\,\Delta_2^2(x),$$

per modo che le equazioni $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x) = 0$ di grado $2n + 2p - 2$ e $mn - (m + n) + 1 - p$ rappresentano rispettivamente i punti di diramazione e i punti critici apparenti della corrispondenza (x, y); il fattore $\Delta_1(x)$ ha ricevuto da KRONECKER (1) il nome di fattore *essenziale* del discriminante.

Per la corrispondenza $[m, n]$ più generale si ha $p = mn - (m + n) + 1$, e Δ_2 si riduce di grado zero; le corri-

(1) Accademia di Berlino, 1862.

spondenze per cui Δ_2 è di grado δ sono caratterizzate da δ condizioni (non lineari) fra i coefficienti di f, le quali si ottengono imponendo all'equazione $\Delta(x) = 0$ di possedere δ radici doppie, cioè δ radici comuni con la sua derivata. Ma queste condizioni non corrispondono soltanto al sistema Σ delle curve f dotate di δ nodi, bensì anche al sistema Σ' delle f per cui una parallela all'asse y riesce tangente doppia o di flesso. Per staccare il sistema Σ dal sistema Σ', basta aggiungere alle δ condizioni sopra espresse, la condizione che sia (non soltanto $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ma anche) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, in tutti i punti di f corrispondenti alle radici doppie di $\Delta(x) = 0$.

Per la curva generica del sistema Σ le radici di $\Delta_1(x) = 0$ e quelle di $\Delta_2(x) = 0$ risultano semplici e distinte fra loro. Ma se facciamo variare la corrispondenza, mantenendo ferme le condizioni caratteristiche del sistema Σ e senza che la curva acquisti nuovi punti multipli, si possono ottenere varie particolarizzazioni:

1) $\Delta_1(x) = 0$ può acquistare una radice multipla, d'ordine i, che non coincida con una radice di $\Delta_2(x) = 0$.

Il caso più notevole a cui si è condotti in tal guisa è il *punto di diramazione* $\bar{x}$ *d'ordine* i, a cui corrispondono $i + 1$ punti y coincidenti. La curva $f(xy) = 0$ possiede una tangente $(i + 1)$-punta parallela all'asse y. Nell'intorno del punto $\bar{x}$ la corrispondenza (xy) si decompone in $n - (i + 1)$ corrispondenze $[1, 1]$ e in una corrispondenza irriducibile $[1, i + 1]$. La considerazione della parabola d'ordine $i + 1$ osculatrice alla curva permette di riconoscere che gli $i + 1$ punti y associati ad un x in codesta corrispondenza possono ritenersi approssimativamente come punti di un ciclo di una proiettività d'ordine $i + 1$; la dimostrazione di ciò è ovvia ove si ricordi che una g^1_{i+1} sopra la retta y è ciclica (§ 8) se possiede due punti $(i + 1)$-pli (nel nostro caso dall'esistenza d'un punto $(i + 1)$-plo proprio e dalla non esistenza di altri punti doppi propri, si concluderà all'esistenza di un secondo punto $(i + 1)$-plo all'infinito ecc.).

Una radice i-pla di $\Delta_1(x) = 0$, che non coincida con una radice di $\Delta_2(x) = 0$, corrisponderà in generale alla sovrapposizione di più (s) punti di diramazione, d'ordine

$$i_1, \quad i_2, \ldots \quad i_s,$$

dove
$$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = i:$$

cioè sarà data da una retta parallela all'asse y che tocchi la $f(xy) = 0$ in s punti, con contatti d'ordine i_1, $i_2 \ldots i_s$.

2) $\Delta_2(x) = 0$ può acquistare una radice multipla, che non coincida con una radice di $\Delta_1(x) = 0$.

Ciò accade p. es. se la $f(xy) = 0$ possiede un punto r-plo, il quale, assorbendo $r(r-1)$ tangenti improprie parallele all'asse (come $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi), corrisponde ad una radice almeno $\frac{r(r-1)}{2}$pla di $\Delta_2(x) = 0$; ma tale radice può anche resultare di molteplicità superiore, ove si ammettano punti multipli particolari con tangenti coincidenti; infatti la radice stessa diviene multipla d'ordine $\frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2}$ $(s \leq r)$ se al punto r-plo della curva si fa avvicinare indefinitamente un punto s-plo, senza che aumenti al limite la molteplicità r del primo (e senza che si confondano ivi altri punti critici).

3) $\Delta_1(x) = 0$ e $\Delta_2(x) = 0$ possono acquistare radici comuni. La sovrapposizione d'un punto di diramazione ad un punto critico apparente dà luogo a varii casi. Anzitutto può accadere che un punto doppio (o multiplo) della curva $f(xy) = 0$ si trovi accidentalmente sopra una tangente propria parallela all'asse y (posizione particolare degli assi). Ma più notevole è il caso in cui la curva possegga un punto doppio (o moltiplo) in cui si confondono due (o più) rami della $y(x)$, permutantisi per un giro della variabile x nel piano complesso. L'esempio elementare di ciò è offerto dalla cuspide (cfr. L. 1°, § 11), che corrisponde appunto alla sovrapposizione d'un punto di diramazione semplice della corrispondenza ad un punto critico apparente (radice semplice di $\Delta_2(x) = 0$).

Le corrispondenze $f(xy) = 0$ che nascono così — come limiti di corrispondenze ordinarie — conducono ancora a una decomposizione del discriminante

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \Delta_2^2(x),$$

e ad una analisi dei *punti critici definiti come sovrapposizione di punti critici apparenti e di punti di diramazione* (di ordine ≥ 1).

Si può chiedere se un punto critico di una corrispondenza $f(xy)=0$ si lasci sempre definire in tal guisa, e se quindi possa aversi sempre la separazione di una parte essenziale del discriminante: a questa domanda si può dare una risposta affermativa sulla base di una analisi approfondita dalle singolarità delle curve (L. 4°).

Osservazione. Se si fa il ***prodotto delle corrispondenze*** (yx) e (xy), staccando il fattore identità, cioè se si considera sopra la retta y la corrispondenza fra i punti che hanno sopra la x un medesimo omologo, questa corrispondenza $[m(n-1), m(n-1)]$ possiede $2mn-2m$ coincidenze, le quali corrispondono ai punti critici radici della $\Delta(x)=0$; figurano come coincidenze doppie i δ punti critici apparenti su y, che sono omologhi di punti critici apparenti sulla x, e come coincidenze semplici $2n+2p-2$ punti, omologhi dei punti x di diramazione.

25. Serie semplicemente infinite di curve. — Si consideri una serie algebrica semplicemente infinita $\}C_n\{$ di curve algebriche piane, C_n, d'ordine n, generalmente irriducibili: secondo De Jonquières [1] si dice ***indice della serie*** il numero μ delle curve di essa che passano per un punto generico del piano. Chasles [2] ha introdotto, accanto a questo numero, una seconda *caratteristica* della serie, cioè il carattere duale ν, che designa il numero delle curve C_n, tangenti a una retta generica.

A prima vista appare che il numero ν possa definirsi per mezzo di μ, n, nel modo seguente.

Consideriamo una serie $\}C_n\{$ affatto generale d'indice μ; segando con una retta generica si ottiene una serie d'indice μ di gruppi di n punti, che dà una corrispondenza simmetrica $[\mu(n-1), \mu(n-1)]$, dotata di

$$\nu = 2\mu(n-1)$$

coincidenze.

Ora, per il ragionamento duale, si è condotti ad ammettere che anche μ possa esprimersi con la stessa formula per mezzo di ν e della classe m delle C_n:

$$\mu = 2\nu(m-1).$$

(1) Journal de Mathematique, serie II^a, tomo 6 (1861).
(2) Comptes Rendus, Acad. des Sciences de Paris, tomi 58-59 (1864).

Se le C_n sono curve generali del proprio ordine, si ha

$$m = n(n-1),$$

donde seguirebbe

$$\mu = 4\mu(n-1)\{n(n-1)-1\}!$$

Questa conclusione è evidentemente assurda; ma le apparenti contraddizioni che qui s'incontrano, già nel caso più semplice delle serie di coniche, si spiegano tenendo conto delle *curve degeneri*, come ha indicato il CREMONA nelle sue note « Sulla teoria delle coniche » del 1863-64 ([1]). Così il precedente paradosso si spiega mediante le considerazioni seguenti.

Quando si valuta ν col metodo precedente, figurano come curve C_n, tangenti ad una retta, le eventuali curve degeneri contenenti una parte multipla, che si trovino contenute nella serie, e in particolare le C_n che eventualmente degenerino in guisa che si stacchi da esse una retta contata due volte. Ora l'esistenza di tali curve degeneri entro $\{C_n\}$ costituisce, per la serie delle curve d'ordine n, una condizione particolare; ma, se le C_n non sono suscettibili di degenerare come luogo, degenereranno certo come inviluppo, e dalle curve della serie dotate di un punto doppio (o di un punto doppio in più che la curva generica), si staccherà appunto un fascio di rette contato due volte: la serie di curve, generali dal punto di vista del piano punteggiato, diventa particolare, considerata come una serie di curve-inviluppo, entro il piano rigato.

Ciò posto dovremo valutare il carattere ν escludendo le curve della serie che sono impropriamente tangenti ad una retta.

Data una serie ∞^1 di curve C, d'ordine n e di classe m, dotate di singolarità elementari, supporremo che la serie $\{C\}$ contenga:

d curve, irriducibili come luogo, dotate di un punto doppio in più della C generica, le quali degenerano come inviluppo staccandosi il fascio col centro nel nuovo punto doppio contato due volte;

t curve, irriducibili come inviluppo, possedenti una tangente doppia in più della C generica, le quali degenerano

([1]) Cfr. Opere, tomo 2°, pag. 82-95.

come curve-luogo staccandosi la nominata retta contata due volte.

Supponiamo che i numeri t e d vengano *valutati contando le curve degeneri* della serie $\{C\}$, ciascuna *secondo la molteplicità* con cui essa figura fra le curve impropriamente tangenti ad una retta, cioè contando come s curve degeneri una C (degenere come luogo o inviluppo) a cui siano infinitamente vicine $s-1$ curve degeneri della medesima serie. Quest'ultima definizione è suscettibile di assumere un significato analitico preciso, che ci limiteremo a spiegare nel caso che le C non abbiano punti doppi: in questa ipotesi le C dotate di punto doppio si ottengono annullando il discriminante, ciò che darà una equazione di un certo grado d; una C dotata di punto doppio sarà da contare s volte se corrisponderà a una radice s-pla di codesta equazione.

I numeri t e d essendo valutati nel modo anzidetto *avremo le formule fondamentali:*

1)
$$\begin{cases} \nu = 2\mu(n-1) - t \\ \mu = 2\nu(m-1) - d \end{cases}$$

le quali permettono anche di esprimere μ, ν, in funzione di n, m, t, d.

Nella pratica queste relazioni riescono particolarmente utili trattandosi di serie di curve, definite in vario modo, di cui non si conoscono le caratteristiche μ, ν, giacchè le curve degeneri della serie si lasciano trovare assai facilmente. Ma la *difficoltà* del procedimento consiste nella *valutazione* degli ordini di *molteplicità* che spettano a queste curve degeneri.

Ad illustrare la varietà dei casi cui tali molteplicità possono effettivamente condurre, valgono gli esempi più semplici relativi ai sistemi di coniche.

Consideriamo i sistemi ∞^1 di coniche definiti dalle condizioni elementari di passare per punti dati e di toccare rette date; supporremo sempre che i punti e le rette in questione siano elementi generici del piano. Le condizioni anzidette conducono a considerare cinque sistemi che, tenuto conto del principio di dualità, si riducono a tre con coppie di caratteristiche essenzialmente diverse.

Noti teoremi di Geometria proiettiva [1] permettono di

[1] Cfr. Enriques. G. Proiettiva, §§ 65-71.

determinare le caratteristiche μ, ν, di questi sistemi; i numeri t, d restano definiti dalle formule:

$$\nu = 2\mu - t, \quad \mu = 2\nu - d.$$

I sistemi anzidetti saranno i seguenti:

1) $(ABCE)$ = sistema delle coniche passanti per quattro punti A, B, C, E:

$$\mu = 1, \quad \nu = 2, \quad t = 0, \quad d = 3;$$

2) $(ABCe)$ = sistema delle coniche passanti per tre punti A, B, C, e tangenti a una retta e:

$$\mu = 2, \quad \nu = 4, \quad t = 0, \quad d = 6;$$

3) $(ABce)$ = sistema delle coniche passanti per due punti A, B e tangenti a due rette c, e:

$$\mu = 4, \quad \nu = 4, \quad t = 4, \quad d = 4.$$

Il sistema 1) contiene effettivamente tre coniche dotate di un punto doppio (riducibili a coppie di rette), le quali dunque contano con la *molteplicità* 1.

Il sistema 2) contiene effettivamente tre coniche dotate di un punto doppio, riducibili *alle coppie* di rette che vengono costituite da un lato del triangolo ABC e dalla retta che congiunge il vertice opposto all'intersezione di quello con la retta e; codeste tre coniche figurano dunque nel sistema con la *molteplicità* 2.

Il sistema 3) contiene una conica dotata di punto doppio, cioè riducibile — come luogo — alla coppia delle rette proiettanti i punti A, B dal punto ce, ed una conica dotata di tangente doppia, cioè riducibile — come inviluppo — alla coppia dei punti segati sulla AB dalle c, e (la quale si riduce come luogo alla retta AB contata due volte); pertanto le due coniche anzidette contano ciascuna nella valutazione dei numeri t, d, secondo la *molteplicità* 4.

Nota. Vale la pena di vedere in qual modo la considerazione dei sistemi elementari di coniche 1), 2), 3) permetta già di trattare il problema generale che ha per oggetto la determinazione delle caratteristiche μ, ν spettanti al sistema delle coniche che toccano quattro curve date [1]. Sieno k_1, k_2, k_3, k_4 quattro curve piane degli ordini n_1, n_2, n_3, n_4 e delle classi m_1, m_2, m_3, m_4, collocate nel piano in posizione affatto generale. Le ∞^1 coniche che toccano le quattro curve, formano un sistema S le cui caratteristiche μ, ν si lasciano determinare in funzione delle coniche degeneri appartenenti al sistema, nel modo seguente.

Consideriamo anzitutto le coniche di S che hanno un punto doppio, cioè che sono riducibili — come luogo — a una coppia di rette; esse si ottengono in tre modi:

I) Coniche costituite da una tangente comune a due curve k, per esempio k_1 e k_2, e da una tangente comune alle altre due (k_2, k_3).

II) Coniche costituite da una tangente comune a due curve k, per esempio a k_1 e k_2, e da una tangente condotta ad un'altra curva k_3 da un punto comune alla retta nominata e alla curva k_4.

III) Coniche costituite dalle tangenti condotte a due curve, per esempio k_1 e k_2, da un punto comune alle altre due (k_3, k_4).

Le coniche I) contano nel numero d, relativo a S, con la molteplicità 1. Per dimostrarlo consideriamo una tangente comune alle curve k_1 e k_2, i cui punti di contatto vengano designati con A, B, e una tangente comune alle k_2 e k_3, coi punti di contatto C, E. Una conica del nostro sistema, tangente alle k_1, k_2, k_3, k_4, la quale sia vicina alla conica costituita dalle rette AB e CE, si può sostituire, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, con una conica del fascio ($ABCE$). Allora la molteplicità che appartiene alla nostra conica riducibile, per riguardo al sistema S, sarà data dalla molteplicità analoga relativa al fascio ($ABCE$); infatti la determinazione delle molteplicità anzidette, che — per ciascun sistema — si riconduce al calcolo delle molteplicità spettanti alle coincidenze di una corrispondenza in un fascio di raggi, si può fare applicando la regola di Zeuthen, la quale consente di sostituire un caso all'altro, giacchè ciò equivale a trascurare, nel computo degli ordini di infinitesimo, degli infinitesimi d'ordine superiore.

In modo analogo si prova che le coniche II) contano

(1) Zeuthen. Nouvelles Annales de Math., 1866.

nel numero d, relativo a S, con la molteplicità 2. Infatti si designino con A e B i punti di contatto di una tangente comune alle k_1 e k_2, con E un punto comune alla retta AB e alla curva k_4, con e la tangente nel detto punto alla k_4, e con C il punto di contatto di una tangente condotta per E alla k_3. Sostituiamo alla curva k_4, considerata nell' intorno del punto E, la sua tangente e. Allora le coniche di S vicine alla coppia di rette AB, CE, si possono ritenere — a meno di infinitesimi d'ordine superiore — come appartenenti al sistema $(ABCe)$, cioè passanti per i tre punti ABC e tangenti alla retta e; con ciò siamo ricondotti all'analisi del sistema elementare 2).

Finalmente le coniche III) contano nel numero d, relativo a S, con la molteplicità 4. Infatti si considerino due tangenti alle k_1, k_2, nei punti A, B, le quali si incontrino in un punto O comune alle k_3, k_4; sieno c, e le tangenti alle due curve in O. Allora le coniche di S vicine alla coppia di rette AO e BO, si possono ritenere — a meno di infinitesimi d'ordine superiore — come appartenenti al sistema $(ABce)$.

Ciò posto, è facile calcolare per il sistema S i valori di d; si avrà

$$d = 3m_1 m_2 m_3 m_4 + 2 \cdot 3 \Sigma m_1 m_2 m_3 n_4 + 4 \Sigma m_1 m_2 n_3 n_4 .$$

Si può calcolare t in base al principio di dualità, osservando che la condizione di contatto di una conica con una curva d'ordine n e classe m si traduce per dualità nel contatto con una curva d'ordine m e di classe n, tenuto conto che il contatto significa ugualmente che due dei punti comuni o due delle tangenti comuni vengono a coincidere. Si trova dunque

$$t = 3n_1 n_2 n_3 n_4 + 2 \cdot 3 \Sigma n_1 n_2 n_3 m_4 + 4 \Sigma n_1 n_2 m_3 m_4 .$$

Di qui seguono i valori delle caratteristiche μ, ν.

A questi stessi valori di μ, ν si perviene mediante un metodo induttivo che ha notevole valore di scoperta, e di cui omettiamo qui la giustificazione rigorosa. Proponiamoci il problema di trovare quante sono le coniche tangenti ad una curva k d'ordine n e classe m, e appartenenti ad un sistema ∞^1 di caratteristiche μ, ν.

Supporremo per semplicità che la curva k sia dotata soltanto di δ nodi e non di cuspidi; il caso escluso derivando come limite dal precedente. Ammettiamo che il numero da determinare dipenda soltanto da μ, ν, n, m; allora esso potrà calcolarsi facendo degenerare la curva k, considerata come luogo, in guisa che essa si riduca ad n rette; il relativo inviluppo si ridurrà ad $\frac{m}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \delta$ fasci di raggi contati due volte, fasci i cui centri figureranno tra i vertici dello n-latero formato con le n rette, venendo esclusi quei vertici che sono limiti di punti doppi di una k non degenere. Per la k degenere nel modo anzidetto, si trova subito che le coniche del sistema (μ, ν) ad essa tangenti sono

$$\nu n + \mu m \text{ (}^1\text{)};$$

infatti ci sono νn coniche del sistema propriamente tangenti alle n rette che costituiscono k, e $\mu \frac{m}{2}$ coniche passanti per gli $\frac{m}{2}$ centri dei fasci nominati, ciascuno dei quali entra due volte nell'inviluppo degenere k. Si conclude che le coniche di un sistema ∞^1 (μ, ν), tangenti ad una curva d'ordine n e classe m, sono appunto

$$\nu n + \mu m.$$

Ciò posto si possono determinare le caratteristiche μ, ν del sistema ∞^1 costituito dalle coniche tangenti ad una curva k_1 d'ordine n_1 e classe m_1 e passanti per tre punti A, B, C; μ e ν designano i numeri di queste coniche cui s'imponga di passare per un quarto punto, E, o di toccare una retta, e, cioè i numeri delle coniche tangenti a k_1 che appartengono ai sistemi $(ABCE)$, $(ABCe)$:

$$\mu = 2n_1 + m_1, \quad \nu = 4n_1 + 2m_1.$$

Quindi il numero delle coniche passanti per A, B, C e tangenti alle curve k_1, k_2 (di ordini n_1, n_2 e classi m_1, m_2) sarà

$$(4n_1 + 2m_1)n_2 + (2n_1 + m_1)m_2.$$

In modo analogo, dopo avere determinato le caratteri-

(1) Proposizione enunciata da CHASLES nella citata nota del 1864, dimostrata da ZEUTHEN (Math. Annalen Bd 3, 1871).

stiche della serie di coniche che passano per A, B e sono tangenti ad una retta c e alla curva k_1, si calcolerà il numero delle coniche passanti per A e B, che toccano la retta c e le curve k_1, k_2. Si avranno così le caratteristiche del sistema di coniche tangenti a k_1, k_2 e passanti per due punti A, B.

È chiaro ormai come si possa procedere a calcolare le caratteristiche del sistema di coniche passanti per un punto A e tangenti a tre curve k_1, k_2, k_3, e quindi le caratteristiche del sistema di coniche tangenti a quattro curve k_1, k_2, k_3, k_4; infine se ne dedurrà anche il numero delle coniche tangenti a cinque curve k_1, k_2, k_3, k_4, k_5.

Senza sviluppare i calcoli relativi (1), il metodo che ci proponevamo di esporre riesce così sufficientemente chiarito.

Notizia storica. I problemi sulle serie semplicemente infinite di coniche, che abbiamo citati ad esempio, hanno un interesse dal punto di vista storico, in quanto ad essi si collega la cosidetta *teoria delle caratteristiche*, che segna gl'inizi della *Geometria numerativa.* I primi casi a cui conduce tale ordine di questioni (determinazione del numero delle coniche soddisfacenti a cinque condizioni semplici) furono considerati da STEINER in numerose memorie che vanno dal 1846 al 1858, e un tentativo di giustificazione di tali resultati per mezzo dell'Algebra fu fatto dal BISCHOFF (2) nel 1859. Tuttavia codesti resultati cadono generalmente nell'errore di non tenere nel debito conto le soluzioni improprie. Così la formula di BISCHOFF, a cui il DE JONQUIÈRES perviene nuovamente nella sua citata memoria del 1861, darebbe $2^5 = 32$ coniche tangenti a cinque rette date, anzichè *una.* Il DE JONQIÈRES (3) cerca di spiegare questa *apparente* contraddizione, ma non ne vede la vera ragione che è nelle coniche degeneri, come ha osservato il CREMONA nella sua Nota citata del 1863 e poi lo CHASLES nel 1864.

Le ricerche concernenti il numero delle coniche (o delle curve) che soddisfano a date condizioni, occuparono a lungo il DE JONQUIÈRES che, oltre alla memoria citata ove si intro-

(1) Cfr. Il « Trattato sulle curve piane » di G. SALMON, cap. IX, n. 411 e seg.

(2) Journal für Math. Bd 56.

(3) Loco citato, pag. 121.

duce l'indice di una serie di curve, vi dedicò altri numerosi lavori, inseriti nel Journal de Mathématiques e nel Journal für Mathematik, fra il 1859 e il 1865 [1]. Qui in particolare si adopera il fecondo metodo di scoperta basato sul *principio di continuità* di PONCELET, cioè sulla *conservazione del numero* rispetto a possibili degenerazioni degli enti dati; così, per es., ad una curva d'ordine n si sostituisce un gruppo di n rette (o una curva razionale): il numero che si cerca in relazione alla curva non cambia (almeno se esso non diventa infinito).

Questo metodo ha un carattere induttivo ed euristico, finchè non si giustifichino rigorosamente, per es. con un esame analitico, i presupposti su cui si fonda. Nell'epoca cui si riferisce il nostro discorso (ed anche in ricerche più recenti) il detto metodo viene applicato assumendo dall'intuizione qualche ipotesi relativa alla formula capace di esprimere il numero cercato.

Nelle determinazioni di numeri relativi a serie ∞^1 di coniche il DE JONQUIÈRES faceva intervenire come caratteristica della serie il suo indice μ. Qesta ipotesi si potrebbe giustificare facendo degenerare la serie in μ fasci; ma tuttavia fra le soluzioni del problema si trovano, come già sopra abbiamo notato, anche delle coniche degeneri. Volendo escludere dal computo queste soluzioni improprie, CHASLES ha introdotto, come abbiamo detto, la caratteristica duale; gli sviluppi di CHASLES sono pubblicati nei Comptes Rendus della Académie des Sciences di Parigi, dal 1864 al 1871; gli stessi volumi contengono la polemica per la priorità fra il DE JONQUIÈRES e lo CHASLES.

Numerosi problemi numerativi concernenti le serie di coniche, a cui porgono risposta ricerche di CREMONA, CAYLEY, ZEUTHEN e SCHUBERT, offrono applicazione della formula di CHASLES che esprime i numeri cercati come combinazione lineare delle due caratteristiche: $\alpha\mu + \beta\nu$. Ora il presupposto di questa formula si basa sopra una uguale considerazione della rappresentazione delle coniche mediante coordinate puntuali e tangenziali. Per questo motivo la detta formula permette di escludere le soluzioni improprie che provengono da

[1] Altre importanti ricerche numerative del DE JONQUIÈRES sono contenute in altri giornali e in memorie degli anni posteriori (1866, 1869, 1877).

una delle due degenerazioni possibili di una conica, come luogo o come inviluppo. Si è ammesso perciò che codesta formula abbia un valore affatto generale, e CLEBSCH (1873) (1) e più tardi STUDY, hanno dimostrato analiticamente che essa è applicabile a tutte le condizioni che possono rappresentarsi con l'uso simultaneo di coordinate di punti e di rette. Giustamente avverte lo ZEUTHEN che la portata di siffatte dimostrazioni è esattamente la stessa che spetta alle dimostrazioni *geometriche*, le quali assumono come punto di partenza la detta possibilità di escludere insieme le due specie di coniche eccezionali, di cui l'una non può essere rappresentata completamente se non mediante coordinate tangenziali, e l'altra soltanto mediante coordinate puntuali.

Ma la formula $\alpha\mu + \beta\nu$ si trova in difetto rispetto a possibili soluzioni improprie del problema ove s'incontrino coniche che degenerano contemporaneamente come luogo e come inviluppo: effettivamente la forma limite costituita da una retta contata due volte e da un punto di questa (centro di un fascio) contato due volte, si può riguardare come una conica di cui svanisce contemporaneamente l'equazione puntuale e tengenziale (ogni retta del piano la interseca in due punti infinitamente vicini e per ogni punto del piano passano due tangenti ad essa infinitamente vicine). Di fronte a questo caso, che è stato segnalato da HALPHEN (2) nel 1876, la formula $\alpha\mu + \beta\nu$ si trova in difetto allo stesso modo che la formula $\alpha\mu$ di DE JONQUIÈRES rispetto alle condizioni di contatto. Non si può supplire a questo inconveniente aggiungendo un numero finito di termini alla formula $\alpha\mu + \beta\nu$, perchè il numero delle forme limiti di HALPHEN è infinito; occorre dunque risolvere ogni problema particolare di tale natura, senza il soccorso di un'espressione generale (3).

(1) Math. Annalen. Bd 6.

(2) Comptes Rendus, t. 83. Si confrontino altre memorie di HALPHEN degli anni 1878 e 1879, nonchè lavori posteriori di DEL PEZZO, BURALI-FORTI e ZEUTHEN, dei quali trovasi esatto riferimento bibliografico nel Cap. IX dell'opera di LORIA « Il passato e il presente delle principali teorie geometriche ».

(3) Confronta le osservazioni di ZEUTHEN nella « Introduction à un traité didactique des méthodes énumératives de la géométrie ». Atti del Congresso matematico di Stoccolma 1909, pag. 32.

26. La quartica come inviluppo di coniche quadritangenti. — Consideriamo una serie ∞^1 di coniche $\{C\}$ d'indice $\mu = 2$, la quale sia *irriducibile*, cioè non si lasci separare in due serie d'indice 1 (fasci) [1]; e supponiamo dapprima, per semplicità, che non esista nessun punto (*base*) per cui passino tutte le coniche della serie. La serie dà luogo ad una *curva inviluppo* k, la quale si può definire come « luogo dei punti del piano per cui passano due C coincidenti in una sola ».

La curva inviluppo k è anche il luogo delle intersezioni delle coniche C con le coniche infinitamente vicine, appartenenti alla medesima serie. Infatti si consideri un punto generico A della curva k, per esso passa *una* conica $\overline{C}$ della serie $\{C\}$; per un punto P mobile sulla $\overline{C}$ passa in generale una conica della serie diversa dalla $\overline{C}$, ma quando P si avvicina ad A codesta conica si avvicina a $\overline{C}$ e così A si può riguardare come intersezione di $\overline{C}$ con una curva C ad essa infinitamente vicina; ora mentre P si muove avvicinandosi ad A, gli altri tre punti P_1, P_2, P_3 in cui la conica C, passante per P, sega la $\overline{C}$ tenderanno a tre punti A_1, A_2, A_3, per i quali — come per A — passano due C coincidenti in $\overline{C}$, sicchè anche A_1, A_2, A_3 apparterranno alla curva inviluppo k.

È poi chiaro che, presa nella serie $\{C\}$ una qualsiasi conica $\overline{C}$, essa può sempre ritenersi come limite di una C variabile nella serie, e però contiene quattro punti della curva k: A, A_1, A_2, A_3, che sono limiti delle sue intersezioni con la C anzidetta. Soltanto per $\overline{C}$ particolari si potrebbe dubitare che una conica variabile entro la $\{C\}$ possa avvicinarsi alla $\overline{C}$ in due modi essenzialmente distinti, in guisa che sopra $\overline{C}$ si abbia una seconda quaterna di punti analoga alla $AA_1A_2A_3$; ma, come vedremo poi, questo dubbio si esclude (essendo $\mu = 2$).

Dimostriamo ora che i quattro punti A, A_1, A_2, A_3, appartenenti alla $\overline{C}$, sono punti di contatto di essa con la curva k, sicchè: *Le coniche C sono quadritangenti alla curva inviluppo k.*

Ciò risulta da una nota analisi infinitesimale che rende rigorosa la considerazione intuitiva seguente: si considerino tre coniche successive della serie: C, C_1, C_2, abbastanza vicine fra loro, e sia A uno dei punti comuni a C e C_1, A' quello fra i quattro punti comuni a C_1 e C_2 che trovasi vicino ad A; allora i punti A, A' vanno a cadere sulla curva inviluppo k,

(1) Cfr. § 14.

e la retta AA' tende a confondersi ad un tempo con la tangente in A a C_1 (e quindi a C) e con la tangente alla curva inviluppo k.

Valutiamo l'ordine della curva k: a tale scopo si osservi che la k è toccata in quattro punti da una conica C, e che, essendo 2 l'indice della serie, una C non può intersecare la k fuori dei punti (di contatto) che essa ha comuni con la conica infinitamente vicina; si deduce che l'ordine di k vale $n \geq 4$, ed anzi si trova $n=4$ escludendo che la k possa avere con una C generica contatti d'ordine superiore e che alla C siano infinitamente vicine due C della serie. D'altra parte che non possa essere $n>4$, risulta direttamente dal fatto che le intersezioni di k con una retta sono punti uniti di una corrispondenza [2, 2] che si costruisce sopra la retta nel modo che segue: preso un punto P, per esso passano due coniche C che segano la retta in due punti Q, Q'; variando P i punti Q, Q' si corrispondono nella nominata corrispondenza [2, 2], che ha 4 coincidenze. Dunque *la curva k, inviluppo di una serie di coniche $\{C\}$ d'indice 2, è d'ordine 4.*

Si noti che la corrispondenza [2, 2] costruita di sopra fornirebbe addirittura il risultato purchè fosse escluso che sopra una retta generica esistano coppie di punti P e Q appartenenti a due C distinte della serie; infatti se esistessero due punti P e Q siffatti, questi figurerebbero pure come uniti per la corrispondenza anzidetta, sicchè l'ordine di k ne verrebbe diminuito. Per contro, basandosi sul risultato che l'ordine di k vale $n=4$, si può ora affermare che sopra una retta generica non si trova alcuna coppia di punti appartenente a due coniche C. Questa conclusione può sembrare a prima vista contraddittoria ove si osservi che le C si incontrano a due a due in ∞^2 quaterne di punti, sicchè sono pure ∞^2 le coppie di punti appartenenti a due C. Ma in realtà le rette congiungenti tali coppie non sono, come parrebbe, ∞^2, bensì soltanto ∞^1: così ogni retta su cui si trovano due punti P, Q comuni a due coniche, contiene infinite coppie analoghe e sopra di essa l'anzidetta corrispondenza [2, 2] si riduce all'identità (da contarsi due volte se le ∞^2 coppie suddette formano un'involuzione non degenere); ciò si vede direttamente pel fatto che vi sono almeno $4+2$ punti uniti.

Negli sviluppi che precedono abbiamo escluso per semplicità il caso in cui la serie irriducibile $\{C\}$ possegga un punto base O, comune a tutte le C. Ma le conclusioni ottenute si estendono anche a questo caso: la serie $\}C\{$ darà luogo ora ad una curva inviluppo k generata dalle terne di punti variabili che sono intersezioni di due C infinitamente vicine; la k sarà ancora del quart'ordine e sarà toccata dalle C nei punti delle terne anzidette. Una semplice considerazione di limite mostra quindi che il punto O deve essere doppio per la quartica. Ciò si può riconoscere in modo diretto come segue: si mandi per O una retta generica o e si cerchi di costruire sopra o la corrispondenza QQ', innanzi considerata, che fornisce le intersezioni della retta con k; questa corrispondenza diventa il prodotto di due corrispondenze degeneri, ma (tolto il fattore identità) si riduce alla corrispondenza proiettiva $[1, 1]$ che intercede fra le intersezioni ulteriori della o con le due coniche per O tangenti ad una retta p (cioè determinate da un punto infinitamente vicino ad O); si deduce che la retta o incontra la k in due punti fuori di O, cioè: *un punto base della serie di coniche* $\}C\{$ *è doppio per la quartica inviluppo.* c. d. d.

Notiamo ancora che la curva inviluppo k può spezzarsi; ciò accade, per esempio, se le coniche C sono tangenti ad una retta, la quale si stacca appunto dall' inviluppo.

Un caso di riducibilità della curva inviluppo k è anche quello in cui la serie $\}C\{$ possegga due punti base A, B, quando accada che la retta AB faccia parte di *una* conica C riducibile; la retta AB appartiene allora all' inviluppo essendo luogo di punti per cui passa una sola conica C, sebbene essa non sia più, propriamente, luogo di intersezioni di C infinitamente vicine. L'esempio più semplice, a questo proposito, è offerto dalla serie delle coniche che passano per i vertici di un triangolo e toccano una retta (non passante per alcuno di essi): l' inviluppo k degenera in questa retta e nei tre lati del triangolo.

Le cose dette si possono convalidare e precisare mediante la *rappresentazione analitica* di una serie di coniche di indice 2 e del suo inviluppo.

Siano

$$\varphi_1(x_1 x_2 x_3) = 0, \quad \varphi_2(x_1 x_2 x_3) = 0, \quad \varphi_3(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

tre coniche qualunque di una serie $\}\varphi\{$ irriducibile d' indice 2 che — per semplicità — supponiamo priva di punti base;

la φ_3 non passa per alcun punto comune a φ_1 φ_2 e perciò le tre coniche sono linearmente indipendenti.

Osserviamo che: *la serie d'indice 2 appartiene alla rete*

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0.$$

Infatti si considerino le quaterne di punti segate sopra la conica $\varphi_1 = 0$ dalle coniche del fascio

$$\lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0,$$

queste quaterne formano una g^1_4 sopra la conica, ed ogni conica passante per una di esse (essendo combinazione lineare di $\varphi_1 = 0$ e di $\lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$) appartiene alla rete. Ora anche la serie d'indice 2, che contiene φ_1, sega su questa conica una g^1_4, come già abbiamo avuto luogo di osservare. Ma poichè questa seconda g^1_4 contiene le due quaterne segate da $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, così essa coincide con la prima. Si deduce che una qualsiasi conica della serie $\}\varphi\{$ sega φ_1 in una quaterna della suddetta g^1_4, e perciò appartiene alla rete. c. d. d.

Osservazione. La proprietà che una serie irriducibile di coniche (o curve) d'indice 2 appartiene sempre alla rete determinata da tre delle sue curve, diventa chiara dal punto di vista della geometria astratta, ove si ritenga la serie come una « curva » dello spazio S_5 i cui « punti » sono le coniche del piano e le cui « rette » e « piani » sono i fasci e le reti di coniche. Infatti allora l'indice della serie diventa l'ordine della curva, ossia il numero dei punti che questa ha comuni con un iperpiano corrispondente al sistema ∞^4 delle coniche per un punto; ma una curva irriducibile del second'ordine, che sia data nello spazio ordinario o in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, appartiene sempre al piano che ne congiunge tre punti.

La considerazione della rete $|C|$ che contiene la serie di indice 2, $\}C\{$, illumina la proprietà, riconosciuta innanzi, relativa alle rette congiungenti coppie di punti comuni alle C. Una coppia siffatta offre *una* condizione anzichè *due* alle coniche della rete $|C|$ che debbono contenerla, e quindi può designarsi come *coppia neutra* della rete medesima. Ora se una retta r contiene una coppia neutra PQ della rete $|C|$, fra le ∞^1 coniche della rete per PQ ve ne è una che contiene un terzo punto dato ad arbitrio su r, la quale risulta adunque spezzata, staccandosene la retta r. Viceversa se r fa parte di una conica spezzata di $|C|$, è chiaro che le coniche della rete segano su essa ∞^1 coppie neutre. Così *le rette r, contenenti coppie di punti comuni a due C, sono le ∞^1 rette facenti parte di coniche spezzate della rete $|C|$*. L'inviluppo delle r anzidette costituisce una *curva di terza classe* (scoperta da Cayley come covariante di una cubica. Cfr. L. 3°); infatti per un punto generico, P, del piano passano due C della serie $\{C\}$, determinanti un fascio di coniche entro la rete $|C|$, e le rette che uniscono P agli altri tre punti base del fascio nominato, sono le rette r passanti per P.

Riprendiamo la rete di coniche

$$1)\qquad \lambda_1\varphi_1(x_1x_2x_3)+\lambda_2\varphi_2(x_1x_2x_3)+\lambda_3\varphi_3(x_1x_2x_3)=0,$$

e scriviamo l'equazione di una serie $\{\varphi\}$ di indice 2 contenuta in essa, la quale potrà contenere o no le curve φ_1, φ_2, φ_3. Si avrà una equazione nelle $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, il cui grado vien determinato dalla condizione che si trovino *due* soluzioni aggiungendo l'equazione lineare nelle λ che esprime il passaggio di una φ per un punto; l'equazione di $\{\varphi\}$ sarà dunque di grado 2:

$$F(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=0.$$

La medesima equazione si può interpretare come equazione di un inviluppo di seconda classe ove s'interpretino λ_1, λ_2, λ_3 come coordinate delle rette

$$\lambda_1y_1+\lambda y_2+\lambda_3y_3=0.$$

Astrattamente parlando il piano rigato formato dalle rette $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3=0$ è proiettivo alla rete delle coniche $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=0$ (concepita come un piano), e questa proiettività porta una corrispondenza fra i piani punteggiati (y) e (x), la quale viene rappresentata dalla sostituzione

$$2)\qquad y_1=\varphi_1(x_1x_2x_3),\quad y_2=\varphi_2(x_1x_2x_3),\quad y_3=\varphi_3(x_1x_2x_3).$$

Nel piano (y) l'inviluppo di seconda classe $F(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)=0$, sarà una conica, la cui equazione puntuale verrà data da un' equazione pure di secondo grado

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0 .$$

La conica $f = 0$ viene trasformata dalla sostituzione 2) in una curva del quart' ordine inviluppo della serie $\}\varphi\{$.

Infatti, si consideri la sostituzione 2) che è una sostituzione affatto generale di secondo grado, essendo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ tre forme quadratiche indipendenti qualsiasi. Mentre ad un punto (x) corrisponde per la 2) un punto (y), viceversa ad un punto (y) corrispondono 4 punti (x), cioè i punti base del fascio delle coniche omologhe alle rette per (y); in particolare a un punto (y) della conica $f(y_1 y_2 y_3) = 0$, intersezione di due rette infinitamente vicine della serie $F = 0$ (cioè punto di contatto di una retta di questa serie), corrisponderanno 4 punti (x), intersezioni di due coniche infinitamente vicine della serie $\}\varphi\{$, cioè 4 punti di contatto di una φ con la curva inviluppo. L' ordine di questa curva verrà dato dal fatto che nel piano (y) la conica f è segata da una retta in due punti, e perciò la curva omologa nel piano (x) viene segata da una conica in 8 punti, sicchè il suo ordine è 4. Del resto ciò risulta dall' *equazione* di codesta *curva inviluppo* che si ottiene operando la sostituzione 2) nella $f(y_1 y_2 y_3) = 0$, e perciò è

$$f(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) = 0 .$$

L' equazione puntuale della conica

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0 ,$$

dipende dalla sua equazione tangenziale

$$F(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0 ,$$

che è un' equazione quadratica arbitraria presa a rappresentare la serie delle coniche $\}\varphi\{$. Pertanto si possono dare ad F, f le forme particolari canoniche a cui notoriamente si lascia ridurre l' equazione d' una conica come inviluppo e come luogo.

Per esempio, si riferisca la conica f ad un triangolo fondamentale costituito da due tangenti $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ e dalla retta $y_2 = 0$ che ne unisce i punti di contatto, per modo che essa appartenga al fascio determinato dalle coppie di rette

$y_1 y_3 = 0$, $y_2^2 = 0$; allora l'equazione puntuale $f = 0$ si può ridurre alla forma (parabolica)

$$f = p y_1 y_3 - y_2^2 = 0,$$

o — disponendo del punto unità —

$$2 y_1 y_3 - y_2^2 = 0;$$

la relativa equazione tangenziale sarà di forma affatto simile

$$F = 2\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 = 0.$$

Infatti le rette di questo inviluppo sono rappresentate parametricamente ponendo

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda^2}{2},$$

e la conica inviluppata dalle rette

$$y_1 + \lambda y_2 + \frac{\lambda^2}{2} y_3 = 0,$$

si ottiene eliminando λ fra questa equazione e la sua derivata

$$y_2 + \lambda y_3 = 0,$$

ciò che dà appunto

$$2 y_1 y_3 - y_2^2 = 0.$$

Si deduce che *la quartica inviluppo* della serie di coniche

$$\varphi(x_1 x_2 x_3 \lambda) = \varphi_1 + \lambda \varphi_2 + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_3 = 0,$$

(contenente φ_1, φ_3 e non φ_2) *ha per equazione*

$$2 \varphi_1 \varphi_3 - \varphi_2^2 = 0;$$

alla quale equazione si perviene anche — nello stesso modo — direttamente, eliminando λ fra le

$$\varphi(x_1 x_2 x_3 \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \varphi_2 + \lambda \varphi_3 = 0.$$

L'equazione della quartica inviluppo della serie $\}\varphi\{$, mette subito in evidenza le proprietà che sopra abbiamo riconosciuto geometricamente; p. es. che un punto base della serie $\}\varphi\{$, e quindi della rete

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$$

in cui essa è contenuta, è doppio per la suddetta quartica. Inoltre la stessa equazione mostra che ove la serie $\}\varphi\{$ contenga una conica

$$\varphi_1 = x_1^2 = 0$$

riducibile ad una retta contata due volte, la quartica inviluppo contiene due punti doppi:

$$x_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Ora nasce una questione fondamentale: sia data una quartica affatto generale

$$f_4(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

è possibile considerare tale curva come inviluppo di una serie d' indice 2 di coniche quadritangenti?

Un conto di costanti induce a rispondere di sì (cfr. la *Nota* più avanti), per modo che: *la quartica generale può sempre ritenersi* (in un numero finito di modi) *come inviluppo d'una serie* ∞^1 *d' indice 2 di coniche quadritangenti.*

Questo teorema fondamentale può essere dimostrato e precisato mediante la generazione delle quartiche con fasci proiettivi di coniche (§ 17).

Consideriamo una quartica piana k irriducibile e senza punti doppi. Supponiamo che esista una conica C tangente ad essa nei quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4; mandiamo per questi punti due coniche arbitrarie e designamo con A_1', A_2', A_3' A_4', e B_1, B_2, B_3, B_4, le ulteriori intersezioni di esse con k. Secondo il teorema del § 17 resta determinata una proiettività fra i due fasci di coniche $(A_1'A_2'A_3'A_4')$, $(B_1B_2B_3B_4)$, dove le quaterne di punti comuni alle coniche omologhe descrivono la k. Ora facendo variare la prima conica per $A_1A_2A_3A_4$, si può supporre che la quaterna di punti $A_1'A_2'A_3'A_4'$ sia venuta a coincidere con la quaterna $A_1A_2A_3A_4$. Avremo quindi come fasci generatori della quartica k i due fasci $(A_1A_2A_3A_4)$, $(B_1B_2B_3B_4)$ che hanno una conica a comune. A questa conica comune, considerata come appartenente al secondo fascio, corrisponde nel primo la conica, da cui siamo partiti, che tocca k in A_1, A_2, A_3, A_4; alla medesima conica comune, considerata come appartenente al primo fascio, corrisponde nel secondo una conica che tocca k nei punti B_1, B_2, B_3, B_4.

Dunque l'ipotesi che esista una conica quadritangente a k nei punti A_1, A_2, A_3, A_4, porta l'esistenza di ∞^1 coniche quadritangenti a k, i cui punti di contatto sono le intersezioni di k con le coniche del fascio $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. Questa deduzione non cessa di valere se si assume come conica quadritangente una conica spezzata in due tangenti doppie. E poichè questa scelta può sempre farsi in un numero finito di modi, giacchè k possiede 28 tangenti doppie, si ottiene così un numero finito di serie di coniche quadritangenti, di cui k è la curva inviluppo.

È facile vedere che le serie ∞^1 di coniche quadritangenti da noi costruite, di cui k è inviluppo, sono effettivamente serie d'indice 2; basta osservare che per un punto di k (p. es. B_1) passa una sola conica della serie (tangente a k in B_1, B_2, B_3, B_4) che equivale a due coincidenti; non può sorgere il dubbio che l'indice della serie sia 1, cioè che la serie sia un fascio, perchè i punti d'intersezione di due coniche infinitamente vicine sono variabili sulla k.

Dopo ciò si possono contare le serie di coniche quadritangenti a k, come segue: esistono $\frac{28 \cdot 27}{2}$ coppie di rette bitangenti a k, ognuna delle quali dà luogo ad una serie ∞^1 di coniche quadritangenti che inviluppano k; ma — come risulta dalle due formule fondamentali del § 25 o dall'annullare il discriminante della conica $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 + \frac{\lambda^2}{2}$ — ogni serie ∞^1 di coniche quadritangenti, essendo d'indice 2 e non contenendo coniche riducibili ad una retta contata due volte (poichè ciò porterebbe due punti doppi per k), contiene 6 coniche con un punto doppio, costituite da 6 coppie di bitangenti a k; perciò il numero delle serie distinte di coniche quadritangenti a k, vale

$$\frac{28 \cdot 27}{2 \cdot 6} = 63.$$

Riassumendo: *Una quartica, senza punti doppi, possiede 63 sistemi di coniche quadritangenti, di cui risulta l'inviluppo.*

Nota. La considerazione dei sistemi di curve pluritangenti ad una curva data è stata introdotta nel 1853 da Hesse (¹) e da lui applicata alle cubiche e alle quartiche. La dimostrazione del teorema che la quartica generale è inviluppo di una serie d'indice 2 di coniche, si compie rigorosamente nell'ordine di idee di Plücker, mercè le considerazioni che seguono:

Le reti di coniche sono ∞^9 (come i piani di S_5), e le serie di indice 2 contenute entro una rete sono ∞^5 come le coniche di un piano; quindi la totalità dei sistemi d'indice 2 di coniche è ∞^{14}, cioè ha la stessa dimensione del sistema delle quartiche. Si deduce che la quartica generale è inviluppo di un numero finito di serie d'indice 2 di coniche (L. I°, § 26) notando che una quartica così generata non potrebbe ammettere ∞^2 coniche quadritangenti, giacchè si avrebbero ∞^1 coniche inviluppanti per un punto generico della quartica e perciò questo sarebbe doppio.

Le conclusioni ottenute in ordine alla definizione di una quartica come inviluppo di coniche, si estendono con poche modificazioni al caso delle quartiche dotate di punti doppi, e anche delle quartiche riducibili.

Per esempio se k possiede un punto doppio O e quindi (§ 21) 16 tangenti doppie, si ottiene una serie ∞^1 di coniche inviluppanti k, non solo considerando una coppia di tangenti doppie, ma anche prendendo una delle 6 tangenti a k per O insieme ad una tangente doppia: si ha in questo secondo modo una serie di coniche con un punto base in O, tritangenti a k fuori di O.

Una quartica irriducibile k, con due punti doppi, può definirsi similmente come inviluppo di una serie ∞^1 di coniche con due punti base partendo da una coppia di rette costituita dalla congiungente i due punti doppi e da una bitangente, oppure da due tangenti per i punti doppi; per la k con tre punti doppi si ha semplicemente che le coniche tangenti ad essa per i tre punti doppi formano una serie d'indice 2 che inviluppa la k.

Una quartica k composta di una retta e di una cubica, segantisi in tre punti A, B, C, si costruirà pure come inviluppo di una serie di coniche d'indice 2, passanti per due fra i tre

(¹) Journal für Math., Bd. 49.

punti A, B, C e bitangenti alla cubica, partendo da una coppia di rette costituita da due tangenti alla cubica uscenti da due dei punti A, B, C. Ma non occorre fermarci di più su questo soggetto.

Ritornando alla quartica generale k, si osservi in fine che le quaterne dei punti di contatto delle coniche quadritangenti di un medesimo sistema formano una *involuzione* g_4^1 sopra la quartica, la quale si ottiene segando k colle coniche del fascio che ha come punti bâse i punti di una quaterna qualsiasi della g_4^1. Tutte le coniche (passanti per una quaterna della g_4^1, cioè) secanti k in due quaterne della g_4^1, formano la rete a cui appartiene il sistema d'indice 2 delle coniche inviluppanti. Queste coniche sono definite — entro la rete — per mezzo della condizione che le due quaterne della g_4^1 da esse segate, coincidano in una sola quaterna.

27. **La configurazione delle tangenti doppie di una quartica.** — Il teorema che permette di riguardare una quartica k come inviluppo di una serie d'indice 2 di coniche (quadritangenti), conduce a trovare la proprietà fondamentale della configurazione costituita dai 56 punti di contatto delle 28 bitangenti ad una quartica generale.

Consideriamo infatti una serie di coniche $\}C\{$ quadritangenti alla quartica k; abbiamo veduto che le quaterne di punti di contatto di due coniche della serie (p. es. $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$) stanno sopra una medesima conica; ma alla $\}C\{$ appartengono 6 coppie di rette bitangenti; dunque gli 8 punti di contatto di due coppie di bitangenti siffatte stanno sopra una conica.

Le sei coppie di rette bitangenti che appartengono a un medesimo sistema di coniche inviluppanti, si dicono costituire un *gruppo di* STEINER. La relazione di due coppie di bitangenti ab, cd, che appartengono ad un tal gruppo, si traduce nell'altra che gli otto punti di contatto delle a, b, c, d stiano sopra una conica, quindi anche le coppie ac, bd (e così le ad, bc) apparterranno a un medesimo gruppo di Steiner.

Ora possiamo valutare il numero delle coniche che contengono gli otto punti di contatto di quattro bitangenti; ogni coppia di bitangenti ab dà luogo a 5 coniche che contengono i punti di contatto delle a, b e delle 5 altre coppie di bitangenti che stanno nel medesimo gruppo di Steiner; d'altra parte ognuna delle coniche suddette nasce da 6 coppie di bitangenti a k, i cui punti di contatto formano due fra le quattro coppie che si trovano sulla conica; si conclude che il numero delle coniche da determinare è

$$\frac{28\cdot 27}{2}\cdot\frac{5}{6}=315.$$

Riassumendo si ha il

Teorema. *I 56 punti di contatto delle 28 bitangenti ad una quartica generale appartengono 8 a 8 a 315 coniche, per modo che i 4 punti di contatto di due bitangenti sono comuni a 5 coniche siffatte.*

In relazione alle tangenti doppie di una quartica, la forma generale del quarto grado, $f_4(x_1x_2x_3)$, può essere ridotta ad alcuni tipi canonici.

Consideriamo due coppie di bitangenti ad $f_4=0$, che appartengano ad un medesimo gruppo di Steiner; sieno esse $a_xb_x=0$, $c_xd_x=0$, o, usando la notazione abbreviata, $ab=0$, $cd=0$. Codeste coppie di rette appartengono ad una serie di coniche quadritangenti ad f_4, la cui equazione — introducendo nella formula del paragrafo precedente opportuni coefficienti numerici — si può scrivere

$$\varphi_1+2\lambda\varphi_2+\lambda^2\varphi_3=0,$$

con

$$\varphi_1=cd,\quad \varphi_3=ab.$$

Avremo

1) $$f_4=abcd-\varphi_2^{\,2},$$

donde risulta confermato analiticamente che anche le coppie di bitangenti ac, bd (e così le ad, bc) appartengono ad un gruppo di Steiner.

Consideriamo ora tre coppie di bitangenti, contenute in un medesimo gruppo di Steiner:

$$ab=0,\quad cd=0,\quad eg=0;$$

avremo, per un certo valore di λ,

$$eg=cd+2\lambda\varphi_2+\lambda^2 ab$$

donde

$$\varphi_2 = \frac{eg - cd - \lambda^2 ab}{2\lambda},$$

e, sostituendo nell'espressione 1):

$$4\lambda^2 f_4 = 4\lambda^2 abcd - (e^2 g^2 + c^2 d^2 + \lambda^4 a^2 b^2 - 2cdeg - 2\lambda^2 abeg + 2\lambda^2 abcd),$$

ossia l'equazione $f_4 = 0$ assume la forma

$$4cdeg - (cd + eg - \lambda^2 ab)^2 = 0.$$

Questa equazione si può anche scrivere

$$2\sqrt{cd}\,\sqrt{eg} = cd + eg - \lambda^2 ab$$

o

$$\lambda^2 ab = cd + eg - 2\sqrt{cd}\,\sqrt{eg},$$

$$\lambda\sqrt{ab} = \sqrt{cd} - \sqrt{eg}.$$

Tenendo conto che a, b, c, d, e, g sono definiti a meno di un fattore numerico (indipendente dalle $x_1 x_2 x_3$), l'equazione $f_4(x) = 0$ si riduce al tipo canonico

2) $$l\sqrt{ab} + m\sqrt{cd} + n\sqrt{eg} = 0,$$

dove l, m, n designano fattori numerici, ed a, b, c, d, e, g forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano tre coppie di bitangenti di un gruppo di Steiner.

Nota. Le prime ricerche sulla configurazione delle tangenti doppie di una quartica sono dovute a PLÜCKER (¹) (1839). Questi osservò che l'equazione

$$f_4 = abcd - \varphi_2^2$$

rappresenta una quartica che ha come tangenti doppie le a, b, c, d, i cui punti di contatto si trovano sopra la conica φ_2; ma l'equazione predetta spetta alla più generale curva del fascio determinato da quattro rette e una conica contata due volte, e perciò contiene 14 costanti essenziali; da questa osservazione PLÜCKER deduce che essa è una forma canonica

(¹) Theorie der Algebraischen Curven, pag. 228.

dell'equazione della quartica generale. Infatti una quartica possiede soltanto un numero finito di tangenti doppie sicchè la riduzione di f_4 all'anzidetta forma canonica è possibile in un numero finito di modi; perciò il principio del computo delle costanti non dà luogo qui al caso di eccezione. (Cfr. L. 1°, § 26).

Plücker poteva dunque con fondamento concludere che la quartica generale possiede gruppi di quattro tangenti doppie i cui punti di contatto stanno sopra una conica. Ma egli credette di potere affermare di più, cioè che: i punti di contatto di tre tangenti doppie qualsiansi si trovano sopra una conica (l. c., pag. 231). Questa deduzione suppone che le terne di bitangenti delle quartiche piane formino una varietà irriducibile, e costituisce un *errore* che viene messo in evidenza notando che il numero delle coniche contenenti otto punti di contatto di quattro bitangenti risulta — in tale ipotesi — superiore a 315.

D'altra parte si può ricercare direttamente la condizione perchè tre coppie di punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, presi sopra tre rette a, b, c, sieno le coppie di punti di contatto di una quartica bitangente alle a, b, c; si riconosce così che la suddetta condizione si spezza, dando luogo a due specie di terne di bitangenti ad una quartica, e si riesce anche a definire la proprietà delle terne di bitangenti che non appartengono ad un gruppo di Steiner.

Osserviamo anzitutto che i punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, non possono assumersi ad arbitrio sulle rette a, b, c; infatti se $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, sono punti di contatto di una quartica f, bitangente alle a, b, c, essi sono anche i punti di contatto di ∞^3 quartiche che si ottengono combinando linearmente f e il trilatero abc completato da una retta arbitraria del piano; segue da ciò che le 12 condizioni che esprimono i 6 contatti di f con a, b, c nei punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, non sono generalmente compatibili, e la condizione di compatibilità si traduce in una relazione a cui debbono soddisfare i 6 punti di contatto presi sui lati del trilatero abc.

Questa relazione è tale che si possono assumere ad arbitrio 5 punti: $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, C_1, e si trovano *due* determinazioni per il punto C_2. Infatti si considerino le quartiche tangenti alle rette a, b, c, rispettivamente nei punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ e C_1; esse formano un sistema lineare ∞^4, con 10 punti base sopra la cubica trilatera *abc*, sicchè — in forza del teorema di JACOBI (§ 16, pag. 242) — le quartiche del sistema passanti per un punto P di c passano di conseguenza per un punto coniugato P' sulla c stessa: la corrispondenza (P, P') è una involuzione che ha due punti doppi C_2 e C_2', i quali, presi insieme a C, sono i punti di contatto di una quartica bitangente alle a, b, c.

Ora si verifica la circostanza essenziale che la corrispondenza [2, 2] *simmetrica*, π, fra C_1 e C_2, C_2', si riduce alla somma di due involuzioni. Infatti uno dei punti corrispondenti a C_1 si lascia determinare come intersezione di c con la conica $A_1A_2B_1B_2C_1$; togliendo da π la corrispondenza (C_1, C_2) (che è l'involuzione, π_1, segata su c dal fascio di coniche per $A_1A_2B_1B_2$) rimane una corrispondenza simmetrica [1, 1], cioè ancora una involuzione. Di questa involuzione, π_2, si trovano subito due coppie che la determinano, cioè la coppia delle intersezioni di c con le rette a, b, e la coppia dei punti di contatto di c con le coniche tangenti del fascio $(A_1A_2B_1B_2)$. Pertanto si riconosce che le π_1 e π_2 sono permutabili e che π_2 è il prodotto di π_1 per l'involuzione avente come punti doppi le intersezioni di c colle rette a, b (coppia comune alle due involuzioni π_1 e π_2). Così arriviamo alla conclusione seguente:

La condizione perchè esista una quartica (irriducibile) *bitangente ai lati di un triangolo, abc, nei punti* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, (diversi dai vertici) *si scinde in due*; i 6 punti appartengono ad una conica, oppure uno di essi, C_2, è il coniugato armonico rispetto ad ac, bc del punto $\bar{C}_2$, ulteriore intersezione di c con la conica passante per $A_1A_2B_1B_2C_1$ (1).

Questo teorema interessante di per sè, mette in piena luce l'errore commesso da PLÜCKER nello studio della configurazione formata dalle 28 bitangenti d'una quartica.

In modo esatto le proprietà fondamentali della configurazione delle 28 tangenti doppie di una quartica furono riconosciute da STEINER, che accenna esservi giunto in base ai risultati contenuti nella citata comunicazione alla Accademia

(1) Questa proprietà occorre nello studio di ZEUTHEN sulla forma delle quartiche reali (Math. Annalen, Bd. 7, pag. 411), ove trovasi stabilita partendo dalle relazioni metriche cui dà luogo una curva rispetto a tre trasversali. Cfr. il trattato di SALMON sulle curve, cap. IV, n. 125, es. 4, (trad. fr., pag. 161).

di Berlino del 1848. La memoria di STEINER, portante la data del 1852, è pubblicata nel volume 49 del Journal für Mathematik; nello stesso volume comparvero le dimostrazioni e gli sviluppi di HESSE (1853), che negli anni seguenti ritornò più volte sull'argomento. Alle ricerche di HESSE si collegano quelle di CAYLEY e di altri geometri che mirano a rappresentare le proprietà della configurazione con un adèguato simbolismo (Cfr. il trattato sulle curve piane del SALMON, cap. VI).

Una nuova scoperta essenziale relativa alle tangenti doppie di una quartica è dovuta ad ARONHOLD ([1]) (1864); questi ha messo in luce le relazioni di certi gruppi di 7 tangenti doppie (*gruppi di* ARONHOLD), a partire da uno dei quali si possono costruire linearmente le 21 tangenti doppie rimanenti. Al metodo di ARONHOLD si lasciano riattaccare le trattazioni di GEISER ([2]) (1869) in rapporto alle 27 rette della superficie cubica, e di DE-PAOLIS ([3]) (1878) in rapporto alle trasformazioni piane doppie (per riferimenti bibliografici cfr. l'articolo di E. CIANI nel Pascal's Repertorium, cap. XVIII).

Per informazione dello studioso, rivolgendoci in questa nota ad un lettore più esercitato, in possesso di qualche nozione complementare, esporremo qui un rapido cenno dei risultati di HESSE e di ARONHOLD, collegandone la deduzione a un concetto uniforme.

Metodo di HESSE. L'esposizione di questo metodo suppone le conoscenze elementari intorno alle superficie del second'ordine, e alle curve (cubiche e quartiche) che si ottengono come loro intersezione. In attesa di trattare tale argomento nel seguito di queste « Lezioni », richiamiamo qui gli sviluppi contenuti nei cap.i III, IV della Parte seconda delle nostre « Lezioni di Geometria descrittiva » ([4]).

Si consideri, nello spazio (y), una rete di superficie del 2° ordine:

$$F(y_1 y_2 y_3 y_4) = x_1 F_1(y_1 y_2 y_3 y_4) + x_2 F_2(y_1 y_2 y_3 y_4) + x_3 F_3(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0,$$

affatto generale, per modo che le quadriche $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ posseggano otto punti comuni (*base* per la rete) e non una

([1]) Berliner Monatsberichte, luglio 1864, pag. 499.
([2]) Math. Annalen, Bd. 1, pag. 129.
([3]) Memorie dell'Accad. dei Lincei, vol. 2, pag. 152.
([4]) Bologna, Zanichelli, IIª ediz., 1908.

curva comune. Entro la suddetta rete si ha una serie ∞^1 di coni quadrici, che si ottiene annullando il discriminante della F:

$$D(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Sarà D una forma del quarto grado nelle $x_1 x_2 x_3$, e perciò l'equazione precedente si potrà interpretare, nel piano (x), come quella di una quartica. Un computo di costanti vale a provare che la $D(x_1 x_2 x_3) = 0$ è una quartica generale. A tale scopo osserviamo che la quartica generale dipendendo da 14 costanti, ed essendovi ∞^8 proiettività, possiede 6 invarianti assoluti indipendenti; basta provare che altrettanti ne possiede una rete di quadriche e che questi corrispondono ad invarianti indipendenti della quartica $D = 0$. Omettendo quest'ultima deduzione (che si compirebbe facilmente definendo gli invarianti in rapporto alle bitangenti) basterà qui osservare che:

1) le quadriche di una rete hanno comuni otto punti intersezioni delle $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$;

2) sette punti generici dello spazio sono punti base per una rete di quadriche che passano tutte per un ottavo punto determinato;

3) gli invarianti assoluti della rete si riducono pertanto a quelli di un gruppo di sette punti dello spazio, e — dove cinque punti vengano assunti come vertici di un tetraedro fondamentale e come punto unità — sono espressi dai rapporti delle coordinate degli altri due, e quindi sono in numero di sei.

In conclusione una quartica $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ si potrà ridurre in un numero finito di modi alla forma $D(x_1 x_2 x_3) = 0$ dove D designa il discriminante di una rete di quadriche. In altre parole « se le quadriche di una rete vengono concepite da un punto di vista astratto, come punti di un piano, le quadriche-coni danno in questo piano una quartica generale f ». Le rette di codesto piano corrispondono ai fasci di quadriche della rete; le rette tangenti ad f corrispondono a quei fasci in cui, in luogo di quattro sono contenuti tre coni, cioè la cui quartica base possiede un punto doppio.

Ora le bitangenti ad f verranno a corrispondere ai fasci di quadriche della rete la cui quartica base possiede due punti doppi, cioè si spezza in una cubica gobba e in una retta sua corda. Una retta siffatta non può essere che la congiungente due degli otto punti base della rete, giacchè sette fra i punti nominati non possono stare sopra una cubica gobba senza che questa giaccia, tutta o in parte, sulle quadriche della rete (caso escluso). Viceversa si consideri una retta che congiunga due punti base della rete, per esempio A, B. Le quadriche della rete che contengono un altro punto della retta AB contengono tutta la retta, e perciò formano un fascio che ha come curva base una quartica composta di questa retta e di una cubica residua, appoggiata ad essa in due punti.

In conclusione: *le bitangenti della quartica f vengono a corrispondere alle* $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ *rette congiungenti a coppie gli otto punti base di una rete di quadriche.* Su questa circostanza si fondano le notazioni simboliche di ARONHOLD e CAYLEY. È da osservare che la rappresentazione delle 28 bitangenti mediante le rette che congiungono a due a due otto punti (e così anche il simbolismo che vi si fonda) riesce definita in rapporto alla configurazione delle tangenti doppie di f, solo quando si sia fatta la riduzione di f alla forma D, il che è possibile in più modi. Così accade che due bitangenti rappresentate da rette che s'incontrano in uno degli otto punti suddetti, non hanno fra loro alcuna relazione particolare.

Metodo di ARONHOLD. Si consideri una rete di cubiche

$$4)\qquad f(y_1 y_2 y_3) = u_1 f_1(y_1 y_2 y_3) + u_2 f_2(y_1 y_2 y_3) + u_3 f_3(y_1 y_2 y_3) = 0$$

con sette punti base 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; le cubiche f che sono dotate di un punto doppio sono date dai valori di $u_1 u_2 u_3$ che annullano il discriminante

$$D(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Ora D è una forma del dodicesimo grado nelle u: si può vedere che, assumendo $u_1 u_2 u_3$ come coordinate di rette di un piano (x), cioè chiamando « rette » le cubiche della rete 4), $D = 0$ rappresenta l'inviluppo delle tangenti ad una quartica generale. A tale scopo si consideri nel piano (x) la curva inviluppo $D = 0$, e si cerchino i punti che essa ha comuni con una retta u. Un punto P della curva è definito dal fatto che per esso passano due rette infinitamente vicine dell'inviluppo $D = 0$, quindi al fascio delle rette per P corrisponderà un fascio di cubiche tangenti (cfr. § 5, nota). Si tratta dunque di riconoscere che una cubica f è tangente ad altre quattro cubiche della rete; perciò si ricordi (cfr. § 16) che le cubiche per sette punti di f segano su questa coppie di punti allineati con un punto fisso della f stessa (coresiduale dei sette punti) per il quale passano giusto quattro tangenti. Con ciò resta dimostrato che la $D(u_1 u_2 u_3) = 0$ è l'equazione tangenziale di una quartica. Si riconosce che questa è una quartica generale, contando gli invarianti assoluti da cui dipende in rapporto alla rete 4): infatti gl' invarianti della rete sono quelli di un gruppo di sette punti del piano, e perciò sono in numero di $2(7-4) = 6$.

Per trovare le tangenti doppie della quartica $D(u_1 u_2 u_3) = 0$, osserviamo che:

In primo luogo sette bitangenti corrispondono alle sette cubiche della rete 4) che posseggono un punto doppio in uno dei punti 1...7: ciò risulta dal fatto che una cubica siffatta appartiene a infiniti fasci di cubiche f tangenti.

In secondo luogo 21 bitangenti della quartica corrispondono alle cubiche della rete dotate di due punti doppi, cioè spezzate in una retta congiungente due dei sette punti 1...7 e nella conica che passa per i rimanenti cinque.

La rappresentazione indicata è quella di DE-PAOLIS; da essa riesce illuminata nel modo migliore la costruzione di ARONHOLD, che passiamo ad esporre.

Possiamo costruire nel piano (y) una curva F di classe 4 e di ordine 12, che risulta proiettiva (reciproca) alla curva D del piano (x). La F si lascia definire semplicemente in relazione ai fasci di cubiche tangenti contenuti nella rete 4), cioè dotati di altri due punti base 8, 9 infinitamente vicini: essa è l'inviluppo delle tangenti 8 9. Si prova che F è di quarta classe, facendo vedere che per un punto generico, P, del piano passa *una* cubica della rete su cui P è coresiduale dei punti 1...7; e si riconosce che le D e F sono curve reciproche dimostrando che fra di esse intercede una corrispondenza biunivoca dove alle quattro tangenti della F passanti per un punto corrispondono quattro punti della D che si trovano sopra una retta. Infatti un punto della curva D è centro di un fascio di rette cui corrisponde un fascio di cubiche tangenti con i due punti base infinitamente vicini in 8, 9, e quindi una tangente di F, cioè la retta 8 9; ora alle quattro tangenti di F per un punto P corrispondono quattro fasci di cubiche tangenti che posseggono in comune la cubica della rete che contiene P come coresiduale dei punti 1...7, e così si ottengono quattro punti di D appartenenti a una retta p.

La corrispondenza fra i punti del piano (x) contenente la quartica D, e quelli del piano (y) contenente la curva di quarta classe F, è dunque tale che a una retta del primo piano (secante D in quattro punti) corrisponde un punto del secondo piano, e alle rette per un punto di D corrispondono i punti di una punteggiata proiettiva che ha per sostegno una tangente di F; prendendo due fasci coi centri su D e le punteggiate omologhe, si vede che riesce definita fra i due piani una proiettività reciproca che trasforma D in F e subordina fra le due curve la corrispondenza considerata.

Ora la curva F possiederà sette punti doppi nei punti 1....7, i quali costituiscono il gruppo base della rete di cubiche 4); infatti uno di questi punti, p. es. 1, è doppio per una cubica della rete e si trova essere su questa coresiduale di 1....7. La F possiederà, oltre i nominati, altri 21 punti doppi, associati alle cubiche composte di una conica e di una retta, che si costruiscono come segue.

Si consideri, per es. la cubica composta della retta 6 7 e della conica 1 2 3 4 5, aventi comuni due punti A, B; il coresiduale dei punti 1....7 sopra la cubica spezzata è un punto X della conica, col quale si trovano allineati i punti PP' segati rispettivamente sulla retta e sulla conica da una qualsiasi cubica f per 1....7; il suddetto punto X si costruisce *linearmente* prendendo come cubica f la curva composta della retta 5 7 e della conica 1 2 3 4 6; codesto punto riesce doppio per la F, le quattro tangenti per X riducendosi alle rette XA e XB, ciascuna delle quali assorbe due tangenti infinitamente vicine.

Ciò posto, in forza della reciprocità fra la quartica D e la curva F, si può dire che 21 bitangenti di D si costruiscono linearmente a partire dalle 7 bitangenti che corrispondono ai punti doppi 1...7. Si può verificare che codeste sette bitangenti formano un tal gruppo che tre qualunque di esse non appartengono mai ad un gruppo di Steiner. I gruppi di sette bitangenti di Aronhold così definiti sono 288; ce ne sono 72 che contengono una bitangente e 16 che contengono due bitangenti date.

Osservazione. La curva di dodicesimo ordine e quarta classe F, considerata nel ragionamento precedente, non deve essere confusa con la curva k luogo dei punti doppi delle cubiche della rete; sebbene per ogni punto di k passi una retta di F, questa non è tangente a k. Invero la k è una curva del sesto ordine che passa doppiamente per i punti 1...7, e sega p. es. la retta 1 2 nei due punti in cui essa è intersecata dalla conica per 3...7.

Fra il metodo di Hesse e il metodo di Aronhold per lo studio delle bitangenti di una quartica, esiste un' intima relazione, la quale può essere messa in evidenza come segue. Si considerino le quartiche intersezioni delle quadriche che passano per otto punti dello spazio 1...8; proiettando dal punto 8 sopra il piano si ottengono le cubiche per sette punti $1'...7'$. Allora le sette rette che uniscono il punto 8 ai rimanenti punti 1...7 corrispondono ai punti $1'...7'$, mentre alle rette che congiungono altri due punti i, k del gruppo 1...8, corrispondono sul piano le rette i', k'.

28. **Complementi: inviluppo di una serie di curve ed equazioni algebrico-differenziali.** — Nel § 26 si è presentata la considerazione dell' inviluppo di una serie semplicemente infinita di coniche, $\}C\{$, d' indice $\mu = 2$. Il caso generale di una serie di coniche o curve, d' indice $\mu > 2$, conduce similmente alla definizione d' un inviluppo; i problemi che vi si collegano richiamano alcune osservazioni generali che qui esponiamo a complemento degli argomenti trattati in questo capitolo.

Anzitutto si tratta di valutare l' ordine della curva k inviluppo di una serie (irriducibile) di *curve* C, d' ordine n, che per semplicità supporremo *prive di punti doppi*. A tale scopo, come nel caso delle serie d' indice 2 di coniche, possiamo costruire sopra una retta generica, r, la corrispondenza

$$[\mu(\mu-1)(n-1)^2,\ \mu(\mu-1)(n-1)^2]$$

dove sono omologhi due punti Q e Q' ulteriori intersezioni di due C che passano per uno stesso punto P. Ma fra i punti uniti di questa corrispondenza figurano, non soltanto le intersezioni di r con k, bensì anche le coppie di punti della retta r che sono comuni a due C; di queste coppie nel caso generale ($n > 2$, o $\mu > 2$) ne esistono effettivamente sopra r e il loro numero non dipende soltanto dall' indice μ della serie C (come neppure dalla seconda caratteristica ν). Pertanto dobbiamo constatare che l'applicazione del principio di corrispondenza, nelle attuali condizioni, non conduce al risultato richiesto.

Per $\mu = 2$, l'ordine di k si può valutare osservando che i punti di intersezione di una C con k sono unicamente i punti d' intersezione della C con la C infinitamente vicina, nei quali C tocca k. Si trova così che la k, avendo con C $2n^2$ intersezioni, è di ordine $2n$. Ma per $\mu > 2$ accade che la C incontri k, oltrechè negli n^2 punti di contatto anzidetti, anche in altri punti semplici, per ciascuno dei quali passano due C coincidenti fuori della data. E quindi neppur questo metodo conduce a valutare l'ordine di k.

Per vedere come si ottenga la risoluzione del problema, riferiamoci al caso più semplice di una serie $\}C\{$ d'indice $\mu = 3$, la quale — dove le curve C si chiamino « punti » — appare come una linea del terz'ordine L, appartenente dunque a un piano o ad uno spazio S_3 determinato da quattro dei suoi punti, e poniamo — per semplicità di discorso — che la serie $\}C\{$ sia priva di punti base. Conviene distinguere i due casi che qui si presentano.

Nel primo caso otteniamo una rappresentazione più intuitiva trasformando per dualità, cioè considerando la $\}C\{$ come una « serie di *rette* » entro un piano rigato π': si ha allora fra il piano dato, π, e il piano π', una corrispondenza $[1, n^2]$ dove alle rette del primo piano corrispondono le curve d'ordine n di una rete $|C|$, e alle rette che nel primo piano inviluppano la linea di terza classe L corrispondono nell'altro le curve di $\}C\{$; ora L è in generale d'ordine 6 e però la curva k inviluppo di $\}C\{$ risulta segata dalle C in $6n^2$ punti, e quindi è d'ordine $6n$. Se la linea L possiede una tangente doppia, in corrispondenza ad essa si stacca dalla curva k, d'ordine $6n$, una C contata due volte, la quale figura *impropriamente* nella curva inviluppo.

Ora riferiamoci al secondo caso, cioè poniamo che la serie $\}C\{$ venga rappresentata da una linea gobba del terz'ordine, L; per determinare l'ordine dell'inviluppo k procediamo come segue. Data una curva C di $\}C\{$, questa sega una retta r in n punti, per ciascuno dei quali passano altre $\mu - 1 = 2$ curve C che riterremo omologhe alla data; si ottiene una intersezione di r con k quando la suddetta C coincide con una delle $n(\mu - 1)$ C omologhe. La corrispondenza costruita fra le curve C si deve riguardare come una corrispondenza simmetrica $[n(\mu-1), n(\mu-1)]$, cioè $[2n, 2n]$, fra i punti della linea L. E siccome questa linea è razionale, essendo riferibile ad una retta per proiezione da una sua corda, si avranno sopra L $2n(\mu-1)=4n$ punti uniti, sicchè l'ordine della curva k, inviluppo di $\}C\{$, sarà appunto $4n$.

Il procedimento qui indicato si può applicare al caso in cui la $\}C\{$ abbia per immagine una linea L qualsiasi, appartenente a un S_r di dimensione $r \geq 2$; ma se il genere della curva (o per $r>2$ di una sua proiezione piana) è $P>0$, non c'è più dato applicare il principio di corrispondenza del § 1 al calcolo dei punti uniti. Veramente esiste un principio di corrispondenza di Cayley-Brill [1] esteso alle curve; ma le considerazioni su cui esso si fonda non possono trovar posto in questo capitolo. D'altronde la difficoltà si supera con una osservazione di carattere elementare.

Anzitutto giova notare che se due serie di curve $\}C\{$ e $\{C'\{$, dello stesso ordine, hanno per immagini due linee L e L' fra i punti delle quali interceda una corrispondenza biunivoca, per esempio per proiezione dell'una sull'altra, allora la corrispondenza $[n(\mu-1), n(\mu-1)]$ costruita su L si rispecchia nell'analoga corrispondenza costruita su L', e ai punti uniti della prima rispondono i punti uniti della seconda, sicchè l'ordine dell'inviluppo è uguale per le due serie di curve. Occorre soltanto un'avvertenza: se due punti di L si proiettano in un medesimo punto (doppio) di L', essendo, per es., L' una linea piana, codesto punto dà luogo ad una eccezione per la corrispondenza fra le due curve, ed allora dalla curva inviluppo della serie $\}C'\{$ si stacca due volte una curva C' che vi figura impropriamente, e deve esser tolta perchè continui a sussistere l'uguaglianza fra gli ordini degli inviluppi di $\}C\{$ e di $\}C'\{$.

Ciò posto si abbia nel piano una serie $\}C\{$ di curve d'ordine n (prive di punti doppi) la quale, per semplicità, supporremo rappresentata da una linea L, senza punti doppi, appartenente ad uno spazio S_r: la restrizione importa che per ogni C si abbia sempre *una* C infinitamente vicina. Si può valutare l'ordine della curva k inviluppo delle C, proiet-

[1] Cfr. le Lezioni di Clebsch-Lindemann, trad. fr., t. II, pag. 147.

tando la linea L da un S_{r-3} generico in un piano, con che essa darà, in generale, una curva L' [1] dello stesso ordine μ, dotata di punti doppi, della quale designeremo con P il genere, che si dice anche il genere di L.

Per una serie d'indice μ di curve d'ordine n, contenuta in una rete, l'ordine dell'inviluppo si trova subito, come prima pel caso di $\mu = 3$: questo ordine vale in generale $n\mu(\mu - 1)$. Questo è dunque l'ordine della curva k' inviluppata da una serie $\}C'\{$ che abbia come immagine la linea piana L'; ma in k' figurano impropriamente

$$\frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} - P$$

curve C' contate due volte, e così l'inviluppo proprio si riduce di ordine

$$n(2\mu + 2P - 2).$$

Questo è l'*ordine dell'inviluppo della serie* $\}C\{$ *d'indice* μ *e di genere* P, rappresentata dalla linea L.

La formula precedente deve esser modificata, non solo quando le C generiche posseggano punti doppi variabili (caso che considereremo più avanti), ma anche quando la serie comprenda curve *stazionarie* corrispondenti a punti di regresso della linea L. Formule più generali che danno l'ordine e la classe dell'inviluppo in ordine a tali circostanze sono state indicate da Zeuthen [2] (1874), il quale vi perviene con metodo diverso dal metodo elementare qui adoperato. Invece l'acquisto di punti base per la serie $\}C\{$ non modifica l'ordine dell'inviluppo.

La questione dell'inviluppo di una serie semplicemente infinita di curve, $\}C\{$, può essere trattata sotto un altro punto di vista, in rapporto colla teoria delle equazioni algebrico-differenziali.

[1] Un punto doppio di L' nasce da un S_{r-2} che passando per lo spazio proiettante si appoggi in due punti ad L. Ciò si vede anche riducendosi con proiezioni successive al caso di una curva gobba di S_3, della quale si hanno allora a considerare le corde per un punto. Cfr. p. es. Enriques. G. Descrittiva, Parte II, Cap. III.

[2] Cfr. Comptes Rendus, t. 78, pag. 274 e 339.

Una serie $\{C\}$ d'indice μ, data nel piano (xy), può essere definita mediante un'equazione differenziale del prim'ordine

$$1)\qquad F(x\,y\,y')=0,$$

dove F è un polinomio in x, y, y', di grado μ rispetto ad y'. La 1) esprime infatti la relazione che lega un punto $(\bar{x}\bar{y})$ alle μ rette tangenti alle C che passano per esso:

$$y=\alpha x+\beta,\quad (\alpha=\bar{y}',\ \beta=\bar{y}-\bar{x}\bar{y}')$$

Reciprocamente un'equazione algebrico-differenziale del prim'ordine e di grado μ rispetto ad y', $F(x\,y\,y')=0$, rappresenta una *serie d'indice* μ *di curve integrali*, che tuttavia non sono — in generale — curve algebriche.

La teoria delle equazioni algebrico-differenziali del prim'ordine appare così una generalizzazione di quella delle serie semplicemente infinite di curve algebriche. Molte proprietà relative a tali serie sono suscettibili di essere estese al caso dell'equazione differenziale, ove pur si lasci cadere l'algebricità degli integrali; così p. es. la caratteristica ν — duale dell'indice μ — ha un semplice significato per l'equazione $F=0$. Infatti questa equazione determina una serie ∞^2 di elementi « punto-retta » che si appartengono; vi sono μ elementi che contengono un punto (μ rette associate ad un punto che passano per esso), e ν elementi contenenti una retta data, cioè ν punti sulla retta che sono ad essa associati. Una estensione in questo senso della teoria delle caratteristiche trovasi in lavori di FOURET [1] (1874-78); ma lo sviluppo della teoria geometrica delle equazioni algebrico-differenziale (la teoria dei *connessi* di cui si può ricercare l'origine in PLÜCKER) si riattacca specialmente a CLEBSCH [2] (1873).

Che cos'è l'inviluppo k della serie $\{C\}$ rispetto all'equazione differenziale

$$F(x\,y\,y')=0?$$

L'esame di tale questione (già nel caso particolare in cui le C sieno algebriche) permette di chiarire il concetto

[1] Inseriti nei Comptes rendus e nel Bullettin de la Soc. Math. de France.

[2] Cfr. l'ultimo capitolo delle Lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN.

degli *integrali singolari*, e presenta quindi un interesse generale anche per l'analisi infinitesimale.

Supponiamo dapprima che le C siano curve algebriche d'un certo ordine n, prive di punti doppi variabili.

Se la serie $\}C\{$ non è un fascio (cioè se l'indice $\mu > 1$, cfr. § 14), due C si segano in un certo numero m di punti variabili; in particolare ogni C sega la sua infinitamente vicina in un gruppo G_m, di m punti, che descrive la curva inviluppo k. Per ciascun punto, A, di k passano due C coincidenti che toccano k in A; pertanto la tangente in A è una retta associata ad A, la quale corrisponde ad una y' radice doppia dell'equazione $F = 0$.

Dunque, nell'*ipotesi* fatta che le *curve integrali non abbiano punti doppi variabili, la curva inviluppo k è integrale singolare dell'equazione differenziale $F = 0$* (Lagrange). La curva k è luogo di punti (x, y) per cui l'equazione $F(y')$ ha una radice doppia, e si lascia quindi definire come segue. Si consideri il discriminante dell'equazione $F(y') = 0$, che supponiamo dato nella forma

$$\Delta^2(xy)D(xy),$$

dove D designa la parte essenziale (§ 24): l'equazione $D(xy) = 0$ rappresenta la curva inviluppo k, mentre $\Delta(xy) = 0$ rappresenta il luogo dei punti per cui escono *due* curve integrali tangenti. Questa distinzione si può giustificare considerando la curva

$$\overline{F}(xz) = 0$$

che si ottiene ponendo

$$y = ax + b, \quad z = y';$$

tale curva ha l'ordine $\mu + \nu$ e possiede come ν-plo il punto all'infinito dell'asse z; in corrispondenza alle radici di $\Delta = 0$ si hanno i punti doppi (o multipli) della curva anzidetta, e per ogni nodo di essa esistono due rami della funzione $z(x)$, quindi *due* equazioni differenziali $y' = y'(x)$ i cui integrali corrispondono al medesimo y'; invece le radici di $D = 0$, che sono in numero di $2\mu + 2p - 2$ (designando p il genere di $\overline{F}(xz) = 0$) corrispondono ai punti della retta $y = ax + b$ per cui due curve integrali C coincidono, cioè — nell'ipotesi che le C non abbiano punti doppi variabili — sono le intersezioni della nominata retta coll'inviluppo k.

Supponiamo ora che le curve algebriche C, integrali dell'equazione

$$F(x\,y\,y')=0,$$

posseggano singolarità variabili, limitandoci — per semplicità — al caso che queste sieno nodi e cuspidi (ordinarie), ed escludendo che la serie $\{C\}$ contenga curve degeneri con parti multiple. Le curve luogo dei nodi e delle cuspidi delle C si staccheranno dalla curva inviluppo k, definita come luogo delle intersezioni delle C infinitamente vicine; precisamente:

1) *la curva luogo dei nodi delle C figura impropriamente nell'inviluppo k, due volte;*

2) *la curva luogo delle cuspidi vi figura tre volte.*

Infatti se le C posseggono un punto doppio variabile, due C infinitamente vicine determinano un fascio che ha una tangente fissa d generalmente diversa dalla retta a che congiunge i due punti doppi infinitamente vicini (§ 5 nota, pag. 182). Nel caso del nodo, la d ha con le due curve C, e quindi con k, due intersezioni infinitamente vicine, mentre essa è certo diversa dalla retta a tangente alla curva luogo dei nodi. Invece se il punto doppio variabile della C è una cuspide, accade che d sia la tangente cuspidale e però abbia tre intersezioni infinitamente vicine con le due C e quindi con k; il confondersi di questa retta d con la tangente a alla curva luogo delle cuspidi, costituisce una condizione ulteriore che non è in generale soddisfatta per tutti i punti di codesto luogo. Nel caso particolare che qui si presenta, sappiamo (pag. 184) che le due C infinitamente vicine determinano un fascio dotato di punto doppio, e così ogni retta per questo punto contiene quattro intersezioni delle due C e quindi quattro punti infinitamente vicini di k: la curva luogo delle cuspidi figura allora in k quattro invece che tre volte.

Ora riprendiamo la costruzione che conduceva a determinare l'inviluppo k di $\{C\}$ annullando la parte essenziale del discriminante $D(xy)=0$ di $F(x\,y\,y')=F(y')$. Quando le C posseggono punti doppi variabili, *la curva $D(xy)=0$ è soltanto una parte della k, dovendosi togliere due volte il luogo* *dei punti doppi* (nodi o cuspidi) *delle* C, che non figura in D; *il luogo delle cuspidi compare in generale una volta in* D, vi compare due volte nel caso particolare a cui si è dianzi accennato.

Ciò posto sorge la domanda se la curva D sia ancora integrale singolare dell'equazione differenziale $F(x\,y\,y')=0$. A questa domanda si deve dare risposta negativa: per ottenere l'*integrale singolare* occorre *togliere da* D *una volta il luogo delle cuspidi* della C, perchè questo non fa parte dell'integrale singolare ove la tangente cuspidale di una C generica non sia tangente ad esso: conclusione importante per la teoria generale delle equazioni differenziali del prim'ordine.

Qui occorre avvertire che se, invece di prender le mosse dalla serie delle curve integrali C (algebriche o trascendenti), *si parte dalla equazione differenziale* $F(x\,y\,y')=0$, si trova *in generale* che *la curva* $D(xy)=0$, rappresentata dall'equazione discriminante di grado $2\mu+2p-2$, *è luogo di cuspidi*, anzichè inviluppo proprio delle curve integrali, sicchè, contrariamente alla veduta classica di LAGRANGE, *non vi è integrale singolare*. Ciò risulta dalla stessa legge di continuità pèr cui i due rami d'una curva dotata di nodo si confondono in un solo ramo cuspidale del second'ordine quando le tangenti principali vengono a coincidere [1]. La cosa si rende subito evidente nel campo reale, dove una linea luogo di punti per cui due y' coincidono separa due regioni di piano, per modo che passando dall'una all'altra due y' reali diventino immaginarie: si trova corrispondentemente una curva integrale che, non attraversando la linea, ha su di essa un punto di regresso, ossia una cuspide.

D'altronde che la curva D non sia generalmente integrale singolare per l'equazione differenziale $F(x\,y\,y')=0$, appare da ciò che l'equazione $D=0$ esprime la coincidenza di due y' cui corrisponde una retta associata per ogni punto della curva D, mentre la condizione che questa retta associata sia, per ogni punto di D, la relativa tangente è una condizione nuova, non derivante come conseguenza dalla

(1) Cfr. DARBOUX, Comptes rendus, t. 71, Bullettin des Sciences Math., t. 4 (1873); vedi anche CLEBSCH, Math. Annalen, Bd. 6, pag. 211, settembre 1872.

prima. E per confermare questa asserzione basta il semplice esempio in cui si assuma

$$F(x\, y\, y') = (y')^2 - D(xy) = 0;$$

l'equazione $D(xy) = 0$, discriminante rispetto ad y', fornisce infatti una funzione $y(x)$ che non soddisfa in generale all'equazione differenziale $F = 0$ (1).

È per noi interessante osservare che la teoria geometrica delle serie di curve algebriche $\}C\{$ vale già ad illustrare la possibile mancanza di integrali singolari. Il più semplice esempio di ciò viene offerto da una serie di cubiche C passanti per sei punti fissi e possedenti una cuspide variabile; infatti in questo caso la cuspide assorbe le tre intersezioni variabili di due C infinitamente vicine.

Noteremo che l'anzidetta serie di cubiche C si presenta nella rappresentazione piana della superficie cubica (2), dove le C risultano immagini delle sezioni piane tangenti nei punti parabolici (3). Si vedrebbe così che la serie suddetta è d'indice 24, ma il computo che qui occorre delle curve cuspidate, appartenenti ad una rete, troverà posto nel libro seguente.

Osservazione. Nelle considerazioni che si riferiscono all'inviluppo di una serie $\}C\{$ e all'integrale singolare della relativa equazione differenziale, si deve ulteriormente tener conto della particolarità, già accennata per le serie di coniche, cui dà luogo una curva C degenere con una parte multipla: questa componente viene a figurare un certo numero di volte nell'inviluppo e si può dire un *integrale singolare improprio*, giacchè fa parte di una C, ma non rientra nell'equazione generale di queste curve integrali.

Chiuderemo questo paragrafo porgendo un semplice esempio del modo con cui viene composto l'inviluppo di una

(1) Cfr. PICARD, Traité d'Analyse, t. III, pag. 44.

(2) Cfr. p. es. ENRIQUES, G. Descrittiva, pag. 412.

(3) KLEIN, (Math. Annalen, Bd. 6) trae dalla superficie cubica l'esempio delle asintotiche, curve integrali (trascendenti) di un'equazione differenziale di 2° ordine, che posseggono appunto una cuspide nei punti della linea parabolica.

serie di curve dotate di nodi e di cuspidi, esempio che si collega alla deduzione della prima formula di PONCELET-PLÜCKER fatta da BECK [1] (1878).

Data una curva C, d'ordine n dotata di nodi e cuspidi, mediante una traslazione del piano nasce da essa una serie di curve analoghe, tutte eguali fra loro: i nodi e le cuspidi descrivono rette parallele, e la parte residua dell'inviluppo è costituita dalle tangenti a C parallele alla direzione di traslazione (tangenti per un punto all'infinito). Il numero di queste tangenti, che dà la classe di C, si calcola valutando le intersezioni di una C con la infinitamente vicina, dove si tolgano — oltre gli n punti fissi intersezioni della C con la retta all'infinito — le intersezioni assorbite nei nodi e nelle cuspidi. BECK riconosce in tal modo che un nodo diminuisce la classe di 2 e la cuspide di 3, facendo appello diretto all'intuizione delle curve reali, dove la cuspide venga pensata come un nodo che si vada indefinitamente stringendo.

---

(1) Math. Annalen, Bd. 14.

Capitolo III

Nota sulle funzioni algebriche e sulle rappresentazioni reali dell'immaginario.

29. Introduzione: le interpretazioni geometriche dell'immaginario. — Le rappresentazioni geometriche dell'equazione $f(xy) = 0$ come *corrispondenza fra* due *rette* o come *curva* piana, sono suggerite primitivamente da un' intuizione *reale*: i punti immaginari (con coordinate immaginarie o complesse) s' introducono come un simbolo mercè cui si conferisce esistenza logica alle *n radici* d' un' *equazione algebrica di grado n*. Non è qui il luogo per tracciare la storia dei numeri immaginari, per la quale possiamo rimandare all'articolo di Gigli nei « Collectanea » di Enriques [1]. Basterà ricordare che codesta teoria sorge dalla risoluzione delle equazioni di terzo grado sviluppata intorno alla metà del secolo decimosesto da Tartaglia, Cardano e Bombelli, dove per la prima volta si presentano espressioni formate con radici di numeri negativi, rappresentanti numeri reali. Bombelli (1572) scopre le prime regole del calcolo degl' immaginari, che si svolge e si perfeziona successivamente per opera di Wallis (1685) e De Moivre (dal 1706 al 1730).

Ma (nonostante alcune osservazioni di Vieta, De Moivre e Wallis circa la loro interpretazione geometrica) fino alla fine del secolo decimoottavo o agl' inizi del decimonono, gl' immaginari rimangono sempre dei puri *entia rationis*, venendo riguardati come simboli di operazioni impossibili, cui non si conferisce significato di per sè, ma solo in quanto entrino in combinazioni capaci di fornire un resultato reale. Tale concetto appare ancora nella « Dissertazione inaugurale »

(1) « Questioni riguardanti le matematiche elementari » - Vol. I - Bologna, Zanichelli, 1912, articolo X.

di Gauss del 1797, dal titolo « Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse » (1); dove l'autore — riserbandosi di trattare in seguito della natura delle quantità immaginarie — con breve artificio rimoveva dal suo studio ogni considerazione di numeri complessi.

Ora questo stesso modo di considerare l'immaginario, come simbolo di rapporti reali, si fa strada nella scuola di Monge e, attraverso i lunghi studi di Poncelet, mette capo alla cosidetta *teoria degli immaginari di* Staudt. È degno di nota che lo sviluppo di tali idee proceda in qualche modo parallelamente a quello che muove dalla diretta *interpretazione* dell'*immaginario* come « *numero-vettore* » ossia numero ordinale a due dimensioni, dal quale esce la costruzione della *teoria delle funzioni* di variabile complessa.

Nella scuola di Monge gli immaginari figurano soltanto a *coppie*, insieme agli elementi coniugati; si tratta in sostanza dell'interpretazione generale delle equazioni di secondo grado, indipendentemente dalla realtà delle radici. Le geniali vedute di Poncelet sui punti (ciclici) intersezioni dei cerchi colla retta all'infinito non escono da questo campo, e le sue lunghe meditazioni sul cosidetto *principio di continuità* mirano anzitutto ad estendere alle equazioni più generali le deduzioni ottenute, per via geometrica, nel caso di radici reali (2).

Come è noto Poncelet (1822) tratta geometricamente l'equazione di secondo grado definendo i punti comuni a una conica e ad una retta, indipendentemente dalla loro realità, per mezzo della *involuzione* di cui essi si presentano come punti doppi. Più tardi (1856) Staudt (3) staccava i due punti immaginari coniugati, associando a ciascuno di essi *un verso della retta* reale che li congiunge, e dimostrando che i punti così astrattamente definiti formano un sistema soddisfacente

(1) Helmstedt, 1799. Werke, Bd. III, pag. 1.

(2) Sul valore del nominato principio, così ricco di suggestioni, ritorneremo nel Libro terzo. Qui diremo che la teoria geometrica delle coppie di elementi immaginari si può studiare oggi nell'esposizione elementare, pienamente rigorosa, del Segre « Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica ». Memorie dell'Acc. di Torino, 1886.

(3) Beiträge zur Geometrie der Lage, Norimberga 1856.

ai postulati della ordinaria Geometria proiettiva [1]. La definizione di STAUDT si può interpretare, con KLEIN, introducendo i punti immaginari per mezzo delle *proiettività cicliche del terzo ordine* sopra rette reali: due punti coniugati si fanno corrispondere (mercè la distinzione del verso) alle due proiettività del terz' ordine, l' una inversa dell' altra, di cui essi sono punti doppi.

L' interpretazione dei numeri complessi come numeri vettori o numeri ordinali a due dimensioni, preparata dalle osservazioni di BOMBELLI, VIETA, DE MOIVRE e WALLIS, sorge con WESSEL (1797) e poi con ARGAND (1806), ricevendo la sua consacrazione da GAUSS e da CAUCHY. Questi due matematici si può dire che ebbero sempre presente la variabilità complessa, ma le loro idee appaiono in forma definitiva assai tardi: per il primo nel 1831, e per il secondo nel 1847, cioè posteriormente alla scoperta dei principî della teoria delle funzioni.

Mercè la rappresentazione vettoriale, la teoria dei numeri immaginari o complessi riceve stabile assetto, rendendosi evidente la estensione a questi numeri delle operazioni fondamentali dell' aritmetica [2]. Appunto la legittimità della aritmetica dei numeri complessi veniva assunta da PLÜCKER a giustificazione dell'uso dei punti immaginari nella Geometria analitica, evitando così i dubbi sollevati, specialmente da CAUCHY, contro il principio di continuità di PONCELET.

Ora la rappresentazione vettoriale dell' immaginario dà origine ad una nuova intuizione geometrica degli enti legati ad una equazione $f(xy) = 0$. Così se l' equazione s' interpreta come corrispondenza, si penserà ad una *corrispondenza fra piani* anzichè fra rette; e, se si cerca una immagine del sistema delle soluzioni dell'equazione, si avrà a fare, non più con una curva, ma con una varietà doppiamente infinita di elementi (punti), che potrà raffigurarsi come una *superficie* (*superficie di* RIEMANN).

[1] La dimostrazione più semplice di ciò si ottiene ricorrendo alle rappresentazioni reali dello spazio complesso fornite dagli iperspazi. - Cfr. ENRIQUES, Rendiconti dell'Acc. di Bologna, 13 aprile 1913.

[2] La sistemazione della teoria puramente analitica degli immaginari fu data più tardi dal WEIERSTRASS: Cfr. il « Saggio » del PINCHERLE nel Giornale di Matematica di Napoli, vol. 18 (1880).

Qui vi è luogo a meravigliarsi che due forme così diverse di intuizione, quali sono per esempio l'intuizione di una *curva algebrica* (pensata come luogo di punti reali o immaginari, secondo la teoria che precede in questo volume) e la intuizione di una *superficie*, immagine reale della curva, possano convenire ad un medesimo ente. Sopratutto dalla intuizione della curva — che in qualche modo studia l'immaginario attraverso le idee suggerite dal reale — nasce la veduta di *un* punto infinitamente vicino ad un punto dato, mentre l'intuizione della superficie fa pensare ad infiniti punti che, in diverse direzioni, si avvicinano a quello. Ma l'apparente contraddizione si toglie ove si rifletta che a questi diversi modi di avvicinamento corrisponde sempre un'unica quantità che — nella teoria geometrica delle curve — designa il coefficiente angolare della tangente, e — nella teoria delle funzioni di variabile complessa — si presenta come derivata della funzione implicita $y(x)$ definita dall'equazione $f(xy) = 0$, riconoscendosi indipendente dalla direzione in cui la variabile complessa x può essere avvicinata. Questa proprietà vale anzi a caratterizzare quelle che oggi si designano semplicemente come funzioni della variabile complessa e che il CAUCHY [1] chiamava funzioni *monogene*; la teoria delle quali giova qui brevemente richiamare.

30. Funzioni di variabile complessa: proprietà caratteristiche. — Si assume come presupposto la conoscenza delle operazioni aritmetiche fondamentali sui numeri complessi, rappresentati nel piano mediante vettori a partire dall'origine. La variabile complessa $z = x + iy$ possiede un modulo, ρ, e un argomento, θ, definiti da:

$$x + iy = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

$$\rho = + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x}.$$

Quando il modulo ρ tende a zero, la variabile z tende all'unico valore $z = 0$ qualunque sia il modo di variare del-

(1) Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. IV, pag. 346 - Parigi 1847.

l'argomento. Similmente se il modulo di z cresce oltre ogni limite, si deve ritenere che la variabile z tenda a un unico valore $z = \infty$.

Così il piano rappresentativo della variabile complessa viene pensato secondo una intuizione diversa da quella del piano proiettivo reale, giacchè su questo si ha una infinità di punti all'infinito costituenti una retta, mentre su quello tutti punti all'infinito corrispondenti alle varie direzioni si pensano riuniti in un solo. Questa intuizione del piano complesso risponde all'idea che ci formiamo del piano considerato come proiezione stereografica della sfera, dove i punti all'infinito del piano rappresentano un unico punto, che è il centro di proiezione.

La teoria delle funzioni di variabile complessa, o funzioni analitiche, fondata da CAUCHY (1825-1831) e sviluppata secondo due diversi indirizzi da RIEMANN e WEIERSTRASS, si basa su alcuni elementari concetti e su alcune proposizioni fondamentali che qui riassumiamo per comodità dello studioso, rimandando per notizie storiche alla « Teorica delle funzioni di variabili complesse » del CASORATI [1], e all'articolo II B1 di OSGOOD (redazione francese di MOLK) della « Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften » e riferendoci per le dimostrazioni al trattato del BIANCHI « Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa.... » [2].

Definizione. Si dice che la variabile complessa $w = f(z)$ è *funzione regolare della variabile complessa* $z = x + iy$, *in un campo* superficiale A, quando

1) ad ogni valore di z in A corrisponde un valore (finito) di w;

2) la $f(x)$ è continua e ammette in ogni punto una *derivata*

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

finita e *indipendente dall'argomento di* h cioè *dalla direzione secondo cui ci si avvicina a* z.

Questa condizione porta

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y},$$

(1) Pavia - Fusi - 1868.

(2) Pisa - Spoerri - 1901.

che è la condizione di *monogeneità* di CAUCHY [1] e, ponendo $w = u + iv$, si traduce nelle due equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il significato geometrico di queste relazioni è dato dal seguente

Teorema. Se rappresentiamo la variabile complessa z sopra un piano π, e la variabile complessa w sopra un secondo piano π', la relazione funzionale

$$w = f(z)$$

pone fra i due piani una *corrispondenza* (o rappresentazione) *conforme*, dove gli angoli corrispondenti sono uguali e hanno il medesimo senso. Questa *proprietà* è *caratteristica*, cioè può assumersi come definizione geometrica delle corrispondenze rappresentate da funzioni di variabile complessa [2].

Si deduce che una funzione della variabile complessa $w = f(z)$ risulta a sua volta funzione della variabile complessa z. Inoltre l'inversa di una funzione di variabile complessa, $w = f(z)$, quando si riesca effettivamente a definire, in modo univoco, nell'intorno di un punto regolare, risulta essa stessa una funzione di variabile complessa.

Dalla definizione precedente si traggono due teoremi fondamentali di CAUCHY, che esprimono proprietà caratteristiche delle funzioni di variabile complessa.

1) *Teorema dell'integrabilità* (1825). In un campo semplicemente connesso ove la funzione $f(z)$ sia regolare, l'integrale definito $\int_a^b f(z)dz$ calcolato sopra un arco di linea, non dipende affatto dalla forma della linea d'integrazione, ma soltanto dai suoi estremi a e b.

Il precedente teorema di CAUCHY è stato invertito da MORERA [3] (1886): se, in un campo semplicemente connesso,

(1) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 7. CAUCHY chiamava funzioni monogene della variabile complessa quelle che — in seguito ai suoi lavori — RIEMANN ha designato più semplicemente come funzioni di variabile complessa.

(2) Cfr. Bianchi, op. cit., pag. 23.

(3) Rendiconti dell'Istituto Lombardo, vol. 19, pag. 304.

$f(z)$ dipende da z in modo che l'integrale $\int_a^b f(z)dz$ dipenda soltanto dai limiti a e b e non dalla linea d'integrazione, la f è funzione (monogena) della variabile complessa z.

2) *Teorema dello sviluppo in serie* (1831). Se la funzione $f(z)$ è regolare nell'intorno di un punto a, essa ammette tutte le derivate successive $f'(a)$, $f''(a)$...., e lo sviluppo in serie di TAYLOR

$$f(a) + (z-a)f'(a) + ... + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + ...$$

converge, e rappresenta la funzione $f(z)$, entro ogni cerchio di centro a in cui la f si mantenga regolare.

Viceversa è chiaro che ogni sviluppo in serie di potenze

$$P(z-a) = C_0 + C_1(z-a) + \frac{C_2}{2}(z-a)^2 + ... + \frac{C_n}{n!}(z-a)^n + ...,$$

che converga in un cerchio di centro a, rappresenta in esso una funzione regolare $f(z)$ della variabile complessa z, dove

$$C_n = f^{(n)}(a).$$

Di qui risulta il

Corollario. Una funzione $f(z)$ della variabile complessa z che sia regolare nel punto $z=a$ è *univocamente invertibile* quando il coefficiente di $z-a$ nella serie di TAYLOR $f=P(z-a)$ sia diverso da zero. La funzione inversa viene rappresentata da una serie di potenze i cui coefficienti si possono calcolare con equazioni lineari ricorrenti.

La continuità della funzione inversa permette di dedurre che: *nell'intorno di un punto regolare, a, soddisfacente alla condizione di inversione predetta, la funzione $f(z)$ assume qualsiasi valore sufficientemente prossimo a $f(a)$.*

Il teorema di CAUCHY sullo sviluppo in serie mostra che le funzioni di variabile complessa possono definirsi come *funzioni analitiche*, secondo la denominazione di LAGRANGE. Tale definizione appunto viene ripresa dal WEIERSTRASS e da lui posta a base di questa teoria. Qui importa sopratutto ricordare l'idea di WEIERSTRASS relativa al

Prolungamento analitico di una funzione. Se la funzione, $f(z)$, della variabile complessa z, è definita entro un cerchio C

di centro a, la $f(z)$ è sviluppabile in una serie di potenze di $z - a$, $P(z - a)$, che converge entro C. Ma, preso entro C un altro punto b, la $f(z)$ è pure sviluppabile in una serie, $P(z - b)$, procedente per le potenze di $z - b$, e la serie *dedotta*, che costituisce il nuovo sviluppo, ammetterà un cerchio di convergenza C' di centro b. Nella regione comune a C, C', le due serie $P(z - a)$ e $P(z - b)$ rappresentano la medesima funzione $f(z)$; ma in generale C' comprenderà anche una regione di punti esterna a C, e quindi la definizione della $f(z)$, che per mezzo del primo sviluppo era data in C, si estende, mediante la serie dedotta, anche ai punti di C' fuori di C. In modo analogo la funzione definita entro C' si potrà estendere in generale ad altre regioni del piano.

Ora la serie $P(z - a_n)$ si dirà *prolungamento analitico* della $P(z - a)$ se si passa da questa a quella mediante un numero finito di serie, ciascuna delle quali è dedotta dalla precedente. E si dimostra il teorema fondamentale:

Se una serie $P(z - a_n)$ nasce per prolungamento analitico dell'altra $P(z - a)$, viceversa questa può ottenersi come prolungamento analitico da $P(z - a_n)$.

Come corollario: *Se due serie nascono per prolungamento analitico da una medesima terza serie, ciascuna di esse si ottiene per prolungamento analitico dell'altra.*

Ciò posto, tutte le serie di potenze che si possono ottenere per prolungamento analitico da una serie iniziale $P(z - a)$ costituiscono un insieme tale che, partendo da una qualunque serie dell'insieme stesso, si ottengono — per prolungamento analitico — tutte le altre.

Supponiamo per semplicità che i cerchi di convergenza delle serie successivamente dedotte, a partire da uno sviluppo della $f(z)$, invadano tutto il piano, sicchè ogni punto di questo, fatta eccezione per un numero finito (o discreto) di punti (*singolari*), sia interno a un qualche cerchio di convergenza; la quale ipotesi si verifica per le funzioni più elementari dell'analisi. Distingueremo due casi:

1) Esiste una funzione ad un valore della variabile complessa z, definita in tutto il piano ad eccezione di un numero finito di punti, la quale è rappresentata in C dalla serie $P(z - a)$. Allora il prolungamento analitico di codesta serie conduce a differenti *espressioni analitiche* dell'unica funzione suddetta. Per conseguenza, se accade che in una

successione di serie dedotte

$$P(z - a), \quad P(z - a_1), \ldots \quad P(z - a_n),$$

si ritorni con a_n al punto di partenza: $a_n = a$, dovrà anche la serie $P(z - a_n)$ coincidere con la $P(z - a)$.

2) Ma può accadere invece che la serie $P(z - a_n)$ — quando a_n ricade in a — sia diversa da $P(z - a)$. In tale ipotesi non è più possibile definire in tutto il piano una funzione ad un valore della variabile complessa z, cui convengano le predette espressioni analitiche; ma si è naturalmente condotti ad estendere il concetto stesso di funzione, introducendo accanto alle funzioni ad un valore, o *monodrome*, le funzioni a più valori o *polidrome*, alle quali corrisponderanno per un medesimo punto diversi sviluppi in serie, dedotti l'uno dall'altro come prolungamento analitico, cui si dà il nome di *rami*.

Già Cauchy ha avvertito questa distinzione (il nome di funzione monodroma gli appartiene); secondo la definizione di Weierstrass: *la funzione analitica* (che nella ipotesi precedente ha come *campo di esistenza* tutto il piano) *corrisponde alla totalità delle serie di potenze dedotte per prolungamento l'una dell'altra*, le quali diconsi *elementi* della funzione stessa.

E pertanto: una funzione analitica resta definita in tutto il suo campo di esistenza (che nell'ipotesi precedente invade tutto il piano) quando sia data in una regione superficiale comunque piccola; ma di più sussiste il *teorema di* Gauss-Riemann: la funzione analitica resta completamente definita quando sia data sopra un arco di linea o in un gruppo di infiniti punti con un punto limite, purchè in questo sia regolare; tale condizione permette di determinare nel punto-limite lo sviluppo che costituisce un elemento della funzione.

Ora il teorema di Cauchy sullo sviluppo in serie delle funzioni di variabile complessa si potrà precisare come segue:

Teorema di Cauchy *sullo sviluppo in serie.* Lo sviluppo di una funzione di z in serie di potenze $P(z - a)$ converge in un cerchio di centro a che passa per il più prossimo punto singolare: la serie converge in tutto il piano se non vi sono punti singolari al finito.

Si deduce che: dato un elemento di funzione analitica, $P(z - a)$, ed un punto b ove la funzione f sia regolare, il *prolungamento analitico* di $P(z-a)$ resta definito come *estensione per continuità* della prima funzione, passando da a a b *lungo una linea* che abbia a e b come estremi e non passi per alcun punto singolare.

Infatti, se si designa con r la minima distanza del più prossimo punto singolare dalla linea l, ogni punto p di l è centro di un cerchio di raggio r entro cui la funzione $f(z)$ ammette uno sviluppo convergente $P(z-p)$, e — dividendo la linea in un numero finito di archi di lunghezza $\leq r$ — si ottiene quindi una successione di serie dedotte dalla prima $P(z-a)$, che conduce (come prolungamento analitico) ad una determinata serie $P(z-b)$; qualunque sia la suddivisione della linea l, questa dà luogo ad una successione di serie dedotte conducente al medesimo prolungamento analitico.

31. **Punti singolari.** — La definizione di una funzione analitica dà luogo a punti d'eccezione o *singolari*, a cui si riferiscono le considerazioni seguenti.

Anzitutto giova osservare che nel prolungamento analitico di una serie di potenze, il punto all'infinito non può mai essere raggiunto e d'altronde non ha senso parlare di una serie procedente per le potenze di $z-\infty$; parrebbe dunque che il punto all'infinito dovesse riguardarsi sempre come punto singolare. Ma può accadere che questa singolarità sia solo *apparente*. Per esaminare tale questione giova considerare gli sviluppi della $f(z)$ di fronte a sostituzione lineari (proiettività) effettuate su z, le quali permettono di portare il punto all'infinito in un punto proprio qualsiasi, per esempio nel punto zero. Così, cambiando z in $\frac{1}{z}$, si sarà condotti a esaminare se la funzione $f\left(\frac{1}{z}\right)$ sia sviluppabile in serie di potenze di z; se ciò accade la $f(z)$ — che risulta sviluppata per le potenze negative di z — si dirà *regolare nel punto* $z=\infty$.

Ora i punti singolari di una funzione analitica danno luogo ad una distinzione o classificazione.

Cominciamo dalle funzioni monodrome. Qui abbiamo

1) I *poli* (secondo la denominazione di BRIOT e BOUQUET), cioè i punti dove la funzione $f(z)$ diventa infinita in modo che l'inversa $\frac{1}{f(z)}$ sia regolare; il modo di diventare infinita

della $f(z)$ in un polo a si può caratterizzare mediante una potenza intera e positiva $(z-a)^n$, in tal guisa che $(z-a)^n f(z)$ sia regolare ed assuma in a un valore finito non nullo: n si dice allora l'*ordine* del polo.

2) *Punti singolari essenziali* (secondo la denominazione di WEIERSTRASS), cioè punti dove la funzione possiede una effettiva discontinuità, di guisa che avvicinandosi in modi diversi a un punto singolare essenziale non si ha un limite determinato (finito o infinito).

Risulta da un teorema di WEIERSTRASS [1] che ogni punto singolare di una funzione monodroma il quale non sia un polo, è un punto singolare essenziale. La distinzione fra poli e punti singolari essenziali viene illuminata da un teorema fondamentale di LAURENT (1843).

Si abbia un punto singolare *isolato* della funzione monodroma $f(z)$, cioè tale che non sia limite di altri punti singolari. Intorno al punto singolare a, preso come centro, descriviamo un cerchio C che passi per il più prossimo punto singolare di f ed un secondo cerchio C' di raggio piccolo quanto si vuole; sussiste allora il

Teorema di LAURENT. Nella corona circolare compresa fra C e C', la funzione $f(z)$ si può sviluppare in una serie procedente per le potenze intere, positive e negative, di $z-a$; la quale si decompone in una serie procedente per le potenze positive $P(z-a)$, rappresentante una funzione regolare entro C, e in una serie procedente per le potenze negative e convergente in tutto il piano fuori di C'. Quest'ultima serie rappresenta una funzione di $z' = \dfrac{1}{z-a}$ monodroma e regolare in tutto il piano salvo che in $z' = \infty$; nel caso di un polo la serie stessa si arresta riducendosi a un polinomio, nel caso di un punto singolare essenziale essa porge una *trascendente intera* dalla variabile z'.

Ora sussistono per le funzioni definite in tutto il piano i due teoremi fondamentali [2].

I) Una *funzione monodroma priva di punti singolari* (a distanza finita o infinita) è una *costante*. Questo teorema si può far risalire a CAUCHY (1844), ma nella

(1) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 166.
(2) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 164, 168.

forma precedente trovasi nel trattato di BRIOT e BOUQUET (1859).

II) Una *funzione monodroma*, ovunque regolare salvo un *numero finito di poli*, è una *funzione razionale*: precisamente essa ha un polo all'infinito d'ordine $n-m$ se è il quoziente di due polinomi d'ordine n, m con $n>m$.

Il teorema II) appartiene a MÉRAY (1855); esso si applica alle funzioni dotate soltanto di poli, notando che l'esistenza di infiniti poli porta un punto singolare essenziale nei punti limiti. Questa osservazione può dirsi rientrare in un teorema più generale relativo ai punti singolari essenziali.

Teorema di WEIERSTRASS (1) (1876). *Nell' intorno di un punto singolare essenziale isolato, la funzione assume infinite volte valori prossimi quanto si vuole a qualsiasi numero.*

Questo teorema si estende al caso di un punto singolare che sia limite di poli ma non di punti singolari essenziali. Esso può venire precisato dal

Teorema di PICARD (2) (1879). Nell'intorno di un punto singolare essenziale ove non cadano altre singolarità essenziali, *la funzione assume effettivamente tutti i valori eccepiti due al più.*

Passiamo a considerare i punti singolari delle funzioni polidrome. Qui interviene anzitutto la distinzione seguente:

1) Punti singolari nell'intorno dei quali la funzione è monodroma;

2) e *punti di diramazione*, tali che un giro per quanto piccolo attorno al punto produce un effettivo scambio sui rami della funzione.

Si circondi il punto singolare a con un cerchio C passante per il più prossimo punto singolare e si descriva un secondo cerchio C' di raggio piccolo quanto si vuole: ciascun ramo della funzione $f(z)$, considerato nella corona circolare fra C e C' costituirà nel primo caso una funzione monodroma, laddove, nel secondo caso, vi saranno almeno due rami che non possono considerarsi come funzioni, distinte, ad un valore nella corona circolare suddetta, giacchè per un giro chiuso attorno a C' il primo ramo si prolunga analiticamente nel secondo.

(1) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 166.

(2) Cfr. PICARD. Traité d'Analyse, t. III, pag. 346.

Ora quando il punto singolare a non è di diramazione per $f(z)$, vale nella corona circolare CC' lo sviluppo di LAURENT come per le funzioni monodrome in tutto il piano, e così un ramo qualsiasi della $f(z)$ si decompone nella somma d'una funzione $\varphi(z)$ regolare entro C e di una funzione $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ monodroma e regolare in tutto il piano salvo nell'unico punto singolare $z=a$: questa G sarà un polinomio rispetto a $\frac{1}{z-a}$ quando a sia un *polo*, ed invece sarà una serie effettiva, rappresentante una trascendente intera, quando a sia un *punto singolare essenziale.*

Risulta da quanto precede che una effettiva novità nello studio dei punti singolari delle funzioni polidrome si ha soltanto per i punti di diramazione. Se a è un punto singolare di diramazione per la funzione $w=f(z)$, considereremo un ramo di $f(z)$ che viene effettivamente cambiato in un altro mediante un giro attorno ad a. Converrà distinguere due casi:

1) La trasformazione prodotta sul detto ramo da un giro intorno ad a è periodica, ossia il ramo fa parte di un *ciclo* $(w_1 w_2 \dots w_q)$ di ordine finito q, i cui elementi subiscono la sostituzione circolare $(12\dots q)$ per effetto del nominato giro; il punto a dicesi allora un punto di *diramazione algebrica* per i rami $w_1 w_2 \dots w_q$.

2) La trasformazione prodotta su un ramo di $f(z)$ da un giro intorno ad a conduce ad infiniti rami: si ha per questi un punto di *diramazione trascendente.*

Il caso, che ha per noi maggior importanza, in cui si ha diramazione algebrica con permutazione circolare dei rami $w_1 w_2 \dots w_q$, si lascia studiare effettuando su z la sostituzione:

$$z-a=t^q,$$

la quale cambia la funzione w_i di z in una funzione monodroma della variabile t. Infatti un giro intorno al punto zero nel piano della variabile t, aumentando l'argomento di t di 2π, aumenta quello di $z-a$ di $2q\pi$ e quindi corrisponde a q giri di z intorno ad a, sicchè, quando t per il predetto giro ritorna in se stesso, si eseguisce sui rami $w_1 w_2 \dots w_q$ la sostituzione $(12\dots q)^q$, equivalente all'identità.

Ora la funzione $w_i(t)$ potrà avere in $t=0$ $(z=a)$ un punto regolare, oppure un polo o un punto singolare essenziale; nei primi due casi si dirà che $z=a$ costituisce per $w_i\,(z)$ una *singolarità algebrica*, nell' ultimo caso $z=a$ costituirà per $w_i(z)$ una *singolarità essenziale* (con diramazione algebrica).

Ciò posto il procedimento spiegato innanzi permette di estendere il *teorema* di WEIERSTRASS alle *funzioni polidrome*, considerate nell'intorno di un punto singolare essenziale con diramazione algebrica. Lo stesso può dirsi anche per il *teorema* di PICARD.

32. **Funzioni algebriche.** — Consideriamo l'equazione algebrica

$$f(xy)=a_0(x)y^m+a_1(x)y^{m-1}+\ldots.+a_m(x)=0,$$

dove f è un polinomio dei gradi n, m rispetto ad x, y, e x, y sono due variabili complesse:

$$x=x_1+ix_2, \quad y=y_1+iy_2.$$

Escludiamo che f contenga come fattore la potenza s-ma $(s>1)$ di un polinomio d'ordine inferiore; allora per un valore generico di x si hanno m valori distinti di y:

$$y_1\,y_2\ldots.y_m,$$

che sono funzioni analitiche della x: infatti la derivata

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$$

resta definita per ciascun ramo y_i.

Appare un'eccezione:

1) per i punti (poli) radici di $a_0(x)=0$ a cui corrisponde un $y=\infty$;

2) per i punti (*critici*) dove $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ e quindi due valori della y vengono a coincidere.

Per studiare più semplicemente il comportamento della funzione algebrica nei punti critici, si può supporre che questi siano distinti dai poli, giacchè a tale caso ci si può sempre ridurre con una sostituzione lineare sopra la variabile y.

I punti critici si distinguono in

1) *punti di diramazione*, girando intorno ai quali si permutano due o più valori della y; e in

2) *punti critici apparenti* dove coincidono numericamente due o più valori di $y(x)$ restando però distinti nell'intorno i rami, cioè gli sviluppi in serie corrispondenti.

Un punto critico apparente non costituisce una singolarità per la funzione algebrica $y(x)$. Il più semplice esempio di un tale punto è offerto da un *nodo della curva* $f(xy)=0$; qui si hanno due rami distinti della funzione $y(x)$: $y_1(x)$ e $y_2(x)$, che vengono a coincidere numericamente nel punto, ma che non si scambiano per un giro della variabile complessa attorno a questo e si conservano del resto regolari nel punto critico apparente (Cfr. L. 1°, pag. 76).

Importa osservare che sono certamente punti critici di diramazione e non apparenti, per la funzione algebrica $y(x)$, quei punti in cui $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ma $\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$; infatti se ciò accade per $x=a$, $y=b$, la funzione inversa $x(y)$ è regolare e si ha uno sviluppo in serie di TAYLOR, $x=a+P(y-b)$, dove P comincia con una certa potenza $r>1$ di $y-b$; allora l'inversione della serie $x-a=P(y-b)$, nell'intorno di $y=b$, conduce a r valori di $x-a$ che, per un giro attorno al punto b, vengono permutati ciclicamente come i valori di $(x-a)^{\frac{1}{r}}$, i quali — moltiplicati per un coefficiente numerico — ne porgono la prima approssimazione. Ponendo $x-a=t^r$ si ottiene uno sviluppo in serie della funzione $y(x)$, procedente per le potenze di $t=(x-a)^{\frac{1}{r}}$; ma su ciò ritorneremo nel libro quarto.

Qui giova ricordare che anche per $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ può aversi un punto critico di effettiva diramazione: l'esempio più semplice è offerto dalla cuspide ordinaria di una curva $f(xy)=0$ (Cfr. pag. 77).

Le singolarità che si sono riconosciute appartenere a una funzione algebrica $y(x)$ sono caratteristiche in questo senso che:

Una funzione polidroma ad m rami, data in tutto il piano della variabile complessa x, la quale possegga soltanto un numero finito di poli e di punti di diramazione algebrica (distinti dai poli o anche sovrapposti a questi) *è una funzione algebrica*, definita da un'equazione $f(xy)=0$ di grado m in y.

Infatti siano $y_1 y_2 \ldots y_m$ i rami della $y(x)$ e si considerino le funzioni simmetriche elementari

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \Sigma y_i \\ a_2 &= \Sigma y_i y_k \\ &\ldots\ldots \\ a_m &= y_1 y_2 \ldots y_m; \end{aligned}$$

le a_i risultano funzioni monodrome in tutto il piano della x, dotate soltanto di un numero finito di poli e quindi funzioni razionali della x; pertanto la $y(x)$ verrà definita dalla equazione algebrica

$$y^m - a_1 y^{m-1} + \ldots + (-1)^m a_m = 0,$$

il cui primo membro diviene un polinomio in x, y moltiplicando per il minimo comune multiplo dei denominatori delle a_i.

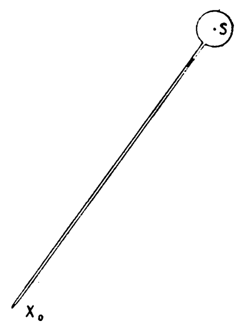
Le considerazioni precedenti si riferiscono al comportamento della funzione algebrica $y(x)$ nell'intorno di un punto singolare; ora consideriamo la funzione stessa nella sua integrità, cioè come funzione analitica definita in tutto il piano della variabile complessa x. Si domanda se e come gli m valori che la y assume in un punto generico possono essere permutati fra loro, con un giro nel piano x.

Anzitutto sussiste il

Teorema fondamentale. In qualunque area semplicemente connessa, cioè limitata da un solo orlo privo di nodi, la quale non contenga punti di diramazione, ogni ramo della funzione algebrica $y(x)$ è una funzione monodroma.

Supponiamo dapprima che nell'area semplicemente connessa A non cada alcun punto singolare della funzione $y(x)$. A partire da un punto regolare x_0, dove si hanno, per la y, m valori distinti $y_1 y_2 \ldots y_m$, si descriva una linea chiusa C che ritorni in x_0, e suppongasi che il ramo $y_1(x)$ attraverso codesto cammino si prolunghi analiticamente in un altro ramo, $y_2(x)$. Si faccia, entro A, variare con continuità la C fino a ridurla un cerchio piccolo quanto si vuole. Siccome y_2 non può variare con continuità al variare di C, così esso rimane fisso e in definitiva anche il cerchio anzidetto cambia y_1 in y_2; ma questa conclusione è assurda perchè in un intorno infinitesimo del punto regolare x_0, la funzione *continua* $y_1(x)$ non può distaccarsi dal valore iniziale che per quantità infinitesime, mentre la differenza $y_1(x_0) - y_2(x_0)$ si è supposta diversa da zero.

Giova mettere in evidenza il punto della dimostrazione precedente in cui s'introduce l'ipotesi che l'area A non contenga punti singolari; se A contiene un punto singolare s e se questo è interno alla linea C, la C non può ridursi per continuità ad un cerchietto per x_0 senza passare in un dato momento per s, ma allora la continuazione analitica sopra la linea che contiene un punto singolare non è più possibile. È lecito tuttavia ridurre la linea C ad un *cappio* che partendo da x_0 circondi s; diremo che si percorre un cappio quando si descriva una linea l che, partendo da x_0, vada ad un punto prossimo ad s, poi un cerchietto intorno ad s, e quindi si ritorni al punto x_0 seguendo (in senso inverso) la medesima linea l. È chiaro che se s è un polo, oppure un punto critico intorno a cui non si abbia diramazione per la $y(x)$, il cappio anzidetto non può cambiare in alcun modo y_1 in y_2, sicchè il teorema fondamentale risulta completamente dimostrato.



Ora consideriamo la funzione algebrica $y(x)$ in tutto il piano della x; sorge l'importante *questione se* i suoi m *rami* $y_1 y_2 \dots y_m$ *costituiscano una sola funzione analitica, oppure l'insieme di più funzioni analitiche.* La risposta è molto semplice: *avviene il primo caso se l'equazione* $f(xy) = 0$ *è irriducibile, il secondo se è riducibile.*

Anzitutto è chiaro che se

$$f(xy) = \varphi(xy)\,\psi(xy) = 0,$$

le radici di $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ costituiscono due funzioni analitiche distinte.

Viceversa pongasi che, per un giro qualsiasi nel piano della variabile complessa, y_1 venga cambiato in $y_2 \dots y_q$ $(q < n)$, ma non in $y_{q+1} \dots y_m$. Allora si vede che i rami $y_1 y_2 \dots y_q$ formano un sistema chiuso, di guisa che da uno qualsiasi di essi si può passare per prolungamento analitico soltanto ad uno degli altri. Quindi si può dire che le $y_1 y_2 \dots y_q$, rami di una funzione analitica dotata di poli e di punti di diramazione algebrica, sono le radici di un'equazione algebrica di grado q: $\varphi(xy) = 0$, dove φ è un divisore di f.

Dunque, se $f(xy) = 0$ è una equazione irriducibile, esiste un giro chiuso nel piano della variabile complessa x che porta uno dei rami $y_1 y_2 \dots y_m$ in un altro qualsiasi assegnato. Ad ogni linea chiusa C, descritta come cammino di un punto a partire da una posizione regolare x_0, corrisponde una sostituzione

$$S_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

sugli m rami $y_1 y_2 \dots y_m$. Le sostituzioni analoghe ad S_C formano un gruppo, che dicesi *gruppo di monodromia* della funzione algebrica $y(x)$; e, per quanto sopra è detto, questo gruppo è *transitivo* quando $f(xy) = 0$ è irriducibile.

Il cammino chiuso C può ridursi per deformazione continua, senza attraversare punti di diramazione, a una successione di cappi che partendo dal punto x_0 vadano a punti di diramazione della $y(x)$, e quindi: il ***gruppo di monodromia si può generare per moltiplicazione delle sostituzioni elementari relative a un sistema fondamentale di cappi*** che, partendo da un punto regolare x_0, vadano ai punti di diramazione.

La proprietà caratteristica del gruppo di monodromia è la seguente:

I) Se una funzione razionale

$$F(y_1 y_2 \dots y_m)$$

degli m rami della funzione algebrica $y(x)$ (e di x) rimane invariata per una qualsiasi sostituzione del gruppo di monodromia, essa è una funzione razionale di x.

II) Viceversa, se una funzione razionale $F(y_1 y_2 \dots y_m)$ si può esprimere razionalmente per x, essa rimane invariata per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia.

Il teorema I) segue dall'osservare che F risulta una funzione analitica monodroma della x, dotata soltanto singolarità polari, e quindi razionale. Il teorema II) è evidente perchè la funzione razionale F è monodroma.

33. Porismi di Chasles e presupposti della teoria geometrica delle equazioni. — Abbiamo già registrato il tentativo della scuola geometrica, sorta nella prima metà del secolo scorso, di porre la teoria delle curve su basi sintetiche, ritornando in qualche modo allo spirito della geometria greca per riguardo all'indirizzo analitico di DESCARTES. Da questo punto di vista è caratteristica l'introduzione di alcuni *principî* e proposizioni generali, che sembrano atti a sostituire l'uso del calcolo algebrico e in qualche modo a definire quelle curve e superficie che DESCARTES chiamava *geometriche* (in contrapposto a meccaniche) e che da LEIBNIZ ricevettero il nome di *algebriche* (in contrapposto a trascendenti). Per noi, venendo meno l'interesse puristico, l'esame di quei principî conserva tuttavia un valore, in quanto giova a spiegare l'intima natura dei metodi sintetici, mettendo in luce i presupposti della teoria geometrica delle equazioni.

Fra i principî cui si riferisce il nostro discorso occorre menzionare anzitutto quelli che lo CHASLES (1) designava col nome di *porismi* e che egli cercava riattaccare alle proposizioni dei greci che portano questo nome. Il porisma più generale di CHASLES, nel quale si riassumono tutti gli altri, enuncia in sostanza che « una curva geometrica piana d'ordine n può essere rappresentata da un'equazione algebrica di grado n rispetto a un sistema di coordinate proiettive omogenee (2) ».

Ciò che sembra particolarmente caratteristico per l'interpretazione dei porismi e dell'ufficio che ad essi attribuiva la scuola di CHASLES, è che la curva *geometrica* si suppone definita indipendentemente dalla sua equazione *algebrica*, comunque non appaia chiaramente su cosa si fondi l'esistenza della relazione segmentaria che, nell'intendimento di CHASLES, ne sostituisce l'equazione. Del resto ad una definizione sintetica delle curve (geometriche) accenna il CREMONA per il quale « un *luogo* dicesi dell'*ordine* n se una retta qualunque l'incontra in n punti (reali, immaginari, distinti o coincidenti) (3) »; dove egli sembra riprendere il concetto adombrato da PONCELET che: la proprietà di essere incontrata

(1) Lettera a QUETELET, (Bruxelles, 1830). Cfr. « Aperçu Historique », III ed., 1899, pag. 279.

(2) Cfr. CREMONA. Introduzione, n. 36, 37. Opere, t. I, pag. 350.

(3) Introduzione, n. 28, l. c., pag. 344.

in n punti dalle rette del piano valga a caratterizzare la famiglia delle curve algebriche. Ma forse è lecito anche attribuire ai nominati geometri il pensiero che le curve geometriche ammettano una definizione induttiva per mezzo di condizioni e costruzioni geometriche a partire dalle figure elementari; i suddetti principî si applicherebbero quindi non tanto ad una famiglia di enti che si suppongono dati a priori, quanto ad una categoria di enti che possono essere via via introdotti mediante procedimenti di natura determinata.

Ora, in ordine alla questione se la proprietà di essere incontrate in n punti sia caratteristica per le curve algebriche d'ordine n, ci limiteremo ad alcune semplici osservazioni.

1) Anzitutto la questione va risoluta negativamente nel campo reale, ove s'intende che n designi il massimo numero delle intersezioni della curva con le rette. Basta invero considerare una qualsiasi linea ovale priva di flessi: una tale linea è incontrata da ogni retta del piano in due punti al più, ma si può ben supporre che essa non sia una ellisse, come si rende evidente ove si assuma per esempio la forma della sezione meridiana di un uovo. Giova avvertire che per una curva così definita graficamente nel campo reale non si saprebbe neppur dare senso alla domanda relativa alle sue intersezioni immaginarie con una retta.

2) Pongasi che una *curva* C sia definita come serie continua di ∞^2 punti reali o complessi del piano (xy), ove x e y sono variabili complesse, e la C sia tale che una *retta generica del piano* (reale o no) *la incontri* esattamente *in n punti*; da tali ipotesi *non è possibile concludere che la* C *sia algebrica* (d'ordine n).

Infatti l'insieme dei punti reali del piano (xy) costituisce un luogo C che viene incontrato da una retta immaginaria in *un* punto, cioè nell'unico punto reale che essa contiene (intersezione di essa con la retta coniugata). Ora le rette immaginarie del piano (xy) sono le rette generiche, giacchè la condizione di realità per la retta $ax+by=0$, dove

$$a=a_1+ia_2,\quad b=b_1+ib_2,$$

si traduce nelle equazioni

$$a_2=0,\quad b_2=0.$$

L'esempio precedente può essere facilmente generalizzato, e si può anche avere una C la cui parte reale sia una effettiva linea; questa possibilità si desume già dall'esempio precedente con una opportuna trasformazione che renda immaginari i punti generici del piano reale.

Ulteriori sviluppi in quest'ordine di questioni vengono portati dagli studi del SEGRE su « Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici » ([1]). Tuttavia sembra che la questione fondamentale sopra accennata non possa ancora ritenersi definitivamente risoluta (in senso positivo o negativo) per quanto si riferisce alla natura di una serie continua doppiamente infinita di punti, C, contenuta nel piano complesso (xy), la quale debba essere incontrata in n punti da ogni retta *senza eccezione*, per modo che il numero delle intersezioni (semplici o multiple) non si riduca mai minore di n e non divenga mai infinito.

Un principio introdotto pure da CHASLES, a cui spetta un ufficio analogo ai sopra menzionati porismi, è il principio che « ogni corrispondenza biunivoca fra rette, nella costruzione della quale non entrino trascendenti (funzioni o curve), conserva il birapporto, ossia è una proiettività ([2]) ».

Un corollario del principio anzidetto è che: posta fra due rette a, b una corrispondenza [1, 2], le coppie di punti corrispondenti su b ai punti di a formano una involuzione (§ 2); di qui lo CHASLES è condotto ad una generalizzazione del principio anzidetto. La restrizione poco chiaramente espressa dallo CHASLES, che le corrispondenze di cui si tratta non includano trascendenti, viene soppressa dal CREMONA; nel n° 7 della sua Introduzione ([3]) questi dà addirittura come definizione di proiettività fra forme di prima specie la corrispondenza biunivoca, dalla quale crede di poter dedurre l'equazione bilineare, che in realtà figura nei suoi ragionamenti come presupposto ([4]).

Nello stesso ordine di idee, durante il decennio succes-

([1]) Cfr. Math. Annalen. Bd. 40, pag. 413 ove sono anche citati i lavori precedenti sull'argomento.

([2]) Comptes Rendus, 24 dec. 1855, vol. 41, pag. 1097.

([3]) L. c., pag. 325.

([4]) A tale proposito si confronti anche la nota di CHASLES nei Comptes Rendus, 16 agosto 1853.

sivo, i geometri ammisero che ogni corrispondenza $[m, n]$ sulla retta possegga $m+n$ punti uniti, senza rilevare l'ipotesi della algebricità di cui tacitamente facevano uso.

La necessità di enunciare tale ipotesi fu rilevata da GEISER (1) (1870), il quale ha messo in luce che l'algebricità figura nel principio di CHASLES come ipotesi necessaria che occorre enunciare in modo esplicito, altrimenti il principio non può tenersi valido, sia nel campo reale, sia nel campo complesso.

Nel campo reale GEISER adduce come esempio la corrispondenza che si ottiene, segando due tangenti fisse con una tangente variabile, in relazione ad una linea ovale priva di flessi: questo è in sostanza l'esempio che sopra abbiamo addotto per chiarire la questione relativa alla proprietà caratteristica delle linee d'ordine n (questione alla quale anche GEISER accenna alla fine della già citata memoria). Ma qui occorre aggiungere che la proposizione « una corrispondenza biunivoca fra due rette *reali* è una proiettività » *non è vera neppure con la restrizione* che la corrispondenza sia *algebrica*. Infatti l'equazione

$$y = x^3$$

pone fra le rette reali x e y una corrispondenza biunivoca algebrica che non è una proiettività.

GEISER osserva ancora che esistono corrispondenze biunivoche fra due variabili complesse x e y, che non sono proiettive. A tale scopo egli pone fra i piani rappresentativi delle due variabili complesse una omografia che non sia una similitudine; la corrispondenza così ottenuta non può essere rappresentata da una equazione bilineare fra le x, y, perchè non muta cerchi in cerchi (2). Un esempio anche più semplice è offerto dal *coniugio*, dove si ponga

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = x_1 - ix_2.$$

A più forte ragione non è lecito affermare che una corrispondenza $[m, n]$, fra due variabili complesse, sia sempre algebrica e però — nel caso di forme sovrapposte — possegga $m+n$ elementi uniti.

(1) Annali di matematica. Serie II, vol. IV, pag. 25.
(2) Cfr. BIANCHI, op. cit., pag. 31.

Quando si sia rilevato che l'algebricità figura come presupposto nel principio di corrispondenza, si sarebbe tentati a mettere in dubbio, o almeno a sottoporre a critiche minute ed impaccianti, gran parte degli sviluppi in cui i teoremi sulle corrispondenze trovano applicazione. In una parola la critica che tende a riconoscere le precise condizioni di validità della teoria, rischia di sacrificare al rigore la fecondità.

Che fare? Il successo pratico dei metodi geometrici (riconosciuto anche da GEISER) ne porge in qualche modo una *giustificazione sperimentale*; è dunque lecito ritenere possibile anche una *giustificazione razionale*. E questa si ottiene infatti mercè un esame delle operazioni che ricorrono in tale ordine di questioni.

In breve coteste operazioni si riducono alle quattro fondamentali seguenti.

1) *Somma* di due corrispondenze: se ad x corrispondono, nella corrispondenza Π_1, $y_1 \dots y_n$ e, nella Π_2, $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m$, la corrispondenza somma, $\Pi_1 + \Pi_2$, si ottiene facendo corrispondere ad x il gruppo degli $m+n$ elementi $y_1 \dots y_n \ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m$.

2) *Differenza* di due corrispondenze: $\Pi_1 - \Pi_2 = \Pi_3$ se $\Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3$.

3) *Interferenza* di due corrispondenze: se ad x corrispondono in Π_1 i punti $y_1 \dots y_n \ y_{n+1} \dots y_m$ e in Π_2 i punti $y_1 \dots y_n \ \bar{y}_{n+1} \dots \bar{y}_p$, l'interferenza di Π_1 e Π_2 si definisce facendo corrispondere ad x i punti $y_1 \dots y_n$; designando con Π_3 l'interferenza anzidetta e ponendo

$$\Pi_1' = [x, \ y_{n+1} \dots y_m], \quad \Pi_2' = [x, \ \bar{y}_{n+1} \dots \bar{y}_p],$$

dove si suppone che Π_1' e Π_2' non interferiscano, la Π_3 resta definita dalle uguaglianze

$$\Pi_1 = \Pi_1' + \Pi_3, \quad \Pi_2 = \Pi_2' + \Pi_3.$$

4) *Prodotto* di due corrispondenze: Posto $\Pi_1 = [x, y]$, $\Pi_2 = [y, z]$, il prodotto resta definito da

$$\Pi_2 \Pi_1 = [x, z].$$

Le operazioni di somma differenza, interferenza e prodotto, applicate un numero finito di volte a partire da corrispondenze algebriche, conducono sempre a corrispondenze algebriche.

Questo principio fondamentale, che vale a dimostrare una volta per tutte l'algebricità delle corrispondenze cui si è condotti dalle costruzioni geometriche, si lascia giustificare assai semplicemente in base alla teoria elementare delle equazioni algebriche.

Anzitutto date le corrispondenze algebriche $f_1(xy)=0$, $f_2(xy)=0$, la loro somma è la corrispondenza algebrica $f(xy)=f_1(xy)f_2(xy)=0$ (Cfr. L. 1°, § 16, pag. 102); e così se $f(xy)$ è divisibile per $f_1(xy)$, allora $f_2(xy)=0$ rappresenta la differenza delle corrispondenze $f(xy)=0$ e $f_1(xy)=0$.

Similmente se le corrispondenze $f_1(xy)=0$ e $f_2(xy)=0$ interferiscono, i polinomi f_1 e f_2 posseggono un massimo comun divisore che si determina razionalmente, e che uguagliato a zero rappresenta l'interferenza.

Infine anche il prodotto di due corrispondenze algebriche $f(xy)=0$, $\varphi(yz)=0$, è una corrispondenza algebrica che si costruisce razionalmente, in base alla teoria della risultante, eliminando y fra le $f=0$ e $\varphi=0$.

Il principio fondamentale che sopra abbiamo giustificato in base alla teoria elementare delle equazioni, si rende anche evidente tenendo presenti le proprietà caratteristiche delle funzioni algebriche come funzioni analitiche, definite nell'intero piano delle variabile complessa. Ma in quest'ordine di idee si può ottenere un resultato più significativo, che viene enunciato dal seguente

Teorema. *Ogni corrispondenza* $[m, n]$ *analitica, la quale sia definita per tutti i punti reali e immaginari delle rette* x *e* y (cioè fra i piani rappresentativi delle due variabili complesse), *tolti al più un numero finito di punti singolari, è algebrica e viene rappresentata da un'equazione*

$$f(xy)=0$$

dei gradi m, n *rispetto ad* x, y.

In particolare:

Ogni corrispondenza biunivoca analitica, la quale sia definita per tutti i punti reali o immaginari di due rette x *e* y, *tolti al più un numero finito di punti singolari, è una proiettività,* cioè viene rappresentata da un'equazione bilineare

$$axy+bx+cy+d=0.$$

Dimostriamo il teorema riferendoci dapprima al caso particolare delle corrispondenze biunivoche.

Per ipotesi la y è funzione analitica e monodroma della x, definita in tutto il piano rappresentativo di questa, fatta eccezione per un numero finito di punti, e quindi dotata di un numero finito di singolarità. Se tale funzione non possiede un punto singolare essenziale, essa è razionale (§ 31). Facciamo vedere che effettivamente la y non può avere un punto singolare essenziale.

A tale scopo ricordiamo il teorema di WEIERSTRAS che nell'intorno di un punto singolare essenziale b, la funzione y assume infinite volte valori prossimi quanto si vuole ad un numero prefissato ad arbitrio; e ricordiamo d'altra parte che nell'intorno d'un punto regolare a ove la $y(x)$ sia univocamente invertibile, la y assume qualsiasi valore sufficientemente prossimo ad $y(a)$. Ciò posto, designando con ρ la distanza fra il punto regolare a e l'ipotetico punto singolare essenziale b, si considerino due cerchi C_a e C_b di centri a e b, il cui raggio sia minore di $\frac{\rho}{2}$, e che escludano altri eventuali punti singolari. Entro C_b esiste certo un punto x in cui la y assume un certo valore $\bar{y}$ prossimo quanto si vuole ad $y(a)$; ma, essendo $\bar{y}$ sufficientemente prossimo ad $y(a)$ $\left(\text{rispetto a } \frac{\rho}{2}\right)$ anche C_a dovrà contenere un punto x ove la funzione y assume il valore $\bar{y}$; si deduce che ad $\bar{y}$ corrisponde più di un valore di x contro l'ipotesi.

Si conclude pertanto che la y è una funzione razionale della x del tipo

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

dove f e φ sono polinomi. Ma perchè la funzione $y(x)$ risulti univocamente invertibile occorre allora che f e φ siano di primo grado; cioè la corrispondenza fra x e y è una proiettività. c. d. d.

Dal caso particolare delle corrispondenze biunivoche passiamo al caso generale delle corrispondenze analitiche $[m, n]$; la dimostrazione precedente si estende senza difficoltà. Il punto fondamentale di essa consiste nell'escludere che la funzione $y(x)$ possegga punti singolari essenziali; riconosciuto che essa possiede soltanto poli e punti di diramazione algebrica, si dedurrà che la $y(x)$ è una funzione algebrica e quindi che l'equazione $f(xy)=0$ da cui sono legate le due variabili x e y è dei gradi m, n rispetto ad esse.

Ora suppongasi che la $y(x)$ abbia un punto singolare essenziale b, e si considerino gli m punti regolari $a_1 a_2 \dots a_m$ in cui la y assume un certo valore generico. Si descriva intorno a b un cerchio C_b e intorno ad $a_1 \dots a_m$ altrettanti cerchi $C_1 \dots C_m$, per modo che questi cerchi non interferiscano fra loro ed escludano altri eventuali punti singolari. Entro C_b si troverà certo un punto x ove la y assume un certo valore $\bar{y}$, prossimo quanto si vuole ad

$$y(a_1)=y(a_2)= \dots y(a_m);$$

ma anche entro ciascuno dei cerchi $C_1 \dots C_m$ si trova un punto x ove la y assume lo stesso valore $\bar{y}$. Questa conclusione è assurda perchè ad $\bar{y}$ vengono così a corrispondere $m+1$ punti x, anzichè m, come si era supposto.

34. Le rappresentazioni reali dei punti di una curva algebrica e le superficie di Riemann. — Una curva algebrica $f(xy)=0$, concepita come luogo di punti reali e immaginari, costituisce una serie doppiamente infinita di elementi, che si può rappresentare come una superficie. Questa rappresentazione reale può essere ottenuta in vari modi.

Anzitutto ponendo

$$x=x_1+ix_2$$
$$y=y_1+iy_2,$$

e separando in f le parti reale e immaginaria:

$$f(x_1+ix_2,\ y_1+iy_2)=f_1(x_1x_2y_1y_2)+if_2(x_1x_2y_1y_2),$$

si ottiene nello spazio a quattro dimensioni $(x_1x_2y_1y_2)$ una superficie rappresentata dalle equazioni

$$f_1=0, \quad f_2=0,$$

della quale si hanno a considerare soltanto i punti reali; questa superficie, i cui punti reali corrispondono ai punti reali e immaginari della curva $f(xy)=0$, può anche venire proiettata (da un punto esterno) nello spazio ordinario a tre dimensioni, ed ognuna delle proiezioni così ottenute porge ancora una rappresentazione reale della curva $f(xy) = 0$.

Anche senza ricorrere a considerazioni iperspaziali, si riesce a costruire direttamente una superficie i cui punti corrispondono in modo biunivoco e continuo alle coppie di valori x, y definite dall'equazione $f(xy) = 0$. Infatti Riemann (¹), a cui è dovuta la rappresentazione delle soluzioni reali e complesse della $f(xy) = 0$ sopra un continuo a due dimensioni, è giunto allo scopo colla costruzione di *superficie* composte *di più fogli sovrapposti*, nel modo che qui vogliamo brevemente illustrare.

Si consideri dapprima l'equazione algebrica

$$y^2 = f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m);$$

essa vale a definire una funzione a due rami

$$y(x) = \pm \sqrt{f(x)}.$$

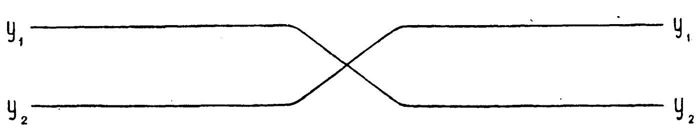
I detti rami vengono scambiati fra loro per un giro chiuso della x che comprenda uno o un numero dispari di punti di diramazione a_i; per conseguenza un giro esterno ad un cerchio sufficientemente grande che comprenda tutti i punti $a_1 \dots a_m$, vale a dire un giro intorno al punto all'infinito, produce o no lo scambio dei due rami di $y(x)$ secondochè m è dispari o pari: quindi se m è dispari si aggiunge ai punti di diramazione $a_1 \dots a_m$ anche il punto all'infinito; questo caso si riduce al caso in cui m è pari con una trasformazione lineare sulla x.

Pongasi, per semplicità, che m sia pari e così la $y(x)$ possegga soltanto i punti di diramazione al finito $a_1 \dots a_m$. Per quanto abbiamo detto, il piano della variabile complessa x non porge una rappresentazione delle soluzioni (xy) dell'equazione $y^2 = f(x)$, perchè in ogni punto x sono, per così dire, deposti due valori della $y(x)$; per ovviare all'inconveniente viene l'idea di considerare due piani o fogli sovrapposti, sopra ciascuno dei quali si depongano i valori di uno dei due rami; ma non è possibile ottenere in tal guisa una rappre-

(¹) Theorie der Abel'schen Functionen, (1857). (Cfr. Werke, p. 84).

sentazione adeguata allo scopo, imperocchè le coppie (xy) formano un continuo inseparabile, permutandosi — come si è detto — i due rami di $y(x)$ per giri chiusi della x; così appare la necessità di collegare fra loro i due fogli, stabilendo opportune convenzioni circa il passaggio dall'uno all'altro, in corrispondenza ai movimenti di x nel proprio piano. Un sistema di convenzioni rispondenti allo scopo può essere stabilito come segue.

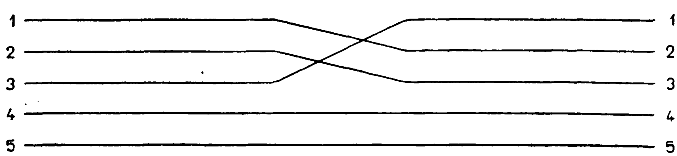
A partire da un punto generico, o, del piano della x, si eseguiscano dei tagli, per esempio rettilinei, lungo linee congiungenti o coi punti di diramazione a_i, le quali non si traversino fra loro. Questo sistema di tagli supponendosi eseguito, accade che un qualunque giro chiuso della x (non potendo attraversare un taglio, nè quindi involgere alcun punto di diramazione) non produce alcuno scambio fra i due rami della $y(x)$. Ora immaginiamo di deporre i due valori della $y(x)$ sopra due piani sovrapposti al piano della x su cui vengano eseguiti i medesimi tagli; finchè la x si muove senza attraversare uno dei tagli, i due rami y si muovono nei rispettivi fogli senza passaggio dall'uno all'altro; sugli orli opposti di un medesimo taglio si trovano deposti valori della y uguali e di segno contrario, giacchè il passaggio da un orlo all'altro si effettua per mezzo di un giro chiuso della x attorno ad un punto di diramazione, aumentando (o diminuendo) l'argomento di f di 2π. Ciò posto i due fogli, su cui vengono rappresentati i due rami della $y(x)$, debbono naturalmente collegarsi lungo i tagli, saldando ciascun orlo del primo foglio all'orlo dell'altro su cui vengono deposti i medesimi valori della x; così quando la x attraversa un taglio si passa con la y da un foglio all'altro. Il modo del passaggio può essere reso evidente con un modello: si ha una superficie a due fogli orizzontali che si traversano lungo una linea doppia, e l'annessa figura ne porge la sezione verticale, perpendicolare ad un taglio.



La superficie a due fogli così costruita rappresenta senza eccezione il continuo (xy) definito dalla equazione $y^2 = f(x)$, e dicesi *superficie di* RIEMANN relativa alla funzione algebrica $y(x)$, od anche alla *curva* $y^2 = f(x)$.

Anche per una qualsiasi equazione algebrica $f(xy) = 0$, si ottiene analogamente la costruzione di una superficie di Riemann sui cui punti vengano deposte senza eccezione le coppie di valori (xy). Pongasi che f sia di grado $n > 1$ in y e quindi la $y(x)$ possegga n rami; si abbiano nel piano m punti di diramazione $a_1 \dots a_m$, che — per semplicità — supporremo a distanza finita: girando attorno al punto a_i si produrrà in generale una sostituzione sui rami $y_1 y_2 \dots y_n$ della $y(x)$. Il caso più semplice (che ha, come vedremo, un valore generale), è quello in cui i giri attorno ai punti a_i producano semplicemente lo scambio fra due rami y_r, y_s. In questo caso costruiremo una superficie di Riemann ad n fogli, tagliando anzitutto il piano x lungo un sistema di linee $oa_1 \dots oa_m$, il che permette di distinguere gli m valori $y_1 \dots y_m$ corrispondenti a un qualunque x; ora sovrapponiamo n fogli in cui sieno eseguiti i medesimi tagli e su cui vengano rappresentati i rami $y_1 \dots y_n$; il collegamento dei fogli verrà fissato in guisa che lungo la linea di passaggio oa_i si riattacchino i fogli r e s, supposto che al taglio oa_i corrisponda lo scambio di y_r con y_s, cioè lo scambio (rs).

La costruzione precedente si estende facilmente al caso in cui un giro chiuso intorno al punto di diramazione a_i produca una sostituzione ciclica $(1, 2 \dots r)$: basterà invero collegare gli r fogli $1 \dots r$ lungo il taglio oa_i in guisa che dal primo si passi al secondo, dal secondo al terzo,.... dallo r-mo al primo, così come viene mostrato dall'annessa figura rappresentante una sezione normale al taglio.



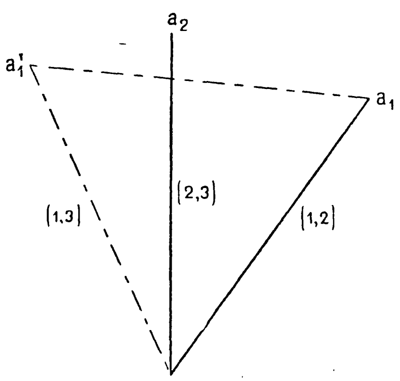
n = 5 , r = 3

Infine appare chiaro come la costruzione si estenda allorchè la sostituzione prodotta da un giro attorno al punto a_i, cioè dall'attraversare la linea oa_i, si decomponga in un certo numero di cicli: si avranno corrispondentemente diversi gruppi di fogli, in ciascuno dei quali i fogli sono collegati fra loro lungo la linea oa_i, nel modo descritto innanzi.

Abbiamo indicato diverse vie per rappresentare, in modo biunivoco e continuo *senza eccezione*, le coppie di valori soluzioni di un'equazione $f(xy) = 0$ coi punti di una superficie reale.

Due superficie F e F' così ottenute risulteranno pure legate fra loro da una corrispondenza biunivoca e continua senza eccezione. Pertanto la superficie rappresentativa di $f(xy) = 0$ non viene definita nella sua forma e nelle sue proprietà metriche o proiettive, ma a meno di una trasformazione biunivoca e continua. Soltanto la relazione di contiguità fra le parti di essa ha importanza in quest'ordine di considerazioni, al quale risponde l'intuizione di una superficie concepita come un velo *flessibile* ed *estendibile* e quindi suscettibile di assumere per deformazione continua — senza rotture o saldature — infinite forme diverse, fra loro equivalenti.

Risulta dall'osservazione precedente che una superficie di Riemann a n fogli, costruita a partire da un sistema di tagli oa_i, si può trasformare in un'altra equivalente dove si facciano muovere i tagli, subendo — per continuità — una deformazione qualsiasi. Ciò è chiaro in primo luogo se non viene alterato l'ordine delle linee oa_1, oa_2,.... oa_m, come accade se si esclude che un taglio possa attraversarne un altro passando così dall'altra parte di esso. Ma ove pure si ammetta un tale attraversamento, si otterrà ancora una superficie di Riemann equivalente alla primitiva, dove però i fogli verranno collegati in un modo diverso, che risulta dalla trasformazione fatta. Per esempio, se si hanno (vedi figura) due tagli oa_1 e oa_2 cui corrispondono le trasposizioni (12) e (23), facendo passare il primo dall'altra parte del secondo in guisa che a_1 traversi la linea oa_2, la trasposizione (12) viene trasformata dalla (23) nella (13), giacchè il traversamento del taglio oa_2 cambia appunto il foglio 2 nel foglio 3, lasciando invariato il foglio 1.



La rappresentazione delle superficie a fogli, introdotta come abbiamo detto da Riemann nel 1857, e accolta nel trattato di Neumann [1] del 1865, è quella a cui sogliono riferirsi in generale gli studiosi della teoria delle funzioni, anche quando (sull'esempio di Clifford, 1877) ne traggono per deformazione dei modelli solidi più facilmente visibili. Ma, come Klein sembra per primo avere osservato, si può porre *a priori* il concetto della superficie di Riemann liberamente deformabile nello spazio, che — nell' ordine di idee della geometria astratta — riesce senz'altro definita dalla considerazione del continuo a due dimensioni formato dalle coppie di soluzioni, reali ed immaginarie, dell'equazione $f(xy) = 0$. E la trattazione nostra procederà appunto da questo concetto generale, senza bisogno di ricorrere alla particolare costruzione dei fogli sovrapposti; all' utilità della quale accenneremo tuttavia nell' ultimo paragrafo di questo capitolo.

35. **Osservazioni generali sulla teoria della connessione delle superficie.** — Risulta da quanto precede che le rappresentazioni reali di una curva algebrica $f(xy) = 0$ conducono ad una considerazione delle superficie che è interamente nuova per riguardo a quelle che ricorrono nella geometria metrica o nella proiettiva. Il significato di questa nuova considerazione appare già chiarito dalla immagine del velo flessibile ed estendibile, nello stesso senso in cui l' immagine del corpo rigido vale a definire il campo delle proprietà metriche ordinarie (invarianti per movimenti). Ora le proprietà delle superficie che corrispondono all' immagine del velo anzidetto, sono ben definite come invarianti per trasformazioni biunivoche e continue (Klein). Quel ramo della geometria a cui esse appartengono, si riattacca a più antiche ricerche di Descartes, Leibniz, Eulero, Gauss, e prende forma di trattazione organica per opera di Listing [2] (1847): al nome di *analysis situs* con cui Leibniz già designava questi studi, Listing sostituisce quello di *topologia*, che si usa anche oggi promiscuamente col primo ed insieme al nome di contenuto più particolare: *teoria della connessione*.

---

[1] Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, (litografie); cfr. II ed. 1884, pag. 140.

[2] Vorstudien für Topologie — Göttinger Studien, 1847.

La grande concezione di RIEMANN del 1857 richiamava su questa disciplina l'attenzione dei cultori della teoria delle funzioni, promovendo il riconoscimento delle applicazioni ai più vari campi delle matematiche che ne dipendono.

Cerchiamo di chiarire meglio i concetti che appartengono a questo indirizzo di studi.

Dal punto di vista topologico un quadrato non si distingue da un triangolo o da un cerchio e neppure da un triangolo sferico ecc. Invece è chiaro che una *superficie limitata aperta*, quale è il quadrato, è essenzialmente diversa da una *superficie chiusa* com'è la sfera, e anche da una superficie aperta con *due orli*, quale è la corona circolare.

D'altronde non tutte le superficie chiuse sono da ritenersi topologicamente equivalenti: la superficie della sfera è equivalente a quella del tetraedro, del cubo, ecc., ma invece è essenzialmente diversa dalla superficie di un toro o anello; infatti un qualsiasi taglio chiuso fatto sopra la sfera spezza la superficie in due parti, mentre un taglio chiuso lungo un cerchio generatore dell'anello non spezza affatto la superficie di questo, bensì la riduce ad una superficie cilindrica con due orli.

Un altro esempio istruttivo in ordine ai caratteri differenziali delle superficie, dal punto di vista dell'analysis situs, è offerto dalla *superficie unilatera* di MÖBIUS [1] (1861), sulla quale è impossibile distinguere due faccie, potendosi passare con moto continuo dall'una all'altra, senza attraversare alcun orlo della superficie. La superficie di MÖBIUS viene costruita nel seguente modo: si prenda una striscia rettangolare di carta $ABCD$, e si saldino i lati opposti AB, CD (A opposto a C, B a D) in guisa che A si sovrapponga a D e B a C; allora un segmento parallelo al lato AC e terminato al contorno diventa una linea chiusa, descrivendo la quale si passa da una faccia della superficie alla faccia opposta. È anche notevole che su codesta superficie (a differenza di ciò che ha luogo sulle superficie *bilatere*, come la sfera, il toro ecc.) non è possibile distinguere due versi di rotazione attorno ad un punto poichè, descrivendo l'anzidetta linea, l'un verso si scambia con l'altro. Si vede pure che se si taglia la superficie di MÖBIUS lungo la linea sopra nominata, la superficie

[1] Werke, Bd. II.

non si spezza e il taglio dà luogo a un solo orlo anzichè a due come avviene per la sfera o per il toro.

Gli esempi precedenti valgono a chiarire e, in qualche modo, a definire i caratteri fondamentali delle superficie che formano oggetto della teoria della connessione. Ma per caratterizzare più precisamente questo ordine di idee e preparare un assetto sistematico della dottrina, occorrono ancora due osservazioni che appartengono entrambe a KLEIN (1) (1874-76).

Una prima osservazione si riferisce alla distinzione fra *proprietà interne* e proprietà *esterne* di una superficie (proprietà assolute e relative secondo KLEIN). Col nome di proprietà interne vogliamo designare quelle proprietà che vengono definite in rapporto a figure tracciate sopra la superficie senza alcun riguardo ad elementi fuori di questa; invece si considerano come proprietà esterne tutte quelle in cui intervengono gli elementi dello spazio-ambiente fuori della superficie.

Per chiarire la distinzione occorre anche fissare particolari convenzioni in ordine alla esistenza di linee doppie nodali: lungo una tale linea la superficie attraversa se stessa; ma movendosi *sopra* la superficie non è lecito passare attraverso la linea doppia dall'una all'altra falda; e così, secondo la veduta interna, le superficie possono ritenersi prive di linee doppie.

Sono caratteri pertinenti alla visione interna di una superficie: l'esistenza o meno di orli, la distinzione fra superficie che vengono spezzate o no da ogni taglio chiuso ecc. Per quanto riguarda la distinzione fra superficie unilatere e bilatere è da osservare che la distinzione fatta, riferendosi alla esistenza o meno di due facce e quindi alla impossibilità o possibilità di invertire il senso della normale, implica un riferimento allo spazio-ambiente; ma, osservando che l'inversione del senso della normale, per un giro chiuso fatto sopra la superficie, porta anche l'inversione del senso di rotazione sopra la superficie stessa, si riconosce che la distinzione fra superficie unilatere e bilatere esprime un carattere interno della superficie: d'altronde è anche una proprietà interna delle superficie unilatere l'esistenza di una linea chiusa della quale non si distinguono più due lati, sicchè un taglio chiuso lungo di essa produce un solo orlo per la superficie tagliata.

(1) Math. Annalen: Bd. 7, pag. 479; Bd. 9, pag. 476.

Ora occorre una seconda osservazione in ordine al modo di considerare i *punti all' infinito*. Sopra una superficie indefinitamente estesa i punti all'infinito appariscono come punti limiti; riguardo a questi si possono stabilire convenzioni diverse, secondo le quali la superficie viene a essere considerata come illimitata ed aperta, o come superficie aperta limitata da uno o più orli, o anche come superficie chiusa. Riferiamoci per una spiegazione più precisa al caso del piano.

Il piano illimitato ed aperto della geometria elementare, concepito unicamente come luogo di punti propri, equivale — dal punto di vista topologico — alla superficie piana interna ad un cerchio. È lecito sostituire a quest'ultima la superficie di una calotta sferica terminata parimenti da un cerchio C; allora l'equivalenza di tale superficie al piano illimitato si rende evidente con una proiezione fatta dal centro di C sopra un piano parallelo al piano del cerchio medesimo.

L'introduzione dei punti all'infinito vale a rendere il piano una superficie chiusa; ma i caratteri di connessione di questa dipendono dalle convenzioni con cui i punti all'infinito vengono introdotti. Così, se si conviene di riguardare tutti i punti all'infinito del piano come riuniti in un unico punto, come accade per il piano rappresentativo della variabile complessa, il piano diventa equivalente alla sfera. Tale equivalenza si rende evidente con la proiezione stereografica della sfera, dove, come è noto, si assume quale centro di proiezione un punto O sopra la sfera stessa e quale piano di proiezione un piano parallelo al piano tangente in O: questa rappresentazione si può riattaccare a quella usata innanzi per mostrare l'equivalenza del piano aperto alla calotta sferica terminata da un cerchio C; basta invero ingrandire la calotta sopra la sfera, in modo che C si riduca al punto O, concepito come un cerchio infinitamente piccolo. Ora, mentre il piano completato con l'aggiunta di *un* punto all'infinito risulta equivalente alla sfera anzidetta, il piano aperto (luogo dei punti propri) viene rappresentato sulla porzione di sfera che si ottiene togliendo il punto O, cioè sulla sfera con un buco.

Ben diversi caratteri di connessione spettano al piano proiettivo, dove i punti all'infinito sono introdotti a costituire una linea retta. La superficie che così si ottiene non è semplicemente connessa, giacchè un taglio chiuso lungo una retta (per esempio lungo la retta all'infinito) non la spezza, ma la riduce ad una superficie illimitata ed aperta, equivalente alla superficie aperta di un cerchio. Inoltre il piano proiettivo è una superficie unilatera, giacchè su di essa non si distinguono due lati, o bande di piano, rispetto ad una retta, e quindi nemmeno due versi di rotazione.

Questi caratteri topologici del piano proiettivo si mettono in evidenza mediante la rappresentazione dei suoi punti con le rette della stella: qui appunto si vede che un verso di rotazione entro un fascio di piani può essere invertito con un movimento continuo del fascio, entro la stella, che porti a invertire la direzione dell'asse del fascio.

Ora riprendendo la precedente proiezione della calotta sferica terminata da un cerchio C, si vede che per ottenere una rappresentazione del piano proiettivo occorre saldare o collegare i punti diametralmente opposti di C. Per la costruzione di un appropriato modello, giova qui deformare l'orlo della superficie sferica in guisa che C divenga una linea gobba, sulla quale continueremo a considerare come omologhi i punti che erano inizialmente opposti: uniamo i punti omologhi di C mediante fili o segmenti rettilinei; si otterrà così una superficie costituita da una parte sferica e da una superficie rigata (dotata di linea doppia), che offre una perfetta rappresentazione del piano proiettivo, equivalendo ad esso secondo la veduta interna.

Dopo l'esempio del piano, consideriamo ancora l'esempio degli iperboloidi. L'iperboloide ellittico, concepito come luogo di punti propri, consta di due falde, equivalenti ciascuna alla superficie interna di un cerchio; quando invece si introducono i punti all'infinito secondo le convenzioni della Geometria proiettiva, le due falde si riuniscono attraverso alla conica all'infinito e l'iperboloide diventa equivalente alla sfera. Con uguale facilità si vede che l'iperboloide rigato, concepito come luogo di punti propri, equivale alla superficie di un cilindro da cui siano tolti gli orli; invece l'iperboloide rigato, dopo l'introduzione dei punti all'infinito secondo la geometria proiettiva, diventa equivalente alla superficie del toro.

Questi semplici esempi bastano a spiegare come la considerazione delle superficie indefinitamente estese possa sempre ridursi a quella di superficie finite; alle quale si suole riferirsi, come a modello, negli sviluppi dell'analysis situs.

36. Il teorema di Eulero e la interpretazione topologica del genere di una curva algebrica. — Dopo avere definito il campo di ricerche che costituisce la teoria della connessione delle superficie, conviene restringerlo fissando di limitare le nostre considerazioni alle *superficie chiuse* che si ottengono con la *riunione di un numero finito di superficie elementari.* Diciamo superficie elementare la superficie piana aperta limitata da un cerchio o da un quadrato. La riunione delle superficie elementari deve esser fatta in guisa che ogni segmento o arco del contorno di una di esse venga saldato ad un altro segmento o arco appartenente al contorno di un'altra superficie elementare o della medesima, sicchè la superficie ottenuta risulta chiusa, senza orli.

Per dare un esempio della costruzione indicata vediamo che si ottiene la sfera quale riunione di due superficie elementari, come appare dalla divisione della sfera stessa mediante un cerchio. Parimente si ottiene il toro quale riunione di quattro superficie elementari, come appare dalla divisione della superficie in quattro parti per mezzo di due cerchi meridiani e due paralleli. Ma si può anche ottenere la superficie del toro congiungendo i lati opposti di un rettangolo, che a sua volta si deduce dal toro eseguendo due tagli, uno lungo un cerchio parallelo e l'altro lungo un meridiano.

Osserviamo che nell'anzidetta divisione della sfera (a differenza di ciò che avviene nelle divisioni considerate pel toro) le due parti elementari sono unite per mezzo di una linea chiusa; ma si passa facilmente ad una divisione dove due parti qualunque si colleghino per mezzo di una o più linee aperte, giacchè una linea chiusa può essere suddivisa in linee aperte per mezzo di punti. Per generalità conviene riguardare come linea aperta una linea chiusa su cui sia dato un punto, nel quale coincidono i due estremi della linea.

Ora la divisione delle superficie in parti elementari conduce alla definizione dei reticolati [1].

Dicesi *reticolato* (*connesso* e *chiuso*) tracciato sopra una superficie chiusa, un *sistema di linee* aperte (*spigoli*) che divida la superficie in parti elementari (*facce*); gli estremi

[1] Giova ricordare che la considerazione dei reticolati trae origine nei circuiti elettrici da Kirchhoff. Poggendorf Annalen, Bd. 72, pag. 498 (1847).

delle linee suddette diconsi *vertici* del reticolato. Per definizione:

1) Si può passare, con un punto mobile sul reticolo, da un punto del reticolato ad un altro qualsiasi.

2) Ogni vertice del reticolato appartiene almeno a due spigoli, salvo il caso che in esso si riuniscano i due estremi di un medesimo spigolo. (Reticolato costituito sulla sfera da un cerchio, aperto per mezzo di un punto).

3) Ogni spigolo è limite comune di due faccie o di due parti di una medesima faccia.

L'esempio più semplice di reticolato è offerto dal sistema degli spigoli di un ordinario poliedro, che è una superficie chiusa equivalente alla sfera. È noto che per un poliedro, designando con V il numero dei vertici, con S il numero degli spigoli e con F il numero delle facce, sussiste la nota *relazione di* EULERO [1] (1752):

$$V - S + F = 2.$$

I reticolati definiti di sopra si possono riguardare come *poliedri generalizzati*; ma la somma $V - S + F$ può assumere qui valori diversi da 2. Così ad esempio, costruendo un reticolato sul toro, si troverà

$$V - S + F = 0.$$

Però sussiste il

Teorema di EULERO *generalizzato* [2]: *Per ogni reticolato tracciato sopra una superficie chiusa, designando con V, S, F i numeri dei vertici, degli spigoli e delle facce, si ha che l'espressione $V - S + F$ assume un valore costante,* cioè non dipende affatto dalla scelta del reticolato, bensì soltanto dalla superficie su cui esso è dato; della quale esprime un *carattere topologico*, essendo invariante per trasformazioni continue.

Per dimostrare il teorema, si osservi anzitutto che l'espressione $V - S + F$ non cambia quando uno spigolo del reticolato venga diviso in due parti, aggiungendosi così un ver-

(1) Una formula equivalente è stata ritrovata da BALTZER in un frammento inedito di DESCARTES. Cfr. Oeuvres inédites par FOUCHER DE CAREIL. Parigi, 1860, vol. 2, pag. 214.

(2) LHUILIER. Pietroburgo, 1811. Cfr. il riassunto di GERGONNE negli « Annales de Mathématique », t. 3, pag. 169.

tice ed uno spigolo, e nemmeno quando una faccia venga divisa in due per mezzo di uno spigolo (che può supporsi collegare due vertici, in guisa che verrà aumentato di un' unità S e F). Ciò posto si considerino sopra una medesima superficie due reticolati R_1 e R_2; possiamo supporre che essi non abbiano alcun spigolo in comune, ed anche che esista uno spigolo dell'uno avente un punto comune con uno spigolo dell'altro; infatti queste ipotesi si possono sempre rendere soddisfatte facendo subire ad uno dei reticolati una deformazione continua che non altera i numeri V, S, F. Ciò posto, riunendo i due sistemi di linee R_1 e R_2, si otterrà un nuovo reticolato (connesso) $R = R_1 + R_2$, il quale si può ritenere dedotto tanto da R_1 che da R_2 mediante aggiunta di vertici e spigoli, cioè mediante divisione di spigoli e di facce. Per quanto sopra è osservato l'espressione $V - S + F$ relativa a R avrà dunque lo stesso valore che l'analoga espressione calcolata per R_1 e R_2; sicchè anche queste risulteranno fra loro uguali. c. d. d.

Abbiamo rilevato che l'espressione costante $V - S + F = k$, relativa ad un reticolato tracciato sopra una superficie chiusa, esprime un carattere topologico di questa. Vogliamo ora spiegare il significato di k. A tale scopo conviene considerare particolari reticolati che posseggono un solo vertice ed una sola faccia.

Cominciamo dall'osservare che il numero delle facce F, supposto $F > 1$, può essere diminuito di un'unità; infatti riunendo insieme due facce consecutive, col togliere lo spigolo comune che separa le due superficie elementari, si ottiene ancora una superficie elementare. Anche il numero dei vertici V, supposto $V > 1$, può essere diminuito di un'unità; infatti se si hanno due vertici consecutivi A e B a cui concorrono due gruppi di r, s spigoli, basta avvicinare B ad A finchè coincida con esso, ciò che ha per effetto di fare sparire insieme al vertice B anche lo spigolo AB, ottenendosi $r + s - 2$ spigoli passanti per A.

È chiaro che i due procedimenti di riduzione sopra indicati permettono di ridurre un reticolato qualsiasi a un reticolato che possegga un sol vertice ed una sola faccia:

$$V = 1, \quad F = 1, \quad S = -k + 2.$$

Allora si hanno, sopra la superficie, S linee che si chiudono in un medesimo punto, tali che la superficie tagliata lungo di esse si riduce ad una superficie elementare; dalla quale reciprocamente si ottiene la superficie anzidetta mediante collegamento delle parti del contorno che figurano come orli di un medesimo taglio.

Il numero $S = 2 - k$ si designerà col nome di *ordine* o (secondo RIEMANN) *numero di connessione* [1]. Dicesi semplicemente connessa (ordine di connessione uguale a *zero*) una superficie elementare, cioè una superficie aperta con un solo orlo, la quale viene spezzata da ogni taglio chiuso e da ogni taglio terminato al contorno; è del pari semplicemente connessa la superficie della sfera, che essendo chiusa, cioè senza orli, viene spezzata in due parti da ogni taglio chiuso. Invece il toro ha l'ordine di connessione uguale a due, giacchè mediante due tagli chiusi a partire da un medesimo punto, si riduce una superficie elementare, cioè una superficie (aperta) semplicemente connessa.

Il teorema di EULERO generalizzato permette di riconoscere il significato del genere p di una curva algebrica $f(xy) = 0$, come carattere topologico della corrispondente superficie di Riemann. Si suppone qui che la curva f possegga soltanto singolarità ordinarie, poichè solo in questo caso è stato definito il genere p; ma la restrizione così introdotta non è essenziale e risulterà senz'altro rimossa dalla teoria generale delle singolarità delle curve. (Cfr. L. 4°).

Ciò posto si consideri la superficie di Riemann (ad n fogli) che rappresenta la funzione algebrica $y(x)$ definita dalla $f(xy) = 0$, di grado n in y. E si abbiano m punti di diramazione corrispondenti alle tangenti distinte a rami della curva f che passano per il punto all'infinito dell'asse y. Nell'ipotesi più semplice, che vogliamo dapprima considerare, codeste tangenti avranno colla curva un semplice contatto, e i corrispondenti punti di diramazione daranno luogo allo scambio di *due* rami della $y(x)$; allora si avrà

$$m = 2n + 2p - 2,$$

dove p designa il genere di f.

[1] Altri designa come ordine di connessione il numero

$$S + 1 = (2 - k) + 1.$$

La superficie di Riemann R, della f, viene rappresentata sul piano-sfera, Π, della variabile complessa x, in guisa che a un punto generico di Π rispondono n punti distinti di R, ma ad uno degli m punti di diramazione in Π rispondono soltanto $n-1$ punti distinti. Ad un reticolato qualsiasi tracciato nel piano Π, non corrisponde in generale un reticolato connesso dividente in parti elementari la R, ma ciò accade se i punti di diramazione figurano fra i vertici del reticolato dato in Π; per es. ad un poligono curvilineo sciolto avente come vertici i punti di diramazione suddetti, corrisponde su R un reticolato cui è applicabile il teorema di EULERO.

Ora codesto poligono costituisce nel piano un reticolato per cui

$$V=m, \quad S=m, \quad F=2.$$

Passando ad R si ha un reticolato dove a ogni faccia del primo corrispondono n facce, ad ogni spigolo n spigoli, e ad ogni vertice $n-1$ vertici, sicchè per questo

$$V=(n-1)m, \quad S=nm, \quad F=2n,$$

e quindi

$$k=V-S+F=2n-m;$$

dunque la molteplicità di connessione di R vale

$$2-k=m-2n+2=2p.$$

Alla stessa conclusione si arriva anche quando alcune fra le $2n+2p-2$ tangenti ad f, che danno i punti di diramazione, si sovrappongano in una sola a contatti distinti o coincidenti. Nel caso più generale si avrà un punto di diramazione che dà luogo a una sostituzione composta di i cicli degli ordini $r_1 r_2 \ldots. r_i$; ed allora un tale punto di diramazione conterà per

$$r=(r_1-1)+(r_2-1)+\ldots.+(r_i-1),$$

essendo

$$\Sigma r=2n+2p-2;$$

infatti il procedimento con cui si è valutata la classe d'una curva (§ 19) permette di riconoscere che una tangente con contatto r-punto conta per $r-1$ tangenti.

Ciò posto si può ripetere lo sviluppo precedente, osservando che ad un punto di diramazione contante per r corrispondono, su R, $n-r$ punti distinti. Si deduce così il

Teorema. *L'ordine di connessione di una superficie di Riemann vale $2p$, designando p il genere della relativa curva algebrica*, supposta dotata di singolarità ordinarie.

Giova osservare che il ricorso alla superficie di Riemann permette anche di estendere la nozione del genere a curve algebriche dotate di singolarità qualunque; a questa estensione si arriva anche direttamente con l'analisi delle singolarità che istituiremo nel libro quarto.

Nota. Il teorema sopra enunciato compare nella teoria delle superficie di Riemann a fogli, ove l'ordine di connessione viene espresso per il numero dei punti di diramazione (semplici), e in questa forma deve essere riattaccato a Riemann [1] (1857). Come abbiamo accennato nel § 23, Clebsch ha avvertito il legame del carattere così introdotto con la teoria geometrica delle curve. Infatti « l'ordine di connessione della superficie di Riemann esprime un carattere della curva invariante rispetto ad una qualsiasi trasformazione birazionale ». Ciò appare a prima vista evidente, e per rimuovere ogni dubbio critico occorre soltanto esaminare i punti (doppi o multipli della curva) che sono eccezionali per la trasformazione, dando luogo a più punti della trasformata; si riconosce che la corrispondenza è sempre biunivoca fra i rami e quindi può concepirsi come biunivoca senza eccezione fra le due curve, in base a convenzioni che hanno perfetto riscontro nella veduta interna delle superficie di Riemann, da cui viene eliminata ogni considerazione di singolarità di queste. Ma l'invarianza del genere delle curve per trasformazioni birazionali, da cui Clebsch traeva la dimostrazione della terza formula di Plücker (uguagliando il genere della curva luogo e della curva inviluppo), riceverà una dimostrazione diretta nel seguente libro: l'invarianza per trasformazioni quadratiche del piano, stabilita nel § 23, potrà riattaccarsi a quel teorema come caso particolare.

(1) Cfr. Werke, pag. 106.

L'interpretazione topologica del genere di una curva, attraverso il teorema di EULERO generalizzato, trovasi per esempio nel trattato di APPELL e GOURSAT [1].

37. **Riduzione a tipi delle superficie.** — Riprendiamo la costruzione delle superficie chiuse mediante superficie elementari, alla quale abbiamo accennato nel principio del precedente paragrafo. Ivi è notato come dalla riunione di due superficie elementari si ottenga la sfera; e il procedimento costruttivo di questa si può dire che consista nel riunire i punti del contorno di un quadrato, simmetrici rispetto a una mediana. Parimente si ottiene, come abbiamo visto, la superficie di un toro riunendo fra loro i lati opposti di un quadrato. Se, invece, si riuniscono fra loro i punti opposti di un quadrato o di un cerchio che sono simmetrici rispetto al centro, si ottiene una superficie unilatera equivalente al piano proiettivo: l'ordine di connessione di questa superficie si vede essere uguale ad uno, giacchè un taglio chiuso corrispondente a un diametro del cerchio la riduce a una superficie elementare (somma di due superficie elementari riunite per una parte del loro contorno).

Ora le costruzioni precedenti si possono generalizzare.

Anzitutto si consideri un quadrato entro il quale si pratichino $p-1$ fori, pure in forma di quadrato. Di ciascun quadrato vengano collegati i lati opposti come nella costruzione del toro; si ottiene in tal guisa una superficie Σ che dimostreremo essere bilatera ed avere l'ordine di connessione $2p$.

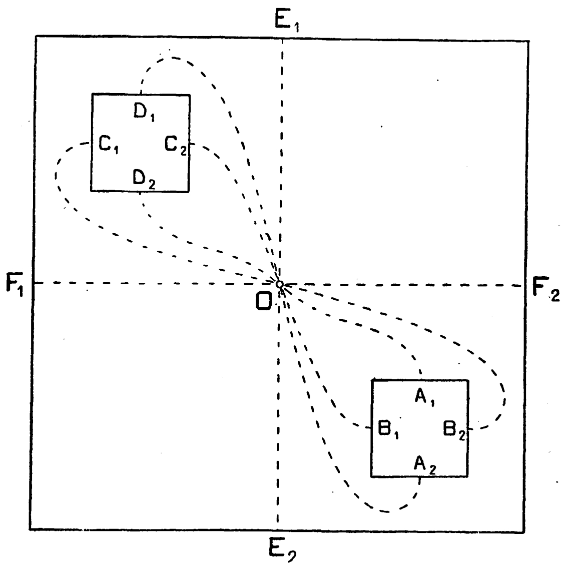
Anzitutto giova osservare che il quadrato-contorno non ha per la superficie un significato speciale in confronto ai quadrati-fori; ciò appare nel miglior modo ove si sostituisca al piano una sfera, sulla quale anche il quadrato-contorno diventerà orlo di un foro. Ora si vede che una sfera con p fori quadrangolari (dove i lati di ciascuno siano collegati nel modo anzidetto) si converte in una *sfera con p manici* da assumersi — per esempio — in forma di anelli collegati alla sfera da un tubo cilindrico. Si può aggiungere che, schiacciando la sfera, questa superficie si riduce a un disco con p

[1] « Théorie des Fonctions algébriques et de leurs integrales ». - Parigi, 1895, pag. 233.

manici, da cui, variando la forma del contorno apparente, si ottiene un *disco con p fori.*

Per esempio se si ha una sfera con due fori quadrangolari, il collegamento di uno di essi darà luogo ad un toro con un foro quadrangolare, e quindi a una sfera con un manico e con un foro quadrangolare; infatti l'intorno del buco sul toro può essere dilatato quanto si vuole in confronto alla superficie del toro stesso senza ingrandire le dimensioni del buco. Ciò posto il collegamento dei lati del nuovo foro quadrangolare conduce a un anello dotato di manico, che si riduce poi a una sfera con due manici anulari.

Riferendoci al modello della sfera con p manici, si può verificare quanto sopra è affermato riguardo alla bilateralità e all'ordine di connessione della superficie Σ. Ma anche senza ricorrere a questo modello, la bilateralità di Σ risulta da ciò che la distinzione di due versi di rotazione entro la superficie piana d'un quadrato, si conserva passando da un orlo all'altro di un foro, stante il modo di collegamento fissato, così come si verifica nel caso elementare del toro. Per valutare l'ordine di connessione di Σ, conviene unire un punto O del quadrato con due punti omologhi del contorno di uno dei suoi fori: A_1, A_2 che danno un unico punto, A, di Σ (vedi figura);



in corrispondenza a ciascun foro si ottengono così due tagli chiusi a partire da O, che — presi insieme coi due tagli relativi al quadrato-contorno — danno luogo a $2p$ tagli chiusi, dei quali si può supporre che non abbiano altro punto comune che O; effettuando codesti tagli, Σ diventa una superficie semplicemente connessa, onde si conclude che il suo ordine di connessione vale $2p$.

Per ottenere superficie unilatere, dotate di un ordine di connessione qualsiasi, basta modificare la costruzione precedente ove ad uno o più fori a forma di quadrato (oppure al contorno) si sostituiscano fori circolari, di ciascuno dei quali verranno congiunti i punti diametralmente opposti. È facile riconoscere che mentre un foro quadrato aumentava di due l'ordine di connessione della superficie, un foro circolare (ben inteso in rapporto al collegamento stabilito) aumenta codesto ordine di una sola unità. Ma oltre a ciò conviene mettere in evidenza il fatto nuovo che la superficie R così ottenuta risulta unilatera, giacchè congiungendo con una linea due punti omologhi del contorno di un foro circolare, si ottiene una linea il cui lato destro si scambia col sinistro in forza del modo di collegamento del cerchio, così come avviene nel caso elementare del piano proiettivo, che abbiamo preso in considerazione nel § 35.

Le superficie bilatere e unilatere che abbiamo imparato a costruire partendo da un piano o da una sfera con fori, porgono i tipi generali di tutte le possibili superficie chiuse, considerate del punto di vista topologico.

Per dimostrare questo importante teorema occorre anzitutto premettere il seguente

Lemma. Una superficie semplicemente connessa ed aperta, ottenuta come riunione di un numero finito di superficie elementari, la quale possegga come orlo una sola linea chiusa, è una superficie elementare (equivalente alla superficie di un piano interna a un quadrato o a un cerchio).

Anzitutto si osservi che unendo due superficie elementari per una parte (segmento) del loro contorno, si ottiene sempre una superficie elementare. Ciò posto, supponiamo che il teorema sia dimostrato per le superficie ottenute con la riunione di un numero $m \leq n-1$ di parti elementari, e dimostriamo che esso sussiste per una superficie Σ ottenuta con la riunione di n parti elementari $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ $(n \geq 2)$. A tale scopo si consideri il sistema delle linee aperte l che vengono definite come tratti comuni ai contorni di due parti σ_i. È facile vedere che con linee l si può comporre una linea, aperta e sciolta, terminata al contorno di Σ, la quale linea divide Σ in due parti, per il fatto della connessione semplice. Queste parti Σ_1 e Σ_2 sono superficie semplicemente connesse con un solo orlo, ottenute riunendo un numero $m < n$ di parti elementari, onde, per ipotesi, risultano esse stesse superficie elementari; si deduce che la Σ, ottenuta riunendo Σ_1 e Σ_2 per un sol tratto del loro contorno, è pure una superficie elementare. c. d. d.

Dal precedente lemma segue il

Corollario. Una superficie Σ con p orli (linee chiuse), che venga spezzata da ogni taglio chiuso, equivale a una sfera con p fori.

Infatti se si fanno rimpicciolire $p-1$ orli fino a chiuderne i relativi fori, si ottiene una superficie Σ' (non equivalente a Σ) che possiede un solo orlo ed è spezzata da ogni taglio chiuso. È chiaro che Σ' viene anche spezzata da ogni linea aperta i cui estremi appartengano al contorno, poichè una tale linea, insieme a un tratto di contorno, costituisce una linea chiusa, (la quale, per deformazione continua, può anche ridursi tutta interna alla superficie). Pertanto Σ' è una superficie semplicemente connessa e perciò equivale a una superficie elementare, ossia ad una sfera con un foro. Riaprendo gli anzidetti $p-1$ fori, si vede che Σ equivale a una sfera con p fori. c. d. d.

Ciò posto procediamo all'analisi che segue.

Sia Σ una superficie *bilatera* e chiusa, della quale si ammette — come dicemmo — che consti di un numero finito di parti elementari (ipotesi della connessione finita). Se Σ è semplicemente connessa, cioè se viene spezzata da un qualsiasi taglio chiuso, con un piccolo buco essa diviene aperta e si riduce quindi ad una superficie elementare; onde si conclude che Σ è equivalente a una sfera. Se invece Σ possiede un ordine di connessione $q > 0$, si potrà fare su Σ un taglio chiuso C che non la spezzi. La superficie Σ così tagliata possiederà due orli, C_1 e C_2, i quali risultano riferiti fra loro in corrispondenza ai due lati del taglio C; e facendo un taglio lungo una linea aperta C' i cui estremi siano punti omologhi su C_1 e C_2, si avrà una superficie Σ_1 dotata di un solo orlo quadrangolare: sono lati opposti di questo foro C_1, C_2 e i due orli, C_1' e C_2', provenienti da C', inoltre sono punti omologhi i punti simmetrici rispetto le mediane del quadrangolo: ciò è evidente per i punti di C_1' e C_2', mentre per quelli di C_1 e C_2 risulta dal fatto che C' è su Σ un *taglio bilatero*: infatti i punti di C_1 prossimi a C_1' vanno saldati con quelli di C_2 che trovansi con essi dalla stessa banda di C', vale a dire con quelli che sono prossimi a C_1'. È lecito ripetere sulla superficie Σ_1 l'operazione fatta subire a Σ, a meno che Σ_1 non venga spezzata da ogni taglio chiuso. Così seguitando si arriverà certo ad una superficie con un numero finito di fori che viene spezzata da ogni taglio chiuso. Infatti è facile vedere che i tagli per cui si passa da Σ a Σ_1 e così di seguito, possono supporsi formati colle linee l, tratti comuni alle parti elementari costituenti Σ; e poichè le linee l sono in numero finito, il procedimento di riduzione sopra descritto dovrà avere un termine: ciò avviene soltanto quando si arrivi ad una superficie Σ_p la quale venga spezzata da ogni taglio chiuso, ed allora Σ si riduce ad una sfera con p fori quadrangolari.

Prima di passare alle superficie bilatere riassumiamo il resultato ottenuto enunciando il seguente

Teorema. *Ogni superficie chiusa bilatera* (riunione di un numero finito di parti elementari) *si ottiene da una sfera con* $p\,(\geq 0)$ *fori quadrangolari di cui si colleghino i lati opposti.*

Una tale superficie si può ridurre al *tipo* di una *sfera con* p *manici* o di un *disco con* p *fori*, ed ha quindi l'*ordine di connessione pari* $P = 2p$.

È appena necessario ricordare che la rappresentazione piana della superficie, per $p > 0$, è costituita da un quadrato entro cui siano praticati $p - 1$ fori quadrati, dove s'intende sempre che ha luogo il collegamento dei lati opposti.

La riduzione ottenuta si estende facilmente al caso delle superficie unilatere, salvo che occorre qui distinguere tagli chiusi bilateri, che danno luogo a due orli della superficie tagliata (in corrispondenza biunivoca fra loro), e tagli chiusi unilateri, che danno luogo ad un solo orlo i cui punti risultano a coppie coniugati.

Nella superficie data, Σ, si può praticare anzitutto un taglio chiuso unilatero, ed allora si ottiene una superficie Σ_1 con *un* orlo circolare: da Σ_1 si può riottenere Σ collegando i punti coniugati, i quali — per deformazione senza estensione del contorno — possono ridursi punti diametralmente opposti di un cerchio. Ora se la superficie Σ_1 è unilatera, si taglierà di nuovo lungo un taglio unilatero e così di seguito finchè non divenga bilatera (o semplicemente connessa), ciò che avverrà certo dopo un numero finito, ρ, di riduzioni. Quindi la superficie bilatera Σ_ρ con ρ fori circolari, così ottenuta, si ridurrà — come innanzi — ad una sfera con un numero finito di fori quadrangolari, sulla quale rimarranno pure i ρ fori circolari anzidetti.

In conclusione si ha il

Teorema. *Ogni superficie unilatera* (riunione di un numero finito di superficie elementari) *si ottiene da una sfera con* $\rho\,(\geq 1)$ *fori circolari e con* $q\,(\geq 0)$ *fori quadrangolari*, dove per un foro circolare si intendono congiunti i punti diametralmente opposti e per un foro quadrangolare i lati opposti.

Una tale superficie ha l'*ordine di connessione* (pari o dispari) $P = \rho + 2q$. Il suo modello solido si ottiene operando sulla sfera con p manici e ρ fori circolari come si è operato sulla sfera con un foro per ottenere il modello del piano proiettivo (Cfr. § 35).

Nota. Ha fondamentale importanza rilevare il differente valore dei due tipi a cui abbiamo ridotto le superficie bilatere e unilatere: *superficie bilatere equivalenti corrispondono sempre al medesimo tipo; invece tipi diversi di superficie unilatere aventi lo stesso ordine di connessione* $P = \rho + 2q$, *corrispondono a superficie equivalenti.*

Così appare che il numero ρ dei tagli unilateri che rendono bilatera una superficie Σ non è affatto un carattere di Σ. Invero se l'ordine di connessione $P = \rho + 2q$, e quindi ρ, è dispari, ai ρ tagli unilateri $C_1\, C_2 \ldots . C_\rho$, che rendono bilatera la data superficie Σ, si può sostituire un unico taglio chiuso che produce parimente questo effetto: basterà collegare le linee C, che debbono supporsi senza punti comuni, operando un taglio aperto che abbia i suoi estremi su C_i e su C_{i+1}. Se invece l'ordine di connessione di Σ, e quindi ρ, è pari, si potrà ridurre la Σ d'ordine dispari con un primo taglio unilatero, e quindi la si potrà ridurre bilatera con due soli tagli chiusi unilateri.

Senza approfondire maggiormente l'analisi delle questioni che qui prenderebbero origine, basterà enunciare il risultato a cui si perviene:

Ogni superficie unilatera d' ordine di connessione dispari $P = 2p + 1$ si può ottenere da un cerchio con p fori quadrati; invece una superficie unilatera d' ordine pari $P = 2p + 2$ si può ottenere da un cerchio con p fori quadrati e con un foro circolare: la connessione dei quadrati e dei cerchi s' intende stabilita nel solito modo.

D' altra parte invece di ridurre il numero ρ dei tagli unilateri si può dare un *tipo delle superficie unilatere* dove ρ acquisti il valore massimo, che è l' ordine di connessione P: si ha come tipo *il cerchio con $P - 1$ fori circolari.*

Ma non ci fermeremo oltre sullo studio delle superficie unilatere che hanno per verità minore importanza nella teoria delle funzioni algebriche.

Notizia storica. Il fatto fondamentale che una qualsiasi superficie si può ridurre ad una superficie elementare semplicemente connessa, mediante tagli chiusi, non traversantisi, a partire da un punto, risale a RIEMANN (¹) (1857), il quale riconobbe che il numero di codesti tagli è indipendente dal modo con cui essi vengono eseguiti e però costituisce un carattere della superficie. Il teorema fondamentale che due superficie bilatere chiuse (o aperte collo stesso numero di orli) sono equivalenti quando hanno lo stesso ordine di connessione, ciò che involge la riduzione a un unico tipo delle superficie bilatere, appartiene a JORDAN (²) (1866). Per le superficie unilatere occorre ricordare anzitutto gli studi di MÖBIUS, proseguiti negli anni 1861-66, e poi la memoria fondamentale di WALTER DYCK (³) del 1888.

Noteremo infine che per uno sviluppo rigoroso della teoria è necessario tener presente il presupposto che le superficie di cui si discorre vengano ottenute per riunione di un numero finito di parti elementari, mediante il quale si riesce a dimostrare il cosidetto *postulato di* NEUMANN (⁴), che « ogni super-

(¹) WERKE, l. c., pag. 83 e « Fragment aus der Analysis situs », WERKE, pag. 448.

(²) Journal de Mathématique, serie II, t. 11, pag. 105.

(³) Math. Annalen, Bd. 32, pg. 456. Cfr. la trattazione di DE PAOLIS nelle Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), t. VII, serie III, n.° 6 (agosto 1889).

Per più ampi riferimenti letterarî vedi l' Art. III, *AB*3 « Analysis situs » di DEHN e HEEGAARD in Encyclopädie der Math. Wiss., (1907).

(⁴) 2ª ed. delle « Vorlesungen », (1884), pag. 151.

ficie con orli si può ridurre mediante tagli una superficie elementare semplicemente connessa », ciò che esclude superficie di connessione infinita, quali potrebbero ottenersi come riemanniane di funzioni polidrome trascendenti, per esempio di $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

38. **I tipi delle superficie di Riemann e il teorema di Lüroth-Clebsch.** — La classificazione delle superficie bilatere, porge immediatamente i tipi delle riemanniane pertinenti alle equazioni algebriche $f(xy) = 0$; ai quali, d'altra parte, si perviene anche, come diciamo in appresso, indipendentemente dagli sviluppi che precedono, ove si parta dalla costruzione delle superficie a fogli, definite mediante i punti di diramazione della $y(x)$.

Anzitutto si noti che la *superficie di* Riemann relativa ad un'equazione algebrica $f(xy) = 0$ *è chiusa e bilatera.* Infatti, riferendosi a un qualsiasi continuo superficiale a due dimensioni, R, che rappresenti le coppie di soluzioni della $f(xy) = 0$, si vede che R è chiusa, cioè non possiede orli, perchè la continuazione della funzione algebrica $y(x)$ è definita nell'interno di un punto, ugualmente per tutte le direzioni. E si riconosce che R è bilatera stante la corrispondenza $[1, n]$ per cui essa deriva dal piano, giacchè a un cerchietto C tracciato su R corrisponde un cerchietto C' sul piano x, ed il verso di C non potrebbe essere invertito per un cammino chiuso descritto su R dal suo centro, senza che lo stesso accadesse per il verso di C' sul piano.

Ciò posto: *La superficie di Riemann relativa ad una curva algebrica di genere p si riduce al tipo della sfera con p manici o del disco con p fori.* A codesti tipi corrisponde, per $p > 0$, la rappresentazione piana della riemanniana sopra il quadrato con $p - 1$ fori quadrati.

Giova anche avvertire che questa rappresentazione può ridursi alla rappresentazione sopra un *poligono con $4p$ lati $a\, b\, a^{-1} b^{-1} c\, d\, c^{-1} d^{-1} \ldots$*, dove vengano connessi i lati di ugual nome, che sono descritti dai punti omologhi in senso inverso. Per $p = 1$ si ha la già incontrata rappresentazione del toro; per $p > 1$ l'anzidetto poligono con $4p$ lati si ottiene dal quadrato con $p - 1$ fori, deformando e movendo questi in guisa che un vertice di ciascun foro si porti in un dato vertice del quadrato esterno, così da aumentarne di quattro lati il contorno.

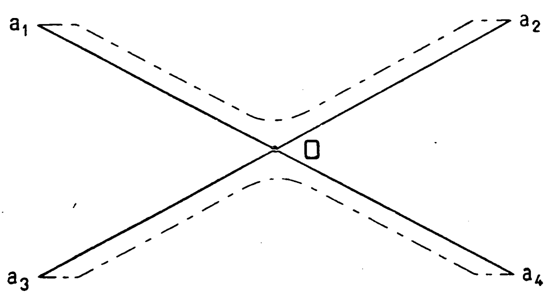
Quando le superficie di Riemann vengano introdotte nel modo particolare che risulta dal sovrapporre più fogli e connetterli lungo tagli che vanno ai punti di diramazione, si può chiedere come si effettui il passaggio alle forme tipiche della sfera con p manici o del disco con p fori.

A tale scopo si perviene mediante un semplice procedimento indicato da CLIFFORD [1] (1877). Questo si applica direttamente al caso delle superficie di Riemann a due fogli (curve *iperellittiche* $y^2 = f(x)$), mentre il caso generale di $n > 2$ fogli si riduce al precedente in base a un importante teorema di LÜROTH-CLEBSCH, come diremo in appresso.

Esponiamo intanto la trasformazione di CLIFFORD riferendoci all'equazione $y^2 = f(x)$ che (§ 34) può supporsi di grado m pari, escludendo che si abbia diramazione all'infinito; poniamo, per semplicità di discorso, $m = 4$:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

Anzitutto osserviamo che le linee di passaggio oa_1, oa_2, oa_3, oa_4, (§ 34) a cui corrisponde — nella nostra ipotesi — la stessa sostituzione (1, 2), si possono riguardare (vedi figura)



come *due* linee, congiungenti — per esempio — a_1, a_2 e a_3, a_4, le quali si lascian deformare per continuità, in guisa che non passino più per un medesimo punto. Ancora per trasformazione continua, si può supporre che i punti $a_1 a_2 a_3 a_4$ diven-

(1) Proceedings of the London Math. Soc., vol. III, n. 122.

gano punti consecutivi dell'asse reale e le linee di passaggio $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ si riducano a due segmenti di quest'asse.

In luogo dei due piani sovrapposti che costituiscono la nostra superficie di Riemann, assumiamo due sfere sovrapposte legate ai piani da una proiezione stereografica. Così avremo una superficie di Riemann, rappresentativa dell'equazione $y^2 = f(x)$, costituita da due sfere sovrapposte, che vengono collegate attraverso due archi di un cerchio massimo C (tagli o linee di passaggio). Per rendere sensibile la rappresentazione supponiamo che i due fogli siano la superficie esterna e la superficie interna di una palla di gomma. Quando si percorre — per esempio — la superficie esterna, arrivando ad un taglio di C, si deve passare sulla superficie interna dall'altra parte del piano di C. Questa convenzione non ha riscontro nelle condizioni fisiche del modello; accade invece che, girando l'orlo del taglio, si passi dalla superficie esterna alla interna, restando però dalla medesima parte del piano di C; ora questa rappresentazione si deduce dalla precedente operando sulla superficie interna una simmetria rispetto al piano di C. Così la sfera elastica coi suoi due tagli, cioè con due fori allargabili quanto si vuole, porge l'effettivo modello della superficie di Riemann corrispondente all'equazione $y^2 = f(x)$.

Ed è chiaro che ciò vale quando il grado m di f è un numero pari qualunque, ottenendosi — nello stesso modo — una sfera elastica con $\frac{m}{2}$ fori; la quale — ingrandendo un foro e schiacciando la calotta sferica da esso limitata — si riduce ad un disco solido con $p = \frac{m}{2} - 1$ fori.

Per estendere la trasformazione di Clifford alla superficie di Riemann pertinente ad una qualsiasi equazione algebrica $f(x) = 0$, occorre — come dicemmo — un teorema di Lüroth-Clebsch [1], relativo al modo di costruzione delle superficie a fogli. Questo teorema ha per oggetto di ridurre il sistema dei tagli fondamentali uscenti dal punto o (il cui numero è essenzialmente pari quando non c'è diramazione all'infinito) a un sistema di tagli susseguentisi $oa_1 oa_2 \ldots. oa_m$,

[1] Lüroth, Math. Annalen. Bd. 4, pag. 181, (1871); Clebsch Math. Annalen, Bd. 6, pag. 216. (1873).

per modo che lungo i primi $m-2n+4=2p+2$ tagli si saldino i fogli 1, 2 e alle coppie di tagli successivi corrispondano ordinatamente le sostituzioni

$$(2,3)\ (3,4) \ldots\ (n-1,\ n).$$

Il teorema precedente enuncia anzitutto che le successive sostituzioni generatrici del gruppo di monodromia, corrispondenti ai punti di diramazione, si possono prendere sotto la forma

$$(1,2)\ (1,2)\ldots,\ (2,3)\ (2,3)\ldots,\ (3,4)\ldots, \ldots,\ (n-1,n)\ (n-1,n)\ldots,$$

e questo resultato è dovuto a LÜROTH; CLEBSCH vi ha aggiunto che il numero dei punti di diramazione a cui corrisponde una delle sostituzioni generatrici, $(i,\ i+1)$, può ridursi uguale a 2 per tutti i valori di i tranne per uno solo, ad esempio per $i=1$.

La dimostrazione del teorema anzidetto si basa sopra un concetto fondamentale assai semplice, ma esige qualche attenzione ove si voglia procedere con rigore. Noi non riferiremo questo sviluppo, anche perchè le conseguenze principali che vi si riattaccano sono state già ottenute in altra guisa, a partire dal teorema di EULERO generalizzato, nella trattazione dei precedenti paragrafi; rimandando alla Nota di BERTINI [1] « Sulle superficie di Riemann » basterà, qui accennare che la riduzione richiesta si basa sui due principî seguenti.

1) È lecito sostituire eventualmente alla curva $f(xy)=0$ una sua trasformata birazionale dotata soltanto di punti doppi ordinari (teorema di NÖTHER, Cfr. L. 4°) e — operando ove occorra un cambiamento di coordinate — si può anche ammettere che le tangenti a rami, condotte dal punto all'infinito dell'asse y alla curva $f(xy)=0$, siano $m=2n+2p-2$ tangenti distinte, dove p designa il genere di f, sicchè ad ogni punto di diramazione corrisponda soltanto lo scambio di *due* rami.

2) Quando sia data una superficie di Riemann ad n fogli con $m=2n+2p-2$ linee di passaggio, cui corrispondano semplici scambi $(i,\ k)$ fra i rami, si può trasformare uno di

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei - 4 febbraio 1894.

questi scambi con un altro, facendo passare per continuità un punto di diramazione relativo al primo attraverso la linea di passaggio che congiunge l'altro; questa trasformazione è stata spiegata nel § 34 con riferimento ad un esempio particolare. Con siffatte trasformazioni elementari si può dare ai tagli che costituiscono le linee di passaggio della superficie di Riemann un tale ordine da soddisfare la nostra richiesta. Ed allora due linee successive di passaggio come oa_1, oa_2 che colleghino gli stessi due fogli, possono ridursi ad una linea unica $a_1 a_2$ che non passi più per o. Quindi viene dimostrato il

Teorema di Lüroth-Clebsch. *Si può formare una superficie di Riemann disponendo i fogli a catena in guisa che ciascuno, salvo i due primi, sia riunito soltanto al seguente da una sola linea di passaggio.*

Dal teorema precedente segue senz'altro la possibilità di eseguire la trasformazione di Clifford, riducendo la superficie di Riemann, rappresentativa della equazione $f(xy) = 0$, ad un disco con p fori, dove si vede che p denota il genere di f.

Osservazione. Anche senza effettuare la trasformazione di Clifford, il tipo di Lüroth-Clebsch permette di riconoscere che la superficie di Riemann corrispondente ad una curva di genere p ha l'ordine di connessione $2p$. Infatti si segnino nel piano le linee di passaggio non attraversantisi $a_1 a_2$, $a_3 a_4, \dots a_{m-1} a_m$, dove alle prime $p+1$ linee corrisponde la sostituzione (1, 2) alle due seguenti la sostituzione (2, 3) ecc. Si ottengono anzitutto p tagli chiusi che non rompono la connessione della superficie, descrivendo tante linee chiuse che girano attorno alle

$$a_3 a_4, \dots, \quad a_{2p+1} a_{2p+2},$$

(non si può circondare analogamente anche la linea $a_1 a_2$ senza rompere la connessione fra i fogli 1, 2); inoltre si ottengono altri p tagli chiusi, che insieme ai primi rendono la superficie semplicemente connessa, descrivendo tante linee chiuse che, attraversando *due* linee di passaggio, includano due punti di diramazione:

$$a_1 a_3, \quad a_1 a_5, \dots \quad a_1 a_{2p+1}.$$

Conviene supporre che codesti tagli siano descritti a partire da un medesimo punto della superficie di Riemann, preso per esempio sul foglio 1; allora è chiaro che i p tagli della prima specie giacciono tutti sul foglio 1, sicchè la connessione delle due parti in cui il detto foglio viene diviso da un taglio, si effettua passando attraverso il foglio 2; invece i p tagli della seconda specie sono composti di un arco che giace nel foglio 1 e di un arco complementare che giace nel foglio 2, di guisa che essi non rompono nè la connessione di un foglio nè la connessione dei due fogli fra loro. Che l'insieme dei $2p$ tagli riduca la superficie semplicemente connessa, si potrà verificare dal lettore partendo dai più semplici casi particolari.

Vogliamo anche aggiungere che operando i $2p$ tagli anzidetti si ottiene la rappresentazione piana della superficie di Riemann sul poligono con $4p$ lati, di cui si è discorso innanzi.

INDICI

INDICE ALFABETICO

D

E

T

V

W

Z

INDICE DEI CAPITOLI

LIBRO PRIMO

Introduzione

CAPITOLO I

Le equazioni $f(x) = 0$ e i gruppi di punti sulla retta.

CAPITOLO II

Interpretazioni fondamentali dell'equazione $f(xy) = 0$: curve e corrispondenze.

CAPITOLO III

Nota sul significato dell'espressione "in generale" e sui computi di costanti.

LIBRO SECONDO

Il principio di corrispondenza e le sue applicazioni

CAPITOLO I

Le involuzioni e i gruppi finiti di proiettività sulla retta.

CAPITOLO II

Teoria elementare delle curve piane.

CAPITOLO III

Nota sulle funzioni algebriche e sulle rappresentazioni reali dell'immaginario.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 44 riga 19 invece di

$$27a_1^2a_4 + 27a_1a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0^3a_4 - 9a_1a_2a_3$$

leggi

$$27a_1^2a_4 + 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0a_2a_4 - 9a_1a_2a_3.$$

A pag. 193 riga 12 invece di MAYER leggi MEYER.

A pag. 264 » 4 » » $n(n-1)2-$

leggi $n(n-1)-2$.

A pag. 264 riga 18 invece di $n-2$ leggi $2(n-2)$.

Finito di stampare
nella Tipografia della Cooperativa Azzoguidi
di Bologna
il giorno 23 Ottobre 1915.