Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Nozioni di matematica [ad uso dei licei moderni]

vol. **II**

Zanichelli, Bologna, 1915.

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

NOZIONI DI MATEMATICA

AD USO DEI LICEI MODERNI

VOLUME SECONDO

(CLASSE III)

LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

F. Enriques - U. Amaldi

PREFAZIONE

Questo volume prosegue e compie le « Nozioni di Matematica per i Licei moderni » di cui, già nella prefazione al primo volume, abbiamo spiegato i criterii generali.

Ora gli sviluppi qui occorsi danno luogo a rilevare e motivare specialmente tre punti.

1) L'introduzione del concetto di limite, che ha ufficio essenziale in queste teorie, non viene fatta, come accade di solito, in modo generale ed astratto. Ci è parso più conforme allo spirito dell'intero programma far scaturire quel fondamentale concetto dall'esame dei varî problemi concreti in cui sorgono naturalmente processi di limite, in modo induttivo e per così dire pragmatistico.

2) Nella parte dedicata alla Trigonometría, merita speciale rilievo il maggiore sviluppo dato alle applicazioni pratiche.

Le quali costituendo storicamente la ragion d'essere della dottrina, possono esercitare un notevole valore di suggestione sulla mente degli alunni, suscitando la loro curiosità e il loro interesse. Crediamo pertanto che esse possano porgere utile occasione di sostituire, in alcuni casi, la risoluzione teorica dei triangoli, evitando di prolungare una trattazione sistematica astratta, assai meno capace di animare l'attiva partecipazione delle giovani intelligenze.

3) Il cenno sull'integrale indefinito, che chiude il libro, esorbita veramente dal programma della materia ufficialmente tracciato. Tuttavia ci è parso che l'osservazione fondamentale circa il carattere inverso della derivata e dell'integrale non potesse mancare ad una trattazione organica delle teorie introduttrici all'Analisi infinitesimale, e che porgendo su ciò

rapide informazioni al lettore e additando le semplificazioni che ne derivano, venissimo a colmare una vera lacuna e forse anche ad attuare più completamente lo spirito del programma medesimo; se è vero che questo uscì da un contemperamento di due tendenze e dovette perciò tenere nei più ristretti limiti le idee novatrici.

Comunque, ove pure gl' Insegnanti non credano valersi in alcun modo del detto cenno, riteniamo che la sua presenza nel libro, posto in mano agli alunni, non rimarrà senza frutto.

Confidiamo che il favore con cui fu accolta la pubblicazione del primo volume, sia un pegno dell'accoglienza riserbata pure a questa seconda parte delle « Nozioni ». E preghiamo ancora i Colleghi a comunicarci osservazioni e consigli, di cui terremo il massimo conto quando sieno conformi allo spirito generale del nuovo organismo didattico che il Liceo moderno è chiamato prudentemente ad attuare.

NOZIONI DI MATEMATICA

I.

POTENZE AD ESPONENTE QUALSIASI

Nell'ultima parte del primo volume abbiamo dato il concetto di *funzione* e abbiamo studiato, anche valendoci della rappresentazione grafica sul piano cartesiano, alcune classi di funzioni matematiche particolarmente semplici: le *funzioni razionali intere di* 1° *e* 2° *grado* e qualche esempio di *funzioni fratte.*

Qui, proseguendo nello stesso ordine di idee, ci proponiamo di considerare altre classi di funzioni, che si presentano naturalmente nelle applicazioni della Matematica; e cominceremo col definire le cosidette *funzioni esponenziali,* che ci condurranno allo studio e all'uso dei *logaritmi,* che costituiscono il più agile e più vantaggioso strumento per ogni sorta di calcoli numerici.

Ma a questo scopo è necessario che anzitutto riprendiamo il concetto di *potenza di un numero,* per estenderlo anche al caso, in cui l'esponente non è più un numero intero e positivo, ma un numero qualsivoglia.

Potenze ad esponente intero e negativo

1. Dati un numero qualsivoglia a e un intero positivo n, sappiamo che la *potenza di* a *all'esponente* n non è altro che il prodotto di n fattori uguali ad a e si scrive

$$a^n = \underset{1}{a} \cdot \underset{2}{a} \cdot \ldots\ldots \cdot \underset{n}{a}.$$

Da questa definizione si deduce che la operazione di innalzamento a potenza gode di alcune proprietà fondamentali, di uso frequente nel calcolo algebrico, che sono espresse dalle seguenti identità, dove a e b rappresentano numeri quali si vogliano ed m ed n due interi positivi:

(I) $$(ab)^m = a^m b^m$$

(II) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(III) $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

(IV) $$a^m a^n = a^{m+n}$$

(V) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (m > n)$$

2. Quest'ultima identità

(V) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

è valida solo se l'esponente m del numeratore è maggiore dell'esponente n del denominatore.

Se invece $m = n$, il primo membro della (V) si riduce ad 1, mentre al secondo membro compare il segno

$$a^0,$$

che non è ancora stato definito. Per rendere valida la (V) anche per $m = n$, noi converremo di attribuire al segno a^0, qualunque sia a, il valore 1 e di chiamarlo « potenza della base a all'esponente *zero* ». Così d'or innanzi porremo:

$$2^0 = 1, \quad 10^0 = 1, \quad (-1)^0 = 1, \text{ ecc.}$$

3. Sia in secondo luogo $m < n$, p. es. $m = 3$, $n = 5$. Per siffatti valori degli esponenti il primo membro della identità (V) assume il valore

$$\frac{a^3}{a^5}$$

ossia

$$\frac{1}{a^2},$$

mentre al secondo membro compare il segno

$$a^{3-5} = a^{-2},$$

che non ha per noi alcun significato. Se vogliamo rendere valida la (V) anche in tal caso, siamo condotti a convenire d'or innanzi che il segno

$$a^{-2}$$

rappresenti il valore reciproco della potenza a^2, cioè

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

In generale, preso un qualsiasi numero intero negativo $-p$, conveniamo di rappresentare con a^{-p} il valore reciproco della potenza a^p, cioè porremo in ogni caso

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

Così, p. es.,

$$2^{-1}=\frac{1}{2},\quad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100},\quad (-1)^{-3}=\frac{1}{(-1)^3}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}=10^3=1000,\ \text{ecc.}$$

Anche il segno a^{-p} si chiamerà « potenza di base a » e il numero $-p$ se ne dirà l'esponente.

4. Con la definizione delle potenze ad esponente negativo si è resa valida in ogni caso la identità

$$\text{(V)}\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$$

ma questo vantaggio sarebbe illusorio, se poi non valessero per le potenze ad esponente negativo tutte le proprietà fondamentali (I)-(IV), valide per le potenze ad esponente positivo.

Ma è facile assicurarsi che esse sussistono tutte anche per le nuove potenze. La dimostrazione si fa per tutte nello stesso modo: si sostituisce nel primo membro a ciascuna potenza ad esponente negativo la rispettiva espressione come reciproca di una potenza ad esponente positivo, si eseguisce l'operazione indicata, e nel risultato si torna alle potenze ad esponente negativo.

Dimostriamo, p. es., la identità (I), riferendoci, per fissare le idee, ad un esponente numerico:

$$(ab)^{\;3}=a^{-3}b^{-3}.$$

Infatti si hanno successivamente le seguenti identità:

$$
\begin{aligned}
(ab)^{-3} &= \frac{1}{(ab)^3} = \\
&= \frac{1}{a^3 b^3} = \\
&= \frac{1}{a^3}\frac{1}{b^3} = \\
&= a^{-3} b^{-3}.
\end{aligned}
$$

Lasciamo all'alunno il dimostrare analogamente per esercizio le altre identità del n. 1.

Potenze ad esponente frazionario

5. Il concetto di potenza di un numero si può estendere ulteriormente, al caso di esponenti frazionari: vedremo così come il calcolo dei radicali (I; Cap. V) [1] si possa ridurre ad un calcolo di potenze.

Qui avvertiamo che nelle seguenti considerazioni supporremo sempre di prendere radicandi positivi e di riferirci alle radici aritmetiche (I; n. 98).

Per cominciare da un caso concreto, proponiamoci di calcolare la radice cubica della sesta potenza a^6 di *un numero positivo* a, cioè

$$\sqrt[3]{a^6}.$$

Siccome a^6 si può scrivere (n. 1, II)

$$a^6 = (a^2)^3,$$

otterremo senz'altro

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,$$

cioè

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}};$$

e nello stesso modo si avrà

$$\sqrt[3]{a^9} = a^{\frac{9}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}}, \ldots\ldots$$

[1] Indicheremo sempre con « I » il primo volume di queste « Nozioni ».

Questa riduzione del radicale aritmetico ad una potenza non sarebbe più possibile se si dovesse, p. es., estrarre la radice cubica di a^7, perchè 7 non è divisibile per 3 e non si possono quindi raggruppare i 7 fattori a di a^7 in tre prodotti parziali di ugual numero di fattori ciascuno. Se proviamo tuttavia ad applicare formalmente la stessa riduzione algebrica usata dianzi nel caso in cui l'esponente di a era divisibile per 3, otteniamo il segno

$$a^{\frac{7}{3}},$$

che non ha nessun significato.

Allora, per rendere formalmente possibile in ogni caso la suaccennata trasformazione algebrica, converremo di rappresentare col segno

$$a^{\frac{7}{3}}$$

il radicale aritmetico

$$\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{\overline{a}^7};$$

e diremo che $a^{\frac{7}{3}}$ è la « *potenza* della base a all'esponente $\frac{7}{3}$ ».

Parlando in generale, il radicale aritmetico

$$\sqrt[q]{a^p}$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\sqrt[q]{\overline{a}^p},$$

se p è divisibile per q, è riducibile alla potenza ad esponente intero

$$a^{\frac{p}{q}}.$$

Se poi p non è divisibile per q, noi *per convenzione* rappresenteremo ancora quel radicale col segno

$$a^{\frac{p}{q}},$$

cosicchè sussisterà in ogni caso la identità

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\overline{a}^p} = a^{\frac{p}{q}},$$

la quale, se p è divisibile per q, esprime una proprietà delle potenze ad esponente intero; e se invece p non è divisibile per q fornisce la definizione della « potenza di a all'esponente $\frac{p}{q}$ ».

Così, in particolare, sarà:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8, \quad 4^{2,1} = 4^{\frac{21}{10}} = \sqrt[10]{4^{21}}, \quad 5^{0,3} = \sqrt[10]{5^3}, \text{ ecc.}$$

6. La convenzione del n. prec. si estende anche al caso di esponenti fratti negativi; cioè si pone

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}},$$

con la sola avvertenza di attribuire il segno — al numeratore dell'esponente, in quanto il denominatore, che fornisce l'indice di una estrazione di radice, non può essere che positivo.

Ricaviamo poi dalle successive identità

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

che sussiste anche per le potenze ad esponenti frazionari la identità (cfr. n. 3)

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Nota. — La definizione di potenza ad esponente frazionario non si può estendere nello stesso modo al caso delle basi negative, perchè i numeri negativi non ammettono radici di indice pari (I; n. 100).

7. Pei calcoli con potenze ad esponente frazionario sussistono le stesse regole fondamentali valide per le potenze ad esponente intero.

È invero facile mostrare come sussistano ancora le identità (I)-(V) del n. 1. La dimostrazione si fa per tutte nel medesimo modo: si sostituiscono nel primo membro alle potenze ad esponente frazionario i corrispondenti radicali, si eseguiscono le operazioni secondo le regole del calcolo dei radicali (I; nn. 103-111) e infine si scrive il risultato sotto forma di potenza ad esponente frazionario.

Dimostriamo p. es. la (I), riferendoci, per fissare le idee ad un caso numerico:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{3}{5}}$$

Infatti si hanno le successive identità:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(ab)^3} = \sqrt[5]{a^3b^3} = \sqrt[5]{a^3}\,\sqrt[5]{b^3} = a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{3}{5}}.$$

Lasciando all'alunno di dimostrare come esercizio le (II), (III) e (V) del n. 1, dimostriamo qui la (IV), riferendoci ancora ad un caso numerico

$$a^{-\frac{2}{3}}\,a^{\frac{5}{4}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}.$$

Infatti (si ricordi I; n. 110)

$$a^{-\frac{2}{3}}\,a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{a^{-2}}\,\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[12]{a^{-8}}\,\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[12]{a^{-8}a^{15}} =$$

$$= \sqrt[12]{a^{-8+15}} = a^{\frac{-8+15}{12}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$$

Proprietà delle potenze ad esponente razionale

Dobbiamo qui fermarci a rilevare alcune proprietà fondamentali delle potenze ad esponente razionale, e, per fissare le idee, ci riferiremo in questo paragrafo (nn. 8-20), al caso degli *esponenti positivi.* Le analoghe proprietà relative agli esponenti negativi discendono dai teoremi, che qui dimostreremo, come immediati corollari, ove si tenga conto della definizione di potenza ad esponente negativo (n. 6); e qui non occorrerà nemmeno enunciare codesti corollari, giacchè tornerà facile rilevarli nel seguito, ogni volta che se ne presenterà il bisogno.

8. Notiamo anzitutto che *ogni potenza di* 1, *ad esponente razionale, è uguale ad* 1.

Sono invero uguali ad 1 tutte le potenze di 1 ad esponente intero, come pure tutte le radici aritmetiche di 1. Sarà quindi uguale ad 1 anche ogni potenza di 1 ad esponente razionale; p. es.

$$1^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{1^3} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

9. *Dato un numero positivo* a, *diverso da* 1, *secondo che esso è maggiore o minore di* 1, *anche ogni sua potenza ad esponente razionale positivo è rispettivamente maggiore o minore di* 1 *a*) Pel caso degli esponenti interi, se è

$$a > 1,$$

abbiamo, moltiplicando ambo i membri per a, che è positivo,

$$a^2 > a$$

e quindi

$$a^2 > 1$$

e così

$$a^3 > 1, \quad a^4 > 1, \ldots.$$

Nello stesso modo, se

$$a < 1$$

si trova

$$a^2 < 1, \quad a^3 < 1, \ldots..$$

b) Se poi l'esponente è una frazione positiva $\frac{p}{q}$, indichiamo con b il valore di $a^{\frac{p}{q}}$. Dalla

$$b = a^{\frac{p}{q}}$$

ricaviamo, innalzando ambo i membri all'esponente q,

$$b^q = a^p.$$

Se $a > 1$, avremo anche $a^p > 1$ e quindi b non può essere nè uguale nè minore di 1, perchè in tal caso anche b^q sarebbe rispettivamente uguale o minore di 1; cosicchè si conclude

$$b > 1.$$

Analogamente da $a < 1$ si deduce $b < 1$.

10. L'osservazione del n. prec. permette subito di vedere *come varia una potenza* (a base ed esponente positivi) *quando, tenuto fisso l'esponente, se ne fa variare la base.*

Supponiamo che a e b siano due numeri positivi e sia

$$a < b.$$

Allora avremo

$$\frac{a}{b} < 1$$

e, qualunque sia l'esponente frazionario positivo $\frac{p}{q}$, (n. prec.)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} < 1$$

ossia

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} < 1$$

e quindi

$$a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}}.$$

Cioè *innalzando due numeri positivi disuguali ad uno stesso esponente razionale positivo si ottengono potenze disuguali nello stesso senso.*

11. Importa, in secondo luogo, esaminare *come varia la potenza di un numero positivo, quando, tenuta fissa la base, se ne fa variare l'esponente.*

A tale scopo dimostriamo anzitutto il seguente teorema fondamentale:

Dato un numero positivo a *diverso da* 1, *le potenze di* a *ad esponenti razionali positivi crescenti sono crescenti se* a > 1, *decrescenti se* a < 1.

Presi due numeri positivi, interi o frazionari, r ed s e supposto

$$r < s,$$

confrontiamo le potenze

$$a^r, \quad a^s.$$

Abbiamo in ogni caso (n. 7)

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r},$$

dove $s - r$, per l'ipotesi, risulta positivo. Perciò se $a > 1$ avremo (n. 9)

$$a^{s-r} > 1$$

ossia

$$\frac{a^s}{a^r} > 1$$

e quindi

$$a^r < a^s.$$

Se invece $a < 1$ sarà analogamente

$$a^{s-r} < 1, \quad \frac{a^s}{a^r} < 1, \quad a^r > a^s.$$

12. Per poter studiare in modo più preciso come variano le potenze del numero positivo a al variare dell'esponente, qui conviene separare il caso di $a > 1$ da quello di $a < 1$; e, tenendoci anzi tutto alla prima ipotesi, nel qual caso tutte le potenze di a sono maggiori di 1 (n. 9), dimostreremo che:

Se a > 1, *si può sempre trovare un esponente* m *abbastanza grande, perchè risulti* a^m *maggiore di un qualsiasi numero prefissato, per quanto grande.*

Se M è il numero prefissato, basterà evidentemente mostrare che si può trovare un esponente m *intero*, pel quale sia

$$a^m > M.$$

All'uopo si ricordi che per qualsiasi intero m sussiste l'identità

$$a^m - 1 = (a-1)(a^{m-1} + a^{m-2} + ... + a^2 + a + 1),$$

che è stata dimostrata negli Elementi di Algebra [1] e che del resto si verifica immediatamente, eseguendo, secondo le note regole della moltiplicazione dei polinomi, il prodotto indicato al secondo membro.

Ora il secondo fattore del secondo membro comprende m termini, di cui l'ultimo è 1 e gli altri, per l'ipotesi $a > 1$, sono tutti maggiori di 1 (n. 9); cosicchè, se si sostituisce a ciascuno di essi l'unità, il secondo membro rimpicciolirà e avremo

$$a^m - 1 > m(a-1),$$

ossia

$$a^m > 1 + m(a-1).$$

Allora perchè risulti certamente

$$a^m > M,$$

basterà prendere l'intero m abbastanza grande, perchè sia

$$1 + m(a-1) > M,$$

[1] Cfr. PINCHERLE: *Lezioni di Algebra Elementare*; n. 129.

cioè basterà prendere

$$m > \frac{M-1}{a-1}.$$

13. Il teor. prec. appare più espressivo, se pensiamo l'esponente di a^m variabile per valori indefinitamente crescenti oltre ogni numero assegnabile, o, come si suol dire, *tendente all'infinito*; p. es.

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots.$$

oppure

$$m = \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \ldots.,$$

e così via.

Allora a^m varia crescendo (n. 11) e il teor. prec. ci dice di più che codesta potenza al crescere di m, riesce a superare qualsiasi numero assegnabile.

Ciò si esprime brevemente, dicendo che *le potenze di un numero* $a > 1$, *al tendere all'infinito dell'esponente, tendono all'infinito* o *hanno per* LIMITE *l'infinito*; e si scrive

$$\lim_{m \to \infty} a^m = \infty.$$

[Si legga: « Limite di a^m, per m tendente all'infinito, uguale ad infinito »].

14. Vediamo analogamente come varia a^m, per $a > 1$, quando se ne fa decrescere indefinitamente l'esponente razionale (positivo) m.

Dimostriamo perciò anzitutto che:

Se $a > 1$, *si può sempre scegliere un esponente razionale positivo* $\frac{1}{n}$ *abbastanza piccolo, perchè* $a^{\frac{1}{n}}$, *pur mantenendosi maggiore di* 1 (n. 9), *ne differisca per meno di un qualsiasi numero positivo prefissato, per quanto piccolo.*

Se, invero, indichiamo con ε codesto numero prefissato, sarà sempre, per piccolo che esso sia,

$$1 + \varepsilon > 1$$

e si potrà quindi trovare (n. prec.) un intero n abbastanza grande, perchè risulti

$$(1+\varepsilon)^n > a,$$

ossia, innalzando ambo i membri all'esponente $\frac{1}{n}$, cioè estraendo le due radici n^{me} aritmetiche, (n. 10)

$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}},$$

onde concludiamo che veramente $a^{\frac{1}{n}}$ supera 1 di meno che ε.

15. Anche il teor. prec. si può considerare in una forma più espressiva, immaginando di attribuire successivamente all'esponente m di a^m dei valori razionali positivi indefinitamente decrescenti, in guisa che divengano inferiori a qualsiasi numero assegnato per quanto piccolo, o, come si suol dire, *tendenti allo zero*; tali sarebbero, p. es., i valori

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \ldots.$$

o

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{10^2} \quad \frac{1}{10^3} \quad \frac{1}{10^4} \ldots.$$

e così via. Corrispondentemente, la potenza a^m varia decrescendo (n. 11), e il teor. prec. ci dice che essa si avvicina indefinitamente ad 1, ossia che la differenza $a^m - 1$ va mano mano diventando minore di ogni numero positivo assegnabile, per quanto piccolo. Ciò si esprime brevemente, dicendo che *le potenze di un numero positivo* a $<$ 1, *al tendere allo zero dell'esponente, tendono ad* 1 *o hanno per* LIMITE 1; e si scrive

$$\lim_{m \to 0} a^m = 1.$$

[Si legga: « Limite di a^m, per m tendente allo zero, uguale ad 1 »].

16. Passiamo a considerare *le potenze di un numero positivo minore di* 1, che, come sappiamo, sono pur esse minori di 1 (n. 9).

Qui per le potenze ad esponente crescente si ha che:

Se il numero positivo a *è minore di* 1, *le potenze di* a, *al tendere all'infinito dell'esponente, tendono allo zero*, cioè

$$\lim_{m \to \infty} a^m = 0.$$

Dimostrare questo teor. significa far vedere che: *Se il numero positivo* a *è minore di* 1, *si può sempre prendere un* *esponente* m *abbastanza grande perchè* a^m, *risulti minore di un qualsiasi numero positivo prefissato, per quanto piccolo.*

Ora, se indichiamo con ε codesto numero prefissato, se ne consideri il reciproco $\frac{1}{\varepsilon}$ e si osservi che per l'ipotesi $a < 1$, risulta

$$\frac{1}{a} > 1.$$

Allora potremo sempre (n. 12) prendere un esponente m abbastanza grande, perchè risulti

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m > \frac{1}{\varepsilon}$$

ossia

$$\frac{1}{a^m} > \frac{1}{\varepsilon}$$

o infine veramente

$$a^m < \varepsilon.$$

17. Per le potenze ad esponente decrescente si ha che:

Se il numero positivo a *è minore di* 1, *le potenze di* a, *al tendere dell'esponente allo zero, tendono ad* 1, cioè

$$\lim_{m \to 0} a^m = 1.$$

Dimostrare questo teor., significa far vedere che:

Se il numero positivo a *è minore di* 1, *si può sempre scegliere un esponente razionale positivo abbastanza piccolo* $\frac{1}{n}$, *perchè* $a^{\frac{1}{n}}$, *pur mantenendosi minore di* 1, *ne differisca per meno di un qualsiasi numero positivo prefissato, per quanto piccolo.*

Se indichiamo con ε codesto numero prefissato, potremo supporre che esso sia minore di 1 ed allora

$$1 - \varepsilon$$

sarà un numero positivo, minore di 1, e potremo sempre prendere un esponente intero n abbastanza grande, pel quale sia (n. prec.)

$$(1 - \varepsilon)^n < a.$$

Di qui, innalzando ambo i membri all'esponente $\frac{1}{n}$, ricaviamo (n. 10)

$$1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n}};$$

cioè veramente $a^{\frac{1}{n}}$ differisce da 1 per meno di ε.

18. Esauriti così tutti i casi possibili, sarà qui opportuno riepilogare in un piccolo quadro i risultati ottenuti nei nn. prec. Abbiamo visto che:

$$\text{Per } a > 1 \quad \begin{cases} \lim\limits_{m \to \infty} a^m = \infty \\ \lim\limits_{m \to 0} a^m = 1 \end{cases}$$

$$\text{Per } 0 < a < 1 \quad \begin{cases} \lim\limits_{m \to \infty} a^m = 0 \\ \lim\limits_{m \to 0} a^m = 1. \end{cases}$$

Notiamo che *quando l'esponente tende allo zero,* a^m *tende ad* 1, *qualunque sia la base* (purchè positiva).

19. Qui torna opportuno aggiungere un'ultima osservazione, che ci sarà utile in seguito.

Data una qualsiasi potenza a^m *di base positiva e diversa da* 1, *si può sempre trovare un numero razionale* $\frac{1}{n}$ *abbastanza piccolo, perchè la differenza fra* a^m *e* $a^{m+\frac{1}{n}}$ *risulti minore di un qualsiasi numero positivo prefissato, per quanto piccolo.*

Sia ε codesto numero prefissato e riferiamoci, per fissare le idee, al caso $a > 1$ (chè il caso $0 < a < 1$ si tratterebbe analogamente).

La differenza

$$a^{m+\frac{1}{n}} - a^m,$$

qualunque sia $\frac{1}{n}$, si può scrivere

$$a^m\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Ora $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre maggiore di 1 (n. 9), e tende ad 1 quando si fa tendere $\frac{1}{n}$ allo zero (n. prec.). Noi potremo perciò prendere $\frac{1}{n}$ abbastanza piccolo, perchè $a^{\frac{1}{n}}$ diversifichi da 1 per meno di un qualsiasi numero prefissato, p. es. di

$$\frac{\varepsilon}{a^m}.$$

Avremo allora

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^m}$$

e quindi

$$a^m\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon$$

ossia veramente

$$a^{m+\frac{1}{n}} - a^m < \varepsilon.$$

20. Il teor. prec. si può anche esprimere, dicendo che *la potenza* a^{m+h}, *quando si tenga fisso* m *e si faccia tendere* h *allo zero, si avvicina indefinitamente ad* a^m, ossia *la differenza*

$$a^{m+h} - a^m,$$

al tendere allo zero di h, finisce col diventar minore di ogni numero positivo assegnabile, per quanto piccolo.

Ciò si esprime dicendo che a^{m+h}, *per* h *tendente allo zero, tende al* LIMITE a^m, e si scrive

$$\lim_{h \to 0} a^{m+h} = a^m.$$

Potenze ad esponente irrazionale

21. Nella successiva estensione del concetto di « potenza di un numero » non resta più che un passo, cioè definire *la potenza di una qualsivoglia base positiva* a *ad un dato esponente irrazionale* b.

Questo numero irrazionale sarà dato da un certo decimale illimitato *non periodico* (I; nn. 11, 12), come sarebbe, p. es.

$$b = 3,\ 121122111222....$$

I numeri razionali che si ottengono prendendo di b soltanto la parte intera, o una, due, tre,.... cifre decimali

$$3 \qquad 3{,}1 \qquad 3{,}12 \qquad 3{,}121 \qquad 3{,}1211 \quad .....$$

forniscono *valori approssimati di* b *per difetto* a meno di 1, di 0,1, di 0,01, ecc.; mentre se a ciascuno di codesti numeri aggiungiamo una unità decimale dell'ordine dell'ultima cifra, otteniamo una successione

$$4 \quad 3{,}2 \quad 3{,}13 \quad 3{,}122 \quad 3{,}1212, \ldots$$

di valori *approssimati di* b *per eccesso*, a meno di 1, di 0,1, di 0,01, ecc. Siccome i numeri della prima successione hanno da b una differenza rispettivamente minore di

$$1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}01 \quad 0{,}001 \text{ ecc.},$$

e quindi tendente allo zero, possiamo dire (cf. n. 20), che essi *tendono a* b *o hanno per limite* b. Per la stessa ragione si dirà che tendono a b anche i valori approssimati per eccesso della seconda successione. Questi tendono a b decrescendo, mentre i primi vi tendono crescendo.

Ora per ragionare in generale ed anche per semplificare la scrittura, indichiamo codeste due successioni di valori, progressivamente approssimati a b e *tendenti ad esso,* con

$$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \ldots$$
$$b_0' \quad b_1' \quad b_2' \quad b_3' \ldots.$$

Ciò premesso, e scelta la base positiva a, *che qui,* per fissar le idee, *supponiamo maggiore di* 1, faremo vedere che *le due successioni di potenze ad esponenti razionali*

(1) $$a^{b_0} \quad a^{b_1} \quad a^{b_2} \ldots$$

(2) $$a^{b_0'} \quad a^{b_1'} \quad a^{b_2'} \ldots,$$

tendono, l' una crescendo e l' altra decrescendo, ad un medesimo numero determinato: cioè

$$\lim_{n \to \infty} a^{b_n} = \lim_{n \to \infty} a^{b_n'}.$$

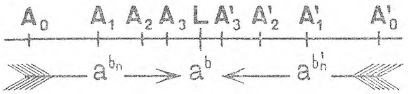
Questo *limite comune* alle due successioni si dirà appunto « *la potenza* a^b *della base* a *all'* ESPONENTE IRRAZIONALE b ».

Per giustificare l'asserzione precedente, possiamo servirci di considerazioni geometriche. Su di un asse x, su cui sia fissato un sistema di ascisse (I; n. 182) immaginiamo segnati tutti i punti

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \ldots$$
$$A_0' \quad A_1' \quad A_2' \quad A_3' \ldots$$

che hanno rispettivamente per ascisse i numeri delle due successioni (1) e (2).

Siccome i b_n sono crescenti e i b_n' decrescenti ed $a > 1$, sono pur crescenti gli a^{b_n} e decrescenti gli $a^{b_n'}$ (n. 11); perciò i punti A_n si susseguono verso destra, mentre gli A_n' si susseguono verso sinistra. Ma ogni b_n è minore (di b e quindi) di ogni b_n', cosicchè ogni a^{b_n} sarà minore di ogni $a^{b_n'}$ (n. 11) ed ogni punto A_n resterà sempre alla sinistra di ogni A_n'.



Infine la differenza tra un qualsiasi b_n e il corrispondente b_n' è data da un'unità decimale dell'n^{mo} ordine

$$b_n' - b_n = \frac{1}{10^n},$$

cosicchè basterà prendere n abbastanza grande, perchè risulti piccola quanto si vuole anche la differenza (n. 19)

$$a^{b_n'} - a^{b_n},$$

che misura la distanza $A_n A_n'$ dei due punti A_n, A_n' (I; n. 183). Ciò vuol dire che i punti A_n, A_n', al crescere di n, si vanno incontro sulla retta, avvicinandosi in modo che la loro distanza diventi minore di ogni numero prefissato, per quanto piccolo; e allora la nostra intuizione ci assicura che essi tendono entrambi ad un medesimo punto L, che lascia a sinistra tutti i punti A_n, a destra tutti i punti A_n' (cfr. I; n. 11). L'ascissa di questo punto L è il limite comune delle due successioni (1) e (2), cioè il valore della potenza a^b.

22. Allo stesso risultato si può, del resto, pervenire anche con sole considerazioni aritmetiche sulle due successioni (1) e (2). Abbiamo già notato dianzi, che, purchè si prenda n abbastanza grande, la differenza

$$a^{b'_n} - a^{b_n}$$

risulta minore di qualsivoglia numero positivo per quanto piccolo.

Ora se si prefissa p. es. il numero 0,0001 e si trova che

$$a^{b'_{20}} - a^{b_{20}} < 0{,}0001,$$

i due numeri $a^{b_{20}}$, $a^{b'_{20}}$ avranno in generale identiche la parte intera e le prime tre cifre decimali; se è p. es.

$$a^{b_{20}} = 5{,}2746\ldots.$$

sarà al massimo

$$a^{b'_{20}} = 5{,}2747\ldots..$$

Solo se $a^{b_{20}}$ avesse al quarto posto dopo la virgola la cifra 9 e fosse, p. es.,

$$a^{b_{20}} = 5,2749\ldots.$$

$a^{b'_n}$ potrà essere dato da

$$a^{b'_{20}} = 5,2750\ldots.$$

e non aver comuni con $a^{b_{20}}$ che le prime due cifre decimali.

Ad ogni modo, procedendo oltre, avremo che le potenze a^{b_n} e $a^{b'_n}$, mano mano che la loro differenza rimpicciolisce, forniranno in generale un numero sempre crescente di cifre decimali comuni (1) e definiranno così un certo numero decimale illimitato, che sarà maggiore di tutti gli a^{b_n} e minore di tutti gli $a^{b'_n}$. Questo numero è appunto il limite comune delle due successioni (1) (2), cioè la potenza a^b, della base a all'esponente b.

Risulta dalle osservazioni precedenti che il solo caso, in cui non si otterrebbe un numero crescente di cifre decimali comuni agli a^{b_n} e agli $a^{b'_n}$, sarebbe quello, in cui gli a^{b_n} fornissero da un certo punto in poi cifre tutte uguali a 9 e dessero, p. es., successivamente

$$5,2749\ldots. \qquad 5,27499\ldots. \qquad 5,274999\ldots. \text{ ecc.}$$

Gli $a^{b'_n}$ darebbero corrispondentemente, al più,

$$5,2750\ldots. \qquad 5,27500\ldots. \qquad 5,275000\ldots. \text{ ecc.}$$

Ma allora è chiaro che anche queste due successioni forniscono valori approssimati di un determinato numero, e precisamente del numero decimale periodico, e perciò razionale,

$$5,274\overline{9} = 5,275.$$

23. Dianzi abbiamo supposto che la base a fosse maggiore di 1.

Ma tutto ciò che si è detto al n. prec. si ripete, con lievi

(1) Si noti che le cifre acquisite come comuni a una coppia determinata di potenze di ugual posto a^{b_n} e $a^{b'_n}$ sono *esatte*, cioè non potranno più essere alterate dalle coppie successive; perchè se si ha p. es.

$$a^{b_{20}} = 5,2746\ldots., \qquad a^{b'_{20}} = 5,2747\ldots.,$$

tutte le a^{b_n}, $a^{b'_n}$ dopo quelle di posto 20 devono essere comprese tra $a^{b_{20}}$ e $a^{b'_{20}}$, cioè, per qualsiasi $n > 20$, sarà

$$5,2746\ldots. < a^{b_n} < a^{b'_n} < 5,2747\ldots.$$

e quindi tutte codeste a^{b_n} e $a^{b'_n}$ cominceranno con le cifre

$$5,274.$$

modificazioni, anche per $a < 1$, purchè positivo. Anche qui si dirà potenza a^b della base a all'esponente b il limite comune delle due successioni di valori progressivamente approssimati

$$a^{b_0} \quad a^{b_1} \quad a^{b_2} \quad a^{b_3} \ldots,$$

$$a^{b_0'} \quad a^{b_1'} \quad a^{b_2'} \quad a^{b_3'} \ldots.$$

La sola differenza dal caso del n. prec. sta nel fatto che qui, essendo $a < 1$, la prima successione è generalmente decrescente (n. 11) e fornisce valori di a^b approssimati per eccesso, mentre la seconda è generalmente crescente e dà per a^b valori approssimati per difetto.

24. Alle potenze ad esponente irrazionale si estendono tutte le proprietà fondamentali (I)-(V) del n. 1, in quanto queste valgono per le rispettive potenze approssimate ad esponente razionale (n. 7). E così dicasi delle osservazioni intorno al modo in cui varia la potenza, quando se ne fa variare la base o l'esponente (nn. 8-20).

Noi non ci indugeremo su codesta estensione. Solo notiamo che, preso il numero irrazionale negativo $-b$, si può definire direttamente la potenza a^{-b} per mezzo delle due successioni di valori progressivamente approssimati

$$a^{-b_0} \quad a^{-b_1} \quad a^{-b_2} \ldots$$

$$a^{-b_0'} \quad a^{-b_1'} \quad a^{-b_2'} \ldots$$

e allora si dimostra che il numero che così si ottiene è precisamente il reciproco di a^b, onde sussiste anche per gli esponenti irrazionali l'identità (cfr. nn. 3, 6)

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

II.

FUNZIONI ESPONENZIALI - LOGARITMI

Funzioni esponenziali

25. Dato un numero positivo a, diverso da 1, dicesi *funzione esponenziale di base* a della variabile x la funzione y (I; n. 188) definita dall'equazione

$$y = a^x.$$

Le considerazioni svolte nel Cap. prec. permettono senz'altro di vedere come varia la y al variare della x.

Supponiamo, per fissare le idee, $a > 1$. Per $x = 0$ la y assume il valore (n. 2)

$$a^0 = 1;$$

e per

$$x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots.$$

la funzione y assume i valori tendenti all'infinito (n. 13)

$$a \qquad a^2 \qquad a^3 \qquad a^4 \ldots.$$

Inoltre, se, dato alla x un valore positivo x_1 qualsiasi e considerato il corrispondente valore a^{x_1} della y, facciamo variare la x di pochissimo, dandole il valore $x_1 + \varepsilon$, dove ε è un numero positivo molto piccolo, la y assume il valore

$$a^{x_1+\varepsilon}$$

che, come sappiamo, supera a^{x_1} di pochissimo; ed anzi si può sempre scegliere ε abbastanza piccolo perchè la differenza

$$a^{x_1+\varepsilon} - a^{x_1}$$

risulti minore di un qualsiasi numero prefissato, per quanto piccolo (n. 19, 20), essendo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a^{x_1+\varepsilon} = a^{x_1}.$$

D'altra parte al crescere della x, la a^x è sempre crescente (n. 11); onde avremo che mentre la x varia in modo continuo da 0 ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, ecc., la y crescerà da 1 ad a, da a ad a^2, da a^2 ad a^3 ecc., assumendo mano mano, *una volta e una volta sola,* tutti i possibili valori maggiori di 1.

Se poi diamo ad x valori negativi, p. es.

$$-1 \qquad -2 \qquad -3 \ldots,$$

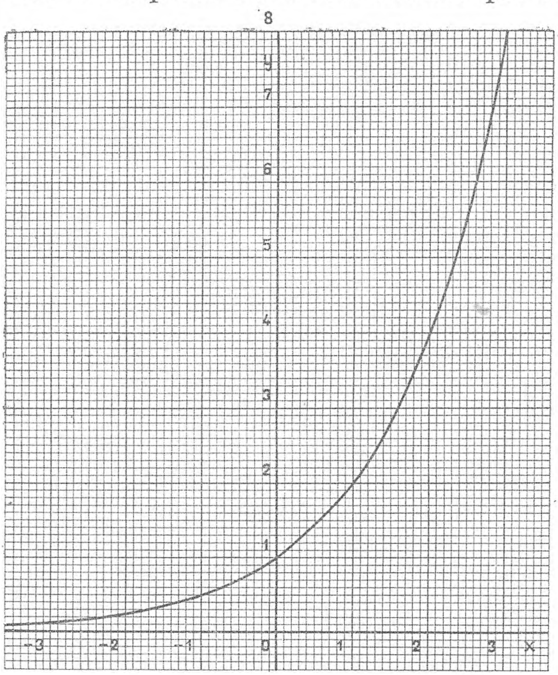
si avranno, corrispondentemente, per la y i valori positivi decrescenti e tendenti allo zero (n. 16)

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \ldots;$$

e, in generale, per un qualsiasi valore negativo $x = -x_1$ della variabile la funzione esponenziale assumerà il valore

$$a^{-x_1} = \frac{1}{a^{x_1}},$$

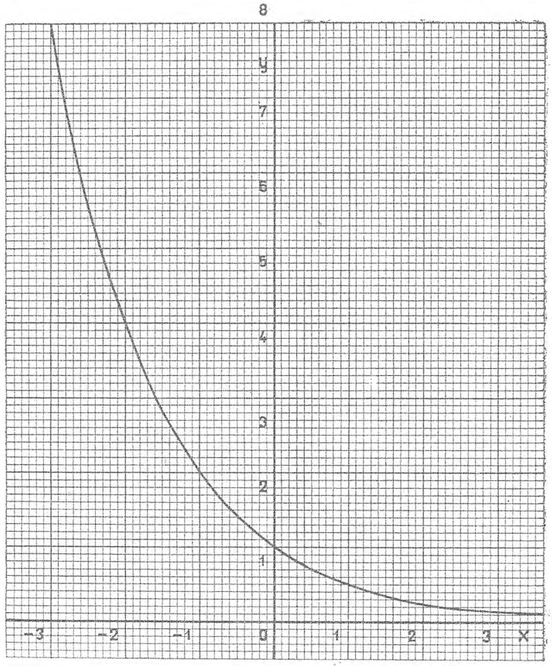
cioè il reciproco del valore assunto pel corrispondente valore positivo della variabile $x = x_1$. Vediamo così che al decrescere della x per valori negativi a partire dallo zero, la y, pur mantenendosi positiva, decresce gradualmente e tende allo zero così da assumere mano mano, *una volta e una volta sola*, ogni possibile valore positivo minore di 1.



Risulta da quanto precede che, fissati nel piano due assi cartesiani x, y, la *grafica* (I; n. 195) della funzione esponenziale (*curva espo-*

nenziale di base a) avrà, nella regione di piano intorno all'origine, la forma indicata dalla annessa figura (dove si è presa la base $a = 2$); e nell'intero piano andrà, verso destra allontanandosi indefinitamente dal semiasse x positivo, mentre a sinistra *si avvicinerà asintoticamente* (I; n. 227) al semiasse negativo delle ascisse.

Codesta curva esponenziale è intersecata in un punto (e in uno solo) da ogni parallela all'asse x, situata dalla parte delle ordinate positive.



26. Se la base a, *sempre supposta positiva*, è minore di 1, la funzione esponenziale

$$y = a^x$$

ha ancora per $x = 0$ il valore 1; ma per x positivo e tendente all'infinito, decresce indefinitamente e, pur mantenendosi sempre positiva, tende allo zero (n. 16), mentre per x negativo e crescente in valore assoluto oltre ogni limite, tende all'infinito. Così la rispettiva grafica ha la forma indicata dalla annessa figura, dove si è preso $a = \frac{1}{2}$.

Siccome la

$$y = \frac{1}{2^x}$$

si può scrivere (n. 24)

$$y = 2^{-x},$$

la curva qui accanto descritta si può immaginare ottenuta da quella del n. prec. ribaltando il relativo piano su se stesso, con una rotazione di 180°, intorno all'asse y.

Logaritmi

27. Considerata la funzione esponenziale di base a (positiva e diversa da 1)

$$y = a^x,$$

fissiamo per la y un valore *positivo* qualsiasi y_1. Siccome al variare della x nell'insieme di tutti i numeri (positivi e negativi) la y assume (una volta e una volta sola) ogni possibile valore positivo (n. 23), vi sarà un certo numero x_1 (positivo o negativo) pel quale la nostra funzione esponenziale assume precisamente il valore y_1:

$$y_1 = a^{x_1}.$$

Se ci riferiamo alla grafica della data funzione esponenziale (n. 25), codesto x_1 sarà l'ascissa del punto della grafica, che ha la data ordinata y_1, cioè il punto di intersezione della curva colla parallela all'asse x alla distanza y_1.

Ciò posto il numero x_1 dicesi *logaritmo in base* a *del numero* y_1. Cioè, in generale, dicesi *logaritmo in base* a (positiva e diversa da 1) *di un qualsiasi numero* POSITIVO y *l'esponente* x, *cui bisogna innalzare* a *per ottenere il numero* y.

Esso si indica con

$$\log_a y,$$

cosicchè si ha per definizione l'identità

$$a^{\log_a y} = y.$$

Risulta di qui che la equazione

$$y = a^x,$$

si può anche scrivere

$$x = \log_a y.$$

28. NOTA. — Facciamo notare esplicitamente, che, siccome la a^x è, per qualsiasi valore di x, positiva, I LOGARITMI SONO DEFINITI SOLTANTO PER I NUMERI POSITIVI.

29. Discende dalla definizione del n. prec. che vi è una infinità di *sistemi di logaritmi*, a seconda del numero a, positivo e diverso da 1, che si assume come *base* (1).

Nella pratica si usano solitamente i logaritmi in base 10, i quali diconsi *logaritmi volgari* o *decimali* o del BRIGGS dal

(1) Secondo EUCLIDE, se il nunero a si dice *ragione* (o rapporto), i numeri a^2, a^3,... diconsi *ragione duplicata, triplicata,... di* a. Così per a^n, n si dirà il *numero della ragione* = λόγου ἀριθμός, e di qui venne il nome di « logaritmo » che risale allo scozzese GIOVANNI NAPIER (Neperus) al quale si deve l'invenzione dei logaritmi. Egli la rese nota nel 1614.

nome del matematico inglese, che per primo ne intraprese il calcolo e ne pubblicò una Tavola (*Arithmetica logarithmica*, Londini, 1624).

La importanza e la utilità dell'uso dei logaritmi pei calcoli numerici risulteranno evidenti dalle loro proprietà, che qui dimostreremo riferendoci ad una base a qualsiasi, per la quale si sottintenderà sempre che sia *positiva* e *diversa da* 1.

30. Si ha anzitutto dalle identità

$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a,$$

che: *In una base qualsiasi, il logaritmo di* 1 *è lo zero e il logaritmo della base è* 1:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.$$

31. Inoltre *se la base* a *è maggiore di* 1, *ogni numero maggiore di* 1 *ha il logaritmo positivo, e ogni numero positivo minore di* 1 *ha il logaritmo negativo; e se due numeri sono disuguali, anche i loro logaritmi sono disuguali nello stesso senso.*

Se, invece, *la base, pur essendo positiva, è minore di* 1, *il logaritmo di un numero (positivo) è positivo o negativo, secondo che il numero considerato è minore o maggiore di* 1; *e di due numeri disuguali ha logaritmo maggiore il minore.*

Queste osservazioni si rilevano subito dall'esame della curva esponenziale di base a (n. 25), ricordando che, fissato un qualsiasi numero positivo y_1, il rispettivo logaritmo $\log_a y_1$ non è altro che l'ascissa del punto d'intersezione della curva colla parallela all'asse x alla distanza y_1 (n. 27).

Ora la curva esponenziale traversa l'asse y nel punto di ordinata 1 e, se è $a > 1$, a sinistra si avvicina asintoticamente all'asse x, mentre a destra si allontana indefinitamente da esso. Allora è chiaro che se $y_1 > 1$, la parallela all'asse x di ordinata y_1 sega la curva in un punto situato a destra dell'asse y, cioè in un punto di ascissa positiva, cosicchè si ha

$$\log_a y_1 > 0.$$

Se invece $0 < y_1 < 1$, la parallela all'asse x di ordinata y_1 sega la curva in un punto situato a sinistra dell'asse y e si ha quindi

$$\log_a y_1 < 0.$$

Considerazioni analoghe conducono alle altre osservazioni dianzi enunciate.

32. La proprietà fondamentale dei logaritmi è la seguente: *In una base qualsiasi il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due fattori, cioè*

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Infatti dalla definizione di logaritmo (n. 27) abbiamo

$$b = a^{\log_a b}, \qquad c = a^{\log_a c};$$

e di qui, moltiplicando membro a membro,

$$bc = a^{\log_a b}\, a^{\log_a c}$$

ossia

$$bc = a^{\log_a b + \log_a c}.$$

Ora questa identità ci dice che per ottenere il numero bc bisogna innalzare la base a all'esponente

$$\log_a b + \log_a c,$$

cioè appunto (n. 27)

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

33. Il teor. prec. si estende senz'altro al caso di più di due fattori e si ha, p. es.,

$$\log_a (bcd) = \log_a b + \log_a c + \log_a d.$$

34. *In una base qualsiasi, il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore, cioè*

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Infatti dalla identità

$$\frac{b}{c}\, c = b$$

si deduce, applicando il teorema del n. 32,

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) + \log_a c = \log_a b,$$

e quindi

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

35. Risulta di qui in particolare (n. 30)

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = -\log_a b,$$

cioè: *Due numeri, che siano l'uno il reciproco dell'altro, hanno, in una base qualsiasi, logaritmi uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

36. *In una base qualsiasi il logaritmo di una potenza qualsivoglia di un numero si ottiene moltiplicando per l'esponente il logaritmo della base della potenza, cioè*

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

Infatti dalla identità di definizione (n. 27)

$$b = a^{\log_a b},$$

si deduce, innalzando ambo i membri all'esponente c,

$$b^c = a^{c \log_a b}$$

e questa identità ci dice appunto (n. 27) che

$$\log_a b^c = c \log_a b.$$

37. Risulta in particolare dal teor. prec. che

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b,$$

cioè: *In una base qualsiasi, il logaritmo di un radicale si ottiene dividendo per il relativo indice il logaritmo del radicando.*

38. I teor. dei nn. 32-37 mostrano immediatamente quale sia l'utilità che pei calcoli numerici si trae dall'uso di una *Tavola di logaritmi.* Una tavola di logaritmi in data base a è costituita nella sua forma primitiva (che nella pratica, come vedremo poi, si modifica opportunamente per ragioni di comodità) da due colonne di numeri: nella prima colonna sono segnati in ordine crescente i numeri positivi, susseguentisi a differenza costante, p. es. di 1 millesimo, da 0,001 fino ad un certo limite che qui supporremo grandissimo. Nella seconda colonna, di fronte a ciascun numero della prima è segnato, con una data approssimazione, il rispettivo logaritmo in base a.

Se si vuol trovare il prodotto di due numeri b_1, b_2, basta ricordare l'identità (n. 32)

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 .$$

In base ad essa, si cercheranno sulla tavola i $\log_a b_1$ e $\log_a b_2$ (che si troveranno nella seconda colonna di fronte ai numeri b_1, b_2 della prima colonna), si sommeranno questi due logaritmi, e infine si cercherà sulla tavola quale sia il numero che ha per logaritmo la somma ottenuta. Codesto numero sarà il prodotto cercato $b_1 b_2$.

Vediamo così che, col sussidio della Tavola di logaritmi, la moltiplicazione si riduce ad una addizione; e analogamente, in base ai nn. 34-37, si riduce ogni divisione ad una sottrazione, ogni elevamento a potenza alla moltiplicazione per l'esponente, e, in particolare, ogni estrazione di radice alla divisione per l'indice.

In tal modo i calcoli numerici vengono abbreviati e semplificati; e noi avremo modo di dare in proposito numerosi esempi, quando avremo trattato in modo più preciso delle proprietà e dell'uso dei logaritmi volgari o a base 10.

39. Prima per altro è opportuno aggiungere una osservazione *sul modo in cui si passa da un sistema di logaritmi ad un altro.*

Cerchiamo, cioè, quale relazione intercede tra i logaritmi di un medesimo numero y in due diverse basi a e b:

$$\log_a y, \qquad \log_b y .$$

Abbiamo per definizione

$$y = b^{\log_b y}.$$

Se allora prendiamo il logaritmo in base a dei due membri di questa identità, avremo, pel n. 36,

$$\log_a y = \log_b y \cdot \log_a b$$

ossia

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_b b}.$$

Si ha dunque che *il logaritmo di un qualsivoglia numero in base* b *si ottiene dividendo il logaritmo dello stesso numero in base* a *per il* $\log_a$ b, *ossia moltiplicandolo per*

$$\frac{1}{\log_a b}.$$

Quest' ultimo numero dicesi *modulo* pel passaggio dal sistema di logaritmi in base a al sistema in base b: e vediamo da quanto precede che, allorchè si cambia la base del sistema, i logaritmi di tutti i numeri variano proporzionalmente (nel rapporto dato dal *modulo*).

Curva logaritmica

40. Occupiamoci oramai del *sistema dei logaritmi a base* 10 o *volgari*. A questo ci riferiremo sempre nel seguito, ove nulla si avverta in contrario; e nelle formole, per semplicità di scrittura designeremo, per qualsiasi numero positivo x, il $\log_{10} x$ con $\operatorname{Log} x$.

Avremo dunque (n. 30)

$$\operatorname{Log} 1 = 0, \qquad \operatorname{Log} 10 = 1.$$

Per una qualsivoglia unità decimale maggiore di 1

$$100 = 10^2 \qquad 1000 = 10^3 \qquad 10000 = 10^4 \ldots$$

il Logaritmo sarà dato rispettivamente da

$$2 \qquad 3 \qquad 4 \ldots,$$

cioè dal numero degli zeri rispettivi; mentre per le unità decimali minori di 1

$$0{,}1 = 10^{-1} \qquad 0{,}01 = 10^{-2} \qquad 0{,}001 = 10^{-3} \ldots$$

il Logaritmo sarà rispettivamente

$$-1 \qquad -2 \qquad -3 \ldots,$$

cioè sarà dato dall' intero negativo che ha tante unità quanti sono gli zeri che precedono l'unità considerata (compreso quello a sinistra della virgola).

Siccome poi la nostra base 10 è maggiore di 1, al crescere del numero cresce anche il Logaritmo (n. 31), cosicchè i numeri fra 1 e 10 avranno Logaritmi compresi fra 0 e 1, quelli fra 10 e 100 avranno Logaritmi compresi fra 1 e 2 e così via. Prendendo numeri abbastanza grandi, si otterranno Logaritmi grandi quanto si vuole; ma i Logaritmi crescono assai più lentamente dei numeri. P. es. per avere un Logaritmo maggiore di 10, bisognerà prendere un numero maggiore di

$$10^{10} = 10\,000\,000\,000,$$

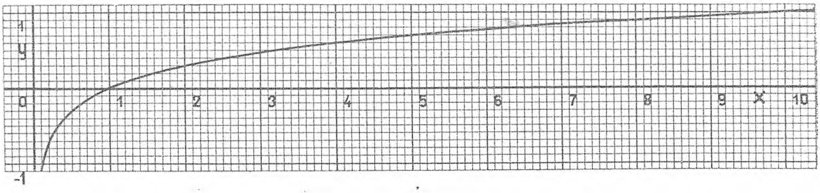
cioè di 10 miliardi.

Se invece prendiamo un numero positivo minore di 1 il rispettivo Logaritmo risulta negativo (n. 31); e, precisamente i numeri fra 1 e 0,1 hanno logaritmi compresi fra 0 e -1, quelli fra 0,1 e 0,01 hanno logaritmi compresi tra -1 e -2 e così via. Si vede di qui che, al decrescere del numero da 1 allo zero, il Logaritmo, mantenendosi negativo, cresce in valore assoluto sempre più rapidamente, superando mano mano ogni possibile numero prefissato.

Se allora, fissati su di un foglio di carta millimetrica due assi cartesiani x, y, tracciamo la grafica della funzione

$$y = \operatorname{Log} x,$$

prendendo come ascisse i numeri e come ordinate i rispettivi Logaritmi, otteniamo una curva (*curva logaritmica di base* 10)



che pei valori di x compresi fra 0,1 e 10 ha la forma indicata nella annessa figura, dove si è preso come unità il centimetro.

Per valori di $x > 10$ la curva si allontana indefinitamente (benchè in modo assai lento) dall'asse x; mentre per valori positivi di $x < 0,1$, si avvicina asintoticamente al semiasse y negativo (I; n. 227).

41. Notiamo che codesta grafica della funzione logaritmica risulta per $x > 1$ così poco incurvata, che ogni suo arco, ad estremi non troppo lontani, si confonde sensibilmente colla corda rettilinea che ne congiunge gli estremi.

42. Se vogliamo vedere quale sia la forma della curva logaritmica di base qualsiasi a, basta ricordare che si ha, per ogni qualsiasi numero positivo (n. 39)

$$\log_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}.$$

Perciò per avere la grafica della funzione

$$y = \log_a x,$$

basterà far variare le ordinate dei singoli punti della curva logaritmica di base 10 nel rapporto da 1 a $\frac{1}{\operatorname{Log} a}$. Così, p. es., se volessimo la curva logaritmica di base 100, avendosi

$$\operatorname{Log} 100 = 2,$$

dovremmo ridurre alla metà ciascuna ordinata della curva logaritmica di base 10. Se invece volessimo prendere la base 0,1, per la quale è

$$\operatorname{Log} 0{,}1 = -1,$$

dovremmo cambiar segno a ciascuna ordinata della solita curva logaritmica di base 10, o, ciò che è lo stesso, ribaltarla, facendone ruotare il piano di 180° intorno all'asse x.

43. Notiamo infine che la relazione fra x e y espressa dalla equazione

$$y = \operatorname{Log} x$$

si può anche scrivere

$$x = 10^y.$$

Perciò la curva logaritmica di base 10 non è altro che la curva esponenziale di base 10, in cui si siano scambiate le ascisse colle ordinate: in altre parole, se, tracciata la grafica della curva esponenziale di base 10, ne facciamo ruotare il piano di 180° intorno alla bisettrice del primo e terzo angolo degli assi (così da scambiare fra loro gli assi coordinati) otteniamo la curva logaritmica di base 10.

Tavole di logaritmi volgari

44. Occupiamoci oramai della descrizione delle *Tavole di Logaritmi* e del loro uso pratico nei calcoli numerici.

Dato un numero $x > 1$, la parte intera del Logaritmo volgare (positivo) di codesto numero dicesi *caratteristica* del Logaritmo.

Non appena sia dato un numero, *maggiore* di 1, è facile assegnare la caratteristica del relativo Logaritmo. P. es., dato il numero 437, esso è compreso fra 100 e 1000, cioè fra 10^2 e 10^3, onde il rispettivo Logaritmo sarà compreso fra 2 e 3 e avrà la parte intera o *caratteristica* 2.

Possiamo qui dar subito una regola generale: Se la parte intera di un numero, *maggiore* di 1, ha n cifre, il numero è compreso fra 10^{n-1} e 10^n, onde il rispettivo Logaritmo sarà compreso tra $n - 1$ ed n ed avrà quindi la caratteristica $n - 1$. Dunque *la caratteristica del Logaritmo di un numero maggiore di* 1 *si ottiene diminuendo di* 1 *il numero delle cifre della parte intera del numero dato.*

Vedremo più avanti (n. 49) come, con altrettanta facilità, si possa assegnare la parte intera del Logaritmo (negativo) di un numero positivo minore di 1.

Perciò nelle *Tavole di Logaritmi* vengono segnate soltanto le cifre decimali dei Logaritmi dei vari numeri. Naturalmente di queste cifre decimali si registrano nelle Tavole solo le prime, e vi sono *Tavole a* 4, *a* 5, *a* 6, *a* 7 *decimali* (1); e solitamente l'ultima cifra vi si scrive arrotondata, se la prima cifra che si trascura è maggiore di 4. Cosicchè le Tavole danno i Logaritmi con un errore (per difetto o per eccesso) minore di mezza unità dell'ultimo ordine (2).

(1) Subito dopo l'invenzione dei Logaritmi si calcolarono Tavole con un grande numero di decimali; p. es. l'*Arithmetica logarithmica* del BRIGGS contiene i Logaritmi dei numeri a 14 decimali. Ma più tardi si riconobbe che bastano per la pratica Tavole minori; così nei calcoli astronomici-geodetici di grande precisione si tien conto al più di 7 od 8 decimali, e per moltissime applicazioni (p. es. in Astronomia nautica, in Fisica, in Chimica) bastano Tavole a 5 decimali. Noi nel seguito per le nostre esercitazioni numeriche ci limiteremo ai primi 4 decimali.

(2) In molte Tavole si contraddistingue con un segno speciale (un asterisco, un punto, una lineetta) l'ultima cifra del Logaritmo, quando è arrotondata, cioè quando il Logaritmo è dato per eccesso.

In tal modo, è bene notarlo subito, *i calcoli con Logaritmi sono tutti* CALCOLI APPROSSIMATI e il limite dell'approssimazione, che si può raggiungere, dipende in ogni caso dal numero dei decimali della Tavola di Logaritmi, di cui si intende servirsi.

I gruppi di 4 o 5 o 6 o 7 cifre decimali dei Logaritmi dei vari numeri, che, come dicemmo, si trovano registrati nelle Tavole, diconsi *mantisse* dei rispettivi Logaritmi.

Noi non possiamo qui dar notizia dei metodi seguiti dai Calcolatori per ottenere codeste mantisse; e supponiamo di possedere già una Tavola, di cui ci varremo sempre nel seguito. Ci riferiremo precisamente alla Tavola a 4 decimali, allegata a questo volume, la quale fornisce le mantisse dei Logaritmi dei numeri da 1 a 10, di centesimo in centesimo: 1; 1,01; 1,02; 1,03;....; 9,99.

Le norme che qui daremo per l'uso di codesta Tavola valgono senz'altro per tutte le altre, anche ad un numero maggiore di decimali; e del resto le Tavole, che si trovano in commercio, sono sempre precedute da tutte le avvertenze, che possono giovare a facilitarne l'uso.

45. NUMERI DA 1 A 10 A TRE CIFRE SIGNIFICATIVE. — I Logaritmi dei numeri da 1 a 9,99, di cui la nostra Tavola contiene le mantisse, hanno tutti la caratteristica 0, che come, già dicemmo, non è in alcun modo indicata nella Tavola. In questa la prima colonna, contrassegnata in alto con **N**, contiene le prime due cifre del numero, cioè la cifra degli interi e quella dei decimi: la terza cifra, o cifra dei centesimi, si trova in testa alle singole colonne delle mantisse, che sono appunto in numero di 10 e sono contrassegnate in alto con 0, 1, 2,...., 9.

Così, p. es., la mantissa del Logaritmo di 3,75 si trova all'incrocio della linea 37 e della colonna 5 ed è perciò data da 5740: avremo quindi

$$\mathrm{Log}\, 3{,}75 = 0{,}5740.$$

46. La nostra Tavola fornisce direttamente (con l'approssimazione di mezzo decimillesimo) i Logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10 (e aventi tre cifre significative); ma *è facile ricavarne anche un valore approssimato del Logaritmo di qualsiasi altro numero* (positivo). È ciò, che noi vogliamo ora mostrare, cominciando anzitutto dai *numeri maggiori di* 10 *e aventi tre sole cifre significative.*

NUMERI MAGGIORI DI 10, A TRE CIFRE SIGNIFICATIVE. — Sia p. es. il numero 45,8; poichè esso può scriversi

$$45{,}8 = 4{,}58 \times 10,$$

sarà (nn. 32, 40)

$$\begin{aligned}\text{Log}\,45{,}8 &= \text{Log}\,4{,}58 + \text{Log}\,10\\ &= \text{Log}\,4{,}58 + 1.\end{aligned}$$

Ora dalla Tavola (prendendo la mantissa situata all'incrocio della linea **45** colla colonna 8) si trova

$$\text{Log}\,4{,}58 = 0{,}6609$$

onde risulta

$$\begin{aligned}\text{Log}\,45{,}8 &= 0{,}6609 + 1\\ &= 1{,}6609.\end{aligned}$$

Vediamo così che i Logaritmi di 4,58 e di 45,8 hanno la medesima mantissa; e, similmente si trova

$$\begin{aligned}\text{Log}\,458 &= 2{,}6609\\ \text{Log}\,4580 &= 3{,}6609\\ \text{Log}\,45800 &= 4{,}6609, \text{ ecc.}\end{aligned}$$

Parlando in generale abbiamo che *quando si moltiplica un numero per una potenza di* 10, *ossia si sposta la virgola di un certo numero di posti verso destra, la mantissa del Logaritmo non varia, e la caratteristica viene accresciuta dell'esponente di* 10.

Si ha invero (nn. 32, 40)

$$\begin{aligned}\text{Log}\,(a \cdot 10^n) &= \text{Log}\,a + \text{Log}\,10^n\\ &= \text{Log}\,a + n.\end{aligned}$$

Così oramai sappiamo trovare, sempre per approssimazione, il *Logaritmo di un qualsiasi numero maggiore di* 1 *e avente tre cifre significative consecutive: la caratteristica si ottiene diminuendo di* 1 *il numero delle cifre della parte intera del numero dato* (n. 44) *e la mantissa, qualunque sia la posizione della virgola nel numero dato, è quella stessa che la Tavola dà pel numero compreso fra* 1 *e* 10, *che si ottiene dal dato, portando in esso la virgola dopo la prima cifra significativa.*

47. NUMERI MAGGIORI DI 1, A QUATTRO O PIÙ CIFRE SIGNIFICATIVE. — Consideriamo in secondo luogo *un numero maggiore di* 1 *e avente quattro cifre significative*, p. es. 56,43.

Esso sarà sempre compreso tra due numeri a tre sole cifre significative e consecutivi

$$56,40 < 56,43 < 56,50.$$

Avremo quindi (n. 31)

$$\mathrm{Log}\,56,40 < \mathrm{Log}\,56,43 < \mathrm{Log}\,56,50,$$

ossia, ricavando dalla Tavola il primo e il terzo Logaritmo [1],

$$1,7513 < \mathrm{Log}\,56,43 < 1,7520.$$

Il Logaritmo cercato avrà la caratteristica 1 e una mantissa compresa fra 7513 e 7520, cioè uguale a

$$7513 + d,$$

dove d indica un numero certamente *non superiore alla differenza* 7 fra le due mantisse, consecutive sulla nostra Tavola, 7513 e 7520, la quale dicesi *differenza tavolare* (delle due mantisse considerate).

Questa differenza tavolare 7 dà l' aumento (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 56,40 a 56,50, cioè cresce di 10 unità (del 2° ordine decimale), e noi dobbiamo determinare l'aumento d (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 56,40 a 56,43, cioè cresce di 3 unità (del 2° ordine decimale). Per trovare codesto numero d, si tien conto del fatto che sulla curva logaritmica archi abbastanza piccoli si confondono sensibilmente colle rispettive corde (n. 41) e perciò *si ammette* (il che è sufficientemente esatto nella pratica) *che l'aumento della mantissa sia proporzionale all' aumento dell' ultima cifra del numero*. (REGOLA DELLE PARTI PROPORZIONALI). Così nel nostro caso porremo la proporzione

$$d : 3 = 7 : 10$$

onde risulta

$$d = \frac{7 \cdot 3}{10} = 2,1$$

ossia approssimativamente

$$d = 2;$$

[1] L' alunno verifichi qui e nel seguito, col sussidio della Tavola, i calcoli indicati nel testo.

e si arrotonderebbe la cifra (o l'ultima cifra) che si conserva, se la prima che si trascura fosse maggiore di 4.

L'operazione suindicata dicesi *interpolazione* e si scriverà nel modo seguente:

Log 56,43

	Numero	Mantissa
	Per 56,40	7513
$d:3=7:10$	Per ... 3	2
	Log 56,43 = 1,7515	

Se poi è dato un numero maggiore di 1 a più di 4 cifre significative, il numero si accorcia, prendendone soltanto quattro e arrotondando la quarta se la quinta è maggiore di 4: p. es. invece del numero

578,36....

si prenderà il numero

578,4

e si cercherà il Logaritmo di questo valore approssimato. E ciò è lecito, in quanto (cogliamo ancora una volta l'occasione di avvertirlo) i calcoli con Logaritmi sono sempre approssimati. Per il numero dianzi considerato si troverà:

Log 578,4

	Numero	Mantissa
	Per 578,0	7619
$d:4=8:10$	Per ... 4	3
	Log 578,4 = 2,7622	

48. Numeri (positivi) minori di 1. — Nei nn. prec. abbiamo visto come si calcoli il Logaritmo di un qualsivoglia numero maggiore di 1. Ci restano ora da considerare i numeri positivi minori di 1.

Sappiamo già che i rispettivi Logaritmi risulteranno negativi (n. 31) e dovremo qui dar le regole per trovarne la parte intera e la parte decimale. Anche qui esse risulteranno, nel modo più chiaro, dall'esame di qualche esempio numerico.

Si voglia dunque calcolare il Logaritmo del numero 0,285. Per ricondurci al caso di un numero di cui sappiamo già calcolare il Logaritmo (cioè maggiore di 1) scriveremo il numero dato sotto la forma:

$$0{,}285 = 2{,}85 : 10 = 2{,}85 \times 10^{-1}.$$

Di qui si deduce (nn. 32, 40)

$$\text{Log}\, 0{,}285 = \text{Log}\, 2{,}85 + \text{Log}\, 10^{-1} = \text{Log}\, 2{,}85 - 1$$

e, poichè ricaviamo dalla Tavola

$$\text{Log}\, 2{,}85 = 0{,}4548,$$

concludiamo:

$$\text{Log}\, 0{,}285 = 0{,}4548 - 1.$$

Eseguendo la differenza qui indicata si troverebbe

$$\text{Log}\, 0{,}285 = -\,0{,}5452;$$

ma *nei calcoli logaritmici siffatta differenza non si eseguisce, e si conserva il Logaritmo sotto la forma di somma algebrica di una parte intera negativa e di una parte decimale positiva.*

La parte intera si suole scrivere al suo posto prima della virgola, collocandole il segno — al di sopra per ricordare che esso non riguarda la parte decimale, che va presa positivamente. Così nel nostro caso si scriverà

$$\text{Log}\, 0{,}285 = \bar{1}{,}4548$$

e si dovrà sempre tener presente che la scrittura al secondo membro sta a designare la somma algebrica [1]

$$-1 + 0{,}4548.$$

Scritto il Logaritmo negativo sotto la forma indicata, si chiama *caratteristica* l'addendo intero negativo, *mantissa* il gruppo delle quattro cifre significative dell'addendo decimale che va preso positivamente.

49. L'esempio considerato al n. prec. indica senz'altro la via per trovare in ogni caso la caratteristica (negativa) del Logaritmo di un qualsiasi numero, positivo, minore di 1.

(1) Poichè qui la parte soprassegnata con — precede la virgola, non vi è luogo ad equivoco con la notazione, formalmente simile ma di tutt'altro significato, che si usa a indicare il periodo dei numeri decimali periodici, p. es.

$$7{,}\bar{3} = 7{,}3333\ldots.$$

Basta, a tale scopo, tener conto della identità (nn. 32, 40)

$$\mathrm{Log}\,(a \times 10^{-1}) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,10^{-1} = \mathrm{Log}\,a - 1;$$

la quale ci dice che: *Quando si divide un numero per* 10, *o, ciò che è lo stesso, si sposta la virgola di un posto verso sinistra, il rispettivo Logaritmo vien diminuito di* 1, cosicchè la caratteristica decresce di 1 e la mantissa (in ogni caso positiva) rimane inalterata.

Così, p. es., riferendoci all' esempio numerico del n. prec., abbiamo visto che si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,2{,}85 &= 0{,}4548 \\ \mathrm{Log}\,0{,}285 &= \bar{1}{,}4548; \end{aligned}$$

e analogamente avremo

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,0{,}0285 &= \bar{2}{,}4548 \\ \mathrm{Log}\,0{,}00285 &= \bar{3}{,}4548, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Per giungere ad una regola generale, si ricordi anzitutto che i Logaritmi a caratteristica nulla sono quelli dei numeri compresi tra 1 e 10, cioè aventi la virgola subito dopo la prima cifra significativa (n. 40).

Allora, per l' osservazione fatta dianzi, avranno caratteristica $\bar{1}$ i numeri in cui la prima cifra significativa è al primo posto dopo la virgola; avranno caratteristica $\bar{2}$ i numeri, in cui la prima cifra significativa è al secondo posto dopo la virgola, e così via.

Possiamo quindi enunciare la seguente regola generale, che completa quella del n. 44: *La caratteristica del Logaritmo di un numero positivo, minore di* 1, *è data da tante unità negative quanti sono gli zeri che precedono la prima cifra significativa* (compreso quello che si trova a sinistra della virgola).

Risulta poi da quanto precede e dal n. 46 che: *In ogni caso la mantissa* (sempre positiva) *del Logaritmo dipende soltanto dalle cifre significative del numero considerato e non dalla posizione della virgola.*

50. Non resta più da considerare se non il caso, in cui il numero positivo, minore di 1, di cui cercasi il Logaritmo, abbia più di 3 cifre significative. In tal caso, procedendo in modo analogo al n. 47, si accorcia il dato numero, riducendolo a 4 sole cifre significative.

P. es. invece del numero

$$0{,}056317....$$

si prenderà il suo valore approssimato

$$0{,}05632.$$

Ora, per trovare il Logaritmo di questo numero, si considerano i due numeri a tre cifre significative e consecutivi, che lo comprendono (cfr. il n. 47)

$$0{,}05630 < 0{,}05632 < 0{,}05640.$$

Si avrà (n. 31)

$$\mathrm{Log}\ 0{,}05630 < \mathrm{Log}\ 0{,}05632 < \mathrm{Log}\ 0{,}05640$$

ossia, desumendo direttamente dalla Tavola il primo e terzo Logaritmo,

$$\bar{2}{,}7505 < \mathrm{Log}\ 0{,}05632 < \bar{2}{,}7513.$$

Il Logaritmo cercato avrà la caratteristica $\bar{2}$ e una mantissa uguale a

$$7505 + d\,,$$

dove d è un intero non superiore alla differenza tavolare 8, che corrisponde alle nostre due mantisse, consecutive sulla Tavola, 7505 e 7513. Il numero d si calcola per interpolazione, con la regola delle parti proporzionali (n. 47) cioè secondo la proporzione

$$d : 2 = 8 : 10.$$

Di qui si ricava

$$d = \frac{2 \times 8}{10} = 1{,}6$$

ossia approssimativamente

$$d = 2\,;$$

e l'operazione si scriverà:

Log 0,05632

		Numero	Mantissa
	Per	0,0563	7505
$d : 2 = 8 : 10$	Per	2	2
	Log	0,05632 =	$\bar{2}{,}7507$

51. Nelle Tavole di Logaritmi sono segnate solitamente, a margine delle colonne delle mantisse o in fondo alle pagine, certe tabellette (contrassegnate per lo più con « P. P. » = « *Partes Proportionales* ») che forniscono, per ciascuna delle varie differenze tavolari che si presentano nella Tavola considerata, gli aumenti da darsi alla mantissa, corrispondentemente ad un aumento, pel numero, di 1, 2, 3,..., 9 unità decimali dell'ultimo ordine che si considera: così p. es. per una differenza tavolare di 8 la tabelletta sarà

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

52. Nei nn. precedenti abbiamo visto come una Tavola di Logaritmi permetta di *calcolare il Logaritmo di un qualsiasi numero* (positivo). Ma pei calcoli numerici è necessario saper risolvere anche il problema inverso: *Calcolare il numero che ha un dato Logaritmo.*

Vi sono delle cosidette *Tavole di numeri*, costruite in modo perfettamente simile a quelle di Logaritmi, che permettono appunto di trovare il numero che ha un dato Logaritmo. Ma il medesimo problema si può anche risolvere, servendosi di una Tavola di Logaritmi, p. es. della nostra Tavola a 4 decimali.

Per indicare il procedimento, riferiamoci ad un esempio concreto e proponiamoci di trovare il numero x che ha il Logaritmo

$$1{,}941463....$$

Anzitutto, volendo noi valerci di una Tavola a 4 decimali, accorceremo il dato Logaritmo a 4 cifre decimali (arrotondando la 4ª se la successiva è maggiore di 4); così noi considereremo del dato Logaritmo il valore approssimato

$$1{,}9415.$$

La caratteristica 1 di questo Logaritmo ci dice che x ha una parte intera di 2 cifre (n. 44). D'altra parte scorrendo sulla nostra Tavola le colonne delle mantisse, rileviamo che la mantissa 9415 del nostro Logaritmo si trova all'incrocio della linea 87 e della colonna 4.

Sarà quindi

$$x = 87,4.$$

53. Se la mantissa del Logaritmo dato, pur comprendendo 4 sole cifre, non si trova nella nostra Tavola, sarà per altro compresa fra due mantisse consecutive. Si otterranno così due valori approssimati pel numero x e si potrà trovarne una cifra ulteriore, applicando, in modo inverso, la *Regola delle parti proporzionali* (n. 47).

Si voglia, p. es., trovare il numero x tale che sia

$$\operatorname{Log} x = 2,4128.$$

La caratteristica 2 ci dice che x ha una parte intera di 3 cifre. Scorrendo poi la Tavola si trova che la mantissa 4128 di $\operatorname{Log} x$ è compresa fra le due mantisse consecutive

$$4116 \quad \text{e} \quad 4133,$$

corrispondenti ai due numeri (a parte intera di 3 cifre)

$$258 \quad \text{e} \quad 259.$$

Avremo dunque intanto

$$258 < x < 259.$$

Se poi vogliamo trovare un'altra cifra di x, cioè la sua prima cifra decimale δ, notiamo che la differenza tavolare relativa alle due mantisse 4116 e 4133 è 17, e che per avere la mantissa 4128 di $\operatorname{Log} x$ bisogna accrescere 4116 di 12. In base alla Regola delle parti proporzionali porremo la proporzione

$$\delta : 12 = 10 : 17$$

onde risulta

$$\delta = \frac{12 \times 10}{17} = 7,0....$$

ossia per approssimazione

$$\delta = 7.$$

Sarà dunque

$$x = 258,7.$$

L'operazione si imposta nel modo seguente

$$\mathrm{Log}\, x = 2,4128$$

		Mantissa	Numero
	Per	4116	258
$\delta : 12 = 10 : 17$	Per	12	... 7
			$x = 258,7$

54. Supponiamo da ultimo che si voglia trovare il numero x, che ha un dato Logaritmo negativo, p. es.

$$\mathrm{Log}\, x = -2,3161 .$$

Per poter trarre profitto dall'uso della Tavola, qui bisogna anzitutto ridurre il dato Logaritmo alla solita forma dei Logaritmi negativi (n. 48): bisogna, cioè, ridurre positiva la parte decimale.

Ora a ciò si perviene semplicemente aggiungendo 1 alla parte decimale e sottraendo 1 alla parte intera:

$$-2,3161 = -2 - 0,3161 = (-2 - 1) + (1 - 0,3161) =$$
$$= -3 + 0,6839 = \bar{3},6839 .$$

Onde risulta che, praticamente, un Logaritmo negativo si riduce alla forma utile pei calcoli, diminuendo di 1 la parte intera e sostituendo alle prime 3 cifre decimali le rispettive differenze da 9 e alla quarta la sua differenza da 10.

Ridotto così il nostro $\mathrm{Log}\, x$ alla forma voluta

$$\mathrm{Log}\, x = \bar{3},6839 ,$$

rileviamo, cercando la mantissa 6839 nella Tavola, che il numero x ha le cifre significative 483; e, poichè la caratteristica è $\bar{3}$, la prima cifra significativa sarà al *terzo* posto dopo la virgola; onde si conclude:

$$x = 0,00483 .$$

Calcoli logaritmici.

55. Come già si accennò al n. 38, l'uso dei Logaritmi permette di semplificare notevolmente i calcoli numerici. Illustreremo qui con alcuni esempi siffatte applicazioni dei Logaritmi, aggiungendo qualche avvertenza sul modo di eseguire e disporre i calcoli. Naturalmente si tratta sempre di calcoli approssimati e, come già avvertimmo, il limite dell'approssimazione dipende dal numero dei decimali della Tavola di cui si intende valersi. Noi continueremo a servirci della nostra Tavola a 4 decimali.

56. Prodotto. — Si voglia eseguire il prodotto

$$x = 375 \times 0{,}00827 \times 1{,}685 \times 48{,}36.$$

Abbiamo pel n. 33

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} 375 + \operatorname{Log} 0{,}00827 + \operatorname{Log} 1{,}685 + \operatorname{Log} 48{,}36;$$

perciò, col sussidio della Tavola si troverà

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Log} 375 & = 2{,}5740 \\ \operatorname{Log} 0{,}00827 & = \bar{3}{,}9175 \\ \operatorname{Log} 1{,}685 & = 0{,}2266 \\ \operatorname{Log} 48{,}36 & = 1{,}6844 \\ \hline \operatorname{Log} x & = 2{,}4025 \end{array}$$

e quindi

$$x = 252{,}6.$$

Nel sommare i Logaritmi dei vari fattori bisogna tener presente che, mentre le mantisse sono tutte positive, le caratteristiche sono in parte positive e in parte negative, cosicchè, dopo aver sommato le mantisse e scritta la parte decimale della somma ottenuta, si riporta la parte intera e questa si aggiunge alla somma *algebrica* delle caratterische.

57. Quoziente. — Per calcolare un quoziente si ricorre alla identità (n. 34)

$$\operatorname{Log} \frac{a}{b} = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b.$$

Si è così condotti a calcolare la differenza di due Logaritmi. Ma siccome il risultato di codesta sottrazione è un Logaritmo, del quale poi si cercherà il numero corrispondente, conviene fare in modo che

$$\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b$$

risulti subito sotto la solita forma di Logaritmo, cioè abbia la parte decimale positiva. Ciò si ottiene senz'altro riducendo sin da principio a codesta forma $-\operatorname{Log} b$, in base alla regola pratica data al n. 54. Qui notiamo che $-\text{Log}\, b$ non è altro che $\text{Log}\,\frac{1}{b}$ (n. 35), ed è da taluno chiamato il Cologaritmo di b ed è designato con $\text{Colog}\, b$.

Naturalmente, perchè la suaccennata trasformazione di $-\text{Log}\, b$ sia vantaggiosa nella pratica, bisogna che si sappia eseguire a memoria, nell'atto stesso che si rileva dalla Tavola la mantissa di $\text{Log}\, b$.

Ecco come si dispone il calcolo logaritmico di un quoziente:

$$x = \frac{4{,}76}{0{,}00853}$$

$$\begin{array}{rcr} \text{Log}\ 4{,}76 & = & 0{,}6776 \\ -\ \text{Log}\ 0{,}00853 & = & 2{,}0691 \\ \hline \text{Log}\ x & = & 2{,}7467 \\ x & = & 558{,}1 \end{array}$$

58. Potenza ad esponente intero positivo. — In base alla identità (n. 36)

$$\text{Log}\, a^n = n\, \text{Log}\, a\,,$$

per calcolare la potenza a^n, si cerca il $\text{Log}\, a$, e, moltiplicando questo per n, si ottiene il Logaritmo del numero cercato, che si rileverà nel solito modo dalla Tavola.

P. es.

$$\begin{gathered} x = (7{,}58)^5 \\ \text{Log}\ 7{,}58 = 0{,}8797 \\ \text{Log}\ x = 5\ \text{Log}\ 7{,}58 = 4{,}3985 \\ x = 25030. \end{gathered}$$

59. Qui si è condotti a moltiplicare un Logaritmo per un intero positivo. Se il Logaritmo da moltiplicare è a caratteristica negativa, bisogna tener presente che esso è la somma algebrica di una parte intera negativa e di una parte decimale positiva.

Sia p. es. da calcolare

$$x = (0{,}913)^7.$$

Avremo

$$\text{Log}\ x = 7\ \text{Log}\ 0{,}913$$

dove

$$\text{Log}\ 0{,}913 = \bar{1}{,}9605$$

ossia, precisamente,

$$\mathrm{Log}\, 0{,}913 = -1 + 0{,}9605.$$

Sarà dunque

$$\mathrm{Log}\, x = 7\, \mathrm{Log}\, 0{,}913 = -7 + 0{,}9605 \times 7 =$$
$$= -7 + 6{,}7235 = \bar{1}{,}7235$$

e quindi infine

$$x = 0{,}529.$$

60. Estrazione di radice. — Basta applicare l'identità (n. 37)

$$\mathrm{Log}\, \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\, \mathrm{Log}\, a\,.$$

Così per calcolare

$$x = \sqrt[8]{350}$$

porremo

$$\mathrm{Log}\, x = \frac{1}{8}\, \mathrm{Log}\, 350 = \frac{1}{8} \times 2{,}5441 = 0{,}3180$$

onde risulta

$$x = 2{,}08.$$

61. Il calcolo indicato al n. prec. conduce a dividere un Logaritmo per un numero intero. Se il Logaritmo è a caratteristica negativa, occorre qualche artificio per far sì che il quoziente risulti sotto la forma consueta dei Logaritmi negativi, cioè abbia positiva la parte decimale.

Il modo di eseguire la operazione è sufficientemente chiarito dal seguente esempio numerico:

$$x = \sqrt[5]{0{,}0255}$$

$$\mathrm{Log}\, x = \frac{1}{5}\, \mathrm{Log}\, 0{,}0255 = \frac{1}{5} \times \bar{2}{,}4065 = \frac{1}{5}(-2 + 0{,}4065) =$$

$$= \frac{1}{5}(-5 + 3{,}4065) = -1 + \frac{1}{5} \times 3{,}4065 = \bar{1}{,}6813$$

$$x = 0{,}4801.$$

62. Applicando insieme i varii procedimenti indicati nei nn. prec., si può calcolare rapidamente, col sussidio dei Logaritmi, ogni espressione numerica *monomia*, cioè comprendente quante si vogliano moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici (escluse cioè le addizioni). Sia p. es. da calcolare un valore approssimato di

$$x = \frac{5a^2b^3}{c\sqrt[4]{d}},$$

dove sia

$$a = 3{,}85 \qquad b = 0{,}728 \qquad c = 291 \qquad d = 0{,}0463.$$

Avremo

$$\text{Log}\, x = \text{Log}\, 5 + 2\,\text{Log}\, a + 3\,\text{Log}\, b - \text{Log}\, c - \frac{1}{4}\,\text{Log}\, d;$$

e, poichè la Tavola dà

$$\begin{aligned}
\text{Log}\, 5 &= 0{,}6990 \\
\text{Log}\, a &= 0{,}5855 \\
\text{Log}\, b &= \bar{1}{,}8621 \\
\text{Log}\, c &= 2{,}4639 \\
\text{Log}\, d &= \bar{2}{,}6656,
\end{aligned}$$

l'operazione si eseguirà nel modo seguente (si ricordino le avvertenze dei nn. 56-61)

$$\begin{aligned}
\text{Log}\, 5 &= 0{,}6990 \\
2\,\text{Log}\, a &= 1{,}1710 \\
3\,\text{Log}\, b &= \bar{1}{,}5863 \\
-\text{Log}\, c &= \bar{3}{,}5361 \\
-\frac{1}{4}\,\text{Log}\, d &= 0{,}3336 \\
\hline
\text{Log}\, x &= \bar{1}{,}3260 \\
x &= 0{,}2109.
\end{aligned}$$

63. Per dare un altro esempio di calcolo logaritmico di una espressione numerica monomia, proponiamoci di *trovare un valore approssimato del raggio* x *di una sfera di* dm.³ 693 *di volume.*

Sarà (I; n. 166)

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = 693$$

ossia

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \times 693}{4\pi}}$$

e quindi

$$\text{Log}\, x = \frac{1}{3}(\text{Log}\, 3 + \text{Log}\, 693 - \text{Log}\, 4 - \text{Log}\, \pi).$$

Prendendo per π il valore approssimato 3,141, ricaviamo dalla Tavola

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\ 3 &= 0{,}4771 \\ \mathrm{Log}\ 693 &= 2{,}8407 \\ \mathrm{Log}\ 4 &= 0{,}6021 \\ \mathrm{Log}\ \pi &= 0{,}4970; \end{aligned}$$

onde l'operazione si eseguirà nel modo seguente:

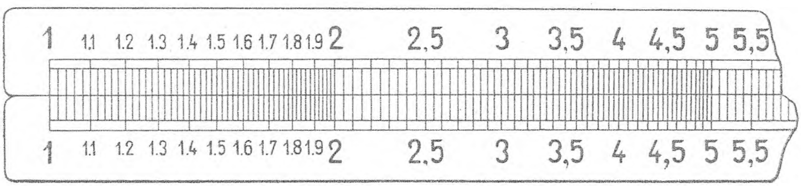
$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\ 3 &= 0{,}4771 \\ \mathrm{Log}\ 693 &= 2{,}8407 \\ -\mathrm{Log}\ 4 &= \bar{1}{,}3979 \\ -\mathrm{Log}\ \pi &= \bar{1}{,}5030 \\ \hline 3\ \mathrm{Log}\ x &= 2{,}2187 \\ \mathrm{Log}\ x &= 0{,}7396 \\ x &= 5{,}49; \end{aligned}$$

cioè il raggio della sfera è di dm. 5,49.

Regolo calcolatore.

64. I pratici (disegnatori, agrimensori, ingegneri, ecc.) quando debbono eseguire calcoli numerici, pei quali non si richieda una grande approssimazione, si valgono dei cosidetti *regoli calcolatori*, i quali sostituiscono una Tavola di Logaritmi e di più permettono di eseguire meccanicamente (e senza scrivere neppure una cifra) somme e differenze di Logaritmi.

Descriviamo in modo schematico un regolo calcolatore di modello comune. Esso è costituito da due regoli, lunghi poco meno di 30 cm. e connessi fra loro ad incastro, in modo da poter scorrere l'uno sull'altro.



Lungo i bordi che combaciano è segnata sui due regoli una stessa graduazione, in cui si notano 19 segni più marcati e contraddistinti coi numeri

1 2 3 .... 9 10 20 30 .... 90 100.

Presa come unità di misura la distanza fra 1 e 10 (che solitamente è di cm. 12,5), la distanza di ciascuno di codesti segni dal segno 1 è uguale al rispettivo Logaritmo: così la distanza da 1 a 2 è data da Log 2 = 0,301, quella fra 1 e 3 da Log 3 = 0,477 e così via: in particolare la distanza fra 1 e 100 è uguale a Log 100 = 2, cioè al doppio della distanza fra 1 e 10.

Fra codeste divisioni maggiori sono intercalate delle suddivisioni minori, che solitamente corrispondono ai Logaritmi dei numeri segnati nel seguente quadro:

fra 1 e 2:	1,02	1,04	....	1,98
» 2 » 5:	2,05	2,10	....	4,95
» 5 » 10:	5,1	5,2	....	9,9
» 10 » 20:	10,2	10,4	....	19,8
» 20 » 50:	20,5	21	....	49,5
» 50 » 100:	51	52	....	99.

È chiaro da questo quadro che la suddivisione fra 10 e 100 è identica a quella fra 1 e 10, perchè, quando si moltiplica un numero per 10, il rispettivo Logaritmo si accresce di 1.

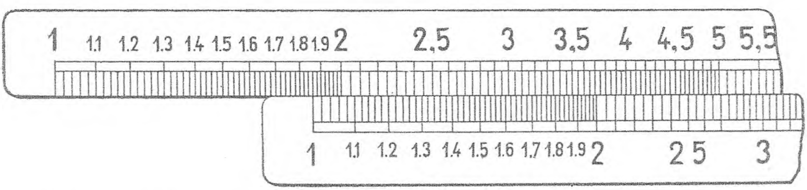
Ciò posto, si voglia eseguire a memoria il prodotto

$$1,86 \times 2,85.$$

Ricordando che (n. 32)

$$\text{Log}\,[1,86 \times 2,85] = \text{Log}\,1,86 + \text{Log}\,2,85,$$

si faccia scorrere il regolo mobile, fino a portarne il segno 1 a combaciare col segno 1,86 del regolo fisso: il segno 2,85 del regolo mobile andrà ad



una distanza dal segno 1 del regolo fisso uguale alla somma dei due Logaritmi, cioè al Logaritmo del prodotto. Questo prodotto si legge senz'altro, con l'approssimazione permessa dal regolo, sulla graduazione del regolo fisso. Si trova così pel prodotto il valore 5,30 (il valore esatto è 5,301).

Analogamente si procede per calcolare un quoziente. E se i dati non sono compresi fra 1 e 10 vi si riconducono, trasportando la virgola (ossia cambiando unità decimale).

Il regolo calcolatore si presta anche per altre operazioni; ma non è il caso che noi ci indugiamo su ciò. Di solito ai regoli calcolatori, che si trovano in commercio, va unita una *Guida*, che dà tutte le norme per l'uso dello strumento.

Interesse composto.

65. Per dare un esempio di questioni pratiche, in cui l'uso dei Logaritmi è particolarmente vantaggioso, accenniamo rapidamente ai *problemi di interesse composto*.

Tizio presta a Caio, per un certo numero n di anni, un capitale di c Lire e conviene con lui che Caio gli corrisponda, alla fine di ogni anno, un compenso o *interesse* del 4 % (per cento) cioè di L. 4 per ogni 100 L.

ossia di L. 0,04 per ogni Lira di capitale prestato. Allora Caio dovrà versare a Tizio alla fine del 1°, del 2°, ..., dell' $n - 1^{mo}$ anno l'interesse di Lire

$$c \times \frac{4}{100}$$

e alla fine dell' n^{mo} anno questo stesso interesse più l'intero capitale c.

Questo si dice *un prestito a interesse semplice*; e se indichiamo genericamente con i l'interesse $^0/_0$ o *saggio*, l'interesse annuo sarà dato in Lire da

$$\frac{c \times i}{100}.$$

66. Ma Tizio può anche fissare con Caio il seguente patto: egli negli n anni della durata del prestito non incasserà gli interessi, ma questi, alla scadenza di ogni anno, *verranno capitalizzati*, cioè computati in aumento del capitale c inizialmente prestato e perciò produrranno anch'essi, per la rimanente durata del prestito, un interesse nella ragione convenuta di $i\,^0/_0$.

In tal caso si dice che il prestito è collocato *ad interesse composto.*

Calcoliamo quale sia la somma che Caio deve versare a Tizio alla scadenza dell' n^{mo} anno, o ciò che si dice il *montante* del capitale c, prestato per n anni all'interesse composto dell' $i\,^0/_0$.

Alla fine del 1° anno Caio accredita a Tizio il capitale c aumentato dell'interesse annuo $\frac{c \times i}{100}$, cioè

$$c + \frac{c \times i}{100} = c\left(1 + \frac{i}{100}\right),$$

onde vediamo che la somma dovuta alla fine di un anno si ottiene moltiplicando la somma dovuta al principio dell'anno pel binomio

$$1 + \frac{i}{100}.$$

Così alla fine del secondo anno Caio accrediterà a Tizio Lire

$$c\left(1 + \frac{i}{100}\right)\left(1 + \frac{i}{100}\right) = c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2,$$

alla fine del terzo anno Lire

$$c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3;$$

e alla scadenza del prestito il montante m sarà dato da

$$m = c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n.$$

È questa la *formola generale* che permette di risolvere tutti i problemi di interesse composto. Per la forma del suo secondo membro essa si presta al calcolo logaritmico e dà precisamente

$$\operatorname{Log} m = \operatorname{Log} c + n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

È questa la *formola pratica*, che si usa nei calcoli numerici. Sotto la forma precedente, essa dà il *montante* quando sono prefissati il *capitale* c, la *durata* n in anni del prestito, e il *saggio* i.

Notiamo che qui $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ va moltiplicato pel numero intero n che può anche essere piuttosto grande. Se allora si calcolasse il Logaritmo coi soli 4 decimali forniti dalla nostra Tavola, si darebbe luogo a errori troppo grandi; onde bisogna valersi di valori di $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ ad un numero maggiore di decimali. Daremo negli Esercizi, insieme con vari problemi numerici, una tabelletta di valori approssimati di codesto Logaritmo con 10 decimali, pei valori usuali del saggio i. Calcolato $n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ in base alla tabelletta, se ne conserveranno soltanto 4 decimali.

67. La formola pratica del n. prec., scritta sotto la forma

$$\operatorname{Log} c = \operatorname{Log} m - n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

permette di calcolare quale somma debba collocarsi a interesse composto dell' $i\,\%$, per n anni, al fine di ottenere alla scadenza un dato montante m.

68. Così in base alla

$$\operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right) = \frac{\operatorname{Log} m - \operatorname{Log} c}{n}$$

si potrà trovare a quale saggio si debba collocare a prestito ad interesse composto una data somma c per avere in un dato numero n di anni un dato montante m.

69. Infine scrivendo la formola pratica sotto la forma

$$n = \frac{\operatorname{Log} m - \operatorname{Log} c}{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)}$$

si potrà calcolare per quanti anni debbasi collocare a prestito, ad interesse composto di dato saggio i, una data somma c per avere, alla fine, un dato montante m.

Qui in generale si otterrà per n un valore frazionario, mentre la formola generale, da cui siamo partiti, si è stabilita (n. 66) sotto l'ipotesi che n fosse intero. Ma *si conviene* di applicare in ogni caso la stessa formola, anche se per la durata del prestito non si ottiene un numero esatto di anni.

III.

FUNZIONI CIRCOLARI O TRIGONOMETRICHE

70. Ad una nuova classe assai notevole di funzioni conduce la *Trigonometria*. Quale sia precisamente lo scopo di questa importante applicazione della Analisi alla risoluzione di problemi geometrici apparirà chiaramente dal Capitolo IV; ma non è inutile accennarvi rapidamente fin d'ora.

È ben noto dalla Geometria come, dati alcuni *elementi* (lati ed angoli) di un triangolo, esso si possa *costrurre* completamente ossia si possano determinarne graficamente tutti gli altri elementi. Ma siffatte costruzioni grafiche riescono, per le inevitabili inesattezze del disegno, imprecise; e per di più non è possibile valutare a priori nei singoli casi quale sia l'approssimazione raggiunta.

Perciò si presenta come naturale l'idea di sostituire le costruzioni grafiche con opportuni procedimenti di calcolo che permettono di assegnare numericamente, con quella approssimazione che può occorrere, tutti gli elementi di un triangolo, quando se ne conoscano quanti bastano a determinare il triangolo stesso.

È questo appunto lo scopo della *Trigonometria*, la quale in ragione della natura pratica delle questioni che la determinarono (cfr. il Capo IV) ha origini molto antiche. Nella sua prima e più semplice forma essa risale al più grande Astronomo dell'antichità e forse di tutti i tempi, cioè ad IPPARCO di Nicea in Bitinia, vissuto fra il 2° e il 1° secolo avanti l'E. V.; e deve i suoi più importanti perfezionamenti all'opera degli Astronomi arabi e sopra tutto di AL-BATTANI (o ALBATEGNIUS) di Battam in Mesopotamia, vissuto da circa l'858 al 929 dell'E. V.

La Trigonometria si fonda tutta sulle proprietà di certe funzioni di un angolo (o arco circolare) variabile, che noi qui anzitutto definiremo e studieremo.

Angoli ed archi.

71. Cominciamo col richiamare alcune ben note generalità sulla misurazione degli angoli e degli archi circolari (I; nn. 25-26; 46-52).

Si dice *ampiezza di un angolo* la misura che per l'angolo dato si ottiene prendendo come unità fondamentale il *grado* sessagesimale (1°) o 90ª parte aliquota dell'angolo retto e come unità ausiliarie il *minuto* (1′) e il *secondo* (1″), cioè rispettivamente la 60ª parte aliquota del grado e del minuto.

Anche gli archi di una data circonferenza si possono misurare, prendendo come unità l'*arco-grado* o 360ª parte della circonferenza e come unità ausiliarie il *minuto* e il *secondo*; e allora, per la proporzionalità degli archi di dato raggio ai rispettivi angoli al centro, *un qualsivoglia arco e il corrispondente angolo al centro hanno la stessa ampiezza.*

Qui si è parlato di ampiezza sessagesimale; ma altrettanto può dirsi dell'*ampiezza centesimale*, che si ottiene prendendo come unità il *grado centesimale* o 100ª parte aliquota dell'angolo retto o del quarto di circonferenza, e come unità ausiliarie il minuto e il secondo centesimali.

72. Gli archi di una data circonferenza si possono anche rettificare e misurare mediante la loro *lunghezza* rispetto alla unità di misura dei segmenti.

Si passa dalla ampiezza α di un arco (espressa in gradi e frazioni decimali di grado) alla rispettiva lunghezza l, e viceversa, mediante le due note formole (I; n. 51)

$$(1) \qquad l = \frac{\pi \alpha r}{180}, \qquad \alpha = \frac{l \cdot 180}{\pi r},$$

dove r designa la lunghezza del raggio dall'arco.

Se poi si prende come unità degli archi rettificati il rispettivo raggio r, ogni arco è misurato dal rapporto

$$\frac{l}{r}$$

dell'arco al raggio, che dicesi *misura in radianti* o *misura circolare* dell'arco considerato.

Così le misure in radianti degli archi di 45°, 90°, 180°, 360°, ... sono date rispettivamente da $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, ...$

Per la precedente definizione si passa dalla lunghezza l di un arco alla rispettiva misura λ in radianti, o viceversa, mediante le formule

$$\lambda = \frac{l}{r}, \qquad l = \lambda r;$$

e di qui, tenendo conto delle (1), si conclude che si passerà dalla ampiezza α di un arco alla rispettiva misura λ in radianti, e viceversa, mediante le formole

$$(2) \qquad \lambda = \frac{\pi\alpha}{180}, \qquad \alpha = \frac{180\lambda}{\pi};$$

cosicchè, in particolare, l'ampiezza dell'unità *radiante* sarà data da $\frac{180}{\pi}$, cioè da $57^\circ \frac{1}{3}$ all'incirca.

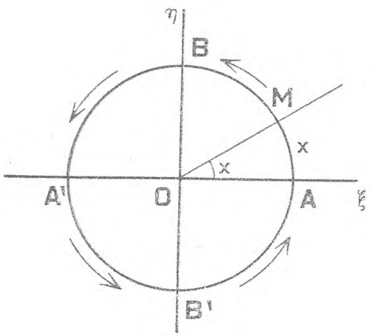
Dalla prima delle uguaglianze (2) risulta che la misura λ in radianti di un arco dipende solo dall'ampiezza α del corrispondente angolo al centro e non dal raggio dell'arco, cosicchè *su circonferenze disuguali uno stesso angolo al centro determina archi che hanno la medesima misura in radianti.*

Viceversa dalla seconda delle (2) discende che *due archi qualsiansi, anche di raggio diverso, i quali abbiano la stessa misura in radianti, corrispondono sempre al medesimo angolo al centro.*

Perciò si può assumere come misura di un angolo la misura in radianti dell'arco, che l'angolo determina su di una qualsiasi circonferenza avente il centro nel vertice dell'angolo. In particolare se si ricorre alla circonferenza di raggio 1 si è condotti ad *assumere come misura di un angolo la lunghezza dell'arco determinato dall'angolo stesso sulla circonferenza di raggio* 1, *avente il centro nel vertice.*

Questa misura dicesi, come per gli archi anche per gli angoli, *misura in radianti* ed è più particolarmente usata nelle considerazioni teoriche, mentre nelle applicazioni si ricorre più spesso alla misura in gradi. Noi nel seguito useremo indifferentemente l'una o l'altra. Ma ciò che importa tener presente si è che *un arco di circonferenza qualsiasi e il corrispondente angolo al centro sono misurati dallo stesso numero, sia che si adotti per entrambi la misura in gradi, sia che si adotti la misura circolare o in radianti.*

73. Ciò premesso, fissiamo nel piano due assi cartesiani ortogonali, che qui indicheremo con ξ ed η (volendo riservare per altre variabili le lettere x e y), e descriviamo con centro nell'origine O la circonferenza di raggio 1, la quale si dirà *circonferenza trigonometrica*. Chiameremo *origine degli angoli* il semiasse $O\xi$ positivo e *origine degli archi* il punto A in cui questo semiasse interseca la circonferenza; la quale è divisa dagli assi in quattro archi o *quadranti* $\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$, $\widehat{B'A'}$, che diremo rispettivamente *primo*, *secondo*, *terzo* e *quarto quadrante*.



Una semiretta OM, uscente dall'origine, può ruotare nel piano, intorno ad O, *in due sensi, l'uno opposto all'altro*, che noi distingueremo, chiamando *positivo* quello che, nel primo angolo retto degli assi, va da OA verso OB, e *negativo* il contrario.

Se consideriamo il moto del punto M, in cui la semiretta, ruotante intorno da O, sega la circonferenza, restano fissati anche sulla circonferenza stessa il *senso positivo* (quello che sul primo quadrante va da A verso B) e il *senso negativo*.

Così d'or innanzi gli angoli di vertice O, come pure gli archi della circonferenza trigonometrica, si considereranno come *ordinati* o dotati di un senso e si misureranno con numeri *positivi* o *negativi* a seconda del rispettivo senso.

Risulta dal n. prec. che *un qualsiasi angolo* (ordinato) *di vertice* O *e il rispettivo arco di circonferenza trigonometrica saranno misurati* (sia in radianti sia in gradi) *dallo stesso numero dotato di segno.*

74. Se la semiretta OM ruota intorno ad O, a partire dalla origine $O\xi$ degli angoli, in senso positivo, la misura x dell'angolo $A\widehat{O}M$ e del corrispondente arco $\widehat{AM}$ cresce, a partire dallo zero, per valori positivi; e, poichè possiamo immaginare che la semiretta continui indefinitamente la sua rotazione anche al di là di uno o più giri, la x passa in modo continuo per tutti i possibili valori positivi, tendendo all'infinito.

Se invece la OM, a partire da OA, ruota indefinitamente in senso negativo, la x varia in modo continuo dallo zero, per valori negativi, fino a superare in valore assoluto ogni numero assegnabile, cioè tende all'infinito negativo; cosicchè in conclusione l'angolo $\widehat{AOM}$ e il corrispondente arco $\widehat{AM}$ assumono ordinatamente tutti i possibili valori positivi e negativi.

75. È chiaro come gli angoli e gli archi ordinati, cioè dotati di segno, si possano *sommare* (in senso algebrico) e come a questa operazione si estendano senz' altro tutte le proprietà della ordinaria somma algebrica.

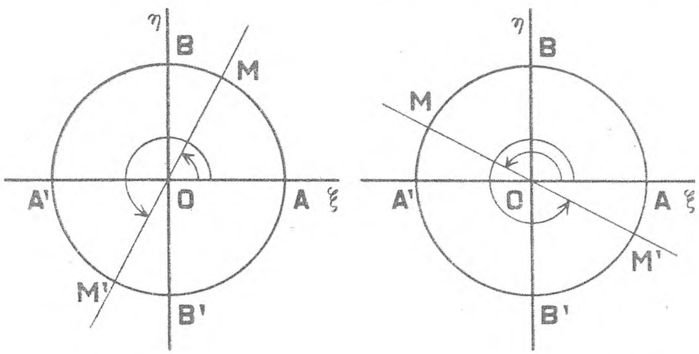
76. Sarà utile pel seguito aggiungere qui alcune osservazioni, che noi riferiremo per brevità agli archi, ma sono senz' altro estendibili ai corrispondenti angoli al centro.

Fissato sulla circonferenza trigonometrica un punto M, vi sono sulla circonferenza stessa infiniti archi $\widehat{AM}$, aventi A ed M rispettivamente per primo e secondo estremo, e fra questi uno solo soddisfa alle due condizioni di essere positivo e minore di un' intera circonferenza 2π o 360°. Se α è questo arco, tutti gli altri archi $\widehat{AM}$, aventi gli stessi estremi, si otterranno aggiungendo o sottraendo ad α un numero intero di circonferenze; cosicchè *tutti gli archi, aventi comuni l'origine* A *e l'estremo* M, *sono dati da*

$$\widehat{AM} = \alpha + 2k\pi = \alpha + k \cdot 360^\circ$$

dove k *designa un qualsiasi numero intero, positivo o negativo.*

77. Se ad un dato arco $\alpha = \widehat{AM}$ aggiungiamo o sottragghiamo una semicirconferenza π (o 180°) otteniamo un arco $\widehat{AM'}$, il cui estremo M' è il punto diametralmente opposto di M (ossia

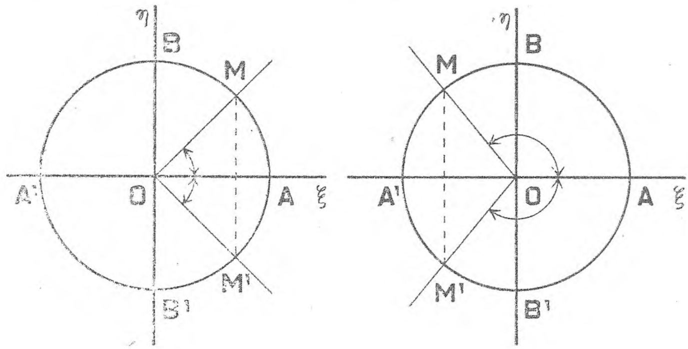


il *simmetrico* di M rispetto ad O); cioè *due archi* $\widehat{\text{AM}}$, $\widehat{\text{AM}'}$, *aventi comune* A *e differenti fra loro di una semicirconferenza, hanno gli estremi* M, M' *simmetrici rispetto al centro del circolo trigonometrico.*

78. Dato un arco $\alpha = \widehat{AM}$, per avere il suo *contrario* $-\alpha$, a partire dall'origine A degli archi, basterà ribaltare il circolo trigonometrico, facendolo ruotare di 180° intorno all'asse ξ, onde sarà

$$-\alpha = \widehat{AM}',$$

dove M' è il punto *simmetrico* di M rispetto all'asse ξ, cioè



il punto che ha la stessa ascissa di M e l'ordinata uguale in valore assoluto e di segno contrario.

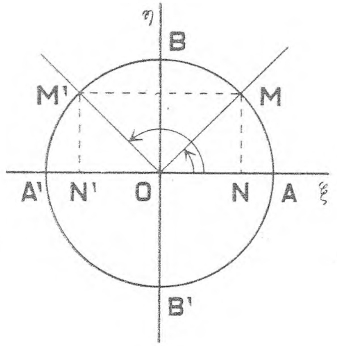
Abbiamo adunque che *due archi* $\widehat{\mathrm{AM}}$, $\widehat{\mathrm{AM}}'$, *uguali in valore assoluto e di segno contrario e aventi l'origine comune* A, *hanno gli estremi* M, M' *simmetrici rispetto all'asse* ξ *delle ascisse.*

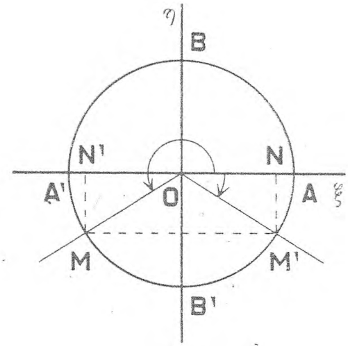
79. Due archi si dicono *supplementari* se la loro somma è uguale ad una semicirconferenza, cosicchè il supplementare di un qualsiasi arco α è dato da

$$\pi - \alpha \quad \text{o} \quad 180^0 - \alpha.$$

È utile cercare come siano situati sulla circonferenza trigonometrica gli estremi di due archi $\widehat{AM}$, $\widehat{AM}'$ che siano fra loro supplementari e abbiano l'origine comune A.

Se $\widehat{AM}$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$, anche il suo supplementare $\widehat{AM}'$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$, cosicchè tanto M quanto M' cadono nell'estremo B del primo quadrante. Se allora facciamo decrescere $\widehat{AM}$ di un certo arco, il supplementare $\widehat{AM}'$, che sommato ad $\widehat{AM}$ deve sempre dare π, crescerà dello stesso arco, cosicchè i due estremi M ed M' risultano *simmetrici* rispetto all'asse η, vale a dire





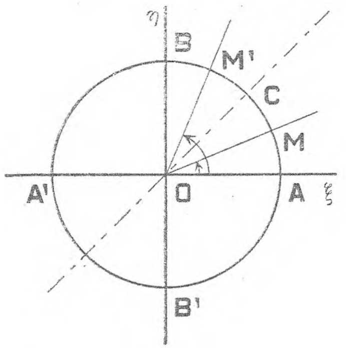
hanno la stessa ordinata e le ascisse uguali in valore assoluto e di segno contrario; e ciò resterà sempre vero, comunque si facciano variare $\widehat{AM}$ ed $\widehat{AM'}$, mantenendoli supplementari.

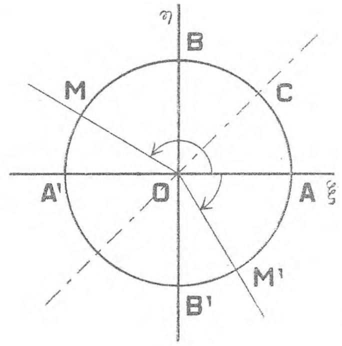
Abbiamo dunque che *due archi* $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$ *supplementari ed aventi l'origine* A *comune, hanno gli estremi* M, M' *simmetrici rispetto all'asse* η *delle ordinate.*

80. Due archi si dicono *complementari* se hanno per somma un quadrante, cosicchè se α è l'uno, l'altro sarà

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{o} \quad 90^\circ - \alpha .$$

Per vedere come siano situati sul circolo trigonometrico gli estremi di due archi complementari $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$ aventi



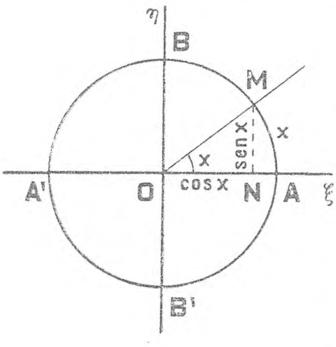


l'origine A comune, si osservi che se $\widehat{AM}$ è uguale ad un mezzo quadrante, anche il complementare $\widehat{AM'}$ è uguale ad un mezzo quadrante, e, se si fa decrescere $\widehat{AM}$ a partire da $\frac{\pi}{2}$ di un qualsiasi arco, il complementare $\widehat{AM'}$ dovrà crescere, a partire da $\frac{\pi}{2}$, dello stesso arco; onde si conclude che *se due archi* $\widehat{\mathrm{AM}}$, $\widehat{\mathrm{AM}}'$ *con l'origine comune* A, *sono complementari, i loro estremi* M, M' *risultano simmetrici rispetto alla bisettrice* OC *del primo e terzo angolo degli assi.*

Definizione delle funzioni circolari o trigonometriche.

81. Preso sul circolo trigonometrico, a partire dall'origine A degli archi, un arco qualsiasi $\widehat{AM}$, indichiamone con x la misura, e, per fissare le idee, consideriamo precisamente la misura in radianti, avvertendo che tutto quanto diremo vale senza modificazione di sorta anche quando si misurano gli archi (e gli angoli) in gradi. In ogni caso x dà anche la misura dell'angolo al centro $\widehat{AOM}$, corrispondente all'arco dato $\widehat{AM}$ (n. 73).

Ora diconsi *seno* e *coseno dell'arco* $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{AM}}$ *e del corrispondente angolo al centro* $\widehat{\mathrm{AOM}}$, i due numeri η_1, ξ_1 che danno l'*ordinata* NM e rispettivamente l'*ascissa* ON dello estremo M, rispetto agli assi ξ, η; e si scrive



$$\eta_1 = NM = \mathrm{sen}\, x, \quad \xi_1 = ON = \cos x.$$

Diconsi poi *tangente* e *cotangente* di x il rapporto del sen x al cos x e, rispettivamente, il rapporto reciproco di cos x a sen x e si scrive

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} = \frac{NM}{ON}, \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x} = \frac{ON}{NM}.$$

Vedremo ai nn. 100, 107 che anche per tg x e per cotg x sussiste un semplice significato geometrico.

Si sono dati dei nomi anche ai reciproci del sen x e del cos x, chiamando *cosecante* di x (cosec x) il primo, *secante* di x (sec x) il secondo; e per il loro significato geometrico rimandiamo agli Esercizi; ma noi nel testo non faremo uso di siffatte denominazioni.

82. Il sen x, il cos x, la tg x e la cotg x risultano determinati in valore e segno quando è dato l'arco (o angolo) x e variano con esso, cosicchè possiamo dire che ciascuno di essi è *funzione* di x (I; n. 188). Codeste quattro funzioni diconsi *funzioni circolari* o *trigonometriche* e noi qui ci proponiamo di studiarne le proprietà.

Facciamo anzitutto una osservazione valida per tutte. Risulta dalla definizione che il valore di ciascuna delle funzioni trigonometriche dell'arco $x = \widehat{AM}$, preso a partire dall'origine A, dipende soltanto dalla posizione, sulla circonferenza trigonometrica, dell'estremo M, cosicchè, se si aggiunge o si sottrae ad x una intera circonferenza, il valore di ogni singola funzione trigonometrica non muta; cioè abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm 2\pi) &= \operatorname{sen} x \\ \cos(x \pm 2\pi) &= \cos x \\ \operatorname{tg}(x \pm 2\pi) &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cotg}(x \pm 2\pi) &= \operatorname{cotg} x, \end{aligned}$$

e, più in generale, indicando con k un qualsiasi intero (positivo o negativo)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + 2k\pi) &= \operatorname{sen} x \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \operatorname{tg}(x + 2k\pi) &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cotg}(x + 2k\pi) &= \operatorname{cotg} x. \end{aligned}$$

Ciò si esprime dicendo che le funzioni trigonometriche sono *funzioni periodiche* dell'arco (e dell'angolo) variabile x e hanno il *periodo* 2π.

Così per ciascuna funzione trigonometrica basterà studiare come essa varia, quando x varia da 0 a 2π, giacchè per valori di x fra 2π e 4π o fra 4π e 6π ecc. o fra -2π e 0, o fra -4π e -2π ecc. ciascuna funzione riprenderà periodicamente gli stessi valori assunti fra 0 e 2π.

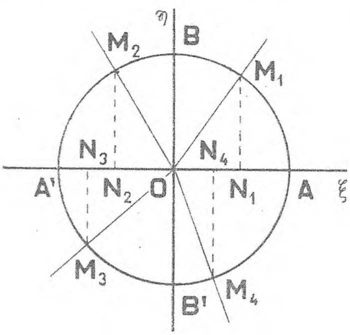
Variazione del seno.

83. Studiamo anzitutto la funzione [1]

$$y = \operatorname{sen} x.$$

[1] La considerazione del « *seno di un arco o angolo* » risale agli Arabi. Gli Astronomi greci (IPPARCO, TOLOMEO, ecc.) fondavano la loro Trigonometria

Poichè sen x è l' *ordinata dell' estremo* M *dell' arco* x, preso a partire da A (n. 81), vediamo che sen x è positivo per gli archi del primo e secondo quadrante (cioè compresi fra 0 e π), negativo per quelli del terzo e quarto (cioè compresi fra π e 2π).



Immaginando poi che l' estremo M dell' arco x descriva l' intera circonferenza, in senso positivo, a partire da A, vediamo che:

per $x = 0$ sen x si annulla e, al crescere di x da 0 a $\frac{\pi}{2}$, cresce da 0 ad 1 *in modo continuo*, assumendo successivamente una volta ed una volta ciascun valore di codesto intervallo (inclusi gli estremi);

quando x cresce, nel secondo quadrante, da $\frac{\pi}{2}$ a π, sen x decresce in modo continuo da 1 a 0;

per x crescente ancora, nel terzo quadrante, da π a $\frac{3\pi}{2}$, sen x decresce, in modo continuo, per valori negativi, da 0 a -1;

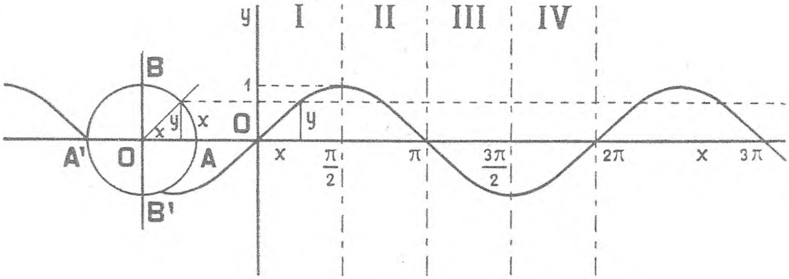
infine al crescere di x, nel quarto quadrante, da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, sen x torna a crescere, algebricamente, e varia, per valori negativi, da -1 a 0.

La stessa variazione si presenta (n. prec.) per sen x, se x cresce ulteriormente da 2π a 4π, da 4π a 6π ecc. e, in ordine inverso, se x decresce da 0 a -2π, da -2π a 4π, ecc.

84. Scelti due assi cartesiani ortogonali x, y, si segnino

sull' uso delle *corde*, considerate come funzioni del corrispondente arco o angolo al centro, cosicchè avevano calcolato quelle *Tavole delle corde*, di cui è spesso fatto cenno presso gli antichi e che per essi compivano lo stesso ufficio delle nostre *Tavole trigonometriche* (cfr. n. 131). L' uso dei *seni* in luogo delle corde appare per la prima volta nell' *Opus astronomicum* di AL-BATTANI. Il seno di un' arco x non è altro, in sostanza, che la metà della corda dell'arco doppio $2x$ o, come dicevano gli Arabi, la corda di $2x$ *piegata* in due: perciò essi chiamarono codesta mezza corda *gib* o *dgib*, che vuol dire appunto « *piega* » e, poichè in latino la piega di una stoffa si dice *sinus*, i primi traduttori dei testi arabi tradussero il nome *gib* colla parola *sinus*, che è rimasta nella nomenclatura trigonometrica. — In Occidente, il primo che abbia usato i *seni* in luogo delle corde è stato l'astronomo REGIOMONTANUS (GIOVANNI MULLER di Königsberg; 1436-1476) il quale, nel 1463, insegnò anche all'Università di Padova.

sull'asse x, a partire dall'origine, gli archi rettificati del circolo trigonometrico, e all'estremo di ciascuno di questi si porti come ordinata il rispettivo seno. Se, come nell'annessa figura, si prende l'asse x sul prolungamento del raggio OA

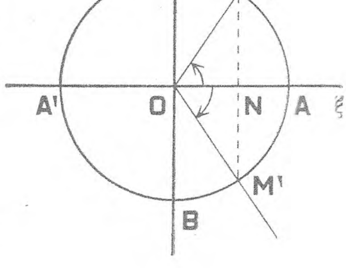


del circolo trigonometrico, basta condurre dall'estremo di ciascun arco x preso sul circolo trigonometrico la parallela all'asse x fino ad incontrare la perpendicolare a quest'asse nell'estremo dell'arco x rettificato.

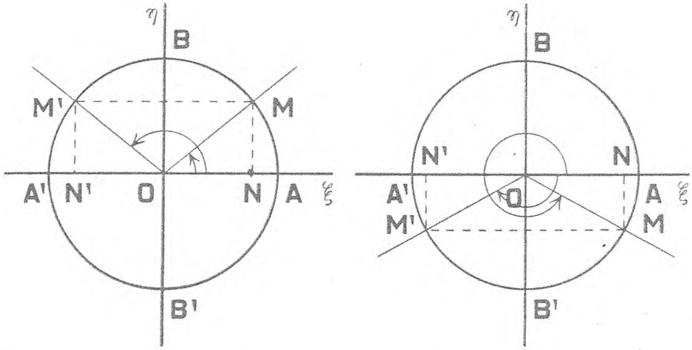
Si ottiene così la *grafica del seno* o *sinusoide*, la quale è una linea illimitata nei due sensi e serpeggiante, dall'una all'altra parte dell'asse x. Essa è costituita da infiniti archi consecutivi, tutti identici a quello compreso fra l'origine e il punto di ascissa 2π; interseca infinite volte l'asse x (per $x = k\pi$) e raggiunge infinite volte il valore *massimo* 1 $\left(\text{per } x = (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ e infinite volte il valore *minimo* -1 $\left(\text{per } k = (4x+3)\frac{\pi}{2}\right)$.

85. Ricordiamo che due archi $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$, uguali in valore assoluto e di segno contrario, hanno gli estremi M, M' simmetrici rispetto all'asse ξ (n. 78), cosicchè le ordinate di M ed M' risultano uguali in valore assoluto e di segno contrario. Di qui si conclude che *due archi uguali in valore assoluto e di segno contrario hanno seni uguali in valore assoluto e di segno contrario*, cioè

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$



86. Ricordiamo ancora che dato un arco $\alpha = \widehat{AM}$, il suo supplementare $\pi - \alpha$, preso a partire dall'origine A degli archi, ha per estremo il punto M', simmetrico di M rispetto all'asse η



(n. 79). I due punti M, M' hanno la stessa ordinata, cosicchè risultano uguali i seni dei due archi $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$: cioè *due archi* (o angoli) *supplementari hanno lo stesso seno*:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha.$$

87. Possiamo allora assegnare *tutti gli archi che hanno lo stesso seno di un dato arco* $\alpha = \widehat{AM}$.

Immaginandoli tutti presi a partire dall'origine A degli archi, ciascuno di essi dovrà avere per estremo un punto del circolo trigonometrico, che abbia la stessa ordinata dell'estremo M di α. Ora sul circolo trigonometrico il solo punto, che abbia ordinata uguale a quella di M e non coincida con esso, è il suo simmetrico M' rispetto all'asse η; onde gli archi cercati saranno quelli che hanno l'origine in A e l'estremo in M oppure in M'. I primi sono dati da α e dagli archi che ne differiscono per multipli di una circonferenza (n. 76)

$$\alpha + 2k\pi;$$

i secondi sono dati dal supplementare $\pi - \alpha$ di α e dagli archi che ne differiscono per multipli di una intera circonferenza, cioè

$$\pi - \alpha + 2k\pi = -\alpha + (2k + 1)\pi;$$

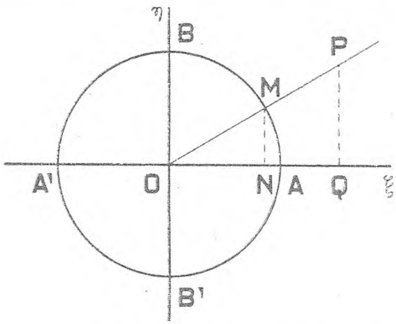
cosicchè si conclude che *gli archi aventi lo stesso seno di un dato arco* α *sono*

$$\alpha + 2k\pi, \qquad -\alpha + (2k + 1)\pi$$

dove k *rappresenta un qualsiasi intero* (positivo o negativo).

Riferendoci alla sinusoide, questi archi (rettificati) si ottengono come ascisse dei punti, in cui la curva è intersecata dalla parallela condotta all'asse x alla distanza $\operatorname{sen}\alpha$ (il cui valore assoluto non supera 1).

88. Notiamo infine che se, dato sul circolo trigonometrico l'arco $\alpha = \widehat{AM}$, si prende sulla semiretta OM un punto P qualsiasi e se ne considera l'ordinata QP, i triangoli rettangoli ONM, OQP risultano simili, cosicchè sarà



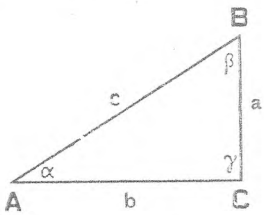
$$\frac{QP}{OP} = \frac{NM}{OM};$$

e poichè QP, NM, come ordinate di due punti di uno stesso angolo retto degli assi, hanno lo stesso segno ed $OM = 1$ è positivo, basta prendere anche OP positivo, perchè l'uguaglianza precedente sia valida anche in segno. Ma si ha $NM = \operatorname{sen}\alpha$, $OM = 1$; onde abbiamo

$$\frac{QP}{OP} = \operatorname{sen}\alpha;$$

cioè *il seno di un angolo, preso a partire dall'origine $O\xi$ degli angoli, è dato dal rapporto dell'ordinata di un punto qualsiasi del suo secondo lato alla distanza* (presa positivamente) *di codesto punto dal vertice.*

89. Se in particolare prendiamo un triangolo ABC rettangolo in C, nel quale si designino i lati e gli angoli com'è indicato dall'unita figura, avremo per gli angoli acuti α e β (presi positivamente)



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c},$$

ossia

$$a = c\operatorname{sen}\alpha, \qquad b = c\operatorname{sen}\beta;$$

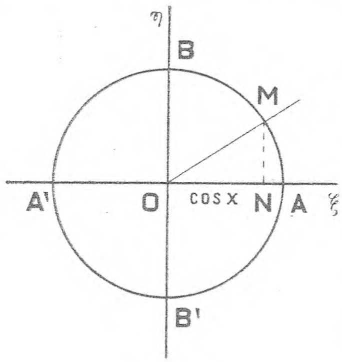
cioè, *in un triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto opposto e l'ipotenusa* e quindi *ciascun cateto è uguale al prodotto dell' ipotenusa pel seno dell' angolo opposto al cateto considerato.*

Variazione del coseno.

90. Per la funzione

$$y = \cos x,$$

che è data dall' *ascissa dell' estremo* M *dell' arco* variabile $\widehat{AM} = x$ (n. 81), vediamo anzitutto che essa è positiva a destra dell' asse η, cioè nel primo e quarto quadrante o per x compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; è invece negativa a sinistra dell' asse η, cioè nel secondo e terzo quadrante o per x compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.



Se poi immaginiamo ancora che il punto M descriva positivamente la circonferenza trigonometrica a partire dall' origine A degli archi, vediamo che:

quando M cade in A, la sua ascissa è uguale ad 1, onde per $x = 0$ il coseno ha il valore 1;

quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, il $\cos x$ decresce in modo continuo da 1 allo zero;

per x crescente da $\frac{\pi}{2}$ a π, il $\cos x$ diventa negativo e decresce (algebricamente) da 0 a -1;

quando x cresce da π a $\frac{3\pi}{2}$, il $\cos x$, sempre negativo, cresce (algebricamente) da -1 a 0;

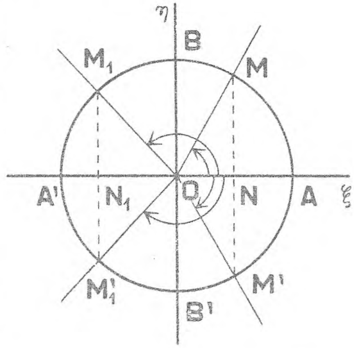
infine per x crescente da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, il $\cos x$ ridiventa positivo e cresce da 0 ad 1.

La stessa variazione si ripeterebbe periodicamente (n. 82) se x crescesse ulteriormente da 2π a 4π, da 4π a 6π, ecc.; e si ripresenterebbe in senso inverso, se x decrescesse da 0 a -2π, da -2π a -4π, e così via.

Vediamo così che $\cos x$, come $\operatorname{sen} x$, al variare di x, non supera mai, in valore assoluto, l'unità e assume tutti i possibili valori compresi tra -1 e $+1$, inclusi questi estremi stessi.

Qui è oramai facile descrivere direttamente la *grafica del coseno*; ma noi ci riserbiamo di mostrare, in base ad alcune osservazioni sul coseno, che qui svolgeremo, come codesta grafica non diversifichi dalla sinusoide (n. 84) se non per la posizione dell'origine sull'asse degli archi rettificati (n. 96).

91. Due archi contrari α e $-\alpha$, presi sul circolo trigonometrico, a partire dall'origine A, in $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM}'$, (o in $\widehat{AM}_1$ e $\widehat{AM}'_1$) hanno gli estremi M, M' (o M_1, M'_1) simmetrici rispetto all'asse ξ (n. 78); cosicchè questi due punti hanno la stessa ascissa, e si conclude che *due archi, uguali in valore assoluto e di segno contrario, hanno lo stesso coseno*, cioè



$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

92. Di qui è facile ricavare quali siano *gli archi che hanno lo stesso coseno di un dato arco* $\alpha = \widehat{AM}$.

Codesti archi, presi tutti a partire da A, dovranno avere come estremo o il punto M stesso o un altro punto del circolo trigonometrico, che abbia la medesima ascissa. Ma il solo punto che soddisfa a questa condizione, diverso da M, è il simmetrico M' di M rispetto all'asse ξ, cosicchè si conclude che gli archi cercati son quelli che, avendo l'origine in A, hanno l'estremo in M oppure in M'. I primi sono dati (n. 76) da

$$\alpha + 2k\pi,$$

i secondi da

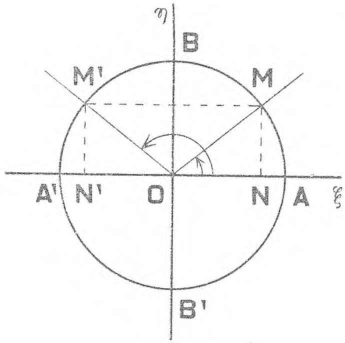
$$-\alpha + 2k\pi;$$

onde abbiamo che *gli archi aventi lo stesso coseno di* α *sono dati da*

$$\pm\alpha + 2k\pi$$

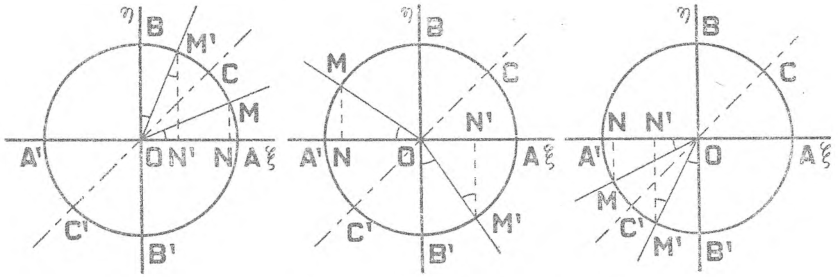
dove k *designa, al solito, un qualsiasi intero* (positivo o negativo).

93. Due archi supplementari α e $\pi - \alpha$, presi sul circolo trigonometrico, a partire da A, in $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM'}$, hanno gli estremi M, M', simmetrici rispetto all'asse η (n. 79); cioè le ascisse di M, M' risultano uguali in valore assoluto e di segno contrario. Abbiamo dunque che *due archi supplementari hanno coseni uguali in valore assoluto e di segno contrario:*



$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

94. Consideriamo similmente due archi complementari α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Sappiamo che se essi si prendono sul circolo trigonometrico, a partire da A, in $\widehat{AM}$, $\widehat{AM'}$, i loro estremi M, M' risultano



simmetrici rispetto alla bisettrice CC' del primo e terzo angolo degli assi (n. 80), cosicchè le semirette OM, OM' formeranno angoli uguali colla bisèttrice CC' e quindi anche cogli assi ξ ed η rispettivamente. Condotte allora le ordinate NM, $N'M'$ di M, M', i due triangoli rettangoli OMN, $OM'N'$ hanno uguali le ipotenuse OM, OM' (raggi del circolo trigonometrico) e gli angoli $\widehat{NOM}$, $\widehat{N'M'O}$ (come si rileva facilmente dalle unite figure, che esauriscono tutti i casi possibili). Perciò i due triangoli sono uguali e si hanno le uguaglianze

$$ON' = NM, \qquad N'M' = ON,$$

le quali sono valide non soltanto in valore assoluto, ma anche in segno.

Esse ci dicono che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

cioè, *se due archi sono complementari, il seno dell' uno è uguale al coseno dell'altro.*

Questo risultato dà la ragione del nome « coseno », il quale non è che una abbreviazione di « complementi sinus ».

95. Consideriamo infine un arco α e quello che si ottiene aumentando α di un quadrante, cioè $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Sappiamo che, qualunque sia α, è (n. 85)

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha).$$

Ma sen $(-\alpha)$ è uguale (n. prec.) al coseno del complemento di $-\alpha$, cioè di

$$\frac{\pi}{2} - (-\alpha) = \frac{\pi}{2} + \alpha;$$

cosicchè si conclude

$$\operatorname{sen} \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Similmente abbiamo (n. 91, prec.)

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

e quindi

$$\cos \alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

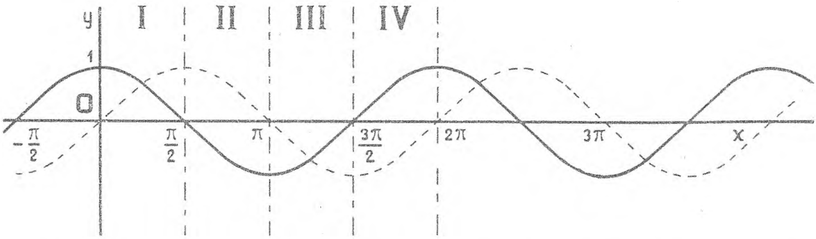
Cioè, *se due archi differiscono di un quadrante, il seno dell'arco minore è uguale in valore assoluto e di segno contrario al coseno dell'arco maggiore; e il coseno dell'arco minore è identico al seno dell'arco maggiore.*

96. Il teorema precedente permette senz'altro di dedurre la grafica del coseno da quella del seno.

Preso infatti un arco qualsiasi x, abbiamo pel n. prec.

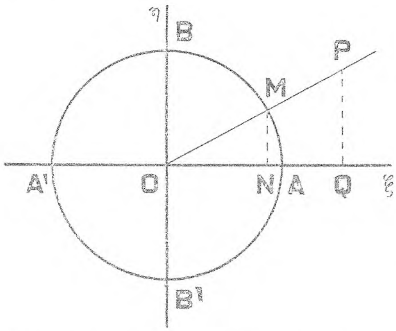
$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Se allora si è descritta rispetto a due assi x, y la sinusoide (n. 84) e si vuole ottenere la grafica del coseno, basta prendere per ogni ascissa x l'ordinata uguale a quella della sinusoide per l'ascissa $x + \frac{\pi}{2}$.



In altre parole, basta far subire alla sinusoide una traslazione parallela all'asse x, nel senso negativo, della lunghezza $\frac{\pi}{2}$.

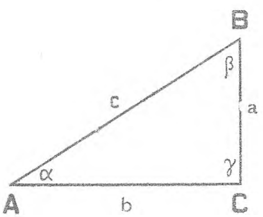
97. Notiamo da ultimo, analogamente al n. 88, che se, considerato sul circolo trigonometrico un arco $\alpha = \widehat{AM}$, si prende sulla semiretta OM un punto P qualsiasi e se ne conduce l'ordinata QP, dalla similitudine dei triangoli rettangoli OMN, OPQ risulta in ogni caso, in valore assoluto e segno (purchè si prenda OP come positivo)



$$\frac{OQ}{OP} = \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{1} = \cos\alpha;$$

cioè *il coseno di un angolo qualsiasi, preso, a partire dall'origine $O\xi$ degli angoli, è dato dal rapporto dell'ascissa di un punto qualsiasi del secondo lato alla distanza* (presa positivamente) *di codesto punto dal vertice.*

98. Se in particolare si considera un triangolo ABC, rettangolo in C, avremo pei due angoli acuti α e β



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c},$$

ossia

$$b = c\cos\alpha, \qquad a = c\cos\beta;$$

cioè, *in un triangolo rettangolo, il coseno di un angolo acuto è uguale al rapporto fra il cateto adiacente e l' ipotenusa*; e quindi *un cateto è uguale al prodotto dell' ipotenusa pel coseno dell' angolo acuto adiacente al cateto considerato.*

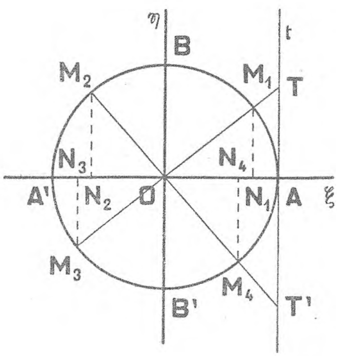
99. Nota. — Ricordando che il segmento AC dicesi *proiezione* della obliqua BA sulla retta AC (¹), possiamo enunciare il teor. prec. sotto quest' altra forma: *Condotta da un punto ad una retta un' obliqua qualsiasi, la proiezione dell' obliqua sulla retta è uguale al prodotto dell' obliqua pel coseno dell' angolo compreso.*

Variazione della tangente e della cotangente.

100. Per vedere nel modo più semplice quale sia la variazione della funzione tangente

$$y = \operatorname{tg} x,$$

che si è definita come rapporto del seno al coseno (n. 81)



$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

conviene indicare anzitutto il significato geometrico di codesto rapporto.

Considerato il circolo trigonometrico, innalziamo nell' origine A degli archi la perpendicolare all' asse ξ, cioè la tangente t al circolo trigonometrico. Qualunque sia la posizione su codesto circolo dell' estremo M di un arco $x = \widehat{AM}$, la **retta** OM interseca la t in un punto T (o T') tale che il triangolo OAT (od OAT') risulta simile ad ONM; cosicchè si ha

$$\operatorname{tg} x = \frac{NM}{ON} = \frac{AT}{OA},$$

ossia, avendosi $OA = 1$,

$$\operatorname{tg} x = AT;$$

(¹) *Geometria*: n. 111.

e questa uguaglianza è valida non soltanto in valore assoluto ma anche in segno, perchè il punto T cade al di sopra dell'asse ξ ed è $AT > 0$, quando M si trova nel primo o terzo quadrante (in M_1 o M_3), cioè quando sen x e cos x hanno ugual segno (nn. 83, 90); invece è $AT' < 0$ quando M cade nel secondo o quarto quadrante (in M_2 o M_4), cioè quando sen x e cos x hanno segno contrario (nn. 83, 90).

Concludiamo dunque che *la tangente di un arco qualsiasi* $x = \widehat{AM}$ *è data dall'ordinata del punto, in cui la retta* AM *sega la tangente al circolo trigonometrico nell'origine degli archi.*

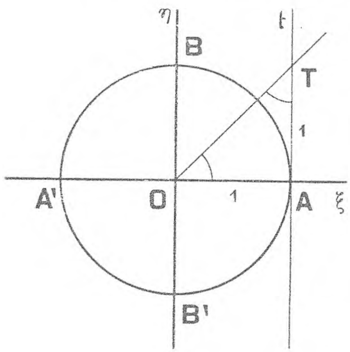
101. Di qui si deduce agevolmente la variazione della tangente.

Abbiamo già notato incidentalmente pocanzi che essa è positiva nel primo e terzo quadrante, negativa nel secondo e quarto.

Se si riduce a 0 l'arco $x = \widehat{AM}$, facendo coincidere M con A, la tangente si annulla

$$\operatorname{tg} 0 = 0 .$$

Quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{4}$ (ossia 45°), tg x cresce in modo continuo da 0 ad 1, e quando x cresce ulteriormente da $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, tg $x = AT$ cresce a partire da 1 illimitatamente, cosicchè basta prendere x abbastanza vicino a $\frac{\pi}{2}$ per ottenere per tg x valori maggiori di qualsivoglia numero prefissato, per quanto grande. Ciò si esprime dicendo (n. 13) che quando x tende,



crescendo, a $\frac{\pi}{2}$, tg x tende all'infinito e si scrive

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty .$$

Appena x supera $\frac{\pi}{2}$, la retta OM sega la t in un punto T' situato al di sotto dell'asse ξ, cioè tg x assume valori negativi, e se x è abbastanza vicino a $\frac{\pi}{2}$, essa diventa, in valore assoluto, maggiore di qualsiasi numero prefissato, per quanto grande. Ciò si esprime dicendo che quando x tende a $\frac{\pi}{2}$ decrescendo, $\operatorname{tg} x$ tende all'infinito negativo; e questa osservazione e la precedente si raccolgono nell'unica scrittura

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm \infty.$$

Se si fa crescere x da $\frac{\pi}{2}$ a π, $\operatorname{tg} x$, mantenendosi sempre negativa, cresce, in senso algebrico, dall'infinito negativo a valori vicini quanto si vuole allo zero, e per $x = \pi$ si annulla.

Dopo di che, se si fa crescere x ulteriormente da π a 2π, l'estremo dell'arco x assume via via le posizioni diametralmente opposte a quelle che ha assunto pocanzi, al variare di x da 0 a π; e poichè due punti diametralmente opposti sul circolo trigonometrico danno luogo manifestamente alla stessa tangente (si vedano i punti M_1, M_2 o M_3, M_4 della fig. del n. 100) concludiamo che $\operatorname{tg} x$, riprende mano mano gli stessi valori assunti prima fra 0 e π.

Così dicasi, quando x cresce da 2π a 3π, da 3π a 4π e così via; e la stessa variazione si ripresenta in senso inverso, quando x decresce da 0 a $-\pi$, da $-\pi$ a -2π e così via.

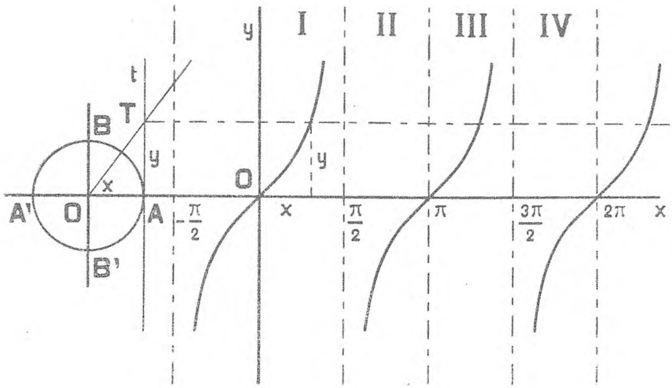
Risulta da quanto precede che $\operatorname{tg} x$ assume ogni possibile valore, positivo o negativo, e compie la sua intera variazione, quando l'arco x varia da 0 a π. Se l'arco x aumenta (o diminuisce) di una semicirconferenza, la tangente riprende lo stesso valore

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x,$$

cosicchè abbiamo che $\operatorname{tg} x$ è una *funzione periodica* dell'arco x, avente il *periodo* π, che è la metà del periodo 2π di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ (cfr. n. 82).

102. Dall'osservazione precedente risulta che per vedere quale sia la forma della *grafica della tangente*, basterà costruirla pei valori di x compresi fra 0 e π o, come convien meglio, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Fissati i due assi x, y e segnati sull'asse x, a partire dall'origine, gli archi rettificati del circolo trigonometrico, si prendano come ordinate rispettive le corrispondenti tangenti AT.



Si ottiene così fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ una curva illimitata nei due sensi, che passa per l'origine e, a destra, si avvicina asintoticamente (I; n. 227) verso l'alto alla perpendicolare all'asse x nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$, mentre, a sinistra, si avvicina asintoticamente, verso il basso, alla perpendicolare all'asse x, nel punto di ascissa $-\frac{\pi}{2}$.

La grafica della tangente è costituita da infinite curve, identiche a quella dianzi indicata e comprese nelle successive striscie di piano di larghezza π, che si ottengono innalzando le perpendicolari all'asse x nei punti di ascissa

$$\frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \frac{7\pi}{2} \ldots.$$

e

$$-\frac{3\pi}{2} \quad -\frac{5\pi}{2} \quad -\frac{7\pi}{2} \ldots.$$

103. Dato un arco $\alpha = \widehat{AM}$, gli archi aventi la stessa tangente, ove si prendano tutti a partire da A, dovranno manifestamente avere l'estremo o nel punto M stesso o nel punto M' diametralmente opposto, e saranno perciò dati da

$$\alpha + 2k\pi$$

e da (n. 77)

$$\alpha + \pi + 2k\pi = \alpha + (2k + 1)\pi.$$

Raccogliendo queste due classi di archi in un' unica formola, concludiamo che *gli archi aventi la stessa tangente di un dato arco* α *sono dati da*

$$\alpha + k\pi$$

dove k *rappresenta un qualsiasi intero* (positivo o negativo).

Se ci riferiamo alla grafica della tangente, codesti archi (rettificati) sono dati dalle ascisse dei punti d' intersezione della grafica colla parallela condotta all' asse x, alla distanza $\operatorname{tg}\alpha$.

104. Dalle uguaglianze (nn. 85, 91)

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

ricaviamo, dividendole membro a membro,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

cioè *due archi contrari hanno tangenti uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

Similmente dalle (nn. 86, 93)

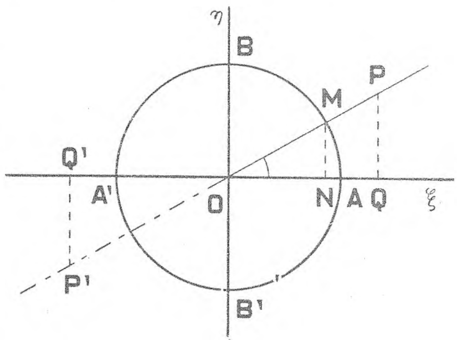
$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

deduciamo

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

cioè *due archi supplementari hanno le tangenti uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

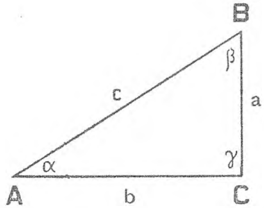
105. L' osservazione del n. 100 si può estendere. Se preso sul circolo trigonometrico un qualsivoglia arco $x = \widehat{AM}$, abbassiamo da un punto qualsiasi P della **retta** OM la perpendicolare PQ sull' asse ξ, ricaviamo dalla similitudine dei triangoli OMN, OPQ, la uguaglianza, valida anche in segno,



$$\operatorname{tg} x = \frac{NM}{ON} = \frac{QP}{OQ};$$

cioè *la tangente di un qualsiasi angolo, preso a partire dall' origine degli angoli* $O\xi$, *è dato* *dal rapporto dell'ordinata all'ascissa di un qualsivoglia punto del secondo lato dell'angolo considerato.*

106. In particolare in un triangolo ABC, rettangolo in C, avremo



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a};$$

ossia

$$a = b \operatorname{tg}\alpha, \qquad b = a \operatorname{tg}\beta;$$

cioè: *In un triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto è uguale al rapporto del cateto opposto al cateto adiacente*; e quindi *un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.*

107. La

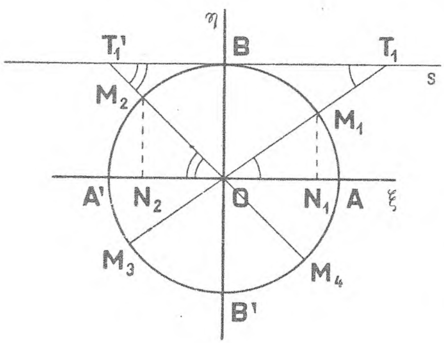
$$y = \operatorname{cotg} x$$

non è altro che la reciproca di $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

cosicchè anch'essa sarà una funzione periodica di x, avente il periodo π (n. 101).

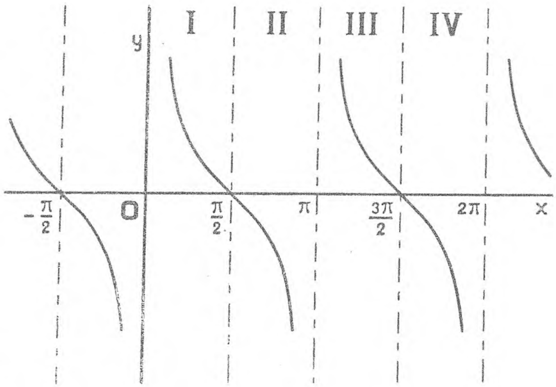
Risulta poi dalla figura che *la cotangente di un qualsiasi arco* $x = \widehat{AM}$ *è uguale all'ascissa* BT_1 (*o* BT_1') *del punto* T_1, (*o* T_1'), *in cui la retta* OM *interseca la tangente* s *al circolo trigonometrico nell'estremo* B *del primo quadrante.*



E di qui è facile dedurre, come si è fatto al n. 102 per la tangente, la variazione della cotangente. Per brevità ci limitiamo ad assegnare nella figura della pag. seguente la rispettiva grafica pei valori di x compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e 2π.

108. Gli archi aventi la stessa cotangente di un arco dato α sono quelli stessi che hanno la medesima tangente di α, cioè

$$\alpha + k\pi.$$



Inoltre dalle uguaglianze (n. 104)

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

discende

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$
$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

cioè

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Infine dalle uguaglianze (n. 95)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

deduciamo, dividendole membro a membro,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha;$$

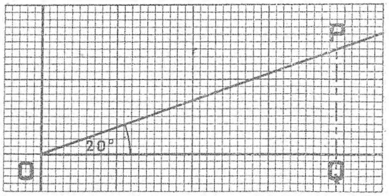
cioè *se due archi sono complementari, la tangente dell'uno è uguale alla cotangente dell'altro.*

Di qui il nome di « cotangente » = « complementi tangens ».

Calcolo delle funzioni trigonometriche di alcuni archi particolari.

109. I valori delle funzioni trigonometriche di un dato arco od angolo α si possono determinare per approssimazione, graficamente, usando un foglio di carta millimetrata.

P. es. nell'annessa figura si è descritto, per mezzo di un rapportatore, su carta millimetrata, un angolo di 20°, col vertice in un vertice della quadrettatura e il primo lato su di una retta di questa. Il secondo lato passa sensibilmente pel punto P di coordinate $OQ = $ mm. 39, $QP = $ mm. 14: misurando con un doppio decimetro millimetrato il segmento OP si trova che esso è approssimatamente di mm. 41,5, cosicchè si conclude (nn. 89, 98, 106) che per approssimazione sarà



$$\text{sen } 20^\circ = \frac{QP}{OP} = \frac{140}{415} = 0{,}337\ldots$$

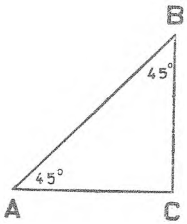
$$\cos 20^\circ = \frac{OQ}{OP} = \frac{390}{415} = 0{,}939\ldots$$

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{QP}{OQ} = \frac{14}{39} = 0{,}358\ldots$$

(i valori esatti sono rispettivamente 0,342..., 0,940..., 0,364...); e per avere una approssimazione maggiore, basterà considerare, in luogo di P, un altro vertice della quadrettatura, più lontano da O, pel quale, passi sensibilmente il secondo lato dell'angolo.

110. Per taluni archi od angoli particolari è facile calcolare esattamente i valori delle funzioni trigonometriche, ricorrendo a proprietà elementari dei triangoli. Diamo in proposito qualche esempio.

a) Abbiamo già notato (nn. 89, 98) che tg 45° = 1. Per trovare sen 45° e cos 45°, si osservi che 45° è l'ampiezza degli angoli acuti di un triangolo rettangolo isoscele ABC. Supposta l'ipotenusa $AB = 1$, avremo (nn. 89, 98)



$$\text{sen } 45^\circ = CB, \qquad \cos 45^\circ = AC = CB.$$

Ma applicando al triangolo il teorema di PITAGORA (I; n. 61) si trova

$$2\,\overline{CB}^2 = 1$$

ossia

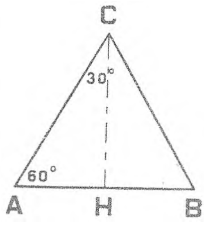
$$\overline{CB}^2 = \frac{1}{2}, \qquad CB = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

cosicchè risulta

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Similmente, riferendoci ad un triangolo equilatero ABC, il cui angolo è di 60°, avremo, calando l'altezza CH e supponendo $AC = 1$,

$$\operatorname{sen} 60^\circ = HC, \quad \cos 60^\circ = AH, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{HC}{AH}.$$



Ora è senz'altro $AH = \frac{1}{2}$ e, quanto ad HC, troviamo applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC,

$$\overline{HC}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

e quindi

$$\overline{HC}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad HC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Così si conclude

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Di qui, sia notando che l'altezza CH biseca l'angolo al vertice, sia tenendo conto del fatto che 30° è il complementare di 60°, si deduce (nn. 94, 108) che

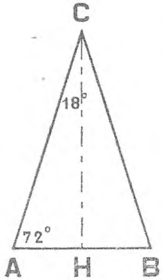
$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) Sappiamo dalla Geometria [1] che *il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio*; cosicchè se si prende codesto raggio uguale ad 1, il lato del decagono regolare è dato (I; n. 95) da

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

[1] *Geometria*: n. 404.

Ora il triangolo isoscele ABC che si ottiene, congiungendo il centro C con due vertici consecutivi A, B del decagono regolare, ha l'angolo al vertice di $36°$, cosicchè, abbassata l'altezza CH, la quale biseca l'angolo in C, avremo



$$\operatorname{sen} 18° = AH, \qquad \cos 18° = CH, \qquad \operatorname{tg} 18° = \frac{AH}{CH}.$$

Ma si ha

$$AH = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

e, applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC,

$$CH = \sqrt{1 - \overline{AH}^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Si conclude di qui

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right), \quad \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} 18° = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

Per l'angolo alla base $\widehat{BAC}$, il quale è il complementare di $18°$ cioè $72°$, avremo (nn. 94, 108)

$$\operatorname{sen} 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \cos 72° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right), \quad \operatorname{tg} 72° = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

d) Più in generale abbiamo imparato in Geometria a costruire (colla riga e col compasso) i poligoni regolari aventi un numero di lati uguale a 2^n, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $3 \cdot 5^n$, dove n è un intero positivo qualsivoglia (1); e per ciascuno di essi possiamo calcolare la lunghezza del lato, applicando come nei casi *a*) *b*) *c*) il teorema di Pitagora e quindi con sole estrazioni di radici quadrate. Considerando per ciascuno di codesti poligoni il triangolo isoscele, determinato dal centro e da due vertici consecutivi, si otterranno così i valori delle funzioni trigonometriche della metà del rispettivo angolo al vertice o angolo al centro del poligono regolare.

Così p. es. partendo dal pentadecagono e raddoppiando successivamente i lati si potrebbero trovare i valori delle funzioni trigonometriche di $12°$, $6°$, $3°$, e così via. Ma indicheremo più avanti altri metodi meno laboriosi pel calcolo delle funzioni trigonometriche di tutti codesti angoli, quando siansi calcolate quelle di $12°$.

Riduzione di un arco al primo quadrante.

111. Se ripensiamo la variazione di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$, vediamo che per far assumere a ciascuna di queste funzioni tutti i valori di cui essa è suscettibile, basta far variare x in un intervallo da 0 a π; ed anzi, se si prescinde dal segno, codeste tre funzioni assumono tutti i valori assoluti di cui

(1) *Geometria*: nn. 345, 403-406.

sono suscettibili, quando si fa variare x nel primo quadrante cioè da 0 a $\frac{\pi}{2}$.

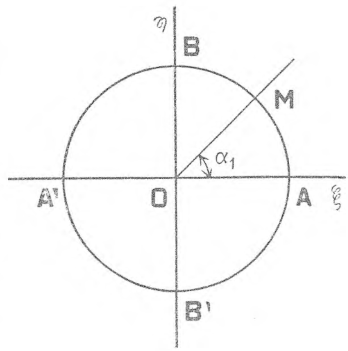
Ora si può dimostrare che *dato un arco α qualsiasi, non compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, si può sempre trovare un arco α' del primo quadrante, le cui funzioni trigonometriche sono rispettivamente uguali,* IN VALORE ASSOLUTO, *alle funzioni trigonometriche di ugual nome dell'arco dato α.*

La ricerca di codesto arco α' è appunto ciò che dicesi « riduzione dell'arco α al primo quadrante ».

Per trovare siffatto arco α', supponiamo di prendere il dato arco α sul circolo trigonometrico, a partire da A, in $\widehat{AM}$, e notiamo che, se α non è già compreso tra 0 e 2π, basta aggiungere o togliere ad α un numero opportuno di circonferenze per ottenere un arco

$$\alpha_1 = \alpha + 2k\pi,$$

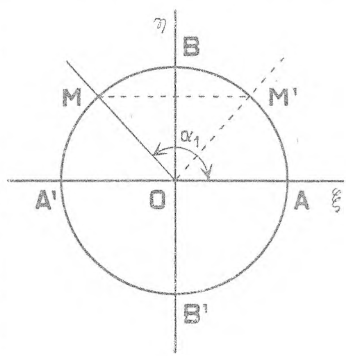
avente ancora gli estremi A, M, e tale che risulti compreso tra 0 e 2π. Le funzioni trigonometriche di α_1 risultano ordinatamente identiche a quelle di α (n. 82).



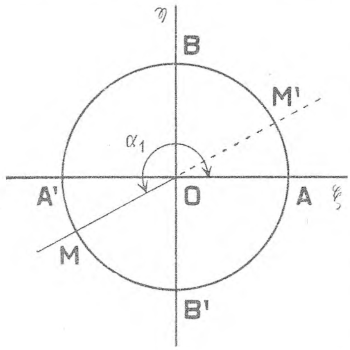
Se α_1 è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, cioè se M appartiene al primo quadrante, la riduzione di α al primo quadrante è già ottenuta. Se invece α_1 è compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e π, il suo supplementare $\widehat{AM'} = \pi - \alpha_1$ appartiene al primo quadrante e poichè (nn. 86, 93, 104)

$$\text{sen}\,(\pi - \alpha_1) = \text{sen}\,\alpha_1,\ \cos(\pi - \alpha_1) = \\ = -\cos\alpha_1,\ \text{tg}\,(\pi - \alpha_1) = -\,\text{tg}\,\alpha_1,$$

è precisamente $\widehat{AM'} = \pi - \alpha_1$ l'arco α' cercato.



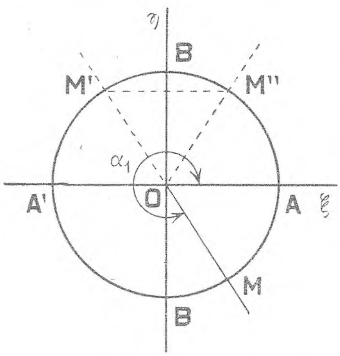
Se poi α_1 è compreso tra π e $\frac{3\pi}{2}$ l'arco $\alpha_1 - \pi$, che preso a partire da A, ha l'estremo nel punto M' diametralmente opposto ad M, appartiene al primo quadrante e, poichè le coordinate di M' sono uguali in valore assoluto e di segno contrario a quelle di M, avremo che



$$\operatorname{sen}(\alpha_1 - \pi) = -\operatorname{sen}\alpha_1, \cos(\alpha_1 - \pi) = -\cos\alpha_1, \operatorname{tg}(\alpha_1 - \pi) = \operatorname{tg}\alpha_1;$$

cosicchè $\alpha_1 - \pi$ è precisamente l'arco α' cercato.

Infine, se $\alpha_1 = \widehat{AM}$ appartiene al quarto quadrante, l'arco $\alpha_1 - \pi = \widehat{AM'}$ è compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e π e, come si è visto or ora, ha le funzioni trigonometriche rispettivamente uguali, in valore assoluto, a quelle di α_1 (ossia di α). Il supplementare di $\alpha_1 - \pi$, cioè

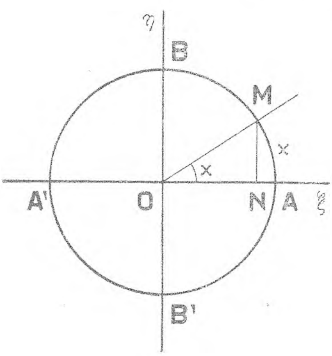


$$\widehat{AM''} = \pi - (\alpha_1 - \pi) = 2\pi - \alpha_1$$

è manifestamente l'arco α' cercato.

Relazioni fra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco.

112. Fra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco sussistono delle relazioni che permettono di calcolarle tutte, quando si conosca il valore di una di esse.



Per trovare codeste relazioni, notiamo anzitutto che, dato un arco $x = \widehat{AM}$ qualsiasi e abbassata la ordinata MN di N, il triangolo OMN, rettangolo in N ha per cateti $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e la ipotenusa (raggio del circolo trigonometrico) uguale ad 1; cosicchè applicando il teorema di Pitagora (I; n. 61) troviamo l'equazione fondamentale

$$(1) \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Aggiungendo a questa equazione l' altra, che sussiste per definizione (n. 81)

$$(2) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

otteniamo fra $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ un sistema di due equazioni, che permette appunto, come dicemmo or ora, di calcolare i valori di due fra codeste funzioni, quando si conosca il valore della terza.

113. Supponiamo di conoscere, per un certo arco x, il valore di $\operatorname{sen} x$; per trovare i valori del coseno e della tangente dello stesso arco, si deduce anzitutto dalla (1)

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

e quindi

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}.$$

Qui se, oltre $\operatorname{sen} x$, si conosce anche l'arco x, si può decidere quale sia il segno da adottare; e precisamente, si prenderà il segno $+$, se l'estremo M dell'arco $x = \widehat{AM}$, cade nel primo o quarto quadrante; si prenderà il segno $-$, se M cade nel secondo o terzo quadrante (n. 90).

Ma se conosciamo soltanto il valore di $\operatorname{sen} x$ e non l'arco stesso, dovremo conservare l'ambiguità del segno, perchè fra gli archi, aventi il dato seno, ve ne sono infiniti aventi il coseno positivo e infiniti altri (supplementari dei primi) aventi il coseno negativo (n. 87).

Il valore di $\operatorname{tg} x$ sarà dato, per la (2), da

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}};$$

e se sappiamo decidere circa il segno del coseno, qui si adotterà per il radicale il medesimo segno.

114. Se è dato, invece, il valore di $\cos x$, ricaviamo similmente dalla (1)

$$\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x};$$

e se si conosce anche l'arco x, si prenderà il segno $+$ o $-$, secondo che l'estremo M di $x = \widehat{AM}$ cade nel primo e secondo oppure nel terzo e quarto quadrante (n. 83).

Corrispondentemente si avrà

$$\operatorname{tg} x = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}.$$

115. Sia dato infine il valore di $\operatorname{tg} x$ e si vogliano trovare quelli di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

Dalla (1), dividendone ambo i membri per $\operatorname{sen}^2 x$, deduciamo

$$1+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

ossia

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

o ancora

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x};$$

e quindi, invertendo i due rapporti

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

o infine

$$\operatorname{sen} x=\frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Similmente, dividendo ambo i membri della (2) per $\cos^2 x$, troviamo successivamente

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+1=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

e infine

$$\cos x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Se conosciamo anche l'arco $x=\widehat{AM}$, si prenderanno per $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, secondo che M appartiene al primo o secondo o terzo o quarto quadrante, i segni $++$ o $+-$ o $--$ o $-+$ rispettivamente.

116. Notiamo che fra le funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ di uno stesso arco x non può sussistere una terza equazione *distinta* dalle (1) e (2), cioè tale che non ne derivi come conseguenza. Se invero vi fosse una relazione siffatta, sostituendo in essa per $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ le loro espressioni per mezzo di $\operatorname{tg} x$ (n. prec.), si troverebbe un'equazione per la sola tg x, che non dovrebbe essere una identità e perciò potrebbe essere soddisfatta soltanto da valori particolari di tg x, mentre sappiamo che questa funzione assume al variare di x, ogni possibile valore positivo e negativo.

Formule per l'addizione e la sottrazione degli archi.

117. Il calcolo delle funzioni trigonometriche è facilitato da alcune formole fondamentali, che permettono di trovare i valori delle funzioni trigonometriche della somma o della differenza di due archi quali si vogliano, quando son noti quelli corrispondenti ai due archi considerati.

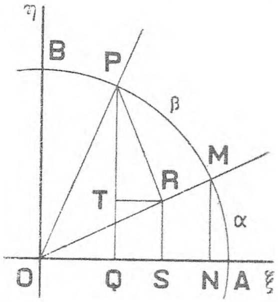
118. Dati due archi α, β, portiamoli sul circolo trigonometrico l'uno di seguito all'altro, a partire da A, in $\widehat{AM}$, $\widehat{MP}$, cosicchè si abbia

$$\alpha = \widehat{AM}, \quad \beta = \widehat{MP}, \quad \alpha + \beta = \widehat{AP};$$

e qui, dapprincipio, supponiamo che i due archi α e β siano positivi e che la loro somma sia minore di $\frac{\pi}{2}$, cioè appartenga al primo quadrante. Avremo allora che i seni e i coseni di α, β e $\alpha + \beta$ (come pure le rispettive tangenti) saranno tutti positivi.

Ciò posto si abbassino da M e P le perpendicolari MN, PQ sull'asse ξ e da P la perpendicolare PR sulla OM; e da R si conducano la perpendicolare RS sull'asse ξ e la parallela all'asse ξ fino ad incontrare in T la PQ.

Ora notiamo che i due triangoli rettangoli, che insieme formano il quadrangolo intrecciato $OQPR$, hanno uguali due angoli acuti come opposti al vertice, talchè saranno uguali anche gli altri due angoli acuti, cioè avremo $\widehat{RPQ} = \alpha$.



Ora per l'arco α si ha senz'altro

$$\operatorname{sen} \alpha = NM, \quad \cos \alpha = ON;$$

e per β, che si è preso a partire da M, in $\widehat{MP}$, basta prendere per un momento come asse ausiliare la OM per vedere che

$$\operatorname{sen} \beta = RP, \quad \cos \beta = OR.$$

Infine per la somma $\alpha + \beta$ abbiamo

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = QP, \quad \cos (\alpha + \beta) = OQ,$$

ossia

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=QT+TP, \quad \cos(\alpha+\beta)=OS-QS.$$

Ma dal rettangolo $SRTQ$, risulta

$$QT=SR, \quad QS=TR,$$

cosicchè possiamo scrivere

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=SR+TP, \quad \cos(\alpha+\beta)=OS-TR. \tag{1}$$

Ma dal triangolo OSR, rettangolo in S, ricaviamo, pei nn. 89, 98

$$SR=OR\operatorname{sen}\widehat{SOR}=\cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$

$$OS=OR\cos\widehat{SOR}=\cos\beta\cos\alpha.$$

Similmente dal triangolo PRT, rettangolo in T e avente l'angolo acuto $\widehat{RPT}=\alpha$, deduciamo

$$TP=RP\cos\widehat{RPT}=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$TR=RP\operatorname{sen}\widehat{RPT}=\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha;$$

cosicchè basta sostituire nelle (1) ad SR, TP, OS, TR le espressioni così trovate, per giungere alle *formule per l'addizione degli archi*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{cases}$$

119. Le formole precedenti si sono dimostrate per due archi α e β positivi e tali che la loro somma sia minore di $\frac{\pi}{2}$. Ma *esse valgono in generale*, cioè per ogni possibile coppia di archi α e β.

Ciò si dimostra con successive estensioni; e prima di tutto si può agevolmente far vedere che le (I) sussistono per due archi α, β *positivi e minori, ciascuno, di* $\frac{\pi}{2}$, *anche se la loro somma, certamente minore di* π, *supera un quadrante.*

Consideriamo, infatti, sotto la indicata ipotesi, gli archi α', β', complementari di α, β rispettivamente, cioè poniamo

$$\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha, \quad \beta'=\frac{\pi}{2}-\beta.$$

La loro somma è data da

$$\alpha' + \beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - (\alpha + \beta);$$

cioè $\alpha' + \beta'$ è il supplementare di $\alpha + \beta$; e poichè quest'arco è compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e π, $\alpha' + \beta'$ sarà minore di un quadrante, cosicchè per α' e β' varranno senz'altro pel n. prec. le formole (I), cioè avremo

$$(2) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha' + \beta') &= \operatorname{sen}\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \operatorname{sen}\beta' \\ \cos(\alpha' + \beta') &= \cos\alpha' \cos\beta' - \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta'. \end{aligned}$$

Ma per le note proprietà degli angoli supplementari (nn. 86, 93) abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha' + \beta') &= \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha' + \beta') &= -\cos(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

mentre d'altra parte pel n. 94 risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha' &= \cos\alpha, \quad \cos\alpha' = \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta' &= \cos\beta, \quad \cos\beta' = \operatorname{sen}\beta; \end{aligned}$$

cosicchè, sostituendo questi valori nelle (2), otteniamo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \\ -\cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}$$

e, permutando i due termini al secondo membro della prima formola e cambiando il segno ad ambo i membri della seconda, ritroviamo appunto le

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \end{aligned} \right.$$

le quali sono così dimostrate vere per ogni coppia di angoli α, β *del primo quadrante.*

120. Per estendere le formole (I) ad ogni coppia di angoli positivi, dimostriamo che *se le* (I) *sussistono per una coppia di angoli* α, β, *sono valide altresì per la coppia che si ottiene aumentando uno dei due archi di un quadrante*, p. es. per α e $\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$.

Si noti invero che pel n. 95 si ha

$$\operatorname{sen} \beta = -\cos \beta', \quad \cos \beta = \operatorname{sen} \beta'$$

e similmente, poichè $\alpha + \beta' = \alpha + \beta + \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha + \beta'), \quad \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta'),$$

cosicchè sostituendo nelle (I) otteniamo

$$\begin{aligned} -\cos(\alpha + \beta') &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta' - \cos \alpha \cos \beta' \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta') &= \cos \alpha \operatorname{sen} \beta' + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta' \end{aligned}$$

ossia veramente

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta') &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta' + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta' \\ \cos(\alpha + \beta') &= \cos \alpha \cos \beta' - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta'. \end{aligned}$$

121. Ciò posto, presi due archi α, β quali si vogliano, potremo sempre sottrarre da ciascuno di essi un numero sufficiente di quadranti per ottenere due archi α', β' del primo quadrante: sia precisamente

$$\alpha = \alpha' + m \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \beta' + n \frac{\pi}{2}.$$

Per α', β' le formole (I) valgono senz'altro (n. 119); e allora, in base al n. prec. esse sussisteranno anche quando si aumenti successivamente α' di 1, 2, 3,...., m quadranti e β' di 1, 2, 3,...., n quadranti.

Così *le* (I) *restano stabilite per ogni coppia di archi positivi.*

122. Ma *esse sussistono anche quando α o β o entrambi questi archi siano negativi.*

Se, p. es., è negativo β, potremo sempre aggiungere a β un numero intero m di circonferenze tale, che risulti

$$\beta + m \cdot 2\pi > 0:$$

allora applicando le (I) agli archi positivi α e $\beta + m \cdot 2\pi$, otteniamo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2m\pi) &= \operatorname{sen} \alpha \cos(\beta + 2m\pi) + \cos \alpha \operatorname{sen}(\beta + 2m\pi) \\ \cos(\alpha + \beta + 2m\pi) &= \cos \alpha \cos(\beta + 2m\pi) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\beta + 2m\pi). \end{aligned}$$

Ma in ogni caso si ha (n. 82)

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+2m\pi)=\operatorname{sen}(\alpha+\beta), \quad \cos(\alpha+\beta+2m\pi)=\cos(\alpha+\beta)$$
$$\operatorname{sen}(\beta+2m\pi)=\operatorname{sen}\beta, \quad \cos(\beta+2m\pi)=\cos\beta,$$

cosicchè, sostituendo nelle formule precedenti, si trova ancora

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta;$$

e analogamente si estendono queste formole al caso in cui sia negativo α o tanto α quanto β.

Se dei due archi dati supponiamo che il secondo sia negativo e ne mettiamo in evidenza il segno, indicandolo con $-\beta$, le formole (I) dànno

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta);$$

e di qui ricordando (nn. 85, 91) che

$$\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta, \quad \cos(-\beta)=\cos\beta,$$

ricaviamo le *formole per la sottrazione degli archi*

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{cases}$$

123. Dividendo membro a membro le formule (I) e le (II), troviamo

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta},$$
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

e di qui, dividendo, nei secondi membri, numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$, deduciamo

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}},$$

ossia

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\[2ex] \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \end{cases}$$

124. Quando siansi calcolate le funzioni trigonometriche di due archi α e β, le formole (I), (II), (III) permettono di calcolare quelle della loro somma $\alpha+\beta$ e della loro differenza $\alpha-\beta$.

Così p. es. dai valori noti delle funzioni di 45°, 30°, 18° (n. 110) si ricaveranno successivamente quelle di

$$45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, \quad 18' - 15^\circ = 3^\circ;$$

e, partendo da queste ultime, si calcoleranno le funzioni trigonometriche di

$$3^\circ, \quad 6^\circ, \quad 9^\circ, \ldots.$$

cioè degli archi di 3° in 3°.

Formole per la duplicazione e la bisezione degli archi.

125. Le formole (I) per l'addizione degli archi (n. 119) permettono in particolare di calcolare le funzioni trigonometriche del doppio di un arco dato α, di cui già si conoscano le varie funzioni trigonometriche.

Basta invero porre nelle formole ricordate $\beta=\alpha$, per ottener senz'altro le *formole per la duplicazione degli archi:*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \end{cases}$$

126. Le formole precedenti valgono per qualsiasi arco α, quindi anche se ad α si sostituisce la sua metà $\frac{1}{2}\alpha$. Con questa sostituzione la seconda delle formole precedenti diventa

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha.$$

D'altra parte per la (1) del n. 112 abbiamo

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha;$$

e da queste due equazioni, sottraendo e poi sommando membro a membro la prima alla seconda, deduciamo

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha$$

e quindi

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Infine dividendo membro a membro le due ultime uguaglianze troviamo

$$\text{(IV')} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Le tre formole così ottenute permettono di calcolare le funzioni trigonometriche della metà di un arco (di cui si conosca il coseno) e perciò diconsi *formole per la bisezione degli archi.*

Se, oltre $\cos\alpha$, si conosce l'arco α stesso si potrà, caso per caso, decidere quale segno debba adottarsi in ciascuna delle tre formole ottenute, guardando in qual quadrante si trovi l'estremo M dell'arco $\widehat{AM} = \frac{1}{2}\alpha$.

Ma se si conosce soltanto il valore di $\cos\alpha$ si dovrà conservare per ciascuna formola il doppio segno; ed anzi convien tener presente che il doppio segno della formola che dà $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$ è indipendente da quello della formola che dà $\cos\frac{1}{2}\alpha$.

Infatti gli archi che hanno lo stesso coseno di un arco α sono dati (n. 92) da

$$2k\pi \pm \alpha,$$

cosicchè le loro metà sono

$$k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha,$$

e qualunque sia il quadrante in cui cade l'estremo M di $\widehat{AM}=\frac{1}{2}\alpha$, prendendo $k=0$ e il segno $-$, si ottiene l'angolo $-\frac{1}{2}\alpha$ il cui l'estremo è il simmetrico di M rispetto all'asse ξ; prendendo $k=1$ e il segno $+$, si trova l'arco $\frac{1}{2}\alpha+\pi$ il cui estremo è il punto diametralmente opposto di M e infine prendendo $k=1$ e il segno $-$, si ottiene l'arco $-\frac{1}{2}\alpha+\pi$ il cui estremo è il simmetrico di M rispetto all'asse η; cosicchè fra gli archi

$$k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha$$

ve ne sono con l'estremo in ciascuno dei quattro quadranti e i rispettivi seni e coseni presenteranno tutte le quattro possibili combinazioni di segno.

Formole per la trasformazione in prodotti della somma o differenza di due seni o coseni.

127. Riprendiamo le quattro formole per l'addizione e sottrazione degli archi (nn. 119, 122)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$

Sommando e poi sottraendo membro a membro le prime due formole, e quindi, analogamente, le altre due, troviamo

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta\\
\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}\right.$$

Si ponga allora

$$\alpha+\beta=p, \quad \alpha-\beta=q,$$

onde risulta, sommando e sottraendo membro a membro,

$$\alpha=\frac{1}{2}(p+q), \quad \beta=\frac{1}{2}(p-q).$$

Se sostituiamo nelle formole (1) ad $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α, β le espressioni dianzi ottenute per mezzo di p e q, otteniamo

$$
\text{(VI)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \\
\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q &= 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \\
\cos p+\cos q &= 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q) \\
\cos p-\cos q &= -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q).
\end{aligned}
\right.
$$

Queste formole (¹) sono spesso utili; e, in quanto trasformano espressioni binomie in monomie si prestano ai calcoli logaritmici, di cui vedremo fra poco la importanza nelle applicazioni della Trigonometria.

Tavole logaritmiche e logaritmico-trigonometriche.

128. Pei calcoli trigonometrici è necessario poter risolvere in ogni caso e con una certa rapidità i due seguenti problemi:

1) *dato un arco (od angolo), trovare i valori delle corrispondenti funzioni trigometriche;*

2) *dato il valore di una funzione trigonometrica, trovare gli archi (od angoli) corrispondenti.*

I calcoli, che a ciò si richiedono, sono lunghi e laboriosi e sono stati eseguiti una volta per tutte da pazienti e benemeriti calcolatori, che hanno raccolto i loro risultati, a vantaggio di tutti, nelle cosidette *Tavole trigonometriche.*

Sarebbe qui inutile il descrivere minutamente i metodi, che si seguono nella costruzione di codeste Tavole, e basterà svolgere alcune osservazioni, dirette a facilitarne l'uso.

Sappiamo già che *ogni arco α è riducibile al primo quadrante* (n. 111), cioè si può sempre assegnare, con un calcolo rapidissimo, un altro arco α', compreso tra 0° e 90°, avente le stesse funzioni trigonometriche di α, all'infuori dei segni, i quali, noto α, si conoscono *a priori.* Perciò basta cono-

(¹) Esse son dette *formole di prostaferesi* da πρόσθεσις = addizione e ἀφαίρεσις = sottrazione.

scere le funzioni trigonometriche degli archi compresi tra 0° e 90°.

E questo intervallo si può ridurre ancora. Infatti, se si sono calcolate le funzioni trigonometriche degli archi da 0° a 45°, un qualsiasi arco α compreso tra 45° e 90° ha per complementare $90° - \alpha$ cioè un arco minore di 45°, e avremo (nn. 94, 108)

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos (90° - \alpha), \qquad \cos \alpha = \operatorname{sen} (90° - \alpha),$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90° - \alpha), \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} (90° - \alpha),$$

cosicchè in conclusione *basta conoscere le funzioni trigonometriche degli archi compresi fra* 0° e 45°.

Questi archi vengono considerati in ciascuna Tavola ad *un dato intervallo costante* δ, cioè di *grado* in *grado* o di *minuto* in *minuto* o di 10″ in 10″, e i valori delle rispettive funzioni trigonometriche sono registrate con una data approssimazione cioè con 3 o 4 o 5 o più cifre decimali.

Ricordando le formole per l'addizione e la moltiplicazione degli archi (nn. 119, 125) vediamo che, astrazion fatta dalla prolissità dei calcoli occorrenti, si potrà costruire una Tavola trigonometrica, quando si conoscano le funzioni trigonometriche dell'arco δ, fissato come intervallo costante, cioè, secondo i casi, di 1° o di 1′ o di 10″; ed anzi, per le relazioni intercedenti fra le varie funzioni trigonometriche (nn. 112, 113), basterà conoscere il sen 1° o il sen 1′ o il sen 10″ rispettivamente.

Ora *per archi piccoli come quelli indicati dianzi il seno è dato, con sufficiente approssimazione, dalla misura circolare dell'arco stesso.*

Per giustificare questa osservazione noi le daremo una forma che ci tornerà utile anche in altre questioni.

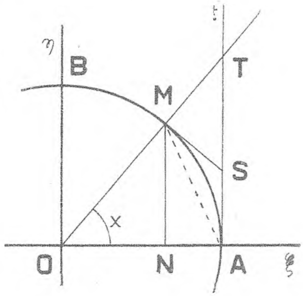
129. *Il rapporto* $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *del seno di un arco alla misura circolare dell'arco stesso tende ad* 1 *quando* x *tende allo zero.*

Qualunque sia x, purchè positivo e minore di 90°, ricaviamo dal circolo trigonometrico,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x. \tag{1}$$

Infatti, quanto alla prima disuguaglianza, basta notare che $\operatorname{sen} x = NM$ è minore dell'obliqua AM, la quale, come corda, è certamente minore della lunghezza x dell'arco $\widehat{AM}$ rettificato.

In secondo luogo, condotta da M la perpendicolare ad OM fino a segare la tangente AT in S, avremo, dal triangolo rettangolo SMT,



$$MS < ST$$

e quindi, aggiungendo AS ad ambo i membri,

$$AS + SM < AS + ST = \operatorname{tg} x.$$

Ma la lunghezza x dell'arco $\widehat{AM}$ rettificato è minore della spezzata a due lati circoscritta ASM, onde sarà certamente

$$x < \operatorname{tg} x.$$

Ciò posto, dalla (1), dividendo tutto pel numero positivo $\operatorname{sen} x$, deduciamo

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x};$$

e allora, poichè questi tre numeri positivi sono disposti in ordine crescente, i rispettivi reciproci risulteranno disposti in ordine decrescente, cioè sarà

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Se ora facciamo tendere x allo zero, $\cos x = ON$ tende, come risulta dalla figura, al raggio $OA = 1$, e di qui si conclude che il rapporto $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, dovendo restar sempre compreso tra 1 e $\cos x$ che si avvicina indefinitamente ad 1, dovrà esso stesso tendere all'unità.

Notiamo che allo stesso risultato si giunge anche quando x si faccia tendere allo zero per valori negativi, cosicchè possiamo scrivere in ogni caso

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

130. Messo così in evidenza che per archi abbastanza piccoli la differenza tra il seno e la misura circolare del rispettivo arco diventa piccolissima, così da risultare trascurabile, notiamo che si può anche valutare *a priori* quale sia al più codesta differenza; ma qui, rimandando per codeste considerazioni ed altre congeneri agli Esercizi, ci limitiamo a notare che p. es. sen 1′ supera la misura circolare di 1′ meno di

$$\frac{1}{10^{11}} = 0{,}000\,000\,000\,01 .$$

Se allora si vuol costruire una Tavola di minuto in minuto, si assume come valore di sen 1′ la misura circolare di 1′, cioè (n. 72)

$$\frac{\pi}{10\,800} = 0{,}000\,290\,888\,21 \ldots.$$

preso con un certo numero di decimali (non superiore ad 11) e si calcolano successivamente, usando le formole per l'addizione e la moltiplicazione degli archi (nn. 119, 123, 125) i valori delle funzioni trigonometriche di

$$2' \quad 3' \quad 4' \ldots.$$

e così via per tutti gli archi, multipli di 1′, fino a 45°.

I valori così ottenuti si registreranno nella Tavola col numero di decimali che si sarà prefissato.

Poichè si è partiti da valori approssimati e nei calcoli successivi gli errori si vanno accumulando, si controlleranno e si correggeranno i risultati, calcolando direttamente le funzioni di taluni archi, come p. es. quelle di

$$3^\circ \quad 6^\circ \quad 9^\circ \ldots 45^\circ,$$

che, come vedemmo (n. 124), si possono determinare direttamente, con quell'approssimazione che si vuole.

131. Le Tavole trigonometriche hanno una disposizione uniforme; e a chiarirla basterà il seguente saggio di una Tavola di *grado* in *grado,* con *tre* cifre decimali.

°	sen	cos	tg	cotg	°
0	0,000	1,000	0,000	∞	**90**
1	0,017	1,000	0,017	57,290	**89**
2	0,035	0,999	0,035	28,636	**88**
3	0,052	0,999	0,052	19,081	**87**
4	0,070	0,998	0,070	14,301	**86**
5	0,087	0,996	0,087	11,430	**85**
6	0,105	0,995	0,105	9,514	**84**
7	0,122	0,993	0,123	8,144	**83**
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**51**
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**50**
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**49**
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**48**
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**47**
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**46**
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**45**
°	cos	sen	cotg	tg	°

Si rileva da questo saggio che per gli archi compresi tra 0° e 45° l'ampiezza dell'arco è segnata nella prima colonna e il nome delle rispettive funzioni trigonometriche si legge in testa alle quattro colonne intermedie; per gli archi compresi fra 45° e 90°, l'ampiezza è registrata nell'ultima colonna a destra e il nome delle rispettive funzioni trigonometriche si legge al piede delle quattro colonne intermedie. Così si trova, per es.,

$$\text{sen}\,4^\circ = 0{,}070,\ \text{tg}\,7^\circ = 0{,}123,\ \text{sen}\,48^\circ = 0{,}743,\ \text{cotg}\,87^\circ = 0{,}052,\ \text{ecc.}$$

132. Pei calcoli numerici, nei quali si usano solitamente i Logaritmi, è comodo poter trovare, per ogni angolo dato, non già i valori delle funzioni trigonometriche, ma i rispettivi Logaritmi. Perciò sono state costruite (e son le più usate nella pratica) le cosidette *Tavole logaritmico-trigonometriche*, le quali forniscono per gli archi da 0° a 45° e, in senso inverso, da 45° a 90°, presi di *grado* in *grado* o di *minuto* in *minuto* o di 10″ in 10″, i Logaritmi delle rispettive funzioni trigonometriche con 4 o 5 o più decimali (in certe Tavole destinate a calcoli particolarmente precisi).

L'uso di queste Tavole è facilissimo per chi già conosce la disposizione delle Tavole logaritmiche e trigonometriche (nn. 44 e seg., n. prec.).

Solo bisogna avvertire che, a differenza dalle Tavole logaritmiche, in quelle logaritmico-trigonometriche sono registrate non soltanto le mantisse, ma anche le caratteristiche; e ciò è necessario, perchè dato un arco α non abbiamo nessun criterio che permetta di assegnar subito la caratteristica del Logaritmo di sen α o cos α ecc.

Notiamo poi che siccome il seno e il coseno di ogni arco da 0° a 90° e la tangente di ogni arco da 0° a 45° son tutti minori di 1, così i rispettivi Logaritmi risultano negativi (n. 31).

Ora in molte Tavole si evitano queste caratteristiche negative, registrando nelle Tavole *tutti* i Logaritmi delle funzioni trigonometriche (anche quelli positivi) con la caratteristica *alterata*, cioè aumentata di 10. Nei calcoli, ove si è per lo più condotti a somme algebriche di Logaritmi (cfr. nn. 55-62), si possono usare codesti Logaritmi a caratteristica alterata, purchè si abbia cura alla fine di togliere dal risultato un opportuno multiplo di 10; ma noi negli esempi numerici useremo sempre le caratteristiche inalterate, cosicchè, se l'alunno userà una Tavola a caratteristiche alterate, dovrà diminuire di 10, a mente, i Logaritmi di funzioni trigonometriche forniti dalla Tavola.

Per mostrare la disposizione di una Tavola logaritmico-trigonometrica e per spiegarne l'uso, diamo qui un saggio di Tavola di *minuto* in *minuto*, a 5 decimali (con caratteristiche alterate) (1).

(1) Questo saggio è tolto dalle *Tavole dei Logaritmi a cinque decimali* di A. Faifofer.

°	′	Log sen	D″	Log tg	D.C.	Log cotg	Log cos	D″	′	°
30	**0**	9,69 897	0,37	9,76 144	0,48	10,23 856	9,93 753	0,12	**0**	**60**
	1	9,69 919	0,37	9,76 173	0,48	10,23 827	9,93 746	0,13	59	
	2	9,69 941	0,37	9,76 202	0,48	10,23 798	9,93 738	0,12	58	
	3	9,69 963	0,35	9,76 231	0,50	10,23 769	9,93 731	0,12	57	
	4	9,69 984	0,37	9,76 261	0,48	10,23 739	9,93 724	0,12	56	
	5	9,70 006	0,37	9,76 290	0,48	10,23 710	9,93 717	0,13	55	
	6	9,70 028	0,37	9,76 319	0,48	10,23 681	9,93 709	0,12	54	
	7	9,70 050	0,37	9,76 348	0,48	10,23 652	9,93 702	0,12	53	
	8	9,70 072	0,35	9,76 377	0,48	10,23 623	9,93 695	0,13	52	
	9	9,70 093	0,37	9,76 406	0,48	10,23 594	9,93 687	0,12	51	
30	**10**	9,70 115	0,37	9,76 435	0,48	10,23 565	9,93 680	0,12	**50**	**59**
	11	9,70 137		9,76 464		10,23 536	9,93 673		49	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
30	**30**	9,70 547	0,35	9,77 015	0,48	10,22 985	9,93 532	0,12	**30**	**59**
	31	9,70 568	0,37	9,77 044	0,48	10,22 956	9,93 525	0,13	29	
	32	9,70 590	0,35	9,77 073	0,47	10,22 927	9,93 517	0,12	28	
	33	9,70 611	0,37	9,77 101	0,48	10,22 899	9,93 510	0,13	27	
	34	9,70 633	0,35	9,77 130	0,48	10,22 870	9,93 502	0,12	26	
	35	9,70 654	0,35	9,77 159	0,48	10,22 841	9,93 495	0,13	25	
	36	9,70 675	0,37	9,77 188	0,48	10,22 812	9,93 487	0,12	24	
	37	9,70 697	0,35	9,77 217	0,48	10,22 783	9 93 480	0,13	23	
	38	9,70 718	0,35	9,77 246	0,47	10,22 754	9,93 472	0,12	22	
	39	9,70 739	0,37	9,77 274	0,48	10,22 726	9,93 465	0,13	21	
30	**40**	9,70 761		9,77 303		10,22 697	9,93 457		**20**	**59**
°	′	Log cos	D″	Log cotg	D.C.″	Log tg	Log sen	D″	′	°

Anche qui, come nelle Tavole trigonometriche (n. 131), per gli archi da 0° a 45° l'ampiezza dell'arco è segnata nelle due prime colonne a sinistra (gradi e minuti) e il nome del Logaritmo di funzione si legge in testa alle colonne intermedie, mentre per gli archi da 45° a 90° l'ampiezza è segnata nelle ultime due colonne a destra (minuti e gradi) e il nome del Logaritmo di funzione si legge al piede delle colonne intermedie.

Così, p. es., si ricava senz'altro da codesto brano di Tavola

$$\text{Log sen } 30°\ 9' = \bar{1},70093, \quad \text{Log tg } 30°37' = \bar{1},77217$$
$$\text{Log cos } 59°25' = \bar{1},70654, \quad \text{Log tg } 59°52' = 0,23623\,.$$

133. Per trovare i Logaritmi delle funzioni trigonometriche di un arco compreso tra due archi consecutivi della Tavola, si fa la *interpolazione* in modo analogo a quello che si tiene per le Tavole logaritmiche ordinarie (n. 47), cioè si ammette che, per piccole variazioni dell'arco, vi sia proporzionalità tra le differenze degli archi e le differenze dei corrispondenti Logaritmi di una qualsiasi funzione trigonometrica (REGOLA DELLE PARTI PROPORZIONALI). Per facilitare il calcolo sono segnate, a fianco di ciascuna colonna di Logaritmi di una funzione, e in corrispondenza degli intervalli fra due Logaritmi consecutivi, le rispettive differenze per l'aumento di 1″ per l'arco (contrassegnate in alto e in basso della pagina con $D'' =$ Differenze per ″).

Pei Log tg e Log cotg la colonna delle differenze è la stessa (contrassegnata in alto con $D.C''. =$ Differenze comuni per ″); giacchè, essendo la cotangente la reciproca della tangente (n. 81), si ha per un arco α qualsiasi (n. 35)

$$\text{Log tg } \alpha = -\text{Log cotg } \alpha$$
$$\text{Log tg } (\alpha + 1'') = -\text{Log cotg } (\alpha + 1'')$$

e quindi

$$\text{Log tg } (\alpha + 1'') - \text{Log tg } \alpha = -[\text{Log cotg } (\alpha + 1'') - \text{Log cotg } \alpha].$$

E qui bisogna avvertire che, al crescere dell'arco da 0° a 90°, mentre il seno e la tangente crescono, il coseno e la cotangente decrescono, cosicchè per le due prime funzioni le differenze vanno prese positivamente, per le altre due negativamente.

Ciò premesso, se vogliamo, p. es. trovare Log tg 30°9′12″ eseguiremo il calcolo come segue:

$$\begin{array}{lr} \text{Per } 30°9' & \bar{1},76406 \\ \text{»} \quad 12'' \quad 0,48 \times 12 & \ldots.6 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log tg } 30°9'12'' = \bar{1},76412.$$

Similmente si calcola il Log cotg 59°27′36″:

$$\begin{array}{lr} \text{Per } 59°27' & \bar{1},77101 \\ \text{»} \quad 36'' \quad -0,47 \times 36 & - \quad 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log cotg } 59°27'36'' = \bar{1},77084.$$

134. Viceversa prefissato un valore per il Logaritmo di una data funzione trigonometrica, è altrettanto facile calcolare l'arco corrispondente.

Se p. es. si vuol trovare l'arco x tale che sia

$$\text{Log cos } x = \bar{1},93685,$$

si trova, cercando nella Tavola, che il Log cos, più vicino al dato e minore di esso, è $\bar{1},93680$, al quale corrispondono l'arco 30°10′ e la differenza (per 1″) 0,12. Siccome il Log cos x supera di 5 il Log cos trovato nella Tavola, basterà veder quante volte la differenza 0,12 sta in 5 per trovare quanti secondi debbonsi togliere a 30°10′ per ottenere x. Scriveremo:

$$\text{Log cos } x = \bar{1},93685:$$

$$\begin{array}{lcr} \text{Per } \bar{1},93680 & & 30°10' \\ \text{»} \qquad\quad 5 & -\dfrac{5}{0,12} & -42'' \\ \cline{3-3} & & x = 30°9'18''. \end{array}$$

Sappiamo bene che vi sono infiniti archi aventi il dato Log cos (n. 92); ma fra essi quello fornito dalla Tavola è l'arco positivo minimo.

135. Per le applicazioni numeriche che indicheremo nel seguito, si potranno adoprare le piccole Tavole logaritmico-trigonometriche a 4 decimali, che si trovano alla fine di questo volume (Tav. II-IV).

Per ragioni di spazio si è dovuto dare a codeste Tavole una disposizione un po' diversa da quella consueta, descritta al n. prec.; e, in particolare, non si son potute segnare le differenze, le quali dovranno essere calcolate a mente, caso per caso.

Le prime due tavole (Tav. II, III) forniscono i valori di Log sen x per tutti gli archi x di $2'$ in $2'$ da $0°$ a $1°$, di $5'$ in $5'$ da $1°$ a $60°$, di $10'$ in $10'$ da $60°$ a $86°$ e di $20'$ in $20'$ da $86°$ a $89°$. I valori di x sono segnati nelle colonnine a sinistra delle colonne dei Log sen x. Questi stessi Logaritmi letti a ritroso forniscono i valori di Log cos y (n. 132) per tutti gli archi y da $1°$ a $4°$ di $20'$ in $20'$, da $4°$ a $30°$ di $10'$ in $10'$, da $30°$ a $89°$ di $5'$ in $5'$ e da $89°$ a $90°$ di $2'$ in $2'$. I valori di y sono segnati nelle colonnine a destra delle singole colonne dei Log cos y.

La terza tavola (Tav. IV) dà direttamente i Log tg x per tutti gli archi x da $0°$ a $1°$ di $2'$ in $2'$ e da $1°$ a $45°$ di $5'$ in $5'$; e quindi, ove si leggano i Logaritmi a ritroso, la stessa Tavola fornisce i Log cotg y per tutti gli archi y da $45°$ a $89°$ di $5'$ in $5'$ e da $89°$ a $90°$ di $2'$ in $2'$. Codesti Logaritmi bastano perchè si possano determinare, con un calcolo eseguibile a mente, anche i Logaritmi delle cotangenti degli archi tra $0°$ e $45°$ e i Logaritmi delle tangenti degli archi tra $45°$ e $90°$. Infatti per un qualsiasi arco x la cotangente è la reciproca della tangente (n. 81), cioè

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

talchè si ha (n. 35)

$$(1) \qquad \operatorname{Log} \operatorname{cotg} x = -\operatorname{Log} \operatorname{tg} x.$$

Così, p. es. avremo

$$\operatorname{Log} \operatorname{cotg} 32°25' = -\operatorname{Log} \operatorname{tg} 32°25' = -(\bar{1},8028) = 0{,}1972$$
$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} 85°20' = -\operatorname{Log} \operatorname{cotg} 85°20' = -(\bar{2},9118) = 1{,}0992$$

e questi calcoli, ricordando la regola pratica del n. 54, si possono eseguire a mente, non appena rilevato il Logaritmo dalla Tavola.

Per la ricerca inversa dell'arco x che ha un dato Log sen x o Log tg x, ecc., si procederà come si è detto al n. prec. Solo si osservi che la nostra Tav. IV contiene solo i Log tg x (e i Log tg y) *negativi*, in quanto per x compreso tra $0°$ e $45°$, tg x non supera 1. Perciò se si vorrà determinare l'arco x che ha un dato Log tg *positivo*, p. es.

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} x = 1{,}2458,$$

si osserverà che, in base alla (1), deve essere

$$\text{Log cotg } x = -1{,}2458 = \bar{2}{,}7542\,;$$

questo Log cot negativo si trova nella nostra Tavola e dà senz' altro

$$x = 86^{\circ}45'.$$

IV.

TRIGONOMETRIA

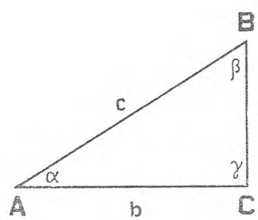
136. Come già accennammo al n. 70 la *Trigonometria* ha per iscopo di calcolare, con quell'approssimazione che si desidera tutti gli *elementi* (lati ed angoli) di un triangolo, quando se ne conoscano tanti quanti bastano a determinarlo. ***Risolvere il triangolo*** vuol dire appunto calcolarne gli elementi; e noi qui ci occuperemo di siffatto problema, cominciando dal caso dei triangoli rettangoli, pei quali la risoluzione si ottiene agevolmente in base alle prime proprietà delle funzioni trigonometriche.

Risoluzione dei triangoli rettangoli.

137. Dato un triangolo ABC, rettangolo in C, del quale si designino gli elementi nel solito modo indicato dalla figura, abbiamo fra i suoi elementi le tre equazioni (nn. 89, 98)

$$\alpha + \beta = 90° \tag{1}$$

$$a = c \operatorname{sen} \alpha, \quad b = c \cos \alpha. \tag{2}$$



E non può sussistere fra i lati e gli angoli del triangolo nessun' altra equazione *distinta* dalle (1) (2), cioè tale sia che non sia *conseguenza* di esse. Se infatti esistesse un' equazione siffatta, sostituendo in essa ad a, b, β le espressioni date dalle (1), (2), otterremmo un'equazione fra c ed α, che non dovrebbe essere un'identità, e perciò, quando si fosse fissato l'angolo acuto α, non potrebbe essere soddisfatta che da valori particolari dell'ipotenusa c. Ma ciò è assurdo, perchè sappiamo che, dato l'angolo acuto α, si può sempre costruire un triangolo rettangolo che abbia una *qualsiasi ipotenusa* c.

Di qui si conclude che ogni relazione fra gli elementi del triangolo deve essere conseguenza delle (1) (2).

Dalle (2), innalzandone ambo i membri al quadrato e poi sommandole si deduce (n. 112) la nota relazione (teorema di PITAGORA)

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{3}$$

E d'altra parte, tenendo conto di note proprietà degli angoli complementari (n. 94) e della tangente (n. 106), si deduce dalle (2)

$$a = c \cos \beta, \qquad b = c \operatorname{sen} \beta \tag{4}$$

$$a = b \operatorname{tg} \alpha, \qquad b = a \operatorname{tg} \beta. \tag{5}$$

138. Ciò premesso notiamo, che, quando di un triangolo è dato un angolo acuto, resta determinato anche l'altro come complementare del primo.

Conosciuti gli angoli, perchè il triangolo rettangolo sia determinato occorre conoscere ancora o l'ipotenusa o un cateto. Se invece non si conoscono gli angoli acuti, bisognerà siano dati o l'ipotenusa e un cateto oppure i due cateti.

Abbiamo così da considerare i seguenti quattro casi di risoluzione di un triangolo rettangolo:

I. Dati un angolo acuto e l'ipotenusa.
II. Dati un angolo acuto e un cateto.
III. Dati l'ipotenusa e un cateto.
IV. Dati i due cateti.

139. I caso. — *Dati del triangolo rettangolo l'ipotenusa* c *e l'angolo acuto* α, *calcolare gli altri elementi* β, a *e* b.

Abbiamo anzitutto

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

e in secondo luogo, in base alle

$$a = c \operatorname{sen} \alpha, \qquad b = c \cos \alpha,$$

che, passando ai Logaritmi, si scrivono

$$\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} c + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha, \qquad \operatorname{Log} b = \operatorname{Log} c + \operatorname{Log} \cos \alpha,$$

calcoleremo, col sussidio delle Tavole, i valori (approssimati) di a e b.

ESEMPIO.

$$c = 8{,}34 \qquad \alpha = 37°12'$$

$\beta = 52°48'$	$a = c \operatorname{sen} \alpha$	$b = c \cos \alpha$
	$\operatorname{Log} c = 0{,}9212$	$\operatorname{Log} c = 0{,}9212$
	$\operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha = \bar{1}{,}7815$	$\operatorname{Log} \cos \alpha = \bar{1}{,}901\,2$
	$\operatorname{Log} a = 0{,}7027$	$\operatorname{Log} b = 0{,}8224$
	$a = 5{,}04$	$b = 6{,}64$

140. Risolto il triangolo, è consigliabile di eseguire qualche verifica dei risultati ottenuti, applicando qualcuna delle relazioni fra gli elementi del triangolo, che non si sono usate nella risoluzione. Così nel caso precedente potrà servire per la verifica la formola

$$a = b \operatorname{tg} \alpha,$$

calcolandola sotto la forma logaritmica

$$\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} b + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha.$$

Questa formola dovrà risultare verificata entro i limiti della approssimazione permessa dalle Tavole che si sono usate (cfr. I; nn. 6, 7).

Notiamo che, avendo così calcolato $\operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{Log} \cos \alpha$, $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha$, si potrà eseguire una seconda verifica, notando che, avendosi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha},$$

deve risultare

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{Log} \cos \alpha.$$

Per l'esempio numerico indicato al n. prec. la prima verifica si eseguirà come segue:

$$a = b \operatorname{tg} \alpha$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} b &= 0{,}8224 \\ \operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha &= \bar{1}{,}8803 \\ \hline \operatorname{Log} a &= 0{,}7027 \end{aligned}$$

e la verifica riesce favorevole.

141. II caso. — *Dati di un triangolo rettangolo il cateto* a *e l'angolo acuto* α, *calcolare* β, b *e* c.

Si avrà

$$\beta = 90° - \alpha;$$

e dalla

$$a = b \operatorname{tg} \alpha,$$

che, passando ai Logaritmi, si può scrivere

$$\operatorname{Log} a = \operatorname{Log} b + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha,$$

si ricava

$$\text{Log}\, b = \text{Log}\, a - \text{Log tg}\, \alpha .$$

Infine dalla

$$a = c \,\text{sen}\, \alpha$$

ossia

$$\text{Log}\, a = \text{Log}\, c + \text{Log sen}\, \alpha$$

si deduce

$$\text{Log}\, c = \text{Log}\, a - \text{Log sen}\, \alpha .$$

Qui per la verifica può servire la formola

$$b = c \cos \alpha .$$

Nell'esempio numerico seguente, la verifica è eseguita nell'ultima colonna a destra.

ESEMPIO.

$$a = 73{,}4 \qquad \alpha = 29^\circ 35'$$

$\beta = 60^\circ 25'$	$b = a : \text{tg}\, \alpha$	$c = a : \text{sen}\, \alpha$	$b = c \cos \alpha$
	$\text{Log}\, a = 1{,}8657$	$\text{Log}\, a = 1{,}8657$	$\text{Log}\, c = 2{,}1722$
	$- \text{Log tg}\, \alpha = 0{,}2459$	$- \text{Log sen}\, \alpha = 0{,}3065$	$\text{Log} \cos \alpha = \bar{1}{,}9393$
	$\text{Log}\, b = 2{,}1116$	$\text{Log}\, c = 2{,}1722$	$\text{Log}\, b = 2{,}1115$
	$b = 129{,}3$	$c = 148{,}6$	

142. III. Caso. — *Dati di un triangolo rettangolo l'ipotenusa* c *e il cateto* a, *calcolare* α, β *e* b.

Qui naturalmente l'ipotenusa c dovrà essere maggiore del cateto a.

L'angolo α si trova in base alla

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{a}{c},$$

ossia, sotto forma logaritmica,

$$\text{Log sen}\, \alpha = \text{Log}\, a - \text{Log}\, c ;$$

e, calcolato α, se ne ricava il complementare

$$\beta = 90^\circ - \alpha .$$

Per trovare il cateto incognito b si ricorre alla

$$b = c \cos \alpha$$

sotto la forma logaritmica

$$\mathrm{Log}\, b = \mathrm{Log}\, c + \mathrm{Log} \cos \alpha .$$

Allo stesso scopo si può anche valersi della

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

la quale, in quanto si può scrivere (I; n. 59)

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)},$$

è calcolabile coi Logaritmi sotto la forma

$$\mathrm{Log}\, b = \frac{1}{2} [\mathrm{Log}\,(c + a) + \mathrm{Log}\,(c - a)].$$

Per la verifica qui può servire la formola

$$a = b \operatorname{tg} \alpha .$$

Esempio.

$$a = 4{,}43 \qquad c = 7{,}28$$

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$	$b = c \cos \alpha$	$a = b \operatorname{tg} \alpha$
$\mathrm{Log}\, a = 0{,}6464$	$\mathrm{Log}\, c = 0{,}8621$	$\mathrm{Log}\, b = 0{,}7617$
$- \mathrm{Log}\, c = \bar{1}{,}1379$	$\mathrm{Log} \cos \alpha = \bar{1}{,}8996$	$\mathrm{Log} \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}8847$
$\mathrm{Log} \operatorname{sen} \alpha = \bar{1}{,}7843$	$\mathrm{Log}\, b = 0{,}7617$	$\mathrm{Log}\, a = 0{,}6464$
$\alpha = 37°29'$	$b = 5{,}78$	
$\beta = 52°31'$		

143. Se il cateto dato a differisce di poco dall'ipotenusa, $\frac{a}{c}$ è prossimo ad 1, cosicchè α risulta molto vicino a 90°. Ma in tal caso la determinazione di α in base al valore $\frac{a}{c}$ del rispettivo seno, riesce poco precisa, perchè per gli angoli vicini a 90° a piccole differenze del seno corrispondono per gli archi differenze notevoli. Conviene allora tenere un'altra via e ricorrere alla formola (n. 126, form. IV')

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}},$$

in cui, essendo $0° < \beta < 90°$ e quindi anche $0° < \frac{1}{2} \beta < 90°$, si è preso senz'altro il segno $+$. Codesta formola, ove si ponga

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

diventa

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

e, scritta sotto la forma logaritmica,

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{Log}(c-a) - \operatorname{Log}(c+a)]$$

permette di calcolare $\frac{1}{2}\beta$ e quindi β ed α.

Poi si procederà come al n. prec.

144. IV caso. — *Dati i due cateti* a *e* b *di un triangolo rettangolo, calcolarne gli elementi* α, β *e* c.

L'angolo α si determina in base alla

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

che dà

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b;$$

e trovato α, si ricava β dalla

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Quanto alla ipotenusa c, essa è data da

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

ma questa formola, non calcolabile direttamente coi Logaritmi (1), riesce comoda solo se a e b hanno una sola cifra significativa. Negli altri casi si ricorre alla

$$a = c \operatorname{sen}\alpha,$$

la quale dà

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e quindi

$$\operatorname{Log} c = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha.$$

Per la verifica si potrà valersi della formola

$$b = c\cos\alpha.$$

(1) Indicheremo negli Esercizi (Eserc. 135) un artificio che permette di calcolare logaritmicamente codesta espressione.

ESEMPIO.

$$a = 325 \qquad b = 547$$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$	$c = a : \operatorname{sen}\alpha$	$b = c\cos\alpha$
$\operatorname{Log} a = 2{,}5119$	$\operatorname{Log} a = 2{,}5119$	$\operatorname{Log} c = 2{,}8036$
$-\operatorname{Log} b = \bar{3}{,}2620$	$-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2917$	$\operatorname{Log}\cos\alpha = \bar{1}{,}9344$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\alpha = \bar{1}{,}7739$	$\operatorname{Log} c = 2{,}8036$	$\operatorname{Log} 6 = 2{,}7380$
$\alpha = 30°43'$	$c = 636$	
$\beta = 59°17'$		

Relazioni fra gli elementi di un triangolo qualsiasi.

145. A facilitare la risoluzione dei triangoli quali si vogliano convien premettere alcune proprietà generali dei triangoli.

Dato un triangolo ABC qualsiasi, indicheremo ancora con α, β, γ le ampiezze degli angoli di vertice A, B, C (tutti presi positivamente) e con a, b, c le lunghezze dei lati rispettivamente opposti.

Fra gli angoli α, β, γ sussiste la nota relazione fondamentale

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

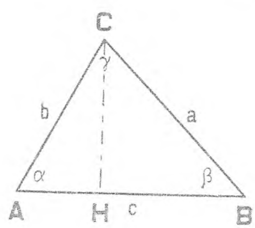
che permette di calcolare uno qualsiasi di essi, quando si conoscano gli altri due.

146. Altre relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo sono date dal seguente

Teorema dei seni. — *In un triangolo qualsiasi i* LATI *sono proporzionali ai* SENI DEGLI ANGOLI OPPOSTI, cioè

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Si conduca, infatti, nel triangolo un' altezza, p. es. la CH. Se il piede H cade in un punto interno al lato AB, si ricava dai triangoli rettangoli BHC, AHC (n. 89)



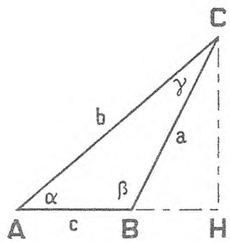
$$CH = a\operatorname{sen}\beta = b\operatorname{sen}\alpha$$

e quindi, dividendo ambo i membri dell'ultima uguaglianza per $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Se invece H cade fuori di AB, p. es. sul prolungamento di AB, si ricava similmente dai due triangoli rettangoli BHC, AHC (n. 89)

$$CH = a \operatorname{sen} \widehat{HBC} = b \operatorname{sen} \alpha.$$



Ma $\widehat{HBC}$ è il supplementare di β, talchè avremo (n. 86)

$$\operatorname{sen} \widehat{HBC} = \operatorname{sen} \beta$$

e quindi ancora

$$CH = a \operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \alpha$$

ossia, come pocanzi,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Analogamente abbassando l'altezza del vertice A si trova

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

Nota. — Il teorema così dimostrato e quello del n. prec. forniscono fra i sei elementi α, β, γ, a, b, c, di un triangolo qualsiasi le tre relazioni indipendenti o distinte

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \beta}, \qquad \dfrac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \gamma}. \end{cases}$$

Ora noi sappiamo dalla Geometria che per determinare un triangolo si possono assegnare ad arbitrio p. es. i due lati a, b e l'angolo compreso γ (minore di 180°).

Dati questi tre elementi, restano incogniti gli altri tre: α, β e c; e a determinarli basteranno le *tre* equazioni (1).

Di qui risulta che fra i sei elementi del triangolo non può sussistere nessun'altra relazione, che non sia *conseguenza delle* (1). Se invero vi fosse una quarta relazione *distinta* dalle (1), avremmo fra le tre incognite α, β e c un sistema di quattro equazioni indipendenti e il problema non sarebbe in generale risolvibile, mentre sappiamo che esiste *sempre* un triangolo avente i due lati a, b e l'angolo compreso γ, comunque siano stati prefissati.

Abbiamo dunque che *tutte le relazioni che sussistono fra i lati e gli angoli di un triangolo sono conseguenze delle* (1).

Qui per preparare la risoluzione dei triangoli nei vari casi possibili è opportuno ricavare esplicitamente alcune di codeste conseguenze.

147. Nel triangolo ABC, abbassata da C l'altezza CH (vedi fig. alla pag. 107) e supposto che H sia compreso fra A e B, abbiamo

$$c = AH + HB$$

dove AH e HB sono le *proiezioni* di b ed a sopra la retta di c (n. 99).

Ma dai triangoli rettangoli AHC, HBC, ricaviamo (n. 98)

$$AH = b \cos \alpha, \qquad HB = a \cos \beta,$$

cosicchè risulta

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Se invece H cade fuori del lato AB, p. es. dalla parte di B (vedi fig. alla pag. prec.), il lato c risulta uguale alla differenza delle due proiezioni AH e BH di b ed a sulla retta di c, cioè abbiamo

$$c = AH - BH.$$

Ora dal triangolo rettangolo AHC deduciamo ancora

$$AH = b \cos \alpha,$$

mentre, d'altra parte, dal triangolo rettangolo BHC risulta

$$BH = a \cos \widehat{HBC},$$

ossia, essendo $\widehat{HBC}$ il supplementare di β e quindi (n. 93) $\cos \widehat{HBC} = -\cos \beta$,

$$BH = -a \cos \beta.$$

Cosicchè, sostituendo nell'espressione di c ad AH, BH i valori dianzi ottenuti, troviamo ancora

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Analogamente, abbassando l'altezza da A o da B, si dimostrano le relazioni

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$
$$b = c \cos \alpha + a \cos \gamma.$$

Le tre equazioni così ottenute si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA DELLE PROIEZIONI. — *In un triangolo qualsiasi, ogni lato è uguale alla somma dei due prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuno dei due lati rimanenti pel coseno dell'angolo opposto all'altro.*

148. Per mettere in luce che il *teor. delle proiezioni* è un corollario di quello dei seni (n. 146) si può ricorrere alla seguente dimostrazione.

Dalle proporzioni che esprimono il teor. dei seni

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma},$$

moltiplicando ambo i termini del secondo rapporto per $\cos\gamma$ e ambo i termini del terzo per $\cos\beta$, si deduce

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\cos\gamma}=\frac{c\cos\beta}{\cos\beta\operatorname{sen}\gamma},$$

e quindi, componendo i due ultimi rapporti

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b\cos\gamma+c\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\beta\operatorname{sen}\gamma}$$

ossia (n. 119)

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b\cos\gamma+c\cos\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}. \tag{2}$$

Ma per la relazione

$$\alpha+(\beta+\gamma)=180^\circ$$

$\beta+\gamma$ è il supplementare di α, e quindi i rispettivi seni sono uguali (n. 86)

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\beta+\gamma).$$

Di qui si conclude che i due membri della (2), essendo uguali e avendo uguali i denominatori, hanno uguali anche i numeratori, cioè, veramente,

$$a=b.\cos\gamma+c\cos\beta.$$

Analogamente si dimostrano le equazioni

$$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$$
$$c=a\cos\beta+b\cos\alpha.$$

149. Riscriviamo le tre equazioni che esprimono il teor.

delle proiezioni:

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta \qquad a$$
$$b = c \cos\alpha + a \cos\gamma \qquad b$$
$$c = a \cos\beta + b \cos\alpha \qquad -c$$

e dopo averne moltiplicati i due membri per a, b e $-c$ rispettivamente, sommiamole membro a membro. Con facili riduzioni otteniamo

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos\gamma$$

e di qui risulta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma.$$

Analogamente si trova

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos\beta.$$

Queste tre equazioni si possono riassumere nel seguente enunciato:

TEOREMA DEL CARNOT. — *In un triangolo qualsiasi, il quadrato di ciascun lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio del prodotto di questi due lati pel coseno dell'angolo da essi compreso.*

Questo teorema non è altro che una generalizzazione del teor. di PITAGORA, al quale si riduce se l'angolo opposto al lato considerato è retto ed ha perciò il coseno nullo. Esso è già stato dimostrato in *Geometria elementare* [1] e ad ogni modo per la dimostrazione diretta rimandiamo agli ESERCIZI.

Risoluzione di un triangolo qualsiasi.

150. Ricordando i criteri di uguaglianza dei triangoli [2], vediamo che per determinare un triangolo basterà darne un lato e due angoli;

oppure due lati e l'angolo compreso;

oppure due lati e l'angolo opposto ad uno determinato di essi;

oppure i tre lati.

(1) Cfr. *Geometria*: nn. 365, 366.

(2) *Geometria*: nn. 79, 84, 90, Eserc. 17 a pag. 71.

Risolviamo il triangolo, considerando successivamente questi quattro casi.

151. I caso. — *Dati di un triangolo gli angoli* α *e* β *e il lato* a (opposto ad α), *calcolarne gli altri tre elementi* γ, b *e* c.

L'angolo γ è dato immediatamente dalla

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta);$$

e i lati b e c si ricavano dalle

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha},$$

scrivendole

$$b = \frac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

ossia, sotto forma logaritmica,

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} b &= \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta - \operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{Log} c &= \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Notiamo che, come si sa dalla Geometria, la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un triangolo, che abbia il lato a e gli angoli α e β, è data da (1)

$$\alpha + \beta < 180^\circ.$$

Per la verifica si può ricorrere alla formola

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

che dà

$$b = \frac{c \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Esempio.

$$\alpha = 43^\circ 25' \qquad \beta = 72^\circ 10' \qquad a = 58{,}5$$

$\gamma = 64^\circ 55'$	$b = \dfrac{a \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$	$c = \dfrac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$	$b = \dfrac{c \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$
	$\operatorname{Log} a = 1{,}7672$	$\operatorname{Log} a = 1{,}7672$	$\operatorname{Log} c = 1{,}8871$
	$\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta = \bar{1}{,}9786$	$\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma = \bar{1}{,}9570$	$\operatorname{Leg}\operatorname{sen}\beta = \bar{1}{,}9786$
	$-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}1629$	$-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}1629$	$-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma = 0{,}0430$
	$\operatorname{Log} b = 1{,}9087$	$\operatorname{Log} c = 1{,}8871$	$\operatorname{Log} b = 1{,}9087$
	$b = 81{,}04$	$c = 77{,}10$	

(1) *Geometria*: n. 265.

152. II caso. — *Dati di un triangolo qualsiasi i lati* a, b *e l'angolo compreso* γ, *calcolare gli altri elementi* α, β *e* c.

Se $a=b$, il triangolo cercato è isoscele e dovendo essere $\alpha=\beta$, la misura di questi angoli sarà data da

$$\alpha=\beta=\frac{180^\circ-\gamma}{2}.$$

Se a e b sono disuguali, possiamo supporre $a>b$ e allora sarà anche $\alpha>\beta$. Per calcolare questi due angoli si parte dalla equazione

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

dalla quale, dividendo e componendo, si deduce

$$\frac{a-b}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}=\frac{a+b}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta},$$

e quindi

$$(1)\qquad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}.$$

Ma si ha (n. 127)

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

e, dividendo membro a membro,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)};$$

cosicchè si deduce dalla (1)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

ossia, risolvendo rispetto a $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \tag{2}$$

Ora $\alpha + \beta$ è, per la

$$(\alpha + \beta) + \gamma = 180°,$$

il supplementare dell'angolo dato β, e allora, potendosi senz'altro calcolare l'angolo $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, ricaveremo dalla (2), scritta sotto forma logaritmica

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{Log}(a - b) - \operatorname{Log}(a + b) + \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

il valore dell'angolo (positivo) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Se q è quest'angolo e p è l'angolo noto $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, dalle

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p, \qquad \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q,$$

deduciamo finalmente, per somma e sottrazione,

$$\alpha = p + q, \qquad \beta = p - q.$$

Resta da calcolare il lato c, il quale, per il teorema del CARNOT (n. 149) è dato da

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma;$$

ma questa formola, non calcolabile coi Logaritmi, riesce comoda al calcolo diretto solo se a, b sono numeri semplici, p. es. di una sola cifra significativa.

In generale convien ricorrere alla

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha},$$

dalla quale si ricava

$$\operatorname{Log} c = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha.$$

Notiamo che, come risulta dalla Geometria, il problema ammette sempre una soluzione (ed una sola) comunque siansi presi i dati a, b, γ, purchè, beninteso, questo angolo sia minore di 180°.

Per la verifica si può ricorrere alla

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta};$$

e converrà anche verificare se la somma dei tre angoli α, β, γ risulti veramente di 180°.

Esempio.

$$\gamma = 52°30' \qquad a = 7{,}25 \qquad b = 5{,}35$$

$$\alpha + \beta = 127°30' \qquad a + b = 12{,}60 \qquad a - b = 1{,}90$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 63°45'$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(a - b) &= 0{,}2788 \\
-\operatorname{Log}(a + b) &= \bar{2}{,}8996 \\
\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 0{,}3070 \\
\hline
\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \bar{1}{,}4854 \\
\frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= 17°
\end{aligned}$$

$$\alpha = 80°45' \qquad \beta = 46°45'$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} a &= 0{,}8603 \\
\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma &= \bar{1}{,}8995 \\
-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha &= 0{,}0057 \\
\hline
\operatorname{Log} c &= 0{,}7655 \\
c &= 5{,}83
\end{aligned}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} b &= 0{,}7284 \\
\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha &= \bar{1}{,}9943 \\
-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta &= 0{,}1376 \\
\hline
\operatorname{Log} a &= 0{,}8603
\end{aligned}$$

153. III caso. — *Dati di un triangolo i lati* a, b *e l'angolo* α *opposto al primo, calcolare* β, γ *e* c.

L'angolo β si calcola in base alla

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

dalla quale risulta

$$\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta = \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha.$$

Calcolato β, si trova γ in base alla

$$(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$$

come supplementare di $\alpha+\beta$; e infine c risulta dalla

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

la quale dà

$$\operatorname{Log} c=\operatorname{Log} a+\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha.$$

Per la verifica può servire la

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

154. Prima di dare un esempio numerico, discutiamo la risoluzione indicata al n. prec.

Per trovare l'angolo β, abbiamo usato la formola

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

ossia

(2) $$\operatorname{sen}\beta=\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a}.$$

Ora se il secondo membro risulta maggiore di 1, cioè se è

$$b\operatorname{sen}\alpha>a$$

non vi è nessun angolo β che abbia codesto seno (n. 88) e il *problema non ammette soluzioni.*

Esaminiamo allora il caso in cui

$$b\operatorname{sen}\alpha\leq a.$$

Se è

$$b\operatorname{sen}\alpha=a$$

risulta dalla (2)

$$\operatorname{sen}\beta=1$$

e quindi $\beta=90°$; e il triangolo cercato è il triangolo rettangolo ben determinato che ha l'ipotenusa b e il cateto a (cfr. n. 142). *Il problema ammette dunque una soluzione ed una sola.*

Sia infine

$$b\operatorname{sen}\alpha<a.$$

In tal caso, essendo

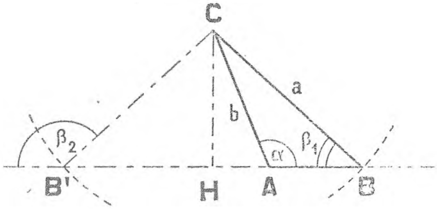
$$\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} < 1,$$

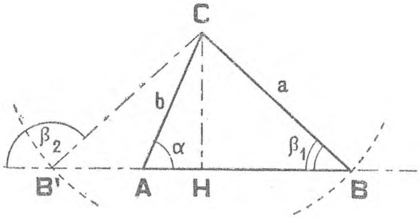
avremo, fra 0° e 180°, due angoli che hanno codesto seno, cioè un angolo acuto β_1 e (n. 87) il suo supplementare $\beta_2 = 180° - \beta_1$, il quale è ottuso.

Per vedere se e quando ciascuno di codesti due angoli dia luogo ad una effettiva soluzione del problema, distinguiamo tre casi, secondo che è $a > b$ o $a = b$ o $a < b$.

1) $a > b$. — Allora per un noto teorema di Geometria dovrà essere $\alpha > \beta$ e β non può essere che acuto, cosicchè all'angolo ottuso β_2 non può corrispondere nessuna soluzione del nostro problema.

Per mostrar poi che l'angolo acuto β_1 conduce effettivamente ad una soluzione del problema, ricorriamo alla costruzione geometrica del nostro triangolo, il quale deve avere i due lati dati a e b e il dato angolo α, opposto ad a. Perciò, disegnato un angolo $\widehat{A} = \alpha$ e preso su di un suo lato il segmento $AC = b$, dovremo segare l'altro lato dell'angolo $\widehat{A}$ colla





circonferenza di centro C e raggio a. Ora notiamo che questa circonferenza sega certamente il secondo lato di $\widehat{A}$, perchè la distanza HC di questo lato da C è data da

$$HC = b \operatorname{sen} \alpha$$

e abbiamo per ipotesi

$$b \operatorname{sen} \alpha < a.$$

Perciò la circonferenza dianzi descritta sega il secondo lato di $\widehat{A}$ in due punti B, B' e questi due punti, avendosi per ipotesi $a > b$, cadono da parti opposte di A.

Il punto B che si trova sul lato dell'angolo $\widehat{A} = \alpha$, dà luogo ad un triangolo ABC, il cui angolo in B (il quale è acuto perchè è $b < a$) ha il seno

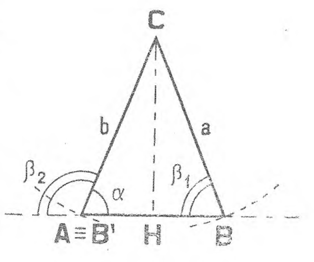
$$\frac{HC}{BC} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$$

ed è perciò uguale precisamente al nostro angolo β_1.

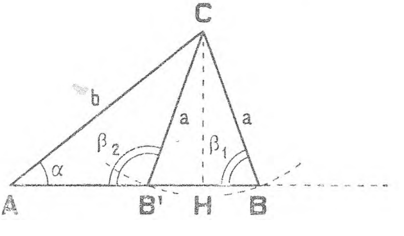
L'altro punto B' non dà manifestamente alcuna ulteriore soluzione del nostro problema.

2) $a = b$. — Il triangolo deve essere isoscele e avere uguali gli angoli alla base α e β, cosicchè questi angoli non possono essere che acuti. Di qui intanto si vede che se è $\alpha \geq 90°$ il problema non ammette nessuna soluzione.

Se poi α è acuto, l'angolo ottuso β_2 non può condurre ad alcuna soluzione (come si è visto nel caso 1); mentre all'angolo acuto β_1 corrisponde effettivamente un triangolo ABC, che soddisfa al problema; e ciò si rileva, come nel caso 1), dalla costruzione indicata nell'annessa figura.



3) $a < b$. — In tal caso dovrà essere $\alpha < \beta$, e perchè il problema sia possibile, *l'angolo dato α dovrà essere ancora acuto*. Ma per β non si ha più nessuna limitazione ed esso potrà essere uguale tanto all'angolo acuto β_1, quanto all'angolo ottuso $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Che ciascuno degli angoli β_1 e β_2 dia luogo effettivamente ad un triangolo soddisfacente al nostro problema risulta dalla solita costruzione, indicata nell'annessa figura.



I risultati della precedente discussione si possono riassumere nel seguente specchietto:

$$\begin{array}{ll}
b \operatorname{sen} \alpha > a \; \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{nessuna soluzione} \\
b \operatorname{sen} \alpha = a \; \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una} \quad » \\
b \operatorname{sen} \alpha < a \left\{ \begin{array}{l} a > b \; \ldots\ldots \; \text{una} \quad » \\ a = b \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq 90° \; . . \; \text{nessuna} \quad » \\ \alpha < 90° \; . . \; \text{una} \quad » \end{array} \right. \\ a < b \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq 90° \; . . \; \text{nessuna} \quad » \\ \alpha < 90° \; . . \; \text{due soluzioni} \end{array} \right. \end{array} \right. &
\end{array}$$

155. Indichiamo come si dispongono i calcoli, riferendoci ad un caso numerico in cui si hanno due soluzioni:

Esempio.

$$\alpha = 38°20' \qquad a = 5{,}42 \qquad b = 7{,}85$$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b \operatorname{sen}\alpha}{a}$ $\operatorname{Log} b = 0{,}8949$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = \bar{1}{,}7926$ $-\operatorname{Log} a = \bar{1}{,}2660$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta = \bar{1}{,}9535$ $\begin{cases} \beta_1 = 63°57' \\ \gamma_1 = 77°43' \end{cases}$	$c_1 = \dfrac{a \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\operatorname{Log} a = 0{,}7340$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma_1 = \bar{1}{,}9900$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2074$ $\operatorname{Log} c_1 = 0{,}9314$ $c_1 = 8{,}54$	$c_1 = \dfrac{b \operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\beta_1}$ $\operatorname{Log} b = 0{,}8949$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma_1 = \bar{1}{,}9900$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta_1 = 0{,}0465$ $\operatorname{Log} c_1 = 0{,}9314$
$\begin{cases} \beta_2 = 116°\ 3' \\ \gamma_2 = 25°37' \end{cases}$	$c_2 = \dfrac{a \operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\operatorname{Log} a = 0{,}7340$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma_2 = \bar{1}{,}6358$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha = 0{,}2074$ $\operatorname{Log} c_2 = 0{,}5772$ $c_2 = 3{,}78$	$c_2 = \dfrac{b \operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\beta_2}$ $\operatorname{Log} b = 0{,}8949$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma_2 = \bar{1}{,}6358$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta_2 = 0{,}0465$ $\operatorname{Log} c_2 = 0{,}5772$

156. IV caso. — *Dati di un triangolo i tre lati* a, b, c, *calcolarne gli angoli* α, β, γ.

L'angolo α si può calcolare in base alla equazione (n. 149)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha,$$

la quale dà

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{3}$$

Ma questa formola non è calcolabile coi Logaritmi ed è praticamente comoda solo se a, b, c sono numeri molto semplici, p. es. ad una sola cifra significativa. Negli altri casi è opportuno dedurne un'altra formola, adatta ai calcoli logaritmici. Si ricordi a tale scopo che al n. 126 si è trovato

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha;$$

sostituendo a $\cos\alpha$ nel secondo membro l'espressione data dalla (3), avremo successivamente

$$2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

o infine, dividendo ambo i membri per 2 ed estraendo la radice quadrata,

$$\text{(4)} \qquad \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}},$$

e in questa formola si considererà il solo radicale positivo, perchè $\frac{1}{2}\alpha$ non può essere che acuto, in quanto α, angolo nterno di un triangolo, è minore di 180°.

Similmente, partendo dalla (n. 126)

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$$

e sostituendo l'espressione di $\cos\alpha$ data dalla (3), ricaveremo successivamente

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

e quindi

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{sen}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Dividendo membro a membro questa equazione per la (4), ottenuta dianzi, perveniamo alla formola, che ci proponemmo di determinare:

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}}.$$

A questa espressione di $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$ si da una forma più facile da ricordare, indicando con p il semiperimetro del triangolo, cioè ponendo

$$a+b+c=2p.$$

Di qui risulta

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$
$$a-b+c=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=2p-2c=2(p-c);$$

cosicchè le (4) (5) (6) si possono scrivere

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

È appunto quest'ultima formola, che ci permette di calcolare $\frac{1}{2}\alpha$ e quindi α, sotto la forma logaritmica

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{Log}(p-b)+\operatorname{Log}(p-c)-\operatorname{Log}p-\operatorname{Log}(p-a)\Big].$$

Gli angoli β e γ si dedurranno dalle due analoghe formole

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

il cui calcolo logaritmico richiede soltanto la conoscenza degli stessi quattro Logaritmi, che occorrono per il calcolo di α.

Notiamo infine, che, come si ha dalla Geometria, la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un triangolo di lati a, b, c, si è che il maggiore dei tre lati dati sia minore della somma degli altri due. Sotto questa ipotesi, il nostro problema ammetterà sempre una soluzione ed una sola.

Per la verifica non c'è che da provare se la somma dei tre angoli α, β, γ, che si otterranno, quindi uguale a 180°.

ESEMPIO.

$$a = 0{,}735 \qquad b = 0{,}627 \qquad c = 0{,}538$$

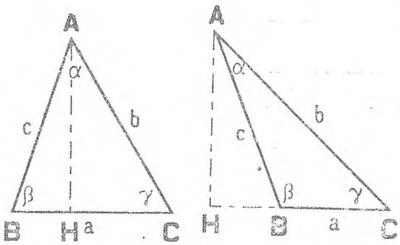
$$2p = 1{,}900 \qquad p = 0{,}950$$

$$p - a = 0{,}215 \qquad p - b = 0{,}323 \qquad p - c = 0{,}412$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$	
$\operatorname{Log}(p-b) = \bar{1},5092$	$\operatorname{Log}(p-c) = \bar{1},6149$	$\operatorname{Log}(p-a) = \bar{1},3324$	
$\operatorname{Log}(p-c) = \bar{1},6149$	$\operatorname{Log}(p-a) = \bar{1},3324$	$\operatorname{Log}(p-b) = \bar{1},5092$	$77°50'$
$-\operatorname{Log} p = 0{,}0223$	$-\operatorname{Log} p = 0{,}0223$	$-\operatorname{Log} p = 0{,}0223$	$56°30'$
$-\operatorname{Log}(p-a) = 0{,}6676$	$-\operatorname{Log}(p-b) = 0{,}4908$	$-\operatorname{Log}(p-c) = 0{,}3851$	$45°40'$
$2\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \bar{1},8140$	$2\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \bar{1},4604$	$2\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \bar{1},2490$	$180°$
$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \bar{1},9070$	$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \bar{1},7301$	$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \bar{1},6245$	
$\frac{1}{2}\alpha = 38°55'$	$\frac{1}{2}\beta = 28°15'$	$\frac{1}{2}\gamma = 22°50'$	
$\alpha = 77°50'$	$\beta = 56°30'$	$\gamma = 45°40'$	

Area del triangolo.

157. Se si vuol trovare l'area S di un triangolo ABC, di cui son dati i lati a, b e l'angolo compreso γ, si ricordi che codesta area è data dal semiprodotto della base a per la rispettiva altezza AH, la quale è data in ogni caso pel n. 89 (vedasi la fig.) da



$$AH = b \operatorname{sen} \gamma,$$

cosicchè avremo

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma;$$

cioè l'*area di un triangolo è data dal semiprodotto di due lati pel seno dell' angolo compreso.*

158. Di qui si deduce immediatamente che l'*area di un parallelogramma è uguale al prodotto di due lati consecutivi pel seno dell' angolo compreso.*

159. Se di un triangolo si conoscono gli angoli α e β, γ e un lato a, si ricordi (n. 146) che

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta},$$

onde risulta

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Sostituendo nella formola del n. 157 a b codesta espressione, si ottiene la nuova formola

$$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha},$$

la quale è, al pari di quella del n. 157, calcolabile coi Logaritmi.

160. Se infine il triangolo è dato per mezzo dei tre lati a, b, c, si osservi anzitutto che per un angolo γ qualsiasi, ponendo nella prima formola per la somma degli archi (n. 119) $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, $\beta = \frac{1}{2}\gamma$, si trova

$$\operatorname{sen} \gamma = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma;$$

e in secondo luogo si ricordi che pel triangolo ABC (n. 156) si ha

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Sarà dunque

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e, sostituendo questo valore di sen γ nella formola del n. 157, otterremo per l'area del triangolo la nuova espressione (formola di Erone)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

la quale è ancora adatta al calcolo logaritmico.

Applicazioni pratiche della Trigonometria: operazioni sul terreno.

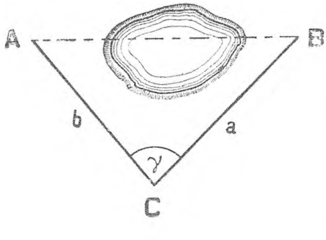
161. La Trigonometria deve la sua origine alle cosidette *operazioni sul terreno*, con le quali si compie il *rilievo* di una data regione, misurandone le varie distanze da luogo a luogo, i diversi dislivelli, le aree dei vari appezzamenti, ecc., in modo da poterne in particolare assegnare la rappresentazione su di una *carta topografica*.

Accenneremo rapidamente alla soluzione dei più semplice problemi, che si presentano in queste operazioni. Qui i dati di ogni problema si rilevano misurando direttamente sul terreno certe distanze e certi angoli; e a tale scopo si usano speciali strumenti: *livèllette, piombini, catene agrimensorie, fettuccia metrica, canne metriche, stadie, squadre agrimensorie, teodoliti.*

Non è qui il luogo di descrivere siffatti strumenti, che ognuno può vedere nelle vetrine dei venditori di strumenti ottici. Solo avvertiremo che sul terreno, mentre nella valutazione degli angoli è facile raggiungere una notevole approssimazione, la misura diretta delle distanze, costringendo a riportare più volte di seguito la canna metrica o la catena, dà luogo ad errori che si accumulano ed, ove non siansi usate scrupolosissime precauzioni, possono infirmare il risultato. Perciò si cerca di limitare per quanto è possibile la misura diretta delle distanze.

a) *Distanze di punti su di un terreno pianeggiante.*

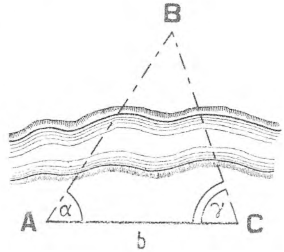
162. I. — Si voglia anzitutto *misurare sul terreno la distanza* AB *di due punti* A *e* B, *entrambi accessibili, ma separati da un ostacolo* (un laghetto, una casa, un'altura, ecc.) *che impedisca la misurazione diretta.*



Scelto un punto C, da cui A e B siano visibili, si misuri l'angolo γ, sotto cui è vista da C la distanza incognita AB, e si misurino direttamente le distanze $a = CB$, $b = AC$. Risolvendo, secondo il n. 152, il triangolo ABC, di cui son noti due lati e l'angolo compreso, si determina la distanza cercata AB.

163. II. — Problema fondamentale della triangolazione. — *Calcolare la distanza di un dato punto* A *da un punto* B, *visibile da* A *ma inaccessibile.*

In tali condizioni ci troviamo se il punto B si trova al di là di un corso d'acqua, che non si possa agevolmente passare.



Allora fissato sul terreno un altro punto C, si misurano direttamente la *base* $AC = b$ e gli angoli α e γ, sotto cui son visti da A e C rispettivamente le distanze CB, AB.

Conosciuti questi elementi, avremo dal triangolo ABC (nn. 146, 86) che

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha - \gamma)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)},$$

e quindi

$$AB = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)}.$$

Sia p. es.,

$$b = m. 58 \qquad \alpha = 60^\circ \qquad \gamma = 53^\circ;$$

avremo

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} AB &= \operatorname{Log} b + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{Log}\operatorname{sen}(\alpha + \gamma) = \\ &= 1{,}7634 + \bar{1}{,}9023 + 0{,}0360 = \\ &= 1{,}7017 \end{aligned}$$

e quindi

$$AB = m. 50{,}31.$$

164. Nota. — Vedremo più avanti quali importanti applicazioni riceva il metodo or ora indicato nelle misure delle grandi distanze terrestri o cosmiche.

Teoricamente codesto metodo si può applicare partendo da una qualsiasi base, purchè si conoscano i valori esatti degli angoli α e γ. Ma nelle applicazioni pratiche questi angoli si rilevano con osservazioni dirette, le quali danno sempre luogo a qualche errore. Ora si rileva dalla figura che

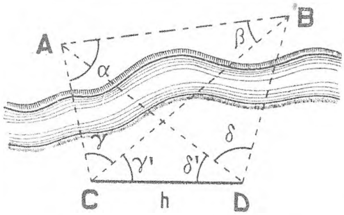
se la base AC è molto piccola rispetto alla distanza da calcolare, basta un piccolo errore nella valutazione di uno degli angoli α e γ per determinare un errore notevole nel calcolo della distanza AB.

Di qui si conclude che si dovrà porre nel rilievo dei due angoli α e γ, tanto maggior cura quanto più piccola è la base adottata AC, rispetto alla distanza da calcolare; ed anzi si comprende come una base troppo piccola possa condurre a risultati assolutamente inattendibili.

165. III. Problema dello Snellius. — *Calcolare su di un terreno pianeggiante la distanza di due punti* A, B, *visibili dal terreno su cui si opera, ma entrambi inaccessibili.*

Così accade, per esempio, se i due punti A e B sono entrambi al di là di un corso d'acqua.

Allora si fissa sul terreno una *base* CD, tale che tanto da C quanto da D i due punti A, B siano entrambi visibili; e si misurano direttamente la base $CD = h$ e gli angoli γ, γ', δ, δ', indicati in figura.



Così per ciascuno dei triangoli BCD, ACD si conoscono un lato e i due angoli adiacenti. Risolvendo i due triangoli (n. 163) si determineranno le distanze CB, CA; dopo di che, risolvendo il triangolo ABC, del quale sono noti oramai due lati e l'angolo compreso (n. 152) si calcolerà la distanza cercata AB.

166. Per mostrare come si eseguiscano effettivamente i calcoli cominciamo col dedurre dai triangoli BCD, ACD le distanze CB, CA, che indicheremo con a, b rispettivamente. Troviamo, come al n. 163,

$$a = \frac{h \operatorname{sen} (\delta + \delta')}{\operatorname{sen} (\gamma' + \delta + \delta')}$$

$$b = \frac{h \operatorname{sen} \delta'}{(\operatorname{sen} \gamma + \gamma' + \delta')};$$

e queste formole sono calcolabili coi Logaritmi:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} h + \operatorname{Log} \operatorname{sen} (\delta + \delta') - \operatorname{Log} \operatorname{sen} (\gamma' + \delta + \delta') \\ \operatorname{Log} b = \operatorname{Log} h + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \delta' - \operatorname{Log} \operatorname{sen} (\gamma + \gamma' + \delta'). \end{cases}$$

Per trovare la distanza cercata AC, non resta che risolvere il triangolo ABC, di cui sono noti oramai i lati a e b e l'angolo compreso γ; e a tale scopo, se indichiamo con α, β gli angoli in A e in B di codesto triangolo, occorre anzitutto servirsi, secondo il n. 152, della formola

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

E qui, poichè non ci interessano i valori di a e b, ma solo ci importa la lunghezza del terzo lato AB, possiamo ricorrere ad un artificio che permette di condurre a termine il calcolo con la sola conoscenza di Log a e Log b, senza risalire ai numeri a e b. Si assuma perciò come angolo ausiliare l'angolo θ tale che sia

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

e notiamo subito che esso è calcolabile in base alla

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Log}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a.$$

Cio posto, avendosi

$$b = a \operatorname{tg}\theta,$$

la (2) diventa

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta);$$

e, poichè $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ (n. 101), questa formola si può anche scrivere

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg}\theta}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

o infine, pel n. 123,

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(45^\circ - \theta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Questa formola, calcolabile coi Logaritmi, fornisce $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ e quindi essendo noto $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ anche gli α e β; dopo di che la distanza AB sarà data dalla

$$AB = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

ossia, in forma logaritmica,

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Log} AB = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha;$$

Nel caso in cui α risulti molto piccolo e quindi il suo errore di approssimazione dia luogo ad un errore notevole per sen α, si ricorrerà invece alla

$$AB = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$$

sotto la forma

$$\text{(5')} \qquad \operatorname{Log} AB = \operatorname{Log} b + \operatorname{Log}\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta.$$

In ultima analisi la determinazione di AB *è ridotta al calcolo successivo dalle formole* (1) (3) (4) *e* (5) *o* (5').

ESEMPIO.

$$h = m.\ 854$$

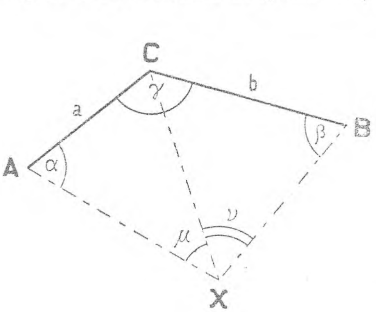
$$\gamma = 22^\circ \qquad \gamma' = 78^\circ \qquad \delta = 54^\circ \qquad \delta' = 29^\circ$$

$$\delta + \delta' = 83^\circ \qquad \gamma' + \delta + \delta' = 161^\circ \qquad \gamma + \gamma' + \delta' = 129^\circ$$

$a = \dfrac{h \operatorname{sen}(\delta + \delta')}{\operatorname{sen}(\gamma' + \delta + \delta')}$ $\operatorname{Log} h = 2{,}9315$ $\operatorname{Log} \operatorname{sen}(\delta + \delta') = \bar{1}{,}9968$ $-\operatorname{Log} \operatorname{sen}(\gamma' + \delta + \delta') = \bar{0}{,}4874$ $\operatorname{Log} a = 3{,}4157$	$b = \dfrac{h \operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen}(\gamma + \gamma' + \delta')}$ $\operatorname{Log} h = 2{,}9315$ $\operatorname{Log} \operatorname{sen} \delta' = \bar{1}{,}6856$ $\operatorname{Log} \operatorname{sen}(\gamma + \gamma' + \delta') = \bar{0}{,}1095$ $\operatorname{Log} b = 2{,}7266$	$\operatorname{tg} \theta = \dfrac{a}{b}$ $\operatorname{Log} b = 2{,}7266$ $-\operatorname{Log} a = \bar{2}{,}5843$ $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \theta = \bar{1}{,}3109$ $\theta = 11^\circ 34'$
$45^\circ - \theta = 33^\circ 26'$ $\alpha + \beta = 180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$ $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 79^\circ$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(45^\circ - \theta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ $\operatorname{Log} \operatorname{tg}(45^\circ - \theta) = \bar{1}{,}8197$ $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0{,}7113$ $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 0{,}5310$ $\operatorname{Log} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \bar{1}{,}4690$ $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 73^\circ 35'$ $\alpha = 152^\circ 335'$	$AB = \dfrac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$ $\operatorname{Log} a = 3{,}4157$ $\operatorname{Log} \operatorname{sen} \gamma = \bar{1}{,}5736$ $-\operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha = 0{,}3368$ $\operatorname{Log} AB = 3{,}3261$ $AB = m.\ 2119$

167. IV. PROBLEMA DEL POTHENOT. — *Dati su di un terreno piano tre punti* A, B, C, *si vuol trovare la posizione di un quarto punto* X, *dal quale le distanze* AC, BC *siano viste sotto angoli noti.*

È manifesta l'importanza di questo problema nel rilievo dei terreni; e d'altra parte esso si presenta in *Navigazione*, quando da una nave si voglia determinarne la posizione, essendo in vista di tre punti noti.



Qui i dati sono le distanze $a = AC$, $b = BC$, l'angolo $\gamma = \widehat{ACB}$ e infine gli angoli μ e ν sotto cui codeste due distanze sono viste dal punto X, che supponiamo, come si suole, interno all'angolo convesso (cioè minore di 180°) $\widehat{ACB}$. Il punto X è manifestamente l'intersezione dei due archi circolari, di corde AC, BC, capaci dell'angolo, rispettivamente, μ e ν.

Si vogliono determinare le distanze AX, BX, CX.

A tale scopo, considerati gli angoli ausiliari $\alpha = \widehat{XAC}$, $\beta = \widehat{CBX}$, si deduce anzitutto dai triangoli ACX, BCX

$$CX = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \mu}, \qquad CX = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \nu} \tag{1}$$

e quindi

$$\frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \mu} = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \nu},$$

ossia

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{b \operatorname{sen} \mu}{a \operatorname{sen} \nu}.$$

Preso come terzo angolo ausiliare l'angolo θ (compreso tra 0° e 180°) tale che sia

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b \operatorname{sen} \mu}{a \operatorname{sen} \nu}, \tag{2}$$

avremo

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \operatorname{tg} \theta;$$

e scrivendo questa uguaglianza sotto forma di proporzione

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1},$$

e, dividendo e componendo, otterremo l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \theta - 1}{\operatorname{tg} \theta + 1}. \tag{3}$$

Ma dal n. 127 abbiamo

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

cosicchè dividendo membro a membro vediamo che

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

ossia, dividendo numeratore e denominatore per $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ *supposto di-*

verso da zero,

$$\frac{\text{sen }\alpha - \text{sen }\beta}{\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta} = \frac{\text{tg }\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{tg }\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}. \tag{4}$$

D'altra parte il secondo membro della (3), ove si ricordi che $1 = \text{tg }45°$, si può scrivere (n. 123)

$$\frac{\text{tg }\theta - 1}{\text{tg }\theta + 1} = \frac{\text{tg }\theta - \text{tg }45°}{1 + \text{tg }\theta \text{ tg }45°} = \text{tg }(\theta - 45°);$$

cosicchè, tenendo conto della (4), possiamo scrivere la (3) sotto la forma

$$\frac{\text{tg }\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{tg }\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \text{tg }(\theta - 45°). \tag{5}$$

Ora $\alpha + \beta$ si può determinare in base agli elementi noti: invero la somma dei quattro angoli del quadrangolo $ABCX$ deve essere di 360°, onde avremo

$$\alpha + \beta + \gamma + \mu + \nu = 360°$$

ossia

$$\alpha + \beta = 360° - \gamma - \mu - \nu. \tag{6}$$

Determinato $\alpha + \beta$ si ricaverà dalla (5), calcolabile coi Logaritmi, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ e quindi α e β; e allora si determineranno AX e BX in base alle

$$AX = \frac{a \text{ sen }(\alpha + \mu)}{\text{sen }\mu}, \qquad BX = \frac{b \text{ sen }(\beta + \nu)}{\text{sen }\nu} \tag{7}$$

e la CX in base ad una delle (1).

In ultima analisi il calcolo si eseguirà ricorrendo successivamente alle equazioni (2) (5) (6) (7) ed (1).

168. Ricordiamo che al n. prec. per ottenere la (4) abbiamo dovuto supporre che $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ fosse diverso dallo zero, cioè che non fosse

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Ora è facile vedere che in tal caso *il problema è indeterminato.*

Infatti allora il quadrangolo $ACBX$, avendo due angoli opposti supplementari, è iscrittibile in una circonferenza (1) ed ogni punto di questa, che sia compreso entro l'angolo $\widehat{ACB}$, è tale che da esso si vedono le distanze AC, BC sotto gli angoli dati μ e ν.

(1) *Geometria*: n. 326.

ESEMPIO.

$$a = m.\,312 \qquad b = m.\,526$$

$$\gamma = 139°40' \qquad \mu = 43°30' \qquad \nu = 59°10'$$

$\alpha+\beta=360°-\gamma-\mu-\nu=$ $=117°40'$ $(\alpha+\beta)=58°50'$	$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b\operatorname{sen}\mu}{a\operatorname{sen}\nu}$ $\operatorname{Log} b = 2{,}7210$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\mu=\bar{1}{,}8378$ $-\operatorname{Log} a=\bar{3}{,}5058$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\nu=0{,}0662$ $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\theta=0{,}1308$ $\operatorname{Log}\operatorname{cotg}\theta=\bar{1}{,}8692$ $\theta=53°30'$ $\theta-45°=\ 8°30'$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\theta-45°)$ $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=0{,}2184$ $\operatorname{Log}\operatorname{tg}(\theta-45°)=\bar{1}{,}1745$ $\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\bar{1}{,}3929$ $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=13°53'$ $\alpha=72°43' \qquad \beta=44°57'$ $\alpha+\mu=116°13'=180°-63°47'$ $\beta+\nu=104°7'=180°-75°53'$

$AX=\dfrac{a\operatorname{sen}(\alpha+\mu)}{\operatorname{sen}\mu}$ $\operatorname{Log} a=2{,}4942$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}(\alpha+\mu)=\bar{1}{,}9528$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\mu=0{,}1622$ $\operatorname{Log} AX=2{,}6092$ $AX=m.\,406{,}6$	$BX=\dfrac{b\operatorname{sen}(\beta+\nu)}{\operatorname{sen}\nu}$ $\operatorname{Log} b=2{,}7210$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}(\beta+\nu)=\bar{1}{,}9867$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\nu=0{,}0662$ $\operatorname{Log} BX=2{,}7739$ $BX=m.\,594{,}1$	$CX=\dfrac{a\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\mu}$ $\operatorname{Log} a=2{,}4942$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\alpha=\bar{1}{,}9799$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\mu=0{,}1622$ $\operatorname{Log} CX=2{,}6363$ $CX=m.\,432{,}8$	$CX=\dfrac{b\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\nu}$ $\operatorname{Log} b=2{,}7210$ $\operatorname{Log}\operatorname{sen}\beta=\bar{1}{,}8491$ $-\operatorname{Log}\operatorname{sen}\nu=0{,}0662$ $\operatorname{Log} CX=2{,}6363$

b) Altezza di un punto.

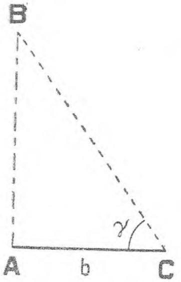
169. I. — Si voglia, p. es., misurare l'altezza AB di una torre. Se si può accedere al piede A della verticale BA, si misura direttamente sul terreno, a partire da A, una base $AC=b$ e si misura da C l'angolo γ sotto cui si vede, nel piano verticale ABC, l'altezza incognita AB. E qui distinguiamo due casi.

1) Se la base AC è orizzontale e quindi perpendicolare alla AB, si ha senz'altro (¹) pel n. 106

$$AB = b\operatorname{tg}\gamma.$$

(¹) Il primo a risolvere un problema di questo genere è stato TALETE (639-546 a. C.), il quale, nel suo soggiorno in Egitto, per misurare l'altezza delle Piramidi, si valse dell'osservazione che in quell'ora del giorno, in cui un bastone infisso verticalmente nel suolo (piano orizzontale) ha un'ombra di lunghezza uguale alla sua altezza, anche per ogni altro oggetto, in terreno piano ed orizzontale, sono uguali l'altezza e la lunghezza d'ombra. Così egli, misurando in quell'ora la lunghezza dell'ombra delle Piramidi, potè determinarne l'altezza.

Così, se è, p. es.



$$b = m.\,23, \qquad \gamma = 60°30'$$

avremo

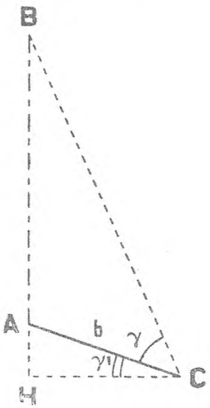
$$\text{Log}\, AB = \text{Log}\, b + \text{Log tg}\, \gamma =$$
$$= 1{,}3617 + 0{,}2474 = 1{,}6091$$

e quindi

$$AB = m.\,40{,}65.$$

2) Se invece la base AC non è orizzontale, bisogna misurare anche l'angolo γ' (*di elevazione* o *di depressione*) che essa forma colla orizzontale CH, giacente nel piano verticale ABC.

L'angolo $\widehat{BCH}$ sarà uguale a $\gamma + \gamma'$ se il punto C è più basso del piede A dell'altezza AB, sarà uguale a $\gamma - \gamma'$ se C è più alto di A.



In ogni caso l'angolo $\widehat{ABC}$ è il complementare di $\widehat{BCH}$, cosicchè avremo l'uguaglianza (n. 94)

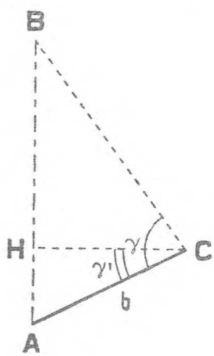
$$\text{sen}\, \widehat{ABC} = \cos(\gamma \pm \gamma'),$$

dove si dovrà prendere il segno superiore o l'inferiore secondo che C è più basso o più alto di A.

Ora pel teorema dei seni (n. 146) si ha, dal triangolo ABC,

$$\frac{AB}{\text{sen}\, \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\text{sen}\, \widehat{ABC}},$$

ossia, tenendo conto dei dati,



$$\frac{AB}{\text{sen}\, \gamma} = \frac{b}{\cos(\gamma \pm \gamma')};$$

e quindi risulta per AB l'espressione

$$AB = \frac{b\, \text{sen}\, \gamma}{\cos(\gamma \pm \gamma')},$$

calcolabile coi Logaritmi.

Supponiamo, p. es., che C sia più basso di A e si abbia

$$b = m.\,32, \qquad \gamma = 43°, \qquad \gamma' = 22°.$$

Sarà

$$\text{Log}\,AB = \text{Log}\,b + \text{Log sen}\,\gamma - \text{Log cos}\,(\gamma + \gamma') =$$
$$= 1{,}5051 + \bar{1}{,}8338 + 0{,}3741 = 1{,}7130$$

e quindi

$$AB = m.\,51{,}64.$$

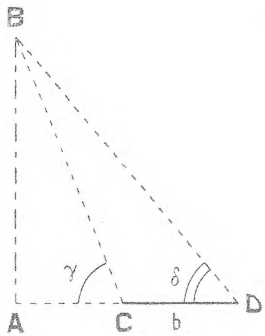
170. II. — Supponiamo in secondo luogo che *il piede* A *dell'altezza* AB *che si vuol determinare, pur essendo visibile dal terreno su cui si opera, non sia accessibile.*

In tal caso si misura direttamente sul terreno una *base* $CD = b$, *allineata con* A e si misurano gli angoli γ e δ sotto cui l'altezza AB è vista rispettivamente da C e D.

Ed anche qui distinguiamo i due casi analoghi a quelli considerati partitamente al n. prec.

1) Se la base CD è orizzontale, del triangolo BCD si conoscono il lato $CD = b$, l'angolo $\widehat{CDB} = \delta$ e l'angolo $\widehat{CBD} = \gamma - \delta$ (1), cosicchè sarà, pel teorema dei seni (n. 146),

$$BC = \frac{b \text{ sen } \delta}{\text{sen}\,(\gamma - \delta)}.$$



Ma dal triangolo rettangolo ABC ricaviamo (n. 89)

$$AB = BC \text{ sen } \gamma,$$

onde, tenendo conto della formola precedente, avremo per AB l'espressione

$$AB = \frac{b \text{ sen } \gamma \text{ sen } \delta}{\text{sen}\,(\gamma - \delta)},$$

calcolabile coi Logaritmi.

Così, p. es., se si ha

$$b = m.\,27, \qquad \gamma = 72°, \qquad \delta = 40°$$

si troverà

$$\text{Log}\,AB = \text{Log}\,b + \text{Log sen}\,\gamma + \text{Log sen}\,\delta - \text{Log sen}\,(\gamma - \delta) =$$
$$= 1{,}4314 + \bar{1}{,}9782 + \bar{1}{,}8081 + 0{,}2758 = 1{,}4935$$

(1) *Geometria*: n. 266. — *In un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni opposti.*

e quindi

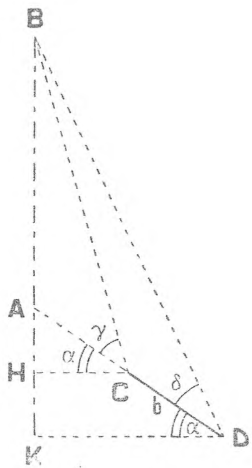
$$AB = m.\,31{,}15.$$

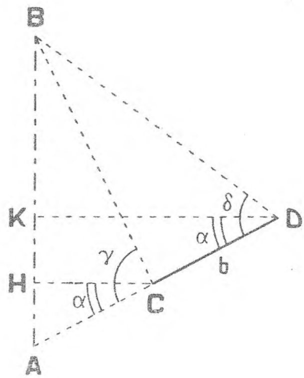
2) Se invece la base CD non è orizzontale, bisogna misurare anche l'angolo α (di *elevazione* o di *depressione*) che essa forma colle orizzontali CH, DK, passanti per C, D rispettivamente e giacenti nel piano verticale ABD. Dal triangolo BCD ricaviamo come pocanzi

$$BC = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(\gamma - \delta)}. \tag{1}$$

Qui poi si ha dal triangolo ACB, pel teorema dei seni,

$$AB = \frac{BC \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \widehat{BAC}}; \tag{2}$$





e l'angolo $\widehat{BAC}$ se la base è più bassa di A è il supplementare del complementare di α, vale a dire è dato da

$$180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha;$$

mentre invece se la base è più alta di A, l'angolo $\widehat{BAC}$ è il complementare di α, cioè

$$\widehat{BAC} = 90° - \alpha.$$

Ma si ha, pei nn. 94, 95,

$$\operatorname{sen}(90° \pm \alpha) = \cos \alpha,$$

cosicchè in entrambi i casi sarà per la (2)

$$AB = \frac{BC \operatorname{sen} \gamma}{\cos \alpha},$$

ossia tenendo conto della (1)

$$AB = \frac{b \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} (\gamma - \delta) \cos \alpha},$$

e questa formola permette di calcolare AB coi Logaritmi.

Sia, p. es.

$$b = m. 30, \qquad \alpha = 18^\circ, \qquad \gamma = 42^\circ, \qquad \delta = 30^\circ.$$

Avremo

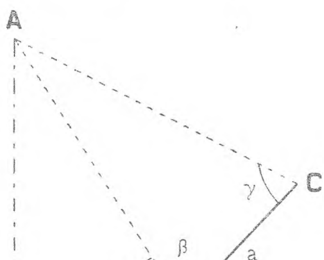
$$\begin{aligned}\operatorname{Log} AB &= \operatorname{Log} b + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \delta - \operatorname{Log} \operatorname{sen} (\gamma - \delta) - \operatorname{Log} \cos \alpha = \\ &= 1{,}4771 + \bar{1}{,}8255 + \bar{1}{,}6990 + 0{,}6821 + 0{,}1218 = 1{,}8055\end{aligned}$$

e quindi

$$AB = m. 63{,}90.$$

171. III. — Nel rilievo dei dislivelli di un terreno accidentato si presenta naturalmente il seguente problema: *Determinare l'altezza della vetta* A *di una collina, rispetto al piano orizzontale passante per un dato luogo* B, *dal quale* A *sia visibile.*

A tale scopo si fissa sul terreno, e partire da B una determinata base BC, generalmente non orizzontale, nè giacente nel piano verticale passante per AB. Misurata direttamente codesta base $BC = a$, si misurano altresì gli angoli β e γ, che essa forma colle visuali BA, CA rispettivamente, e l'angolo α (di *elevazione*) che la visuale BA forma colla orizzontale BH, giacente nel piano verticale che passa per A e B.



Dopo ciò, l'angolo $\widehat{BAC}$ risulta noto come supplementare di $\beta + \gamma$, e dal triangolo ABC si deduce, pel teorema dei seni (n. 146) e dal n. 86

$$AB = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}.$$

Inoltre dal triangolo rettangolo ABH si ricava (n. 89)

$$HA = AB \operatorname{sen} \alpha ;$$

cosicchè, sostituendo l'espressione di AB ottenuta dianzi, troviamo infine

$$HA = \frac{a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} .$$

Così se, p. es., si ha

$$a = m.\,35, \qquad \alpha = 52^\circ 10', \qquad \beta = 23^\circ, \qquad \gamma = 36^\circ 50',$$

troviamo

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} HA &= \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{Log} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{Log} \operatorname{sen}(\beta + \gamma) = \\ &= 1{,}5441 + \bar{1}{,}8975 + \bar{1}{,}7778 + 0{,}1632 = 1{,}2826 \end{aligned}$$

e quindi

$$HA = m.\,19{,}27.$$

172. Al metodo indicato dianzi si ricorre negli aerodromi per misurare l'altezza raggiunta da un aeroplano o da un dirigibile, puntando verso di esso due teodoliti, situati agli estremi di una base di lunghezza nota.

E similmente, nelle Stazioni aerologiche, ove si lanciano periodicamente *palloni-piloti* per studiare le correnti aeree, si determina la traiettoria di ogni pallone siffatto, inseguendolo con due teodoliti collocati agli estremi di una base nota, e registrando, p. es. di minuto e minuto, gli angoli che le due visuali formano colla base e col piano orizzontale. Dopo di che, col sussidio di tabelle numeriche o *abachi* preparati opportunamente per abbreviare i calcoli, si ricavano a tavolino tutti i dati numerici, che permettono di ricostruire la traiettoria descritta dal pallone-pilota (1).

(1) Veramente si ricorre all'inseguimento del pallone-pilota con due teodoliti solo per le determinazioni di controllo; mentre, nei lanci quotidiani, si attribuisce al pallone-pilota, in base a formole stabilite empiricamente, una velocità verticale costante, dipendente dalla forza ascensionale e dal peso (l'uno e l'altra misurate prima del lancio) e poi si insegue il palloncino con un solo teodolite, il quale permette di registrare, di minuto in minuto, i due angoli che oramai bastano per individuare la posizione di esso.

Cenno sui metodi trigonometrici di misura delle distanze terrestri e cosmiche.

173. Arco di meridiano. — I procedimenti indicati dianzi per le operazioni di rilievo di una zona circoscritta di terreno servono di base anche ai metodi di misura, che permettono di determinare le grandi distanze terrestri.

Indichiamo qui, in via sommaria, i principii su cui si fonda la *misurazione di un arco di meridiano terrestre*, compreso fra due luoghi A e C di uguale longitudine. E anzitutto ricordiamo che la longitudine di un dato luogo si determina mediante osservazioni astronomiche [1]; cosicchè, fissati i due punti A, B di uguale longitudine, si può ancora determinare punto per punto la direzione dell'arco di meridiano AB.

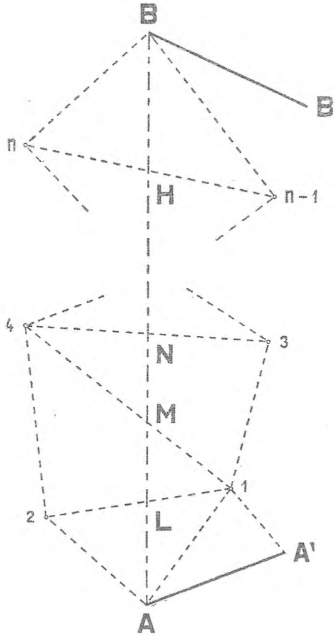
Ora la misura diretta di codesto arco sarebbe possibile soltanto se fra A e B la terra non offrisse nessuna di quelle accidentalità, che essa invece presenta in ogni sua regione alquanto estesa; e ad ogni modo sussisterebbero sempre e si accumulerebbero le cause di errore, che, come già notammo (n. 161) rendono sempre mal sicure le misure dirette delle distanze in ragione della loro grandezza.

Perciò si ricorre alle così dette *triangolazioni*, che furono applicate per la prima volta dallo Snellius (fra il 1615 e il 1617 in Olanda). Ecco in che consiste codesto metodo. Si fissano da una parte e dall'altra dell'arco di meridiano alcuni punti (*punti geodetici*) 1, 2, 3, 4, ..., ciascuno dei quali sia visibile dai più vicini. A partire da A si fissa, in terreno piano ed uniforme, una *base* AA' di alcuni chilometri di lunghezza e questa si misura direttamente, usando tutte quelle più diligenti e scrupolose cautele che la scienza e la esperienza suggeriscono a render minimi gli errori, che potrebbero infirmare tutti i risultati finali della misurazione.

Poi, puntando opportuni teodoliti da A e A' verso 1, si

[1] È noto che a tale scopo si tien conto della uniformità del moto apparente di rotazione della sfera celeste. Per trovare l'angolo compreso tra due meridiani si determina il tempo impiegato da una medesima stella fissa per passare dall'uno all'altro di essi e si stabilisce una proporzione, ricordando che la sfera celeste impiega 24 ore a compiere un intero giro, cioè un angolo di 360°.

misurano gli angoli $1\widehat{AA'}$, $\widehat{AA'}1$ e, risolvendo, in base ai tre elementi così misurati, il triangolo $AA'1$ (n. 163) si calcola la distanza $A1$.

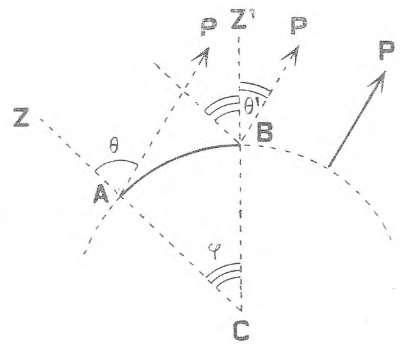


Si ripetono le misure e il calcolo per il triangolo $A12$; e così via di seguito, partendo ogni volta dai risultati ottenuti nella risoluzione del triangolo precedente. Siccome la direzione del meridiano AB è nota, si determinano così successivamente le lunghezze AL, LM, ..., HB, e la somma di queste fornisce la lunghezza cercata di AB.

Giunti in B, si fa una verifica: scelta a partire da B, in terreno adatto una *base di controllo* BB', si misura questa direttamente e, calcolandola poi in base alla triangolazione dianzi eseguita, si constata se i due risultati, entro i limiti di approssimazione raggiungibili, siano concordi.

174. Naturalmente le operazioni effettive non sono così semplici, come possono apparire dal cenno che qui ne abbiamo dato. Noi abbiamo parlato come se tutti i vertici della triangolazione fossero in uno stesso piano con A e B; mentre effettivamente, quando pure si astragga dalle accidentalità dal terreno e si consideri la forma che la Terra avrebbe se fosse tutta ricoperta dalle acque, questa è un ellissoide o come si suol dire volgarmente, una sfera schiacciata ai poli; cosicchè gli archi AL, LM, ... di meridiano vanno riguardati come curvi e, in una prima approssimazione, come archi circolari. Ma non è qui il caso di entrare in particolari sui metodi, che si seguono per tener conto di tutte le speciali difficoltà offerte dal problema e che formano oggetto di un intero ramo di scienza, vale a dire della *Geodesia*. A noi basta di avere accennato al principio informatore del procedimento e di rilevare come i Geodeti di tutti i paesi civili, associando e organizzando i loro sforzi in Commissioni dapprima nazionali, più tardi internazionali, abbiano esteso la *triangolazione geodetica* a tutta l'Europa e vadano oramai diffondendola anche nelle altre parti del globo. L'importanza dei lavori così compiuti e di quelli, che nello stesso senso si continuano tuttora senza tregua, appare in piena luce, quando si pensi che essi approdano alla determinazione, sempre più precisa, della forma e delle dimensioni del globo terrestre, al rilievo della sua superficie e alla sua rappresentazione cartografica.

Così, in particolare, misurato un arco di meridiano $\widehat{AB}$, si può ricavarne la lunghezza approssimata dell'intero meridiano e quindi del raggio terrestre, quando si conosca l'*ampiezza* dell'arco $\widehat{AB}$, ossia del corrispondente angolo $\widehat{ACB}$ al centro C dalla terra, il quale non è altro che la differenza delle due latitudini di A e B (se, come nella figura, A e B sono dalla stessa parte dell'equatore).



Ora questa differenza di latitudine si può determinare direttamente.

Si immagini infatti di osservare da A e B un medesimo punto della sfera celeste, p. es. la stella polare P. Le visuali AP e BP, per l'immensa distanza della stella polare si possono riguardare come parallele. Risulta allora dall'annessa figura che l'angolo cercato $\varphi = \widehat{ACB}$ non è altro, che la differenza dei due angoli θ, θ' che le dette visuali AP, BP formano colle rispettive verticali locali AZ, BZ' (*distanze zenitali del Polo in* A *e* B), cioè

$$\varphi = \theta - \theta';$$

onde indicando con l, L le lunghezze dell'arco AB e dell'intero meridiano, supposti in prima approssimazione circolari, avremo

$$l : L = \theta - \theta' : 360$$

e quindi

$$L = \frac{l}{\theta - \theta'} 360;$$

e il corrispondente raggio terrestre sarà dato da [1]

$$R = \frac{l}{\theta - \theta'} \frac{360}{2\pi}.$$

Ciò vale nell'ipotesi che la Terra sia sferica, mentre essa, non è affatto tale come risulta dalla classica osservazione del RICHER sull'accorciamento, dal Polo verso l'Equatore, del pendolo che batte il secondo (1672-1673).

Ora appunto le misure geodetiche di archi di meridiano hanno permesso di dimostrare che la Terra è precisamente schiacciata ai Poli e di determinare codesto schiacciamento, calcolando i valori approssimati dei raggi terrestri massimo (o equatoriale) e minimo (o polare).

Senza dilungarci ulteriormente su ciò, aggiungiamo che oggidì si attribuisce al *raggio terrestre medio* (cioè al raggio di una sfera di volume uguale a quello della Terra) la lunghezza di

m. 6 370 996.

175. PARALLASSE. — Le grandi distanze terrestri, di cui la Geodesia fornisce la misura, si possono assumere come *basi*

(1) Questo metodo risale ad ERATOSTENE (vissuto da circa il 276 al 194 av. l'E. V.), il quale si servì dell'arco di meridiano compreso fra Alessandria, dove egli dirigeva la Biblioteca, e Siene, nell'Egitto tropicale.

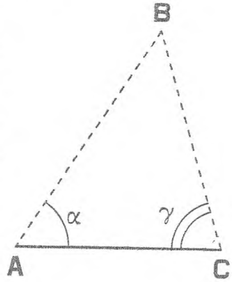
A quest'arco egli attribuì la lunghezza di 5000 stadi, non si sa bene in qual modo; ma probabilmente profittò delle misurazioni dei cosidetti *bematisti* o camminatori (da βῆμα = passo), che presso i Tolomei, come già prima a Babilonia e più tardi presso i Romani, rilevavano i terreni, misurandone coi passi le distanze.

Per misurare l'ampiezza dell'arco, ERATOSTENE prese le mosse dal fatto che a Siene, al mezzogiorno del Solstizio d'estate, il Sole era allo Zenit, di guisa che un bastone confitto verticalmente in terra non aveva più ombra e i pozzi erano illuminati completamente, fino al fondo. Allora ERATOSTENE misurò ad Alessandria proprio al mezzodì di quel giorno, la distanza (angolare) del Sole dallo Zenit e trovò che essa era di $\frac{1}{50}$ della intera circonferenza; onde concluse che il meridiano terrestre è di 50 volte 5000 stadi, ossia 250,000 stadi. Anzi per avere una cifra tonda egli avrebbe adottata la misura di 252,000 stadi (pari a 700 stadi per grado), la quale, tradotta in misure nostre, dà 39,600 km.

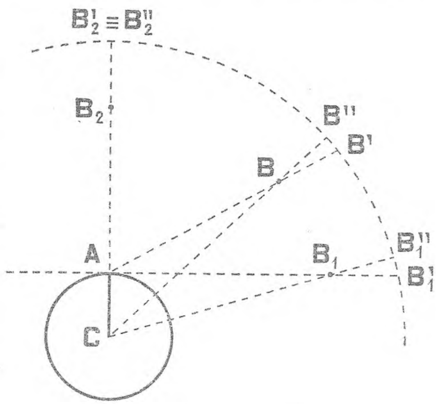
L'approssimazione di tale risultato è veramente singolare, di fronte al carattere grossolanamente approssimato dei dati numerici su cui si fonda il calcolo suindicato; cosicchè qualche storico ha pensato che ERATOSTENE, sia giunto al suo risultato tanto preciso con una minuta e diligente discussione delle misure dirette, della quale secondo l'uso del suo tempo, non avrebbe dato notizia nei suoi scritti; e che poi abbia arrotondato i dati in modo da far discendere il risultato ottenuto da un calcolo fittizio estremamente semplice.

per determinare, colla solita operazione fondamentale della triangolazione (n. 163; vedasi la unita fig.), le distanze della Terra da altri corpi celesti (non troppo lontani).

Il calcolo della distanza di un astro dalla Terra è intimamente collegato alla considerazione di quell' angolo che dicesi *parallasse* dell'astro. Sia C il centro della Terra (vedasi la seconda fig.), A il punto scelto su questa per le osservazioni e B un astro (che per semplicità immaginiamo ridotto al suo centro). Dicesi *parallasse* dell'astro B (rispetto al punto di osservazione A) l'angolo $\widehat{ABC}$, sotto cui sarebbe visto da B il raggio terrestre CA.



La ragione di codesto nome (derivante da παράλλαξις = cambiamento) è spiegata dalle osservazioni seguenti. Da A noi vediamo proiettarsi l'astro B sulla sfera celeste nel punto B', in cui questa è intersecata dalla visuale AB; cosicchè, se nello stesso istante l'astro B viene osservato da un punto della Terra diverso da A, esso appare proiettato sulla sfera celeste in un punto differente da B'. Per evitare l'ambiguità della posizione apparente dell'astro B a seconda del punto della Terra, da cui esso si osserva, si è convenuto di chiamare *luogo vero* di B sulla sfera celeste, il punto B'' di questa, nel quale esso sarebbe visto dal centro C della Terra, supposta sferica. E allora è manifesto come la parallasse di B rispetto ad A permetta di ridurre il luogo apparente B' di B, rispetto ad A, al suo luogo vero B''.



La parallasse di B rispetto ad A si annulla se B è in B_2, cioè allo Zenit di A, ed è massima se B è all'orizzonte di A, cioè si trova, in B_1, nel piano tangente alla Terra in A. In quest'ultimo caso essa dicesi più precisamente *parallasse orizzontale* e solitamente si intende riferirsi ad essa quando si parla senz'altro di parallasse di un astro.

176. Risulta immediatamente dalla precedente figura che, determinata la parallasse orizzontale p dell'astro B, si può subito calcolarne la distanza dal centro della Terra, prendendo come *base* il raggio terrestre. Infatti dal triangolo AB_1C, rettangolo in A risulta (n. 89)

$$CA = CB_1 \operatorname{sen} p$$

e quindi, ponendo $CA = r$, $CB_1 = d$,

$$d = \frac{r}{\operatorname{sen} p};$$

ed anzi, essendo p, in generale, piccolissimo per la grande distanza dell'astro, si può, senza errore sensibile, sostituire nella formola precedente a sen p l'angolo p (n. 129), cosicchè si ottiene

$$d = \frac{r}{p}.$$

177. Notiamo ancora che la parallasse orizzontale p del centro B di un astro permette di dedurre dal *diametro apparente* di quest'astro il rispettivo diametro vero.

Infatti misurato in radianti il diametro apparente δ dell'astro (cioè l'angolo sotto cui è visto dalla Terra il diametro dell'astro) il diametro vero $2R$ è dato dall'arco corrispondente all'angolo al centro δ sulla circonferenza che ha per raggio la distanza d di B dalla Terra; onde risulta, in base al n. 72 e al n. prec.,

$$2R = \delta d = \frac{\delta r}{\operatorname{sen} p}$$

ossia, senza errore sensibile

$$2R = \frac{\delta r}{p}.$$

Di qui discende

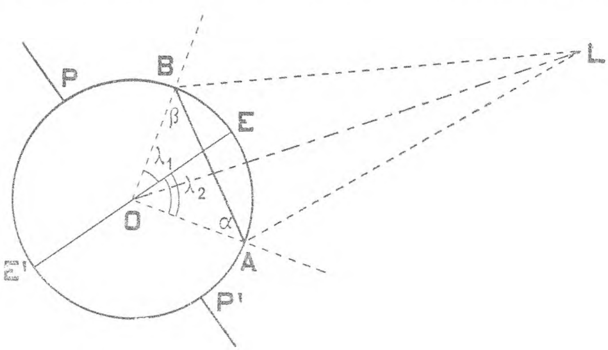
$$\frac{R}{r} = \frac{\delta}{2p};$$

cioè *il rapporto del raggio di un astro a quello della Terra è uguale al diametro apparente dell'astro diviso pel doppio della rispettiva parallasse orizzontale.*

178. Le osservazioni precedenti mettono in luce l'importanza fondamentale della determinazione della parallasse dei vari corpi celesti. Non farà quindi maraviglia il fatto che gli Astronomi abbiano rivolto, fino dall'antichità, i loro sforzi ad ideare dei metodi che permettano di determinare le parallassi degli astri.

179. Distanza dalla Terra alla Luna. — Il metodo classico per la misura di codesta distanza è quello, che fu applicato per la prima volta dal Lacaille, che nel 1751 compì le sue osservazioni al Capo di Buona Speranza, combinandole con quelle di un grande numero di astronomi sparsi nelle varie ragioni di Europa e sopratutto del Lalande, che si era, per tale scopo, recato a Berlino, che è pressochè sullo stesso meridiano del Capo.

Il principio del metodo è, in breve, il seguente. Si prendano come estremi della *base* due punti A, B della Terra, situati su di uno stesso meridiano e aventi le latitudini λ_1, λ_2 (che si misurano per mezzo di osservazioni astronomiche); e sia L la Luna, che supporremo nello stesso piano meridiano di A e B. Qui gli estremi della base non sono, naturalmente, fra loro visibili, ma la base AB si può



calcolare, risolvendo il triangolo AOB, del quale si conoscono i lati OA, OB, come raggi terrestri corrispondenti a latitudini note, e l'angolo $\widehat{AOB}$ che (nel caso della figura, in cui A e B sono da parti opposte dell'equatore EE') è dato dalla somma $\lambda_1 + \lambda_2$ delle latitudini di A e B.

In tal modo si determinano anche gli angoli $\alpha = \widehat{OAB}$, $\beta = \widehat{OBA}$.

D'altra parte si misurano direttamente gli angoli α', β', che le verticali OA, OB in A, B formano rispettivamente colle visuali AL, BL, e di qui si calcolano gli angoli alla base AB del triangolo ABL

$$\widehat{BAL} = 180^\circ - (\alpha + \alpha'), \qquad \widehat{ABL} = 180^\circ - (\beta + \beta');$$

cosicchè, conoscendo oramai del triangolo ABL il lato AB e gli angoli adiacenti, si possono calcolare le distanze BL, AL (n. 163), e quindi ancora la distanza del centro della Terra dalla Luna.

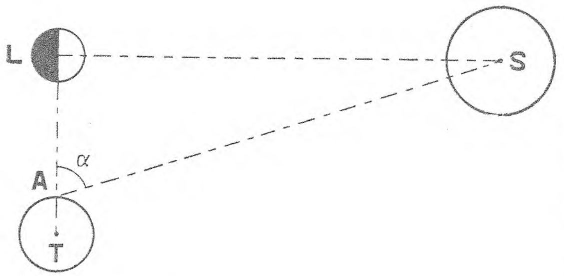
È con questo metodo che si è determinata la parallasse orizzontale della Luna, il cui valore medio si valuta oggi in 57′2″,2 e corrisponde alla distanza dalla Terra di 60,2745 raggi terrestri equatoriali, pari all'incirca a km. 384 100.

180. Distanza dalla Terra al Sole. — Codesta distanza è troppo grande anche rispetto alla massima base terrestre (il diametro equatoriale) perchè si possa applicare direttamente al calcolo di essa il metodo trigonometrico suindicato.

Si ricorre perciò ad altri metodi.

Teoricamente è molto semplice quello ideato da Aristarco di Samo (3° secolo av. C.) per calcolare il rapporto delle distanze del Sole e della Luna dalla Terra.

Se noi, da un punto A della Terra, osserviamo la Luna L in *fase dicotoma*, cioè in primo o ultimo quarto, ci troviamo nel piano del circolo massimo della Luna che separa l'emisfero in luce da quello in ombra, talchè la nostra visuale AL risulta perpendicolare alla congiungente LS dei centri del Sole e della Luna. Se, come accade spesso, anche il Sole è sopra l'orizzonte, noi possiamo determinare l'angolo acuto $\alpha = \widehat{LAS}$ del triangolo rettangolo LAS, e di qui, supposta nota la distanza AL, che qui serve di *base*, ricavare



$$AS = AL \operatorname{tg} \alpha \ (^1).$$

Ma questo metodo, pur tanto geniale, non condusse nella pratica se non a risultati illusori, sopra tutto perchè è impossibile, in causa delle irregolarità che le montagne lunari

(1) Aristarco determinò α assai grossolanamente in 87° (mentre esso è realmente di 89°51′): e perciò concluse che la distanza dalla Terra al Sole è da 18 a 20 volte la distanza dalla Terra al Sole, risultato esso stesso 20 volte inferiore al vero, ma che dimostrò come le dimensioni del Cosmo fossero ben maggiori di quelle, entro cui l'avevano fino allora circoscritto astronomi e geometri.

producono sulla linea di separazione fra la regione d'ombra e quella in luce, determinare esattamente l'istante in cui codesta linea si può ritenere diritta.

181. La determinazione della parallasse solare e, quindi, della distanza della Terra dal Sole fu possibile soltanto dopo che KEPLERO, con la grande scoperta delle leggi del moto dei pianeti, ebbe determinato la figura geometrica del sistema planetario.

È noto che la *prima legge* di KEPLERO stabilisce come ogni pianeta descriva, nella sua rivoluzione intorno al Sole, una ellisse, assai prossima ad una circonferenza, della quale il Sole occupa uno dei fuochi; e mentre la *seconda legge* caratterizza la velocità variabile con cui ciascun pianeta descrive la sua orbita, la *terza legge* afferma che i quadrati delle durate delle rivoluzioni di due pianeti quali si vogliano stanno fra loro nello stesso rapporto dei cubi delle loro distanze medie dal Sole (semiassi maggiori delle orbite rispettive).

Ora, in base alle osservazioni dirette dei moti apparenti dei pianeti, già compiute e registrate dagli Astronomi dell'antichità e poi mano mano completate e corrette nel corso dei secoli, le durate delle rivoluzioni dei singoli pianeti (riferite all'anno terrestre) sono conosciute; cosicchè le leggi di KEPLERO forniscono senz'altro i rapporti in cui stanno fra loro le distanze dei vari pianeti dal Sole. Restano incogniti soltanto i loro valori assoluti in unità terrestri, come accadrebbe se di una rete geodetica di triangoli si conoscessero tutti gli angoli, senza conoscere alcuno dei lati che ne fanno parte. In tal caso le effettive dimensioni della rete si potrebbero tutte assegnare, quando si riuscisse a determinare la lunghezza di *uno* di codesti lati, preso come *base*. Così nel caso del sistema planetario, dopo la scoperta delle leggi di KEPLERO, tutto si riduce a calcolare la distanza, a cui si trova dalla Terra, in un istante determinato, *uno* dei pianeti.

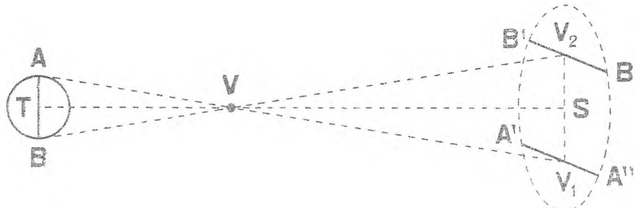
A tale scopo gli Astronomi, per poter profittare utilmente della basi terrestri note, si valsero naturalmente dei pianeti, che più si avvicinano alla Terra, cioè dei cosidetti *pianeti inferiori*, Mercurio e Venere, o del primo *pianeta superiore* che è Marte o di qualche asteroide, come p. es. Eros, che si approssima alla Terra fino a 0,15 della distanza dal Sole.

Così appunto ad una prima determinazione soddisfacente della parallasse equatoriale del Sole pervenne, nel 1672, il RICHER, determinando, in base ad osservazioni simultanee compiute a Parigi e a Caienna, con metodo analogo a quello del n. 179, la parallasse di Marte *in opposizione* (cioè nel momento in cui questo pianeta si trova allineato col Sole e colla Terra).

A risultati più esatti giunsero gli Astronomi, osservando, secondo un metodo ideato dallo HALLEY (1656-1724) i *passaggi di Venere* fra la Terra e il Sole [1].

Per dare un'idea del principio di codesto metodo, riduciamo il problema ad una forma schematica particolarmente semplice.

Supponiamo che due astronomi osservino il passaggio di Venere da due punti A, B situati agli estremi di uno stesso diametro terrestre, che sia perpendicolare al piano della eclittica, dal quale, durante il fenomeno, i centri T, V, S della Terra, di Venere e del Sole non si scostano sensibilmente.



Se rappresentiamo il disco apparente del Sole con un cerchio, l'osservatore A, durante il passaggio, vedrà proiettarsi Venere sul disco solare come una piccola macchia circolare oscura che descriverà una certa corda $A'A''$, mentre per l'altro osservatore B, Venere si proietterà in un punto che sul disco solare descriverà un'altra corda $B'B''$; e queste due corde si possono riguardare come entrambe parallele al piano della eclittica, talchè il segmento trasversale V_1V_2, perpendicolare a codesto piano, misura la distanza delle due corde.

I due triangoli isosceli ABV, V_1V_2V che così si ottengono sono fra loro simili, cosicchè avremo la proporzione

$$\frac{V_1V_2}{AB} = \frac{VS}{TV}. \tag{1}$$

Ora, conoscendosi le durate delle rivoluzioni della Terra e di Venere

[1] Disgraziatamente questo fenomeno si verifica a intervalli di tempo piuttosto lunghi, che, espressi in anni, sono di 8, 105, 8, 122, 8, 105, 8, ecc. L'ultimo passaggio di Venere si è avuto nel 1882 e il prossimo cadrà soltanto nel 2004.

intorno al Sole, si calcola, in base alla terza legge di KEPLERO, il rapporto delle rispettive distanze VS, TS dal Sole e si trova [1]

$$\frac{VS}{TS} = 0{,}72,$$

e quindi

$$\frac{TV}{TS} = 1 - \frac{VS}{TS} = 0{,}28,$$

e, infine, dividendo membro a membro

$$\frac{VS}{TV} = \frac{72}{28}.$$

Di qui e dalla (1) si ricava

$$\frac{V_1V_2}{AB} = 2{,}57.$$

Se allora si riesce a misurare l'angolo sotto cui dal centro T della Terra si vede la distanza $V_1 V_2$ basterà poi dividere questo angolo per 2,57 per trovare l'angolo sotto cui dal centro S del Sole si vede il diametro BA della Terra, cioè il doppio della parallasse orizzontale del Sole. Tutto dunque si riduce a trovare la grandezza (angolare) apparente di V_1V_2 rispetto al centro della Terra.

Ora in basé alle osservazioni dirette del passaggio di Venere da A e B si possono determinare le grandezze (angolari) apparenti delle due corde $A'A''$, $B'B''$, e d'altro canto si può pur misurare direttamente (in unità angolari) il diametro apparente del disco solare; cosicchè oramai si è ridotti al seguente problema, risolubile elementarmente: Dati il diametro di un cerchio e le misure di due sue corde parallele (di cui si sa se cadono da parti opposte o dalla stessa parte del centro) calcolarne la distanza.

Noi per semplicità abbiamo supposto che i due osservatori A e B fossero agli estremi di uno stesso diametro terrestre perpendicolare al

[1] Le durate delle rivoluzioni della Terra e di Venere sono date, in giorni siderali, da 365,3 e 224,7 rispettivamente; onde, per la terza legge di KEPLERO, dovremo avere

$$\left(\frac{VS}{TS}\right)^3 = \left(\frac{224{,}7}{365{,}3}\right)^2,$$

e quindi

$$3 \operatorname{Log} \frac{VS}{TS} = 2[\operatorname{Log} 224{,}7 - \operatorname{Log} 365{,}3] = \bar{1}{,}5778.$$

Di qui risulta

$$\operatorname{Log} \frac{VS}{TS} = \bar{1}{,}8593$$

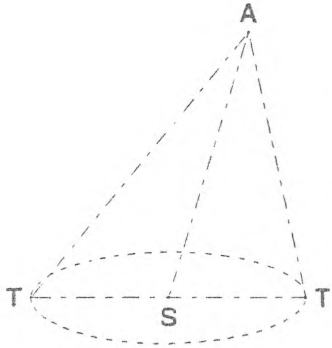
e infine

$$\frac{VS}{TS} = 0{,}7233.$$

piano della eclittica; ma lo stesso metodo, è applicabile, con opportune modificazioni, anche nel caso, in cui, come si suole nella pratica, i due punti di osservazione si fissino in qualsiasi altro modo nelle regioni della Terra da cui il fenomeno è visibile.

In base ai metodi dianzi accennati e ad altri ancora, sui quali non è qui il caso di indugiarci, oggidì si valuta la parallasse media del Sole in 8,80″ e, perciò, si attribuisce alla distanza media della Terra dal Sole (semiasse maggiore dell'orbita terrestre) il valore di 149,5 milioni di chilometri.

182. Distanza delle stelle fisse. La distanza media della Terra dal Sole fornisce, per la misura delle distanze cosmiche, una nuova *base*, non più terrestre, cioè il diametro (medio) dell'orbita della Terra, il quale è all'incirca 24 000 volte più grande della massima fra le basi terrestri (diametro equatoriale). Scelta codesta base, basterà, teoricamente, osservare una medesima stella fissa A, alle estremità T, T' di uno stesso diametro dell'orbita terrestre, cioè a distanza di 6 mesi e alla stessa ora, per determinare i due angoli adiacenti alla base e di qui ricavare, col solito metodo trigonometrico (n. 163), la distanza della stella fissa.



Dicesi *parallasse annua* di una stella A l'angolo sotto cui si vedrebbe il raggio medio dell'orbita terrestre dalla stella quando il raggio SA che la congiunge col Sole riuscisse perpendicolare al piano dell'eclittica.

Nota la parallasse annua di una stella fissa si può calcolarne la distanza dalla Terra e viceversa (n. 176).

Ora, fino dall'antichità, gli Astronomi si affaticarono per determinare le parallassi delle stelle più lucenti; ma la estrema piccolezza di queste parallassi fece sì che per lunghi secoli ogni tentativo per determinarle riuscisse infruttuoso.

Anche dopo che la scoperta del cannocchiale ebbe di tanto accresciuto la portata e la esattezza delle osservazioni, fino al principio del secolo XIX si potè concludere soltanto che le parallassi delle stelle, anche più vicine alla Terra, non potevano superare pochi secondi. Risultato negativo, ma pur tuttavia importante, come quello che assegnava un limite inferiore enorme alle distanze stellari [1].

Fu il Bessel che nel 1837-38, grazie alla perfezione oramai raggiunta nella costruzione degli strumenti e ad una precisione di osservazioni estremamente scrupolosa, pervenne a determinare la prima parallasse stellare, valutando quella della 61ma stella del Cigno in 0,35". Più tardi si recò a questa parallasse una correzione, ed oggidì le si attribuisce il valore di 0,328", il quale corrisponde ad una distanza di 10 anni di luce, dicendosi *anno di luce* lo spazio percorso in un anno dalla luce, la quale corre a 300 000 km. al secondo!

Dopo la scoperta del Bessel, altre parallassi stellari furono determinate, e taluni Astronomi, con mezzi di una precisione veramente straordinaria, pervennero a valutare parallasi di pochi millesimi di secondo, come, ad esempio, per la lucentissima Arturo (α di Boote), la cui parallasse ha il valore di 0,026", e corrisponde alla distanza di 125 anni di luce, pari in cifra tonda, allo spazio di

km. 1 200 000 000 000 000.

Tuttavia le stelle di cui è nota la parallasse ammontano ancora oggidì a poche diecine. Per le altre si sa solo che sono ancor più lontane; e, sulla base di misure fotometriche, ammettendo che la grandezza e la luminosità delle stelle siano dello stesso ordine di quelle del Sole, si arriva a indurre per le loro distanze dalla Terra valori di gran lunga maggiori.

---

(1) L'arco di 1" della circonferenza di raggio r ha la lunghezza

$$\frac{2\pi r}{360 \times 60 \times 60} = \frac{\pi r}{648000};$$

cosicchè se indichiamo con R il raggio medio dell'orbita terrestre, la distanza r di una stella avente la parallasse annua di 1" si ricaverà da

$$\frac{\pi r}{648000} = R,$$

e sarà quindi data, in cifra tonda, da

$$r = 200\,000\,R.$$

V.

DERIVATA E SUE INTERPRETAZIONI

183. Nel nostro corso abbiamo studiato successivamente varie specie di *funzioni*: funzioni razionali intere di 1° e 2° grado, qualche funzione razionale fratta, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni circolari.

In quest'ultima parte del nostro corso (Cap. V e VI) svolgeremo alcune considerazioni valide in generale per tutte le funzioni più semplici che si incontrano nelle applicazioni della Analisi non soltanto alla Geometria, ma altresì alla Meccanica, alla Fisica, ecc.

Derivata di $ax+b$ e ax^2.

184. Per orientarci in questo nuovo ordine di considerazioni, riferiamoci qui da principio a qualche funzione determinata fra le più semplici che già conosciamo.

Una funzione di 1° grado

(1) $$y = ax + b$$

ha per grafica la retta r, che ha l'ordinata all'origine b e passa pel punto di coordinate 1 ed a (I; nn. 200-203).

Vogliamo qui rilevare un significato molto importante del coefficiente a.

Fissato un valore particolare qualsiasi x_1 per la variabile x, il valore corrispondente y_1 della y è dato da

$$y_1 = ax_1 + b,$$

e il punto P della retta r, che ha l'ascissa $OP' = x_1$ ha l'ordinata $P'P = y_1$.

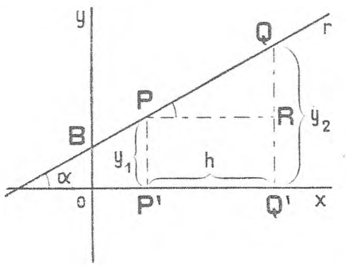
Se passiamo dal valore x_1 della x ad un altro valore x_2 qualsiasi, potremo sempre scrivere

$$x_2 = x_1 + h,$$

cioè indicare con h la differenza

$$x_2 - x_1,$$

la quale sarà positiva o negativa secondo che x_2 è maggiore o minore di x_1. In ogni caso noi diremo che h è la *variazione* o *l' incremento* che la variabile x subisce passando da x_1 a x_2.



Il valore y_2 che assume la funzione (1) per $x = x_1 + h$ sarà dato da

$$y_2 = a(x_1 + h) + b$$

e ci fornirà l'ordinata $Q'Q$ del punto Q della retta r, che ha l' ascissa $OQ' = x_1 + h$.

L' *incremento* che la funzione y subisce, corrispondentemente al passaggio della x da x_1 ad $x_1 + h$, sarà dato dalla differenza

$$y_2 - y_1 = a(x_1 + h) + b - ax_1 - b = ah;$$

e di qui si rileva intanto che se, come nella nostra figura, la retta r è saliente, ossia se è $a > 0$ (I; nn. 196, 197, 200), il segno di $y_2 - y_1$ è quello stesso di h, cioè si ha per la funzione un vero aumento per $h > 0$ (caso della figura) e una diminuzione per $h < 0$. Se invece la retta fosse discendente ($a < 0$) l' incremento della y avrebbe segno contrario a quello di h.

Ma ciò che a noi importa sopratutto notare si è che dividendo l' incremento della funzione pel corrispondente incremento della x si ottiene sempre

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = a.$$

Abbiamo cioè che: *Per una funzione di 1° grado*

$$y = ax + b$$

il rapporto dell' incremento della funzione al corrispondente incremento della variabile è sempre uguale al coefficiente a, *comunque siansi scelti il valore della* x, *da cui si parte, e l' incremento che vi si attribuisce.*

185. La considerazione di codesto valore fisso a del rapporto degli incrementi corrispondenti della y e della x è importante anche per il *significato geometrico* che per a risulta immediatamente dalla figura. Condotta da P la parallela all' asse x, fino a segare in R la retta $Q'Q$ avremo, per la uguaglianza dei lati opposti del rettangolo $P'Q'RP$,

$$y_1 = P'P = Q'R, \qquad h = P'Q' = PR,$$

onde, avendosi

$$y_2 = Q'Q, \quad y_2 - y_1 = Q'Q - Q'R = RQ \quad \text{ed } a = \frac{y_2 - y_1}{h},$$

risulta

$$a = \frac{RQ}{PR}.$$

Ma quest' ultimo rapporto dei due cateti del triangolo PRQ, rettangolo in R, è la tangente dell' angolo $\widehat{RPQ}$ (n. 105) ossia, per la uguaglianza degli angoli corrispondenti, dell' angolo α che la retta r forma colla direzione positiva dell' asse x. Concludiamo quindi che: *Per una funzione di 1° grado*

$$y = ax + b,$$

il rapporto fisso a *degli incrementi corrispondenti della funzione e della variabile è uguale alla tangente dell' angolo formato coll' asse* x (preso in senso positivo) *dalla retta che rappresenta la funzione.*

Si può dire che il fatto analitico che è fisso il rapporto a degli incrementi corrispondenti di una funzione di 1° grado e della variabile, ha il suo riscontro geometrico nel fatto che una retta ha in tutti i suoi punti la stessa *direzione fissa.*

Il teorema pocanzi dimostrato giustifica pienamente il nome di *coefficiente angolare*, che sin dall' anno scorso abbiamo dato al coefficiente a (I; n. 201); e d' or innanzi la dicitura « coefficiente angolare di una retta » sarà da noi usata come sinonimo di « tangente [trigonometrica] dell' angolo formato dalla retta coll' asse x (preso in senso positivo) ».

186. Ricordiamo che le funzioni di 1° grado e le rispettive grafiche rettilinee furono da noi incontrate, considerando il *moto uniforme* (I; nn. 207-209) pel quale lo spazio s è espresso come funzione del tempo t dalla formola

$$v = vt + s_0 - vt_0,$$

dove s_0 indica la posizione in cui trovavasi il mobile nell'istante t_0 e il numero v è la *velocità* del moto uniforme considerato. Abbiamo dunque che s è una funzione di primo grado di t, avente per coefficiente del termine di primo grado la velocità v e per termine noto $s_0 - vt_0$.

Risulta dai nn. prec. che gli incrementi corrispondenti dello spazio s e del tempo t hanno sempre, *a partire da un istante qualsiasi*, il rapporto fisso v; e che, nella rappresentazione grafica, la velocità v è rappresentata dalla tangente trigonometrica dell'angolo, che la retta che rappresenta il moto forma coll'asse dei tempi. Così, secondo che il moto è più o meno rapido, la rispettiva grafica rettilinea è più o meno inclinata sull'asse dei tempi (si ricordino gli Orari grafici: I; nn. 210-211).

187. Vediamo sino a qual punto le considerazioni dei nn. 184, 185 si possano applicare a funzioni che non siano di 1° grado e che perciò siano rappresentate da grafiche non rettilinee. Ci riferiremo qui anzitutto ad una funzione particolare ben nota, cioè alla funzione di 2° grado

$$y = ax^2,$$

la cui grafica è, come ben sappiamo, una parabola di vertice nell'origine, avente l'asse di simmetria y e volgente la concavità in alto o in basso secondo che è $a > 0$ o $a < 0$ (I; n. 215).

Fissato per la x un valore x_1, il corrispondente valore y_1 della y sarà

$$y_1 = ax_1^2.$$

Se passiamo ad un altro valore x_2 della x, dando ad x_1 l'incremento h,

$$x_2 = x_1 + h,$$

la y assumerà corrispondentemente il valore

$$y_2 = a(x_1 + h)^2$$

e quindi assumerà l'incremento

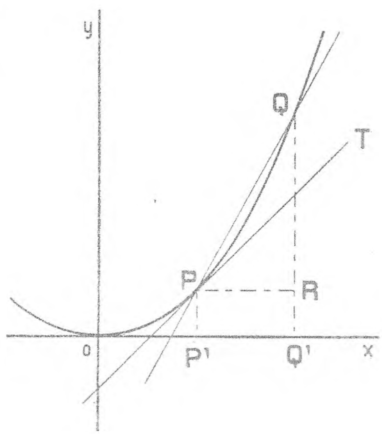
$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a(x_1 + h)^2 - ax_1^2 = \\ &= a(x_1^2 + 2hx_1 + h^2) - ax_1^2 = \\ &= 2ahx_1 + ah^2; \end{aligned}$$

cosicchè il rapporto dei due corrispondenti incrementi della funzione e della variabile sarà dato da

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = 2ax_1 + ah. \tag{2}$$

Qui si nota subito che questo rapporto degli incrementi, a differenza di quanto si è verificato nel caso delle funzioni di 1° grado, dipende dal valore x_1 della x da cui si è partiti e dall'incremento assegnatole h.

Tuttavia, come nel caso delle funzioni di 1° grado, si può riconoscere per il rapporto (2) un importante *significato geometrico*, ricorrendo alla parabola che rappresenta la nostra funzione. Sia P il punto della parabola che ha le coordinate $OP' = x_1$, $P'P = y_1$ e sia Q il punto della parabola stessa, cui si passa dando ad x_1 l'incremento h: le sue coordinate saranno



$$OQ' = x_1 + h, \qquad Q'Q = y_2.$$

Condotta da P la parallela all'asse x fino a segare in R la retta $Q'Q$, avremo, come al n. 185,

$$h = PR, \qquad y_2 - y_1 = RQ$$

e quindi (n. 105)

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{RQ}{PR} = \operatorname{tg} \widehat{RPQ}.$$

Si conclude così che *il valore*

$$2ax_1 + ah$$

del rapporto (2) *degli incrementi ci fornisce la tangente dell'angolo formato coll' asse* x (preso in senso positivo) *dalla retta che sega la parabola nei due punti* P *e* Q *di ascisse, rispettivamente,* x_1 *ed* $x_1 + h$, o in altre parole, *il coefficiente angolare della* SECANTE PQ.

Ora se teniamo fissa l'ascissa x_1, e quindi il punto P, e facciamo variare l'incremento h, il punto Q si muove sulla parabola e la *secante* PQ ruota, in un senso o nell'altro intorno a Q. Se in particolare diamo ad h valori decrescenti (in valore assoluto) e sempre più piccoli, come p. es.

$$1 \text{ cm.}, \qquad 1 \text{ mm.}, \qquad 1 \text{ dmm.}, \dots;$$

la secante PQ ruoterà intorno a P in un certo senso determinato; e quando h sia molto piccolo, il punto Q si avvicinerà tanto a P, da non potersi più distinguere sensibilmente da esso. Ma idealmente possiamo immaginare di proseguire indefinitamente nel rimpicciolire h, facendolo *tendere allo zero* (n. 15); e allora la nostra intuizione ci assicura che la secante PQ *tende* ad *assumere* la posizione di una determinata retta, passante per T e non avente comuni colla parabola altri punti all'infuori di questo, la quale dicesi *tangente* alla parabola in P (*punto di contatto*).

Ora è facile dedurre il coefficiente angolare m di codesta tangente PT da quello della secante PQ, che pocanzi abbiamo visto esser dato da

$$2ax_1 + ah.$$

Infatti, ricordando che la tangente PT è la retta cui tende la secante PQ, quando, tenuto fisso il punto P di ascissa x_1, si fa tendere h allo zero, vediamo che il coefficiente angolare m della tangente non è altro che il valore cui si avvicina indefinitamente il coefficiente angolare della secante o, come noi diciamo, il LIMITE, per h tendente allo zero di $2ax_1 + ah$

$$m = \lim_{h \to 0} (2ax_1 + ah).$$

Ma quando h tende allo zero, cioè varia diventando minore, in valore assoluto, di ogni numero positivo assegnabile, è manifesto che anche ah finisce col diventar minore, in valore assoluto, di qualsiasi numero positivo per quanto piccolo; cosicchè $2ax_1 + ah$ si avvicina indefinitamente a $2ax_1$ e finisce col differirne, in valore assoluto, per meno di un qualsiasi numero positivo assegnabile, cioè tende al limite $2ax_1$:

$$\lim_{h \to 0} (2ax_1 + ah) = 2ax_1 .$$

Concludiamo dunque che il coefficiente angolare della tangente PT alla parabola nel punto P di ascissa x_1 è dato da $2ax_1$.

Poichè tutto ciò, che abbiamo detto partendo dal valore x_1 di x, si può ripetere per ogni altro valore dell'ascissa, siamo condotti a considerare, accanto alla funzione di 2° grado

$$y = ax^2,$$

la funzione di 1° grado

$$2ax,$$

la quale, per ogni valore della variabile, fornisce il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto, che ha per ascissa il valore di x *considerato.*

Codesta funzione di 1° grado si dice la *derivata della data funzione di 2° grado* y *rispetto ad* x e si suol rappresentare con y':

$$y = ax^2, \qquad y' = 2ax.$$

188. A considerazioni analoghe a quelle del n. prec. si è condotti in modo naturale nello studio della *velocità del moto di caduta dei gravi* (I; n. 223).

In Fisica si è definita come *velocità* di un grave (concepito come un punto materiale), in un dato istante della sua caduta, la velocità del moto uniforme che esso assumerebbe, ove in quell'istante cessasse di agire la forza, che ne accelera la caduta.

L'esperienza, cui mette capo questa definizione, si attua con un noto dispositivo della macchina dell'ATWOOD, e conduce a dimostrare che la velocità v del grave cadente (a partire da uno stato iniziale di quiete) è proporzionale al tempo t della caduta e si ha precisamente

$$v = gt$$

con $g = 9{,}81\ldots$ (v e g essendo misurati in metri e t in secondi).

D'altra parte la stessa macchina dell'Atwood permette di misurare gli spazi s percorsi dal grave cadente e porge la formola

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Ora è interessante notare che alla stessa espressione della velocità ottenuta dianzi sperimentalmente, si arriva con un passaggio al limite che ci porgerà una nuova definizione di velocità, estendibile al caso più generale (in cui non sarebbe sempre possibile ripetere un'esperienza analoga alla precedente).

A tale scopo consideriamo il moto del grave cadente da un istante $t = t_1$ ad un istante successivo $t = t_1 + h$.

Durante questo intervallo di tempo il grave percorre lo spazio

$$\frac{1}{2} g(t_1 + h)^2 - \frac{1}{2} gt_1{}^2 = gt_1 h + \frac{1}{2} gh^2,$$

che sarebbe percorso nello stesso tempo da un punto che si muovesse uniformemente con la velocità (I; n. 207)

$$\frac{gt_1 h + \frac{1}{2} gh^2}{h} = gt_1 + \frac{1}{2} gh.$$

Codesta velocità (di un moto uniforme fittizio), ottenuta come rapporto dello spazio al tempo, si chiama *velocità media* del moto di caduta del grave nell'intervallo di tempo da t_1 a $t_1 + h$.

Se h è abbastanza piccolo, il moto si può riguardare in quell'intervallo di tempo come approssimativamente uniforme e quindi la velocità media differisce di poco dalla velocità v_1 nell'istante t_1. E in verità il

$$\lim_{h \to 0} \left(gt_1 + \frac{1}{2} gh\right)$$

è dato da gt_1, giacchè il secondo termine dell'espressione tende allo zero con h.

Ora la velocità media

$$\frac{\frac{1}{2}g(t_1+h)^2-\frac{1}{2}gt_1^2}{h}=gt+\frac{1}{2}gh$$

non è altro che il rapporto degli incrementi dello spazio e del tempo.

Quindi passando al limite: *la velocità di un grave cadente in un istante* t *si può definire come il valore che la derivata dello spazio rispetto al tempo assume nell' istante* t *considerato.*

Derivata di una funzione qualsiasi.

189. Le considerazioni del n. 187 si estendono ad una funzione qualsiasi y della x.

Qui per poterci esprimere in generale, invece di scrivere

$$y = \text{funzione data di } x,$$

scriveremo d'or innanzi

$$y=f(x)$$

e per qualsivoglia valore x_1 della x rappresenteremo con $f(x_1)$ quel valore che la nostra funzione assume pel valore x_1 della variabile.

Se poi vorremo considerare simultaneamente diverse funzioni della x, le designeremo con lettere diverse: $F(x)$, $\varphi(x)$, ecc.

Sia, dunque, data una funzione

$$y=f(x).$$

Se partendo da un dato valore x_1 della variabile diamo a questa un *incremento* h, la nostra funzione, corrispondentemente al passaggio della x da x_1 ad x_1+h, subirà l'*incremento*

$$f(x_1+h)-f(x_1).$$

Il rapporto

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

dei due corrispondenti incrementi della funzione e della variabile, si dirà il *rapporto incrementale* della nostra funzione, relativo al valore x_1 e all'incremento h della variabile.

Se, tenuto fisso x_1, facciamo tendere h allo zero, corrispondentemente varia anche il rapporto incrementale. Ora in generale per le funzioni che si incontrano nelle applicazioni, accade che, al tendere allo zero di h, il rapporto incrementale si avvicina indefinitamente ad un certo numero determinato y'_1; cioè esiste un numero y'_1 tale che, prefissato un numero ε positivo, per quanto piccolo, si può sempre determinare un altro numero positivo abbastanza piccolo τ siffatto, che quando h è minore in valore assoluto di τ, la differenza

$$y_1' - \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

risulta, in valore assoluto, minore di ε. Ciò si esprime nel solito modo, dicendo che *y_1' è il* LIMITE *del rapporto incrementale, per* h *tendente allo zero,* e si scrive

$$y_1' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Qui siamo partiti da un valore determinato x_1 della variabile. Ma in generale le stesse considerazioni si possono ripetere, partendo da un altro qualsiasi dei valori di x, per cui è definita la nostra funzione; cosicchè corrispondentemente ad ogni valore di x resta determinato un certo numero y', limite, per h tendente allo zero, del rapporto incrementale di $f(x)$ relativo al valore considerato della variabile.

Vien così definita, accanto alla $f(x)$, una nuova funzione, la quale dicesi DERIVATA *della* $\mathrm{y} = \mathrm{f}(x)$ *rispetto alla* x e si designa con

$$y' = f'(x).$$

Si ha dunque per definizione

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

190. Si ricordi che per definire il valore della derivata di una data funzione $f(x)$ per un prefissato valore x_1 della variabile, abbiamo dovuto AMMETTERE *che il rapporto incrementale*

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h},$$

al tendere di h *allo zero, tendesse ad un limite determinato.*

Ma può accadere che per certi valori speciali di x, il rapporto incrementale non ammetta, per h tendente allo zero, un limite determinato. In tal caso per siffatti valori della variabile la definizione della derivata non ha più senso e si suol dire che *per quei valori di* x *la funzione data non ammette derivata.*

E qui aggiungiamo che si possono definire matematicamente anche delle *funzioni che non ammettono derivata per nessun valore della variabile.*

Ma ciò non succede per le funzioni più semplici che si incontrano nelle applicazioni e in particolare, per quelle che abbiamo studiato nel nostro corso (funzioni razionali, esponenziali, logaritmiche, circolari), come sarà mostrato, pei casi più elementari, ai nn. 200-206.

Per codeste funzioni più semplici può accadere al più che la derivata manchi per qualche valore speciale della variabile (vedasi p. es. il n. 205); e noi nel seguito intenderemo di riferirci appunto a funzioni che ammettano sempre derivata, salvo, al più, per valori particolari della variabile rispettiva.

191. Ricordando ciò che si è detto al n. 184, vediamo che la derivata di una funzione di 1° grado

$$y=ax+b$$

è data da

$$y'=a,$$

cioè si riduce alla *costante* a.

E notiamo che questa derivata non dipende dal termine noto b, cosicchè le funzioni di 1° grado che diversificano soltanto pel termine noto, come p. es.

$$y=ax, \qquad y=ax+b, \qquad y=ax+b_1,\ldots$$

hanno tutte la medesima derivata (costante) a.

Significato della derivata.

Il concetto di derivata deve la sua grande importanza alle molteplici interpretazioni di cui esso è suscettibile in moltissimi problemi di Geometria, di Meccanica, di Fisica, ecc., e noi ne abbiamo già dato due notevoli esempi, indicando (n. 187) il significato geometrico (coefficiente angolare della tangente alla parabola) della derivata dalla funzione

$$y = ax^2$$

e (n. 188) il significato meccanico della derivata (velocità di caduta dei gravi) della funzione

$$s = \frac{1}{2} gt^2 .$$

In linea storica, i problemi della tangente ad una curva, della velocità di un punto in moto e della derivata di una funzione si sono presentati come varii aspetti di un medesimo problema, dal quale ha tratto origine, nel suo sviluppo storico, tutto il *Calcolo differenziale.*

Il concetto di *tangente*, come retta avente comuni con una curva due punti riuniti in uno solo, risale al DESCARTES (*Géométrie*, 1637); mentre il ROBERVAL (1602-1675) e il TORRICELLI (1608-1647) considerarono la tangente ad una curva come *velocità* d'un punto mobile che la descrive.

Simultaneamente il FERMAT (1601-1655), prendendo le mosse da un'osservazione dovuta a PAPPO (III sec. dell'E. V.) uno dei primi commentatori dell'opera di EUCLIDE, ideò per la ricerca dei *massimi* e dei *minimi* delle funzioni un metodo, che in sostanza implicava già il concetto di *derivata* (cfr. i nn. 207-212).

Alla invenzione del FERMAT va riattaccato il *metodo delle tangenti* del BARROW (1674), che, alla sua volta, mise capo alla costituzione del Calcolo differenziale, dovuta all'opera del NEWTON (1642-1727) e del LEIBNIZ (1646-1716).

192. Ci proponiamo qui di indicare, generalizzando le considerazioni del n. 187, il *significato geometrico* della derivata di una qualsiasi funzione

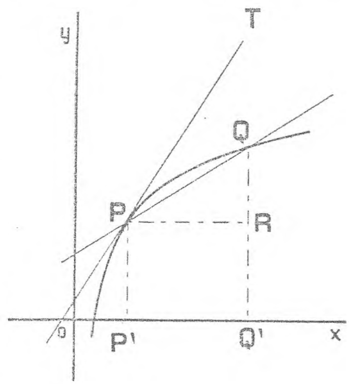
$$y = f(x) .$$

Immaginiamone tracciata la grafica, cioè quella curva, che sul piano cartesiano, si ottiene segnando per ogni possibile valore x dell'ascissa, il punto che ha per ordinata il corrispondente valore $f(x)$ della nostra funzione.

Fissato un valore x_1 della variabile, sia P il punto della curva che ha l'ascissa $OP' = x_1$ e quindi l'ordinata $P'P = f(x_1)$, e, dato alla x_1 un incremento h qualsiasi, sia Q il punto, pur esso appartenente alla curva, di coordinate

$$OQ' = x_1 + h, \qquad Q'Q = f(x_1 + h).$$

Se si conducono la secante PQ della nostra curva e la parallela PR all'asse x, avremo, nel triangolo PRQ rettangolo in R,



$$PR = h, \qquad RQ = f(x_1 + h) - f(x),$$

cosicchè *il rapporto incrementale*

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{RQ}{PR}$$

darà il coefficiente angolare della secante PQ, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo che la PR forma con l'asse x.

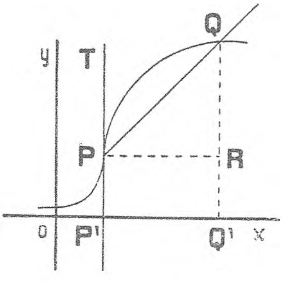
Se allora, tenuto fisso x, si fa tendere h allo zero, il punto Q si muove sulla curva avvicinandosi indefinitamente a P, e la secante PQ ruota intorno a P, tendendo ad assumere la posizione della retta PT, per la quale le due intersezioni colla curva che dianzi erano distinte si trovano riunite in P. Codesta retta dicesi *tangente* alla curva in P (*punto di contatto*); e il suo coefficiente angolare sarà dato dal LIMITE, cui tende, per h tendente allo zero, il coefficiente angolare della secante PQ

$$\frac{f(x + h) - f(x_1)}{h},$$

cioè dal valore $f'(x_1)$ che la derivata $f'(x)$ della nostra funzione assume per $x = x_1$.

Abbiamo dunque in generale come già per la funzione $y = ax^2$ (n. 187), l'importante teorema: *La derivata* f'(x) *di una qualsiasi funzione* f(x) *fornisce per ogni valore della variabile* *il coefficiente angolare della tangente alla grafica della funzione nel punto che ha per ascissa il valore considerato della* x.

193. Può accadere che la tangente PT alla grafica della nostra funzione nel punto P di ascissa x_1 risulti perpendicolare all'asse x ed abbia quindi il coefficiente angolare infinito (n. 101). Allora il rapporto incrementale o coefficiente angolare della secante PQ, al tendere di h allo zero, tende all'infinito e si dice che la derivata della funzione per $x = x_1$ diventa infinita.



194. La derivata conduce anche alla definizione più generale di *velocità nel moto vario*, la quale si presenta come naturale estensione di quella ottenuta pel moto dei gravi cadenti (n. 188).

Se un punto mobile M descrive una qualsiasi traiettoria, lo spazio s percorso da M (misurato sulla traiettoria, a partire da un certo punto, *origine degli spazi*) è una determinata funzione del tempo t (misurato a partire da un certo istante, *origine dei tempi*)

$$s = f(t).$$

Ad un qualsiasi istante dato t_1 il mobile avrà percorso il cammino

$$f(t_1)$$

e nell'intervallo di tempo da t_1 ad un altro istante $t_1 + h$ percorrerà il cammino

$$f(t_1 + h) - f(t_1).$$

Se in codesto intervallo h di tempo il punto M si fosse mosso di moto uniforme, la sua velocità sarebbe stata data (I; n. 207) dal rapporto incrementale

$$\frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h}.$$

Perciò questo rapporto si assume come misura della *velocità media* di M nell'intervallo di tempo da t_1 a $t_1 + h$.

Ora se h è abbastanza piccolo, il moto si può riguardare in codesto intervallo di tempo come approssimativamente uniforme; e così si intuisce che, al tendere di h allo zero, la velocità media tende alla velocità (di moto uniforme) che il punto acquisterebbe, ove nell'istante t_1 cessassero di agire le cause (o *forze*) che accelerano o ritardano il moto. Siccome

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} = f'(t_1),$$

si è condotti a concludere che: *Se*

$$s = f(t)$$

è la equazione che esprime lo spazio percorso da un punto M (e misurato sulla traiettoria) *in funzione del tempo, la velocità* v *del punto è ad ogni istante data dal corrispondente valore della derivata di* f(t), cioè

$$v = f'(t).$$

195. Pel moto vario di un punto M, pel quale sia

$$s = f(t)$$

si è condotti naturalmente a cercar di valutare la rapidità con cui varia nel tempo la rispettiva velocità

$$v = f'(t).$$

Nel caso del moto *(uniformente accelerato)* dei gravi cadenti, in cui la velocità

$$v = gt$$

è proporzionale al tempo, si chiama accelerazione il numero g, che dà l'incremento della velocità per ogni unità di tempo ed è la derivata (costante) della velocità rispetto al tempo (n. 191)

$$v' = g.$$

Nel caso di un moto qualsiasi si consideri l'incremento che subisce la velocità da un istante t_1 ad un istante $t_1 + h$, cioè

$$f'(t_1 + h) - f'(t_1);$$

il rapporto di questo incremento della velocità al corrispondente incremento h del tempo

$$\frac{f'(t_1 + h) - f'(t_1)}{h}$$

dicesi *accelerazione media* del punto mobile M da t_1 a $t_1 + h$.

Si definisce poi come *accelerazione* del punto M nell'istante t_1 il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(t_1 + h) - f'(t_1)}{h}.$$

cioè il valore della derivata di $f'(t)$ per $t = t_1$.

Si deve dunque considerare la derivata della derivata della $f(t)$. Questa nuova funzione dicesi *derivata seconda* della $f(t)$ e si designa con $f''(t)$.

Ricordiamo che in Fisica si insegna che l'accelerazione $f''(t)$ è proporzionale alla *forza* che agisce sul punto.

Osservazioni sui limiti.

196. Ci proponiamo di applicare la definizione del n. 189 al calcolo effettivo delle derivate delle funzioni più semplici. Ma a chiarire codesta applicazione conviene che qui ci fermiamo a svolgere alcune osservazioni generali sui limiti.

Ed anzitutto notiamo che, se una data funzione $f(x)$, al tendere della variabile x ad un certo valore x_1, tende ad un limite l, ciò vuol dire, in sostanza, che la $f(x)$, per x tendente ad x_1, assume successivamente dei valori *approssimati* ad l *quanto si vuole*. In altre parole, se consideriamo il numero l in forma decimale, i valori di $f(x)$, al tendere di x ad x_1, finiscono coll'avere comuni con l un numero di cifre decimali, mano mano crescente oltre ogni limite.

Così le osservazioni, svolte sin dal principio del nostro corso (I; nn. 5-10) sui calcoli con numeri approssimati, conducono ad altrettanti teoremi sui limiti.

P. es., siano date due funzioni $f(x)$, $F(x)$, che, al tendere di x ad x_1, tendono rispettivamente ad l ed L. Siccome $f(x)$, $F(x)$, quando x tende ad x_1, forniscono valori progressivamente approssimati di l ed L, basterà prendere x abbastanza vicino ad x_1, perchè la somma $f(x) + F(x)$ differisca in valore assoluto da $l + L$ per quanto poco si vuole (I; n. 6). Ciò appunto si esprime, col linguaggio dei limiti, dicendo che *la funzione* f(x) + F(x), *per* x *tendente ad* x_1, *tende* ad $l + L$

$$\lim_{x \to x_1} [f(x) + F(x)] = l + L;$$

o, in altre parole, che *il limite della somma è uguale alla somma dei limiti.*

Se di questo teorema vogliamo dar qui una dimostrazione diretta, non abbiamo che da ripetere considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. 6 del I volume e ragionare nei termini seguenti.

Per dimostrare che $f(x)+F(x)$, per x tendente ad x_1, tende ad $l+L$, bisogna far vedere che, prefissato un numero ε, per quanto piccolo, si può sempre prendere un numero τ abbastanza piccolo tale che, quando la differenza $x-x_1$ sia in valore assoluto minore di τ, o, come si suole scrivere, per

$$|x-x_1|<\tau,$$

risulti sempre

$$|l+L-[f(x)+F(x)]|<\varepsilon.$$

Per dimostrare che così è veramente, si osservi che, siccome $f(x)$, per x tendente ad x_1, tende ad l, si potrà sempre trovare un numero τ_1 abbastanza piccolo perchè per

$$|x-x_1|<\tau_1$$

sia

$$|l-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

e similmente, siccome, per x tendente ad x_1, $F(x)$ tende ad L, si potrà pur trovare un altro τ_2 tale che per

$$|x-x_1|<\tau_2$$

sia sempre

$$|L-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Se indichiamo con τ il più piccolo dei due numeri τ_1 e τ_2, per

$$|x-x_1|<\tau$$

saranno verificate simultaneamente le due disuguaglianze

$$|l-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |L-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi, sommando membro a membro, avremo

$$|l-f(x)|+|L-F(x)|<\varepsilon.$$

Ma la somma al primo membro di questa disuguaglianza è manifestamente maggiore o almeno uguale del valore assoluto di

$$l-f(x)+L-F(x)=l+L-[f(x)+F(x)]$$

onde concludiamo che per

$$|x - x_1 < | \tau$$

è veramente

$$| l + L - [f(x) + F(x)] | < \varepsilon .$$

NOTA. — Il teor. precedente si estende manifestamente al caso di tre o più funzioni.

197. Similmente si dimostra che *se una data funzione* f(x), *quando si fa tendere* x *ad un valore* x_1, *tende ad un limite determinato* l, *il prodotto di* f(x) *per una data costante* a

$$af(x),$$

al tendere di x *ad* x_1, *tende al limite*

$$al .$$

Calcolo di derivate.

198. Applicando l'osservazione del n. 196 è facile vedere come si calcoli la derivata della somma

$$y = f(x) + F(x)$$

di due date funzioni, supponendo di conoscere le derivate $f'(x)$ ed $F'(x)$ di codeste due funzioni.

Il rapporto incrementale della y

$$\frac{f(x+h) + F(x+h) - [f(x) + F(x)]}{y}$$

si può scrivere, sciogliendo la parentesi e cambiando l'ordine dei termini del numeratore,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{F(x+h) - F(x)}{h};$$

vale a dire, esso è uguale alla somma dei rapporti incrementali di $f(x)$, ed $F(x)$.

Ora se, tenendo fisso x, si fa tendere h allo zero, codesti due rapporti incrementali tendono rispettivamente (n. 189) ad $f'(x)$ ed $F'(x)$. Pel n. 196 la loro somma tenderà ad

$$f'(x) + F'(x);$$

e si conclude che la derivata della funzione

$$y = f(y) + F(x)$$

è data da

$$y' = f'(x) + F'(x);$$

cioè *la derivata della somma di due funzioni è data dalla somma delle derivate degli addendi.*

199. Il teor. prec. si estende analogamente ad ogni somma algebrica di funzioni.

Così la derivata di

$$y = f(x) - F(x)$$

sarà data da

$$y' = f'(x) - F'(x);$$

la derivata di

$$y = f(x) + F(x) + \varphi(x)$$

sarà data da

$$y' = f'(x) + F'(x) + \varphi'(x)$$

e così via.

200. Ricordiamo che, come si è già notato al n. 191, le funzioni di 1° grado

$$ax + b \qquad \text{e} \qquad ax$$

hanno la stessa derivata (costante) a. Se allora si considera la differenza di codeste due funzioni

$$y = ax + b - ax = b,$$

si è condotti dal n. prec. a definire come nulla la derivata della *funzione costante*

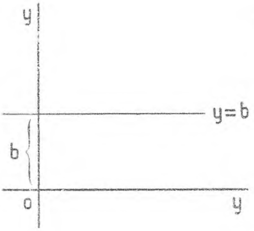
$$y = b.$$

Ciò è in accordo col fatto che, se una funzione è costante, il suo incremento, per qualsiasi incremento della x è nullo, e tali risultano il rapporto incrementale e, al limite, il valore della derivata.

E si noti ancora che la grafica della funzione costante

$$y = b$$

è il luogo dei punti di ordinata b, cioè la retta parallela all'asse x, avente da esso la distanza b, e il coefficiente angolare di questa retta (tangente trigonometrica dell'angolo nullo che essa forma coll'asse x) è appunto uguale allo zero.



201. Abbiamo visto al n. 187 che la derivata della funzione di 2° grado ax^2 è data da

$$2ax.$$

Ora, applicando l'osservazione del n. 199 sulla derivata della somma di più funzioni, possiamo assegnare subito la derivata di una qualsiasi funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Infatti codesta funzione si può riguardare come somma delle tre funzioni

$$ax^2 \qquad bx \qquad c$$

le cui derivate sono rispettivamente

$$2ax \qquad b \qquad 0:$$

onde sarà (n. 199)

$$y' = 2ax + b:$$

e questa funzione di 1° grado fornisce per ogni valore della x il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x alla parabola che rappresenta la funzione di 2° grado (I; n. 218).

Per ricordar bene il risultato precedente possiamo enunciarlo nella forma seguente: *La derivata di qualsiasi funzione di 2° grado*

$$y = ax^2 + bx + c$$

è data dalla funzione di 1° grado

$$y' = 2ax + b$$

che si ottiene dalla data, moltiplicando in ciascun termine il coefficiente per l'esponente della x *e diminuendo codesto esponente di* 1.

202. Applicando codesta regola al caso del moto di un grave lanciato in alto (I; n. 225)

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

o in basso (I; n. 226)

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

si trova, come espressione della velocità (n. 194)

$$v = v_0 - gt$$

o rispettivamente

$$v = v_0 + gt,$$

come appunto si è già visto in Fisica; e l'accelerazione a è data rispettivamente (nn. 195, 191) da

$$a = g$$

ed

$$a = -g.$$

Si noti che il diverso segno dei due risultati qui ottenuti dipende dal fatto che pei gravi lanciati in alto si è preso l'asse y positivo diretto verticalmente verso l'alto, mentre pei gravi lanciati in basso si è assunto il medesimo asse diretto all'ingiù (cfr. I; nn. 225-226); cosicchè effettivamente l'accelerazione risulta la stessa nei due casi.

203. La stessa regola del n. 201 vale anche pel calcolo della derivata di una funzione di 3° grado. Per dimostrarlo bisogna considerare anzitutto la funzione di 3° grado monomia

$$ax^3.$$

Fissato un qualsiasi valore x e dato ad esso l'incremento h, codesta funzione assume il valore

$$a(x+h)^3,$$

il quale può scriversi, successivamente,

$$a(x+h)(x+h)^2 = ax(x+h)^2 + ah(x+h)^2 = ax(x^2 + 2hx + h^2) + ah(x+h)^2 =$$
$$= ax^3 + ahx(2x+h) + ah(x+h)^2.$$

Perciò la funzione subisce l'incremento

$$ahx(2x+h) + ah(x+h)^2,$$

dal quale, dividendo per h, si deduce pel rapporto incrementale l'espressione

$$ax(2x+h) + a(x+h)^2.$$

Ora se, tenuto fisso x, facciamo tendere h allo zero, il binomio $2x+h$ tende a $2x$, cosicchè il primo termine del rapporto incrementale ha per limite $2ax^2$ (n. 197); mentre il secondo termine, nel quale $(x+h)^2$ tende ad x^2, ha per limite ax^2. Abbiamo quindi che

$$\lim_{h \to 0} [ax(2x+h)+a(x+h)^2] = 2ax^2 + ax^2 = 3ax^2$$

ossia che la derivata di ax^3 è data da

$$3ax^2.$$

Data allora una funzione di 3° grado

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

essa si può riguardare come somma delle quattro funzioni

$$ax^3 \qquad bx^2 \qquad cx \qquad d$$

che hanno rispettivamente per derivate

$$3ax^2 \qquad 2bx \qquad c \qquad 0;$$

onde la derivata della y sarà data dalla funzione di 2° grado

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$

che si deduce dalla y con la stessa regola indicata al n. 201 per le funzioni di 2° grado.

204. La medesima regola si estende alle funzioni razionali intere di grado qualsiasi, perchè la derivata di una qualsiasi potenza ad esponente intero x^m della variabile è data da mx^{m-1}. Indicheremo negli Esercizi la via per giungere a questa regola generale.

205. Nei nn. prec. abbiamo calcolato le derivate delle più semplici funzioni razionali intere. Consideriamo qui anche una funzione fratta e precisamente la più semplice possibile (cfr. I; n. 229)

$$y = \frac{a}{x}.$$

Qui, per formare il rapporto incrementale, supporremo fissato per x un valore qualsiasi *purchè diverso dallo zero* (pel quale la y tende all'infinito). Se h è il solito incremento attribuito alla x, il corrispondente incremento della funzione si potrà successivamente scrivere

$$\frac{a}{x+h} - \frac{a}{x} = \frac{ax - a(x+h)}{x(x+h)} = \frac{-ah}{x(x+h)};$$

cosicchè, dividendo quest' ultima espressione per h, si otterrà il rapporto incrementale sotto la forma

$$-\frac{a}{x(x+h)},$$

ossia, raccogliendo x^2 a fattore esterno del denominatore,

$$-\frac{a}{x^2}\frac{1}{1+\frac{h}{x}}.$$

Per aver la derivata di y non resta più che far tendere h allo zero, tenendo fisso x: ma con ciò il primo fattore

$$-\frac{a}{x^2}$$

della precedente espressione del rapporto incrementale non varia; e quanto al secondo

$$\frac{1}{1+\frac{h}{x}},$$

il denominatore $1+\frac{h}{x}$, al tendere di h allo zero, tende, qualunque sia il numero fisso x (diverso da zero), ad 1. Poichè codesta frazione ha il numeratore fisso 1 e il denominatore tendente ad 1, avrà essa stessa per limite l'unità.

Abbiamo dunque

$$\lim_{h\to 0}\left[-\frac{a}{x^2}\frac{1}{1+\frac{h}{x}}\right]=-\frac{a}{x^2};$$

cosicchè la derivata della

$$y=\frac{a}{x}$$

è data, per qualsiasi valore di x diverso dallo zero,

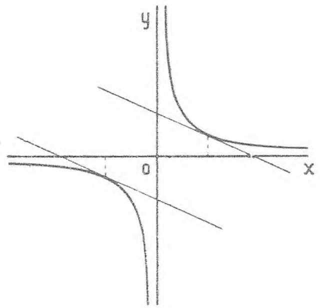
$$y'=-\frac{a}{x^2}.$$

Questa derivata fornisce il coefficiente angolare della tangente, nel punto di ascissa x, all'iperbola equilatera che rappresenta sul piano cartesiano la $y = \frac{a}{x}$.

Notiamo che, avendosi per ogni possibile x_1

$$x_1^2 = (-x_1)^2,$$

le tangenti all'iperbola equilatera in due punti di ascisse uguali in valore assoluto e di segno contrario hanno il medesimo coefficiente angolare, cioè sono parallele (cfr. I; n. 205).



206. In tutti i casi considerati nei nn. precedenti, l'incremento

$$f(x+h) - f(x)$$

della funzione si è sempre presentato sotto forma tale, che, eseguendo le operazioni indicate, si potè ridurlo in ogni caso ad avere in evidenza l'incremento h come fattore. Dopo di che, dividendo per h, si ottenne ogni volta pel rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

un'espressione, di cui fu facile, caso per caso, trovare direttamente il limite per h tendente allo zero, cioè il valore della derivata.

Le accennate riduzioni e semplificazioni della espressione dell'incremento di $f(x)$ erano essenziali, giacchè, se nel rapporto incrementale si fosse fatto tendere h allo 0, senza prima trasformare il numeratore, si sarebbe ottenuta l'espressione priva di senso

$$\frac{0}{0}.$$

Ma non è sempre possibile semplificare il numeratore del rapporto incrementale in modo da ridurlo ad avere in evidenza il fattore h; e allora per trovarne il limite per h tendenze allo zero, il quale si presenterebbe direttamente sotto forma indeterminata, occorrono caso per caso opportune considerazioni. Cerchiamo, p. es. la derivata della funzione

$$y = \operatorname{sen} x .$$

Il rapporto incrementale è dato da

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h};$$

e applicando la nota formola (n. 127)

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)$$

per $p = x + h$, $q = x$, codesto rapporto incrementale si può scrivere sotto la forma

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

ossia, dividendo numeratore e denominatore per 2,

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Qui, riducendo direttamente h allo zero, otterremmo la espressione indeterminata

$$\frac{0}{0} \cos x .$$

Ma ricordiamo che al n. 129 si è mostrato con opportune considerazioni che, quando l'arco tende allo zero, è bensì vero che tende allo zero anche il seno, ma il loro rapporto tende al limite determinato 1, cioè

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 .$$

Allora il rapporto incrementale

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

il cui secondo fattore, al tendere di h allo zero, tende a $\cos x$, mentre il primo tende ad 1, si avvicinerà indefinitamente a $\cos x$ (I; n. 8), cioè avremo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x .$$

Si conclude così (n. 189) che la derivata della funzione

$$y = \operatorname{sen} x$$

è data da

$$y' = \cos x.$$

In modo analogo si dimostra che per

$$y = \cos x$$

si ha

$$y' = -\operatorname{sen} x;$$

e per il calcolo della derivata di $\operatorname{tg} x$ rimandiamo agli Esercizi.

Massimi e minimi di una funzione.

207. Data una funzione

$$y = f(x)$$

e consideratane la grafica, abbiamo visto (n. 193) che la derivata

$$y' = f'(x)$$

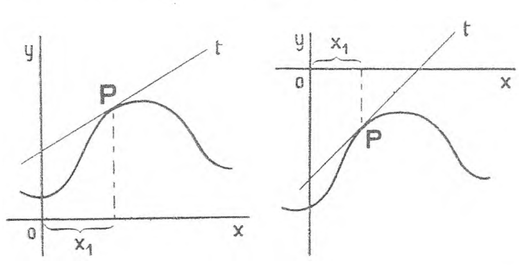
dà, per ogni valore dell'ascissa x, il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto che ha l'ascissa considerata, cosicchè si può dire che la derivata definisce punto per punto la direzione (rispetto all'asse x) della grafica della data funzione.

Perciò, anche prima di aver tracciato la grafica, possiamo ricavare dallo studio della derivata $f'(x)$ qualche notizia intorno all'andamento di codesta curva, ossia intorno al modo in cui varia la funzione al variare della x.

Se per un certo valore x_1 della x la derivata $f'(x_1)$ è positiva

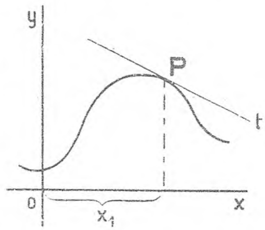
$$f'(x_1) > 0,$$

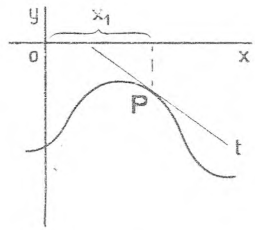
vuol dire che la tangente t alla curva nel punto P di ascissa x_1, avendo il coefficiente angolare positivo, è saliente (I; n. 202), cioè *per* x *crescente ha ordinate crescenti.* Di qui si rileva che anche la grafica della nostra



funzione, pasando pel punto P, dove tocca la t, avrà, vicino a quel punto, ordinate crescenti al crescere dell'ascissa x, e noi diremo che la funzione $f(x)$, per $x=x_1$ è *crescente* (al crescere della variabile x). In altre parole la nostra funzione ha per $x=x_1$ un valore $f(x_1)$ maggiore dei valori che assume per le ascisse che precedono immediatamente x_1 e minore di quelli che assume per le ascisse che seguono immediatamente x_1; e qui parliamo dei valori che precedono o seguono *immediatamente* x_1, perchè per valori più lontani della x la funzione può benissimo non essere più crescente (vedansi le figure).

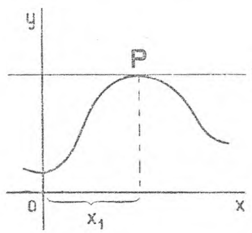
In modo analogo si vede che, se pel valore x_1 la derivata $f'(x)$ è negativa, la tangente alla curva nel punto P di ascissa x_1, avendo il coefficiente angolare negativo, è discendente, e quindi la funzione è, per $x=x_1$, *decrescente* (al crescere della variabile).

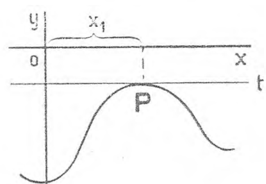




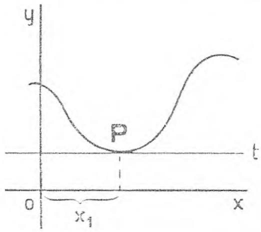
Così si conclude che *se la derivata* f'(x) *di una data funzione* f(x) *è per un certo valore* $x=x_1$ *diversa da zero, la funzione data per* $x=x_1$ *è* crescente *o* decrescente *secondo che* $f'(x_1)$ *è* positiva *o* negativa.

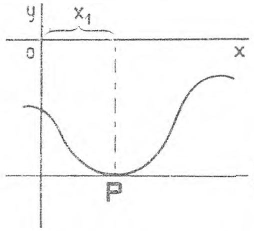
208. Una funzione costante (n. 200) non è mai crescente nè decrescente. Ma anche considerata una funzione non costante $f(x)$, può accadere che, *per un certo valore particolare* x_1 *della variabile*, la $f(x)$ non sia nè crescente, nè decrescente. Ciò si verifica, p. es., se la $f(x)$ per $x=x_1$ cessa di crescere per cominciare a decrescere. Allora per $x=x_1$ la funzione ha un valore $f(x_1)$ maggiore (algebricamente) di quelli che essa assume subito prima e subito dopo di x_1, e si dice che ha per $x=x_1$ un *massimo relativo* (ai valori prossimi ad x_1 della variabile).





Similmente si dice che la $f(x)$ ha per $x=x_1$ un *minimo* *relativo*, se per quel valore la funzione cessa di decrescere e comincia a crescere, o in altre parole se $f(x_1)$ è minore (algeqricamente) dei valori che la $f(x)$ assume subito prima e subito dopo di x_1.





Se per $x = x_1$ la $f(x)$ ha un massimo o un minimo, la derivata $f'(x)$ per codesto valore della variabile non può essere nè positiva nè negativa, perchè per $x = x_1$ la funzione non è nè crescente nè decrescente; onde sarà

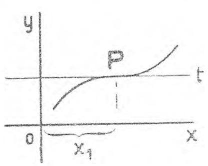
$$f'(x_1) = 0;$$

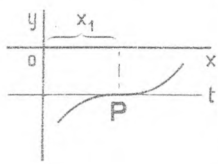
e, parlando geometricamente, la tangente alla grafica nel punto di ascissa x_1 avrà (n. 192) il coefficiente angolare nullo, cioè sarà parallela all'asse x.

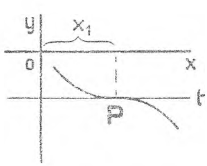
Abbiamo dunque intanto che: *Se una funzione* f(x), *ha per un valore della variabile un* massimo *o un* minimo, *la derivata* f'(x) *per quel valore della* x *si annulla.*

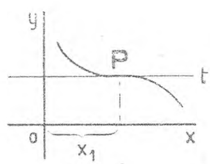
209. Ma il risultato prec. non si può invertire; cioè non basta l'annullarsi per $x = x_1$ della derivata $f'(x)$, perchè si possa concludere che la funzione ha per $x = x_1$ un massimo o un minimo.

Infatti l'annullarsi di $f'(x_1)$ ci dice soltanto che la tangente alla grafica nel punto P di ascissa x_1 è parallela all'asse x;









e, pur verificandosi questa circostanza, può accadere che la funzione continui ad essere crescente, oppure decrescente, tanto prima quanto dopo x_1 (vedansi le annesse fig.). In tal caso si dice che la funzione ha per $x = x_1$ un *flesso* a tangente parallela all'asse x.

210. Sebbene l'annullarsi della derivata di una funzione $f(x)$ sia condizione necessaria, *ma non sufficiente*, perchè la funzione abbia un massimo o un minimo, questa condizione permette di trovare tutti i massimi e minimi che la funzione possiede.

A tale scopo si cercheranno anzitutto i valori di x per cui si annulla la derivata $f'(x)$, cioè tutte le soluzioni $x_1, x_2, \ldots$ della equazione

$$f'(x) = 0.$$

Poi per ciascuno di questi valori x_i si deciderà se la $f(x)$ abbia veramente un massimo o un minimo, guardando quale sia il segno della derivata $f'(x)$ subito prima e subito dopo x_i. Se $f'(x)$ è negativa subito prima di x_i e positiva subito dopo, vuol dire (n. 208) che la $f(x)$ è crescente prima di x_i e decrescente dopo, cosicchè ha per $x = x_i$ un massimo. Avrà invece un minimo, se $f'(x)$ è negativa subito prima di x_i e positiva subito dopo; e negli altri casi non avrà per $x = x_i$ nè un massimo nè un minimo (ma un flesso).

I criteri dianzi indicati si possono raccogliere nella seguente tabella, dove indichiamo con ε un numero positivo che si suppone piccolissimo e tendente allo zero:

$f'(x_1 - \varepsilon)$	$f'(x_1)$	$f'(x_1 + \varepsilon)$	$f(x_1)$
$+$	0	$-$	massimo
$-$	0	$+$	minimo
$+$	0	$+$	flesso
$-$	0	$-$	flesso

Altri criteri per riconoscere i massimi e i minimi delle funzioni si trovano valutando il modo di variare della derivata, mediante la considerazione della derivata della derivata, cioè della derivata seconda $f''(x)$: ma per questa ed altre osservazioni rimandiamo agli Esercizi.

211. Applichiamo i criteri del n. prec. alla *ricerca dei massimi e minimi delle funzioni di 2° grado.* Riotterremo così i risultati, cui già pervenimmo nel I volume, discutendo direttamente le varie posizioni in cui può trovarsi rispetto agli assi la parabola che rappresenta una funzione di 2° grado (I; nn. 220-222).

Si consideri dunque la funzione

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove a, b, c rappresentano numeri dati.

Poichè la rispettiva derivata è data (n. 201) dalla funzione di 1° grado

$$y' = 2ax + b,$$

la y potrà avere un massimo o un minimo per l'*unico* valore che soddisfa all'equazione

$$2ax + b = 0,$$

cioè per

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Il corrispondente valore della y sarà

$$y_1 = a\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} + c,$$

ossia, eseguite le riduzioni,

$$y_1 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a};$$

e qui in x_1, y_1 riconosciamo subito le coordinate del vertice della parabola, che rappresenta la y (I; n. 218). Ma, prescindendo da ciò, vediamo, in base al n. prec., se y_1 sia veramente un massimo o un minimo della nostra funzione.

Bisogna guardare il segno della derivata, la quale si può scrivere

$$y' = 2x\left(a + \frac{b}{2a}\right);$$

e di qui si rileva che, al variare di x, essa cambia segno, quando cambia quello del binomio

$$x + \frac{b}{2a}.$$

Precisamente, per

$$x + \frac{b}{2a} < 0,$$

vale a dire per

$$x < -\frac{b}{2a} = x_1,$$

la y' ha segno contrario di a, mentre per

$$x + \frac{b}{2a} > 0,$$

cioè per

$$x > -\frac{b}{2a} = x_1,$$

ha sempre il medesimo segno di a.

Dunque, se a è positivo, la y' è negativa per $x < -\frac{b}{2a}$, nulla per $x = -\frac{b}{2a}$, positiva per $x > -\frac{b}{2a}$ e quindi la y ha, per $x = -\frac{b}{2a} = x_1$, un minimo.

Se invece a è negativo, la y' è positiva per $x < -\frac{b}{2a}$, nulla per $x = -\frac{b}{2a}$, negativa per $x > -\frac{b}{2a}$, e quindi la y ha per $x = -\frac{b}{2a} = x_1$ un massimo.

Riassumendo, *la funzione di 2° grado*

$$y = ax^2 + bx + c$$

ha un massimo o un minimo secondo che a *è negativo o positivo; e codesto massimo o minimo corrisponde al valore* $\mathrm{x} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$ *della variabile ed ha il valore*

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

NOTA. — Osserviamo che, se è $a < 0$, la derivata

$$y' = 2a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

della funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c$$

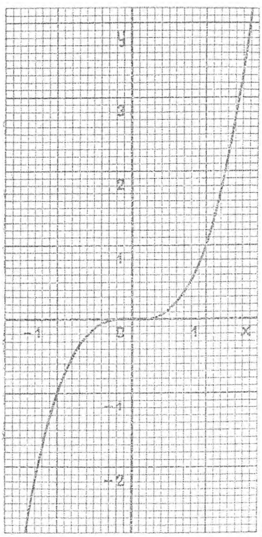
per $x < -\frac{b}{2a} = x_1$ è *sempre* positiva e quindi la y è *sempre* crescente; mentre per $x > -\frac{b}{2a} = x_1$ la y' è *sempre* negativa e quindi la y è *sempre* decrescente. In altre parole, il valore

$$y_1 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

che la y assume per $x = x_1$ è maggiore di *tutti* i valori che la funzione stessa assume per *ogni* altro valore della x. Ciò si esprime dicendo che y_1 è *il massimo assoluto* della funzione.

Analogamente, se è $a < 0$, il valore y_1 è minore di *tutti* i valori che la funzione assume per *ogni* valore della x diverso da x_1 e perciò si dice il *minimo assoluto* della funzione.

212. Per dare un esempio di funzione, che non ha nè massimo nè minimo, consideriamo la funzione di 3° grado



$$y = x^3.$$

La sua derivata (n. 203)

$$y' = 3x^2$$

si annulla soltanto per $x = 0$; e per ogni altro valore di x, sia positivo sia negativo, è sempre positiva.

Perciò la funzione è sempre crescente e per $x = 0$ la sua grafica ha un flesso a tangente orizzontale (n. 209): anzi, poichè per $x = 0$ la funzione è nulla, la tangente di codesto flesso è precisamente l'asse x.

Tracciando su carta millimetrata la grafica della nostra funzione, si ottiene la curva disegnata qui accanto (*parabola cubica*).

Altri esempi di curve aventi nello stesso tempo massimi o minimi e flessi a tangenti parallele all'asse x saranno indicati negli Esercizi.

VI.

LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA AREA DI UNA SUPERFICIE - INTEGRALE

213. Alla determinazione della lunghezza della circonferenza (I; nn. 38-41) e dell'area del cerchio (I; n. 53) siamo giunti, muovendo da una loro valutazione approssimata e proseguendo poi indefinitamente l'approssimazione.

Il procedimento allora seguito si può qui riassumere dicendo che si è dimostrato che i perimetri p_{2^n} e P_{2^n} dei poligoni regolari a 2^n lati, rispettivamente iscritti e circoscritti alla data circonferenza, al tendere di n all'infinito, tendono ad un valore determinato l; e questo valore l si è definito come *lunghezza della circonferenza.*

Così per l'area del cerchio si è dimostrato in sostanza che le aree a_{2n} e A_{2n} dei poligoni regolari a 2^n lati, iscritti e circoscritti al cerchio, al tendere di n all'infinito, tendono ad un valore determinato a che si è definito come *area del cerchio*; onde si può scrivere

$$\lim_{n \to \infty} p_{2^n} = \lim_{n \to \infty} P_{2^n} = l = 2\pi r$$

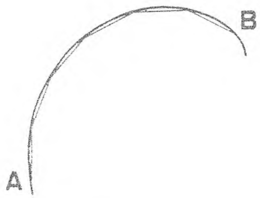
$$\lim_{n \to \infty} a_{2^n} = \lim_{n \to \infty} A_{2^n} = a = \pi r^2.$$

In modo analogo si perviene a definire *la lunghezza di un qualsiasi arco di curva* e *l'area di una qualsiasi superficie racchiusa da un contorno curvilineo.* Di queste due importanti questioni ci occuperemo in quest'ultimo Capitolo.

Lunghezza di un arco di curva.

214. Dato un qualsiasi arco di curva AB, si consideri *una poligonale iscritta in esso,* cioè avente gli estremi in A

e B e gli altri vertici sull'arco e susseguentisi da A verso B. Se codesta poligonale ha un grande numero di vertici e i lati tutti piccolissimi, essa quasi si confonde con l'arco, onde si è condotti ad assumere il perimetro della poligonale (somma delle lunghezze dei lati) come *valore approssimato* della lunghezza dell'arco AB.



Se immaginiamo di far crescere indefinitamente il numero dei lati della poligonale, in modo che ciascuno di essi tenda allo zero, il perimetro della poligonale varia, e la nostra intuizione ci assicura che essa ammette come limite la lunghezza che si otterrebbe distendendo su di una retta l'arco, se fosse costruito con un filo flessibile, ma inestendibile.

Si è così condotti a definire come *lunghezza dell'arco* AB *il limite del perimetro di una poligonale iscritta, di cui il numero dei lati cresca indefinitamente, in modo che ciascuno di essi tenda allo zero.*

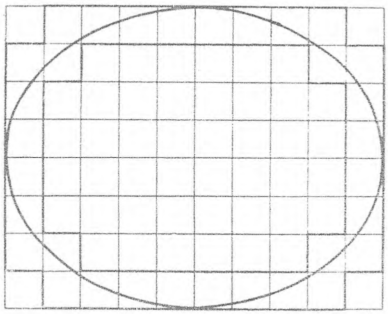
215. Una curva può essere definita mediante qualche sua proprietà geometrica, come avviene p. es. del cerchio, che si definisce come il luogo dei punti che hanno una data distanza da un dato centro. Ma può anche essere definita come la grafica di una assegnata funzione: così, p. es., noi abbiamo trovato le parabole, considerando le grafiche delle funzioni di 2° grado.

Data così una determinata curva, quando si voglia determinare effettivamente la lunghezza dell'arco di essa compreso fra due suoi dati punti A e B, bisogna tener conto delle proprietà geometriche della curva (e così si è fatto nel caso della circonferenza) oppure delle proprietà della funzione che essa rappresenta. I problemi cui si è così condotti presentano generalmente notevoli difficoltà e richiedono procedimenti di calcolo, che trascendono i confini del nostro programma.

Area di una superficie a contorno curvilineo.

216. Data nel piano una curva chiusa C, per valutare approssimatamente l'area della superficie da essa racchiusa, si immagini diviso il piano in tanti piccoli quadrati uguali, mediante due sistemi ortogonali di rette parallele ed equidistanti. Supposta nota la lunghezza del lato della quadrettatura, basta contare i quadretti interni alla curva C e moltiplicarne il numero per l'area di ciascun quadretto, per avere un *valore approssimato, per difetto*, dell'area racchiusa dalla nostra curva. Se poi si aggiunge al valore così ottenuto l'area dei quadretti attraversati dalla nostra curva, si otterrà manifestamente un *valore approssimato per eccesso* dell'area racchiusa dalla C.

Per esempio, l'ovale o *ellisse* dell'annessa figura contiene al suo interno 44 quadretti, e poichè il lato della quadrettura è di mm. 5 si trova, moltiplicando mm.^{2} 25 per 44, un valore approssimato per difetto dell'area dell'ellisse data in



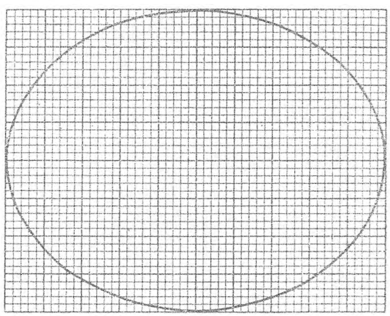
$$\text{mm.}^2\ 1100 .$$

I quadretti traversati dalla ellisse sono 32, cosicchè per l'area della ellisse si trova il valore approssimato per eccesso di

$$\text{mm.}^2\ (1100 + 32 \times 25) = \text{mm.}^2\ 1900 .$$

Evidentemente i due valori così ottenuti forniscono una approssimazione troppo grossolana; ma per ottenere valori approssimati più soddisfacenti basterà sostituire alla quadrettatura considerata dianzi un'altra a lato più piccolo.

Per esempio nella nostra seconda figura la stessa ellisse di prima è tracciata su carta millimetrata (cioè su di una quadrettatura il cui lato è di 1 mm.) e, contando i quadretti (¹), si trovano per l'area racchiusa i due valori approssimati, per difetto e per eccesso, di



$$\text{mm.}^2\ 1448 \quad \text{e} \quad \text{mm.}^2\ 1624$$

Così si è raggiunta un'approssimazione assai più soddisfacente di quella ottenuta pocanzi.

(¹) Il conto è facilitato dalla quadrettatura più grande in cm.^{2}.

Se poi si immagina di procedere indefinitamente in codesta approssimazione, facendo tendere allo zero il lato della quadrettatura, è manifesto che la differenza fra i due valori approssimati, l'uno per eccesso e l'altro per difetto, tende pure essa allo zero, in quanto è data dalla somma dei quadretti traversati dalla curva, i quali formano una specie di strisciolina a bordi poligonali, che racchiude al suo interno la curva e, al tendere allo zero del lato, si assottiglia indefinitamente fino a confondersi con la curva stessa. Ma la superficie racchiusa dall'ellisse resta sempre compresa fra le due somme di quadretti, le cui aree ci forniscono i due valori approssimati, l'uno per difetto e l'altro per eccesso. Vediamo così che codesti due valori, al tendere allo zero dal lato del quadretto, *tendono*, l'uno crescendo e l'altro decrescendo, *ad un medesimo limite*, che dà l'area (esatta) della superficie racchiusa dalla nostra ellisse (1).

Integrale definito.

217. Data una funzione

$$y = f(x)$$

e descritta nel piano, rispetto a certi due assi cartesiani x, y, la relativa grafica, prendiamo su questa due punti A, B e conduciamo le rispettive ordinate $A'A$, $B'B$. Ci proponiamo di determinare l'area della superficie S racchiusa dall'arco AB e dalla spezzata $BB'A'A$ (vedasi la fig. della pag. seg.).

Qui il procedimento per progressive approvazioni descritto nei nn. prec. si può semplificare e precisare in modo notevole, sostituendo alla suddivisione in quadrati una opportuna suddivisione in rettangoli. Giungeremo così al concetto di *integrale definito di una funzione*, il quale ha, per le applicazioni della Matematica, una importanza pari a quella del concetto di *derivata*.

Qui dapprincipio supporremo che l'arco AB si trovi nel primo angolo degli assi (cioè nell'angolo delle coordinate

(1) Con metodi di approssimazione più precisi, sui quali non ci è possibile qui dare maggiori notizie, si trova che codesta area è data da

$$mm.^2\,1570{,}79\ldots.$$

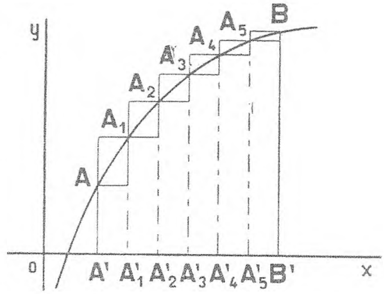
positive) e che fra A e B la nostra funzione sia crescente (n. 207). Vedremo poi come le nostre considerazioni valgano anche in ogni altro caso.

Siano dunque a e b le ascisse (positive) di A e B, cioè

$$OA' = a, \qquad OB' = b$$

e supponiamo, per fissare le idee,

$$b > a.$$



Sarà corrispondentemente

$$A'A = f(a), \qquad B'B = f(b).$$

Ciò posto, dividiamo il segmento $A'B' = b - a$ in n parti uguali nei punti A_1', A_2', ..., A'_{n-1} (nella figura si è preso $n = 6$) e da ciascuno di questi punti si innalzi la perpendicolare all'asse x fino ad incontrare l'arco AB in A_1, A_2, ..., A_{n-1} rispettivamente. Risultano così segnate in figura le ordinate $A_1'A_1$, $A_2'A_2$, ..., $A'_{n-1}A_{n-1}$ dei punti A_1, A_2, ..., A_{n-1} della nostra curva.

Condotta da ciascuno dei punti A, A_1, A_2, ..., A_{n-1} la parallela all'asse x fino ad incontrare l'ordinata del punto consecutivo, otteniamo n rettangoli, di base $\dfrac{b-a}{n}$,

$$AA_1', \qquad A_1A_2', \qquad A_2A_3', ..., \qquad A_{n-1}B'$$

tutti interni alla nostra superficie S. La somma di codesti n rettangoli si dirà la n^{ma} *scala* (di rettangoli) *iscritta in* S e si indicherà con S_n.

Se poi si conduce da ciascuno dei punti A_1, A_2, ... A_{n-1}, B la parallela all'asse x fino ad incontrare il prolungamento dell'ordinata del punto precedente, si ottengono altri n rettangoli

$$A'A_1, \qquad A_1'A_2, ..., \qquad A'_{n-1}B,$$

di base sempre uguale a $\dfrac{b-a}{n}$, la cui somma contiene all'interno la nostra superficie S. Codesta somma si dirà la n^{ma} *scala* (di rettangoli) *circoscritta ad* S e si indicherà con S_n'.

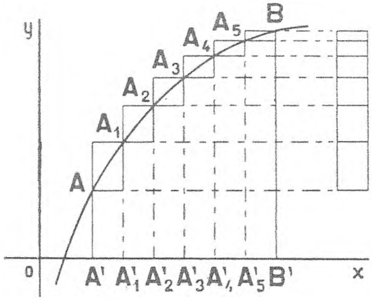
Risulta da quanto precede che l'area di S è compresa fra le aree delle due scale S_n ed S_n', cosicchè basterà calcolare queste due aree per avere due *valori approssimati dell'area cercata*, l'uno per difetto e l'altro per eccesso.

Ora è facile dimostrare che in codesta approssimazione si può procedere innanzi quanto si vuole, cioè che basta prendere n abbastanza grande, perchè la differenza fra l'area cercata e quella della scala iscritta o circoscritta risulti minore, in valore assoluto, di ogni numero positivo prefissato, per quanto piccolo. In altre parole si tratta di dimostrare che, *al tendere di* n *all'infinito, la differenza fra l'area cercata e quella della scala iscritta o circoscritta tende allo zero.*

A tale scopo, poichè, per qualsivoglia n, la scala circoscritta S_n' è sempre maggiore della superficie S, mentre la scala iscritta S_n è sempre minore di S, basterà far vedere che, al crescere indefinito di n, tende allo zero la differenza $S_n' - S_n$ delle due scale.

Ora si osservi che per avere codesta differenza basta sottrarre da ciascun rettangolo della scala circoscritta il rettangolo della scala iscritta che ha la medesima base sull'asse x. Si ottengono così n rettangoletti, ciascuno dei quali ha la solita base $\dfrac{b-a}{n}$ ed è traversato diagonalmente da un archetto della nostra curva. Per valutare la somma complessiva di codesti n rettangoletti, si immagini di trasportare ciascuno di essi parallelamente all'asse x, in modo da collocarli l'uno sull'altro in colonna (si veda la figura). Otteniamo così un rettangolo che ha sempre la base $\dfrac{b-a}{n}$ e ha per altezza la differenza fra le due ordinate estreme $A'A$, $B'B$, cioè precisamente,

$$f(b) - f(a).$$



Perciò la differenza delle due scale è data da

$$S_n' - S_n = \frac{(b-a)[f(b) - f(a)]}{n},$$

ed è manifesto che quando n si fa tendere all'infinito, questa frazione, il cui numeratore è fisso, diventa (in valore assoluto) piccola quanto si vuole, cioè tende allo zero.

Tenderà quindi allo zero anche la differenza fra la superficie S e la scala iscritta o circoscritta; e concludiamo che *l'area della superficie* S *è data dal limite comune, cui tendono le aree delle scale iscritte (o circoscritte) quando si fa tendere all'infinito il numero* n *dei rettangoli della scala.*

Indicando addirittura con S, S_n, S_n' le aree di tali superficie possiamo scrivere

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_n'.$$

218. Per calcolare effettivamente, nei casi concreti, il limite S, bisogna prima trovare l'area S_n della n^{ma} scala iscritta. Ora le altezze dei successivi rettangoli di codesta scala sono date dai valori della nostra funzione $f(x)$ corrispondenti alle ascisse

$$OA, \qquad OA_1, \qquad OA_2, \dots, \qquad OA_{n-1}$$

cioè, rispettivamente,

$$a, \qquad a + \frac{b-a}{n}, \qquad a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, \qquad a + (n-1)\frac{b-a}{n}.$$

Perciò le altezze saranno ordinatamente

$$f(a), \quad f\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \quad f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right), \dots, \quad f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right);$$

e, poichè i rettangoli di S_n hanno tutti la base $\dfrac{b-a}{n}$, si avrà finalmente

$$(1) \quad \begin{aligned} S_n = {} & f(a)\frac{b-a}{n} + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \\ & + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

L'area cercata S è il limite, per n tendente all'infinito di questa somma, di cui ciascun termine è ottenuto moltiplicando il valore della data $f(x)$ in uno dei punti della suddivisione dell'intervallo da a a b in n parti uguali pel piccolo incremento $\dfrac{b-a}{n}$ che si dà all'ascissa per passare dall'uno all'altro dei punti della suddivisione considerata.

E qui nulla più si può aggiungere in generale, perchè solo quando sia fissata la funzione $f(x)$, si potrà, caso per caso, vedere quale sia il limite della somma suindicata.

Ma è opportuno aggiungere che il limite di codesta somma si indica colla scrittura

$$\int_a^b f(x)dx,$$

dove il segno $\int$ non è altro che una deformazione della iniziale della parola « Somma »; e il segno dx, che si legge « differenziale di x », indica il nostro piccolo incremento $\frac{b-a}{n}$, considerato come tendente allo zero, cosicchè

$$f(x)dx$$

rappresenta l'area di uno qualsiasi di quei rettangoli, di numero indefinitamente crescente e di base tendente allo zero, la cui somma fornisce la scala iscritta.

La scrittura

$$\int_a^b f(x)dx$$

si legge « integrale definito da a a b di $f(x)$ in dx » e i due numeri a e b segnati alla base e all'apice di $\int$ (detti *estremi* dell'integrale) ricordano le ascisse degli estremi del segmento dell'asse x, che si suddivide in parti uguali per costruire le scale, di cui si considera il limite.

In sostanza, dunque, la scrittura

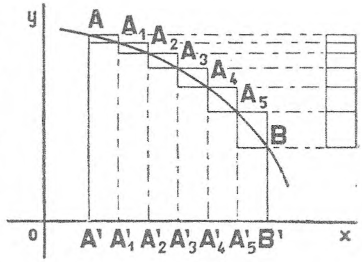
$$\int_a^b f(x)dx$$

non è che un segno convenzionale per rappresentare l'*area racchiusa fra l'asse delle* x, *le ordinate corrispondenti alle ascisse* a *e* b *e l'arco da queste intercetto sulla grafica della funzione*

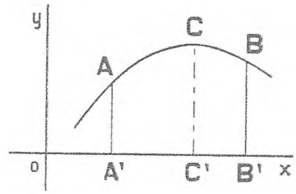
$$y = f(x);$$

ma offre il vantaggio di ricordare con la sua forma il procedimento di passaggio al limite, mediante il quale si può calcolare codesta area.

219. Sin qui si è supposto che la data funzione $f(x)$, fra A' e B', fosse crescente: ma tutto ciò che si è detto si può ripetere senza modificazioni sostanziali anche se in codesto intervallo la funzione è decrescente. Solo, come risulta dall'annessa figura, la *scala iscritta* si ottiene conducendo le parallele all'asse x da ciascuno dei punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ fino ad incontrare la ordinata del punto precedente; e si costruisce la *scala circoscritta* conducendo da $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$ la parallela all'asse x fino al prolungamento dell'ordinata consecutiva.



Se poi fra A' e B' la $f(x)$ non è sempre crescente o decrescente, ma ha, p. es., un massimo in C ed è c l'ascissa OC' rispettiva, si divide l'area S in due parti S_1, S_2, mediante l'ordinata $C'C$ del massimo. Per le aree rispettive si avrà



$$S_1 = \int_a^c f(x)dx, \qquad S_2 = \int_c^b f(x)dx$$

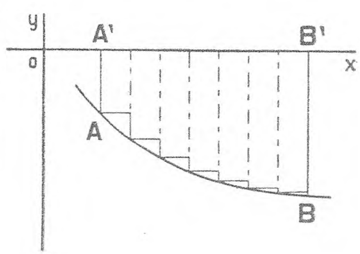
e l'area S sarà data dalla somma

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

che si rappresenterà ancora con

$$\int_a^b f(x)dx.$$

220. Nei nn. 217-219 abbiamo considerato le aree relative ad archi di curve situati nel primo angolo degli assi. Ma è facile vedere che le precedenti considerazioni valgono in generale. Supponiamo, per esempio, che fra le ascisse a e b (positive) la funzione data $f(x)$ sia negativa, e cerchiamo l'area S del quadrilatero $A'ABB'$. La somma (n. 218)



$$(1) \qquad f(a)\frac{b-a}{n} + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} +$$
$$+ f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \ldots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n},$$

il cui limite si è chiamato

$$\int_a^b f(x)dx,$$

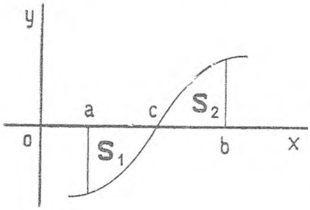
ha in questo caso tutti i termini negativi perchè tali sono i valori

$$f(a), \quad f\left(a + \frac{b-a}{n}\right), ...$$

della nostra funzione: ma, presa in valore assoluto, codesta somma fornisce ancora l'area della n^{ma} scala iscritta nella nostra superficie S; cosicchè al limite, per n tendente all'infinito, la somma suindicata darà l'area S, presa negativamente. Avremo dunque in questo caso:

$$\int_a^b f(x)dx = - S.$$

Se poi nell'intervallo fra $x = a$ e $x = b$ la grafica di $f(x)$ attraversa l'asse x, p. es. per $x = c$, cioè se per questo valore della variabile la $f(x)$ si annulla, possiamo scrivere, come al n. prec.,



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Il primo di questi due ultimi integrali dà l'area S_1 presa negativamente, il secondo dà l'area S_2; cosicchè si avrà

$$\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1.$$

221. In ogni caso è manifesto che se si invertono i due estremi a, b dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si considera

$$\int_b^a f(x)dx,$$

ciascun termine della somma (1) cambia segno, cosicchè al limite avremo

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

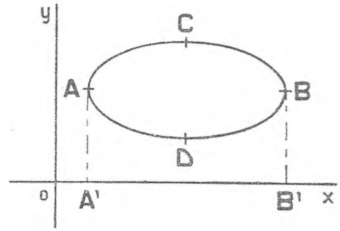
222. Notiamo infine che si possono esprimere mediante integrali anche aree limitate da contorni curvilinei chiusi. Considerando, p. es., il contorno ovale dell'annessa figura, si conducano le due tangenti, parallele all'asse y, AA' e BB'.

L'area S racchiusa dall'ovale è manifestamente data dalla differenza delle aree $A'ACBB'$ e $A'ADBB'$.

Posto

$$OA' = a, \qquad OB' = b,$$

supponiamo di conoscere, fra $x = a$ e $x = b$, la funzione $f_1(x)$ che esprime le ordinate dei punti dell'arco ACB per mezzo delle rispettive ascisse e la funzione $f_2(x)$, che esprime le ordinate dei punti dell'arco ADB per mezzo delle relative ascisse.



Avremo allora senz'altro

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$$

223. Prima di applicare la definizione del n. 218 al calcolo effettivo di alcuni integrali, particolarmente semplici, conviene qui svolgere alcune osservazioni che faciliteranno codeste applicazioni.

Consideriamo anzitutto la somma di due date funzioni

$$f(x) + F(x)$$

e immaginiamo di volerne calcolare l'integrale definito da a a b. Questo integrale è il limite, per n tendente all'infinito, della somma

$$[f(a) + F(a)]\frac{b-a}{n} + \left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + F\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n} + \dots +$$
$$+ \left[f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) + F\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]\frac{b-a}{n},$$

la quale si può scrivere, sviluppando le parentesi quadre e permutando i termini,

$$f(a)\frac{b-a}{n} + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} +$$
$$+ F(a)\frac{b-a}{n} + F\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \dots + F\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

Ora, se si fa tendere n all'infinito, la somma che in quest'ultima formula appare nella prima linea tende per definizione allo

$$\int_a^b f(x)dx,$$

mentre la somma residua tende a

$$\int_a^b F(x)dx.$$

Poichè il limite della somma è uguale alla somma dei limiti (n. 196), concludiamo che

$$\int_a^b \Big[f(x)+F(x)\Big]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b F(x)dx\,;$$

cioè *l'integrale definito, in un dato intervallo, della somma di due funzioni è eguale alla somma degli integrali definiti, nel medesimo intervallo, delle due funzioni considerate.*

NOTA. — Il teor. si estende manifestamente al caso di tre o più funzioni.

224. In modo perfettamente analogo si dimostra che se c è una costante si ha per qualsiasi funzione $f(x)$ (si ricordi il n. 197)

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\,.$$

225. Ciò premesso, passiamo a calcolare taluni integrali definiti di funzioni semplici e cominciamo dalla più semplice possibile, considerando la *costante*

$$y = m\,,$$

dove m è un numero dato.

Per trovare il valore di

$$\int_a^b m dx\,,$$

basta ricordare che la grafica della

$$y = m$$

è la retta parallela all'asse x alla distanza m, cosicchè l'area misurata dall'integrale considerato è il rettangolo compreso fra l'asse x, la parallela alla distanza m e le due ordinate corrispondenti alle ascisse a e b, cioè il rettangolo di altezza m e base $b-a$. Avremo dunque

$$\int_a^b m dx = m(b-a)\,.$$

In particolare, per $m=1$ si ha

$$\int_a^b dx = b - a.$$

226. Proponiamoci in secondo luogo di calcolare l'integrale definito da a a b della funzione di 1° grado

$$y = mx,$$

la cui grafica è la retta passante per l'origine e avente il coefficiente angolare m (I; n. 198), cioè inclinata sull'asse x di un angolo la cui tangente è m (n. 185).

Perverremo così ad un risultato che sarebbe facile ottenere con metodi più elementari; ma le considerazioni seguenti varranno a chiarire la via da seguire anche per integrazioni meno semplici.

Fissati, dunque, sulla nostra retta due punti A e B di ascisse a e b rispettivamente, e condotte le relative ordinate $A'A$, $B'B$ l'integrale

$$\int_a^b mxdx$$

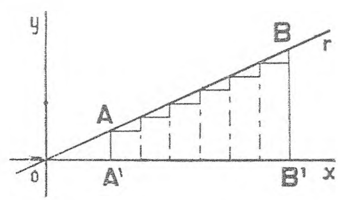
non è altro che l'area S del trapezio $ABB'A'$.

Qui per l'osservazione del n. 224 potremmo scrivere codesto integrale sotto la forma

$$m\int_a^b xdx$$

e limitarci a cercare

$$\int_a^b xdx.$$



Ma, poichè non si incontra con ciò alcuna maggiore difficoltà, preferiamo qui applicare direttamente il procedimento d'integrazione alla funzione data mx.

Perciò osserviamo che la n^{ma} scala iscritta in S è formata di n rettangoli di base $\frac{b-a}{n}$, le cui altezze sono date da mx, ove per x si ponga successivamente

$$a, \qquad a + \frac{b-a}{n}, \qquad a + 2\,\frac{b-a}{n}, \ldots, \qquad a + (n-1)\,\frac{b-a}{n}.$$

Avremo dunque (n. 218)

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left\{ma + m\left[a+\frac{b-a}{n}\right] + m\left[a+2\frac{b-a}{n}\right]+\ldots.+m\left[a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right]\right\}$$

$$= m\frac{b-a}{n}\left\{na + [1+2+3+\ldots.+(n-1)]\frac{b-a}{n}\right\} =$$

$$= m(b-a)\left\{a + [1+2+3+\ldots.+(n-1)]\frac{b-a}{n^2}\right\}.$$

Ma la somma dei primi $n-1$ numeri interi è data da (¹)

$$1+2+3+\ldots.+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2},$$

cosicchè avremo

$$S_n = m(b-a)\left\{a + \frac{(n-1)n}{2}\frac{b-a}{n^2}\right\} =$$

$$= m(b-a)\left\{a + \frac{1}{2}(b-a)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Se ora si fa tendere n all'infinito, nella espressione precedente varia soltanto l'ultimo fattore del secondo termine fra le graffe

$$1-\frac{1}{n},$$

il quale manifestamente tende all'unità. Di qui si conclude (nn. 196, 197) che

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = m(b-a)\left\{a + \frac{1}{2}(b-a)\right\} =$$

$$= m(b-a)\left\{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a\right\} = \frac{1}{2}m(b^2-a^2).$$

(¹) Per trovare la somma dei primi $n-1$ numeri interi basta scriverli due volte, prima in ordine crescente e poi, sotto, in ordine decrescente:

$$1+2+3+\ldots.+(n-2)+(n-1)+$$
$$+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots.+2+1;$$

e quindi sommare in colonna ciascun addendo superiore col corrispondente addendo inferiore. Si ottengono così $n-1$ somme parziali ciascuna delle quali vale n, onde si conchiude che il doppio della somma cercata è uguale a

$$(n-1)n,$$

e quindi

$$1+2+3+\ldots.+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Si ha dunque

$$\int_a^b mxdx = \frac{1}{2}\, m(b^2 - a^2).$$

In particolare se si prende $a = 0$, si trova

$$\int_a^b mxdx = \frac{1}{2}\, mb^2,$$

e questa non è altro che l'area ben nota del triangolo rettangolo $OB'B$, che ha per cateti $OB' = a$, $B'B = mb$.

Se poi si prende $m = 1$, si ha rispettivamente

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \qquad \int_0^b xdx = \frac{1}{2}\, b^2,$$

onde appare manifestamente verificata in questo caso l'osservazione del n. 224.

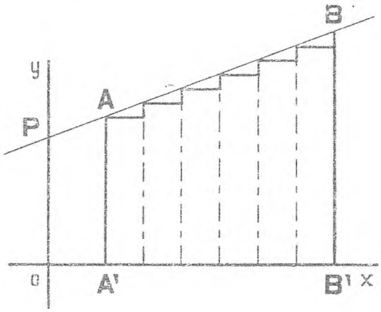
227. Consideriamo in terzo luogo una funzione di 1° grado qualsivoglia

$$y = mx + p,$$

la cui grafica è la retta che sega l'asse y nel punto P di ordinata p e ha il coefficiente angolare m.

Lo

$$\int_a^b (mx + p)dx$$



si può calcolare sia partendo, come al n. prec., dall' area della n^{ma} scala iscritta nel trapezio $A'B'BA$, (cfr. la figura), sia osservando che pei nn. 223, 224 si ha

$$\int_a^b (mx + p)dx = \int_a^b mxdx + \int_a^b pdx = m\int_a^b xdx + p\int_a^b dx,$$

e ricordando (n. prec. e n. 225) che

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \qquad \int_a^b dx = b - a.$$

Si trova così

$$\int_a^b (mx + p)dx = \frac{1}{2} m(b^2 - a^2) + p(b - a),$$

e, in particolare, per $a = 0$

$$\int_0^b (mx + p)dx = \frac{1}{2} mb^2 + pb.$$

Anche queste due formule si potrebbero stabilire elementarmente, calcolando, in base a ben note regole di Geometria, l'area del trapezio $AA'B'B$ o $POB'B$.

228. Considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. prec. conducono alla risoluzione di un problema classico di Meccanica elementare, che, risale al GALILEI.

Supponiamo che un punto si muova in modo che la sua velocità v ad ogni unità di tempo subisca una stessa variazione costante, cioè supponiamo che il punto si muova di *moto uniformente vario* o ad *accelerazione costante.*

Se a è questa accelerazione (o variazione costante della velocità ad ogni unità di tempo) e v_0 è la velocità del punto nell'istante $t = 0$, la velocità nell'istante t sarà data da

$$v = v_0 + at.$$

Supposto per fissare le idee $a > 0$, (*moto uniformemente accelerato*), ci proponiamo di calcolare quale sia il cammino s percorso dal mobile dall'istante 0 all'istante t.

A tale scopo, cominciamo col tracciare, rispetto a due assi cartesiani, la grafica della velocità del nostro punto segnando i tempi sull'asse delle ascisse, le velocità sull'asse delle ordinate. Codesta grafica è la retta r che ha l'ordinata all'origine $OA = v_0$ e il coefficiente angolare a.

Segnato sull'asse dei tempi il punto T di ascissa t, l'ordinata corrispondente TB della retta r sarà uguale a

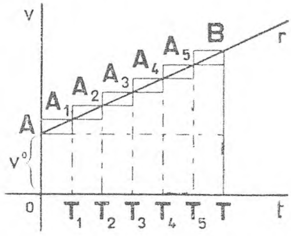
$$v_0 + at.$$

Se il moto fosse uniforme e la velocità fosse costantemente uguale a v_0, lo spazio percorso sarebbe dato da

$$v_0 t$$

e sarebbe rappresentato in figura dal rettangolo di base $OT = t$ e di altezza $OA = v_0$.

Dividiamo allora il tempo t in n parti uguali, rappresentate in figura dai segmenti



$$OT_1, \qquad T_1T_2, \ldots, \qquad T_{n-1}T$$

(in figura si è preso $n = 6$). Le velocità corrispondenti agli istanti T_1, $T_2, \ldots, T_{n-1}$ saranno rappresentate dalle rispettive ordinate della retta r

$$T_1A_1, \qquad T_2A_2, \ldots, \qquad T_{n-1}A_{n-1}.$$

Se la velocità del punto, invece di crescere continuamente, si mantenesse uguale ad OA nel primo intervallo; poi, cambiando bruscamente, si mantenesse uguale a T_1A_1 nel secondo intervallo; e nel terzo diventasse uguale a T_2A_2 e così via, lo spazio percorso dal mobile sarebbe rappresentato dall'area S_n della scala iscritta nel trapezio $OABT$ ed è manifesto che questo spazio è minore di quello effettivamente descritto dal nostro punto.

Similmente, se la velocità del punto, variasse bruscamente alla fine di ogni intervallo di tempo, mantenendosi in ciascuno di questi uguale alla velocità vera nell'istante finale dell'intervallo, lo spazio percorso sarebbe rappresentato dall'area S_n' dell'n^{ma} area circoscritta al trapezio $OABT$ e questo spazio riesce manifestamente maggiore di quello effettivamente descritto dal punto fino all'istante t. Cioè se s è questo spazio abbiamo

$$S_n < s < S_n'$$

e poichè queste disuguaglianze valgono per ogni n possibile, e, per n tendente all'infinito, S_n ed S_n' tendono ad un medesimo limite, si conclude

$$s = \lim S_n = \lim S_n'.$$

Questo limite non è altro che l'area del trapezio $OABT$, e, usando la notazione dell'integrale, si può scrivere

$$s = \int_0^t (v_0 + at)dt.$$

Sostituendo a questo integrale il rispettivo valore (n. prec.) troviamo

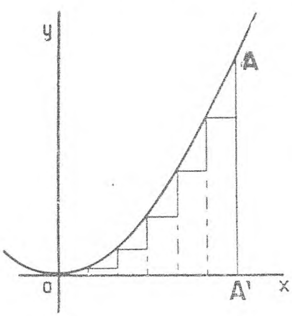
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Prendendo $a = g$ si ottiene l'equazione del moto dei gravi lanciati in basso (ove si contino gli spazi positivamente dall'alto verso il basso; I, n. 226) mentre per $a = -g$, si trova l'equazione del moto dei gravi lanciati in alto (ove si contino gli spazi positivamente dal basso verso l'alto; I, n. 225).

229. Diamo qui da ultimo un esempio di integrazione che ci condurrà al calcolo di un'area, che non sarebbe possibile determinare direttamente con un calcolo elementare. Consideriamo la funzione di 2° grado

$$y = ax^2,$$

la cui grafica è una parabola di vertice nell'origine, che ha l'asse di simmetria y, e supposto, per fissare le idee, $a > 0$, volge la concavità verso l'alto (I; n. 215); e preso su codesta parabola il punto A di ascissa $OA' = x_1$, proponiamoci di calcolare l'area del triangolo, avente un lato parabolico $OA'A$, cioè lo



$$\int_0^{x_1} ax^2 dx.$$

Per costruire la n^{ma} scala iscritta, dobbiamo dividere l'intervallo $OA' = x_1$ negli $n - 1$ punti di ascissa

$$\frac{x_1}{n} \quad \frac{2x_1}{n} \quad \frac{3x_1}{n} \quad \dots \quad \frac{(n-1)x_1}{n};$$

e le altezze dei successivi rettangoli della scala sono dati dai corrispondenti valori della nostra funzione ax^2, cioè da

$$a\frac{x_1^2}{n^2} \quad a\frac{2^2x_1^2}{n^2} \quad a\frac{3^2x_1^2}{n^2} \quad \dots \quad a\frac{(n-1)^2x^2}{n^2}.$$

Così per l'area S_n della n^{ma} scala iscritta si trova l'espressione

$$S_n = a\frac{x_1^2}{n^2}\frac{x_1}{n} + a\frac{2^2x_1^2}{n^2}\frac{x_1}{n} + \dots + a\frac{(n-1)^2x_1^2}{n^2}\frac{x_1}{n} =$$

$$= \frac{ax_1^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2].$$

Qui fra parentesi troviamo la somma dei quadrati dei primi $n-1$ numeri interi, che si è già incontrata nel calcolo dei volumi della piramide (I; n. 134), del cono (I; n. 144) e della sfera (I; n. 166) e che si è visto esser data da

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

cosicchè qui avremo

$$S_n = \frac{ax_1^3}{n^3}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}\,ax_1^3\,\frac{n-1}{n}\,\frac{2n-1}{2n}$$

ossia infine

$$S_n = \frac{1}{3}\,ax_1^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Non resta più che calcolare il limite di S_n quando si fa tendere n all'infinito. Allora ciascuno dei due binomi

$$1-\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad 1-\frac{1}{2n}$$

finisce, purchè n sia abbastanza grande, col differire quanto poco si vuole da 1); quindi anche il loro prodotto differirà quanto poco si vuole da 1 (I; n. 8) cioè tenderà ad 1, onde si conclude

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\,ax_1^3$$

ossia

$$\int_0^{x_1} ax_1^2dx = \frac{1}{3}\,ax_1^3.$$

In particolare, per $a=1$, risulta

$$\int_0^{x_1} x^2dx = \frac{1}{3}\,x_1^3.$$

230. Se si vuole l'area racchiusa fra la parabola, l'asse x e le ordinate corrispondenti a due ascisse x_1, x_2 quali si vogliano, basta osservare che manifestamente

$$\int_{x_1}^{x_2} ax^2dx = \int_0^{x_2} ax^2dx - \int_0^{x_1} ax^2dx.$$

Di qui, ricordando (n. prec.) che

$$\int_0^{x_1} ax^2dx = \frac{1}{3}\,ax_1^3, \qquad \int_0^{x_2} ax^2da = \frac{1}{3}\,ax_2^3,$$

si deduce

$$\int_{x_1}^{x_2} ax^2dx = \frac{1}{3}\,a(x_2^3 - x_1^3).$$

231. Nota. — Non occorre spendere molte parole per rilevare la stretta analogia che corre fra il procedimento tenuto nei nn. prec. per calcolare un integrale definito *come limite delle aree delle scale iscritte* (o circoscritte) e i metodi con cui nel volume precedente abbiamo determinato i volumi della piramide (I; n. 134), del cono (I; n. 144) e della sfera (I; n. 166) *come limiti dei volumi dei rispettivi scaloidi iscritti* (o circoscritti). In sostanza si tratta sempre di un medesimo procedimento di calcolo per progressive approssimazioni (*integrazione*).

Cenno sull'integrale indefinito.

A complemento degli sviluppi precedenti vogliamo qui accennare rapidamente ad alcune considerazioni che mettono nella sua vera luce il rapporto fra « integrale » e « derivata », facendo apparire l'*integrazione* come *operazione inversa della derivazione*. Il riconoscimento preciso di questo carattere inverso delle operazioni che servono a determinare le tangenti e le aree si può riattaccare al BARROW (1), il maestro del NEWTON, e può ritenersi come un passo fondamentale verso la scoperta del Calcolo infinitesimale: a tale scopo occorreva solo riconoscere che la derivazione o differenziazione è una operazione *diretta*, la quale può eseguirsi, seguendo leggi precise e generali. Il NEWTON e il LEIBNIZ hanno fatto questa scoperta, coordinando in una sistemazione organica l'insieme delle operazioni infinitesimali (2), il cui studio costituisce una lunga serie di sforzi e di progressi iniziati nel mondo antico (DEMOCRITO, V-IV sec. a. C.; EUDOSSO, 409-536 circa a. C.; ARCHIMEDE, 287-212 a. C. ; e ripresi nel Rinascimento da GALILEO, 1564-1642; CAVALIERI, 1608-1647; TORRICELLI, ROBERVAL, FERMAT e tanti altri che la storia registra appunto come « precursori del Calcolo infinitesimale ».

232. Data una funzione

$$y = f(x),$$

consideriamone l'integrale da un estremo dato a ad un estremo z che riguarderemo variabile (sull'asse x)

$$\int_a^z f(x)dx.$$

Questo integrale ha, per ogni valore fissato per z, un valore determinato e varia con z, vale a dire *è una determinata funzione* F(z) *della variabile* z. Se è $f(x) > 0$ e $z > a$, $F(z)$ dà l'area racchiusa fra l'asse x, la grafica della funzione $f(x)$ e le ordinate corrispondenti all'ascissa fissa a

(1) « *Lectiones opticae et geometricae* » 1ª ed. 1669, 2ª ed. 1674. Cfr. ZEUTHEN, « Note sur l'histoire des mathématiques ». Bollettino dell'Accademia delle Scienze di Danimarca 1897.

(2) Cfr. NEWTON « Principia mathematica » 1687; LEIBNIZ « Nova methodus

e all'ascissa variabile z. Ed anche se non è $f(x) > 0$ e $z > a$, $F(z)$ rappresenta, in valore assoluto, un'area, o una differenza di aree, secondo quanto si è detto al n. 220.

In ogni caso la funzione

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx$$

dicesi *integrale indefinito della funzione* f(x) *a partire da* a [1].

233. L'integrale indefinito gode di importanti proprietà caratteristiche che ci proponiamo di dimostrare.

In primo luogo discende senz'altro dal significato geometrico che l'*integrale indefinito di una qualsiasi funzione* f(x) *a partire da* a

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx$$

per z = a *si annulla*, cioè

$$F(a) = 0\,.$$

234. In secondo luogo sussiste per l'integrale indefinito un teorema fondamentale, per dimostrare il quale dobbiamo ammettere che la funzione $f(x)$, per i valori di x che noi considereremo, sia tale che $f(x+h)$, quando h tende allo zero, tenda precisamente ad $f(x)$, cioè sia

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)\,. \tag{1}$$

A questa condizione soddisfanno, per ogni valore della variabile, le funzioni razionali intere (di grado 1°, 2°, 3°, ecc.) e soddisfanno pure, salvo, al più, per qualche valore eccezionale della variabile, le funzioni che solitamente si incontrano nelle applicazioni.

Una funzione $f(x)$ si dice *continua* per tutti quei valori della variabile x, pei quali soddisfa alla (1); e siccome nelle applicazioni che noi faremo nel seguito ci serviremo solo di funzioni razionali intere, le quali come si disse, sono continue per tutti i valori della x, così, anche nelle seguenti deduzioni teoriche, supporremo senz'altro di parlar sempre di *funzioni continue per tutti i valori della variabile*, che avremo da considerare.

Ciò posto, dimostriamo il seguente teorema fondamentale:

L'integrale indefinito di una qualsiasi funzione f(x) *continua*

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx$$

ha per derivata la funzione $f(z)$.

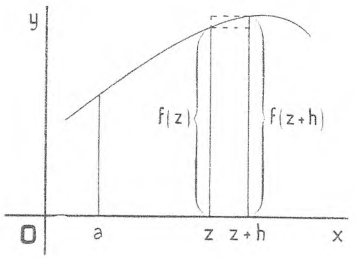
[1] Nell'uso si suole per lo più indicare con una medesima lettera l'*estremo superiore variabile* dell'integrale indefinito e la *variabile d'integrazione*, che compare sotto il segno $\int$; ma noi qui, per evitare in questi primi cenni ogni equivoco, manterremo sempre distinte le due variabili, indicando la prima con z, la seconda con x.

Per fissare le idee supponiamo che sia $f(x) > 0$, $z > a$, in modo che $F(z)$ sia rappresentato in valore assoluto e segno dalla solita area racchiusa fra l'asse x, la grafica della funzione $y = f(x)$ e dalle ordinate corrispondenti alle ascisse a e z. Negli altri casi si ripete la stessa dimostrazione con lievi modificazioni non sostanziali.

Per trovare la derivata di $F(z)$ dobbiamo calcolarne anzitutto il rapporto incrementale. Assegnato a z un qualsiasi incremento h, p. es. positivo, la $F(z)$ subisce l'incremento

$$F(z+h) - F(z),$$

il quale fornisce l'area racchiusa fra l'asse x, la grafica di $f(x)$ e le ordinate corrispondenti alle ascisse z e $z+h$; e siccome poi dovremo far tendere h allo zero, possiamo senz'altro supporre di aver preso h abbastanza piccolo, perchè la curva fra z e $z+h$ non abbia nè massimi nè minimi e sia, p. es., crescente. Allora l'area $F(z+h) - F(z)$ è compresa fra i due rettangoli di base h, che hanno rispettivamente per altezza $f(z)$ ed $f(z+h)$. Sarà dunque



$$hf(z) < F(z+h) - F(z) < hf(z+h)$$

e quindi, dividendo tutto per l'incremento positivo h,

$$f(z) < \frac{F(z+h) - F(z)}{h} < f(z+h).$$

Se ora, tenendo fisso z, facciamo tendere h allo zero, $f(z+h)$ tende ad $f(z)$ e il rapporto incrementale di $F(z)$, dovendo restare sempre compreso fa $f(z)$ e una variabile tendente ad $f(z)$, tenderà esso stesso al medesimo limite e avremo

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

cioè veramente

$$F'(z) = f(z).$$

235. Le due proprietà dimostrate per l'integrale indefinito nei due ultimi nn., bastano per caratterizzarlo; cioè sussiste il seguente importante teorema:

Se, data una funzione f(x), *un' altra funzione* φ(z) *è tale che:*

1) *si annulla per* z = a,

$$\varphi(a) = 0$$

2) *ammette per derivata* f(z)

$$\varphi'(z) = f(z),$$

la φ(z) *coincide coll' integrale indefinito di* f(z) *a partire da* a.

Per dimostrare che $\varphi(z)$ coincide con

$$F(z)=\int_a^z f(x)dx,$$

indichiamo con $\psi(z)$ la differenza delle due funzioni $\varphi(z)$ ed $F(z)$, cioè poniamo

$$\psi(z)=\varphi(z)-F(z).$$

La derivata $\psi'(z)$ di $\psi(z)$ è uguale alla differenza delle derivate di $\varphi(z)$ ed $F(z)$ (n. 199), che sono entrambe uguali ad $f(z)$, la prima per ipotesi, la seconda pel n. prec.; onde avremo senz'altro

$$\psi'(z)=0.$$

Ma allora la funzione $\psi(z)$ non può mai essere nè crescente, nè decrescente (nn. 207, 208), cioè la sua grafica deve essere una retta parallela all'asse delle ascisse ed essa deve essere necessariamente una costante

$$\psi(z)=\text{costante}.$$

Ora per $z=a$ tanto $\varphi(z)$ quanto $F(z)$ sono nulle, la prima per ipotesi, la seconda pel n. 233, cosicchè si conclude che $\psi(z)$ è costantemente uguale a zero, cioè

$$\varphi(z)-F(z)=0$$

ossia veramente

$$\varphi(z)=F(z)=\int_a^z f(x)dx.$$

236. Ricordando che l'integrale indefinito $F(z)$ assume per $z=b$ il valore dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x)dx,$$

ricaviamo dal teor. prec. il seguente metodo per calcolare codesto integrale definito: *Si cerca l'integrale indefinito di* f(x) *a partire da* a, *cioè la funzione soddisfacente alla duplice condizione di ammettere la derivata* f(z) *e di annullarsi per* z = a; *e nella funzione così trovata si pone* z = b.

237. Illustriamo il metodo indicato al n. prec., calcolando, in base ad esso, gli integrali definiti considerati ai nn. 225-230.

Si voglia in primo luogo calcolare

$$\int_a^b (mx+p)dx.$$

Per trovare anzitutto (n. prec.) una funzione che abbia per derivata

$$mz+p,$$

ricordiamo che una qualsiasi funzione di 2° grado

$$hz^2 + kz + l$$

ha per derivata la funzione di 1° grado (n. 201)

$$2hz + k.$$

Allora basta prendere h e k in modo che sia

$$2h = m, \qquad k = p$$

cioè

$$h = \frac{m}{2}, \qquad k = p,$$

per avere una funzione di 2° grado

$$\text{(2)} \qquad \frac{m}{2} z^2 + pz + l,$$

che ammette per derivata

$$mz + p,$$

qualunque sia il termine noto l, il quale resta perciò ancora indeterminato.

Ma noi vogliamo di più che la funzione per $z = a$ si annulli (n. prec.).

Dovremo dunque scegliere l in modo che risulti

$$\frac{m}{2} a^2 + pa + l = 0,$$

cioè dovremo prendere pel termine noto il valore

$$l = -\frac{m}{2} a^2 - pa,$$

e si conclude che l'integrale indefinito di $mx + p$ a partire da a è dato da

$$\frac{m}{2} z^2 + pz - \frac{m}{2} a^2 - pa = \frac{m}{2}(z^2 - a^2) + p(z - a),$$

cioè

$$\int_a^z (mx + p)dx = \frac{m}{2}(z^2 - a^2) + p(z - a).$$

Ponendo in questa funzione $z = b$, si trova, come al n. 227,

$$\int_a^b (mx + p)dx = \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + p(b - a).$$

238. Analogamente per calcolare

$$\int_0^{x_1} ax^2 dx,$$

cerchiamo anzitutto

$$\int_0^z ax^2dx$$

cioè la funzione $F(z)$ che ammette la derivata az^2 e si annulla per $z=0$.

A tale scopo ricordiamo che la funzione di 3° grado

$$hz^3$$

ha per derivata (n. 203)

$$3hz^2,$$

cosicchè basta prendere h in modo che risulti

$$3h=a$$

ossia

$$h=\frac{a}{3},$$

per trovare una funzione

$$\frac{a}{3}z^3,$$

che ammette la derivata voluta.

Siccome poi questa funzione per $z=0$ si annulla concludiamo che

$$\int_0^z ax^2dx=\frac{a}{3}z^3$$

e quindi (n. 236), come al n. 229,

$$\int_0^{x_1} ax^2dx=\frac{1}{3}ax_1^3.$$

Se più in generale vogliamo calcolare, per due dati estremi x_1, x_2,

$$\int_{x_1}^{x_2} ax^2dx,$$

notiamo che la funzione di 3° grado

$$\frac{a}{3}z^3+c, \tag{3}$$

qualunque sia il termine noto c, ammette la derivata

$$az^2;$$

cosicchè per avere l'integrale indefinito

$$\int_{x_1}^z ax^2dx,$$

basterà determinare nella (3) la costante c in modo che la funzione (3) si annulli per $z = x_1$, cioè si abbia

$$\frac{a}{3} x_1^3 + c = 0.$$

Di qui si ricava

$$c = -\frac{a}{3} x_1^3;$$

onde si conclude

$$\int_{x_1}^{z} ax^2 dx = \frac{a}{3} z^3 - \frac{a}{3} x_1^3 = \frac{a}{3} (z^3 - x_1^3)$$

e quindi (n. 236)

$$\int_{x_1}^{x_2} ax^2 dx = \frac{a}{3} (x_2^3 - x_1^3).$$

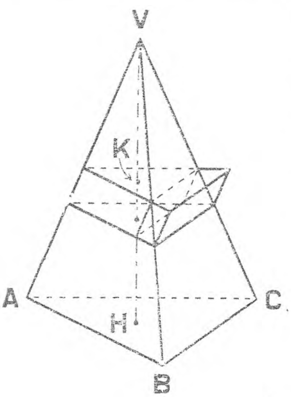
239. Le considerazioni svolte in questo paragrafo permettono di ritrovare, con un nuovo procedimento generale, i volumi della piramide, del cono e della sfera, che già abbiamo determinato come limiti dei rispettivi scaloidi iscritti e circoscritti (I; nn. 134, 144, 166).

240. Data una piramide di vertice V, di altezza $VH = a$ e di area di base S, seghiamola con un piano parallelo alla base alla distanza dal vertice VK, e assumiamo questa distanza come variabile, indicandola, come tale, con z.

Il piano segante determina, dalla parte di V, una piramide simile alla data, e il volume della piramide parziale è una certa funzione $F(z)$ di z, la quale, manifestamente, per $z = 0$ si annulla e per $z = a$ diventa uguale al volume della piramide data.

Vogliamo caratterizzare questa funzione $F(z)$.

A tale scopo notiamo anzitutto che anche l'area della base della piramide parziale è una certa funzione di z; e di questa funzione è facile calcolare l'espressione. Infatti codesta base è un poligono simile alla base della piramide totale data e per un noto teorema di Geometria [1] le aree di codesti due poligoni stanno fra loro come i quadrati delle rispettive distanze dal vertice. Così se indichiamo per un momento con S' l'area della base della piramide parziale, avremo



$$\frac{S'}{S} = \frac{z^2}{a^2}$$

e quindi

$$S' = \frac{S}{a^2} z^2.$$

Ciò posto è facile dimostrare che *il volume* F(z) *della piramide parziale ammette per derivata precisamente l'area or ora trovata della rispettiva base.*

[1] *Geometria*: n. 946.

Per trovare la derivata di $F(z)$ occorre calcolarne anzitutto il rapporto incrementale; e perciò cominciamo col dare a z un incremento h che, per semplicità, supponiamo positivo. L'incremento

$$F(z+h)-F(z),$$

che corrispondentemente subisce la $F(z)$, non è altro che il volume del tronco di piramide, compreso fra i due piani condotti parallelamente alla base alle distanze dal vertice z e $z+h$.

Questo tronco di piramide ha l'altezza h, la base superiore di area

$$\frac{S}{a^2}z^2$$

e la base inferiore di area

$$\frac{S}{a^2}(z+h)^2,$$

ed è manifestamente compreso tra i due prismi di altezza h, che hanno rispettivamente codeste due basi; cosicchè avremo, ricordando la regola che dà il volume del prisma (I; n. 123),

$$\frac{S}{a^2}z^2\times h < F(z+h)-F(z) < \frac{S}{a^2}(z+h)^2\times h,$$

e quindi, dividendo tutto per l'incremento positivo h,

$$\frac{S}{a^2}z^2 < \frac{F(z+h)-F(z)}{h} < \frac{S}{a^2}(z+h)^2.$$

Se ora, tenendo fisso z, facciamo tendere h allo zero,

$$\frac{S}{a^2}(z+h)^2$$

tende manifestamente ad

$$\frac{S}{a^2}z^2;$$

e il rapporto incrementale di $F(z)$, che deve restar compreso tra $\frac{S}{a^2}z^2$ e una variabile che tende a questo limite, dovrà tendere esso stesso al medesimo limite; onde sarà

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{S}{a^2}z^2,$$

cioè

$$F'(z)=\frac{S}{a_2}z^2.$$

In conclusione la funzione ancora incognita $F(z)$ deve soddisfare alla duplice condizione di annullarsi per $z=0$ e di ammettere la derivata suindicata, cosicchè si conclude (n. 235)

$$F(z)=\int_0^z\frac{S}{a^2}x^2\,dx,$$

ossia, tenendo conto del risultato del n. 238 e scrivendovi $\frac{S}{a^2}$ al posto di a,

$$F(z) = \frac{1}{3}\frac{S}{a^2}z^3.$$

Questo è il volume della piramide parziale di altezza z: il volume della piramide data si otterrà ponendo nella funzione precedente $z = a$. Otteniamo così

$$\frac{1}{3}\frac{S}{a^2}a^3,$$

cioè la nota espressione (I; n. 134)

$$\frac{1}{3}Sa,$$

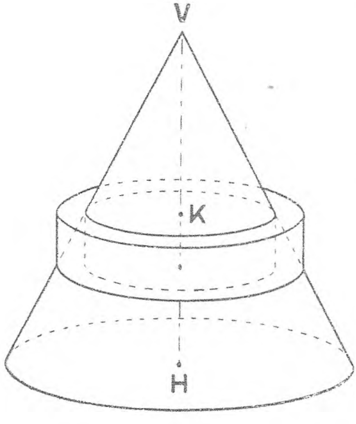
che qui appare (n. 236) come il valore dell'integrale definito

$$\int_0^a \frac{S}{a^2}x^2dx.$$

241. In modo perfettamente analogo si trova il volume del cono circolare di altezza a e di raggio r.

Qui l'area della base è πr^2 e il piano condotto parallelamente alla base alla distanza $z < a$ dal vertice, sega il cono dato secondo un cerchio di base

$$\frac{\pi r^2}{a^2}z^2.$$



Considerato il volume $F(z)$ del cono parziale che ha codesta base, si dimostra come pocanzi (e precisamente confrontando il tronco di cono compreso tra i due piani che distano dal vertice di z e $z + h$ coi due cilindri iscritto e circoscritto) che $F(z)$ ha per derivata l'area della base del cono parziale, cioè

$$\frac{\pi r^2}{a^2}z^2.$$

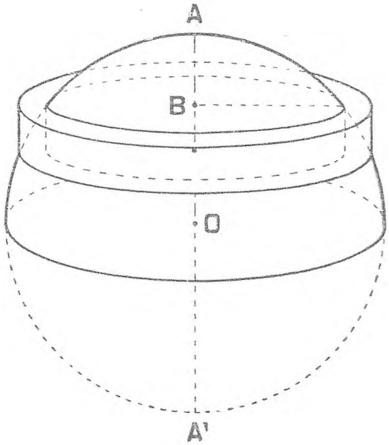
Siccome poi $F(z)$ per $z = 0$ si annulla, si conclude (nn. 235, 238)

$$F(z) = \int_0^z \frac{\pi r^2}{a^2}x^2dx = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{a^2}z^3;$$

e allora il volume del cono totale è dato da

$$F(a) = \int_0^a \frac{\pi r^2}{a^2}x^2dx = \frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

242. Consideriamo infine l'emisfero di raggio r e, chiamato OA il raggio perpendicolare al cerchio di base, indichiamo con $F(z)$ il volume del segmento sferico ad una base, che si ottiene segando l'emisfero col piano parallelo alla sua base e avente dal punto A la distanza $BA = z$. L'area della base di questo segmento si trova, notando che il rispettivo raggio, se A' è il punto della sfera diametralmente opposto ad A, è medio proporzionale tra $AB = z$ e $BA' = 2r - z$, come altezza di un triangolo rettangolo di ipotenusa AA'. Si ha perciò che il quadrato del raggio della base del segmento sferico è dato da



$$z(2r - z)$$

e l'area della base del segmento sferico è data da

$$\pi z(2r - z).$$

Ciò posto è facile dimostrare che *la funzione di* z *così determinata* (area della base del segmento sferico) *è precisamente la derivata di* F(z) (volume del segmento sferico stesso).

Invero, dato a z un incremento positivo h, l'incremento

$$F(z + h) - F(z),$$

che subisce corrispondentemente la $F(z)$, non è altro che il volume del segmento sferico a due basi segato sull'emisfero dai due piani paralleli alla base di questo e aventi da A le distanze z e $z + h$ rispettivamente; ed è perciò compreso fra i volumi dei due cilindri di altezza h aventi come basi rispettivamente la base superiore e inferiore del segmento a due basi considerato, cioè i due cerchi d'area

$$\pi z(2r - z)$$

e

$$\pi(z + h)(2r - z - h).$$

Avremo dunque

$$\pi z(2r - z)h < F(z + h) - F(z) < \pi(z + h)(2r - z - h)h$$

ossia, dividendo tutto per h,

$$\pi z(2r - z) < \frac{F(z + h) - F(z)}{h} < \pi(z + h)(2r - z - h);$$

e di qui, facendo tendere h allo zero, si deduce

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \pi z(2r - z)$$

cioè veramente

$$F'(z) = \pi z(2r - z).$$

Siccome poi $F(z)$ manifestamente per $z=0$ si annulla, concludiamo (n. 235) che

$$F(z)=\int_0^z \pi x(2r-x)dx.$$

Per calcolare effettivamente questo integrale indefinito, cioè la funzione che si annulla per $z=0$ e ammette la derivata

$$\pi z(2r-z)=-\pi z^2+2\pi rz \tag{4}$$

ricordiamo che una qualsiasi funzione di 3° grado

$$az^3+bz^2+cz+d$$

ha per derivata la funzione di 2° grado (n. 203)

$$3az^2+2bz+c;$$

cosicchè per trovare una funzione avente la derivata (4) basta prendere i coefficienti a, b, c, d in modo che risulti

$$3a=-\pi, \qquad 2b=2\pi r, \qquad c=0,$$

ossia

$$a=-\frac{\pi}{3}, \qquad b=\pi r, \qquad c=0.$$

Siamo così condotti alla funzione di 3° grado

$$-\frac{\pi}{3}z^3+\pi rz^2+d,$$

dove il termine d resta ancora indeterminato. Ma noi vogliamo ancora che la nostra funzione assuma per $z=0$ il valore zero.

Si è così condotti ad annullare il termine noto d e si conclude

$$F(z)=\int_0^z \pi x(2r-x)dx=\pi rz^2-\frac{\pi}{3}z^3.$$

Questo è il volume del segmento sferico ad una base di raggio r e di altezza z; e il volume dell'emisfero si otterrà ponendo nella precedente funzione $z=r$ cosicchè esso sarà dato da

$$F(r)=\int_0^r \pi x(2r-x)dx=\pi r^3-\frac{\pi}{3}r^3=\frac{2}{3}\pi r^3.$$

ESERCIZI ED APPLICAZIONI

I.

1. Calcolare:

1) $5^0 + 4^{-3} - 3^{-2}$
2) $3a^2 - 10a^{-3} + 5a^{-4}$
3) $3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^3$
4) $3^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$
5) $(a - b)(a^{-4} + a^{-3}b^{-1} + a^{-2}b^{-2} + a^{-1}b^{-3} + b^{-4})$

2. Calcolare:

1) $13^7 \cdot 13^{-4}$; $7^{-8} \cdot 7^3$; $12 \cdot 12^{-5}$;
2) $2a^{-2} \cdot 5a^{-3}$; $4b^6 \cdot 6b^{-5}$; $0{,}3c^5 \cdot 4c^{-2}$; $a^{x-3} \cdot 0{,}1a^{2-x}$;
3) $4^{-3} : 4^{-5}$; $8^{-6} : 8^{-9}$; $6^4 : 6^{-2}$; $5^{-3} : 5^{-2}$; $12a^{x+1} : 4x^{x-1}$; $35a^{x+3} : 7a^{3-x}$; $2a^{2x+2} : a^{x-1}$; $(3ab)^{-3} : (12bc)^{-3}$; $(10ax)^{-1} : (25x)^{-1}$
4) $(3^{-2})^3$; $(3^2)^3$; $(3^2)^{-3}$; $(3^{-2})^{-3}$; $\left(\sqrt{25}\right)^{-2}$; $\sqrt{25^{-3}}$; $\sqrt[3]{25^{-3}}$.

3. Calcolare:

1) $49^{\frac{1}{2}}$, $1{,}44^{\frac{1}{2}}$, $64^{-\frac{1}{6}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{-\frac{1}{3}}$;
2) $25^{\frac{3}{2}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $512^{-\frac{2}{3}}$, $1{,}728^{-\frac{1}{3}}$;
3) $\left(\frac{169}{196}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{125}{1728}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{1331}{512}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

4. Calcolare o semplificare:

1) $81^{\frac{1}{2}} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; $125^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{\frac{1}{6}}$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}0016^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}$, $\sqrt{a} \cdot a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{a} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{6}}$;
2) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{6ab}{25cd}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5ac}{3bd}\right)^{\frac{1}{2}}$;

3) $2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{3}{4}}$; $a^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{a^3}$; $a^{\frac{1}{2}} : \sqrt{a^3}$; $\sqrt{a^{-3}} : \sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{4}}$;

4) $\sqrt[3]{125^2}$; $(64^2)^{\frac{1}{3}}$; $(144^3)^{-\frac{1}{2}}$; $\left(49^{\frac{5}{6}}\right)^3$; $\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}$; $\sqrt[3]{81^{\frac{3}{4}}}$; $(\sqrt{a^3})^4$; $\left(\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

5. Dimostrare che per

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

si ha, qualunque sia il numero n,

$$x^y = y^x.$$

6. Ricordando che

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots,$$

si dimostri che $a^{\frac{1}{3}}$ è il limite comune cui tendono le due successioni (cfr. n. 21)

$$\begin{cases} a^0 \qquad a^{0,3} \qquad a^{0,33}\ldots \\ a^1 \qquad a^{0,4} \qquad a^{0,34}\ldots. \end{cases}$$

NOTA. — Il teor. prec. vale per ogni esponente razionale riducibile in numero decimale illimitato periodico e costituisce un complemento importante (e, a rigor di logica, necessario) alle considerazioni dei nn. 21-24, in quanto assicura che la definizione data al n. 21 per la potenza di un numero positivo ad un esponente decimale illimitato non contraddice, se l'esponente è razionale, alla definizione diretta (n. 5).

II.

7. Descrivere su carta millimetrata, fra $x = -2$ e $x = +2$, la curva esponenziale di base 3, cioè la grafica della funzione

$$y = 3^x.$$

8. Calcolare $\text{Log}_5 10$, $\text{Log}_{11} 75$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$.

9. Sapendo che Log 2 = 0,3010, calcolare: Log 200, log 2000 000, Log 0,002, Log 0,5, Log 5, Log 8, Log 0,64, Log 1,28, Log 6,25.

10. Di quanti numeri interi occorre conoscere il Logaritmo per poter calcolare i Logaritmi di tutti i numeri interi da 1 a 50 inclusivo?

11. Calcolare, in cifra tonda, 9^9, $(9^9)^9$, 9^{99}, 9^{9^9}.

12. In un sistema di logaritmi, il logaritmo di 13,52 supera di 3 quello di 3,67. Qual'è la base? Quali sono i due logaritmi?

13. Risolvere, senza l'uso delle Tavole, le equazioni:

1) $\mathrm{Log}(20x+12)+\mathrm{Log}(32x-8)=\mathrm{Log}\,15$

2) $\mathrm{Log}(3x-5)-(\mathrm{Log}(6x+1)=\mathrm{Log}\,3$

3) $4\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}+3\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{3}=5\,\mathrm{Log}\,x-\mathrm{Log}\,27$

4) $\mathrm{Log}\sqrt{7x-2}-\mathrm{Log}\sqrt{3-x}=1+\mathrm{Log}\,3{,}2$

5) $\mathrm{Log}(2x-5)+\mathrm{Log}(3x+1)=1.$

14. Trovare un numero x tale che il doppio del suo Logaritmo superi di 2 il Logaritmo di $x-9$.

15. Per quali valori di a l'equazione

$$x^2-\sqrt{2x}+\mathrm{Log}\,a=0$$

ammette due radici distinte?

16. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ [risoluzione immediata]

2) $5^x=64$

3) $7^x=80^{x-1}$

4) $2^x=3^{x+5}$

5) $6^{-2x}=7^{3-x}$

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}.$

17. Risolvere le equazioni:

1) $4^{x+1}\cdot 7^{3x-2}=8$

2) $3^{2x+1}\cdot 4^{2x-1}=1$

3) $12^x\cdot 7^{4x-1}=5^{3-x}$

4) $\sqrt{6^{x+1}}\sqrt{3^{x-1}}=\sqrt{7}$

5) $8^x+8^{x+2}=13^x$

6) $2^{2x+1}+4^{x+1}=1$

7) $7^x+3\cdot 7^x=33$

8) $8^x+5\cdot 8^{x-1}=27$

9) $3^x+8\cdot 3^{x-3}=7\cdot 5^x+2\cdot 5^{x+1}$

10) $9^x+5\cdot 3^{2x}=7\cdot 3^{2x-1}.$

18. Risolvere l'equazione esponenziale

$$x^x=x.$$

19. Quale valore ha x se è

$$a^x+a^{-x}=5$$

dove $a=2{,}7183$?

20. Risolvere le equazioni:

1) $\mathrm{Log}\,x=\frac{1}{4}[3\,\mathrm{Log}\,a+\mathrm{Log}\,b]-\frac{1}{6}\mathrm{Log}(3a+b)$

2) $\log_c x=\frac{1}{\log_a c}+\frac{1}{\log_b c}.$

[Per risolvere la 2) si ponga $\log_c x = y$, $\log_a c = u$, $\log_b c = v$; allora risulta $c^y = x$, $a^u = c$, $b^v = c$ e quindi ecc.].

21. Risolvere l'equazione

$$4 \cdot 5^{x+2} = 5 \cdot 4^{\frac{2x+1}{x}}.$$

[Si dividano ambo i membri per $4 \cdot 5$].

22. Risolvere l'equazione

$$\frac{\operatorname{Log}(5-x)}{\operatorname{Log}(35-x^3)} = \frac{1}{3}.$$

23. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y = b. \end{cases}$$

24. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y = b. \end{cases}$$

25. Ridurre in misure decimali 4572000 Yards (1 Yard = m. 0,9144), 3457 Miglia inglesi (1 miglia inglese = m. 1609), 278300000 Tese (1 Tesa = m. 1,949), 27300 Miglia marine (1 Miglio marino = 1851,85), 49500 Miglia geografiche (1 Miglio geografico = m. 7420,44).

26. Qual'è lo spigolo di un cubo d'argento, che pesa 1 Kg.? [Peso specifico = 10,51].

27. Quanto costa una palla d'oro di 5 cm. diametro se l'oro costa L. 3,60 al grammo e il suo peso specifico è di 19,26?

28. La superficie del Regno d'Italia è, ora, di Km.^{2} 286 682, di cui 236 465 di terraferma e 50 217 di isole. Se si rappresenta la terraferma con un quadrato di cm. 5 di lato, come si deve prendere il lato di un altro quadrato, perchè rappresenti la superficie insulare?

29. Rappresentata la superficie attuale del Regno d'Italia con un cerchio di 5 cm. di diametro, dividere questo cerchio in due settori che rappresentino rispettivamente la superficie della terraferma e la superficie insulare (cfr. eserc. prec.). Quali sono i rispettivi angoli al centro?

30. Presa come unità la distanza della Terra dal Sole, calcolare, in base alla terza legge di KEPLERO, le distanze degli altri pianeti dal Sole, sapendo che le rispettive durate delle rivoluzioni sono date, in giorni siderali, dai numeri seguenti: Mercurio 87,969; Venere 224,701; Terra 365,256; Marte 686,980; Giove 4332,588; Saturno 10759,201; Urano 30586,29; Nettuno 60188,71.

31. Preso come unità il diametro (medio) della Terra il diametro del Sole è dato da 108,6 e quelli degli altri pianeti hanno i valori seguenti:

Mercurio 0,373; Venere 0,999; Marte 0,528; Giove 11,06; Saturno 9,299; Urano 4,234; Nettuno 3,798.

In quali rapporti stanno i volumi dei vari pianeti a quello del Sole?

32. Secondo un' antica favoletta indiana, l' inventore del giuoco degli scacchi chiese ad un principe come prezzo della sua invenzione tanti chicchi di grano, quanti se ne ottengono contando 1 chicco pel primo quadro della scacchiera, 2 pel secondo, 4 pel terzo e così via, cioè raddoppiando per ogni nuovo quadrato il numero dei chicchi ottenuto pel quadrato precedente. Computare in cifra tonda il numero di chicchi che così si raggiunge e valutare, sempre per approssimazione, l' equivalente numero di ettolitri di grano, ammettendo che, all' ingrosso, 1 hl. di grano comprende 1 500 000 chicchi.

Progressione aritmetica. — Dicesi *progressione aritmetica* una successione di numeri tali che la differenza di ciascun termine dal precedente sia uguale ad un numero fisso. Questo numero dicesi *differenza* della progressione.

Una progressione aritmetica di n termini, che abbia per primo termine a e per differenza d è data da

$$a \qquad a+d \qquad a+2d \,\ldots\ldots \qquad a+(n-1)d.$$

33. Dimostrare che la somma S dei termini di una progressione aritmetica di n termini

$$a_1 \qquad a_2 \ldots\ldots \qquad a_n$$

si ottiene moltiplicando per n la semisomma degli estremi, cioè

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

34. La somma S degli n termini di una progressione aritmetica avente il primo termine a e la differenza d è data da

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2} d.$$

35. Calcolare la somma dei primi n numeri interi.

36. Calcolare la somma dei primi n numeri interi dispari.

37. Calcolare la somma dei primi n numeri interi pari.

38. Un carrettiere deve portare della ghiaia su di una strada versandone un carro ad ogni 5 metri. Sapendo che egli va a prendere la ghiaia dal greto di un torrente a 500 metri dal punto dove deve versare il primo mucchio, quale cammino complessivo avrà percorso, quando avrà portato la ghiaia su di un tratto di strada di 400 m. a partire dal primo mucchio?

39. Un pendolo compie una prima oscillazione, la cui metà ha l'ampiezza di 20°: sapendo che ad ogni mezza oscillazione la rispettiva ampiezza diminuisce del 5 %, quale cammino in gradi, minuti e secondi percorrerà il pendolo in 15 oscillazioni intere?

40. Una palla di gomma rimbalza, ogni volta che batte sul terreno, ad un'altezza uguale ai $\frac{2}{3}$ di quella da cui è caduta. Se la prima volta è caduta dall'altezza di 5 m., quale cammino complessivo ha percorso quando batte sul terreno per la decima volta?

Progressioni geometriche. — Dicesi *progressione geometrica* una successione di numeri, tali che il rapporto di ciascun suo termine al precedente sia uguale ad un numero costante, il quale dicesi *ragione* della progressione geometrica.

Perciò la progressione geometrica di n termini, avente il primo termine a e la ragione q è data da

$$a \qquad aq \qquad aq^2 \ldots \qquad aq^{n-2} \qquad aq^{n-1}.$$

41. Dimostrare che in una progressione geometrica il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è uguale al prodotto del primo termine per l'ultimo.

42. Dimostrare che in una progressione geometrica ogni termine (diverso dal primo e dall'ultimo) è medio geometrico fra il precedente e il consecutivo.

43. Dimostrare che la somma S dei termini della progressione geometrica

$$a \qquad aq \qquad aq^2 \ldots \qquad aq^{n-1}$$

è uguale alla differenza fra il termine che seguirebbe l'ultimo e il primo, divisa per la ragione diminuita di 1, cioè

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

[Scritta la somma S, si riscriva la stessa somma moltiplicata per q, si calcoli $Sq - S$, ecc.].

44. Si calcoli la ragione della progressione geometrica di n termini che ha per primo e ultimo termine due numeri dati a e b rispettivamente.

45. Si calcoli, col sussidio dei Logaritmi, il 5° termine della progressione geometrica di 23 termini che ha per primo termine 18 e per ultimo 77.

46. Dimostrare che i Logaritmi dei termini di una progressione geometrica, costituiscono una progressione aritmetica. Qual'è la differenza di questa?

47. Si considerino due progressioni, l'una aritmetica e avente il primo termine 0, l'altra geometrica e avente il primo termine 1. Dimostrare che ciascun termine della progressione aritmetica è il Logaritmo, in una certa base, del termine di ugual posto della progressione geometrica. Se d è la differenza della progressione aritmetica e q è il quoziente della progressione geometrica qual'è codesta base?

CALCOLO DI UNA TAVOLA DI LOGARITMI A TRE DECIMALI [1].

48. Si calcolino, secondo la nota regola, con successive estrazioni di radici quadrate, e con tre cifre decimali,

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt[4]{10}, \quad \sqrt[8]{10}, \ldots$$

cioè

$$10^{\frac{1}{2}}, \quad 10^{\frac{1}{4}}, \quad 10^{\frac{1}{8}}, \ldots$$

Riducendo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ a forma decimale, con quattro cifre dopo la virgola, otteniamo la Tavoletta

Num.	Log.	Num.	Log.
10,000	1,0000	1,037	0,0156
3,162	0,5000	1,018	0,0078
1,778	0,2500	1,009	0,0039
1,334	0,1250	1,005	0,0020
1,155	0,0625	1,002	0,0010
1,075	0,0313	1,001	0,0005

Osserviamo che nella colonna dei Numeri ciascun termine è il quadrato del successivo.

49. Preso un qualsiasi numero compreso fra 1 e 10 (e a tre decimali), p. es. 1,694, si considerino i due termini consecutivi che nella colonna dei Numeri della Tavoletta prec. comprendono il numero dato. Nel nostro caso avremo

$$1{,}778 > 1{,}694 > 1{,}334.$$

(1) SUPPANTSCHITSCH: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra;* Wien, 1912.

Dimostrare che, dividendo il numero dato per il minore dei due numeri che sulla Tavola lo comprendono, si ottiene un quoziente minore del numero dato. [Si ricordi l'osservazione dell'eserc. prec.].

50. Ogni numero compreso tra 1 e 10 (e avente al più 3 cifre decimali) si può esprimere come prodotto di fattori appartenenti alla colonna dei Numeri della Tavoletta dell'eserc. 48. P. es., fissato il numero 2,7 abbiamo successivamente

$$\begin{array}{lcl} 3{,}162 > \ \ 2{,}7 > 1{,}778 & \qquad & 2{,}7 : 1{,}778 = 1{,}519 \\ 1{,}778 > 1{,}519 > 1{,}334 & & 1{,}519 : 1{,}334 = 1{,}139 \\ 1{,}155 > 1{,}139 > 1{,}075 & & 1{,}139 : 1{,}075 = 1{,}060 \\ 1{,}075 > 1{,}060 > 1{,}037 & & 1{,}060 : 1{,}037 = 1{,}022 \\ 1{,}037 > 1{,}022 > 1{,}018 & & 1{,}022 : 1{,}018 = 1{,}004 \\ 1{,}005 > 1{,}004 > 1{,}002 & & 1{,}004 : 1{,}002 = 1{,}002 \end{array}$$

e quindi

$$2{,}7 = 1{,}778 \cdot 1{,}334 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}002 .$$

I fattori in cui così si decompone il numero dato sono decrescenti.

51. Come si calcola, in base agli eserc. 49,50, il Logaritmo di ogni numero compreso tra 1 e 10, e avente, al più, tre cifre decimali? Si accorci il risultato a tre cifre decimali.

i	$1 + \frac{i}{100}$	$\text{Log}\left(1 + \frac{i}{100}\right)$
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149 403498
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159 881054
4	1,04	0,0170 333393
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180 760637
$4\frac{1}{2}$	1,0450	0,0191 162905
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201 540317
5	1,05	0,0211 892991
$5\frac{1}{4}$	1,0525	0,0222 221045
$5\frac{1}{2}$	1,055	0,0232 524596

52. Trovare ciò che diventa una somma di L. 3 500 collocata ad interesse composto al $4\,^1/_2\,\%$ per 15 anni.

53. Quale somma devesi collocare all'interesse composto del $5\,\%$ per avere dopo 20 anni 25 000 lire?

54. Dopo quanto tempo un capitale di L. 12 000, collocato all'interesse composto del $4\,^3/_4\,\%$, dà luogo ad un montante di L. 20 000?

55. A quale saggio devesi collocare una somma di 15 000 lire perchè, coi suoi interessi composti, dia luogo in 12 anni ad un montante di L. 25 000?

56. In quanti anni si raddoppia un capitale collocato ad interesse composto al $5\,\%$?

57. Qual'è il montante di un capitale c, prestato per n anni all'interesse composto dell'$i\,\%$, se gli interessi si capitalizzano semestralmente?

58. Si collocano 12 000 Lire al $4\,^1/_2\,\%$, convenendo che gli interessi vengano capitalizzati semestralmente: quale montante si raggiunge alla fine di 20 anni? Quale montante si raggiungerebbe capitalizzando gli interessi annualmente?

ANNUALITÀ. — Diconsi *annualità* le somme uguali che si versano ogni anno per un certo periodo di tempo e restano collocate ad interesse composto ad un dato saggio, sia per costituire un capitale sia per estinguere un debito. Nel primo caso l'annualità si versa al principio di ciascun anno, nel secondo alla fine di ciascun anno.

59. *Costituzione di un capitale.* — Dimostrare [tenendo conto dell'eserc. 43] che, versando per n anni, al principio di ogni anno una annualità di a Lire al saggio dell'$r\,\%$, si costituisce un capitale

$a+a$

$$A = \frac{a(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

60. Quale capitale si costituisce versando all'interesse composto del $5\,\%$, per 25 anni, al principio di ciascun anno, un'annualità di L. 450?

61. Quale annualità bisogna versare al principio di ogni anno per costituire alla fine di 20 anni, all'interesse composto del $4{,}5\,\%$, un capitale di L. 50 000? [Valersi della formola dell'eserc. 59, e di una Tavola di Logaritmi a 6 o 7 decimali].

62. Una compagnia industriale vuol contrarre un prestito, pel quale dispone di versare per 40 anni, al principio di ogni anno, una annualità di L. 50 000. Quale somma potrà procurarsi al saggio del $5\,\%$?

63. Un impiegato inizia la sua carriera con uno stipendio di L. 3000 annue, il quale aumenta alla fine di ogni quinquennio di L. 500. Egli lascia alla fine di ogni anno una ritenuta pensione del 5 % sul suo stipendio. Si domanda il capitale costituito da codesta ritenuta, all'interesse composto del 4 ¼ %, quando l'impiegato, alla fine del 35° anno di servizio, prende il riposo (cfr. eserc. seguente).

64. *Estinzione o ammortamento di un prestito.* — Dimostrare che versando per n anni, alla fine di ogni anno, una annualità di Lire a all'interesse composto di saggio unitario r, si estingue o ammortizza un prestito di Lire

$$A = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}.$$

65. Si contrae un prestito di L. 80 000 all'interesse del $3\frac{1}{2}$ %. Quale annualità si dovrà versare alla fine di ogni anno, per ammortizzare il prestito in 25 anni?

66. Un tale conviene di estinguere un suo debito pagando tre rate di L. 1000 ciascuna, la prima fra un anno, la seconda fra due anni, la terza fra tre. Qual'è l'ammontare attuale del debito, se il saggio convenuto è del 4,5 %?

67. Un commerciante ha contratto con una Banca un prestito di L. 15 000 da ammortizzare per annualità posticipate in 15 anni al 5 %: dopo 12 anni egli vuole liberarsi con un solo versamento di tale impegno: quanto deve versare?

III.

68. La Luna nel suo moto (supposto, in prima approssimazione, circolare) intorno alla Terra percorre ogni giorno un arco di 12°11′26,7″; in quanti giorni, ore, minuti e secondi compie essa il suo giro?

69. In un parallelepipedo rettangolo gli angoli α, β, γ che la diagonale forma cogli spigoli sono tali che

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

70. Dimostrare l'identità

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

71. Dire a quale quadrante appartiene l'angolo α se:

1) $\operatorname{sen}\alpha > 0, \quad \cos\alpha < 0;$
2) $\operatorname{sen}\alpha < 0, \quad \operatorname{cotg}\alpha < 0;$
3) $\cos\alpha < 0, \quad \operatorname{tg}\alpha < 0;$
4) $\operatorname{sen}\alpha > 0, \quad \operatorname{tg}\alpha < 0;$
5) $\cos\alpha < 0, \quad \operatorname{cotg}\alpha > 0;$

72. Studiare la variazione della funzione

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

e disegnarne la grafica. [Si descrivano prima le grafiche di sen x e cos x].

73. Descrivere le grafiche delle funzioni

1) $$y = 2 \operatorname{sen} x - \cos x ;$$

2) $$y = 2 + 3 \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x ;$$

3) $$y = 1 - \cos x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x .$$

74. Dedurre dalla sinusoide le grafiche delle funzioni

1) $$y = \operatorname{sen} 2x ;$$

2) $$y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x ;$$

3) $$y = \operatorname{sen} 3x ;$$

4) $$y = \operatorname{sen} \frac{1}{3} x .$$

75. Descrivere la grafica della funzione

$$y = x^2 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x$$

per $0 < x < 2$.

76. Dimostrare che la grafica della funzione

$$y = x^2 + \frac{1}{100} \operatorname{sen} 100x ,$$

ove sugli assi si prenda come unità il centimetro, non si distingue sensibilmente dalla parabola che rappresenta la funzione $y = x^2$.

77. Preso sul circolo trigonometrico l'arco $x = \widehat{AM}$ (fig. al n. 100) la *secante* di x

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

è uguale in valore assoluto alla distanza OT fra l'origine e l'intersezione della retta OM colla tangente t al circolo nell'origine degli archi ed è positiva o negativa secondo che T appartiene alla semiretta OM o alla sua opposta.

78. Descrivere la grafica della funzione

$$y = \sec x .$$

79. Determinare gli archi che hanno la stessa secante di un dato arco.

80. Dato un qualsiasi angoli $x = \widehat{\xi m}$ a partire dall'origine degli angoli, e preso sul secondo lato m un qualsiasi punto P, la $\sec x$ è data dal rapporto della distanza OP (presa positivamente) all'ascissa di P.

81. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è uguale ad un cateto moltiplicato per la secante dell'angolo (acuto) compreso.

82. Dimostrare che

$$\sec(-x) = \sec x;$$
$$\sec(\pi - x) = -\sec x.$$

83. Preso sul circolo trigonometrico l'arco $x = \widehat{AM}$ (fig. al n. 107) la *cosecante* di x

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

è uguale in valore assoluto alla distanza OT_1 fra l'origine e l'intersezione della retta OM colla tangente al circolo trigonometrico nell'estremo B del primo quadrante; ed è positiva o negativa, secondo che T_1 appartiene alla semiretta OM o alla sua opposta.

84. Determinare gli archi che hanno la stessa cosecante di un dato arco.

85. Dimostrare che

$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x, \qquad \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x,$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x, \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x,$$
$$\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cosec} x, \qquad \operatorname{cosec}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec x.$$

86. Dedurre, in base alle identità precedenti, la grafica della funzione

$$y = \operatorname{cosec} x$$

dalla grafica (eserc. 78) della funzione

$$y = \sec x.$$

[Cfr. n. 96].

87. Dato un qualsiasi angolo $x = \widehat{\xi m}$ a partire dall'origine degli angoli, e preso sul secondo lato m un qualsiasi punto P, la $\operatorname{cosec} x$ è data dal rapporto della distanza OP (presa positivamente) all'ordinata di P.

88. In un triangolo l'ipotenusa è uguale ad un cateto moltiplicato per la cosecante dell'angolo (acuto) opposto al cateto.

89. Calcolare tutte le funzioni trigonometriche di un arco di cui si conosca la secante o la cosecante.

90. In un semicerchio di diametro $AB=1$, si conduca da A la corda AM tale che sia $\widehat{MAB}=\alpha$. Condotta la corda BM e le tangenti al cerchio in A e B e prolungate le corde fino a segar le tangenti, si esprimano tutti i segmenti della figura per mezzo delle funzioni trigonometriche di α e se ne deducano le relazioni fondamentali fra codeste funzioni.

91. Dimostrare che per un arco α qualsiasi:

1) $$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1};$$

2) $$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha;$$

3) $$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha};$$

4) $$\frac{1}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha;$$

5) $$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha+1:\operatorname{sen}\alpha};$$

6) $$(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)=(1+\operatorname{sen}\alpha)(1+\cos\alpha);$$

7) $$\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{cotg}\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha;$$

8) $$2(\operatorname{sen}^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0;$$

9) $$\operatorname{sen}\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{cotg}\alpha)=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}.$$

92. Dedurre la formola

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

dalla formola

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

93. Trasformare le seguenti espressioni, in modo che vi compaiano soltanto funzioni di α e β:

1) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

2) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\pm\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\pm\cos(\alpha+\beta)};$$

3) $$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta),\qquad \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta);$$

4) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},\qquad \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)};$$

5) $$\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)\pm\cos^2(\alpha-\beta).$$

94. Dimostrare che:

1) $$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha;$$

2) $$\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\beta=\cos\alpha;$$

3) $$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\beta;$$

4) $$\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta;$$

5) $$\cos(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\alpha-\cos(\alpha+\gamma)\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\beta-\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)\cos\gamma.$$

95. Dimostrare che in ogni triangolo si ha

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

[Si calcoli $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$ applicando due volte la formula del n. 119 e si ricordi che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$].

96. Dimostrare che se

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

si ha

1) $$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2};$$

2) $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1;$$

3) $$\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} = \operatorname{cotg}\beta + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma} = \operatorname{cotg}\gamma + \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha}$$

[Per dimostrare la 2) si parta da $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$, si sviluppi, si portino nel primo membro i termini contenenti coseni, si innalzino ambo i membri a quadrato ecc.].

97. Calcolare il seno e il coseno di

$$\alpha + \beta + \gamma, \qquad \alpha + \beta - \gamma, \qquad \alpha - \beta - \gamma$$

per mezzo dei seni e coseni di α, β, γ.

98. Calcolare $\operatorname{sen} 3x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 3x$ per mezzo delle funzioni trigonometriche dell'arco x.

99. Semplificare

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$$

e

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x.$$

100. Esprimere $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ per mezzo di $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\operatorname{sen} 2\beta$.

101. Trasformare le espressioni seguenti, facendovi comparire le funzioni trigonometriche dell'arco α o degli archi α e β:

1) $$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 \pm \cos 2\alpha}, \quad \frac{\cos 2\alpha}{1 \pm \operatorname{sen} 2\alpha}, \quad \frac{1 + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \operatorname{sen} 2\alpha};$$

2) $$2\operatorname{cotg} 2a, \quad \operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}, \quad \frac{4\operatorname{cotg} 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}, \quad \frac{\operatorname{sen}(2\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha} - 2\cos(\alpha + \beta).$$

102. Dimostrare che:

1) $$\operatorname{sen} 2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1),$$
$$\cos 2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha);$$

2) $$\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha}, \qquad \frac{2\operatorname{cotg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha);$$

3) $$2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta + 2\cos^2\alpha\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

103. Dimostrare che:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \operatorname{sen}\alpha, \qquad 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha},$$

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}.$$

104. Dimostrare che si ha

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha}.$$

105. Dimostrare che per gli angoli α, β, γ di un triangolo si ha:

1) $$\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta + \operatorname{sen}2\gamma = 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma;$$

2) $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}.$$

[Per la 1) si applichi a $\operatorname{sen}2\alpha + \operatorname{sen}2\beta$ la formola del n. 127 e poi si ponga $\operatorname{sen}2\gamma = -2\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha+\beta)$; per la 2) si applichi a $\cos\alpha + \cos\beta$ la formola del n. 127 e poi si ponga $\cos\gamma = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}$].

106. È noto che la legge che lega l'*angolo di incidenza* i all'*angolo di rifrazione* r è data da

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r.$$

Presi in un cerchio di raggio 1 due raggi OA, OB tali che $\widehat{AOB}$ risulti uguale all'*angolo di deviazione* $i - r$ e preso sul raggio OA il punto C tale che OC risulti uguale all'*indice di rifrazione* n, si dimostri che gli angoli del triangolo BOC sono: $i - r$, r, $\pi - i$; e si deduca di qui la costruzione di uno degli angoli i, r, quando si conoscono l'altro e l'indice n.

[Indicato con x l'angolo in C, si osservi che $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} r \operatorname{sen}(x + i - r)$, si trasformino i due membri in somme di due coseni (n. 127), ecc.].

107. Trovare due angoli conoscendo la loro somma σ e il rapporto k dei loro seni. [Si prenda come angolo ausiliare l'angolo θ tale che $\operatorname{tg}\theta = k$ e dalla

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \operatorname{tg}\theta$$

si deduca

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tg}\theta - 1}{\operatorname{tg}\theta + 1} = \operatorname{tg}(\theta - 45^\circ)$$

e quindi, per le formole del n. 127,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)} = \operatorname{tg}(\theta - 45^\circ), \text{ ecc.}].$$

108. Dimostrare che se tre archi α, β, γ soddisfanno alla

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$

(cfr. eserc. 96), fra α, β, γ deve sussistere una delle seguenti relazioni (dove k è un intero, positivo o negativo, qualsivoglia):

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= (2k+1)\pi, \\ -\alpha + \beta + \gamma &= (2k+1)\pi, \\ \alpha - \beta + \gamma &= (2k+1)\pi, \\ \alpha + \beta - \gamma &= (2k+1)\pi. \end{aligned}$$

[Aggiungendo e togliendo a primo membro $\cos^2\beta\cos^2\gamma$, si metta in evidenza il quadrato di $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma$; tutti gli altri termini, trasportati nel primo membro, danno un altro quadrato, preso negativamente: si decomponga la differenza dei due quadrati e si applichino le formole del n. 127].

109. Calcolare la somma dei coseni di n archi in progressione aritmetica

$$\alpha, \qquad \alpha+\delta, \qquad \alpha + 2\delta, \ldots, \qquad \alpha + (n-1)\delta.$$

[Codesta somma è data da

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{n\delta}{2}\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right)}{\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}};$$

e si ottiene partendo dalla formola (n. 127)

$$2\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos(\alpha + i\delta) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2i+1}{2}\delta\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2i-1}{2}\delta\right),$$

ponendo in questa $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ecc.].

110. La differenza fra la misura circolare di un arco $\left(\text{minore di } \frac{\pi}{2}\right)$ e il rispettivo seno è minore di un quarto del cubo dell'arco; cioè

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{1}{4}x^3.$$

[Si osservi che (n. 125)

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x \cos^2\frac{1}{2}x = 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x\right)$$

e si ricordi che (n. 129)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x > \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\Big].$$

111. Con quale approssimazione il seno è dato dalla misura circolare del rispettivo arco, quando l'arco è di 1° o di 1′ o di 1″?

112. Fino a quanti gradi si può sostituire al seno la misura circolare dell'arco, senza commettere un errore maggiore di 0,001?

113. La differenza fra l'unità e il coseno di un arco del primo quadrante è minore della metà del quadrato della misura circolare dell'arco stesso; cioè

$$1-\cos x < \frac{1}{2}x^2.$$

[Si ricordi che

$$1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x, \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x\Big].$$

114. Fino a qual valore dell'arco x possiamo star certi che $\cos x$ ha le prime tre cifre decimali uguali a 9?

115. Per un arco x del primo quadrante, misurato in radianti, la differenza fra $\cos x$ e $1-\dfrac{x^2}{2}$ è minore di $\dfrac{x^4}{16}$.

[Si ha $\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$ e di più (eserc. 110) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} > \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{32}$ e quindi $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} > \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{32} + \left(\dfrac{x^2}{32}\right)^2$ e, *a fortiori*, $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} > \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{32}$, ecc.].

116. Con quale approssimazione $1-\dfrac{x^2}{2}$ fornisce il valore di $\cos x$ per $x = 1°$ o $1'$ o $1''$?

117. Determinare graficamente, col sussidio di carta millimetrata, i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli di 10°, 20°, 30°, 40° e confrontarli coi valori che si ricavano dalle Tavole.

118. Disegnare, col sussidio della squadra, del doppio decimetro e delle Tavole logaritmico-trigonometriche un angolo di 20°30′, di 64°40′, di 5°.

119. Su di una circonferenza si portano a partire da un punto A tanti archi consecutivi uguali $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, ... aventi ciascuno per corda la metà del raggio. Dopo quanti archi si troverà per la prima volta un punto M tale che la corda AM risulti minore di $\frac{1}{10}$ del raggio?

120. Supponendo che le due sfere di un orologio siano entrambe lunghe cm. 75, qual'è la distanza delle loro estremità alle 3^h? alle $4^h30'$? alle $6^h15'$?

121. Una scala a piuoli lunga m. 4,80 è appoggiata ad un muro, in modo da toccarlo a m. 4,30 dal suolo. Quale angolo forma la scala col suolo?

122. Una strada di pendio uniforme sale in 2 km. di m. 80. Qual'è l'angolo di inclinazione della strada?

123. Il braccio di una bilancia, lungo cm. 35 si abbassa dalla posizione orizzontale di un angolo di 4°: di quanto si abbassa l'estremo?

124. Una scaletta a piuoli doppia, lunga m. 3,20, è appoggiata sul suolo coi due estremi alla distanza di cm. 72. Quale angolo formano le due parti?

125. Quale deve essere l'angolo d'inclinazione dei raggi solari perchè l'ombra di un uomo alto m. 1,76 risulti lunga 10 m.?

126. Qual'è la lunghezza del parallelo terrestre, che passa per Genova, la cui latitudine è di 44°24'16''.

[Si supponga la Terra sferica e se ne valuti il raggio in km. 6370].

127. Un muro, alto 8 m., che va da Est ad Ovest incontra ad angolo retto un altro muro, di uguale altezza, che va da Nord a Sud. L'ombra del punto comune alle creste dei due muri cade a 3 m. a Nord del primo muro e a 4 m. ad Ovest del secondo. Qual'è in codesto momento l'angolo dei raggi solari col suolo?

128. In una commedia di ARISTOFANE un personaggio viene invitato a cena per l'ora in cui l'ombra dell'uomo è lunga dieci volte il suo piede. Se l'altezza dell'uomo è 6 volte e mezzo il piede, quale sarà in quell'ora l'angolo d'inclinazione dei raggi solari?

EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE. — Un'uguaglianza tra due espressioni che contengono delle funzioni trigonometriche di uno o più archi incogniti, dicesi *identità trigonometrica* se è verificata per ogni possibile valore di codesti archi; dicesi *equazione trigonometrica* se è valida solo per certi valori particolari degli archi suaccennati (*soluzioni* della equazione).

Esempi di identità trigonometriche sono forniti dalle relazioni fondamentali tra le funzioni trigonometriche (nn. 112-115), dalle formole per la somma e sottrazione degli archi (nn. 119, 122, 123), per la duplicazione e bisezione degli archi (nn. 125, 126), ecc.

Abbiamo invece risolto delle equazioni trigonometriche, per quanto semplicissime, quando abbiamo determinato gli archi aventi lo stesso seno o lo stesso coseno o la stessa tangente (nn. 87, 92, 103) di un arco dato.

Se un'equazione trigonometrica contiene, oltre le funzioni trigonometriche di un arco x, anche lo stesso arco x, come p. es.

$$\operatorname{sen} x = x + \operatorname{tg} x,$$

la risoluzione non si può in generale ottenere che in via approssimata. Se invece l'equazione contiene soltanto le funzioni trigonometriche di x, queste, in base alle relazioni fondamentali (nn. 112-115), si esprimono tutte per mezzo di una sola fra esse, p. es. di $\operatorname{sen} x$, e si assume appunto $\operatorname{sen} x$ come incognita ausiliare. Risolta l'equazione rispetto a $\operatorname{sen} x$, cioè determinati i valori di $\operatorname{sen} x$ che soddisfanno all'equazione, si risale da questi ai corrispondenti valori dell'arco incognito x (n. 87).

Questo procedimento generale riesce talvolta laborioso, e si cerca di semplificarlo ricorrendo ad opportuni artifici, che si apprendono soltanto col lungo esercizio.

129. Risolvere le seguenti equazioni:

1) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$;

[Trasportare il secondo termine nel secondo membro, quadrare, ecc.].

2) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$;

3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$;

4) $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x = 0$;

5) $4 \operatorname{sen}^2 x + 18 = \cos x$;

6) $2 \cos x = \operatorname{cotg} x$;

7) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$;

8) $\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x$;

9) $\operatorname{sen} x + \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

10) $\operatorname{sen} x - \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

11) $\cos x - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{6}$;

12) $\cos x + 12 \operatorname{sen}^2 x = 11$;

13) $5 \operatorname{sen} x - 2 \cos^2 x = 1$;

14) $\operatorname{sen} x - \cos^2 x = 5$;

15) $\operatorname{sen} x \cos x - 3 \cos^2 x + 2 = 0$.

130. Risolvere graficamente le equazioni:

1) $\operatorname{tg} x = x$;

[Si considerino le grafiche delle due funzioni $y = \operatorname{tg}$, $y = x$, ecc.]

2) $\operatorname{cotg} x = x$;
3) $\cos x = x$;
4) $\operatorname{sen} x = x$;

131. Risolvere graficamente le equazioni seguenti [ricordando che se si pone $\xi = \cos x$, $\eta = \operatorname{sen} x$ si ha $\xi^2 + \eta^2 = 1$; cfr. I; eserc. 366, 369, 370, 371]:

1) $4 \cos x = 3 \operatorname{sen} x$;
2) $6 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = 3$;
3) $4 \operatorname{sen} x = 6 + 7 \cos x$;
4) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$;
5) $2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = 3$;
6) $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$;
7) $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}\sqrt{3}$;
8) $2 \operatorname{sen} x = \cos^2 x$.

132. Per quale angolo il doppio del coseno è uguale al seno della metà dell'angolo?

133. Determinare l'angolo o gli angoli, pei quali la tangente supera di 1 il valore reciproco della somma del seno e del coseno.

134. Risolvere i sistemi:

1) $\operatorname{sen}(x - y) = \cos(x + y) = \frac{1}{2}$;
2) $\operatorname{tg}(x + y) = 2, \qquad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{1}{3}$;
3) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a, \qquad \cos x + \cos y = b$;
4) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 y = 1, \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1$;
5) $a \operatorname{sen} x - b \cos y = 0, \qquad \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1$.

135. CALCOLO LOGARITMICO DI ESPRESSIONI POLINOMIE. — Rendere calcolabile coi Logaritmi il binomio

$$x = a + b.$$

[Scritto

$$x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

si assuma l'angolo ausiliare θ, definito dall'equazione

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

e perciò calcolabile coi Logaritmi sotto la forma

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\theta = \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a,$$

si avrà

$$x = a(1 + \operatorname{tg}\theta) = a\,\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta}.$$

Ma (n. 127)

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right).$$

Quindi

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\cos\theta}, \text{ ecc.}$$

Se a e b sono positivi si può anche porre

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{b}{a};$$

e si trova

$$\left.a + b = a(1 + \operatorname{tg}^2\theta) = \frac{a}{\cos^2\theta}\right].$$

136. Rendere calcolabile coi Logaritmi il binomio

$$x = a - b.$$

[Si può applicare il metodo indicato dianzi; oppure, se $a < b$, porre

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{b}{a}.$$

Allora si trova

$$a - b = a(1 - \operatorname{sen}^2\theta) = a\cos^2\theta].$$

Nota. — I metodi suindicati ed altri analoghi permettono di ridurre una qualsiasi espressione polinomia ad un'altra avente un termine di meno, e così via via ad un'espressione calcolabile coi Logaritmi.

137. Calcolare coi Logaritmi le radici di un'equazione di 2° grado.

[Data l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e supposto

$$b^2 - 4ac > 0,$$

sappiamo che le due soluzioni sono date da

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $ac > 0$, si ponga

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{4ac}{b^2}$$

e si avrà

$$x = -\frac{b}{2a}[1 \mp \cos\theta]$$

e quindi (n. 126)

$$x_1 = -\frac{b}{a}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Se $ac < 0$, si ponga

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{4ac}{c^2}$$

e si avrà

$$x = -\frac{b}{2a}\,\frac{\cos\theta \mp 1}{\cos\theta}$$

e quindi

$$x_1 = -\frac{b}{a}\,\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}, \qquad x_2 = \frac{b}{a}\,\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}\Bigg].$$

Casi numerici:

a	b	c
0,375	0,943	— 1,57
2,325	6,842	1,235
4574	— 9834	— 3722
12,95	— 76,20	21,15

138. Discutere l'equazione

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

dove a, b, c sono numeri quali si vogliano e determinarne le soluzioni.

[Preso l'angolo ausiliare θ, dove

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a},$$

l'equazione si riduce a

$$\operatorname{sen}(\theta + x) = \frac{c\cos\theta}{a}$$

e quindi ecc.].

IV.

139. Su di una base di m. 125 sono costituiti da bande opposte due triangoli isosceli aventi l'angolo al vertice di $112°20''$ e $58°40'$ rispettivamente. Calcolare il lato del quadrato che ha la stessa area del quadrangolo così costruito, e verificare il risultato con un disegno nella scala di 1:1000.

140. Un triangolo di 54 cm.² di area ha un'altezza di cm. 6 e uno degli angoli alla rispettiva base di 30°. Calcolarne i tre lati.

141. Risolvere un triangolo, conoscendone gli angoli e una data altezza.

142. Un luogo ha la latitudine geografica di $\alpha°$. Qual'è il raggio del suo parallelo? Qual'è la lunghezza del grado su codesto parallelo? Raggio terrestre = km. 6370. Esempi: Cairo $30°5'$; Torino $45°4'$; Stockholm $59°20'$; Capo Nord $71°10'$.

143. Qual'è la superficie limitata fra un arco di raggio r e angolo al centro α e le tangenti agli estremi? P. es. $r =$ cm. 24, $\alpha = 135°$.

144. Un'antenna è fissata verticalmente al suolo per mezzo di tre fili di ferro, che partono dal suo punto medio, sono lunghi ciascuno 8 metri, e formano col suolo, supposto orizzontale, un angolo di 50° gradi. Qual'è l'altezza dell'antenna?

145. Qual'è la lunghezza complessiva della cinghia di trasmissione, non intrecciata, fra due ruote, i cui centri distano di m. 1,615 e i raggi sono rispettivamente di m. 0,989 e m. 0,571? [Condotta dal centro O' della ruota minore la perpendicolare $O'S$ al raggio OT della ruota maggiore che va al punto di contatto con una delle tangenti esterne comuni alle due ruote, si consideri il triangolo $OO'S$, ecc.].

146. La distanza dei centri di due cerchi è di mm. 714 e gli angoli delle tangenti comuni esterne ed interne sono rispettivamente di $36°10'$ e $104°20'$. Calcolare i raggi dei due cerchi.

147. Se a, b, c; a_1, b_1, c_1, sono i lati di due triangoli pitagorici (cioè due triangoli rettangoli i cui tre lati sono multipli di uno stesso segmento e quindi rappresentabili con numeri interi) si ha un nuovo triangolo pitagorico avente i lati $ab_1 + a_1b$, $bb_1 - aa_1$, cc_1. Dimostrare (teorema del VIETA) che in quest'ultimo triangolo uno degli angoli acuti è uguale alla somma di due angoli acuti dei due primi triangoli.

148. Si divida un angolo di un triangolo equilatero in tre parti uguali: in quali rapporti stanno fra loro le parti in cui resta diviso il lato opposto?

149. Un segmento da un punto della perpendicolare nel suo punto medio è visto sotto l'angolo α e da un punto della stessa perpendicolare e più vicino di a, sotto l'angolo β. Qual'è la lunghezza del segmento? Esempio:

$$a = \text{cm.}\,14{,}5; \qquad \alpha = 13^\circ; \qquad \beta = 27^\circ 20'.$$

150. Qual'è l'area di un segmento circolare la cui corda è di cm. 7 e l'altezza di cm. 2?

151. Una corda e il segmento determinato sulla tangente parallela dai lati dell'angolo al centro corrispondente alla corda stanno fra loro nel rapporto 3:5. Calcolare l'angolo al centro.

152. ALBRECHT DÜRER dice che il lato dell'ettagono regolare iscritto in un cerchio è circa la metà del lato del triangolo equilatero iscritto nel medesimo cerchio. Valutare l'errore che così si commette.

153. Qual'è il raggio di un ennagono regolare di 1 cm. di lato?

154. Qual'è la lunghezza delle diagonali di un pentagono o ennagono o pentadecagono regolare di dato perimetro, p. es. uguale ad 1 m.?

155. In quanto tempo un luogo di latitudine geografica di 40°30′ descrive, nella rivoluzione terrestre intorno all'asse, un cammino uguale al raggio terrestre (km. 6370) o alla distanza dalla Terra al Sole (km. 149 500 000)?

156. Due binari rettilinei si incontrano formando un angolo di 60° e si vogliono raccordare con un binario ad arco di circolo avente il raggio di 300 m. e volgente la convessità verso l'incrocio dei due binari rettilinei. A quale distanza dall'incrocio si dovrà fare il raccordo? Quale sarà la lunghezza del binario curvo? Si risolva il problema considerando, per semplicità una sola rotaia oppure tenendo presente che lo scartamento delle nostre ferrovie è di m. 1,445: e il tal caso si prenda il raggio di 300 m. per la rotaia esterna.

157. Se in un triedro α, β, γ designano le misure delle sezioni normali dei tre diedri e a, b, c le misure degli angoli delle tre faccie si ha

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

158. Dimostrare geometricamente il teorema del CARNOT (n. 149). [Cfr. *Geometria*; nn. 365-366].

159. Risolvere un triangolo, conoscendone un angolo γ, il lato opposto c e il rapporto $a:b$ degli altri due lati.

P. es. $\gamma = 60^\circ$, $c = \text{m.}\,10$; $a:b = 3:1$.

[Si applichi il teor. dei seni ad a e b ecc.].

160. In un parallelogramma le diagonali sono di cm. 24,5 e cm. 36,8 e il loro angolo è di 122°30'. Calcolare i lati e gli angoli del parallelogramma.

161. Tre cerchi di raggi dati si toccano esternamente a due a due: calcolare gli angoli delle congiungenti dei centri. P. es: $r_1 = 3{,}42$; $r_2 = 5{,}08$; $r_3 = 15{,}5$.

162. Risolvere il probl. prec. sotto l'ipotesi che il cerchio maggiore tocchi gli altri due esternamente.

163. Un triangolo ha un lato di cm. 80 e gli angoli adiacenti di 36°20' e 98°30'. Determinare le lunghezze dei due segmenti, in cui il lato dato è diviso dalla bisettrice del terzo angolo.

164. Un triangolo ha un lato di dm. 35,8 e gli angoli adiacenti di 68°50' e 73°20'. Calcolare la lunghezza della mediana relativa al lato dato.

165. Risolvere il triangolo che ha l'area di cm.² 45 240, un lato di cm. 365 e un angolo adiacente a questo di 52°10'.

166. Diviso un lato di un triangolo equilatero in tre parti uguali e congiunti i punti di divisione col vertice opposto, calcolare gli angoli che queste congiungenti formano fra loro e coi lati del triangolo, concorrenti con esse.

167. Calcolare tutti gli elementi di un triangolo, sapendo che un suo lato è di m. 15, gli altri due stanno nel rapporto 8:13 e gli angoli opposti nel rapporto 1:2.

168. Calcolare tutti gli elementi di un triangolo, sapendo che un suo lato è di m. 24, gli altri due stanno nel rapporto 8:9 e l'angolo compreso fra questi è di 42°20'.

169. Risolvere un triangolo conoscendo un lato a, l'angolo opposto α e la somma o differenza dei due lati b e c.

[Se è dato $b + c$, si ricava dal teor. sei seni

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e riducendo monomio il numeratore del secondo membro (n. 127) si ricava $\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, ecc. (cfr. n. 152)].

Se è dato $b - c$ si parte dalla

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e si procede analogamente].

170. Secondo teorema dei seni. — In un triangolo un lato sta al seno dell'angolo opposto come un altro lato al seno della somma degli angoli adiacenti; cioè

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \text{ ecc.}$$

171. Teorema delle cotangenti. — In un triangolo qualsivoglia si ha

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{b-a\cos\gamma}{a\operatorname{sen}\gamma}=\frac{c-a\cos\beta}{a\operatorname{sen}\beta},$$

$$\operatorname{cotg}\beta=\frac{c-b\cos\alpha}{b\operatorname{sen}\alpha}=\frac{a-b\cos\gamma}{b\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\operatorname{cotg}\gamma=\frac{a-c\cos\beta}{c\operatorname{sen}\beta}=\frac{b-c\cos\alpha}{c\operatorname{sen}\alpha}.$$

[Si rendano intere le formole dell'eser. prec. Si sviluppi $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ o $\operatorname{sen}(\beta+\gamma)$ o $\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)$ ecc.].

172. Formole del Briggs. — In un triangolo qualsiasi di perimetro $2p$ si ha

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \text{ecc.}$$

173. Formole del Cagnoli. — In un triangolo qualsiasi si ha

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{b-c}{a}\cos\frac{1}{2}\alpha,\quad \cos(\beta-\gamma)=\frac{b+c}{a}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha,\ \text{ecc.}$$

[Si tenga conto delle formole per la sottrazione degli archi (n. 122) e delle formole del Briggs (eserc. prec.)].

174. In un triangolo qualsiasi di area S e di perimetro $2p$, il raggio r del cerchio iscritto è dato da

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

[Si ricordi il n. 160 e l'eserc. 172].

175. In un triangolo qualsiasi di area S e perimetro $2p$, il raggio R del cerchio circoscritto è dato da

$$R=\frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{2\operatorname{sen}\gamma}=\frac{abc}{4S}.$$

[Si ricordi l'espressione di $\operatorname{sen}\gamma$ ottenuta al n. 160].

176. In un triangolo qualsiasi di area S e perimetro $2p$, i raggi r_a, r_b, r_c dei cerchi ex-iscritti sono dati da

$$r_a=\frac{S}{p-a}=p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha,\quad r_b=\frac{S}{p-b}=p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta,\quad r_c=\frac{S}{p-c}=p\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

177. Risolvere un triangolo, conoscendone la somma s di due lati, la somma t delle relative altezze e il raggio R del cerchio circoscritto. P. es.: $s =$ cm. 53, $t =$ cm. 48, $R =$ cm. 20. [Si ricordi che $a + b = (h_a + h_b)$ sen γ, ecc.].

178. Risolvere un triangolo, conoscendone il raggio r del circolo iscritto e gli angoli.

[Si ha

$$a = r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r\cos\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}, \text{ ecc.}\Big].$$

179. Risolvere un triangolo, conoscendone gli angoli e la differenza d fra la somma $a + b$ di due lati e il terzo lato c. Si ponga, p. es.,

$$\alpha = 65°10', \qquad \beta = 42°30', \qquad a + b - c = \text{cm. } 25.$$

[Introducendo come incognita ausiliare il raggio r del cerchio iscritto, si osservi che $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$ e quindi (eserc. 174)

$$r = \frac{1}{2}d\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma;$$

e si prosegua come all'eserc. prec.].

180. Risolvere un triangolo conoscendone un lato a, un angolo adiacente β e la somma o differenza degli altri due lati.

[Se è dato $b + c$, dalle (eserc. 172)

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(c-a)}{p(p-b)}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

si ricava

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{p-a}{p},$$

si calcola γ e si prosegue come al n. 151.

Se è dato $b - c$ si conoscono anche

$$p - b = \frac{1}{2}[a - (b - c)], \qquad p - c = \frac{1}{2}[a + (b - c)]$$

e si avrà

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{p-b}{p-c}, \text{ ecc.}].$$

181. Risolvere un triangolo conoscendone l'area S e gli angoli.

[Dalla

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

si ricava

$$a = \sqrt{\frac{2S \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}}, \text{ ecc.}\Big].$$

182. Risolvere un triangolo conoscendone il perimetro $2p$ e gli angoli.

[Dalle formole del BRIGGS (eserc. 172)

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

risulta (n. 160)

$$\frac{pS}{abc} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Di qui ponendo (nn. 157, 125)

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha = bc \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

risulta

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}, \text{ ecc.}\Big].$$

183. Calcolare i lati di un triangolo il cui perimetro è di 100 m. e gli angoli sono 50°, 60°, 70°.

184. Un triangolo ha il perimetro di m. 46, un angolo di 62°40′ e l'altezza relativa a quest'angolo di m. 12. Calcolare gli altri due lati.

185. Risolvere un triangolo, conoscendone gli angoli e il raggio R del cerchio circoscritto. [Si ricordi l'eserc. 175].

186. QUADRANGOLO ISCRITTIBILE. — In un quadrangolo $ABCD$, iscrittibile in un cerchio, si indichino con a, b, c, d i lati AB, BC, CD, DA, con α, β, γ, δ gli angoli di vertice A, B, C, D rispettivamente, e con m, n le diagonali BD, AC.

Dimostrare che

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$
$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

187. Dalle formole dell'eserc. prec., ricordando che

$$\alpha + \gamma = \pi, \qquad \beta + \delta = \pi$$

ricavare le espressioni di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ per mezzo dei lati e dimostrare [cfr. n. 156], che se $2p$ è il perimetro, si ha

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},\qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

188. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro segmenti a, b, c, d determinino, in base all'ultima formula dell'eserc. prec. e alle tre analoghe, quattro valori reali per gli angoli α, β, γ, δ, si è che ciascuno dei lati dati sia minore della somma degli altri tre, cioè

$$a<b+c+d,\quad b<c+d+a,\quad c<d+a+b,\quad d<a+b+c.$$

189. Dimostrare che l'area S del quadrangolo iscrittibile è dato da

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

190. Dimostrare che le diagonali m, n del quadrangolo iscrittibile sono date da

$$m^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

$$n^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

e il loro angolo φ è dato da

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}}.$$

191. Valgono per le diagonali m, n le relazioni (noti Teoremi di Geometria)

$$mn=ac+bd,\qquad \frac{m}{n}=\frac{ab+cd}{ad+bc}.$$

192. Il raggio R del circolo circoscritto al quadrangolo è dato da

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+cb)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

193. Area di un quadrangolo qualsiasi. — L'area di un quadrangolo qualsiasi è uguale alla metà del prodotto delle diagonali per il seno dell'angolo da esse formato.

194. Una città A è, a volo d'uccello, a 25 km. da un punto O e al Nord-Nord-Ovest di questo punto: una seconda città B è a 40 km. da O e all'Est-Nord-Est. Quale è la distanza delle due città e quale è la posizione di B rispetto ad A sulla « rosa dei venti »?

195. Tre paesi A, B, C, vertici di un triangolo equilatero di 50 km. di lato, sono collegati a due a due da strade rettilinee. Due ciclisti partono nello stesso istante da A e B verso C, colle velocità rispettive di 18 km. e 22 km. all'ora. In quale istante essi si troveranno in due punti tali, che la loro distanza a volo d'uccello sia di 30 km.? In quale istante saranno essi in due punti P e Q, tali che la distanza fra P e Q sia la stessa tanto passando per A e B, quanto passando per C?

196. Due luoghi A e B sono separati da una collina e si vogliono collegare mediante una strada rettilinea. Un luogo C, situato a Sud di A e sullo stesso meridiano, dista da A m. 732 e da B m. 847. La direzione da C verso B è a $52°40'$ ad Ovest della direzione Sud-Nord. In quale direzione deve essere costruita la strada da A a B e qual'è la sua lunghezza?

197. Dalla porta A di una casa di campagna si vedono su di una strada rettilinea tre pali telegrafici consecutivi, dei quali si sa che si susseguono di 20 in 20 m. La distanza dei due primi si vede, ad altezza d'uomo, sotto l'angolo di $21°30'$, la distanza dal secondo al terzo sotto l'angolo di $12°40'$. Quanto dista A dalla strada?

198. Per misurare la larghezza AB di un fiume si scelga sul prolungamento di AB un punto C e da questo si misuri una base $CD = a$ che formi con CB un angolo γ. Misurati gli angoli $\widehat{CDA} = \alpha$, $\widehat{CDB} = \beta$, si calcoli AB. P. es. $a =$ m. 33, $\alpha = 105°40'$, $\beta = 65°$, $\gamma = 49°30'$.

199. Quanto è alta una torre, sorgente su di una pianura, se alla distanza di m. 215 appare sotto un angolo di $12°30'$? Si prescinda dall'altezza dell'osservatore.

200. Una torre è alta 30 m. e dista di m. 60 dalla riva di un canale. Qual'è la larghezza di questo canale se essa vien vista dalla cima della torre sotto un angolo di $15°$?

201. Fino a quale distanza era visibile (completamente) dal mare la statua di Atene sull'Acropoli, posto che l'altezza del suo piedistallo era di 15 m. e l'altezza dell'Acropoli sul livello del mare è di m. 156? Si prenda il raggio della Terra uguale a km. 6370.

202. Ai piedi di una torre scorre un fiume. Da due feritoie che guardano verso il fiume e sono situate l'una perpendicolarmente sull'altra alla distanza di 15 m., le visuali che vanno a un punto determinato dell'altra sponda formano colla verticale gli angoli $80°30'$ e $75°10'$. Qual'è la larghezza del fiume in quel punto?

203. Da due punti A, B di un campo orizzontale, distanti fra loro di 500 m. due osservatori inseguono col teodolite un aeroplano. Quando questo passa pel piano verticale comune di A e B, le visuali, che da A e B vanno ad esso, formano colle rispettive verticali due angoli di 9° e 12° rispettivamente. A quale altezza vola l'aeroplano?

204. La vetta del Picco di Teneriffa appare dal mare all'orizzonte, quando se ne dista di 222 km. e si è 10 m. sul livello del mare. Calcolare approssimativamente l'altezza del monte, prendendo come lunghezza del meridiano terrestre km. 40 000.

205. Dall'alto di una torre AB, la cui altezza h è nota, si vuol calcolare la distanza di due punti C, D situati nello stesso piano orizzontale del piede A della torre, determinando con misurazioni dirette gli angoli $\alpha = \widehat{ABC}$, $\beta = \widehat{ABD}$, $\gamma = \widehat{CBD}$.

206. Il Venediger negli alti Tauri, alto m. 3670, si trova sullo stesso meridiano di Venezia e ad $1^\circ 40'$ più a Nord. Dalla vetta del monte è visibile codesta città? Si prenda pel raggio terrestre la lunghezza di km. 6370. [Si può risolvere il problema cercando se la vetta del monte sia al disopra dell'orizzonte di Venezia, oppure considerando la visuale dalla vetta del monte, tangente, nel meridiano, alla Terra; in quest'ultimo caso si consideri l'angolo α dei raggi terrestri che vanno alla vetta del monte e al punto di contatto della visuale e si porti nei calcoli $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$].

207. Un aerostato, la cui altezza complessiva è a, si vede sotto un angolo α: l'angolo di elevazione della navicella è β. Qual'è l'altezza della navicella dal piano orizzontale da cui osserviamo il pallone? P. es.: $a =$ m. 15,5; $\alpha = 1^\circ 20'$; $\beta = 44^\circ 40'$.

208. Salendo lungo una strada rettilinea, di pendenza uniforme di 7°, vediamo di fronte a noi su di un colle una chiesa C e in un certo punto A della strada misuriamo l'angolo di elevazione di C in $36^\circ 20'$: procedendo oltre di 220 m. constatiamo che l'angolo di elevazione di C si è accresciuto di $9^\circ 30'$. Qual'è la distanza in linea retta da A a C? Qual'è l'altezza di C sul piano orizzontale di A?

209. Dalla cima A di una torre AB, situata sulla riva di un lago e alta h m., osserviamo, nel medesimo piano verticale, una nuvoletta N e la sua immagine N' nel lago. Misurati gli angoli $\widehat{BAN'} = \alpha$ ed $\widehat{N'AN} = \beta$, si calcolino l'altezza della nuvola sul lago e la distanza di essa da A.

[Considerato il punto A', simmetrico di A rispetto al piano orizzontale per B (superficie del lago) si applichi il teorema dei seni al triangolo $AA'N$, ecc.].

210. Da un aerostato si vedono, su di una vasta pianura due luoghi A e B sotto angoli di depressione $\alpha = 48°10'$ e $\beta = 78°30'$. Da una carta topografica si rileva che B dista da A 8 km. e questa distanza si vede dal pallone sotto l'angolo $68°40'$. Quanto è alto il pallone sul piano orizzontale di A e B e quanto dista da A e B?

[Indicato con P l'aerostato e con Q il piede della perpendicolare abbassata da P sul piano orizzontale di A e B, si conoscono del triangolo ABP la somma dei due angoli in A e B e il rapporto dei loro seni. Si ricordi allora l'eserc. 107].

211. L'angolo di elevazione della cima di una torre, vista da una finestra A a pianterreno di una casa e alta da terra 2 m., è di $22°20'$; mentre da una finestra B, situata al di sopra di A al secondo piano e alta da terra 12 m., è di $20°10'$. Quanto è alta la torre?

212. Da un luogo A si vedono, in uno stesso piano verticale per A, due vette B e C, sotto gli angoli di elevazione di $15°$ e $22°30'$; mentre l'angolo di elevazione di C rispetto a B è di $30°$. Se la distanza orizzontale delle verticali di B e C è di m. 1500, quanto distano B e C da A?

Qual'è l'altezza di C rispetto ad A?

213. Su di un'altura a declivio di pendenza uniforme di $23°$, si innalza una torre. Scelta, secondo una retta di massima pendenza passante pel piede della torre, una base di m. 19, si trova che gli angoli di elevazione della cima della torre rispetto alle estremità della base sono di $41°20'$ e di $68°30'$. Quanto è alta la torre?

214. Dalla cima di una torre si vede la distanza fra due punti A e B del piano orizzontale su cui si innalza la torre sotto l'angolo di $43°50'$. Si sa che A e B distano dal piede della torre di m. 40 e 19,5 rispettivamente e che $AB =$ m. 29. Quanto è alta la torre?

215. Da tre punti A, B, C presi in linea retta e su di una pianura orizzontale si vede una retta sotto gli angoli di elevazione α, β, γ rispettivamente. Conoscendo $AB = a$, $BC = b$, si calcoli l'altezza della retta sul piano orizzontale di A, B, C.

[Indicata con x l'incognita si trova

$$x^2 = \frac{ab(a+b)}{a \operatorname{cotg}^2 \gamma + b \operatorname{cotg}^2 \alpha - (a+b) \operatorname{cotg}^2 \beta} \Big].$$

216. In base al metodo di ARISTARCO (n. 180) si calcolino i rapporti dei diametri, delle superficie e dei volumi della Terra e del Sole, sapendo che l'angolo α delle visuali dalla Terra al Sole e alla Luna in fase dicotoma è di $89°51'$, che il diametro apparente del Sole è di $32'$ e la distanza dalla Terra alla Luna è di 60 raggi terrestri.

V.

217. Scrivere la funzione (di 1° grado), che è rappresentata dalla retta che sega l'asse y nel punto di ordinata 5 e forma coll'asse delle x un angolo di 30°.

218. Scrivere la funzione (di 1° grado) che è rappresentata dalla retta che passa pel punto di coordinate $(2; -5)$ e forma coll'asse x un angolo di 60°.

219. Che angoli forma cogli assi la retta che passa pei punti di coordinate $(3; -1)$, $(-5; 4)$?

220. Scrivere la funzione (di 2° grado) che è rappresentata dalla parabola, che ha l'asse parallelo all'asse y, passa per l'origine e pel punto di coordinate $(2; 3)$, ed ha in questo ultimo punto la tangente parallela alla bisettrice del primo angolo degli assi.

221. Scrivere la funzione (di 2° grado) che è rappresentata dalla parabola, che ha l'asse parallelo all'asse delle y, il vertice nel punto di coordinate $(3; 4)$, e sega l'asse della y nel punto di ordinate 2. Sotto quali angoli questa parabola sega gli assi?

222. Determinare gli angoli sotto cui gli assi vengono segati dalla parabola, che ha l'asse parallelo all'asse y, il vertice nel punto di coordinate $(2; -5)$ e passa per l'origine.

223. Una parabola ha l'asse parallelo all'asse delle y, sega l'asse x sui punti di ascisse -2 e 5 e sega l'asse delle y secondo un angolo di 18°. Determinarne il vertice.

224. Determinare il vertice delle parabole che rappresentano le seguenti funzioni:

1) $y = 2x^2 - 8x + 1$
2) $y = 4x - x^2 + 9$
3) $y = x^2 + 6x + 1$
4) $y = 12x - 2x^2 + 3$.

225. Determinare le intersezioni delle parabole che rappresentano le due funzioni

$$y = 7x^2 - 3x - 1$$
$$y = 6x^2 - 5x + 2$$

e calcolare gli angoli formati dalle rispettive tangenti nei punti di intersezione.

226. Una parabola, avente l'asse parallelo all'asse y, passa pei punti di coordinate $(-1; -2)$ e $(3; 5)$ e sega l'asse y secondo un angolo di 45°. Secondo quali angoli sega essa l'asse delle x?

227. Si lancia verticalmente una pietra colla velocità iniziale di 10 metri al secondo. A quale altezza giunge essa? Dopo quantsecondi ricade al suolo? [Per fissare le idee si supponga che la pietra venga lanciata dal livello di terra].

228. Con quale velocità iniziale si deve lanciare una pietra verticalmente in basso dalla cima di una torre, alta m. 100 perchè tocchi terra colla velocità di 30 m. al secondo? Qual'è la durata della caduta? Quale velocità si dovrebbe imprimere alla pietra se si volesse che toccasse terra colla velocità di 10 m. al secondo?

229. Si lancia verticalmente un grave da un punto di altezza h e si vuole che tocchi terra colla velocità v_0. Quale dev'essere la velocità iniziale? Discutere il problema.

230. Con quale velocità iniziale si deve lanciare verticalmente un proiettile, perchè raggiunga l'altezza di 1000 m.?

231. Se le funzioni $f(x)$, $F(x)$, per x tendente ad x_1, tendono ad l, L rispettivamente, dimostrare che $f(x)F(x)$ tende ad lL:

$$\lim_{x \to x_1} f(x)F(x) = lL;$$

cioè che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.

[Questo teor. è, in sostanza, una conseguenza del fatto (I; n. 8) che, prendendo pei fattori di un prodotto dei valori abbastanza approssimati, si ottiene pel prodotto un valore approssimato quanto si vuole. E la dimostrazione diretta di codesto teor. si otterrà con considerazioni perfettamente analoghe a quelle del n. 8 del I vol.

Bisogna far vedere che, prefissato un numero ε positivo, piccolo quanto si vuole, si può prendere un numero positivo τ abbastanza piccolo, perchè, quando x differisce da x_1, in valore assoluto, per meno di τ, ossia per

$$|x - x_1| < \tau,$$

risulta

$$|lL - f(x)F(x)| < \varepsilon.$$

Ora si ha

$$|lL - f(x)F(x)| = |L[l - f(x)] + f(x)[L - F(x)]|$$

e quindi

$$|lL - f(x)F(x)| \leq |L| |l - f(x)| + |f(x)| |L - F(x)|.$$

Siccome $f(x)$, al tendere di x ad x_1, si avvicina quanto si vuole ad l, se M è un numero maggiore del valore assoluto di l, potremo sempre prendere un numero τ_1 tale che per

$$|x - x_1| < \tau_1$$

risulti

$$|l - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|L|}, \qquad |f(x)| < M,$$

e quindi

$$|L|\,|l-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x)|<M.$$

Similmente potremo prendere un τ_2 tale che per

$$|x-x_1|<\tau_2$$

sia

$$|L-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

e quindi

$$M\,|L-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, se τ è il più piccolo dei due numeri τ_1, τ_2, per

$$|x-x_1|<\tau$$

avremo simultaneamente

$$|L|\,|l-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad M\,|L-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi successivamente

$$|L|\,|l-f(x)|+M\,|L-F(x)|<\varepsilon,$$
$$|L|\,|l-f(x)|+|f(x)|\,|L-F(x)|<\varepsilon$$
$$|lL-f(x)F(x)|<\varepsilon].$$

232. Dimostrare che se $f'(x)$, $F'(x)$ sono le derivate di due date funzioni $f(x)$, $F(x)$ rispettivamente, la derivata del prodotto

$$y=f(x)F(x)$$

è data da

$$y'=f'(x)F(x)+f(x)F'(x).$$

[Il rapporto incrementale di y

$$\frac{f(x+h)F(x+h)-f(x)F(x)}{h}$$

si può scrivere

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,F(x+h)+f(x)\,\frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \quad \text{ecc.}\Big].$$

233. Dimostrare che la derivata di

$$y=x^4$$

è

$$y'=4x^3.$$

[Si scriva $y=x\cdot x^3$ e si ricordino il n. 203 e l'eserc. prec.].

234. Dimostrare che, qualunque sia l'intero positivo n, la derivata di

$$y = x^n$$

è data da

$$y' = nx^{n-1};$$

cioè la derivata si ottiene moltiplicando il coefficiente per l'esponente e diminuendo l'esponente di 1 (cfr. nn. 201, 203)

[Si supponga dimostrato il teorema per l'esponente $n - 1$, si scriva $y = x \cdot x^{n-1}$ e si applichi l'eserc. 232].

235. Dimostrare che la derivata di

$$y = [f(x)]^2$$

è uguale a

$$y' = 2f(x)f'(x).$$

236. Calcolare le derivate di

1) $y = (1 + x)^2$;
2) $y = (2x^2 - x + 1)^2$;
3) $y = (\text{sen } x)^2$.

237. Dimostrare che la derivata di

$$y = f(x)F(x)\varphi(x)$$

è data da

$$y' = f'(x)F(x)\varphi(x) + f(x)F'(x)\varphi(x) + f(x)F(x)\varphi'(x).$$

238. Dimostrare che la derivata di

$$y = [f(x)]^3$$

è data da

$$y' = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

239. Dimostrare che, per qualsiasi intero positivo n, la derivata di

$$y = [f(x)]^n$$

è data da

$$y' = n[f(x)]^{n-1}f'(x).$$

[Il teor. è vero per $n = 2, 3$ (eserc. 235, 238); si dimostri che se è vero per $n - 1$ è vero anche per n, scrivendo

$$y = [f(x)]^{n-1}f(x)].$$

240. Calcolare le derivate di

1) $y = (3x - 2)^3$;
2) $y = (2x^2 - x + 1)^3$;
3) $y = (1 + x)^4$;
4) $y = (\text{sen } x)^3$;
5) $y = (\cos x)^3$.

241. Dimostrare che se

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = l, \qquad \lim_{x \to x_1} F(x) = L,$$

ed è $L \gtrless 0$, si ha

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{l}{L};$$

cioè il limite del quoziente è uguale al quoziente dei limiti, purchè il limite del denominatore sia diverso da zero.

[Cfr. I; n. 9 e l'eserc. 231].

242. Dimostrare se $f'(x)$, $F'(x)$ sono le derivate di due date funzioni $f(x)$, $F(x)$, la derivata del quoziente

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}$$

è data da

$$y' = \frac{f'(x)F(x) - f(x)F'(x)}{[F(x)]^2}.$$

[Si scriva il rapporto incrementale

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{F(x+h)} - \dfrac{f(x)}{F(x)}}{h}$$

sotto la forma

$$\frac{1}{F(x)F(x+h)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}F(x) - f(x)\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right], \text{ ecc.}].$$

243. Dimostrare che anche per l'esponente intero negativo la derivata della potenza della variabile è data dalla regola dell'eserc. 234; cioè la derivata di

$$y = x^{-n}$$

è data da

$$y' = -nx^{-n-1}.$$

244. Calcolare le derivate delle funzioni

1) $y = \dfrac{1}{x};$

2) $y = \dfrac{1}{x+1};$

3) $y = \dfrac{x}{2x-1};$

4) $y = \frac{3x + 2}{x - 4}$;

5) $y = \frac{1}{x^2}$;

6) $y = \frac{1 + x^2}{1 - x}$;

7) $y = \frac{3x^2 - x + 3}{2x + 5}$;

8) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + x + 1}$.

245. Sotto quali angoli segano gli assi coordinati le grafiche delle funzioni:

1) $y = 3x^2 - 2x - 1$;

2) $y = 5x - 3x^2 + 2$;

3) $y = \frac{1}{x - 2}$;

4) $y = \frac{2x - 1}{x}$;

5) $y = 7 - \frac{2}{x}$;

6) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$;

7) $y = \frac{2x + 5}{3x - 1}$;

8) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$;

9) $y = \frac{2x^2 + 11x + 15}{5x^2 - x + 1}$;

10) $y = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}$?

246. Si scrivano le identità che si ottengono derivando le seguenti identità:

$$x + 1 = \frac{x^2 - 1}{x + 1};$$

$$x - 1 = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 .$$

247. Si derivi la

$$y = \frac{x^5 + x^4 + x}{x^4 + x^3 + 1}$$

e si giustifichi a priori il risultato.

248. In quali punti la grafica [iperbola equilatera] della funzione

$$y = \frac{x-1}{x+2}$$

ha la tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto angolo degli assi?

249. Calcolare la derivata delle funzioni

1) $y = \operatorname{tg} x$;
2) $y = \operatorname{cotg} x$;
3) $y = \sec x$;
4) $y = \operatorname{cosec} x$.

250. Se, data una funzione $f(x)$, di cui siano $f'(x)$, $f''(x)$ le derivate prima e seconda, la $f'(x)$ per un certo valore x_1 della x si annulla e per questo stesso valore la $f''(x)$ è diversa da zero, la $f(x)$ ha per $x = x_1$ un massimo se $f''(x_1) < 0$, un minimo se $f''(x_1) > 0$. [Si ricordi che $f''(x)$ è la derivata di $f'(x)$ e perciò dove $f''(x)$ è positiva la $f'(x)$ è crescente, dove $f''(x)$ è negativa la $f'(x)$ è decrescente (n. 207)].

251. È noto dalla Fisica che, a correzione della legge del Boyle valida solo per *gas perfetti* quali non esistono in natura, il Van der Waals ha proposto come *equazione di stato* di un gas l'equazione

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

dove p, v, T rappresentano la pressione, il volume e la temperatura assoluta della massa gassosa, a, b ed R sone tre costanti positive dipendenti dal gas considerato e in particolare b (*covolume* della massa gassosa) è molto piccola. Fissato un valore T_0 per T e indicata con k la costante RT_0, si ricava dall'equazione del Van der Waals

$$p = \frac{k}{v-b} - \frac{a}{v^2}.$$

Si studi la variazione di questa funzione, descrivendone la grafica (*isoterma* del gas). Ha essa massimi e minimi?

252. Fra i rettangoli di data area qual'è quello di perimetro minimo?

253. Un parallelepipedo rettangolo ha uno spigolo a e il volume v: come si devono prendere gli altri due spigoli perchè la superficie sia minima?

254. Quale deve essere l'ampiezza dell'angolo compreso fra due dati lati a, b, perchè l'area del triangolo che così si ottiene risulti massima?

255. Fissato nel primo angolo degli assi il punto P di coordinate a, b, determinare fra le rette passanti P quella su cui i semiassi positivi intercettano il segmento minimo.

256. Da un pezzo di cartone rettangolare, lungo cm. 32 e largo cm. 20, si ritagliano ai quattro vertici quattro quadrati uguali e si piegano in su i lembi rettangolari che così risultano, in modo da formare una scatola a base rettangolare ed aperta. La capacità y di questa è una determinata funzione del lato x dei quadrati ritagliati. Si descriva su carta quadrettata la grafica di questa funzione. Per quale valore di x si ha il massimo di capacità?

257. Fra le scatole cilindriche, senza coperchio, aventi una data superficie S, qual'è quella di massima capacità? Descrivere la grafica del problema per un dato valore di S, p. es. $S = 1$ dm.^{2}

258. Fra le scatole cilindriche, chiuse, aventi una data superficie S, qual'è quella di massima capacità? Descrivere la grafica del problema, supponendo $S = 1$ dm.^{2}

259. Fra i rettangoli di dato perimetro, qual'è quello di diagonale minima?

260. Quale deve essere il raggio di un cerchio, perchè il suo settore di area data S abbia il minimo perimetro? Si determini l'angolo al centro di questo settore.

261. Fra i cilindri iscritti in un dato cono, determinare quello di massimo volume.

262. Fra i cilindri iscritti in un dato cono, determinare quello di massima superficie totale e quello di massima superficie laterale.

263. Determinare i massimi e i minimi delle funzioni

1) $y = (\operatorname{sen} x)^2$;
2) $y = (\cos x)^2$;
3) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$;
4) $y = x + \operatorname{sen} x$;
5) $y = x - \cos x$.

VI.

264. Calcolare

$$\int_1^2 (2x + 3)dx;$$

$$\int_2^4 (2 - 4x)dx;$$

$$\int_{-1}^1 (5x - 4)dx;$$

$$\int_0^2 (2x - 8)dx;$$

$$\int_{-2}^1 (2x + 1)dx.$$

Si interpretino i risultati geometricamente, usando carta quadrettata.

265. Calcolare i seguenti integrali definiti e interpretare geometricamente i risultati, usando carta quadrettata:

1) $\int_0^1 \frac{1}{5}x^2dx$; $\int_1^2 \frac{1}{5}x^2dx$;

2) $\int_1^2 (1+x^2)dx$, $\int_{-1}^1 (1+x^2)dx$;

3) $\int_{-1}^1 (1+x)^2dx$; $\int_{-1}^0 (1+x)^2dx$; $\int_{-2}^{-1} (1+x)^2dx$;

4) $\int_0^2 (5+3x^2)dx$; $\int_{-2}^2 (5+3x^2)dx$;

5) $\int_0^{\frac{3}{2}} (4x^2-9)dx$; $\int_0^2 (4x^2-9)dx$; $\int_2^3 (4x^2-9)dx$;

6) $\int_{-1}^0 (x^2-2x-3)dx$; $\int_{-1}^3 (x^2-2x-3)dx$; $\int_3^4 (x^2-2x-3)dx$;

7) $\int_1^2 (x^2-3x+2)dx$; $\int_0^1 (x^2-3x^2+2)dx$; $\int_2^3 (x^2-3x+2)dx$;

8) $\int_{-4}^0 (2x-x^2+8)dx$; $\int_0^2 (2x-x^2+8)dx$; $\int_2^4 (2x-x^2+8)dx$;

9) $\int_0^2 (3x^2-12x+15)dx$; $\int_0^4 (3x^2-12x+15)dx$;

10) $\int_{-1}^1 (2x-\frac{1}{3}x^2-5)dx$; $\int_2^5 (2x-\frac{1}{3}x^2-5)dx$.

266. Una parabola ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y, il vertice $(3; 4)$ e passa per l'origine. Determinare l'area racchiusa fra questa parabola, l'asse delle x e l'asse di simmetria.

267. Una parabola sega l'asse delle y nel punto di ordinata -3 e l'asse x nei punti di ascisse 1 e 5. Determinare l'area compresa fra l'asse delle y, la parabola e la tangente nel vertice.

268. Data la funzione

$$y = 6x - x^2 - 5$$

determinare le ascisse a, b $(b > a)$ in modo che

$$\int_a^b (6x - x^2 - 5)dx$$

risulti massimo. [Si ragioni geometricamente, considerando la grafica della data funzione e le sue intersezioni coll'asse x].

269. Segare la grafica della funzione

$$y = \frac{1}{9}x^2 - x + \frac{38}{9}$$

colla parallela all'asse x alla distanza 2 (dalla parte delle ordinate positive) e calcolare l'arèa del segmento parabolico così determinato. Servirsi di carta quadrettata.

270. Segare la parabola che rappresenta la funzione

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}$$

colla retta parallela all'asse x alla distanza 1 (dalla parte delle ordinate positive) e calcolare l'area del segmento parabolico così determinato. Usare carta quadrettata.

271. Determinare le intersezioni delle due parabole che rappresentano le funzioni

$$y = 4x - \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$$

e calcolare l'area racchiusa dai due archi di parabola così determinati.

272. Dimostrare che l'area indicata all'eserc. prec. è uguale a quella del segmento parabolico rappresentato da

$$\int_2^6 \left[6x - \frac{3}{4}x^2 - 9\right] dx\,.$$

Illustrare il risultato con un disegno su carta quadrettata.

[La funzione che qui compare sotto il segno è la differenza delle due funzioni dell'eserc. prec.].

273. Le parabole che rappresentano le due funzioni

$$y = 4x - \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$y = 2x - \frac{1}{4}x^2 = 1$$

si segano in due punti. Determinare questi punti e calcolare l'area racchiusa dai due archi parabolici così individuati. Disegno su carta quadrettata.

274. Dimostrare che l'area indicata nell'eserc. prec. è uguale a quella del segmento parabolico rappresentato da

$$\int_2^6 \left[2x - \frac{1}{4}x^2 - 3\right] dx\,.$$

[Cfr. eserc. 272].

275. Determinare l'area racchiusa fra le due parabole che hanno l'asse parallelo all'asse y, passano entrambe pei due punti di coordinate $(-2; 3)$ e $(4; 3)$ e hanno l'ordinata del vertice uguale rispettivamente a 6 e ad 1. Disegno su carta quadrettata.

276. Determinare l'area racchiusa fra le due parabole, che hanno l'asse parallelo all'asse y, passano entrambe pei due punti di coordinate $(1; -5)$ e $(6; -5)$ e hanno l'ordinata del vertice uguale rispettivamente a 3 e a -2. Disegno su carta quadrettata.

277. Determinare l'area racchiusa fra le due parabole che hanno l'asse parellelo all'asse y, passano entrambe pei punti di coordinate $(2, -3)$ e $(4, -3)$ e hanno l'ordinata del vertice uguale rispettivamente a 4 e a 2. Disegno su carta quadrettata.

278. Dimostrare che

$$\int_a^z [f(x) + F(x)]dx = \int_a^z f(x)dx + \int_a^z F(x)dx.$$

[Cfr. n. 223].

279. Dimostrare che se c è una costante

$$\int_a^z cf(x)dx = c\int_a^z f(x)dx.$$

[Cfr. n. 224].

280. Dimostrare che

$$\int_a^z [hx^2 + kx + l]dx = \frac{1}{3}h[z^3 - a^3] + \frac{1}{2}k[z^2 - a^2] + l[z - a].$$

281. Calcolare

1) $\int_1^z (1 + x^2)dx;$

2) $\int_2^z (1 + x)^2 dx;$

3) $\int_0^z (1 - 2x + x^2)dx;$

4) $\int_{-1}^z (1 - x)(1 + x)dx;$

5) $\int_0^z \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx;$

6) $\int_3^z (2x^2 - x + 2)dx.$

282. Dimostrare che

$$\int_a^z x^3 dx = \frac{1}{4}[z^4 - a^4].$$

283. Descritta la grafica della funzione

$$y = x^3$$

calcolare l'area racchiusa fra questa curva, l'asse delle x e l'ordinata di ascissa 3.

284. Calcolare

$$\int_{-1}^{1}(2x^3 - 3x + x - 5)dx$$

$$\int_{0}^{2}(1 + x)^3 dx$$

$$\int_{1}^{4}(1 + x)(1 - x + x^2)dx.$$

285. Calcolare

$$\int_{0}^{z}(1 + x^3)dx$$

$$\int_{1}^{z}(1 + x)^3 dx$$

$$\int_{-2}^{z}(3x^3 - 4x^2 + x + 1)dx.$$

286. Dimostrare che per qualsiasi intero positivo n si ha

$$\int_{a}^{z} x^n dx = \frac{1}{n+1}[z^{n+1} - a^{n+1}].$$

[Cfr. eserc. 234].

287. Calcolare

$$\int_{2}^{z}(3 - 2x^2 + x^4)dx;$$

$$\int_{0}^{z}\frac{x^5 - 1}{x - 1}dx.$$

288. Calcolare, ricordando l'eserc. 243,

1) $\displaystyle\int_{1}^{z}\frac{dx}{x^2};$

2) $\displaystyle\int_{0}^{z}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx;$

3) $\displaystyle\int_{-2}^{z}\frac{dx}{x^3};$

4) $\displaystyle\int_{0}^{z}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)dx.$

289. Calcolare

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+x^2}{x^2}dx$$

$$\int_1^4 \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx.$$

290. Calcolare (n. 236)

1) $\int_\alpha^z \cos x\, dx;$

2) $\int_\alpha^z \operatorname{sen} x\, dx;$

3) $\int_\alpha^z [\operatorname{sen} x + \cos x]dx;$

4) $\int_\alpha^z (1 - \operatorname{sen} x)dx;$

5) $\int_\alpha^z (x + \cos x)dx;$

6) $\int_\alpha^z \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{x^2}\right)dx;$

7) $\int_\alpha^z \frac{dx}{\cos^2 x};$

8) $\int_\alpha^z \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x};$

9) $\int_\alpha^z \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\, dx;$

10) $\int_\alpha^z (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx;$

11) $\int_\alpha^z \left(x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx;$

12) $\int_\alpha^z \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\, dx.$

291. Calcolare l'area racchiusa fra l'asse delle x e l'arco di sinusoide compreso fra i punti di ascissa 0 e π.

292. Dimostrare (n. 236) che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

293. Calcolare i seguenti integrali definiti (n. 236):

$$1)\ \int_0^{\pi}(x + \operatorname{sen} x)dx;$$

$$2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)dx;$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a \operatorname{sen} x + b \cos x)dx.$$

294. Si fa ruotare la parabola

$$y = ax^2$$

intorno all'asse y. Esprimere sotto forma di integrale definito il volume racchiuso fra la superficie che così si ottiene (*paraboloide di rotazione*) ed il piano ortogonale all'asse y nel punto di ordinata b e calcolarne il valore.

295. Determinare il volume racchiuso fra il *paraboloide di rotazione* generato dalla rotazione della parabola

$$y = ax^2$$

intorno all'asse y e la superficie cilindrica che ha per asse l'asse y e il raggio r. Calcolare il rapporto del volume di codesto cilindro con quello del segmento di paraboloide che esso contiene.

296. Considerata la superficie (paraboloide di rotazione) che si genera facendo ruotare intorno all'asse y la parabola

$$y = x^2$$

si calcoli il volume racchiuso da codesta superficie e dalla sfera di centro nell'origine e di raggio 1. [Si ricordi la formola pel volume del segmento sferico (I; n. 172)].

297. Risolvere il problema precedente supponendo che la parabola data sia la

$$y = ax^2$$

e la sfera abbia il raggio r.

298. Data la parabola

$$y = ax^2$$

e considerata la superficie che si ottiene facendo ruotare codesta curva intorno all'asse x, si calcoli il volume racchiuso fra codesta superficie e il piano ortogonale all'asse x nel punto di ascissa b.

299. Determinare il volume racchiuso fra la superficie indicata all'eserc. prec. e la superficie cilindrica che ha per asse l'asse x e il raggio r.