Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XX** (1916), pp. 109-112.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

L'Accademico Benedettino Prof. Federigo Enriques presenta una sua Nota intitolata: **L'intorno d'una curva sopra una superficie algebrica.**

1. È ben noto che l'intorno d'un punto sopra una curva algebrica può venire approssimato, in un ordine d'approssimazione grande quanto si vuole, da una curva razionale (sviluppi in serie di *Taylor* e di *Puiseux*). Ciò si può esprimere dicendo che « una qualsiasi curva algebrica considerata nell'intorno d'un punto, cioè da un punto di vista differenziale, può ritenersi come razionale ». E di tale osservazione è vantaggioso far uso sistematico nella geometria sopra una curva, più che non si faccia di solito.

Per esempio nello studio delle g'_n, sopra una curva di genere $p > 0$, si possono estendere senz'altro quelle proprietà delle g'_n sulla retta che concernono: la molteplicità $(i - 1)$ con cui un punto i-plo per un gruppo

della g'_n figura nel gruppo dei punti doppi, oppure la molteplicità (2) con cui figura nel detto gruppo un punto fisso per la g'_n. Da ciò risulta la più semplice dimostrazione del teorema fondamentale d'invarianza della serie canonica, seguendo l'ordine di concetti su cui ho avuto l'onore di richiamare l'attenzione dell'Accademia nella mia nota « Sul teorema d'invarianza della seria canonica g^{p}_{2p-2} appartenente ad una curva algebrica di genere p » letta nella seduta del 17 Maggio 1914.

2. Passando dalle curve alle superficie, vi è luogo a riconoscere che: l'*intorno d'una curva algebrica sopra una superficie algebrica si può approssimare, in un ordine d'approssimazione grande quanto si vuole, con una superficie razionale.*

Si abbia sopra la superficie f una curva (semplice) C e pongasi, per semplicità di discorso, che la C sia irriducibile; faremo vedere che l'intorno di C su f può essere approssimato con un monoide d'un ordine n abbastanza elevato, avente come punto $(n-1)$plo un punto 0 assegnato ad arbitrio nello spazio.

Sia m l'ordine di C e d il suo grado sopra la superficie f. I monoidi F d'ordine n e di centro 0 dipendono da

$$n\,(n+2)$$

parametri, e la serie da essi segata sulla curva C è una

$$g^{r}_{mn}$$

con

$$r \leq mn\,.$$

Perciò i monoidi F passanti per C dipendono da h parametri ove

$$h \geq n\,(n+2) - mn - 1.$$

Se ora a F s'impone la condizione ulteriore di toccare la superficie f, il numero dei parametri, h, si

ridurrà ad un certo h' che potrà essere calcolato come segue.

Il sistema di tutti i monoidi F sega su f un sistema lineare di curve d'ordine mn e di grado mn^2; gli F passanti per la C (di ordine m e di grado d) segano su f un sistema residuo di curve K secanti le C in i punti, dove

$$i = (KC) = (K + C)\,C - (CC) = mn - d.$$

Si dedurrà

$$h' = h - mn + d - 1.$$

In modo analogo si trova il numero dei parametri $h^{s)}$ da cui dipendono i monoidi F aventi con f un contatto d'ordine s, alto quanto si vuole, lungo la curva $C.E$ si riconosce che (restando fissi m, d, s) il numero $h^{s)}$ può sempre supporsi positivo per n assai grande, giacchè esso è dato da n^2 diminuito di una funzione lineare di n.

In conclusione la superficie f può essere approssimata, lungo la curva C, da un monoide F; e ciò con un ordine d'approssimazione grande quanto si vuole.

3. Il teorema dimostrato è suscettibile di varie applicazioni che qui mi limiterò ad accennare.

Anzitutto esso porge la più semplice dimostrazione del teorema fondamentale nella geometria sopra le superficie algebriche, che lo jacobiano del sistema lineare $|C + K|$ si ottiene sommando $3K$ allo jacobiano di $|C|$ (*). Infatti si è ricondotti a dimostrare il teorema nel piano, ove viene pôrto da una verifica algebrica diretta.

Una seconda applicazione che presenta maggiore novità si riferisce alla teoria delle *singolarità* delle superficie: si tratta della rappresentazione analitica

(*) Cfr. Enriques, Atti Accad. di Torino 1901.

approssimata delle *falde* d'una superficie, nell'intorno d'un punto o d'una curva singolare.

Queste falde corrispondono alla decomposizione della funzione algebrica $z\ (x\ y)$, definita dall'equazione della superficie $f(x\ y\ z) = 0$, in funzioni analitiche *irreducibili* nell'intorno considerato. Importa tener presente che la distinzione in falde ha diverso significato secondochè si tratti dell'intorno d'una curva o d'un punto di essa: così per una curva nodale di f si distinguono, in un punto generico, due falde, ma queste si proseguono di regola l'una nell'altra attraverso i punti cuspidali, di guisachè l'intorno della curva nodale (considerata nella sua integrità) viene a costituire una sola falda. Segue da ciò che ove si voglia una rappresentazione analitica approssimata di una falda di superficie nell'intorno d'un punto o d'una curva singolare, considerata nella sua *integrità*, non si può riguardare il problema come risoluto dalle serie di potenze che si ottengono quando si trasformi il punto o la curva in una curva semplice; imperocchè di tali serie ne occorrono in generale più d'una per rappresentare l'intera falda.

Il teorema da noi dato nel n. 2 di questa Nota conduce ad ottenere la rappresentazione analitica d'una falda di superficie, nell'intorno d'un punto o d'una curva singolare, basandosi sopra la riduzione delle singolarità con trasformazioni della superficie, ormai messa al riparo da ogni obiezione critica per opera di B. Levi e di F. Severi. Precisamente si otterrà la richiesta rappresentazione delle falde, con una approssimazione grande quanto si vuole, mediante quozienti di polinomi di due variabili.

Come tale rappresentazione permetta di caratterizzare le singolarità delle superficie, risolvendo i problemi fondamentali che vi si connettono, mi propongo di dimostrare in seguito ritornando, col proposito di più ampi sviluppi, sull'importante argomento.