Enriques, Federigo

Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXVI** (1917), pp. 415-420.

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche. matematiche e naturali
Estratto dal vol XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 8°. — Seduta del 15 aprile 1917.

SUI RAMI DELLE CURVE ALGEBRICHE GOBBE

NELL'INTORNO DI UN PUNTO SINGOLARE

NOTA

DEL CORRISP.
FEDERICO ENRIQUES

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare.* Nota del Corrisp. F. ENRIQUES.

Nell'intorno di un punto singolare $O = (OOO)$ una curva gobba C si lascia separare in rami rappresentabili mediante serie di potenze, intere e positive, di un parametro t. L'analisi di questi sviluppi ha permesso ad Halphen di risolvere gli elementari problemi numerativi che concernono le singolarità delle curve gobbe, determinando la loro influenza sulla classe ecc. Ma vi è qui un ordine di problemi che non è stato toccato, e che dà origine a qualcosa di nuovo per chi si volga dalla considerazione delle curve piane a quella delle curve gobbe: si tratta di determinare i successivi punti multipli (e semplici) che appartengono ad un ramo di cui è data la rappresentazione parametrica e di esaminare le posizioni notevoli di questi punti, estendendo alle curve gobbe il concetto dei « punti satelliti » che ho recentemente introdotto nella teoria delle singolarità delle curve piane (1).

Quando si tratta di un ramo di curva piana

$$\begin{cases} x = t^{\nu} \\ y = at^{\nu} + bt^{\nu+\nu'} + ct^{\nu+\nu'+\nu''} + \cdots, \end{cases}$$

(1) Cfr. la mia Nota comunicata a codesta Accademia il 7 maggio 1916. Un più ampio sviluppo della teoria delle singolarità delle curve piane e gobbe, basata su tali concetti, si troverà nel secondo volume delle mie *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatte colla collaborazione del dott. O. Chisini.

la determinazione dei punti successivi all'origine, colle loro molteplicità, dipende dall'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri ν, ν', ν'', ... ; si procede qui a determinare il massimo comun divisore dei primi due numeri, tenendo conto dei quozienti e dei resti successivi, poi si applica lo stesso procedimento nel confronto del m. c. d. $(\nu\nu')$ e di ν'', e così di seguito: è ovvio che, così facendo, apparisce la particolare importanza di certi (*termini* e) *numeri caratteristici* che non riescono multipli del massimo comun divisore dei numeri precedenti; ai quali (termini e) numeri si riferiscono appunto le teorie di Halphen e di Noether ([1]).

Ora si consideri un ramo di curva gobba C, nell'intorno dell'origine; sia ν l'ordine del ramo, cioè la molteplicità dell'origine O, e sieno $\nu+\mu$ e $\nu+\mu+\lambda$ le intersezioni del ramo colla tangente e col piano osculatore, sicchè μ e λ designeranno i caratteri cui Halphen ha dato il nome di « rango » e di « classe », la « prima e seconda classe » come anche possono chiamarsi, per non introdur nomi nuovi rispetto alla teoria delle curve piane.

Orientando opportunamente gli assi coordinati, il nostro ramo si potrà rappresentare, nella forma normale di Halphen, scrivendo:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= t^{\nu} \\ y &= at^{\nu+\mu} + \cdots \\ z &= bt^{\nu+\mu+\lambda} + \cdots \end{aligned} \right.$$

i punti (semplici e multipli) del ramo successivi all'origine dipenderanno, in generale, dai termini successivi che compariscono negli sviluppi precedenti; in particolare vi è un gruppo di punti dipendenti dai primi termini degli sviluppi di y e z, e dai numeri ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$; la determinazione di codesti punti e delle loro molteplicità costituisce il passo elementare nel problema che ci occupa, e la soluzione più generale di questo si lascia ricondurre a quel passo.

Orbene, per estendere l'analisi delle singolarità delle curve piane, occorre anzitutto estendere convenientemente la nazione aritmetica dell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra due numeri (interi e positivi): qui occorre considerare una terna in luogo di una coppia di numeri, e in questa terna non si deve distinguere alcun ordine dei tre numeri.

La definizione dell'algoritmo più generale che abbiamo in vista viene pôrta senz''altro quando si tenga presente il procedimento euclideo, ove in luogo di divisioni successive si parli di sottrazioni successive: è chiaro che dati tre numeri α, β, γ, si potrà procedere alla ricerca del massimo comun

([1]) Cfr. in ispecie la Nota di questi nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, T. IX, pag. 89 (1890).

divisore di essi sottraendo il minore dei detti numeri dagli altri due, e così operando di seguito. Il procedimento ha un termine naturale quando si giunge a tre resti uguali, che porgono allora il massimo comun divisore della terna. Ma pei nostri fini occorre arrestarsi innanzi, quando si trovino due resti uguali minori del terzo numero e perciò non possa più proseguirsi l'operazione senza che nasca ambiguità sulla scelta del numero da sottrarre (scelta fra due uguali che è indifferente per la questione aritmetica, ma non per la nostra questione geometrica).

Il procedimento sopra definito, che possiamo denominare *procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*, applicato ai tre numeri ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$, permette di definire un gruppo di punti successivi del ramo, in dipendenza dai primi termini delle serie, ed anche di calcolarne le molteplicità. I punti così definiti appaiono strettamente determinati dall'origine del ramo, O, dalla sua tangente e dal piano osculatore; perciò essi potranno ritenersi come satelliti del primo punto successivo ad O che si trovi su codesto piano, fuori della detta tangente. Nel caso $\mu<\nu$ (che può assumersi come caso elementare tipico) i punti nominati figurano come satelliti del terzo punto O_2 che s'incontra sul nostro ramo.

Ora, dovendo esaminare le circostanze a cui dà luogo l'arresto del nostro procedimento, supporremo — per semplicità di discorso — che manchi la unicità del minimo fra i tre numeri μ, $\nu-\mu$, λ che si ottengono con due sottrazioni successive del minimo a partire dalla terna ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$. Anzitutto se quei tre numeri sono uguali fra loro, si riconosce che il punto O_3 successivo ad O_2 sul nostro ramo (1) riesce un punto libero, dipendente da due parametri: cioè dai coefficienti a e b.

Infatti si eseguiscano sul ramo (1) due trasformazioni quadratiche successive prendendo la prima volta O e la seconda (il trasformato di) O_1 come punti fondamentali isolati; in tal guisa il ramo (1) si trasforma in un altro avente come origine il punto (trasformato di) O_2, e per questo ramo si trova appunto che la tangente nell'origine dipende dai due parametri-coordinate a e b. Per il calcolo effettivo si può servirsi della particolare trasformazione quadratica che consiste nel lasciar fermo x e cambiare y e z in y/x e z/x; si trova come ramo trasformato di (1) di origine O_2:

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{a}t^{\nu-\mu}+\cdots \\ y=at^{\mu}+\cdots \\ z=\dfrac{b}{a}t^{\lambda}+\cdots; \end{cases}$$

onde, se $\nu-\mu=\mu=\lambda$, la tangente di codesto ramo è la retta

$$a^2x-y=0 \quad , \quad bx-z=0 ,$$

che dipende appunto da entrambi i parametri a e b.

Suppongasi invece che i tre numeri μ, $\nu+\mu$, λ non sieno tutti e tre uguali, ma pur manchi fra loro l'unicità del minimo essendo uguali fra loro, e non al terzo, i più piccoli fra i due numeri. In questo caso la tangente al ramo (3), e quindi il punto O_3, non dipenderà più da due parametri essenzialmente distinti, ma da un solo parametro, oltrechè dalla natura aritmetica dei numeri di cui sopra si discorre. Questo caso non ha riscontro nella teoria delle curve piane: il punto O_3 non può considerarsi qui come un vero punto libero, ma nemmeno come un punto satellite di O_2; piuttosto esso deve ritenersi come semilibero o semisatellite

L'analisi della relazione di semisatellitismo conduce a distinguere varie specie di punti semisatelliti, dei quali si può dare anche una semplice definizione in rapporto alla trasformazione quadratica. In questa Nota riassuntiva non mi fermerò a spiegare la distinzione accennata; ma voglio avvertire — a scanso di possibili errori in cui potrebbe esser tratto il lettore — che le relazioni di satellitismo e semisatellitismo a cui dànno luogo i punti di una curva gobba non possono dedursi dalle relazioni analoghe cui dan luogo i punti di una proiezione piana generica.

Le cose dette contengono virtualmente l'analisi dei punti successivi appartenenti ad un ramo di curva gobba, imperocchè il procedimento riduttore della trasformazione quadratica permette di estendere ai punti successivi ciò che si è visto per i primi punti.

Così si è tratti a conchiudere: *l'analisi dei punti successivi di un ramo di curva gobba* (1), *e delle loro molteplicità, dipende dal procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*; si deve operare su successive terne caratteristiche di numeri, i quali vengono forniti dagli esponenti che figurano nei termini delle serie (1).

In luogo di spiegare partitamente l'applicazione del metodo, terminerò questa Nota con un esempio che — per un lettore esercitato — darà lume su tutto quanto è detto nella presente Nota. Spiegazioni particolareggiate, accessibili a tutti gli studiosi, si troveranno nel volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, come sopra è annunciato,

L'esempio scelto qui per l'applicazione del nostro procedimento si riferisce al ramo

$$\begin{cases} x = ab\,t^{13} + bt^{21} \\ y = ab\,t^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2\,t^{32} + b^2\,t^{35}\,; \end{cases}$$

l'analisi della singolarità viene illustrata dal seguente quadro:

$\begin{cases} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = abt^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2t^{32} + b^2t^{35} \end{cases}$	prima terna caratteristica	18	28	32	O^{18}
$\begin{cases} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{14} \end{cases}$		18	10	14	O_1^{10}
$\begin{cases} x = abt^{8} + bt^{11} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{4} \end{cases}$		8	10	4	O_2^{4}
$\begin{cases} x = at^{4} + t^{7} \\ y = \frac{1}{b}\, t^{6} \\ z = bt^{4} \end{cases}$		4	6	4	
cambiamento d'assi coordinati per ridurre la rappresentazione del ramo a forma normale					O_3^{4}
$\begin{cases} x = t^{7} \\ y = \frac{1}{b}\, t^{6} \\ z = bt^{4} \end{cases}$	seconda terna caratteristica	7	6	4	
$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\, t^{3} \\ y = \frac{1}{b^2}\, t^{2} \\ z = bt^{4} \end{cases}$		3	2	4	O_4^{2}
$\begin{cases} x = bt \\ y = \frac{1}{b^2}\, t^{2} \\ z = b^3\, t^{2} \end{cases}$		1	2	2	O_5^{1}
$\begin{cases} x = bt \\ y = \frac{1}{b^3}\, t \\ z = b^2\, t \end{cases}$		1	1	1	O_6^{1}

Nella colonna verticale a destra figurano i punti successivi all'origine O coll'indicazione delle rispettive molteplicità, che vengono designate con esponenti. Il gruppo dipendente dalla seconda terna di numeri caratteristici è legato al primo da una relazione di semisatellitismo; in questo gruppo si incontrano anche due punti semplici a cui seguono punti (semplici e) liberi del ramo. Ciò è d'accordo colla circostanza che l'ultimo ramo trasformato è lineare (e precisamente una retta).