Enriques, Federigo

Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXVI** (1917), pp. 35-43.

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.
Estratto dal vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem. fasc. 2° — Roma, luglio 1917.

Matematica. — *Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi.* Nota del Corrispondente F. ENRIQUES [1].

1. Prendiamo le mosse dal problema fondamentale della teoria delle singolarità delle curve piane: determinare i punti multipli successivi di un ramo dato mediante la rappresentazione parametrica

$$x = t^{\nu} \quad , \quad y = at^{\nu'} + bt^{\nu''} + \cdots \tag{1}$$

Questo problema si lascia risolvere coll'uso di successive trasformazioni quadratiche (Nöther) o con analisi algebrica diretta, come ho accennato nella mia Nota del 7 maggio 1916; il resultato è che « i punti successivi del ramo, colle loro molteplicità, vengono pôrti dal procedimento per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri ν , ν' , ν'' ... ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.

Conviene presentare quest'analisi sotto un altro aspetto, che indichi la possibilità di una generalizzazione, relativa al caso delle superficie che abbiamo in vista.

Anzitutto il nostro problema fondamentale si riferisce a sviluppi in *serie*, che vengono forniti dal teorema di Puiseux; ma, poichè l'analisi dipende soltanto da un numero finito di termini delle serie anzidette, è lecito surrogare le *serie* con *polinomi*. Così, sostituendo alla curva data una curva razionale che l'approssimi convenientemente lungo un ramo, siamo condotti a ricercare « i punti multipli successivi di una curva razionale

$$(2) \qquad x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)} \quad , \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} \, ,$$

considerata nell'intorno d'un suo punto $t = t_0$. Anzi la forma particolàre degli sviluppi di Puiseux permette di prendere qui

$$\varphi_3(t) = 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = t^\nu \, ;$$

particolarizzazioni semplificatrici, ma — del resto — non essenziali.

Si indichi con φ la curva rappresentata dalle formule (2), con n il suo ordine (che sarà dato dall'ordine del polinomio φ_2), e con O l'origine delle coordinate x e y, cioè il punto di essa che risponde al valore $t = 0$ del parametro, cui spetta per la curva la molteplicità ν ($\nu \leq \nu' < \nu'' \ldots$).

I punti multipli successivi della curva φ, infinitamente vicini al punto O, si possono mettere in evidenza come segue:

1) anzitutto, il punto proprio O, di molteplicità ν, appare colla stessa molteplicità sulla curva piana φ e sopra una φ_r, trasformata di φ (appartenente ad uno spazio di $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni) mediante il sistema delle curve piane d'ordine r (> 1);

2) in secondo luogo il punto O_1 di φ, successivo ad O, appare come punto proprio, colla molteplicità che gli compete, sopra la curva φ_r' proiezione di φ_r fatta da O su un generico iperpiano;

3) ancora il punto successivo O_2 appare come punto proprio sulla curva φ_r'' proiezione di φ_r' da O_1, e così di seguito. Essendo r abbastanza alto si esaurisce così la successione dei punti multipli di φ, trovandosi — da un certo momento in poi — sempre punti semplici.

Ora, la serie delle operazioni geometriche che abbiamo descritta, si traduce in un semplice procedimento algebrico. Infatti la curva φ viene rappresentata sulla retta t (asse del parametro t) dalla serie lineare g_n:

$$\lambda_1 t^\nu + \lambda_2 \varphi_2(t) + \lambda_3 = 0 \, ,$$

e la φ_2 è rappresentata sulla medesima retta dalla serie r-pla di codesta g_n^2, ad es. per $r=2$, dalla

$$\Phi_2 = \lambda_{11} t^{2\nu} + 2\lambda_{12} t^\nu \varphi_2(t) + 2\lambda_{13} t^\nu + \lambda_{22} \varphi_2^2(t) + 2\lambda_{23} \varphi_2(t) + \lambda_{33} = 0 .$$

Posto

$$\varphi_2(t) = a t^{\nu'} + b t^{\nu''} + \cdots$$

con

$$\nu < \nu' < \nu'' \ldots ,$$

la presenza dei punti multipli successivi $O, O_1, O_2 \ldots$ della curva φ, si rivela nell'esame della serie lineare Φ_2, come segue:

1) il punto ν-plo O risponde alla circostanza che t^ν comparisce come massimo divisore comune di tutti i termini della Φ_2, eccetto il termine costante λ_{33}:

2) fatto $\lambda_{33}=0$ (con che si ottiene un sistema lineare ∞^4 entro il sistema ∞^5 di tutte le Φ_2), si divida per t^ν, e si cerchi quindi la massima potenza di t che divida quattro Φ_2 linearmente indipendenti (e non una Φ_2 fuori del sistema di quelle): codesta potenza sarà t^ν o $t^{\nu'-\nu}$ e il fattore corrispondente darà luogo ad un punto O_1 di φ, la cui molteplicità è rispettivamente ν o $\nu'-\nu$;

3) questo procedimento si prosegue (rispetto a Φ_1 o — se occorre — a una Φ_r con $r>2$): la serie dei punti successivi della curva φ, colle rispettive molteplicità, vien pôrta dalla serie delle potenze di t che compaiono come divisori, ciascuna delle quali divide h Φ linearmente indipendenti entro un sistema di dimensione h.

Esaminando gli esponenti che figurano nelle indicate potenze, appare che essi sono: anzitutto i resti delle divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore fra ν e ν', poi gli analoghi resti nell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore di ν'' e di m. c. d. (ν, ν'), e così di seguito.

2. In ciò che precede abbiamo indicato un nuovo modo di giustificare l'analisi dei punti successivi d'un ramo di curva piana, dato mediante la sua rappresentazione parametrica. Ora è interessante osservare come il procedimento spiegato sia suscettibile d'estensione. Anzitutto codesto procedimento vale indipendentemente dall'ipotesi particolare

$$\varphi_3(t) = 1 \quad , \quad \varphi_1(t) = t^\nu ,$$

e, quando si abbiano polinomi φ_2 e φ_3 qualunque, l'analisi assume già l'aspetto generale che s'incontra nella ricerca dei *punti successivi di un ramo di curva gobba*, estendibile a curve di uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni ([1]).

([1]) Cfr. la mia Nota del 15 aprile 1917.

Pongasi

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= at^{\nu} + a_1 t^{\nu'} + \cdots \\ \varphi_2(t) &= bt^{\mu} + b_1 t^{\mu'} + \cdots \\ \varphi_3(t) &= c \quad + c_1 t^{\lambda} + \cdots,\end{aligned}$$

dove tutti i coefficienti designati sono diversi da zero. Quando si forma la serie Φ_r, p. es. la g^5_{2n}:

$$\Phi_2 = \lambda_{11}\varphi_1 + 2\lambda_{12}\varphi_1\varphi_2 + 2\lambda_{13}\varphi_1\varphi_3 + \lambda_{22}\varphi_2^2 + 2\lambda_{23}\varphi_2\varphi_3 + \lambda_{33}\varphi_3^2 = 0,$$

appare un termine $\lambda_{33}\varphi_3^2$ che non è divisibile per t; ma, posto $\lambda_{33} = 0$, si ottengono cinque Φ_2 indipendenti che ammettono uno dei divisori t^{ν}, t^{μ}, sicchè il più piccolo fra i due numeri ν, μ, designa la molteplicità del punto O per la curva

$$(\varphi) \qquad x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}.$$

Ora, se p. es. $\nu < \mu$, la molteplicità del punto successivo O_1 verrà data dal più piccolo fra i numeri: $\nu' - \nu$, $\mu - \nu$, λ, corrispondentemente alla massima potenza di t che apparirà come divisore di quattro Φ_2 linearmente indipendenti (in cui $\lambda_{13} = 0$).

Così potremo proseguire l'analisi che porge i punti multipli successivi della curva φ: le molteplicità di questi dipenderanno sempre dai più piccoli resti ottenuti nel nostro processo di sottrazioni, che è una generalizzazione dell'algoritmo euclideo per la ricerca del massimo comun divisore, dove si ha da operare su gruppi di numeri di cui non è dato un ordine.

3. Dalle curve passiamo alle superficie.

In due Note presentate all'Accademia delle Scienze di Bologna, il 7 maggio 1916 e il 19 maggio 1917, ho indicato la possibilità di rappresentare approssimativamente una falda di superficie nell'intorno d'un punto singolare O mediante funzioni razionali, che saranno in generale del tipo:

$$(\varphi) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ y &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ z &= \frac{\theta(uv)\,.\,\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)}; \end{aligned}\right.$$

qui si suppone che φ_4 non contenga alcun fattore comune ai numeratori delle x, y e z, e si ha da studiare l'intorno del punto O sulla superficie φ, corrispondentemente all'intorno della curva $\theta(uv) = 0$ nel piano (uv).

Potrà accadere, del resto, che la θ si scinda in più fattori (polinomi in u, v):

$$\theta = \theta_1^{\nu}\, \theta_2^{\mu} \ldots$$

Ora i *punti multipli appartenenti alla superficie* φ *nell'intorno di* O *potranno corrispondere*:

a) a *curve del piano* che, facendo parte dell'intorno di θ, dovranno essere *componenti di* θ;

b) e a *punti* o *gruppi di punti* [1].

La ricerca dei punti multipli della specie *a*) dà luogo ad un *procedimento di divisioni successive di polinomi*, che è l'immediata estensione di quello innanzi descritto per la ricerca concernente le singolarità delle curve. Il procedimento a cui accenniamo verrà spiegato, per semplicità di discorso, nel caso in cui θ sia *irreducibile* e le φ_1, φ_2, φ_3 non abbiano altro divisore comune.

Si consideri il sistema Φ_r multiplo, secondo un numero r abbastanza elevato, del sistema lineare di curve piane

$$|\varphi| = \lambda_1\, \theta\, \varphi_1 + \lambda_2\, \theta\, \varphi_2 + \lambda_3\, \theta\, \varphi_3 + \lambda_4\, \varphi_4\,;$$

si potrà scrivere simbolicamente:

$$|\Phi_r| = (\lambda_1\, \theta\, \varphi_1 + \lambda_2\, \theta\, \varphi_2 + \lambda_3\, \theta\, \varphi_3 + \lambda_4\, \varphi_4)^r\,,$$

cioè

$$|\Phi_r| = |\Phi_1|^r = |\varphi|^r,$$

e si avranno

$$N_r = \frac{(r+3)\,(r+2)\,(r+1)}{6}$$

curve Φ_r linearmente indipendenti; fra queste Φ_r, $N_r - 1$ (corrispondenti all'annullamento del coefficiente rappresentato simbolicamente da λ_4^r) risulteranno divisibili per θ. Eseguita la divisione, si cercherà ancora di determinare, ove esista, un sistema lineare di dimensione $N_r - 3$ di $\Phi_r\,\theta$ (contenente θ come fattore fisso, cioè $N_r - 2$ Φ_r indipendenti) divisibili per θ^2, e così di seguito.

Il procedimento avrà termine, giacchè si troverà certo un numero s tale che θ^{s+1} non divida $N_r - (s+1)$ Φ_r indipendenti (e se ciò accade per un r per cui $N_r > s+1$, lo stesso accadrà per valori più grandi di r). Infatti l'ordine delle curve Φ_r vale nr, n designando l'ordine delle curve φ_r, cioè cresce proporzionalmente ad r; invece l'ordine di θ^s è is, i designando

[1] La distinzione è relativa al modo particolare della rappresentazione, poichè una trasformazione birazionale su u e v vale a cambiare un punto in una curva, che tuttavia possiederà i noti caratteri delle curve *eccezionali*.

l'ordine di θ, e però cresce proporzionalmente ad s; d'altra parte s è vincolato ad una diseguaglianza rispetto ad N_r, dove quest'ultimo numero cresce come il cubo di r; ma se θ^s deve dividere una Φ_r, bisogna che sia

$$is \leq nr,$$

e quindi la possibilità della divisione deve arrestarsi — appena si abbia un r un po' grande — per un s piccolo rispetto a N_r.

Abbiamo spiegato il precedimento che vale a determinare i punti multipli a) della superficie φ, vicini ad O, riferendoci al caso in cui il sistema lineare

$$\lambda_1\,\theta\,\varphi_1 + \lambda_3\,\theta\,\varphi_2 + \lambda_3\,\theta\,\varphi_3 + \lambda_4\,\varphi_4 = 0$$

possegga una curva fondamentale irreducibile θ. Ora è chiaro che le cose dette si estendono al caso di θ *riducibile*: si avrà ancora da ricercare la divisibilità delle nostre

$$\Phi_r = (\lambda_1\,\theta\,\varphi_1 + \lambda_2\,\theta\,\varphi_2 + \lambda_3\,\theta\,\varphi_3 + \lambda_4\,\varphi_4)$$

per polinomi che saranno da scegliere fra i divisori di θ. Soltanto potrà ora occorrere di considerare diverse serie di divisioni, corrispondentemente al caso che si trovino — a partire da O sulla superficie φ — diverse successioni di punti multipli infinitamente vicini.

4. Oltre ai punti multipli a) della superficie φ, appartenenti all'intorno del punto O e rispondenti a curve (fondamentali) del piano (uv), si hanno ancora da ricercare i punti multipli b) che rispondono a punti o gruppi di punti del detto piano. Meglio che una discussione minuta, vale qui l'esame di alcuni esempî notevoli, i quali avranno anche una certa importanza generale, come avviamento al problema della *classificazione dei punti doppî uniplanari* delle superficie;

Nel seguito supporremo in generale che il punto singolare O della superficie φ corrisponda ad una *curva fondamentale irreducibile* del sistema $|\varphi|$ nel piano rappresentativo (uv); codesta curva verrà designata, come innanzi, con θ.

Avremo:

1) Una *prima classe di punti doppî*, corrisponde all'ipotesi che dopo avere staccato la θ da φ, θ non sia più fondamentale per il sistema residuo $|\varphi'|$. In questo caso la θ sarà una curva iperellettica intersecata secondo coppie variabili della g'_2 dalle curve di $|\varphi'|$ (solo nel caso che θ sia di genere zero si possono avere, su θ, le coppie di una g_2^2: allora O è un punto conico ordinario per la superficie φ). Designando con π *il genere della* θ $(\pi > 0)$, avremo *su una sezione piana generica per* O *un tacnodo di specie* π, imperocchè lo staccamento di θ dalle curve di $|\varphi|$ abbassa il

genere precisamente di $\pi + 1$, secondo la nota formula che dà il genere delle curve spezzate.

Ai *punti doppî* della nominata g'_2 su θ rispondono direzioni per O che dànno sezioni piane cuspidate, e quindi $2\pi + 2$ *punti doppî successivi alla curva doppia infinitesima circondante* O.

Rientrano come casi particolari nella nostra prima classe di punti doppî, alcuni casi in cui *la* θ *si spezza*, segnatamente il caso in cui essa si riduca ad una curva razionale doppia.

Il punto cuspidale ordinario, O, di una superficie φ del terz'ordine, corrisponde a un sistema di cubiche piane passanti per tre punti in linea retta con tangenti fisse: a codesti punti base rispondono i tre punti doppî vicini ad O.

Un punto doppio O con sezioni cuspidate di 2ª specie si presenta sulla superficie del 4° ordine (φ) come caso particolare del tacnodo, e si costruisce come segue.

Si assuma anzitutto una quartica $\theta = C_4$ con due punti doppî A_1 e A_2, e si fissino su di essa 6 punti $B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6$: le curve di 8° ordine passanti per $A_1^4\ A_2^4\ B_1^2\ B_2^2\ B_3^2\ B_4^2\ B_5^2\ B_6^2$, segano su C_4 le quaterne di una g_4^3; fissando una quaterna di punti base semplici $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$, otterremo un sistema lineare ∞^3 di curve $|\varphi|$, di genere 3 e grado 4, avente la curva fondamentale θ, staccando la quale si trova una rete residua composta delle quartiche per $A_1^2\ A_2^2\ B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6$. (Si avverta che il sistema $|\varphi|$ si deduce — con una trasformazione quadratica — da un sistema di sestiche con 7 punti base doppî e 4 semplici sopra una cubica fondamentale). Ora, si faccia degenerare la θ in una conica contata due volte, $\theta = C_2^2$, e assumiamo su questa: i punti $A_1\ A_2$, che saranno base quadrupli per le curve φ d'ordine 8; i punti $B_1\ B_2\ B_3$, in cui le φ dovranno avere dei tacnodi con tangenti fisse; e, finalmente, i punti base semplici P_1 e P_2, ove le φ dovranno avere tangenti fisse. Il sistema $|\varphi|$ rappresenterà una superficie del 4° ordine con un punto singolare O, tale che le sezioni piane per esso saranno cuspidi di 2ª specie; si avranno per O tre direzioni singolari corrispondenti a $B_1\ B_2\ B_3$, secondo le quali si trovano tre punti doppî della superficie infinitamente vicini alla retta doppia infinitesima che circonda O.

2) *Una seconda classe di punti doppî* uniplanari, si ottiene nel caso che la θ possa staccarsi *due* volte dal sistema $|\varphi|$ (e dai suoi multipli). Allora non è più vero in generale che il genere di θ uguagli la specie delle sezioni (tacnodali) della superficie φ.

L'esempio più semplice di punti doppî della seconda classe si ottiene come segue. Si considerino le cubiche di un fascio passanti per 8 punti dati $A_1\ A_2 \ldots A_8$ e le ∞^6 curve di 9° ordine che ne costituiscono il sistema triplo, passando per $A_1^3\ A_2^3 \ldots A_8^3$. A codeste curve di 9° ordine s'imponga di avere un punto doppio P sopra una cubica θ del fascio $(A_1 \ldots A_8)$; si avrà così un sistema lineare ∞^3 di curve φ, avente — di conseguenza — un altro punto base semplice P' sopra θ: il genere del sistema $|\varphi|$ così costruito sarà 3, il suo grado varrà 4: staccando la curva fondamentale θ si avrà un sistema residuo di sestiche (passanti per P e quindi per un altro punto fisso di θ) di genere 2 e di grado 2. Pertanto il nostro sistema $|\varphi|$ rappresenta un punto doppio di una superficie del 4° ordine; singolarità notevole che abbassa soltanto di *uno* il genere delle sezioni piane, ma pure abbassa il genere della superficie, riducendola razionale (Nöther).

L'esempio anzidetto si può generalizzare come segue.

Si consideri una quartica θ di genere due, dotata di un punto doppio M, o sopra θ si assumano 10 punti semplici, affatto generici, $A_1\, A_2 \dots A_{10}$. Le curve d'ordine 12 passanti per $M^6\, A_1^3\, A_2^3 \dots A_{10}^3$ formano un sistema lineare di dimensione 9; s'imponga ad esse di possedere due punti doppî P_1 e P_2, assegnati in posizione generica sopra θ, si otterrà così un sistema $|\varphi|$ di dimensione 3, avente — di conseguenza — due punti base semplici Q_1 e Q_2 sopra θ: il genere di $|\varphi|$ vale 8, il suo grado pure 8. Ora, staccando la curva fondamentale θ da $|\varphi|$ (che possiede i punti base $M^6\, A_1^3 \dots A_{10}^3\, P_1^2\, P_2^2\, Q_1\, Q_2$) si ottiene un sistema residuo $|\varphi'|$ di curve di 8° ordine, per $M^4\, A_1^2 \dots A_{10}^2\, P_1\, P_2$, contenente — di conseguenza — altri due punti base semplici R_1 e R_2 su θ; il genere di $|\varphi'|$ varrà 5 e il suo grado 6. Appare così che la superficie φ (d'ordine 8), rappresentata dal sistema $|\varphi|$, possiede un punto doppio O che abbassa di 3 il genere delle sezioni piane, le quali possiederanno dunque un tacnodo di specie due; la retta doppia infinitesima che circonda O (cui succede un'altra retta doppia infinitesima) verrà rappresentata dalla serie delle coppie di punti coniugati appartenenti agli intorni di R_1 e R_2.

Ora, vicino ad O, si trova un punto doppio O_1 rappresentato sul piano dalla medesima curva θ di genere due; le sezioni piane di φ per i due punti $O\, O_1$ sono date dalle quartiche per $M^2\, A_1 \dots A_{10}$, e così appare che anche il punto doppio O_1 abbassa di 3 il genere delle sezioni per esso.

. . . .

i) *La classe i^{ma} di punti doppî* corrisponde all'ipotesi che la curva θ fondamentale per $|\varphi|$ si possa staccare, come fondamentale, dai sistemi successivi. L'esistenza di punti doppî siffatti resulta già provata generalizzando il primo degli esempî precedenti, come segue.

Si considerino le curve d'ordine $3i+3$ passanti per 8 punti $A_1^{i+1}\, A_2^{i+1} \dots A_8^{i+1}$, queste curve segano sopra una cubica θ per $A_1 \dots A_8$ una serie lineare g_{i+1}^i e formano un sistema lineare di dimensione

$$1+2+\cdots+(i+1)=\frac{(i+2)\,(i+1)}{2}.$$

Imponiamo a codeste curve di avere su θ un punto i-plo P; si otterrà così un sistema $|\varphi|$ dotato di un altro punto base semplice P', sistema di dimensione $i+1$, di genere i e di grado $2i+1$.

Staccando la θ si ha un sistema residuo di curve d'ordine $3i$ passanti per $A_2^i \dots A_8^i$, P^{i-1}, e quindi per un altro punto semplice fisso su θ; il genere si è abbassato di 1, il grado di 2, la θ rimane curva fondamentale; e così successivamente per i volte (compresa la prima).

Al sistema $|\varphi|$, o ad un generico sistema ∞^3 contenuto in esso, risponde una superficie φ che possiede un punto doppio uniplanare di classe i.

Lo studio dell'argomento potrà essere utilmente proseguito: la presente Nota non mira tanto a porgere risposta esauriente ad un problema, quanto ad aprire una via di ricerca ai giovani studiosi.