
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

**Lezioni sulla teoria geometrica delle
equazioni e delle funzioni algebriche**

vol. II

Zanichelli, Bologna, 1918. (pubbl. per cura di O. Chisini)



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 - Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

LEZIONI

SULLA

TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE

DI

FEDERIGO ENRIQUES

PUBBLICATE PER CURA DEL DOTT. OSCAR CHISINI

VOLUME II



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

PROPRIETÀ LETTERARIA

LIBRO TERZO

LA TEORIA ELEMENTARE
DELLE CURVE PIANE BASATA
SULLA POLARITÀ

LETTERATURA

- G. DESARGUES - *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* (Parigi 1639). Cfr. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra*. Parigi, Leiber, 1864. Tomo I. (In questa pubblicazione al trattato sulle coniche di Desargues fa seguito un commento di DE LA HIRE).
- Ph. DE LA HIRE - *Sectiones conicae - in novem libros distributae* - Parigi, 1685.
- C. MAC-LAURIN - *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus* - Londra, 1748. Trad. fr. DE JONQUIÈRES (op. c., nel L. 2°, § 12).
- G. MONGE - *Applications de l'Analyse à la géométrie*. Parigi, 1795.
- J. V. PONCELET - *Solutions de problèmes de Géométrie, suivies d'une théorie des polaires réciproques et de reflexions sur l'élimination*. Annales de Mathématiques, tomo 8, 1817.
- *Notice sur la théorie des polaires réciproques*. Annales de Mathématiques, tomo 8, 1817. Cfr. *Applications d'Analyse et de Géométrie* - Parigi, Gauthier-Villars, 1864, t. II.
- *Mémoires sur les centres des moyennes harmoniques*. Journal für Mathematik Bd. 3, pag. 213; 1828.
- *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*. Journal für Mathematik, Bd. 4, pag. 1; 1829.
- *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques*. Journal für Mathematik, Bd. 8, pagg. 21, 117, 213, 370; 1832. Cfr. *Traité des propriétés projectives*, 2^a ed., t. II; 1866.

- E. BOBILLIER - *Démonstrations de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres.* (Annales de Mathématiques di Gergonne, tomo 18, pag. 89; 1827-28.)
- *Récherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres,* (ibidem, pag. 157).
- *Récherches sur les lois generales qui régissent les courbes algébriques,* (ibidem, tomo 19, pag. 106; 1828-29.)
- *Théorèmes sur les polaires successives,* (ibidem, pag. 302).
- J. PLÜCKER - *Ueber ein neues Coordinatensystem.* Journal für Mathematik, Bd. 5, 1829.
- E. DE JONQUIÈRES - *Mémoire sur la théorie des pôles et polaires.* Journal de Mathématiques, 1857.
- H. GRASSMANN - *Theorie der Centralen.* Journal für Mathematik, Bd. 24, 25; 1842-43.
- J. STEINER - *Allgemeine Eigenschaften der Algebraischen Curven.* Comunicazione fatta all'Accademia di Berlino nel 1848 e riprodotta nel tomo 47 (1854) del Journal für Mathematik.
- A. CAYLEY. - *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position.* (Journal für Mathematik, Bd. 34, 1847).

Inoltre si confrontino i trattati citati nel L. 2°, § 12, (Vol. I, pag. 222) e in particolare:

- L. CREMONA - *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane* - Bologna, 1861. (Cfr. Opere, t. I, pag. 312 - Milano, Hoepli, 1914).
- G. SALMON - *A treatise on the higher plane curves* - Dublino, 1852.
- Traduzione tedesca ampliata da Fiedler: *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven,* (1882).
- Traduzione francese di O. Chemin: *Traité de Géométrie analytique.* (Courbes planes), II edizione - Parigi, 1903.
- A. CLEBSCH - *Vorlesungen über Geometrie,* per cura di F. Lindemann - Lipsia (1875-76). Traduzione francese di A. Benoist - Parigi, (1879).

CAPITOLO I

Polarità e curve covarianti

1. **Introduzione storica.** — La polarità rispetto ad una conica, i cui germi si trovano nelle opere degli antichi (APOLLONIO, PAPP), si può riattaccare a DESARGUES (1639), che ne scoprì le proprietà fondamentali. Al lume della concezione proiettiva di DESARGUES (cui risale l'introduzione dei punti all'infinito) la polare d'un punto appare come una generalizzazione del diametro bisecante un sistema di corde parallele e — al tempo stesso — come congiungente i punti di contatto delle tangenti condotte dal polo. Gli sviluppi posteriori della teoria mettono capo alla sua sistemazione nella scuola di MONGE, dove, dopo il maestro, sono da annoverare BRIANCHON, GERGONNE, SERVOIS e specialmente PONCELET. Ivi la polare, che DESARGUES designava come « *transversale de l'ordonnance* », riceve appunto il nome di « polare » (GERGONNE), mentre SERVOIS introduce il nome di « polo ». La proprietà proiettiva della polarità come corrispondenza, cioè che « le polari d'un fascio formano un fascio », viene riconosciuta da MONGE riferendosi alle quadriche (è noto che questa proprietà condusse più tardi a definire la polarità indipendentemente dalle forme di 2° ordine — così da servire di base ad una nuova trattazione di queste forme — STAUDT, 1848). Il rapporto della teoria delle polari colle proprietà diametrali delle coniche appare luminoso nell'ordine d'idee di PONCELET, al quale si deve in particolare il chiaro riconoscimento della « *retta all'infinito*, luogo dei punti all'infinito del piano ».

Ora la teoria generale delle polari nello studio delle forme algebriche si presenta come naturale estensione dei due modi di considerare la polare d'un punto rispetto ad una conica, cioè

1) quale congiungente i punti di contatto delle tangenti condotte dal polo,

2) e quale generalizzazione proiettiva del diametro.

Sorgono così due ordini di concetti e quindi due definizioni generali delle polari, che mettono in evidenza il significato e il valore della teoria.

1) Nello studio delle curve piane, la polare scaturisce naturalmente dal « problema della tangente », quando si cerchino i punti di contatto delle tangenti condotte ad una curva f da un punto qualsiasi del piano. Questa considerazione suppone che la curva stessa venga concepita non più come « data in un tratto limitato », secondo la veduta dell'Analisi *differenziale*, ma « nella sua interezza » secondo la veduta *sintetica* (o integrale) che conviene alla teoria qualitativa delle funzioni, particolarmente algebriche.

Anzitutto MONGE ⁽¹⁾ (1895) ha fatto la scoperta fondamentale che la curva di contatto del cono circoscritto ad una superficie d'ordine n appartiene ad una (determinata) superficie d'ordine $n - 1$ (quella che fu poi designata come superficie polare del vertice del cono). Questa scoperta contiene il risultato a cui pervenne più tardi (1817) PONCELET nell'analisi del problema delle tangenti che si possono condurre ad una curva piana per un punto.

Se $f(xy) = 0$ è una curva algebrica d'ordine $n (> 1)$, la tangente in un punto (xy) ha per coefficiente angolare

$$y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ove questa tangente sia assoggettata ad avere una data direzione, cioè a passare per un punto all'infinito $\left(\frac{y}{x} = k\right)$, il suo punto di contatto dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

che è d'ordine $n - 1$. Da ciò PONCELET deduce, per proie-

(1) Op. c., § 3.

zione, che sempre i punti di contatto delle tangenti condotte ad f da un punto stanno sopra una curva d'ordine $n - 1$. Qui conviene avvertire che l'esame diretto della questione sembra contraddire al risultato precedente: infatti se nell'equazione della tangente

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) = 0,$$

si riguardano X e Y come costanti e x, y come variabili, si ha un'equazione d'ordine n anzichè $n - 1$; e da ciò si è tratti a concludere che per un punto possono passare in generale n^2 tangenti ad f , anzichè $n(n - 1)$ come segue dal risultato precedente. PONCELET ⁽¹⁾ spiega questa apparente contraddizione — che già aveva ingannato WARING — notando che le due curve f e φ hanno comuni n punti all'infinito, che non sono punti di contatto delle tangenti condotte dal punto (XY) .

BOBILLIER (1827) riprendendo la trattazione del problema, scrive esplicitamente la precedente equazione $\varphi(xy) = 0$ e nota che — facendo sistema colla $f = 0$ — le si può sostituire la curva

$$\varphi(xy) + n f(xy) = 0,$$

la quale si riduce effettivamente all'ordine $n - 1$. Quindi BOBILLIER studia la corrispondenza fra i poli e le curve polari osservando che le polari dei punti di una retta formano un fascio; inoltre egli introduce le polari successive e giunge al teorema fondamentale che esprime la legge di reciprocità: se la polare d'ordine r di un punto P passa per P' , la polare d'ordine $n - r$ di P' passa per P .

Una notevole semplificazione della teoria delle polari si ha con l'introduzione delle coordinate omogenee, come ha mostrato PLÜCKER (1829). Infatti se l'equazione di f è scritta sotto forma omogenea

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

l'equazione della tangente in un punto $(x_1 x_2 x_3)$ diviene

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0;$$

(1) Cfr. L. 2°, § 19.

allora — tenendo fisse le y_i — l'equazione precedente rappresenta senz'altro una curva d'ordine $n - 1$, che è la polare del punto (y_i) .

Dalla espressione precedente si passa subito a quella delle polari successive; PLÜCKER ne trae anche la definizione della polare mista di due punti.

Ora l'espressione differenziale delle forme polari si estende al caso d'un numero qualunque di variabili, e così, da una parte, alle superficie, varietà ecc., dall'altra parte alle forme binarie, cioè ai gruppi di punti. Su questo terreno s'incontra l'altra definizione delle polari che proviene dalla generalizzazione del punto medio d'un segmento e della divisione armonica.

2) Attraverso DE LA HIRE (1679) le concezioni di DESARGUES in ordine alle proprietà diametrali delle coniche e alla loro generalizzazione proiettiva, passano nella scuola di NEWTON, ove vengono estese a curve d'ordine superiore.

Nell'« *Enumeratio* » di NEWTON del 1704 si trovano considerate le coniche diametrali e i diametri delle cubiche; questi ultimi vengono definiti in rapporto a fasci di rette parallele, considerando su ognuna di tali rette il punto per cui la somma algebrica delle distanze delle intersezioni della curva riesce nulla.

Un teorema postumo di CÔTES, che trova posto nel trattato di MAC-LAURIN (1748), esprime una proprietà (proiettiva) generale in ordine alle trasversali di una curva uscenti da un punto O , la quale si riduce alla proprietà del diametro, mandando O all'infinito. Così s'introducono, in relazione a gruppi dati su una retta per O , quei punti che furono poi chiamati da PONCELET « centri delle medie armoniche ».

Ad illuminare le anzidette concezioni non ci voleva meno che l'elaborazione d'idee onde riesce costituito, coll'opera di PONCELET, l'organismo della Geometria proiettiva. La definizione sintetica della polare d'un punto rispetto ad una curva, come luogo dei centri delle medie armoniche sopra le trasversali per esso, si trova in una memoria di PONCELET dell'inverno 1816 la quale rimase lungamente inedita e fu pubblicata nel citato volume del 1864; ma una parte di questi studi venne in luce, nelle altre memorie accennate del nostro autore, fino dal 1817.

Nelle vedute che PONCELET svolge durante gli anni

1817-1832, deve riconoscersi l'ispirazione dei lavori di GRASMANN (1842) e di De JONQUIÈRES (1857), come pure delle ricerche di STEINER (1848) tendenti a costituire una teoria sintetica delle curve, quale fu sistemata, con lo sviluppo delle dimostrazioni, dal CREMONA, nella sua « Introduzione » del 1861.

Venuto meno da parte nostra un particolare interesse per lo sviluppo sintetico come tale, rimane, qual frutto della competizione delle scuole, un duplice ordine di trattazione delle polari, che mette in evidenza profondi rapporti e dà luogo a confronti altamente suggestivi. Il lettore che, non volendo soffermarsi sui metodi, cerchi soltanto di raggiungere rapidamente il possesso dei risultati, potrà attenersi esclusivamente alla teoria fondata sull'espressione differenziale delle polari (§ 2), ricercando nei successivi §§ 3, 4 le dimostrazioni dirette dei teoremi, in base a semplici verifiche analitiche.

Convieni aggiungere che l'importanza essenziale della teoria delle polari per lo studio delle curve algebriche, risulta bene lumeggiata dal posto che a codesta teoria spetta, tanto nella trattazione analitica quanto nella trattazione sintetica delle curve; tale circostanza mostra infatti come il concetto delle polari sia intimamente legato ai diversi problemi che la considerazione delle curve può suggerire. In particolare giova a noi rilevare che, nello studio dei problemi fondamentali attinenti alle curve piane, la polarità costituisce la forma più semplice e, si può ben dire, la via maestra di una trattazione algebrica diretta.

Il significato proiettivo della polare le conferisce uno speciale valore nello studio delle formazioni invarianti (HESSE, STEINER, CAYLEY, CLEBSCH); e il comportamento delle polari nei punti singolari porge un istrumento potente per l'analisi delle singolarità. Rinviando al prossimo libro uno sviluppo approfondito di quest'ultimo argomento, ci proponiamo di riprendere in questo la trattazione elementare delle curve piane (che già presentammo da un altro punto di vista) indicando anche — sulla base della polarità — la soluzione algebrica più diretta dei problemi che si collegano alle formule di PLÜCKER e poi alla determinazione delle curve singolari (dotate di punti doppi o di cuspidi) che sono contenute in un fascio o in una rete; dalla quale seguono i caratteri delle accennate curve covarianti.

2. **Espressione differenziale delle forme polari.** — Sia definito sulla retta un gruppo di n punti, mediante l'equazione omogenea di grado n :

$$\overline{f(x_1 x_2)} = 0;$$

dicesi *gruppo polare* di un punto, $(y) = (y_1 y_2)$, rispetto ad $f=0$, il gruppo degli $n - 1$ punti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 = 0.$$

Questa definizione si giustifica facendo vedere che il gruppo $\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 = 0$, dipende soltanto dalla posizione dei punti $f=0$ e del polo (y) , e non dalla scelta delle coordinate proiettive di essi.

Infatti se eseguiamo un cambiamento di coordinate, effettuando su x_1, x_2 la sostituzione lineare

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

l'espressione

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2$$

si trasforma in

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_1} \bar{y}_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_2} \bar{y}_2,$$

dove si designa con \bar{f} la trasformata di f :

$$\bar{f}(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = f(\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2, \gamma \bar{x}_1 + \delta \bar{x}_2).$$

Ciò si verifica notando che

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_1} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_2} = \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (\delta y_1 - \beta y_2)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} (-\gamma y_1 + \alpha y_2).$$

Nel caso $n=2$ il gruppo polare di (y) rispetto alla coppia $f=0$, si riduce al *coniugato armonico* di (y) .

Ora la definizione data dei gruppi polari si lascia successivamente estendere; così si definisce la *curva polare* di un punto $(y) = (y_1 y_2 y_3)$ rispetto ad una curva piana d'ordine n

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0;$$

questa polare è data dall'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0,$$

la quale dipende soltanto dalla posizione del polo e dalla curva fondamentale $f=0$, restando il primo membro invariato — a meno di una costante moltiplicativa — per una sostituzione lineare, cioè per un cambiamento delle coordinate proiettive.

Nel caso $n=2$, la polare di (y) rispetto alla conica $f=0$ è la retta polare, che si definisce geometricamente nel modo ben noto.

L'operazione per la quale da una forma f d'ordine n (in due o più variabili) si passa a una *forma polare* relativa a un punto (y) , si può designare simbolicamente, introducendo per comodità il fattore numerico $\frac{1}{n}$, con

$$\Delta_y = \frac{1}{n} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} y_i;$$

pertanto la polare di (y) rispetto a f verrà designata con $\Delta_y f$.

L'applicazione reiterata dell'operatore Δ_y conduce a costruire le polari successive $\Delta_y^i f$, e così in particolare:

1) *Sopra la retta*, e rispetto al gruppo di n punti

$$f(x_1 x_2) = 0,$$

il *secondo gruppo polare*, o polare d'ordine $n-2$, del punto (y) , sarà

$$\Delta_y^2 f = \Delta_y(\Delta_y f) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} y_2^2 \right) = 0;$$

e successivamente si avranno gruppi polari d'ordine $n-3, \dots$ fino a un ultimo *punto polare* $(n-1)$ -mo di (y) .

2) Nel piano, e rispetto alla curva d'ordine n

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

la *seconda curva polare*, o polare d'ordine $n - 2$, di (y) sarà

$$\Delta_y^2 f = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i, k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = 0,$$

e successivamente si avranno curve polari d'ordine $n - 3, \dots$, fino a una $(n - 2)$ -ma polare o *conica polare* $\Delta_y^{n-2} f = 0$, e a una $(n - 1)$ -ma polare, o *retta polare* $\Delta_y^{n-1} f = 0$.

La polarità, cioè l'operazione Δ_y , ha carattere proiettivo, vale a dire: la polare $\Delta_y f$ è un covariante simultaneo del punto (y) e della forma f .

Infatti, come per le forme binarie e ternarie, si verifica in generale che una sostituzione lineare sulle x_1, \dots, x_n (e quindi su y_1, \dots, y_n) trasforma

$$\Delta_y f = 0 \quad \text{in} \quad \Delta_{\bar{y}} \bar{f} = 0.$$

Si deduce che anche le forme polari successive

$$\Delta_y^2 f = \Delta_y \Delta_y f, \dots$$

hanno del pari carattere proiettivo.

Ora il teorema di EULERO ci permette di enunciare che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un punto (y) annulli la sua forma polare, rispetto a una forma fondamentale f , è che esso annulli la f .

Infatti, se deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots = 0$$

per

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \dots,$$

si avrà

$$\sum \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = 0;$$

ma

$$\sum \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n f(y_1, y_2, \dots),$$

quindi

$$f(y_1, y_2, \dots) = 0.$$

c. d. d.

In particolare dunque:

Sopra la retta, i punti che appartengono al proprio gruppo polare sono i punti del gruppo fondamentale $f=0$.

Nel piano, i punti che appartengono alla propria polare sono i punti della curva fondamentale $f=0$.

Osservazione. È ovvio che (y) annullando la polare $\Delta_y f$ annulla anche le polari successive; viceversa se (y) annulla una delle polari successive $\Delta_y^r f$, annulla anche $\Delta_y^{r-1} f \dots$ e quindi f .

Nello sviluppo della teoria delle polari ricorrono due teoremi fondamentali che qui vogliamo dimostrare, partendo dalla generale espressione differenziale col metodo di JOACHIMSTHAL (cfr. L. 1°, § 12).

Legge di reciprocità:

$$\Delta_x^{n-r} f(y) = \Delta_y^r f(x),$$

cioè: se il punto (x) annulla la polare r -ma di (y) , (y) annulla la polare $(n-r)$ -ma di (x) .

Per dimostrare l'identità precedente si svilupperà in serie di TAYLOR la funzione

$$f(\lambda x_i + \mu y_i),$$

considerando una volta come incrementi le λx_i e un'altra le μy_i ; uguagliando i coefficienti di $\lambda^r \mu^{n-r}$ nei due sviluppi indicati, si ottiene appunto l'identità che costituisce il nostro teorema.

Teorema di permutabilità di PLÜCKER (1):

$$\Delta_z^s \Delta_y^r f(x) = \Delta_y^r \Delta_z^s f(x),$$

cioè: la polare s -ma di (z) rispetto alla polare r -ma di (y) equivale alla polare r -ma di (y) rispetto alla polare s -ma di (z) .

Infatti l'operazione $\Delta_z^s \Delta_y^r$ si può rappresentare simbolicamente col prodotto

$$\left(\sum \frac{\partial}{\partial x_i} z_i \right)^s \left(\sum \frac{\partial}{\partial x_i} y_i \right)^r,$$

(1) Journal für Math. Bd. 5, pag. 34

dove s'intenda che il prodotto

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{t_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{t_2} \dots$$

venga sostituito con

$$\frac{\partial^{t_1+t_2+\dots}}{\partial x_1^{t_1} \partial x_2^{t_2} \dots}$$

La precedente espressione mette in evidenza il teorema di permutabilità. È poi chiaro che la permutabilità così stabilita degli operatori Δ_y , Δ_z , si estende al caso di più operatori e permette di definire la *forma polare mista* di più punti (y) , (z) ,..., indipendentemente dall'ordine di essi.

Nota. La legge di reciprocità e il teorema di permutabilità di PLÜCKER si possono anche riattaccare, con vantaggio, alla rappresentazione simbolica delle forme secondo CLEBSCH-ARONHOLD. (Cfr. L. 1°, § 6).

Scriviamo simbolicamente

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots)^n$$

dove ricordiamo che i prodotti simbolici

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}$$

vanno sostituiti con

$$a_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

La polare del punto (y) rispetto ad f diventa

$$\Delta_y f = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial a_x^n}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial a_x^n}{\partial x_2} y_2 + \dots \right) = a_x^{n-1} (a_1 y + a_2 y_2 + \dots) = a_x^{n-1} a_y$$

Da questa rappresentazione simbolica di $\Delta_y f$, si deduce similmente

$$\Delta_y^r f(x) = a_x^{n-r} a_y^r,$$

e

$$\Delta_z^s \Delta_y^r f(x) = a_x^{n-r-s} a_y^r a_z^s.$$

Di qui appunto seguono senz'altro le identità che costituiscono i due teoremi sopra enunciati:

$$\Delta_y^r f(x) = a_x^{n-r} a_y^r = a_y^r a_x^{n-r} = \Delta_x^{n-r} f(y),$$

e

$$\Delta_z^s \Delta_y^r f(x) = a_z^s a_y^r a_x^{n-r-s} = a_y^r a_z^s a_x^{n-s-r} = \Delta_y^r \Delta_z^s f(x).$$

3. **Gruppi polari sopra la retta: espressione delle forme polari per le radici di $f(x) = 0$.** — Come già abbiamo notato nella introduzione storica, l'espressione differenziale delle polari prende origine nella teoria delle curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, ove l'equazione

$$\Delta_y f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} y_3 = 0$$

sorge direttamente dal problema di condurre le tangenti alla curva per il punto (y) . È soltanto per estensione formale che s'introducono, in quest'ordine di idee, i gruppi polari sopra la retta, cioè le forme polari nel campo binario, sebbene la semplicità delle formule ci abbia consigliato a cominciare da questi la trattazione del paragrafo precedente.

D'altra parte le forme polari relative a una binaria $f(x_1, x_2) = 0$ ammettono una notevole espressione algebrica per le radici del polinomio associato $f(x) = 0$; qui viene posto in luce il significato geometrico della polarità sulla retta, come naturale estensione della corrispondenza fra i coniugati armonici rispetto ad una coppia di punti $f_2 = 0$. Vedremo poi che la nozione dei gruppi polari sopra la retta conduce ad una definizione sintetica delle curve polari, quale trovasi svolta, per esempio, nella « Introduzione » del CREMONA.

Siano

$$A_h \equiv (a_{h_1} a_{h_2}) \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

gli n punti del gruppo $f(x_1, x_2) = 0$; se prendiamo come polo il punto $O \equiv (0, 1)$, il gruppo primo polare di O sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Scriviamo

$$f(x_1, x_2) = (x_1 a_{n_2} - x_2 a_{n_1})_n,$$

dove per brevità si è introdotto il simbolo del secondo membro a designare un prodotto di n fattori ottenuti facendo $h = 1, 2, \dots, n$. Verrà

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = - \sum a_{h_1} (x_1 a_{n_2} - x_2 a_{n_1})_{n-1},$$

dove la sommatoria si estende ad n termini, in ciascuno dei

quali a_{k_1} moltiplica un prodotto di $n - 1$ fattori, h percorrendo gli $n - 1$ valori (complementari) diversi da k .

Passiamo dalle coordinate omogenee alle coordinate cartesiane, ponendo

$$x_2 = 1, x_1 = x; \quad a_{i_2} = 1, a_{i_1} = a_i,$$

l'equazione del gruppo polare di O diverrà (trascurando il segno)

$$\Sigma a_k (x - a_n)_{n-1} = 0;$$

si ha così l'espressione algebrica della prima forma polare dell'origine, in funzione delle radici di $f(x) = 0$.

La suddetta equazione esprime la relazione segmentaria

$$\Sigma OA_k (XA_n)_{n-1} = 0$$

ove X designa un punto del gruppo polare.

In modo del tutto analogo l'equazione del gruppo polare r -mo di O ,

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_2^r} = 0,$$

si riduce alla forma algebrica:

$$1) \quad \Sigma (a_k)_r (x - a_n)_{n-r} = 0,$$

ossia alla relazione segmentaria

$$2) \quad \Sigma (OA_k)_r (XA_n)_{n-r} = 0;$$

la quale mette senz'altro in evidenza la *legge di reciprocità* enunciata nel paragrafo precedente: *se X appartiene al gruppo polare r -mo di O , O appartiene al gruppo polare $(n - r)$ -mo di X .*

La 1) sviluppata diviene

$$3) \quad \sum_s \left\{ \binom{r+s}{r} \Sigma (a_n)_{n-r-s} \right\} x^{n-r-s} = \\ = \Sigma (a_n)_{n-r} \cdot x^{n-r} + (r+1) \Sigma (a_n)_{n-r-1} \cdot x^{n-r-1} + \dots = 0,$$

designando $\binom{r+s}{r}$ il numero delle combinazioni di $r+s$ oggetti ad r ad r ; la 3) moltiplicata per $r!$ riproduce identica-

mente l'espressione della $\frac{\partial^r f}{\partial x_2^r}$, che, per $x_2 = 1$, $x_1 = x$,

$$f = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_r x^{n-r} + c_{r+1} x^{n-r-1} + \dots + c_n,$$

è

$$r! c_r x^{n-r} + \frac{(r+1)!}{1!} c_{r+1} x^{n-r-1} + \dots$$

D'altra parte l'equazione 3) mostra direttamente che, dato il gruppo fondamentale e il polo O : il gruppo polare r -mo rispetto al polare s -mo, è il gruppo polare $(r+1)$ -mo, cioè sussiste la *proprietà operativa* della polarità per cui la deduzione del polare r -mo può riguardarsi come potenza r -ma dell'operazione che fa passare al primo polare; questa operazione è stata designata nel precedente paragrafo con $\Delta_y f$, sicchè la proprietà operativa si traduce con

$$\Delta_y^{r+s} f = \Delta_y^r \Delta_y^s f.$$

Ritorniamo all'equazione segmentaria 2); essa può essere assunta come definizione del gruppo polare r -mo, che allora si presenta come naturale estensione del coniugato armonico rispetto ad una coppia di punti. Infatti dividiamo la 2) per il prodotto $OA_1 \cdot OA_2 \dots OA_n$, essa assumerà la forma equivalente

$$4) \quad \sum \left(\frac{XA_h}{OA_h} \right)_{n-r} = 0 \quad \text{cioè} \quad \sum \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_h} \right)_{n-r} = 0,$$

che per $n=2$, $r=1$ si riduce all'equazione del coniugato armonico di O rispetto ad $A_1 A_2$:

$$\frac{XA_1}{OA_1} = - \frac{XA_2}{OA_2};$$

per questo motivo i punti che costituiscono il gruppo polare r -mo di O diconsi *centri armonici* d'ordine (ρ grado) $n-r$ del punto O (DE JONQUIÈRES, CREMONA), e — per $r=1$ — il centro armonico di prim'ordine dicesi anche *centro delle medie armoniche* (PONCELET).

Nell'ipotesi che i punti O e X siano diversi da $A_1 \dots A_n$, la relazione segmentaria 4) divisa per $\left(\frac{XA_n}{OA_n} \right)^{n-r}$ si riduce alla

forma equivalente

$$5) \quad \sum \left(\frac{XA_h}{OA_h} : \frac{XA_n}{OA_n} \right)_{n-r} = \Sigma (XOA_h A_n)_{n-r} = 0,$$

dove $(XOA_h A_n)_{n-r}$ designa un prodotto di $n - r$ birapporti.

La 5) mette in evidenza il *carattere proiettivo* della definizione dei *centri armonici*, cioè che il gruppo polare r -mo costituisce un gruppo covariante del polo e del gruppo fondamentale. Infatti tale asserzione corrisponde ad un'identità formale che basta provare per O generico, ed è pur lecito prescindere da quei centri armonici che eventualmente coincidano con qualcuno dei punti A_h , giacchè questi sono senz'altro legati invariantivamente al gruppo $A_1 \dots A_n$.

In particolare la 5) mostra che se il punto O vada all'infinito, il centro delle medie armoniche diventa il centro delle medie distanze, cioè il punto per cui la somma algebrica delle distanze da $A_1 \dots A_n$ riesce nulla.

Osservazione. Giova osservare che se i punti $A_1 \dots A_n$ vengono a coincidere in un unico punto $a_x = 0$, designando con y_1, y_2 le coordinate di O , l'equazione 2) si riduce alla

$$a_y^r a_x^{n-r} = 0,$$

che è appunto la rappresentazione simbolica dello r -mo gruppo polare; da ciò si trae una nuova dimostrazione dell'equazione 2). Più in generale si dimostra in tal modo che il gruppo polare s -mo di $O' \equiv (z)$ rispetto al polare r -mo di $O \equiv (y)$ è dato dall'equazione segmentaria

$$6) \quad \Sigma (O'A_l)_s (OA_k)_r (XA_h)_{n-r-s} = 0,$$

la quale corrisponde all'equazione simbolica

$$a_z^s a_y^r a_x^{n-r-s} = 0.$$

Dalla 6) appare subito la *permutabilità delle operazioni polari relative ai poli O, O'* , cioè che: il gruppo polare s -mo di O' rispetto al polare r -mo di O , coincide col polare r -mo di O rispetto al polare s -mo di O' . La 6) può essere verificata direttamente partendo dalla 2); si ha così la dimostrazione della permutabilità delle operazioni polari, sulla base della definizione algebrico-geometrica.

Abbiamo veduto come le due definizioni date dei gruppi polari, definizione differenziale e definizione algebrico-geometrica, permettano ugualmente di riconoscere il loro carattere proiettivo e la legge di reciprocità; ci varremo pure di ambedue le definizioni per illuminare sotto duplice aspetto le deduzioni che seguono.

Anzitutto cerchiamo quando accada che un polo O appartenga ad un suo gruppo polare. A tal uopo poniamo $O = X$ nella 2); quest'equazione si riduce a

$$XA_1 \cdot XA_2 \dots XA_n = 0;$$

bisogna dunque che il polo O appartenga al gruppo fondamentale.

La dimostrazione in base alla espressione differenziale delle forme polari, si riconduce al Teorema di EULERO, come è stato già notato (per un numero qualunque di variabili) in fine al paragrafo precedente.

Cerchiamo ora quando accada che il (primo) polare di O contenga un punto, A_1 , del gruppo fondamentale.

Perciò notiamo che, posto $X = A_1$, $r = n - 1$, la 2) si riduce a

$$OA_1 \cdot A_1 A_2 \dots A_1 A_n = 0;$$

si conclude che il primo polare di un punto, non appartenente al gruppo fondamentale f , contiene un punto di f soltanto nel caso in cui questo sia doppio (o multiplo) per f .

La deduzione in base all'espressione differenziale delle forme polari si ottiene scrivendo

$$\begin{aligned} n f(x_1, x_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 &= 0; \end{aligned}$$

se queste due equazioni lineari omogenee debbono coesistere per valori di x_1, x_2, y_1, y_2 tali che $\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_1}{y_2}$, si deduce

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Vogliamo ora approfondire l'esame dei gruppi f dotati di punti multipli.

Supponiamo perciò che f contenga un punto i -plo ($i > 1$)

$$A = A_1 = A_2 = \dots = A_i.$$

Allora la 2) si scrive

$$i \cdot OA \cdot XA^{i-1} \cdot [XA_{i+1}XA_{i+2} \dots XA_n] + XA^i \sum OA_k(XA_k)_{n-i-1} = 0$$

$$(h, k = i + 1, \dots, n).$$

Di qui si trae che:

1) se $O \neq A$, il punto A appartiene al polare di O con la molteplicità $i - 1$; questa molteplicità non può in alcun caso essere superiore ad $i - 1$, perchè dividendo per XA^{i-1} e facendo poi $X = A$ si trova

$$i \cdot OA [AA_{i+1} \dots AA_n] \neq 0;$$

2) se $O = A$, il suo polare contiene A con la molteplicità i , e, tolto A^i , è costituito dal polare di A rispetto al gruppo residuo $A_{i+1} \dots A_n$; ricordando che un punto appartenente al proprio polare appartiene al gruppo fondamentale, si vede così che la molteplicità di A per il suo polare non può in alcun caso superare $i - 1$.

In particolare per $i = n$ il polare di A riesce indeterminato, venendo rappresentato da

$$XA^{n-1} \cdot AA = 0.$$

Tenendo presente che il polare r -mo è il primo polare rispetto allo $(r - 1)$ -mo polare, si perviene induttivamente al

Teorema. Se il gruppo fondamentale f contiene un punto i -plo, A , questo ha la molteplicità $i - r$ per i polari r -mi dei punti diversi da A , dove s'intende che A non appartenga a questi polari ove $i - r \leq 0$; invece tutti i polari del punto i -plo A contengono A come i -plo, quelli d'ordine $n - r < i$ risultando indeterminati.

La dimostrazione di questo teorema in base all'espressione differenziale delle polari, si riduce ad una verifica immediata; scriviamo

$$f = x_1^i f_{n-i}(x_1, x_2),$$

dove $f_{n-1}(0\ 1) \neq 0$; il gruppo polare r -mo del punto i -plo $(0\ 1)$ è

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_2^r} = x_1^i \frac{\partial^r f_{n-i}}{\partial x_2^r} = 0,$$

dove la derivata che compare nel secondo membro è identicamente nulla per $r > n - i$ cioè per $n - r < i$; invece il gruppo polare r -mo di un punto $(1\ 0)$ diverso dal punto i -plo è

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r} = r! \binom{i}{r} x_1^{i-r} f_{n-i} + (r-1)! \binom{i}{r-1} x_1^{i-r+1} \frac{\partial f_{n-i}}{\partial x_1} + \dots = 0.$$

Osservazione. Anche la precedente dimostrazione analitica mette in evidenza che: *il gruppo polare di un punto i -plo si compone del punto contato i volte e del polare rispetto al gruppo residuo.*

Questa osservazione rientra d'altra parte come caso particolare nel seguente principio che può anche porsi a fondamento del teorema generale sulla molteplicità dei gruppi polari in un punto i -plo.

Principio di formazione della polare rispetto ad un gruppo composto di $n + m$ punti:

$$\Delta_y f \varphi = \frac{n}{n+m} \varphi \Delta_y f + \frac{m}{n+m} f \Delta_y \varphi.$$

Questo principio che segue immediatamente dall'espressione differenziale delle polari, si deduce con uguale facilità dalla loro espressione algebrica per le radici di $f=0$ e $\varphi=0$.

Infatti, designando con $A_1 \dots A_n$ i punti di f e con $B_1 \dots B_m$ i punti di φ , il gruppo polare di O rispetto ad $f\varphi$ è dato da

$$(XA_n)_n \sum (XB_l)_{m-1} OB_k + (XB_l)_m \sum (XA_n)_{n-1} OA_k = 0,$$

dove f e φ , che sono definiti a meno di un fattore, possono assumersi uguali a $\frac{m}{n+m} (XA_n)_n$, $\frac{n}{n+m} (XB_l)_m$.

L'anzidetto principio si applica ai gruppi dotati di un punto multiplo, decomponendoli in questo punto e nel gruppo residuo.

I primi gruppi polari dei punti (y) rispetto al gruppo

fondamentale d'ordine n $f(x_1, x_2) = 0$, formano la g_{n-1}^1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 = 0;$$

il teorema precedente dice che questa g_{n-1}^1 è priva di punti fissi quanto f non ha punti multipli, ed ha invece come punto fisso $(i-1)$ -plo ogni punto i -plo di f .

In ogni caso la g_{n-1}^1 costituita dai gruppi polari di f possiede $2n-4$ coincidenze, le quali si ottengono annullando il discriminante della forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 = 0$$

cioè (L. 1°, § 2) il *determinante hessiano*

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Così si ottiene una interpretazione geometrica del *covariante hessiano di f* : *eguagliato a zero esso rappresenta i punti doppi dei primi gruppi polari.*

Se $f=0$ ha un punto i -plo, questo è multiplo secondo $2i-2$ per lo hessiano.

Ciò si verifica subito direttamente; ma si può anche notare che un punto i -plo di $f=0$ si stacca $i-1$ volte dalla g_{n-1}^1 dei gruppi polari, sicchè resta una g_{n-i}^1 che ha $2n-2i-2$ coincidenze fuori del punto suddetto.

In particolare, se il gruppo $f=0$ consta di un punto $(n-1)$ -plo e un punto semplice, il gruppo hessiano si riduce al primo punto contato $2n-4$ volte.

Se il gruppo $f=0$ si riduce a un punto n -plo, il *covariante hessiano si annulla identicamente*, perchè dovrebbe avere una radice multipla di un ordine, $2n-2$, superiore al suo grado. In questo caso viene a mancare la g_{n-1}^1 dei gruppi polari perchè tutti i gruppi polari coincidono nel medesimo punto $(n-1)$ -plo.

Reciprocamente: *l'annullarsi identico dell'hessiano esprime la condizione perchè il gruppo $f=0$ si riduca a un punto contato n volte* (1).

Infatti, l'hessiano ha $2n - 4$ radici, e quindi non può annullarsi identicamente finchè esiste una g_{n-1}^1 dei gruppi polari, non intieramente degenerare, i cui punti doppi corrispondono appunto a quelle radici. Perciò se H si annulla identicamente, tutti i gruppi polari coincidono in un medesimo; i punti di questo saranno multipli per $f=0$, e designando con $i (> 1)$ la molteplicità di uno di essi per f , si dovrà avere

$$\Sigma i < n$$

e

$$\Sigma(i - 1) = n - 1;$$

ciò porta che la sommatoria consta di un solo termine e che $i = n$, cioè il gruppo fondamentale $f=0$ è costituito di un punto n -plo. c. d. d.

4. **Curve polari.** — Riferiamoci, nel piano, ad una curva fondamentale

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

La definizione delle curve polari si può ricondurre a quella dei gruppi polari sopra la retta; a tale scopo basta considerare le rette (trasversali) condotte per il polo e su ciascuna di queste la polarità relativa al gruppo delle intersezioni con f . Infatti sussiste il

Teorema. La polare di un punto (y) rispetto alla curva f è il luogo dei gruppi polari di (y) sulle trasversali condotte per esso.

Basterà verificare la proprietà enunciata per il punto (100), scegliendo come trasversale per esso la retta $x_3 = 0$. Allora la polare del punto è

$$\frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} = 0,$$

e le intersezioni di essa con $x_3 = 0$ sono date da

$$\frac{\partial \bar{f}(x_1 x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad (\bar{f}(x_1 x_2) = f(x_1 x_2 0))$$

(1) Cfr. § 21.

che è precisamente l'equazione del gruppo polare del punto di coordinate $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, rispetto ad $f(x_1, x_2) = 0$.

Il teorema sopra enunciato permette di ricondurre la definizione delle curve polari di un punto O a quella dei gruppi polari sopra le trasversali per esso, e quindi di *definire geometricamente la polare r -ma* di O , come luogo dei centri armonici di grado $n - r$ di O (§ 3) rispetto ai gruppi sezioni di f colle suddette trasversali. Quando si adotti questa definizione *geometrica*, occorre per altro dimostrare che: il gruppo polare r -mo di O , rispetto al G_n segato da f sopra una trasversale, O , descrive una *curva d'ordine $n - r$* , al variare di o per O . Del che può darsi la seguente semplicissima dimostrazione sintetica ⁽¹⁾. Poichè O non fa mai parte di G_n , non può accadere — per alcuna posizione particolare di o — che O appartenga al G_{n-r} polare; si deduce che la curva luogo di G_{n-r} è d'ordine $n - r$ (e non $> n - r$).

Il principio fecondo che viene applicato in questa dimostrazione può essere designato come

Lemma di PONCELET: Se una curva algebrica piana C , incontra la retta variabile di un fascio O in m punti fuori di O , e se non esistono rette particolari del fascio per cui qualcuno dei suddetti m punti venga a coincidere con O , la curva C è d'ordine m .

Infatti se essa fosse d'ordine $m + s$ con $s > 0$, possederebbe il punto O come s -plo e si avrebbe in O almeno una tangente principale secante C , fuori di O , in meno di m punti.

La dimostrazione precedente, fondata sul lemma di PONCELET, contempla direttamente il caso di un polo O fuori di f . Ma se poi O si fa muovere con continuità finchè venga ad appartenere ad f , la curva luogo dei gruppi polari sulle trasversali per O , conserva necessariamente il suo ordine nel passaggio al limite. E così ogni restrizione vien tolta.

Osservazione. Dalla definizione delle curve polari come luogo dei gruppi polari sulle trasversali di un fascio, si deducono immediatamente le due proprietà fondamentali già riconosciute, partendo dall'espressione differenziale, nel (§ 2), cioè:

1) La proprietà operativa: la polare r -ma rispetto alla polare s -ma è la polare $(r + s)$ -ma;

(1) Cfr. PONCELET « Applications d'Analyse et de Géométrie », t. II, pag. 148. Ivi è trattato il caso della retta polare.

2) la legge di reciprocità: se la polare r -ma di O passa per O' , la polare $(n - r)$ -ma di O' passa per O .

Il teorema di permutabilità di PLÜCKER (la polare r -ma di O rispetto alla polare s -ma di O' coincide con la polare s -ma di O' rispetto alla polare r -ma di O) può pure esser dimostrato in quest'ordine di idee, ma non risulta più in modo così immediato come partendo dall'espressione differenziale (Cfr. § 2). Chi desideri conoscere la dimostrazione sintetica può trovarla in una nota di CREMONA pubblicata negli Annali di Matematica (1864) (1).

Sia data una curva fondamentale $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ priva di parti multiple; in base alla definizione della polare di un punto come luogo dei gruppi polari sopra le trasversali per esso, si riconosce che:

La polare di un punto O , non appartenente ad f , passa per i punti di contatto delle tangenti condotte ad f per O .

Infatti se A è il punto di contatto di una tangente per O , il gruppo sezione di f con la retta OA ha un punto doppio in A e quindi il gruppo polare di O rispetto a questo contiene A , e viceversa (§ 3).

La verifica analitica di questa proposizione è immediata, perchè l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0,$$

dove si considerino come variabili le x o le y , rappresenta la polare di (y) o la tangente in (x) .

La precedente considerazione geometrica, oppure l'esame analitico, permettono ugualmente di precisare il teorema sopra enunciato come segue:

Se una tangente (propria) per O ha nel punto semplice A un contatto i -punto ($i \geq 2$), per A passano tutte le polari d'ordine $n - 1, \dots, n - i + 1$, e queste hanno in A rispettivamente $i - 1, \dots, 1$ intersezioni riunite con la tangente.

Passiamo a considerare la polare di un punto O appartenente alla curva f , supponendo dapprima che esso sia semplice per f . Se la tangente in O ha con f un contatto i -punto

(1) Cfr. Opere, tomo II, pag. 137.

($i \geq 2$), i gruppi polari di O su questa retta posseggono O come i -plo, quelli d'ordine $< i$ risultando indeterminati; si deduce che:

Se in un punto semplice O la curva f ha un contatto i -punto colla tangente ($i \geq 2$), tutte le curve polari di O , d'ordine $\geq i$, hanno ivi lo stesso contatto i -punto colla tangente; le polari d'ordine $< i$ contengono codesta retta come parte.

In particolare « la tangente in O è la retta polare di O », come d'altronde appare subito dall'equazione

$$\Delta_x^{n-1} f(y) = \Delta_y f(x) = 0.$$

L'osservazione fatta relativamente al passaggio delle polari per i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto, sussiste tanto per le tangenti proprie che per le tangenti improprie, e così permette di riconoscere che tutte le polari d'ordine $n - 1, \dots, n - i + 1$ passano per un punto i -plo della curva f . Questa proprietà può essere precisata come segue:

Un punto i -plo della curva f ($i > 1$) appartiene come ($i - 1$)-plo alle prime polari e quindi come ($i - r$)-plo alle polari r -me; la molteplicità non può essere maggiore di $i - r$ se il polo non appartiene ad una tangente principale.

Sia A il punto i -plo, $a_1 \dots a_i$ le tangenti principali ed O il polo, che supponiamo dapprima in un punto generico del piano. La retta OA incontrerà la curva f in altri $m = n - i$ punti $B_1 B_2 \dots B_m$, nei quali si avranno m tangenti $b_1 b_2 \dots b_m$. Per costruire la polare di O rispetto ad f , si debbono considerare le trasversali per O e su ciascuna costruire il gruppo polare di O ; allo scopo di riconoscere il comportamento di codesta polare nel punto A , si potrà sostituire la curva f con le n rette $a_1 \dots a_i b_1 \dots b_m$, le cui intersezioni colle trasversali per O , vicine ad OA , sono prossime alle intersezioni con f . Allora la polare di O risulta — per il principio di formazione rispetto a gruppi composti (cfr. § 3) — combinando linearmente due curve φ, ψ , costituite: la prima dalla polare di O rispetto ad $a_1 \dots a_i$, presa insieme a $b_1 \dots b_m$, e la seconda dalla polare di O rispetto a $b_1 \dots b_m$, presa insieme ad $a_1 \dots a_i$.

Ma — per il carattere proiettivo della polarità — la polare di O rispetto alle i rette $a_1 \dots a_i$ è costituita da $i - 1$ rette le quali proiettano da A il gruppo polare di O sopra una trasversale. Si deduce che la polare di O rispetto ad f

verrà approssimata, nell'intorno di A , dalle anzidette $i - 1$ rette polari di O rispetto ad $a_1 \dots a_i$, le quali sono tangenti principali per le curve del fascio determinato dalle φ, ψ ; infatti le i rette nominate, ed esse sole, hanno i intersezioni con le φ, ψ riunite in A . Concludendo, la polare di O che passa per A ed è ivi approssimata da $i - 1$ rette, possiede il punto A come $(i - 1)$ -plo. c. d. d.

Il ragionamento svolto per un polo O generico, si può ripetere quando si dia ad O una qualsiasi posizione particolare diversa da A , purchè si determinino sempre $b_1 \dots b_m$ secondo la legge di continuità; così se la retta OA va ad incontrare f in un altro punto multiplo r -plo B , r fra le $b_1 \dots b_m$ diverranno le tangenti principali in B . Ma, per posizioni particolari di O , la molteplicità della polare in A può risultare maggiore di $i - 1$.

Due casi occorre qui esaminare: il caso in cui la retta OA risulti tangente ad f fuori di A , e quello in cui O appartenga ad una tangente principale in A . Il primo caso dà luogo soltanto ad una difficoltà apparente, in quanto si ha una retta b_1 passante per A ; è lecito rimuovere la difficoltà sostituendo per esempio a b_1 e b_2 una conica a esse tangente che non passi per A . Ma il secondo caso può dar luogo ad una effettiva ipermoltiplicità della polare di O in A ; ciò accade precisamente quando le i tangenti principali in A sono riunite in una sola, come vedremo poi con l'esame analitico. Qui ci limitiamo a notare che quando O non appartiene a una tangente principale in A , le $i - 1$ rette polari di OA rispetto ad $a_1 \dots a_i$ non passano per O , e così O sta fuori delle tangenti principali anche della sua curva polare; quindi in virtù della proprietà operativa si può concludere che la polare r -ma di O ($r < i$) passa per O con la molteplicità $i - r$ e non con molteplicità maggiore.

Passiamo a esaminare il caso in cui il polo O coincida col punto multiplo A . Avremo che:

Le successive polari di un punto i -plo ($i > 1$) per la curva f , posseggono il punto con la stessa molteplicità ed hanno ivi le medesime tangenti principali; le polari d'ordine $> i$ risultano indeterminate.

Infatti basta considerare i gruppi polari del dato punto O sopra le trasversali per esso e in specie sopra le tangenti principali.

Segue in particolare dal teorema precedente che:

La polare d'ordine i di un punto i -plo è costituita dalle i tangenti principali (distinte o coincidenti). Per escludere il dubbio cui potrebbe dar luogo il caso in cui le tangenti principali distinte fossero in numero $< i$, basta osservare che la curva polare d'ordine i del punto O , la quale consta di i rette per O non può contenere alcuna retta diversa dalla tangente principale, giacchè su una tale retta il gruppo polare d'ordine i di O è costituito precisamente da O stesso contato i volte e non è indeterminato.

Osservazione. Il comportamento in un punto, A , i -plo per f della polare di un punto qualunque O , si può dedurre da quello della polare del punto A stesso, in base al teorema di permutabilità di PLÜCKER. Occorre far vedere che la polare d'ordine $i - 2$, cioè la polare $(n - i + 1)$ -ma di $A \equiv (x)$ rispetto alla prima polare di $O \equiv (y)$ è indeterminata. A tale scopo basta osservare che la polare $(n - i + 1)$ -ma di A rispetto ad f è indeterminata, e quindi, per il teorema di permutabilità:

$$\Delta_x^{n-i-1} \Delta_y f = \Delta_y \Delta_x^{n-i-1} f,$$

si deduce identicamente

$$\Delta_x^{n-i-1} \Delta_y f = 0.$$

La verifica analitica dei teoremi sul comportamento della polare in un punto multiplo di f , si può fare ponendo il punto (001) nel punto i -plo, e prendendo come punto esterno il punto (100).

Scriveremo dunque

$$f = f_i(x_1, x_2) \cdot x_3^{n-i} + f_{i+1}(x_1, x_2) \cdot x_3^{n-i-1} + \dots + f_n(x_1, x_2),$$

dove f_h designa una forma d'ordine h nelle x_1, x_2 . La polare del punto (001) sarà

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (n - i) f_i x_3^{n-i-1} + \dots + f_{n-1} = 0,$$

e quindi avrà nel polo un punto i -plo e come tangenti principali le medesime i rette costituenti la polare d'ordine i :

$$f_i(x_1, x_2) = 0.$$

Invece la polare del punto (100) sarà

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} x_3^{n-i} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0,$$

dove $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}$ è una forma d'ordine $i - 1$, e quindi avrà nel punto i -plo di f la molteplicità $i - 1$.

Risulta nuovamente di qui che le tangenti principali della polare di (100) nel punto i -plo (001) sono date dalle rette polari del primo punto rispetto alle tangenti principali di f , essendo rappresentate da $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0$.

Ora, ritornando a considerare la molteplicità della curva polare di (100) nel punto i -plo di f , si vede che in un solo caso questa molteplicità potrà superare $i - 1$, cioè quando sia identicamente

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0,$$

e quindi

$$f_i = kx_2^i;$$

nel qual caso le i tangenti principali in A coincidono in una sola, e il polo si trova su questa.

Le polari dei punti del piano rispetto ad una curva fondamentale $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, formano il sistema lineare

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0,$$

dove i parametri sono le coordinate del polo. Codesto sistema lineare ha effettivamente la dimensione due, cioè le prime polari costituiscono una rete, salvo il caso che la curva f consti di n rette di un fascio.

Infatti se le polari dei tre punti (100) (010) (001) non sono linearmente indipendenti, sussisterà identicamente una relazione a coefficienti costanti

$$a \frac{\partial f}{\partial x_1} + b \frac{\partial f}{\partial x_2} + c \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

allora la polare del punto $O \equiv (abc)$ è indeterminata, e quindi

— per il teorema precedente — il punto stesso è n -plo per la curva f , la quale consta quindi di n rette per O .

Giova notare che, reciprocamente, se la f possiede un punto n -plo O , le sue polari non formano più una rete ma un fascio, essendo costituite da gruppi di $n - 1$ rette per O , ciascuno dei quali corrisponde ugualmente a tutti i punti di una retta per O : questo fascio si riduce a un'unica retta $(n - 1)$ -pla se le n rette coincidono. Tenendo conto che le polari dei punti del piano rispetto ad f formano una rete, possiamo enunciare i risultati ottenuti innanzi come segue:

Data una curva f , priva di parti multiple e non costituita da n rette d'un fascio, la rete delle sue prime polari possiede come punti base i punti multipli di f e precisamente ogni punto base i -plo della rete ($i \geq 1$) è $(i + 1)$ -plo per f ; i punti in cui una curva polare sega la f fuori dei punti base, sono i punti di contatto delle tangenti condotte dal polo.

In forza delle dimostrazioni precedenti, si può aggiungere che: in un punto i -plo di f , a tangenti distinte, la rete delle polari possiede un punto base $(i - 1)$ -plo a tangenti variabili; invece se r tangenti principali di f nel punto i -plo coincidono in una sola, questa retta fissa figura $r - 1$ volte nel gruppo delle tangenti principali di tutte le curve polari della rete. Infatti le tangenti principali a una curva polare di un punto generico rispetto ad f sono, come si è visto, le polari del punto rispetto alle tangenti principali di f . In particolare se la f possiede un nodo, in questo punto le curve polari hanno una tangente variabile; invece se la f possiede una cuspide, le curve polari toccano ivi la tangente cuspidale.

Ritorniamo alla considerazione della rete delle curve polari rispetto ad f , per osservare che questa è proiettiva al piano punteggiato dei poli, sicchè ai punti di una retta corrispondono curve polari formanti un fascio.

La dimostrazione analitica di ciò è contenuta nella espressione delle polari

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 = 0.$$

(La dimostrazione sintetica si fa in base al principio di LAMÉ — libro 2°, § 14 — osservando che le curve polari dei punti di una retta hanno comuni i punti, di cui la retta è polare, intersezioni di due di esse).

Osservazione. Le deduzioni sul comportamento delle polari di f in un punto multiplo, valgono anche nel caso che la curva f contenga una parte multipla (di molteplicità $i > 1$) luogo di punti i -pli:

$$f = \varphi^i \psi;$$

la φ entra allora $i - 1$ volte nella polare di un punto qualsiasi. Ciò si verifica anche direttamente in base al principio di formazione delle polari rispetto a una curva composta:

$$\Delta_\nu f_1 f_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} f_1 \Delta_\nu f_2 + \frac{n_1}{n_1 + n_2} f_2 \Delta_\nu f_1,$$

tenuto conto che

$$\Delta_\nu \varphi^i = \varphi^{i-1} \Delta_\nu \varphi.$$

5. Jacobiana di una rete. — Consideriamo una rete di curve d'ordine n :

$$\lambda f(x_1 x_2 x_3) + \mu \varphi(x_1 x_2 x_3) + \nu \psi(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Il luogo dei punti doppi delle curve della rete si ottiene eliminando λ , μ , ν , fra le tre equazioni lineari omogenee

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

e però viene rappresentato annullando il determinante (funzionale) *jacobiano*:

$$\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Quel luogo dicesi appunto *curva jacobiana della rete*, ed è di ordine $3n - 3$.

La curva jacobiana resta definita ugualmente se alle tre

curve f , φ , ψ , si sostituiscono altre curve della rete da essa determinata, sicchè lo jacobiano $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1x_2x_3)}$ risulta un *combinante* delle forme f , φ , ψ , cioè un covariante di esse che, a prescindere da un fattore funzione delle λ , μ , ν , non muta sostituendo alle f , φ , ψ , delle loro combinazioni lineari: $\lambda_i f + \mu_i \varphi + \nu_i \psi$ ($i = 1, 2, 3$).

La curva jacobiana di una rete si lascia anche definire:

1) come luogo dei punti di contatto di due curve della rete; infatti il fascio da esse determinato contiene una curva con punto doppio;

2) come luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle curve della rete formano un fascio; infatti le prime polari di un punto (y) centro d'un tale fascio, passano per un punto della jacobiana, sicchè le tre equazioni lineari

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} y_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x_i} y_i = 0,$$

risultano compatibili.

Se le curve (d'ordine n) della rete sono rappresentate in coordinate cartesiane da:

$$\lambda f(xy) + \mu \varphi(xy) + \nu \psi(xy) = 0$$

$$\left(x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \right),$$

l'equazione della jacobiana si ottiene eliminando λ , μ , ν , fra l'equazione precedente e le sue derivate rispetto ad x , y ; essa è dunque

$$J(f\varphi\psi) = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Posto

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

si ha:

$$x_3^n f(xy) = f(x_1 x_2 x_3), \quad x_3^n \varphi(xy) = \varphi(x_1 x_2 x_3), \quad x_3^n \psi(xy) = \psi(x_1 x_2 x_3),$$

$$x_3^{n-1} \frac{\partial f(xy)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1}, \quad x_3^{n-1} \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2}, \dots,$$

$$x_3^{3n-2} \cdot J \{ f(xy), \varphi(xy), \psi(xy) \} = \begin{vmatrix} f(x_1 x_2 x_3) & \varphi(x_1 x_2 x_3) & \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Ora, in virtù del teorema di EULERO, sostituendo ad

$$f(x_1 x_2 x_3), \quad \varphi(x_1 x_2 x_3), \quad \psi(x_1 x_2 x_3)$$

le espressioni equivalenti

$$f(x_1 x_2 x_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} x_3 \right\}$$

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} x_3 \right\}$$

$$\psi(x_1 x_2 x_3) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 \right\}.$$

si ottiene

$$\begin{vmatrix} f(x_1 x_2 x_3) & \varphi(x_1 x_2 x_3) & \psi(x_1 x_2 x_3) \\ \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{x_3}{n} \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)}.$$

Si conclude che per

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 = 1,$$

ed essendo f, φ, ψ dello stesso ordine n , sussiste l'identità

$$1) \quad J \{ f(xy), \varphi(xy), \psi(xy) \} = \frac{1}{n} \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)}.$$

L'identità stabilita prova che il *determinante*

$$J\{f(xy), \varphi(xy), \psi(xy)\},$$

apparentemente d'ordine $3n - 2$, si riduce effettivamente d'ordine $3n - 3$, annullandosi il complesso dei termini di grado più elevato. Di ciò si può porgere anche una verifica diretta.

Pongasi invero

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_n,$$

ove con f_i, φ_i, ψ_i si designano forme di grado i in x, y ; il termine di grado $3n - 2$ in J sarà $J(f_n \varphi_n \psi_n)$ e si riconosce che questo determinante è identicamente nullo, sostituendo in esso:

$$f_n = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} x + \frac{\partial f_n}{\partial y} y \right)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} x + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} y \right)$$

$$\psi_n = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} x + \frac{\partial \psi_n}{\partial y} y \right).$$

In forza dell'identità 1) daremo pure al determinante $J\{f(xy), \varphi(xy), \psi(xy)\}$ il nome di *jacobiano* delle funzioni $f(xy), \varphi(xy), \psi(xy)$.

Osservazione. Giova avvertire che, quando f, φ, ψ sono d'ordine diverso, le due curve

$$J(f\varphi\psi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)} = 0$$

non coincidono più: $J = 0$ rappresenta la curva *jacobiana della rete* $\lambda f(xy) + \mu \varphi(xy) + \nu \psi(xy) = 0$, nella quale le curve d'ordine minore vengono *completate* con la *retta all'infinito*;

invece $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)} = 0$ rappresenta una curva covariante delle f, φ, ψ che si dice *curva jacobiana delle tre curve* e può essere definita come il luogo dei punti le cui rette polari rispetto alle tre curve date appartengono ad un fascio.

Possiamo riconoscere la sostanziale differenza che intercede fra i due determinanti $J(f\varphi\psi)$ e $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1x_2x_3)}$ calcolando, per semplicità, questi determinanti nel caso in cui φ, ψ abbiano uno stesso ordine m diverso dall'ordine n di f ; avremo

$$\frac{x_3}{m} \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1x_2x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{n}{m} f(x_1x_2x_3) & \varphi(x_1x_2x_3) & \psi(x_1x_2x_3) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

e quindi, per $x_3 = 1, x_1 = x, x_2 = y$

$$\frac{1}{m} \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1x_2x_3)} = J \{ f(xy), \varphi(xy), \psi(xy) \} + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) f(xy) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Quanto alla jacobiana della rete $\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0$, nell'ipotesi in cui f, φ, ψ abbiano ordini diversi, n, m, p , dove $n \geq m \geq p$ ($p < n$), osserveremo che il determinante J sarà di grado

$$n + m + p - 2 \leq 3n - 3,$$

quindi la retta all'infinito fa parte della jacobiana della rete, contata

$$(n - m) + (n - p) - 1$$

volte.

Per determinare le molteplicità della curva jacobiana nei punti base di una rete, non si ha alcun vantaggio ad adoperare le coordinate omogenee; ci riferiremo pertanto all'espressione dello jacobiano $J(f\varphi\psi)$ in coordinate non omogenee.

Poniamo che l'origine $x = y = 0$ sia un punto di molteplicità i (> 0) per f, φ, ψ ; allora $J(f\varphi\psi)$ contiene x, y al grado minimo

$$i + i - 1 + i - 1 = 3i - 2,$$

ma il complesso dei termini di grado $3i - 2$ è il determinante identicamente nullo:

$$J(f_i\varphi_i\psi_i) = 0;$$

perciò: un punto i -plo per f , φ , ψ , è in generale $(3i - 1)$ -plo per la curva jacobiana della rete $\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0$.

Ma la molteplicità del punto $O = (00)$ per la suddetta jacobiana può risultare superiore al numero indicato. Pongasi, per esempio, che O sia i -plo ($i > 0$) per f ed abbia per φ , ψ diverse molteplicità r , s :

$$i \leq r \leq s. \quad (s > i)$$

In questo caso nello sviluppo di $J(f\varphi\psi)$, x e y figurano al grado minimo

$$i + r - 1 + s - 1 = (i + r + s) - 2;$$

e quindi O ha per la jacobiana (almeno) la molteplicità $i + r + s - 2$, che può superare $3i - 1$.

In particolare si consideri il caso di una rete con un punto base semplice O ; questo punto sarà in generale doppio per la jacobiana, ma potrà diventare triplo, e l'analisi completa delle circostanze in cui si avvera tale ipermolteplicità si può far dipendere dall'esame delle reti di coniche, nel modo che segue.

Pongasi che la cubica jacobiana di una rete di coniche $|C|$ possenga un punto triplo nel punto base O e si spezzi quindi in tre rette a , b , c per O . Un punto generico A di a è doppio per una conica C della rete, la quale si spezza nella retta $a = AO$ e in un'altra retta; due casi possono presentarsi, secondochè questa retta residua di a coincide con a stessa o è diversa da a e quindi variabile con A . In questo secondo caso la retta a appartiene ad infinite coniche della rete $|C|$, formanti un fascio, e le rette residue di a formano pure un fascio; in particolare vi è dunque una conica spezzata in a e in un'altra retta a' per O , conica che ha un punto doppio in A .

La stessa conclusione si può ripetere per le rette b , c ; ciascuna delle tre rette a , b , c , fa parte — in ogni caso — d'una conica con un punto doppio in O , conica costituita da due rette distinte o da una retta contata due volte. Ora combinando linearmente due coniche C aventi in O un punto doppio, si otterrà un fascio col punto base doppio O ; e combinando linearmente due coniche del fascio con un'altra conica fuori di esso, si otterrà una rete di coniche tangenti a quest'ultima

nel punto O . Si conclude dunque che la nostra rete — nell'ipotesi che la jacobiana consti di tre rette per O — è costituita da coniche aventi, nel punto base semplice O , la medesima tangente.

Viceversa, se le coniche C di una rete col punto base semplice O , posseggono in O una tangente fissa a , imponendo alle C di toccare un'altra retta per O si ottiene un fascio di C aventi in O un punto doppio, cioè formate da ∞^1 coppie di rette costituenti nel fascio O un'involuzione I . Allora si assumano per definire la rete tre coniche C , due delle quali con O doppio; la molteplicità della jacobiana di $|C|$ in O risulterà uguale a tre: precisamente codesta cubica jacobiana conterà della retta a (facente parte di un fascio di coniche C spezzate) e delle due rette doppie dell'involuzione I definita — come si è detto — nel fascio O .

Si conclude: *la condizione necessaria e sufficiente affinché un punto base semplice sia triplo anzichè doppio per la jacobiana di una rete di coniche è che in esso le coniche della rete abbiano la medesima tangente.*

Osservazione. Giova osservare che la dimostrazione precedente contempla il caso in cui la cubica jacobiana consti di tre rette a, b, c distinte; i casi di coincidenza possono riguardarsi come casi limiti e si costruiscono direttamente come segue:

1) Assumendo nel fascio A una involuzione non degenera avente due rette doppie b, c ed una conica tangente alla b , si dà luogo alla coincidenza $a \equiv b$;

2) assumendo nel fascio A una involuzione degenera costituita da una retta fissa b e da una retta variabile, e prendendo una conica qualsiasi per O , si dà luogo ad una rete per cui $b \equiv c$;

3) se nel caso 2) la conica considerata tocca b , la jacobiana si riduce a codesta retta contata tre volte: $a \equiv b \equiv c$.

Dalla considerazione della rete di coniche si passa a quella di una rete di curve qualunque (d'ordine $n > 2$), sostituendo alle curve

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n = 0,$$

le coniche approssimanti

$$f_1 + f_2 = 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad \psi_1 + \psi_2 = 0,$$

le quali vengono combinate linearmente quando si combinano linearmente le f , φ , ψ .

Dovremo distinguere tre casi secondochè

1) le suddette tre coniche approssimanti sono linearmente indipendenti e quindi danno luogo ad una rete;

2) le tre coniche suddette appartengono ad un fascio e quindi la conica approssimante alla curva $\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$ risulta approssimante per tutte le curve di un fascio di questa rete;

3) tutte le curve della rete $\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$ posseggono la medesima conica approssimante:

$$f_1 + f_2 \equiv \varphi_1 + \varphi_2 \equiv \psi_1 + \psi_2.$$

Nel caso 1) se la curva jacobiana della rete $\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$ deve avere un punto triplo nel punto base semplice O , lo stesso deve accadere per la curva jacobiana della rete di coniche approssimanti, giacchè nel determinante jacobiano $J(f\varphi\psi)$ i termini di secondo grado provengono solo dai termini di grado 1 o 2 delle f , φ , ψ . Ciò posto le coniche approssimanti alle curve della rete, e quindi queste stesse curve, avranno in O una tangente fissa. Reciprocamente, se ciò accade la rete contiene un fascio di curve con un punto doppio, entro il quale si possono prendere due curve determinatrici della rete, e quindi la jacobiana ha in O un punto di molteplicità $2 + 2 + 1 - 2 = 3$ (almeno).

Nel caso 2) si consideri il fascio delle curve $\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$ aventi una medesima conica approssimante, C , che può supporre non avere in O un punto doppio, essendo O punto base semplice per la rete. Imponiamo ad una curva del fascio di toccare in O una retta diversa dalla tangente a C ; la curva, F , del fascio così definita non ha più una conica approssimante determinata giacchè questa dovrebbe in pari tempo coincidere con la C ed avere in O un punto doppio, come accade per le curve della rete dotate di punto doppio. Si conclude che l'anzidetta F possiede in O un punto triplo, mancando nell'equazione $F = 0$ i termini di primo e secondo grado. Reciprocamente, se la rete $\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0$ contiene una

curva dotata di punto triplo, questa può prendersi al posto di una delle f, φ, ψ per determinare la rete e si deduce che la jacobiana possiede in O un punto di molteplicità $3+1+1-2=3$ (almeno).

Le ipotesi 1), 2) si avverano contemporaneamente se le curve della rete hanno una tangente fissa e perciò la rete contiene un fascio di curve aventi in O un punto doppio, mentre per una di queste curve il punto O diviene triplo. Dal fatto che la rete può essere determinata mediante tre curve una delle quali ha un punto triplo, la seconda un punto doppio, e la terza un punto semplice in O , si conclude che la molteplicità di O per la jacobiana vale almeno $3+2+1-2=4$.

Questa molteplicità diviene più elevata, cioè almeno uguale a 5, se la rete contiene due curve aventi in O un punto triplo. È ciò che accade appunto nel caso 3); infatti imponendo alle curve della rete di possedere una tangente diversa da quella della conica approssimante fissa, si definisce un fascio di curve per cui la conica approssimante è indeterminata, cioè che hanno in O un punto triplo.

Viceversa se la rete contiene due curve con un punto triplo, si vede subito che le curve di essa posseggono la medesima conica approssimante, cioè si avvera l'ipotesi 3).

Dall'analisi fatta basterà trarre la conclusione che:

Un punto base semplice per una rete di curve d'ordine n ($n \geq 2$) è precisamente doppio per la curva jacobiana, salvo in due casi che portano una molteplicità almeno uguale a 3: se le curve della rete posseggono nel punto base una tangente fissa, oppure se la rete contiene una curva avente in quello un punto triplo. Quest'ultimo caso suppone $n > 2$ e porta che le coniche approssimanti a tre curve della rete non siano linearmente indipendenti. •

Il precedente teorema si può anche dimostrare col calcolo diretto dei termini di secondo grado che figurano nello sviluppo del determinante jacobiano $J(f\varphi\psi)$.

Poniamo come innanzi

$$f = f_1 + f_2 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots;$$

i termini di secondo grado nello sviluppo di $J(f\varphi\psi)$ sono quelli stessi che compaiono nello sviluppo di

$$J(f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = \begin{vmatrix} f_1 + f_2 & \varphi_1 + \varphi_2 & \psi_1 + \psi_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Essi vengono dati dalla somma di tre determinanti:

$$\begin{vmatrix} f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ora è facile verificare che la somma degli ultimi due determinanti equivale al doppio del primo mutato di segno. A tale scopo nel secondo determinante sottraggiamo l'ultima linea dalla prima, ciò che in forza del teorema di EULERO equivale a sostituire f_1, φ_1, ψ_1 , con $\frac{\partial f_1}{\partial x} x, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} x, \frac{\partial \psi_1}{\partial x} x$; in modo analogo nel terzo determinante si possono sostituire f_1, φ_1, ψ_1 con $\frac{\partial f_1}{\partial y} y, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} y, \frac{\partial \psi_1}{\partial y} y$. Ciò posto, con facile trasformazione, il secondo determinante si riduce a

$$- \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} x & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} x & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} x \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Effettuando l'analoga trasformazione sul terzo determinante e sommandolo al secondo, con l'applicazione del teorema di EULERO ($2f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} x + \frac{\partial f_2}{\partial y} y, \dots$), si trova appunto il doppio

del primo determinante mutato di segno. In conclusione l'insieme dei termini di secondo grado nello sviluppo di $J(f\varphi\psi)$ è dato da

$$- \begin{vmatrix} f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f_1 + f_2 & \varphi_1 + \varphi_2 & \psi_1 + \psi_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix},$$

essendosi sommato il determinante identicamente nullo $J(f_1\varphi_1\psi_1)$.

Ora la condizione necessaria e sufficiente affinchè la jacobiana della rete $\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0$ abbia nell'origine una molteplicità superiore a 2 è data dall'annullamento del determinante sopra scritto, dove le derivate di f_1, φ_1, ψ_1 sono delle costanti. Tale condizione importa che le coniche approssimanti $f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2$ appartengano ad un fascio, ogni qual volta non siano nulli i minori estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ma se $f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2$ appartengono ad un fascio, cioè se sussiste una relazione lineare a coefficiente non tutti nulli

$$a(f_1 + f_2) + b(\varphi_1 + \varphi_2) + c(\psi_1 + \psi_2) = 0,$$

la curva

$$F = af + b\varphi + c\psi,$$

possiede un punto triplo (almeno) nell'origine. Se invece sono nulli i tre minori estratti dalla precedente matrice, ciò significa che le curve f, φ, ψ hanno nell'origine la medesima tangente il cui coefficiente angolare è

$$-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial y}}.$$

Nella deduzione che precede si è visto che la conica

approssimante la curva jacobiana della rete

$$\lambda f + \mu \varphi + \nu \psi = 0,$$

nel punto base semplice O , è

$$\begin{vmatrix} f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora entro la suddetta rete $|C|$ esiste sempre una curva dotata di punto doppio in O , che può assumersi come curva ψ ; la conica approssimante ad $J(f \varphi \psi) = 0$ diventa quindi

$$\psi_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

essendo

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0.$$

La rete ha in O tangente variabile se

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

e le tangenti principali nel punto doppio della jacobiana sono le tangenti alla curva ψ dotata di punto doppio:

$$\psi_2 = 0.$$

Nei casi in cui la jacobiana della rete $|C|$ acquista un punto triplo in O :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} \psi_2 = 0,$$

la curva ψ considerata innanzi diviene indeterminata o possiede un punto triplo in O , e così ψ_2 diviene indeterminata o identicamente nulla. In questi casi si possono determinare le tangenti principali nel punto triplo della jacobiana di $|C|$, che sono le rette formanti la jacobiana della rete delle coniche approssimanti le C , oppure le tangenti alla curva ψ dotata di punto triplo; la jacobiana di $|C|$ avrà in O precisamente un punto triplo se le tangenti principali (quadripunte) così definite restano determinate, cioè

1) se $|C|$ contiene una sola curva dotata di punto multiplo in O che ha in O un punto triplo,

2) oppure se — $|C|$ avendo tangente fissa in O — le coniche approssimanti a $|C|$ formano effettivamente una rete, nel qual caso abbiamo già indicato la costruzione delle rette che formano la sua jacobiana.

Per dimostrare l'asserto conviene calcolare i termini di terzo ordine nello sviluppo del determinante $J(f\varphi\psi)$. Questi termini provengono anzitutto dallo jacobiano $J(f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2)$ delle coniche approssimanti, e in secondo luogo da tre determinanti cui danno origine le parti del terz'ordine f_3, φ_3, ψ_3 ; così la cubica approssimante la $J(f\varphi\psi) = 0$ dotata di punto triplo in O sarà rappresentata da

$$J_3 = J(f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) + D_3$$

dove D_3 è la somma di tre determinanti:

$$\begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Per calcolare D_3 , poniamo nel primo determinante

$$f_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} x + \frac{\partial f_3}{\partial y} y \right), \dots,$$

e negli altri due

$$f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} x + \frac{\partial f_1}{\partial y} y, \dots,$$

risulta allora che la somma di questi è uguale al primo determinante salvo un fattore numerico:

$$D_3 = -2 \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ciò posto distinguiamo i due casi in cui $J(f\varphi\psi) = 0$ possiede un punto triplo in O :

1) le curve C hanno tangente fissa in O ; allora

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

e quindi D_3 è identicamente nullo;

2) le coniche approssimanti a $|C|$ formano un fascio, sicchè identicamente

$$J(f_1 + f_2, \varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = 0;$$

allora esiste in $|C|$ una curva dotata di punto triplo e, scegliendo questa come curva ψ , si trova — a prescindere dal fattore numerico —

$$D_3 \equiv \psi_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix},$$

essendo

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0;$$

l'equazione $D_3 = 0$ si riduce a $\psi_3 = 0$ quando la rete $|C|$ non possiede tangente fissa in O :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

diseguaglianza corrispondente all'ipotesi che la rete $|C|$ non contenga altra curva dotata di punto multiplo in O oltre la ψ nominata che ha in O un punto triplo.

6. Nota sull'annullamento identico del determinante jacobiano. — In ciò che precede si suppone sempre l'esistenza effettiva della jacobiana della rete determinata dalle curve

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

cioè che il determinante $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ non si annulli identicamente. Ora questo determinante è nullo non soltanto quando le f, φ, ψ non siano linearmente indipendenti (nel qual caso i termini di una colonna sono combinazioni lineari a coefficienti costanti di quelli delle altre due), ma anche nel caso in cui una delle tre funzioni f, φ, ψ , sia funzione delle rimanenti, cioè quando le f, φ, ψ siano legate da una relazione funzionale

$$F(f, \varphi, \psi) = 0;$$

infatti, in tale ipotesi,

$$\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0.$$

Reciprocamente è noto che l'annullamento identico del determinante $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ significa l'esistenza di un legame funzionale ⁽¹⁾

$$F(f, \varphi, \psi) = 0.$$

Nel nostro caso, in cui f, φ, ψ sono forme algebriche dello stesso ordine, questo teorema può essere precisato, giacchè il procedimento dimostrativo che serve a riconoscere la relazione $F=0$ mostra anche come si possa costruire F mediante eliminazioni, sicchè $F(f, \varphi, \psi) = 0$ risulta una equazione algebrica omogenea che, divisa per una potenza di f , si riduce al tipo

$$F\left(\frac{\varphi}{f}, \frac{\psi}{f}\right) = 0.$$

(1) Cfr. per es. S. PINCHERLE « Lezioni di Calcolo infinitesimale ». Bologna, 1915, pag. 257.

Ove non si voglia ritornare sulla dimostrazione del teorema relativo ai determinanti funzionali, si può pervenire alla conclusione sopra indicata sostituendo alle considerazioni precedenti una verifica diretta.

Osserviamo anzitutto che il quoziente $\frac{\varphi(x_1 x_2 x_3)}{f(x_1 x_2 x_3)}$ dipende soltanto dai rapporti $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, sicchè si può scrivere

$$\frac{\varphi(x_1 x_2 x_3)}{f(x_1 x_2 x_3)} = \frac{\varphi(xy)}{f(xy)} = \Phi(xy),$$

e analogamente

$$\frac{\psi(x_1 x_2 x_3)}{f(x_1 x_2 x_3)} = \frac{\psi(xy)}{f(xy)} = \Psi(xy).$$

Ora verifichiamo che il determinante funzionale delle Φ, Ψ è, come $\frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1 x_2 x_3)}$, identicamente nullo. Infatti:

$$\frac{D(\Phi\Psi)}{D(xy)} = \begin{vmatrix} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}f - \frac{\partial f}{\partial x}\varphi}{f^2} & \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}f - \frac{\partial f}{\partial x}\psi}{f^2} \\ \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}f - \frac{\partial f}{\partial y}\varphi}{f^2} & \frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}f - \frac{\partial f}{\partial y}\psi}{f^2} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante moltiplicato per f^4 è uguale alla somma di quattro determinanti:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}f & \frac{\partial\psi}{\partial x}f \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}f & \frac{\partial\psi}{\partial y}f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}f & \frac{\partial f}{\partial x}\psi \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}f & \frac{\partial f}{\partial y}\psi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\varphi & \frac{\partial\psi}{\partial x}f \\ \frac{\partial f}{\partial y}\varphi & \frac{\partial\psi}{\partial y}f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\varphi & \frac{\partial f}{\partial x}\psi \\ \frac{\partial f}{\partial y}\varphi & \frac{\partial f}{\partial y}\psi \end{vmatrix}.$$

L'ultimo determinante è evidentemente nullo; la somma dei primi tre equivale a

$$f \cdot J(f\varphi\psi) = f \cdot \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ricordando che, per $x_3 = 1$,

$$J(f\varphi\psi) = \frac{1}{n} \frac{D(f\varphi\psi)}{D(x_1x_2x_3)},$$

si conclude che è anche

$$\frac{D(\Phi\Psi)}{D(xy)} = 0,$$

e perciò le

$$\Phi = \frac{\varphi}{f}, \quad \Psi = \frac{\psi}{f}$$

sono legate da una relazione funzionale

$$F\left(\frac{\varphi}{f}, \frac{\psi}{f}\right) = 0.$$

c. d. d.

Il significato di questa relazione funzionale è che, movendosi sopra una curva $\frac{\varphi}{f} = \text{cost.}$ a partire da un suo punto generico, resta sempre $\frac{\psi}{f} = \text{cost.}$; quindi le curve dei due fasci $\varphi - cf = 0$, $\psi - cf = 0$, passanti per uno stesso punto generico del piano avranno una parte comune.

Ora se le curve del fascio $\varphi - cf = 0$ sono irriducibili, ciascuna di esse appartenerà pure al fascio del medesimo ordine $\psi - cf = 0$, ossia — in questa ipotesi — le curve f , φ , ψ appartengono ad un medesimo fascio. Se invece le curve del fascio $\varphi - cf$ sono riducibili, le loro componenti variabili formeranno un fascio, con le curve del quale saranno composte — a prescindere da parti fisse — anche le curve

$$\psi - cf = 0.$$

In conclusione possiamo enunciare il

Teorema: *Se la curva jacobiana di tre curve del medesimo ordine f , φ , ψ è indeterminata: o queste curve appartengono ad un fascio, o sono composte — all'infuori di parti comuni — dalle curve di un fascio; la jacobiana di una rete diventa dunque indeterminata soltanto se la rete è formata di curve riducibili, composte di parti fisse e di parti variabili in un fascio.*

È chiaro, reciprocamente, che, per una rete siffatta, la jacobiana è indeterminata, giacchè ciascuna curva del fascio nominato fa parte — contata due volte — di una curva della rete.

La dimostrazione del teorema precedente si può anche collegare semplicemente al principio di LAMÉ (L. 2°, § 14). Infatti dall'equazione algebrica omogenea

$$F(f, \varphi, \psi) = 0,$$

di cui designeremo il grado con m , si conclude subito che $f=0$ per $\varphi=\psi=0$, tranne nel caso che manchi, in F , il termine f^m ; ma questa apparente eccezione si toglie sostituendo ad f una combinazione lineare $\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi$. La curva $f=0$ passando per le intersezioni delle curve dello stesso ordine $\varphi=0$ e $\psi=0$, il principio di LAMÉ dice appunto che f è una combinazione lineare delle φ, ψ , oppure che le f, φ, ψ , — a prescindere da parti comuni — sono composte con le curve di un fascio.

Infine si può richiedere una dimostrazione geometrica del teorema precedente che non faccia appello alla proprietà del determinante funzionale di dare col suo annullamento la relazione $F=0$. Una tale dimostrazione può essere fornita in vari modi; il più semplice sembra quello che qui rapidamente accenniamo (¹).

A tale scopo ricordiamo il teorema di BERTINI (Cfr. L. 2°, § 5), che le curve di una rete non possono avere punti doppi variabili e pertanto le parti variabili delle curve della rete sono formate di punti semplici.

Ora data una rete la cui jacobiana sia indeterminata, un punto generico A del piano è semplice per ∞^1 curve della rete e doppio per una di queste; quindi le ∞^1 curve della rete passanti per A , e formanti un fascio, posseggono in A una tangente fissa a . Si deduce che le curve della rete soddisfano tutte a una medesima equazione differenziale del primo ordine che fa corrispondere al punto A la retta associata a (Cfr. L. 2°, §§ 14, 28); segue che le dette curve della rete sono composte — a prescindere da parti fisse — con le curve di un fascio, integrali dell'equazione differenziale predetta.

(¹) Cfr. BERTINI - « Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi », pag. 235.

7. **Hessiana di una curva.** — Dicesi hessiana di una curva $f(xy) = 0$ la curva, d'ordine $3n - 6$, jacobiana della rete delle sue prime polari. In virtù del teorema di permutabilità di PLÜCKER, *la curva hessiana, luogo dei punti doppi delle prime polari*, si può definire anche come *luogo dei punti la cui conica polare ha un punto doppio*.

Infatti se la prima polare di O ha un punto doppio P , la retta polare mista di P contato $n - 2$ volte e di O è indeterminata, e quindi la conica polare di P possiede in O un punto doppio. Ciò risulta anche dall'espressione analitica del determinante hessiano che è

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

e può riguardarsi quindi come il discriminante della conica polare del punto (x) :

$$\Delta_x^{n-2} f(y) = \Delta_y^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} y_3^2 = 0.$$

Il luogo dei punti le cui curve polari hanno un punto doppio costituisce, in generale, una nuova curva covariante della data f , che dicesi *curva steineriana* e che si può anche riguardare come il luogo dei punti doppi delle coniche polari. I punti della hessiana e della steineriana si corrispondono biunivocamente: la conica polare di un punto della prima ha come doppio il punto omologo, o *coniugato*, dell'altra; la prima polare di questo ha un punto doppio in quello. *Per le cubiche, hessiana e steineriana coincidono.*

Accanto alle nominate curve si suole anche considerare, sotto il nome di *cayleyana*, l'involuppo delle rette che uniscono i punti coniugati della hessiana e della steineriana (cfr. § 22); vedremo l'interesse della cayleyana nella teoria della cubica.

L'importanza della hessiana risulta dal seguente

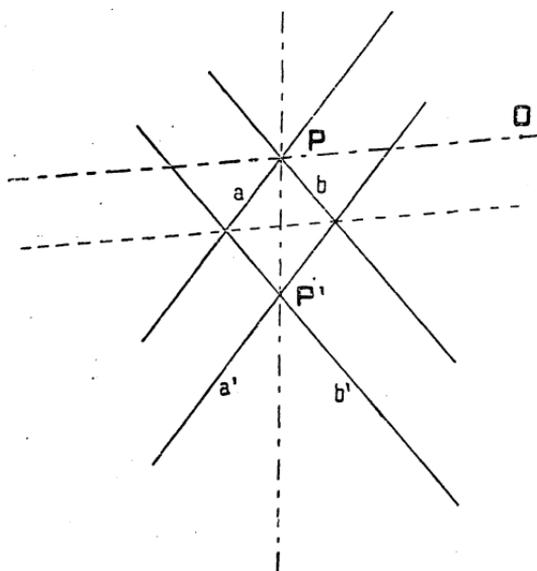
Teorema: *Se un punto semplice della curva f appartiene alla hessiana, esso è un flesso di f ; viceversa ogni flesso di f appartiene alla hessiana.*

Se P appartiene all'hessiana sarà punto doppio per la

polare rispetto ad f di un certo punto O : sia p questa polare. Ora se P appartiene anche ad f , la retta OP risulta tangente ad f in P , e per di più ha ivi due intersezioni (almeno) con la polare p : ciò significa che il punto P è punto doppio per il gruppo G' , polare di O rispetto al gruppo G , intersezione della retta OP con la curva f . Quindi nel gruppo G il punto P deve essere punto triplo; cioè la tangente OP deve avere in P tre intersezioni riunite con la f , vale a dire essere tangente di flesso.

Dimostriamo ora la seconda parte del nostro teorema, cioè che ogni flesso della curva è comune alla sua hessiana. Per questo ci serviremo della seconda definizione della hessiana, cioè faremo vedere che se F è un flesso la conica polare di F si spezza (nella tangente di flesso e in una retta residua). Infatti siccome F è un flesso, la tangente di flesso t ha in F tre intersezioni riunite con la curva; tutte le successive polari di F dovendo avere tre intersezioni con la t riunite in F , la conica polare si spezza nella t e in una retta residua.

Giova avvertire che il teorema precedente può essere precisato nel senso che: se un punto semplice, P , di f appartiene alla sua hessiana, h , P è un flesso di f in cui la tangente ha con f un contatto tripunto e non più elevato semprechè le due curve f , h non si tocchino.



Infatti riprendendo la dimostrazione precedente si può dimostrare che — escluso il contatto di f con l'hessiana — la curva p , polare di O , ha come tangenti principali, nel punto doppio P , due rette, distinte da OP , le quali separano armonicamente la OP e la tangente ad h .

A tale scopo consideriamo un punto P' , vicino a P , su h ; P' è doppio per una curva

polare p' , la quale insieme a p determina un fascio di polari; al limite, quando P' tende a P , codesto fascio diventa il fascio delle polari per P , i cui poli variano sulla retta OP . Ora, designando

con a, b le tangenti principali a p in P e con a', b' quelle a p' in P' , prossime alle a, b , si vede che la retta determinata dai punti $ab', a'b$ diviene la coniugata armonica di PP' rispetto ad a, b . D'altra parte il fascio delle p, p' possiede la nominata retta $ab', a'b$ come tangente fissa, ed al limite questa tangente fissa diviene la retta OP tangente comune ad f e alla polare di P . (Cfr. L.^o, § 5; Vol. I, pag. 182).

Il ragionamento precedente permette di invertire la deduzione ottenuta: se nel punto semplice P la f è toccata dalla hessiana h , la tangente PO coincide con una delle tangenti principali della p , polare di O dotata di punto doppio in P , cioè PO ha contatto tripunto (almeno) con p e quindi quadri-punto (almeno) con f . Si conclude che un punto semplice, ove f è toccata da h , costituisce per f un *flesso d'ordine superiore* cioè un punto dove la f ha con la tangente un contatto i -punto con $i > 3$. (Giova avvertire che la nomenclatura qui adottata differisce da quella che si usa nello studio della forma delle curve *reali*, ove si riserva il nome di flesso al caso in cui — essendo i dispari — la curva attraversa la tangente).

Ora il teorema stabilito si può completare nel senso che: se in un punto semplice P la f ha un contatto i -punto con la tangente (flesso d'ordine $i - 2$), in P la f ha con l'hessiana h un contatto $(i - 2)$ -punto. In base ad una rapida intuizione infinitesimale ciò si può giustificare come segue: nell'ipotesi fatta, il fascio delle curve polari passanti per P è costituito da curve aventi in P un contatto $(i - 1)$ -punto, e quindi contiene $i - 1$ curve infinitamente vicine dotate di punto doppio; i primi $i - 2$ fra i punti doppi nominati si succedono sopra la retta tangente in P ad f e alle curve polari del nostro fascio. Ma l'induzione che suggerisce l'affermazione precedente, ha bisogno di essere convalidata con un calcolo diretto. Il quale serve in pari tempo a dimostrare tutto ciò che fino ad ora abbiamo riconosciuto intorno al passaggio della hessiana per i flessi della curva f .

Sia $f(x_1, x_2, x_3)$ la nostra curva, che abbia nel punto (010) come tangente la retta $x_3 = 0$, retta avente ivi un contatto i -punto, dove $i \geq 2$.

Possiamo scrivere l'equazione della curva

$$f(x_1, x_2, x_3) = u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + \dots + u_n = 0,$$

dove u_i è una forma binaria di grado i in x_1, x_2 .

Se la retta $x_3 = 0$ ha in (010) un contatto i -punto con f , sarà

$$u_n = x_1^i \cdot \bar{u}_{n-i},$$

dove \bar{u}_{n-i} non si annulla per $x_1 = 0$.

Noi ci proponiamo di trovare le intersezioni della hessiana con la retta $x_3 = 0$. Queste sono evidentemente date da

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2} & 2u_{n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora notiamo che, se la $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}$ si annullasse per $x_1 = 0$ nel punto (010), sarebbero nulle le tre derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

e quindi il punto (010) sarebbe un punto doppio per la f . Inoltre, essendo $u_n = x_1^i \bar{u}_{n-i}$, si ha che:

$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}$ è divisibile per x_1^{i-2} e non per x_1 a potenza superiore,

$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1 \partial x_2}$ è divisibile per x_1^{i-1} ,

$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}$ è divisibile per x_1^i .

Ciò posto, il determinante Δ risulta divisibile per x_1^{i-2} e non per x_1 a potenza superiore, quindi la hessiana ha con la tangente ad f $i - 2$, e non più, intersezioni riunite in (010); in particolare per $i = 2$ resta di nuovo provato che: il punto semplice (010) è un flesso quando e solo quando esso appartiene all'hessiana.

Concludiamo pertanto enunciando il

Teorema: Le intersezioni della curva f con la hessiana che cadono in punti semplici di f sono i flessi della f stessa; preci-

samente un flesso d'ordine $i - 2$ (ove la curva ha un contatto i -punto con la tangente) dà luogo a un contatto $(i - 2)$ -punto di f con la hessiana.

Risulta da questo teorema che nel caso generale in cui la curva non possiede punti doppi, o multipli, i suoi flessi sono tutte le intersezioni di f con la hessiana. Ma se la f possiede un punto doppio questo appartiene pure alla hessiana, giacchè la sua polare ha ivi un punto doppio.

Cerchiamo quale sia precisamente la molteplicità dei punti doppi della curva f per la sua hessiana.

Dimostriamo che:

In un nodo di f la hessiana possiede parimenti un nodo con le stesse tangenti principali; in una cuspidale ordinaria di f la hessiana possiede un punto triplo ed ha ivi come tangenti principali la tangente cuspidale di f , contata due volte, e un'altra retta distinta da quella.

Di questo teorema forniremo una dimostrazione di carattere prevalentemente sintetico, che si appoggia alle proprietà generali della jacobiana di una rete; una seconda dimostrazione, costituente la verifica analitica diretta, si incontrerà nello sviluppo del teorema più generale che segue.

Il caso del nodo si esaurisce subito: le polari di f formano una rete che ha in quel punto, O , un punto base semplice con tangente variabile e che contiene una sola curva avente in O un punto doppio; questa curva è la polare di O , e quindi le sue tangenti principali, cioè le tangenti principali di f , sono le tangenti principali della jacobiana della rete delle polari, ossia della hessiana di f .

Nel caso in cui O sia una cuspidale, la rete delle polari ha come tangente fissa la tangente cuspidale o ; se la cuspidale è ordinaria, la suddetta rete non può contenere una curva dotata di punto triplo, giacchè il relativo polo sarebbe congiunto ad O da una retta avente con f quattro (almeno) intersezioni riunite. Si deduce che le coniche approssimanti le polari di f nel punto O formano una rete, la cui jacobiana consta delle tre tangenti principali della hessiana di f . Codesta jacobiana è costituita dalla tangente fissa o e dalle rette doppie dell'involuzione, nel fascio O , a cui danno luogo le coniche riducibili della rete che sono le coniche approssimanti delle polari dei punti di o ; questa involuzione possiede o come retta doppia (corrispondente alla polare di O), sicchè o figura

due volte fra le tangenti principali della hessiana di f . Si aggiunga che la terza tangente principale è certo distinta da o , finchè O è — per f — una cuspidale ordinaria; infatti, in tale ipotesi, la nominata involuzione nel fascio O non può essere degenerare, giacchè avrebbe o come retta fissa, mentre la polare di un punto della tangente cuspidale — diverso da O — deve avere con o due sole intersezioni.

Riferiamoci al caso più generale in cui la curva f possieda un punto di molteplicità i (≥ 2) e dimostriamo, con verifica analitica diretta ⁽¹⁾ che:

Se la curva f , d'ordine n , possiede un punto i -plo O , con $2 \leq i < n$, la sua hessiana h possiede in O la molteplicità $3i - 4$, ed ha ivi come tangenti principali le i tangenti principali di f e le $2i - 4$ rette costituenti il gruppo hessiano di quelle nel fascio O ; la molteplicità di O per h diviene $3i - 3$ soltanto nel caso in cui il gruppo delle tangenti principali ad f si riduca ad una retta contata i volte (svanimento del relativo gruppo hessiano) e allora quella retta figura $2i - 2$ volte fra le tangenti principali di h ; aggiungasi che la molteplicità di O per h non supera $3i - 3$ se O è — per f — una singolarità ordinaria (dove la tangente ha un contatto $(i + 1)$ -punto) ed allora la nominata retta non può figurare più che $2i - 2$ volte fra le tangenti principali di h .

Scriviamo l'equazione di f nella forma

$$f(x_1 x_2 x_3) = u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + \dots + u_{n-1} x_3 + u_n = 0,$$

dove u_r è una forma binaria di grado r nelle $x_1 x_2$. Se la $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ ha un punto i -plo nel punto (001) , avremo

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \dots \quad u_{i-1} = 0,$$

cioè

$$f(x_1 x_2 x_3) = u_i x_3^{n-i} + u_{i+1} x_3^{n-i-1} \dots + u_n = 0,$$

e il gruppo delle i tangenti nel punto i -plo (001) sarà dato dall'equazione

$$u_i = 0.$$

⁽¹⁾ Cfr. BRILL. « Ueber die Hesse'sche Curve ». (Math. Annalen, B.I. 13, 1878).

L'equazione della hessiana è

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Occorre l'espressione dei termini di più basso grado che compariscono nel determinante precedente.

Questi termini sono dati da:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} & (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} & (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & (n-i)(n-i-1)u_i \end{vmatrix}.$$

Poichè Δ è di grado $3i-4$, resta provato che un punto i -plo per la curva è, in generale, multiplo secondo $3i-4$ per la sua hessiana.

Se nel determinante Δ sottraggiamo dall'ultima colonna moltiplicata per $i-1$ la prima moltiplicata per x_1 e la seconda moltiplicata per x_2 , otteniamo, a meno di un fattore numerico, non nullo per $n > i$:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} & 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & u_i \end{vmatrix}.$$

Ora, se indichiamo con H il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

che rappresenta lo hessiano del gruppo di rette $u_i = 0$ appartenenti al fascio O , si ha — a meno di un fattore numerico —

$$\Delta \equiv u_i H.$$

Siccome $\Delta = 0$ rappresenta il gruppo delle $3i - 4$ tangenti alla curva h , hessiana di f , nel punto (001) , si ha che i di queste rette coincidono con le i tangenti ad f , e le rimanenti $2i - 4$ ne costituiscono il gruppo hessiano. Qui appare che h avrà in O una molteplicità superiore a $3i - 4$ quando svanisca H (essendo per definizione $u_i \neq 0$). Ciò porta che le i tangenti $u_i = 0$ coincidano in una sola retta contata i volte (cfr. § 3).

Per approfondire lo studio di questo caso poniamo

$$u_i = x_1^i$$

supponendo le i tangenti riunite nella $x_1 = 0$: allora, come è facile verificare, i termini di grado inferiore in x_1, x_2 nell'equazione di h sono dati dal determinante

$$\begin{vmatrix} i(i-1)x_1^{i-2} & \frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_1 \partial x_2} & i(n-i)x_1^{i-1} \\ \frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2^2} x_3 & (n-i-1) \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_2} \\ i(n-i)x_1^{i-1} & (n-i-1) \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_2} & (n-i)(n-i-1)x_1^i \end{vmatrix}$$

formato coi primi termini delle seconde derivate di f . I termini di grado inferiore nelle x_1, x_2 sono quelli che moltiplicano x_3 ; dunque le tangenti alla hessiana nel punto i -plo della $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ sono

$$\frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2^2} \cdot x_1^{2i-2} = 0.$$

Si conclude che: un punto i -plo con tutte le tangenti riunite è multiplo secondo $3i - 3$ per la hessiana, $2i - 2$ delle tangenti a questa coincidendo colla tangente della curva f nel detto punto i -plo.

Si aggiunga che (per $n > i$) la molteplicità del punto i -plo per la hessiana non può superare $3i - 3$ ove non si

annullati identicamente $\frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2^2}$; e che inoltre fra le rette rappresentate da $\frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2^2} = 0$, non può trovarsi la $x_1 = 0$ se non a patto che questa retta abbia con f un contatto $(i+2)$ -punto, mancando, in tal caso il termine in x_2^{i+1} di u_{i+1} ; ma in ambedue questi casi la f possiede in O una singolarità straordinaria.

Infine osserviamo esplicitamente che la restrizione $n > i$ è essenziale; infatti il fattore numerico che compare nello sviluppo di h si annulla, per $n = i$, sicchè in questo caso la hessiana svanisce identicamente (Cfr. paragrafo seguente).

§. Curve aventi una parte comune colla hessiana: indeterminazione della hessiana. — Dai teoremi dimostrati risulta come corollario che: *se la curva f ha una parte comune con la sua hessiana, questa parte è una retta o una componente multipla di f .*

Ciò segue senz'altro dal teorema che un contatto i -punto di f con h costituisce un flesso d'ordine i , per qualsiasi valore di i . Ma la deduzione si ottiene già dalla conoscenza che le intersezioni semplici colla hessiana sono flessi (caso $i=1$), appoggiandosi alla nozione fornita dal calcolo differenziale che una curva $y = y(x)$ i cui punti siano flessi è una retta, in quanto la condizione analitica corrispondente è espressa dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

È appena necessario rilevare la coincidenza di questa condizione analitica con la nostra definizione dei flessi. Posto il flesso nell'origine, la curva algebrica, che si suppone avere ivi un punto semplice, sarà approssimata in quel punto dalla parabola

$$y = ax + bx^2 + \dots;$$

affinchè la tangente $y = ax$ abbia un contatto tripunto si ha la condizione

$$b = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = 0.$$

Ora, a complemento della osservazione precedente, no-

tiamo che: *se la curva f contiene una parte multipla φ^i — contata i (> 1) volte — la φ figura $3i - 3$ volte nella hessiana di f .*

Infatti i punti di φ sono punti i -pli di f in cui le i tangenti coincidono.

Si aggiunga che: *i punti semplici della curva φ , non appartenenti alla parte residua di f , ed aventi per la hessiana una molteplicità superiore a $3i - 3$, sono i flessi della φ .*

Invero si supponga che φ passi semplicemente per il punto (001) e abbia ivi come tangente la $x_1 = 0$: la sua equazione sarà del tipo

$$ax_1x_3^{m-1} + (bx_1^2 + cx_1x_2 + dx_2^2)x_3^{m-2} + \dots = 0,$$

e quindi i termini di grado $i + 1$ in x_1x_2 per la f saranno dati da

$$u_{i+1} = ia^{i-1}(bx_1^{i+1} + cx_1^ix_2 + dx_1^{i-1}x_2^2) + ak_1x_1^{i+1} + ak_2x_1^ix_2,$$

essendo

$$x_3^{n-mi} + k_1x_1x_3^{n-mi-1} + k_2x_2x_3^{n-mi-1} + \dots = 0,$$

l'equazione della parte residua di f (tolto φ^i); sicchè la condizione per la ipermolteplicità della hessiana in quel punto, cioè l'annullamento identico di $\frac{\partial^2 u_{i+1}}{\partial x_2^2}$, equivale a $d = 0$, cioè alla condizione che la tangente $x_1 = 0$ abbia tre intersezioni riunite con la φ . La qual conclusione si accorda anche con la osservazione geometrica che la parte residua della hessiana di f , tolta la φ^{3i-3} , è la jacobiana della rete costituita dalle curve polari di f , private della parte fissa φ^{i-1} .

L'avvertenza fatta in ordine alla ipermolteplicità della hessiana di una curva i -pla φ , vale anche a dimostrare che questa curva non può figurare nella hessiana di f più che $3i - 3$ volte, salvo il caso che essa sia una retta.

Risulta anche, dal teorema concernente le parti multiple di f , che « se la hessiana di f è indeterminata, cioè il determinante hessiano si annulla identicamente, la curva f consta soltanto di rette (semplici o multiple) », giacchè ogni componente i -pla di f può riguardarsi allora come facente parte della sua hessiana, ed avente per questa una molteplicità superiore a $3i - 3$.

Ma il teorema precedente può essere precisato nel modo seguente:

Una curva d'ordine n la cui hessiana sia indeterminata si compone di n rette per un punto.

Anzitutto è chiaro che se f possiede un punto n -plo la sua hessiana è indeterminata, poichè la conica polare di un punto qualunque ha un punto doppio. Ora per dimostrare l'enunciato precedente basta riferirsi al caso di una curva composta di rette: supporremo dunque che f contenga r rette distinte, semplici o multiple, $a_1 a_2 \dots a_r$; designando con i_h (≥ 1) la molteplicità di a_h si avrà

$$n = \sum_h i_h.$$

Le polari di f saranno curve φ_{n-1} , d'ordine $n-1$, contenenti la retta a_h contata i_h-1 volte; all'infuori di queste parti fisse le φ_{n-1} conterranno delle curve variabili φ_{r-1} , d'ordine $r-1$. Il sistema delle φ_{r-1} avrà come punti base i punti comuni a due o più rette a_h ; se per uno di questi punti, P , passano s (> 1) rette a_h , p. es. $a_1 a_2 \dots a_s$, codesto punto avrà precisamente per le φ_{r-1} la molteplicità $s-1$, giacchè — tenuto conto delle molteplicità delle rette $a_1 a_2 \dots$ passanti per quel punto — si ha che esso ha per f la molteplicità

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s$$

e quindi hà la molteplicità

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s - 1$$

per le

$$\varphi_{n-1} = a_1^{i_1-1} \cdot a_2^{i_2-1} \cdot \dots \cdot a_s^{i_s-1} \cdot \varphi_{r-1}$$

Si aggiunga che le φ_{r-1} non hanno in P alcuna tangente fissa p ; si esclude anzitutto che le φ_{r-1} possano tutte toccare una medesima retta p diversa dalle $a_1 a_2 \dots a_s$, perchè la polare d'un punto di una tale p non può avere più che

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s - 1$$

intersezioni con p riunite in P ; in secondo luogo si esclude che le φ_{r-1} tocchino una delle rette $a_1 a_2 \dots a_s$ per P , giacchè la polare di un punto fuori di $a_1^{i_1}$ rispetto ad f si può determinare combinando linearmente due curve composte: la

prima della polare rispetto ad $a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}$ presa con $a_1^{i_1}$ e l'altra di $a_1^{i_1-1}$ presa con $a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}$.

Ciò posto, se la hessiana di f deve essere indeterminata, bisogna che la jacobiana di tre curve qualsiasi φ_{r-1} sia indeterminata, e perciò le φ_{r-1} debbono appartenere ad un fascio o essere composte colle curve d'un fascio (cfr. § 6). La prima ipotesi condurrebbe subito alla conclusione enunciata, che tutte le rette $a_1 \dots a_r$ passano per un punto n -plo di f (cfr. § 4); ma occorre esaminare la seconda ipotesi più generale.

Se le φ_{r-1} sono composte colle curve d'un fascio, le $(r-1)^2$ intersezioni di due di esse sono tutte assorbite dai punti base P e ciascun punto base $(s-1)$ -plo, essendo a tangenti variabili, ne assorbe precisamente $(s-1)^2$ (cfr. il prossimo § 12, oppure: L. 2°, § 13); avremo dunque:

$$(r-1)^2 = \Sigma(s-1)^2.$$

D'altra parte, poichè un punto s -plo di φ_{r-1} è comune ad s fra le r rette $a_1 a_2 \dots a_r$, sarà

$$\frac{r(r-1)}{2} = \Sigma \frac{s(s-1)}{2}.$$

Dalle due uguaglianze scritte si trae

$$r-1 = \Sigma(s-1),$$

conclusione che sarebbe incompatibile colla

$$(r-1)^2 = \Sigma(s-1)^2,$$

ove la sommatoria comprendesse più che un termine.

Si deduce che tutte le rette $a_1 \dots a_r$ passano per uno stesso punto:

$$r = s.$$

Quel punto è n -plo per f , e le polari di f formano un fascio costituito da gruppi di rette di una g_{n-1}^1 entro il fascio medesimo (cfr. § 3).

Osservazione. Per $n=2$, la condizione di spezzamento d'una conica, data dall'annullamento del determinante hessiano, si riduce alla solita, poichè codesto hessiano è il discriminante di f .

9. Nota sulla teoria delle forme polari generalizzata e sull'espressione di una forma d'ordine n come somma di potenze n -me. — La definizione di *polare* può essere generalizzata nel modo seguente: si consideri una curva d'ordine n rappresentata simbolicamente da

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_x^n = 0,$$

e una curva di classe m ($< n$)

$$\varphi(u_1 u_2 u_3) = u_z^m = 0:$$

la curva di ordine $n - m$ rappresentata simbolicamente dall'equazione

$$a_z^m a_x^{n-m} = 0$$

dicesi *curva polare della φ rispetto alla f* . In particolare, se la φ si riduce a un punto P contato m volte, la polare di φ diviene la polare m -ma di P rispetto ad f , e se invece la φ si riduce all'insieme di m punti $P_1 P_2 \dots P_m$ la polare di φ diviene la polare mista di $P_1 P_2 \dots P_m$.

Se la curva polare della φ rispetto alla f è indeterminata, la φ dicesi *apolare* rispetto alla f .

Se una curva φ ha la classe m uguale all'ordine n della f , allora non vi è più luogo a considerare la curva polare di φ : in questa ipotesi la forma polare

$$a_z^m a_x^{n-m} = a_x^n$$

diviene d'ordine zero, cioè si riduce ad una funzione bilineare dei coefficienti delle f e φ che (seguendo BATTAGLINI) dicesi *l'armonizzante* delle due forme; questo armonizzante è simmetrico rispetto alle due forme, essendo identicamente

$$a_x^n = a_a^n.$$

Se l'armonizzante

$$a_a^n = 0,$$

le due curve $f = a_x^n = 0$, $\varphi = u_x^n = 0$, diconsi *ciascuna apolare rispetto all'altra* oppure *armoniche* fra loro.

È facile riconoscere il fatto generale che: *se la forma φ di classe $m \leq n$ è spezzata in due altre:*

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2,$$

la polare di φ rispetto ad f è la polare di φ_1 rispetto alla polare di φ_2 .

Quindi, in particolare: una forma φ_1 di classe $m < n$ che sia apolare rispetto ad f , costituisce una curva armonica ad f insieme ad una qualsiasi curva di classe $n - m$. Vale pure la proposizione inversa che scaturirà dalle considerazioni che seguono.

La formazione delle polari e dell'armonizzante mette in luce il loro carattere invariantivo (cfr. L. 1°, § 15), che risulterà anche dal significato geometrico della relazione d'armonia.

Intanto osserviamo che:

Tutte le curve di classe (o d'ordine) n armoniche ad una data d'ordine (o risp. classe) n formano un sistema lineare di dimensione

$$N - 1 \qquad \left(N = \frac{n(n+3)}{2} \right).$$

Le curve Γ di classe (o d'ordine) n armoniche ad r curve indipendenti C_1, \dots, C_r , d'ordine (o risp. di classe) n sono armoniche a tutte quelle del sistema lineare $\infty^{r-1} |C|$ definito dalle suddette C_1, \dots, C_r , e formano un sistema lineare $|\Gamma|$ di dimensione $N - r$. Il sistema $|\Gamma|$ dicesi associato a $|C|$, e $|C|$ è allora associato a $|\Gamma|$.

Questi enunciati si giustificano ricordando la bilinearità dell'armonizzante a_x^n , e ricordando che un sistema lineare ∞^{N-r} di curve d'ordine (o di classe) n , è definito da r equazioni lineari fra i coefficienti, ritenuti come coordinate delle curve stesse (cfr. L. 1°, § 14).

Usando del linguaggio degli iperspazi si può dire che la relazione d'armonia pone una correlazione fra due spazi S_N , uno dei quali rappresenta il sistema lineare delle curve-luogo (d'ordine n) e l'altro il sistema lineare delle curve-inviluppo (di ugual classe). Si noti che la correlazione anzidetta non è degenera, sicchè non esiste alcuna curva d'ordine n (la cui equazione non svanisca identicamente) che sia armonica a tutte le curve di classe n .

Da ciò segue come corollario la proposizione a cui si è già sopra accennato: *se una curva di classe $m < n$, $u_x^m = 0$, sommata ad una qualunque curva $u_x^{n-m} \doteq 0$ dà una curva armonica alla $f = a_x^n = 0$, essa è apolare rispetto alla f .*

Infatti per ipotesi svanisce identicamente la polare d'ordine 0 di $u_z^m u_\beta^{n-m}$ rispetto ad f , che è l'armonizzante delle due forme; ora codesta polare si ottiene come polare di u_β^{n-m} rispetto alla polare di u_z^m :

$$u_z^m a_x^{n-m} = 0,$$

ossia è l'armonizzante delle due forme u_β^{n-m} , $a_z^m a_x^{n-m}$; poichè questo armonizzante è nullo qualunque sia u_β^{n-m} , segue che la forma $a_z^m a_x^{n-m}$ è identicamente nulla. c. d. d.

Il teorema precedente permette di costruire le curve di classe $m < n$ apolari rispetto a una curva f di ordine n .

Se la f è una conica non vi sono punti apolari rispetto ad essa, tranne nel caso di degenerazione di f . Ma se la f è una cubica esiste un sistema lineare ∞^2 di coniche involuppo apolari rispetto ad f ; esso si ottiene intersecando i sistemi ∞^1 di coniche che insieme ai punti del piano formano curve di terza classe appartenenti al sistema associato ad f (fra codesti sistemi ve ne sono tre linearmente indipendenti).

Similmente si trova che una quartica affatto generale possiede un sistema lineare ∞^6 di curve di terza classe apolari, ma non possiede in generale una conica involuppo apolare, giacchè fra i sistemi ∞^1 di coniche involuppo residui delle coniche del piano rispetto al sistema associato ad f ve ne sono in generale 6 linearmente indipendenti.

Ora cerchiamo il significato geometrico della relazione d'armonia.

Una curva $a_x^n = 0$ d'ordine n è armonica a ogni suo punto contato n volte, e viceversa se un punto contato n volte è armonico alla curva $a_x^n = 0$ esso appartiene alla curva.

Infatti indichiamo con $z_1 z_2 z_3$ le coordinate del punto (z) ; l'equazione del detto punto contato n volte è

$$u_x^n = (u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3)^n = 0,$$

sicchè l'armonizzante

$$a_x^n = 0$$

ogni qual volta il punto (z) appartenga alla $a_x^n = 0$.

Correlativamente: una curva di classe n è armonica a ogni sua tangente contato n volte, e viceversa tutte le rette che

contate n volte danno curve armoniche alla data, sono ad essa tangenti.

Osserviamo che $N = \frac{n(n+3)}{2}$ tangenti generiche di una curva di classe n (che non siano base per una schiera — sistema lineare ∞^1 di curve involuppo — di classe n), quando vengano contate ciascuna n volte, costituiscono N curve *linearmente indipendenti*; altrimenti, in forza del teorema precedente, tutte le curve di classe n che hanno comuni con la data $N-1$ tangenti avrebbero comuni con essa tutte le altre tangenti. Si deduce che:

Il sistema lineare ∞^{N-1} associato ad una curva di classe n è definito dalle tangenti alla curva contate n volte, e correlativamente. Si ha così il significato geometrico della relazione d'armonia.

Osservazione. Generalizzando il teorema precedente si vede che: *la polare di una curva φ di classe $m < n$ rispetto ad una curva d'ordine n è il luogo dei punti che, contati $n-m$ volte, formano con φ curve armoniche ad f .*

La teoria delle polari generalizzata trae origine ed importanza dal problema di « esprimere una forma d'ordine n come somma di potenze n -me di più forme lineari $a_1 a_2 \dots$ ».

Questa proprietà si traduce in effettive condizioni d'uguaglianza non appena il numero di codeste forme vale $r \leq N$.

Invero sussiste il

Teorema fondamentale. *La condizione necessaria e sufficiente perchè una forma ternaria, f , d'ordine n , si esprima come somma di r ($\leq N$) potenze n -me, a_1^n, \dots, a_r^n , è che tutte le curve di classe n tangenti allo r -latero $a_1 \dots a_r = 0$ sieno armoniche ad f . Un tale r -latero si dirà armonico ad f .*

La dimostrazione del teorema si svolge come segue.

La condizione è necessaria: infatti ogni curva tangente alle r rette è armonica con ciascuna di esse contata n volte, e quindi anche con la curva data f . Viceversa, se tutte le curve tangenti alle r rette sono armoniche alla f , esse costituiscono un sistema lineare, il cui associato contiene f : ora questo sistema associato è determinato dalle r rette contate n volte, e quindi f si esprime linearmente per esse.

Il teorema precedente porge la *costruzione dei polilateri* di N o $N-1$ lati armonici ad una curva f d'ordine n .

Si otterrà un N -latero armonico ad f assumendo ad arbitrio $N-1$ rette generiche $a_1 \dots a_{N-1}$ ed associandovi una tangente alla curva armonica ad f che è determinata dalla condizione di toccare le $a_1 \dots a_{N-1}$.

Si otterrà un $(N-1)$ -latero armonico ad f assumendo ad arbitrio $N-2$ rette generiche del piano $a_1 \dots a_{N-2}$, ed associando a queste una fra le $n^2 - (N-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ residue tangenti base alla schiera delle curve di classe n che sono armoniche alla f e toccano le $a_1 \dots a_{N-2}$.

In particolare, per $n=2$, si otterrà un *quadrilatero armonico ad una conica f* scegliendo ad arbitrio tre rette generiche a_1, a_2, a_3 ed associandovi la quarta tangente fissa della schiera di coniche armoniche ad f toccanti a_1, a_2, a_3 . Le tre coppie di vertici del quadrilatero, costituendo coniche involuppo armoniche ad f , sono coppie di punti coniugati. È chiaro che ogni quadrilatero di cui due coppie di vertici opposti sono coniugati è armonico ad f ; segue da ciò che « se due coppie di vertici opposti d'un quadrilatero sono coniugate rispetto ad f , altrettanto avviene per la terza coppia » (teorema che sotto altra forma è stato enunciato da HESSE, 1840).

Una classe notevole di polilateri armonici ad una curva f d'ordine n è costituita dagli $(n+1)$ -goni coniugati (REYER, 1870; ROSANES, 1873) che si definiscono come segue.

Anzitutto un n -gono si dice *coniugato ad f* se, considerato come una curva di classe n , è armonico ad f : presi ad arbitrio $n-1$ vertici, il luogo del punto che insieme ad essi costituisce un n -gono coniugato è la retta polare mista di quei punti, cioè la curva polare dell' $(n-1)$ -gono da essi costituito.

Ora un $(n+1)$ -gono si dirà *coniugato ad f* se gli $n+1$ n -goni formati coi suoi vertici sono coniugati ad f , cioè se la retta polare mista di $n-1$ qualunque fra i suoi vertici contiene i due rimanenti.

Per $n=2$ gli $(n+1)$ -goni coniugati sono i *triangoli coniugati* delle coniche.

Gli $(n+1)$ -goni coniugati ad f sono ∞^{n+1} : indicando con

$$u_\alpha = 0, \quad u_\beta = 0, \quad u_\gamma = 0, \dots,$$

le equazioni di $n+1$ punti — in coordinate di rette — la

condizione perchè essi formino un $(n+1)$ -gono coniugato ad $f = a_x^n$ si traduce in $n+1$ equazioni che si ottengono annullando $n+1$ prodotti simbolici di grado n , del tipo $a_\beta a_\gamma \dots$.

Se si aggiungono $n+1$ equazioni lineari rispettivamente nelle $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, esprimenti che i vertici dello $(n+1)$ -gono debbono appartenere ad $n+1$ rette date, la costruzione dello $(n+1)$ -gono viene a dipendere dalla risoluzione di un sistema di $2n+2$ equazioni n -lineari in $2n+2$ variabili, sistema che ammette in generale un numero finito di soluzioni.

Un $(n+1)$ -gono coniugato ad f , considerato come poligono completo di $\frac{(n+1)n}{2}$ lati, dà luogo a un polilatero armonico.

Osserviamo anzitutto che le curve di classe n iscritte nello $\frac{(n+1)n}{2}$ -latero sono ∞^n e non di più; invero se, per esempio, codeste curve formassero un sistema lineare ∞^{n+1} , dovrebbe ogni curva di classe n tangente a tutti i lati meno uno toccare di conseguenza anche l'ultimo lato; invece ciò non accade per una curva di classe n che si formi aggiungendo agli $n+1$ vertici dello $(n+1)$ -gono fuori di codesto lato, un punto qualsiasi del piano che non cada sul lato stesso. Ciò posto è agevole riconoscere che gli $n+1$ n -goni formati con n vertici del nostro $(n+1)$ -gono, costituiscono $n+1$ curve di classe n linearmente indipendenti; giacchè combinando linearmente n di quei gruppi di punti si ottiene un sistema lineare di curve involuppo degeneri da cui si stacca il vertice ad essi comune. Segue quindi il teorema.

Vediamo ora come si costruisca un $(n+1)$ -gono coniugato, nei casi $n=2, 3$.

La costruzione del triangolo coniugato a una conica è ben nota: preso ad arbitrio un vertice A nel piano della conica, ma fuori di questa, basta aggiungervi due punti B, C che appartengano alla polare di A e siano coniugati ad f ; le coppie di punti B, C separano armonicamente le intersezioni della retta con la conica.

La costruzione di un quadrangolo coniugato rispetto ad una cubica f , si ottiene come segue. Prendansi ad arbitrio due punti generici A e B nel piano della cubica e sia p la loro retta polare mista; un qualsiasi punto C di p forma con A e B un triangolo coniugato ad f , ma questo triangolo non fa parte, in generale, di un quadrangolo coniugato, giacchè

il quarto vertice D di un tale quadrangolo deve stare su p ed anche sulle polari miste di AC e di BC . Ora è facile vedere che, al variare di C sopra p , le due rette polari miste di AC e BC descrivono due fasci proiettivi (rispettivamente di centro B e A); i punti uniti della proiettività che essi determinano su p , insieme ad A e B , formano un quadrangolo coniugato ad f .

Per ogni curva (o per ogni sistema di curve) d'ordine n si pone il problema di ridurne l'equazione alla *forma canonica*, costituita da una *somma del minor numero possibile di potenze n -me*. Vediamo a quali sviluppi e costruzioni dia luogo questo problema per i casi più semplici: $n = 2, 3, 4$.

a) *Coniche e trilateri armonici*. Una conica non degenera non possiede bilateri (e tanto meno unilateri) armonici, giacchè l'equazione $a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 = 0$ rappresenta una coppia di rette passanti per il punto (001). Un trilatero armonico ad una conica è dato da un triangolo coniugato; preso come triangolo fondamentale delle coordinate, e facendo una scelta opportuna del punto-unità, si ottiene l'equazione della conica sotto la nota forma canonica

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

La costruzione di un trilatero armonico a partire da un lato a si può fare correlativamente a quella ricordata innanzi, ove si parte da un vertice. Ma il teorema fondamentale sui polilateri armonici conduce anche alla costruzione seguente: le coniche armoniche ad f e tangenti ad a formano un sistema lineare ∞^3 , $|\varphi|$, di coniche involuppo; le coppie di rette b e c , che insieme ad a costituiscono un trilatero armonico, sono tangenti ad ∞^2 , anzichè ad ∞^1 , coniche φ . Sappiamo già che codeste coppie formano l'involuzione delle rette coniugate ad f per il polo di a ; osservando che $|\varphi|$ è un qualsiasi sistema ∞^3 di coniche-involuppo con una tangente fissa, e traducendo per dualità si deduce:

In ogni sistema lineare ∞^3 di coniche (luogo) con un punto base A , esiste un fascio di coniche spezzate in una retta per A e in una residua retta a (in generale non passante per A) sulla quale le dette coniche segano le ∞^1 coppie di una g_2^1 , sicchè le ∞^1 coniche per un punto di una coppia passano di conseguenza per il coniugato.

Osservazione. Il fatto che una conica non degenera f ammetta ∞^3 trilateri armonici (triangoli coniugati) fra cui si trovano dei triangoli degeneri in due rette una delle quali contata due volte, sembra a prima vista contraddire alla non esistenza di bilateri armonici. Infatti se si scrive f come somma di tre quadrati di forme lineari, due delle quali vengono a coincidere, pare si ottenga f come somma di due quadrati soltanto.

Ma in realtà, se il passaggio al limite si effettua tenendo ferma la conica f , l'equazione limite di f viene a svanire: invero sia per es.

$$f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

e si assuma il trilatero armonico

$$(x_1 - ax_3)\left(x_1 - \frac{x_3}{a}\right)x_2 = 0,$$

si avrà

$$(x_1 - ax_3)^2 - a^2\left(x_1 - \frac{x_3}{a}\right)^2 + (1 - a^2)x_2^2 = (1 - a^2)\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\},$$

che diventa identicamente nullo per i valori $a = \pm 1$ cui corrisponde la degenerazione del trilatero in bilatero; se invece si divide per $1 - a^2$, i coefficienti di $(x_1 - ax_3)^2$ e di $\left(x_1 - \frac{x_3}{a}\right)^2$ diventano infiniti.

Passiamo al caso di due coniche f e φ . Esiste in generale (cioè quando f e φ non si toccano) un trilatero armonico o triangolo coniugato comune, che permette di ridurne simultaneamente le equazioni alla forma:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \varphi = a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 = 0.$$

Codesto triangolo è costituito, come è noto, dai punti uniti dell'omografia prodotto delle due polarità rispetto alle due coniche (vi sono infiniti triangoli coniugati comuni nel caso del doppio contatto delle due coniche, in cui la suddetta omografia diventa un'omologia).

Ora — per il teorema fondamentale — il triangolo coniugato comune ad f e φ è caratterizzato dalla condizione che le ∞^2 coniche ad esso iscritte appartengono al sistema ∞^3 associato al fascio di f e φ . Osservando che codesto sistema è

un sistema lineare qualunque di ∞^3 coniche-inviluppo privo di tangenti fisse, e traducendo per dualità, si deduce:

Per un sistema lineare ∞^3 di coniche (luogo), senza punti base, esiste un triangolo tale che tutte le (∞^2) coniche passanti per un vertice passano di conseguenza per gli altri due.

Consideriamo ora due triangoli coniugati ad una medesima conica f . Per ciascuno di essi vi è un sistema lineare ∞^2 di coniche inviluppo iscritte; e siccome i due sistemi ∞^2 sono immersi nel sistema ∞^4 associato ad f , essi hanno una conica comune. Vale anche la considerazione correlativa, e perciò si conclude il noto teorema di STEINER (1832): *Due triangoli coniugati ad una conica sono insieme iscritti in una conica e circoscritti ad un'altra.*

Viceversa: *se due triangoli sono insieme circoscritti (o iscritti) ad una conica, sono anche coniugati rispetto ad un'altra conica e però (BRIANCHON, 1817) iscritti (o circoscritti) ad una terza.*

Infatti i due sistemi lineari ∞^2 delle coniche inviluppo iscritte nei due trilateri posseggono una conica comune e quindi stanno in un sistema ∞^4 , cui è associata una conica; rispetto a questa i due triangoli sono coniugati.

Come corollario si ottiene (con DE PAOLIS) il

Teorema di Poncelet (cfr. L. 2°, § 1, pag. 164): Date due coniche f e φ , se vi è un triangolo iscritto all'una e circoscritto all'altra, ve ne sono infiniti.

Infatti si costruisca un secondo triangolo circoscritto a φ ed avente due vertici su f , il terzo vertice si troverà sulla stessa conica φ che è determinata dai due punti anzidetti presi insieme ai tre vertici del primo triangolo.

In seguito a ciò si ottiene una semplice interpretazione geometrica della relazione d'armonia fra due coniche. Si noti che i triangoli coniugati rispetto ad una conica f sono ∞^3 e che in ciascuno di essi sono iscritte ∞^2 coniche armoniche alla data; parrebbe dunque che le coniche armoniche ad f fossero ∞^5 anzichè ∞^4 come accade effettivamente; si deduce pertanto:

Se due coniche sono armoniche, ciascuna di esse è iscritta (e similmente circoscritta) ad infiniti triangoli coniugati all'altra⁽¹⁾.

(1) Cfr. SMITH « Proceedings of the London math. Soc. », t. 6, pag. 94; ROSANES « Math Annalen, Bd. 6 »; DARBOUX « Bulletin de la Soc. Math », t. 1, pag. 348.

b) *Cubiche e quadrilateri armonici*. Una cubica f non possiede in generale *trilateri armonici*, per cui f possa ridursi alla forma:

$$f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3$$

o (per una scelta conveniente del punto unità)

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Infatti le combinazioni lineari di tre cubi danno luogo a ∞^8 anzichè ad ∞^9 cubiche, e però a cubiche proiettivamente particolarizzate (le *cubiche equianarmoniche* di cui discorreremo nel prossimo capitolo).

Invece una cubica generale f possiede ∞^2 *quadrilateri armonici* che si costruiscono come segue: si ricordi che f ammette un sistema lineare ∞^2 di coniche involuppo apolari, φ ; scelta ad arbitrio una retta generica a , vi è una schiera di coniche φ tangenti ad a , le altre tre tangenti base della schiera, b, c, d , formano con a un quadrilatero armonico.

Infatti, le ∞^1 coniche iscritte in $abcd$ essendo apolari rispetto ad f , associandole ai punti del piano si ottengono curve di 3^a classe armoniche, fra le quali ve ne sono 6 linearmente indipendenti; ciò significa che tutte le ∞^5 curve di 3^a classe iscritte in $abcd$ sono armoniche rispetto ad f , e quindi $abcd$ è un quadrilatero armonico e. d. d.

Perchè la dimostrazione precedente sia conclusiva occorre osservare che le curve di 3^a classe iscritte in un quadrilatero $abcd$ non possono mai formare un sistema lineare sovrabbondante di dimensione $r > 5$; invero se così fosse, il sistema residuo di tre punti rispetto al nominato, darebbe luogo a più che ∞^1 coniche iscritte nel quadrilatero.

I quadrilateri armonici ad una cubica f si trovano in una interessante relazione con la cubica h , hessiana di f (1).

Invero si noti che le coppie di punti apolari rispetto ad f appartengono ad h e costituiscono su questa ∞^1 coppie di punti *corrispondenti*, per modo che la conica polare di un punto ha come doppio il punto corrispondente. Ora le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero armonico (costi-

(1) Questi quadrilateri iscritti in h sono considerati da CREMONA « Introduzione », n. 134, (Opere, t. I, pag. 439).

tuendo coniche iscritte e quindi apolari) daranno tre coppie di punti corrispondenti su h . Segue da ciò (DE PAOLIS) che il quadrilatero armonico determinato da una retta a ha come vertici le tre intersezioni di a con la hessiana e i loro tre punti corrispondenti.

c) *Quartiche e pentalateri armonici*. Le combinazioni lineari di quattro quarte potenze di forme lineari ternarie contengono 12 coefficienti, e però danno luogo a ∞^{11} quartiche. Si comprende perciò come l'esistenza d'un quadrilatero armonico per una quartica f , imponga a questa 3 condizioni (essendovi ∞^{11} quartiche) e quindi non possa avverarsi per una f generale.

Contiamo invece i parametri che figurano (omogeneamente) nella combinazione lineare di cinque quarte potenze: essi sono 15, cioè altrettanti quanti i coefficienti della quartica generale; sembra dunque — a prima vista — che una quartica generale, f , debba possedere un numero finito di pentalateri armonici. Ma d'altra parte, se f possiede un pentalatero armonico, bisogna che la conica iscritta in esso sia apolare rispetto ad f , ed abbiam visto che una quartica generale f non possiede coniche apolari, poichè l'esistenza di una siffatta conica si traduce in una relazione fra i coefficienti di f .

Come spiegare la contraddizione? Questa ci ammonisce che non è lecito usare i computi di costanti dimenticando i criteri che ne rendono legittima l'applicazione (cfr. L. 1°, § 26). La determinazione di un pentalatero armonico ad f implica una riduzione a forma canonica dipendente da 15 equazioni fra altrettante variabili; ma non si può affermare *a priori* che tali equazioni sieno in generale compatibili; se non lo sono, come risulta in fatto dalla non esistenza d'una conica apolare ad una quartica generale, avverrà che ogni quartica f particolare, la quale sia dotata di un pentalatero armonico, dovrà possederne infiniti.

Che una quartica non possenga in generale un pentalatero armonico, contrariamente alla apparenza del computo delle costanti, è stato scoperto da CLEBSCH ⁽¹⁾, il quale ha assegnato l'*invariante di sesto grado* della f che si annulla quando f può esprimersi come somma di cinque quarte potenze, cioè quando esiste per f una conica apolare.

(1) Journal für Mathematik, Bd. 59, pag. 143.

Ora dimostreremo che l'anzidetta condizione non è soltanto necessaria, ma altresì sufficiente per l'esistenza di ∞^1 pentalateri armonici ad f ⁽¹⁾. Avremo dunque il

Teorema: *Una quartica non possiede in generale alcun pentalatero armonico; condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un tale pentalatero è l'esistenza d'una conica apolare φ , che si esprime con l'annullamento dell'invariante di sesto grado di CLEBSCH. Se questa condizione è soddisfatta, la quartica possiede (non uno ma) ∞^1 pentalateri armonici, che si costruiscono come segue.*

Osserviamo anzitutto che le ∞^{13} curve di 4^a classe armoniche ad f hanno comuni con φ ∞^7 gruppi di 8 tangenti, componenti una serie lineare g_8^7 ⁽²⁾; ciò si vede meglio traducendo per dualità: un sistema lineare ∞^{13} di curve del 4° ordine determina sopra una conica luogo, C , una serie di gruppi-sezione g_8^7 , quando tutte le quartiche composte di C e delle ∞^5 coniche del piano appartengano al nominato sistema ∞^{13} . Ora la determinazione dei pentalateri armonici ad f , circoscritti a φ , si riduce (per dualità) alla determinazione dei gruppi di 5 punti, G_5 , che appartengono ad ∞^3 anzichè ad ∞^2 gruppi dell'indicata g_8^7 ; e pertanto codesti G_5 sono i gruppi d'una involuzione g_5^1 , ottenuta su C come serie comune a quattro g_5^4 , residue di quattro terne di punti linearmente indipendenti rispetto alla g_8^7 .

Dunque i pentalateri armonici a f formano una involuzione g_5^1 di gruppi di tangenti della conica apolare φ . Si esclude che una f dotata di conica apolare possa possedere in generale più che ∞^1 pentalateri armonici, in base al precedente computo di costanti, poichè l'esistenza d'una conica apolare è espressa dall'annullamento d'un solo invariante della quartica.

10. Notizia storica e complementi: pentaedro di Sylvester della superficie cubica. — Le brevi indicazioni che seguono

(1) Cfr. LÜROTH, « Math. Annalen », Bd. 1.

(2) Per le nozioni elementari che qui occorrono sulle involuzioni di $(n-1)$ -ma specie, g_n^{n-1} appartenente ad una retta (o conica) cfr. L. 2°, § 6, Vol. I, pag. 192; più tardi torneremo con maggiore ampiezza su tale argomento (L. 5°).

si possono completare dallo studioso con la lettura della memoria di DE PAOLIS « Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari » (1), nonchè del libro di W. F. MEYER « Apolarität und rationale Curven » (Tubinga, 1883). In queste opere e nel § 5 dell'articolo di BERZOLARI (Pascal's Repertorium pag. 281) si troveranno in particolare gli esatti riferimenti bibliografici, a cui qui si accenna nella forma più breve.

L'origine del problema di rappresentare un polinomio (o una forma) di grado n come somma di potenze n -me di espressioni lineari, si può riattaccare alla forma canonica dell'equazione di una conica (o d'una quadrica) riferita agli assi. Si presenta qui un caso particolare metrico che — colla creazione della Geometria proiettiva — doveva naturalmente suggerire l'idea generale dei triangoli (e dei tetraedri) coniugati.

Una generalizzazione essenziale di questa teoria si ha colla scoperta del *pentaedro armonico* d'una superficie di 3° ordine, dovuta a SYLVESTER (1851) (2): *l'equazione d'una superficie cubica generale può esprimersi annullando la somma di 5 cubi, e questa rappresentazione è possibile in un sol modo* (in rapporto a un gruppo ben determinato di 5 piani che corrispondono alle espressioni lineari elevate a cubo).

Vista la grande importanza di questo risultato daremo un rapido cenno delle dimostrazioni che vi conducono:

1) La scoperta di un pentaedro armonico della superficie cubica, nell'ordine di idee della memoria di SYLVESTER, sorge da un semplice computo di costanti, che tuttavia esige qualche osservazione per assumere un valore rigoroso. Vi sono ∞^{19} superficie cubiche e ∞^{15} pentaedri; combinando linearmente 5 piani contati tre volte si ottengono dunque superficie cubiche in cui figurano 19 parametri; da ciò appare che ogni superficie cubica ammetta un numero finito di rappresentazioni pentaedrali. La vera scoperta di SYLVESTER è l'*unicità* di tale rappresentazione, che l'autore accenna di aver desunto dall'esame della hessiana della superficie cubica. La dimostrazione di questa unicità può farsi semplicemente come segue: i 10 vertici d'un pentaedro armonico danno quadriche polari spezzate; si

(1) Memorie dell'Acc. dei Lincei, vol. 3, 20 giugno 1886.

(2) « On elimination, trasformation and canonical forms » Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. 6, (1851).

Cfr. STEINER, « Ueber die Flächen dritten Grades », Journal für Math., Bd. 53, pag. 139, (1856).

tratta dunque di stabilire che il numero delle quadriche spezzate appartenenti a un sistema lineare ∞^3 (quale è il sistema delle quadriche polari) vale precisamente 10; ora, osservando che questo numero (ove non divenga finito) resta costante per ogni sistema lineare ∞^3 di quadriche, basterà calcolare il numero delle quadriche spezzate passanti per 6 punti generici, che è appunto $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$.

Per completare il conto di costanti che conduce alla scoperta del pentaedro di SYLVESTER, occorre verificare che una superficie cubica dotata di rappresentazione pentaedrale, p. es.

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = 0$$

non possiede infiniti pentaedri armonici. Una tale verifica si otterrà agevolmente notando che — nel caso opposto — il luogo dei vertici costituirebbe una linea di punti le cui quadriche polari si spezzano, la quale incontrerebbe la superficie f ; i punti d'incontro dovrebbero essere per f punti doppi o punti per cui la sezione col piano tangente ha un punto triplo.

La prima dimostrazione completa dell'esistenza del pentaedro di SYLVESTER è dovuta a CLEBSCH ⁽¹⁾ (1860) e a CREMONA ⁽²⁾ (1868). Il ragionamento di questi autori sviluppa appunto l'osservazione, già contenuta in SYLVESTER e STEINER, che i 10 vertici del pentaedro vengono dati dai punti doppi della superficie del 4° ordine hessiana della cubica f .

2) Una dimostrazione diretta, senza partire dalla hessiana, è dovuta a REYE ⁽³⁾ (1872), il quale — valendosi della teoria delle polari generalizzata — dimostra prima l'esistenza di infiniti esaedri armonici e da questi deduce l'esistenza del pentaedro. La deduzione della equazione pentaedrale dalla equazione esaedrale di una superficie cubica, si ottiene anche, col BELTRAMI ⁽⁴⁾, in base alla decomposizione delle funzioni razionali fratte. La dimostrazione di REYE si può svolgere, in connessione coi teoremi che prima abbiamo dato per le curve, nel modo seguente.

⁽¹⁾ Journal für Math., Bd. 58, pag. 109.

⁽²⁾ Nel suo classico « Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces de troisième ordre », Journal für Math., Bd. 68.

⁽³⁾ Journal für Math. Bd. 72.

⁽⁴⁾ Istituto Lombardo, 1879 - Cfr. Opere, Vol. I, pag. 151.

Si suppone estesa alle superficie il teorema che: la condizione perchè l'equazione di una superficie f , d'ordine n , si esprima come combinazione lineare delle potenze n -esime di r piani è che tutte le superficie di classe n inscritte nel poliedro costituito dai detti piani siano armoniche alla f .

Vi sono ∞^4 esaedri armonici ad f ; uno di questi viene determinato dandone ad arbitrio uno spigolo a ; i 4 piani α , β , γ , δ , non passanti per a , sono le facce del tetraedro coniugato al fascio delle quadriche polari dei punti di a . Invero se b e c sono due spigoli opposti del tetraedro anzidetto le terne di punti prese da a , b , c sono armoniche rispetto ad f , e perciò le a e b sono spigoli opposti del tetraedro coniugato alle quadriche polari dei punti di c ; le due facce di questo tetraedro passanti per a , insieme ad α , β , γ , δ , formano un esaedro che si dimostra essere armonico ad f . Merita anche di essere notata l'analogia di questi esaedri (che risultano iscritti nella hessiana di f) coi quadrilateri armonici ad una cubica piana.

Ora le ∞^3 quadriche iscritte in un esaedro armonico sono apolari rispetto ad f , in particolare sono apolari le ∞^2 quadriche iscritte nella sviluppabile cubica che tocca i 6 piani dell'esaedro (si rammenti che, come 6 punti determinano una cubica gobba per cui passano le ∞^2 quadriche di una rete, così — correlativamente — 6 piani generici determinano una sviluppabile cubica che è circoscritta ad ∞^2 quadriche).

Osservando che tutte le quadriche apolari ad f formano un sistema lineare ∞^2 di quadriche-inviluppo, si può dimostrare che due sviluppabili cubiche siffatte hanno a comune 5 piani, i quali formano il pentaedro di SYLVESTER. Affinchè lo studioso possa ricostruire tale dimostrazione, tradurremo per dualità i principî su cui si fonda: due cubiche gobbe hanno a comune 5 punti allorchè appartengono ad una medesima quadrica e sono — su questa — cubiche di diverso sistema (bisecanti le generatrici di diverso sistema); due cubiche gobbe giacenti su una quadrica sono di diverso sistema se non posseggono infinite corde comuni (¹).

Alle notizie precedenti aggiungeremo che, ove si voglia effettivamente esprimere una forma cubica quaternaria come somma di 5 cubi, conviene formare il covariante di quint'or-

(¹) Cfr. p. es. ENRIQUES, « G. Descrittiva », Parte II, § 41.

dine che rappresenta il pentaedro, il quale è stato calcolato da GORDAN ⁽¹⁾ (1871). Questo covariante svanisce soltanto nei casi di degenerazione del pentaedro (studiati da RODEMBERG e LE-PAIGÉ).

La considerazione delle forme binarie armoniche risale a BATTAGLINI, che vi ha dedicato diversi lavori pubblicati dall'Accademia di Napoli fra il 1864 e 1868. Nelle prime memorie del 1864 l'autore introduce l'armonizzante di due forme binarie cubiche e quartiche e considera i sistemi lineari associati che con queste forme si possono costruire. Nel 1867 questi concetti sono estesi alle forme binarie di grado qualunque e se ne fa applicazione al problema di esprimere una forma binaria come somma di potenze di forme lineari. Questi e altri importanti risultati sono stati estesi dallo stesso BATTAGLINI alle forme ternarie nel 1868. All'analogo soggetto si riferiscono le ricerche di ROSANES pubblicate nel Journal für Mathematik negli anni 1872 e 1873; nell'ultima memoria ROSANES (sotto il nome di forme coniugate) considera le forme armoniche con un numero qualunque di variabili.

Indipendentemente dai citati lavori, i principî della teoria delle polari generalizzata si trovano in CLIFFORD (1868) e in varie memorie del REYE, contenute nel Journal für Mathematik, a partire dal 1870. Al REYE stesso, di cui abbiamo citato le ricerche sul pentaedro di SYLVESTER, e a ROSANES, appartengono le principali applicazioni di questa dottrina. La quale fu poi sistemata e ricevette ulteriori sviluppi per opera di DE PAOLIS, nella citata memoria del 1886 e nelle sue lezioni tenute all'Università di Pisa; questa sistemazione soprattutto abbiamo tenuto sott'occhio nella redazione del precedente paragrafo. Nell'indicato articolo di BERZOLARI si troveranno riferimenti bibliografici sulle più recenti ricerche.

⁽¹⁾ Math. Annalen, Bd. 5.

CAPITOLO II

Il problema delle intersezioni e i caratteri plueckeriani delle curve

11. **Intersezioni di due curve: metodi di formazione della resultante.** — *Due curve $f(xy) = 0$, $\varphi(xy) = 0$ d'ordini n , m posseggono, in generale, un punti comuni.*

Questo teorema, enunciato da MAC-LAURIN e dimostrato da EULERO, CRAMER e BÉZOUT ⁽¹⁾, da cui viene comunemente designato, si ottiene eliminando una delle variabili, y , fra le equazioni delle due curve, ciò che conduce ad una equazione resultante $R(x) = 0$ di grado nm . Nel libro 2°, § 13, abbiamo esposto una dimostrazione del suddetto teorema basata sul principio di corrispondenza; qui stimiamo opportuno di prendere in esame i procedimenti algebrici dell'eliminazione, soprattutto per analizzare i casi particolari in cui si dà luogo a radici multiple della resultante.

L'eliminazione di y fra le equazioni $f(xy) = 0$ e $\varphi(xy) = 0$, equivale alla ricerca della condizione perchè le due equazioni suddette, considerate rispetto alla variabile y , ammettano una radice comune; in questa considerazione x figura come un parametro da cui dipendono i coefficienti delle due equazioni. Pertanto il problema della eliminazione si riduce alla formazione della condizione $R(a, b) = 0$ che deve essere soddisfatta dai coefficienti a, b di due equazioni di grado n, m :

$$\begin{aligned} f(y) &= a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0, \\ \varphi(y) &= b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m = 0, \end{aligned}$$

affinchè esse abbiano una radice in comune.

(1) Cfr. L. 2°, § 13.

La condizione anzidetta si esprime, com'è noto, annullando un polinomio omogeneo nelle due serie di variabili a, b , che si chiama *resultante* di f, φ . I metodi per la costruzione dell'equazione risultante $R=0$ si riducono fundamentalmente ai tre seguenti.

1) Il *metodo delle funzioni simmetriche*, detto anche primo metodo di EULERO o metodo di EULERO-CRAMER (1748-1750) ⁽¹⁾, muove dall'osservazione che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni di grado n, m

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$\varphi(y) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m = 0$$

abbiano una radice comune, si esprime annullando il prodotto delle differenze delle radici

$$\Pi(y_i - y_k')$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m).$$

Il prodotto Π appare una funzione simmetrica della y_i e delle y_k' che, mediante le formule di NEWTON, viene a dipendere razionalmente dai rapporti dei coefficienti $\frac{a_i}{a_0}, \frac{b_i}{b_0}$. Moltiplicando per $a_0^m b_0^n$,

$$R = a_0^m b_0^n \Pi(y_i - y_k')$$

diviene un polinomio omogeneo (forma) nelle due serie di variabili a, b :

$$R = R(a_0 a_1 \dots a_n b_0 b_1 \dots b_m),$$

che contiene le a, b rispettivamente ai gradi m, n e che si definisce come il *resultante dei due polinomi f e φ* .

2) Il *metodo delle divisioni successive*, o algoritmo di EUCLIDE per la ricerca del massimo comun divisore, fu adoperato da STEVIN (1585) per trovare l'equazione risultante di due equazioni di terzo o quarto grado, quindi fu usato da LEIBNIZ (1683) per cercare la radice comune a due equa-

(1) Per la bibliografia cfr. l'articolo di NETTO-LE VASSEUR nella edizione francese della Encyclopédie des Sciences Mathématiques, t. I, vol. 2, pag. 74.

zioni di quinto grado e da DE GUA (1740), a cui è stato talvolta attribuito.

Supposto $n \geq m$ si divida il polinomio f per φ , quindi φ per il resto della divisione precedente, e così di seguito; lasciando indeterminati i coefficienti di f , φ , l'ultimo resto a cui si perviene è una costante rispetto ad y , cioè una funzione (razionale) dei coefficienti a , b , che col suo annullamento dà la condizione necessaria e sufficiente affinché le due equazioni $f=0$, $\varphi=0$ abbiano una radice comune.

Nell'intento di agevolare il calcolo effettivo, EULERO (1748) ha modificato il metodo precedente osservando che se f e φ posseggono un fattore comune di grado > 0 :

$$f = f_1 F, \quad \varphi = \varphi_1 F,$$

si ha

$$f\varphi_1 = \varphi f_1;$$

poichè una tale identità deve sussistere ove si determinino convenientemente i polinomi φ_1 , f_1 d'ordine $n-1$, $m-1$ (al più), si deduce un sistema di equazioni lineari, la cui condizione di compatibilità porge un'equazione che deve essere soddisfatta affinché f e φ abbiano radici comuni.

BÉZOUT (1764) ha sviluppato questo metodo con varie modificazioni ed è pervenuto a sbarazzare l'equazione risultante dai fattori estranei che vi si introducono. Il metodo di BÉZOUT è stato approfondito da JACOBI (1836) e da CAUCHY (1840); in particolare JACOBI ne ha dedotto per primo la espressione del risultante sotto forma di determinante (*bezoutiano*).

Giova notare che il metodo delle divisioni successive conduce anche a determinare, sotto forma razionale, le condizioni perchè due equazioni $f=0$, $\varphi=0$ ammettano più radici comuni (LAGRANGE 1870, SYLVESTER 1853).

3) *Il metodo dialitico* di SYLVESTER si può riattaccare a FERMAT (1650) e s'incontra poi in HUDDE, il cui procedimento è usato da NEWTON per due funzioni di terzo e quarto grado; esso ha anche una stretta relazione col metodo precedentemente indicato di EULERO, in quanto riconduce la ricerca della risultante alla condizione di compatibilità di un sistema di equazioni lineari.

SYLVESTER (1839) osserva che la compatibilità delle equa-

zioni $f(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$ porta la compatibilità del sistema delle $m + n$ equazioni

$$1) \left\{ \begin{array}{l} f(y) = 0 \\ yf(y) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ y^{m-1}f(y) = 0 \\ \varphi(y) = 0 \\ y\varphi(y) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ y^{n-1}\varphi(y) = 0; \end{array} \right.$$

le 1) si possono riguardare come equazioni lineari in $n + m - 1$ incognite:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y^2, \quad \dots \quad y_{m+n-1} = y^{m+n-1};$$

la condizione di compatibilità si esprime annullando il determinante dei coefficienti, che è una funzione razionale omogenea di grado m nelle a e di grado n nelle b .

Ora sussiste il seguente

Teorema fondamentale. *Il resultante $R(a, b)$ di due polinomi*

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\varphi(y) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \dots + b_m,$$

è un covariante di f e φ , determinato, a meno di un fattore numerico, dalle due condizioni:

I) di essere un polinomio omogeneo di grado m nelle a , e di grado n nelle b ;

II) di annullarsi ogniqualevolta le due equazioni $f = 0$, $\varphi = 0$ abbiano una radice comune.

Sia invero $F(a, b)$ un polinomio omogeneo nelle a e b , che si annulli ogniqualevolta le $f = 0$ e $\varphi = 0$ abbiano una radice comune. Formiamo il resultante $R(a, b)$ definito innanzi col metodo delle funzioni simmetriche; siccome $F(a, b) = 0$ si annulla ogniqualevolta $R(a, b) = 0$ (poichè allora $f = 0$ e $\varphi = 0$ hanno una radice comune), si deduce (Cfr. L. 1°, § 2)

$$F = R\theta,$$

dove θ è un polinomio omogeneo nelle a e b , che si riduce a

una costante numerica, cioè indipendente dalle a, b , quando F abbia, come R , i gradi m, n .

Risulta poi, dal significato dell'equazione $R=0$, che R è un covariante simultaneo di f, φ .

Il precedente teorema permette di calcolare R ricorrendo a qualsiasi rapido procedimento di formazione che dia una condizione necessaria di compatibilità, senza bisogno di assicurarsi *a priori* che questa sia altresì sufficiente per l'esistenza di una radice comune delle $f=0$ e $\varphi=0$, purchè tuttavia codesta condizione venga espressa mediante l'annullarsi di una forma omogenea di grado m nelle a ed n nelle b .

Così in particolare si otterrà l'espressione del resultante R mediante il determinante fornito dal metodo dialitico di SYLVESTER:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \text{ linee} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} n \text{ linee} \end{matrix}$$

Osserveremo infine che l'espressione di R come prodotto delle differenze delle radici di $f=0$ e $\varphi=0$, o — più direttamente — quella fornita dal determinante di SYLVESTER, mettono in evidenza (1) che: il resultante è una funzione isobarica dei coefficienti a_r, b_s , cioè una sommatoria

$$\Sigma a_{r_1} a_{r_2} \dots b_{s_1} b_{s_2} \dots,$$

dove la somma degli indici ha il valore costante (*peso*)

$$r_1 + r_2 + \dots + s_1 + s_2 + \dots = nm.$$

Ora, ritornando alle due equazioni

$$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0,$$

(1) Cfr. per es. CAPELLI - « Istituzioni... », pag. 567.

di grado complessivo n, m , poniamo

$$f(xy) = \Sigma a_i(x) \cdot y^{n-i}$$

$$\varphi(xy) = \Sigma b_i(x) \cdot y^{m-i},$$

dove a_i e b_i sono polinomi di grado i in x e dove — escludendo posizioni particolari degli assi — *supporremo* $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$; avremo:

$$R(a, b) = R(x),$$

dove $R(x)$ risulta, in generale, un polinomio di grado nm in x . Alle nm radici di $R(x) = 0$, che supponiamo distinte e finite (caso generale), corrisponderanno altrettanti punti comuni alle due curve $f = 0$ e $\varphi = 0$. Infatti se ad una radice $R(x) = 0$ corrispondono due valori per y , e quindi due punti comuni alle due curve, eseguendo un cambiamento degli assi coordinati si otterrebbe un resultante di grado superiore ad nm . In questo senso si può concludere che: *due curve d'ordine n, m hanno in generale nm punti comuni.*

Le eccezioni che occorre considerare sono tre:

1) l'annullamento identico di $R(x)$;

2) l'abbassamento del suo grado;

3) la presenza di radici multiple dell'equazione $R(x) = 0$.

1) Il caso 1) si tratta nel modo più diretto calcolando il resultante $R(x) = 0$ col metodo delle divisioni successive: se riesce identicamente $R(x) = 0$, il resto non nullo, $\psi(xy)$, che lo precede nella serie, è un fattore comune a f e φ . Pertanto, *escludendo*, come faremo nel seguito, che le curve f e φ (non aventi direzioni asintotiche parallele all'asse y , essendo $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$) abbiano una *parte comune*, resta *escluso l'annullamento identico di $R(x)$.*

2) Se il grado di $R(x)$ si abbassa, l'equazione $R = 0$ possiede qualche radice infinita. In questo caso si trovano punti all'infinito comuni alle due curve $f = 0$ e $\varphi = 0$, cioè soluzioni *asintotiche* comuni alle due equazioni. La difficoltà relativa a questo caso si rimuove con una sostituzione lineare sopra le x, y , oppure con l'uso delle coordinate omogenee, giacchè allora il resultante riesce una forma esattamente di grado nm .

3) Per studiare il caso in cui l'equazione $R(x) = 0$ possieda radici multiple, occorre stabilire una distinzione.

In primo luogo nasce una radice r -pla, $x=\alpha$, di $R(x)=0$ ($r > 1$), se vi sono r punti comuni a f, φ sopra una retta $x=\alpha$ parallela all'asse y ; a tale radice rispondono dunque r valori distinti di y . Questa circostanza è relativa a posizioni speciali degli assi: eseguendo una piccola rotazione degli assi x e y , $R=0$ appare limite di un'equazione risultante con r radici distinte che si avvicinano ad α .

In secondo luogo può accadere che ad una radice r -pla di $f=0$, corrisponda un solo punto, P , comune ad f, φ , del quale si dice allora che *assorbe r intersezioni* delle due curve. Si riconosce che questa circostanza è indipendente dalla posizione degli assi, giacchè eseguendo un piccolo movimento della curva φ , si può ottenere una curva che incontri f in r punti distinti aventi per limite P ; la verifica rigorosa di questa possibilità si fa nel modo più semplice in base all'osservazione, sviluppata nel paragrafo seguente, che P è punto multiplo per una delle due curve o punto ove le due curve hanno la tangente comune.

Noteremo in fine che tutti i casi in cui la $R(x)=0$ possiede radici multiple si ottengono sovrapponendo i due casi esaminati innanzi. Ora la *convenzione* relativa all'assorbimento di più intersezioni in un punto comune alla f e φ permette di enunciare il

Teorema. *Due curve d'ordine n, m hanno sempre nm punti comuni, distinti o in parte coincidenti.*

12. Intersezioni assorbite da contatti e punti multipli. — Il *problema* di determinare quante *intersezioni di due curve* vengano *assorbite in un punto comune*, comprende, nel suo svolgimento, tutta la teoria delle singolarità, che verrà svolta nel libro quarto. Qui ci limiteremo ad alcune osservazioni preliminari e alla trattazione dei casi elementari che occorrono più generalmente. A tale scopo supporremo nel seguito che le curve f e φ , senza parti comuni, siano riferite ad *assi coordinati con orientazione generica*, escludendo così, via via, quelle complicazioni che appaiono nascere da posizioni speciali degli assi; intanto resta escluso che due punti comuni alle curve f e φ si trovino sopra una retta parallela all'asse y . Oltre a ciò, usando coordinate cartesiane, supporremo che il punto comune alle f e φ sia un punto a distanza finita; non importa ormai chiarire come a questo caso si riduca anche

quello dei punti all'infinito, attraverso l'uso delle coordinate omogenee, ovvero con una sostituzione lineare.

Ci appoggeremo sopra i lemmi seguenti.

Lemma I. Il resultante del polinomio $f(xy)$ e del polinomio composto $\varphi(xy) \cdot \psi(xy)$ è il prodotto dei resultanti di f e φ e di f e ψ :

$$R(f, \varphi\psi) = R(f, \varphi) \cdot R(f, \psi).$$

Ciò segue immediatamente in base alla espressione del resultante fornito dal metodo delle funzioni simmetriche

$$R \equiv \Pi(y_i - y_k'),$$

ove si distinguono le y' radici di $\varphi = 0$ e quelle di $\psi = 0$.

Lemma II. Il resultante di f e φ , a meno di un fattore numerico, è uguale a quello di f e $\lambda f + \mu\varphi$, essendo λ, μ costanti diverse da zero;

$$R(f, \varphi) \equiv R(f, \lambda f + \mu\varphi).$$

Ciò consegne immediatamente dal teorema fondamentale sul resultante.

Lemma III. Se x_0 è una radice i -pla della resultante $R(f, \varphi) = R(x) = 0$, corrispondente a un punto che assorbe i intersezioni delle curve f e φ , il prodotto

$$\Pi(y_i(x) - y_k'(x)) \equiv R(x)$$

diviene infinitesimo d'ordine i per $x = x_0$.

Sotto forma geometrica questo lemma si suole enunciare come segue:

Regola di HALPHEN ⁽¹⁾: Il numero delle intersezioni di due curve piane che vengono assorbite in un punto comune, O , è uguale alla somma degli ordini di infinitesimo dei segmenti determinati dalle intersezioni delle due curve con una retta, prossima ad O , la cui distanza da O venga assunta come infinitesimo del prim'ordine.

Qui è da osservare che la regola di HALPHEN sussiste anche per qualsiasi posizione particolare degli assi coordinati,

(1) Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 3 (1874, 75), pag. 76.

purchè s'intenda che i segmenti infinitesimi di cui discorre l'enunciato siano quelli prossimi ad O .

Incidentalmente notiamo che, come caso particolare, cercando le intersezioni di una curva $f(xy) = 0$ con la retta $y = x$, si ottiene una nuova e più semplice giustificazione della *regola di ZEUTHEN* (1873), relativa ai punti uniti d'una corrispondenza $f(xy) = 0$, che già abbiamo dimostrata, in base alla considerazione delle curve approssimanti, nel § 1 del L. 2° (Vol. I, pag. 161).

Ora applicheremo i tre lemmi precedenti all'esame dei seguenti casi, dove — occorrendo di eseguire qualche calcolo — supporremo, per semplicità, che il punto comune alle curve f e φ venga collocato nell'origine delle coordinate.

1) *Un punto semplice comune alle curve f e φ in cui queste abbiano diversa tangente, conta sempre per una sola intersezione delle due curve.*

Infatti, designando con α, α' i coefficienti angolari delle tangenti ad f e φ nel punto comune $O = (00)$, la sola differenza che, per $x = 0$, si annulla nel prodotto $\Pi(y_i - y_k')$ è — a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo — $y_1 - y_1' = (\alpha - \alpha')x$. Così le f e φ hanno in O una sola intersezione, come le tangenti da cui vengono approssimate.

2) *Un punto semplice comune alle due curve f e φ in cui esse abbiano la stessa parabola osculatrice d'ordine $(r-1) \geq 1$ e diversa parabola osculatrice d'ordine r (cioè la stessa tangente e le stesse parabole osculatrici fino all'ordine $r-1$, e diverse parabole osculatrici d'ordine $r, r+1, \dots$) conta precisamente per r intersezioni delle due curve.*

Infatti si designino le parabole osculatrici d'ordine r con

$$y_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r x^r$$

$$y_1' = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r' x^r;$$

la differenza $y_1 - y_1'$ che compare nella espressione di R , diventa infinitesima come $(\alpha_r - \alpha_r')x^r$: le due curve hanno tante intersezioni quante le prime parabole osculatrici dello stesso ordine che non ne hanno infinite.

3) Il caso in cui un punto O sia semplice per f e multiplo per φ si può ricondurre al precedente sostituendo a φ una curva del fascio $f + \lambda\varphi$ ($\lambda \neq 0$), in virtù del lemma II. Infatti tutte le curve del fascio $f + \lambda\varphi = 0$, per $\lambda \neq 0$, hanno

in O un punto semplice, altrimenti tutte le curve, e anche f , avrebbero un punto multiplo.

Mediante la considerazione delle parabole osculatrici ad $f + \lambda\varphi = 0$, questo metodo permette di stabilire che:

Un punto semplice per f ed r -plo per φ ($r > 1$) vale in generale per r intersezioni delle due curve; la molteplicità d'intersezione diventa $> r$ soltanto nel caso che vi sia contatto (tangente comune) di f con un ramo di φ .

A questo risultato si arriva più semplicemente osservando che nel prodotto $\Pi(y_i - y_k')$ vi sono r differenze infinitesime:

$$y_1 - y_1', \quad y_1 - y_2', \dots \quad y_1 - y_r';$$

dove $y_1, y_1', y_2' \dots y_r'$ sono infinitesimi del prim'ordine; escluso il contatto di f con un ramo di φ , codeste differenze sono del pari infinitesimi del prim'ordine. Nel caso di contatto accade invece che una di codeste differenze diviene infinitesima d'ordine > 1 .

4) *Un punto r -plo per f ed s -plo per φ ($r > 1, s > 1$) assorbe in generale rs intersezioni delle due curve; la molteplicità d'intersezione diventa $> rs$ soltanto nel caso che le due curve abbiano qualche tangente principale comune (contatto di rami).*

Infatti si ripete la dimostrazione precedente ove si considerano le rs differenze $y_i - y_k'$ che diventano infinitesime nel prodotto $\Pi(y_i - y_k')$.

Per precisare l'analisi relativa al caso dei punti multipli con tangenti comuni, occorre distinguere i rami in cui la curva può essere decomposta nell'intorno di un punto multiplo (Cfr. L. 1°, §§ 11-12).

Offterremo così i seguenti enunciati:

5) *Le intersezioni di due curve che vengono assorbite in un punto multiplo comune, O , si ottengono sommando le intersezioni dei rami della prima coi rami della seconda.*

Suppongasi dapprima che il punto O sia un punto multiplo a tangenti distinte tanto per l'una che per l'altra curva: sia r -plo per f ed s -plo per φ . Allora nell'intorno di O la funzione algebrica $y(x)$ definita da $f(xy) = 0$ si lascia decomporre in r funzioni o rami $y_1(x), y_2(x) \dots y_r(x)$, e così la funzione algebrica $y'(x)$ definita dalla φ si decompone in s rami $y_1'(x), y_2'(x) \dots y_s'(x)$; l'ordine di infinitesimo del prodotto

$\Pi(y_i - y_k')$ equivale alla somma degli ordini di infinitesimo delle differenze che vi figurano come fattori, per $i=1\dots r, k=1\dots s$; questi ultimi designano le molteplicità di intersezione dei rami di f e φ , cioè le molteplicità di intersezione delle parabole osculatrici che li approssimano sufficientemente.

La deduzione precedente vale anche nel caso in cui una, o ambedue le curve f, φ posseggano rami d'ordine $\nu > 1$. Ricordiamo (L. 1°, §§ 11-12) che quando alcune fra le tangenti principali di f si confondono in una sola, non è in generale possibile distinguere r funzioni $y_1(x)\dots y_r(x)$, accadendo che un certo numero di radici dell'equazione $f(xy)=0: y_1(x)\dots y_\nu(x)$, (formanti — come si dice — un *ciclo*) vengano scambiate per un giro della variabile complessa x attorno al punto zero; allora y_1, \dots, y_ν costituiscono una sola funzione a ν valori che si chiama *ramo (cuspidale) d'ordine ν* della curva f . È chiaro che se la f e la φ posseggono in O dei rami d'ordine > 1 , si potrà valutare l'ordine di infinitesimo del prodotto $\Pi(y_i - y_k')$ sommando gli ordini di infinitesimo dei prodotti parziali che contengono le differenze relative a una coppia di rami di f e φ : il prodotto parziale relativo a due rami d'ordine ν, μ contiene precisamente $\nu\mu$ differenze e però diviene infinitesimo d'ordine $\nu\mu$ almeno, il caso di ipermolteplicità corrispondendo all'ipotesi che i due rami abbiano la tangente cuspidale comune.

6) *Un punto O , che sia multiplo a tangenti distinte per f e φ , assorbe precisamente $rs + \sum k$ intersezioni delle due curve, designando r, s le molteplicità di O , e designando genericamente k l'ordine di contatto di un ramo (lineare) di f con un ramo di φ , cioè l'ordine della parabola osculatrice comune ai due rami.*

Ciò risulta combinando le proposizioni 5) e 2).

In particolare: *se in O le due curve f e φ posseggono h tangenti comuni, le intersezioni assorbite sono precisamente $rs + h$, e non più, ove i rami tangenti posseggano una diversa curvatura, ossia una diversa costante caratteristica, designando con questo nome la costante $\frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}$ che vale a determinare la parabola osculatrice del 2° ordine.*

Per quanto concerne i rami d'ordine superiore, ci limiteremo al caso delle *singolarità ordinarie*, in cui è escluso il contatto di diversi rami fra loro, ed ogni ramo d'ordine ν

possiede una tangente cuspidale $(\nu + 1)$ -punta e viene approssimato — a meno di infinitesimi d'ordine superiore a $\frac{\nu + 1}{\nu}$ — da una curva del tipo $y^\nu = cx^{\nu+1}$ con $c \neq 0$, (Cfr. L. 1°, § 12); occorre considerare queste curve approssimanti in luogo di limitarsi alla prima approssimazione (a meno di infinitesimi d'ordine > 1) fornita dalle tangenti, quando si tratta di valutare le intersezioni di due rami, nel caso di contatto.

7) *Un ramo lineare e un ramo cuspidale ordinario d'ordine $\nu > 1$ posseggono (nell'origine) ν oppure $\nu + 1$ intersezioni, secondochè hanno tangenti distinte oppure hanno la medesima tangente.*

Abbiamo già notato che le intersezioni sono ν , escluso il caso di contatto; supponiamo dunque che si'abbia un ramo lineare

$$y = ax^2 + \varepsilon,$$

e un ramo cuspidale d'ordine ν ,

$$y^\nu = cx^{\nu+1} + \eta \quad (c \neq 0),$$

con la medesima tangente

$$y = 0;$$

ε designa un infinitesimo d'ordine superiore a 2, ed η un infinitesimo d'ordine superiore a $\nu + 1$. Basta osservare che le ν differenze

$$(ax^2 + \varepsilon) - \sqrt[\nu]{cx^{\nu+1} + \eta}$$

sono dell'ordine $\frac{\nu + 1}{\nu}$, riducendosi a $-c^{\frac{1}{\nu}} x^{\frac{\nu+1}{\nu}}$; il prodotto di codeste ν differenze è dunque un infinitesimo d'ordine $\nu + 1$.

c. d. d.

8) *Due rami cuspidali d'ordine diverso ν, μ , posseggono in generale (nell'origine) $\nu\mu$ intersezioni; nell'ipotesi che il ramo d'ordine più grande, ν , sia ordinario, il numero delle intersezioni cresce del più piccolo dei due ordini, μ , quando i due rami si toccano.*

Per quanto è detto innanzi possiamo limitarci al caso di due rami tangenti all'asse delle x sostituiti dalle due curve

approssimanti

$$y^v = cx^{v+1} \quad (c \neq 0)$$

$$y^\mu = dx^{\mu+\sigma} \quad (d \neq 0, \sigma \geq 1).$$

Basta quindi notare che l'ordine di infinitesimo di una differenza

$$\frac{1}{c^v} x^{\frac{v+1}{v}} - \frac{1}{d^\mu} x^{\frac{\mu+\sigma}{\mu}}$$

è uguale a $\frac{v+1}{v}$ nell'ipotesi $v > \mu$, sicchè il prodotto delle $v\mu$ differenze analoghe riesce infinitesimo d'ordine $v\mu + \mu$. Alla conclusione si arriva anche direttamente formando l'equazione risultante delle due date, che (a prescindere dalle soluzioni asintotiche) è

$$c^\mu x^{(v+1)\mu} = d^v x^{(\mu+\sigma)v}.$$

Osservazione. Il ragionamento precedente non è infirmato dalla circostanza che la curva $y^\mu = dx^{\mu+\sigma}$ dia luogo a più che un ramo, come può accadere per $\sigma > 1$.

Se ora si suppone $\mu = v$, si trova

9) *Due rami cuspidali ordinari dello stesso ordine v e dotati della medesima tangente:*

$$y^v = cx^{v+1} + \varepsilon, \quad y^v = dx^{v+1} + \eta,$$

hanno precisamente $v^2 + v$ intersezioni e non più, purchè sieno diverse le loro costanti caratteristiche:

$$c \neq d.$$

Osservazione. Si può notare che ove una delle suddette costanti caratteristiche divenga 0, (caso in cui uno solo dei due rami degeneri, dando luogo ad una singolarità straordinaria) il numero delle intersezioni rimane sempre $v^2 + v$.

Finalmente, raccogliendo i risultati 5)....9), si ha:

10) *Se un punto O è r -plo ordinario per la curva f e s -plo ordinario per φ ($r \geq 1, s \geq 1$), e se i due gruppi di r, s tangenti principali alle due curve contengono h rette comuni, le intersezioni assorbite in O sono $rs + h$; questo numero non può crescere se i rami (ordinari) tangenti di f e φ sono d'or-*

dine diverso o — pur essendo dello stesso ordine — posseggono diverse costanti caratteristiche.

Il caso contemplato nel criterio 10) si può designare brevemente dicendo che le curve f e φ aventi il punto O come punto multiplo ordinario, rispettivamente r -plo ed s -plo, posseggono ivi dei contatti semplici pei loro rami. E il criterio di riconoscimento sopra enunciato risulta chiarito dalle seguenti:

Osservazioni sulle curve approssimanti. Se una curva f possiede nell'origine, O , una cuspidine ordinaria d'ordine r , tangente all'asse $y=0$, la curva approssimante $y^r = kx^{r+1}$ che ne determina la costante caratteristica

$$k = \lim_{x=0} \frac{y^r}{x^{r+1}} = \frac{1}{(r+1)!} \frac{d^{r+1}(y^r)}{dx^{r+1}},$$

si lascia definire come segue: vi è un fascio di curve d'ordine $r+1$: $y^r = \lambda x^{r+1}$, aventi in O una cuspidine (ordinaria) d'ordine r e possedenti un flesso d'ordine $r-1$ nel punto all'infinito dell'asse y , ove sia data come tangente la retta all'infinito; in codesto fascio la curva che approssima f è l'unica per cui il numero delle intersezioni con f assorbite in O risulti superiore a r^2+r ; insomma la curva approssimante è definita nel detto fascio come *curva osculatrice* ad f , avente con f un contatto superiore al contatto semplice.

Ciò che precede vale non soltanto per $r > 1$, caso in cui f possiede propriamente una cuspidine (ramo d'ordine ≥ 2), ma anche per $r=1$; nel qual caso la $y = kx^2$ diviene la parabola osculatrice ad f . Avuto riguardo a ciò, la curva osculatrice ad f : $y^r = kx^{r+1}$, nel caso $r > 1$, si potrà designare come *iperparabola osculatrice* al ramo cuspidale di f .

Un significato diverso dalle parabole e iperparabole osculatrici, capaci di approssimare un ramo di f , hanno le *curve approssimanti alla f* che vengono definite dal complesso dei termini di un certo grado (assai basso) figuranti nell'equazione

$$f(xy) = u_r(xy) + u_{r+1}(xy) + \dots + u_n = 0.$$

La prima curva approssimante o approssimante d'ordine r : $u_r = 0$, è costituita dall'insieme delle tangenti principali ad f nel punto r -plo O , e porge — come sappiamo —

un'approssimazione della curva nell'intorno di O , a meno di infinitesimi d'ordine > 1 .

La *seconda curva approssimante*, d'ordine $r+1$: $u_r + u_{r+1} = 0$, si lascia definire mercè la seguente proprietà caratteristica: la detta curva, completata colla retta all'infinito contata $n - (r+1)$ volte, determina con f un fascio contenente una curva che possiede in O un punto $(r+2)$ -plo.

In modo analogo si può definire la curva *approssimante* $(i+1)$ -ma:

$$u_r + u_{r+1} + \dots + u_{r+i} = 0,$$

per $i = 2, 3, \dots$.

Le curve approssimanti ad f in un punto r -plo O , all'infuori della prima ($u_r = 0$) non sono definite come « covarianti (proiettivi) di f », dipendendo anche — come si è detto — dalla *retta all'infinito* del piano. Tuttavia appare dalla definizione data che: le curve approssimanti ad f nell'intorno del punto r -plo O , non dipendono dall'orientazione dei due assi coordinati per O , cioè possono dirsi « *covarianti rispetto a rotazioni degli assi per O* ». Ciò si rende manifesto anche dall'osservazione che una sostituzione lineare omogenea su x, y muta l'equazione

$$u_r + u_{r+1} + \dots + u_n = 0,$$

in un'altra

$$\bar{u}_r + \bar{u}_{r+1} + \dots + \bar{u}_n = 0,$$

dove \bar{u}_{r+i} è la forma trasformata di u_{r+i} .

Ora l'importanza delle curve approssimanti nella teoria delle intersezioni delle curve algebriche, risulta dal seguente

Teorema. *Se la curva $f = u_r + u_{r+1} + \dots + u_n = 0$, possiede nel punto O un punto r -plo ordinario, le parabole e iperparabole osculatrici ai suoi rami sono ugualmente definite rispetto alla seconda approssimante*

$$u_r + u_{r+1} = 0.$$

Per dimostrare l'asserto si consideri un ramo di f (d'ordine $\nu \geq 1$) tangente alla retta $y = zx$; poichè u_r contiene il fattore $(y - zx)^\nu$, vi è un ramo dello stesso ordine tangente alla medesima retta, che appartiene alla curva $u_r + u_{r+1} = 0$; basta provare che i due rami nominati — che designeremo

con f_1, φ_1 — hanno fra loro $\xi > v^2 + v$ intersezioni assorbite in O . Ora f_1 , intersecato coi rami di $u_r + u_{r+1} = 0$ diversi da φ_1 , dà luogo ad $v(r - v)$ intersezioni assorbite in O ; per ottenere le ξ intersezioni di f_1 con φ_1 , basta determinare le intersezioni di f_1 con $u_r + u_{r+1} = 0$; ma a questa curva si può sostituire la

$$f - (u_r + u_{r+1}) = u_{r+2} + \dots + u_n = 0,$$

che sega f_1 in (almeno) $v(r + 2)$ punti assorbiti in O ; si deduce quindi

$$\begin{aligned} v(r + 2) &= \xi + v(r - v), \\ \xi &= v^2 + 2v > v^2 + v \end{aligned} \quad \text{c. d. d.}$$

Allo stesso risultato si arriva effettuando una rotazione degli assi coordinati in guisa che la tangente al ramo f_1 divenga $y = 0$, e tenuto conto che le curve approssimanti sono invarianti rispetto alle sostituzioni lineari omogenee su x, y . Si avrà allora

$$u_r = a_{r-v, v} x^{r-v} y^v + a_{r-v-1, v+1} x^{r-v-1} y^{v+1} + \dots + a_{0r} y^r,$$

$$u_{r+1} = a_{r+1, 0} x^{r+1} + a_{r, 1} x^r y + \dots + a_{0, r+1} y^{r+1}$$

e poichè, sul ramo f_1 , y è infinitesimo d'ordine superiore ad x , dall'equazione $f = 0$ si ricava, a meno di infinitesimi d'ordine superiore:

$$a_{r-v, v} x^{r-v} y^v + a_{r+1, 0} x^{r+1} = 0,$$

sicchè la costante caratteristica di f_1 vale

$$\lim_{x=0} \frac{y^v}{x^{v+1}} = - \frac{a_{r+1, 0}}{a_{r-v, v}}.$$

Osserveremo infine come dal teorema dimostrato risulti che « per accertare il contatto semplice dei rami di due curve

$$u_r + u_{r+1} + \dots + u_n = 0$$

$$u_s + u_{s+1} + \dots + u_m = 0,$$

basta accertare il contatto semplice delle curve approssimanti

$$u_r + u_{r+1} = 0, \quad u_s + u_{s+1} = 0 \text{ »}.$$

A questa conseguenza si può anche pervenire valutando la molteplicità della radice $x=0$ per l'equazione risultante, scritta col metodo di SYLVESTER; il che può effettuarsi con un procedimento di VOSS (Math. Annalen, t. 27, 1886) che il SEGRE ⁽¹⁾ ha richiamato e applicato nelle questioni d'intersezione di due curve.

13. Complemento alla storia del teorema di Bézout: dimostrazioni geometriche. — Per verità i metodi algebrici diretti, che porgono la formazione del resultante, costituiscono la via maestra per trattare il problema delle intersezioni di due curve piane e per calcolare il numero delle intersezioni assorbite in un punto. Ma accanto a quei metodi conviene pur segnalare i metodi geometrici, anche in vista delle generalizzazioni che vi si connettono.

1) *Dimostrazione basata sulla degenerazione d'una curva.* Il numero delle intersezioni di una curva d'ordine m e d'una curva d'ordine n (giacenti in un piano) si trova essere uguale al prodotto mn , facendo variare con continuità una delle due curve fino a che essa degeneri in un gruppo di rette.

Questo ragionamento a cui in sostanza ricorre il CREMONA nel n. 32 della sua « Introduzione » (Cfr. Opere, t. I, pag. 347), deve essere riattaccato al *principio di continuità* di PONCELET (cfr. il cap. IV).

2) *Dimostrazione di Poncelet.* PONCELET (« Analyse des transversales », 1831) ⁽²⁾ ha indicato una interessante dimostrazione del teorema di BÉZOUT, che si può riguardare come diretta interpretazione del resultante di $f(xy) = f(y) = 0$ e $\varphi(xy) = \varphi(y) = 0$, espresso come prodotto delle differenze delle radici. Si consideri un fascio di rette parallele, p. es. le parallele all'asse y , e su ciascuna di queste si riportino in grandezza e segno, a partire dall'asse x , le mn distanze fra i punti intersezioni della retta con f e φ (m e n designano

(1) Giornale di Matematiche, t. 36.

(2) Journal für Math., Bd. 8. Cfr. « Traité des propriétés projectives », t. II, (1886), n. 240, pag. 223.

i rispettivi ordini delle due curve che si suppongono non passare per il punto all'infinito, O , dell'asse y); gli estremi dei segmenti così definiti descrivono una *curva*, che PONCELET denomina « *derivata* di f e φ ».

L'ordine di questa curva derivata si ottiene osservando che essa non contiene O ed è segata da una retta per O (parallela all'asse y) precisamente in mn punti. Ora le mn intersezioni della suddetta curva all'asse x corrispondono alle mn intersezioni di f e φ .

Si noti che la curva derivata di PONCELET permette ancora di riconoscere che « un punto r -plo per f ed s -plo per φ , con tangenti diverse, assorbe rs intersezioni delle due curve ». Per ciò è sufficiente osservare che in tale ipotesi la curva derivata avrà sull'asse un punto di molteplicità rs senza esservi tangente; si riconosce anche come la molteplicità d'intersezione aumenti quando vi è un contatto fra i rami delle due curve.

3) *Dimostrazione di Chasles col principio di corrispondenza* (1872): cfr. L. 2°, § 13.

14. **Nota sulla teoria generale della eliminazione e sulle intersezioni delle varietà algebriche.** — La teoria della eliminazione si estende al caso di più equazioni contenenti più variabili, ma questa estensione dà luogo a una difficoltà che conviene prendere in esame.

Osserviamo anzitutto come si risolva il problema di determinare le soluzioni comuni a due equazioni in tre variabili

$$f(xyz) = 0, \quad \varphi(xyz) = 0,$$

cioè la *curva gobba intersezione delle due superficie* f e φ . Il problema si riduce alle considerazioni svolte nel precedente paragrafo in uno dei due modi che segue:

1) Consideriamo f e φ come funzioni della sola z , e calcoliamo quindi il loro resultante che sarà funzione razionale di x, y :

$$R = R(xy);$$

l'equazione $R(xy) = 0$ rappresenta la proiezione sul piano (xy) della curva gobba $f = \varphi = 0$; codesta curva R viene in generale d'ordine mn , designando con m e n gli ordini di f e φ ,

e ad ogni suo punto generico corrisponde un punto comune alle due superficie. Casi di eccezione si presentano solo in rapporto a particolari posizioni degli assi: quando le due superficie contengono il punto all'infinito all'asse z l'ordine di R si abbassa; quando la curva R o una sua parte risulti una curva doppia (o multipla) ogni suo punto è proiezione di due (o più) punti della curva comune ad f e φ (distinti o no).

In conclusione: *due superficie d'ordini m, n hanno comune una curva d'ordine mn* , che eventualmente può contenere una curva di contatto, oppure una curva multipla per una o per ambedue le superficie, da contarsi più volte.

2) Il metodo precedente estende direttamente quello adoperato per la ricerca delle intersezioni di due curve piane; possiamo invece ridurre direttamente al risultato di codesta ricerca seguendo la via che MONGE (1795) ha indicato per la costruzione grafica delle intersezioni di due superficie.

Si ponga nelle equazioni di f e φ

$$z = ax + by + c$$

con a, b, c costanti generiche (di regola si potrà prendere semplicemente $z = c$), si ottengono allora in un piano due curve d'ordini m, n che hanno mn intersezioni; risulta così mn l'ordine della curva gobba comune alle due superficie.

Ora passiamo a determinare le *intersezioni di tre superficie*

$$f(xyz) = 0, \quad \varphi(xyz) = 0, \quad \psi(xyz) = 0$$

d'ordini m, n, p , supponendo che esse non abbiano una curva comune.

Il primo metodo che si presenta alla mente, come generalizzazione di quello seguito per due curve piane, consiste nel considerare $f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$, come equazioni in z , determinando quindi le equazioni risultanti

$$R(f\varphi) = R_p(xy) = 0$$

$$R(\varphi\psi) = R_m(xy) = 0;$$

eliminando y fra queste equazioni si otterrà una equazione in x : $R(R_p R_m) = R_{pm}(x) = 0$, che dovrà necessariamente essere soddisfatta nei punti comuni alle f, φ, ψ . Ma codesta

equazione $R_{pm}(x) = 0$, che è del grado $mn \cdot np = mn^2p$, contiene anche delle soluzioni estranee, come ebbe a riconoscere BÉZOUT (1779), il quale sembra per primo aver determinato il numero delle intersezioni di tre superficie.

Il significato di tali soluzioni estranee si rende chiaro dal punto di vista geometrico; infatti le curve

$$R_p(xy) = 0 \quad \text{e} \quad R_n(xy) = 0$$

sono le proiezioni ortogonali sul piano (xy) delle due curve gobbe $(f\varphi)$ e $(\varphi\psi)$; ora un punto comune ad R_p , R_n , proviene non soltanto da un punto comune alle due curve gobbe $(f\varphi)$ e $(\varphi\psi)$, ma anche da due punti appartenenti rispettivamente a queste curve che si trovino sopra una parallela all'asse z .

Per scartare le soluzioni estranee della $R_{pm}(x) = 0$, che non corrispondono a intersezioni delle f , φ , ψ , occorre considerare accanto alle curve R_p , R_n , anche la $R_n(xy) = R(f\psi) = 0$ che passa per una parte soltanto dei punti comuni alle prime due e precisamente per quelli che convengono al nostro problema (escluse soltanto particolari posizioni degli assi). Ora i punti comuni alle tre curve predette verranno dati annullando il massimo comun divisore $D(x)$ dei polinomi

$$R_{pm}(x) \quad \text{e} \quad R_{nn}(x) = R(R_n R_n).$$

Per valutare il grado di D e quindi il numero dei punti comuni alle tre superficie f , φ , ψ , si hanno vari metodi che porgono così diverse dimostrazioni del

Teorema di BÉZOUT: *Tre superficie degli ordini m , n , p non aventi in comune una curva, posseggono mnp intersezioni (distinte o no).*

I) BÉZOUT cerca di determinare tre polinomi $f_1(xyz)$, $\varphi_1(xyz)$, $\psi_1(xyz)$, per modo che

$$f_1 f + \varphi_1 \varphi + \psi_1 \psi$$

risulti indipendente da y , z ; ciò conduce alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari che si trovano in numero sufficiente quando si prendano f_1 , φ_1 , ψ_1 rispettivamente di grado $mnp - m$, $mnp - n$, $mnp - p$.

La funzione di grado mnp della x

$$f_1 f + \varphi_1 \varphi + \psi_1 \psi,$$

così determinata, si annulla evidentemente nei punti per cui $f = \varphi = \psi = 0$; ma la dimostrazione che reciprocamente ogni radice di essa corrisponde in generale a un punto comune alle tre superficie, esige un esame assai delicato che è stato portato a compimento rigoroso soltanto in tempi recenti, da SCHMIDT (1886). Aggiungasi che il polinomio $D(x)$, costruito — come sopra è detto — quale fattore comune delle due resultanti R_{pm} , R_{mn} , si può facilmente porre sotto la forma

$$D(x) = f_1 f + \varphi_1 \varphi + \psi_1 \psi \quad (1).$$

II) Il metodo di EULERO-CRAMER, esposto nel precedente paragrafo, opportunamente esteso da POISSON (1799) permette di determinare la condizione necessaria e sufficiente perchè tre equazioni fra due variabili

$$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy) = 0$$

abbiano un punto-radice comune. A tale scopo si considerino i punti $(x_i y_i)$ comuni alle curve f e φ e si costruisca il prodotto

$$\prod_i \psi(x_i y_i).$$

Questo essendo una funzione simmetrica delle radici della resultante $R(f\varphi)$ (costruita rispetto ad x o a y) sarà anche una funzione razionale dei coefficienti di f e φ ; il suo annullarsi dà evidentemente la condizione necessaria e sufficiente perchè le tre curve f , φ , ψ passino per un medesimo punto, e tale condizione verrà definita come « *equazione risultante* » delle $f(xy) = 0$, $\varphi(xy) = 0$, $\psi(xy) = 0$.

Se le f , φ , ψ sono di grado rispettivo m , n , p , l'equazione risultante predetta trovasi essere di grado mn nei coefficienti di ψ ; ma poichè la sua definizione è simmetrica rispetto ad f , φ , ψ , si deduce che il suo grado rispetto ai coefficienti di f vale np e rispetto a quelli di φ vale mp . Ciò che occorre

(1) Cfr. per es. CAPELLI. « Istituzioni », n. 1025, pag. 557.

richiamare a tale scopo è soltanto che un'equazione algebrica fra più variabili ridotta a forma intera resta definita dai suoi zeri a meno di un fattore numerico. (Cfr. L. 1°, § 2, pag. 11).

Ora se sono date tre equazioni di grado m, n, p fra tre variabili

$$f(xyz) = 0, \quad \varphi(xyz) = 0, \quad \psi(xyz) = 0,$$

formiamo la loro resultante riguardandole come equazioni in y, z ; questa resultante contenendo i coefficienti di f, φ, ψ , ai gradi np, mp, mn , sarà, in generale, di grado mnp rispetto ad x ; dal che segue il teorema di BÉZOUT.

Giova anche notare che la indicata resultante di f, φ, ψ , rispetto ad x , coincide colla $D(x) = 0$ definita, cercando il massimo comun divisore di $R_{pm}(x)$ e $R_{mn}(x)$, come sopra è detto.

III) Ai metodi precedenti debbono aggiungersi i metodi geometrici che conducono a determinare in modo più generale le intersezioni di una curva gobba con una superficie.

È una circostanza degna di rilievo che la concezione geometrica dei problemi algebrici conduce spesso ad una posizione nuova e più generale di essi, così come la considerazione fisica suggerisce un più largo modo di porre e trattare i problemi delle equazioni differenziali (ciò che POINCARÉ ha avuto luogo di mettere in luce, in maniera particolarmente efficace e suggestiva).

La ricerca delle intersezioni di tre superficie f, φ, ψ si riduce alla ricerca dei punti comuni alla curva $(f\varphi)$ — intersezione delle prime due superficie — colla superficie ψ . Ma questo problema, considerato sotto l'aspetto geometrico, rientra in quello più generale d'intersecare una curva gobba con una superficie; la pura Algebra attinge più tardi dalla Geometria la visione di questo problema ove sono date più equazioni in tre variabili aventi una semplice infinità di soluzioni comuni, alle quali si aggiunge una nuova equazione indipendente.

Ora il teorema di BÉZOUT risulta come corollario del seguente

Teorema: *Una curva (algebraica) gobba d'ordine n e una superficie (algebraica) d'ordine m (che non contenga la curva o una sua parte) hanno mn punti comuni.*

In questo enunciato figura l'ordine della curva gobba che

si definisce come numero delle intersezioni della curva con un piano generico ⁽¹⁾: questo numero non cambia al variare del piano, eccetto il caso che la curva contenga come parte una linea giacente in esso. Infatti prendendo su un piano due centri di proiezione generici A e B , si ottengono due coni proiettanti la curva il cui ordine equivale al numero delle intersezioni di essa col dato piano; segue da ciò che tutti i coni proiettanti la curva da punti esterni sono del medesimo ordine, e quindi ecc.

Ora del teorema sopra enunciato ricordiamo le più notevoli dimostrazioni.

a) *Dimostrazione basata sulla degenerazione della superficie in m piani.*

Allo stesso modo che la dimostrazione analoga per il caso di due curve piane (notata nel precedente paragrafo) questa dimostrazione ha come presupposto il principio di continuità di PONCELET; il SALMON vi ricorre nel suo Trattato sulla Geometria analitica dello spazio (n. 331), e così sostanzialmente il CREMONA nel n. 21 dei suoi « Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie » ⁽²⁾.

Giova notare che al ragionamento precedente si può dare immediatamente forma rigorosa nel caso cui si riferisce il teorema di BÉZOUT, ove si tratta delle intersezioni di tre superficie $f(xyz) = 0$, $\varphi(xyz) = 0$, $\psi(xyz) = 0$, giacchè a tal uopo basta conoscere l'esistenza dell'equazione (resultante) $D(x) = 0$, definita, come si è detto in principio, quale fattore comune delle due resultanti $R_{pm}(x)$ e $R_{mn}(x)$. Così appunto, per valutare il grado di $D(x)$, procede il CAPELLI nelle sue « Istituzioni » (n. 1026, pag. 578), traducendo in forma algebrica il concetto della degenerazione di una superficie in piani.

b) *Dimostrazione di PONCELET (1831) ⁽³⁾, estensione dell'analoga per le curve piane.* La curva derivata di una curva gobba d'ordine n e di una superficie d'ordine m si costruisce appunto, come nell'analogo problema piano (cfr. § 13), in rapporto ad una stella di rette parallele e ad un piano fisso secante; essa riesce parimente d'ordine mn e le sue mn inter-

⁽¹⁾ Cfr. per es. ENRIQUES. « Geometria Descrittiva », Parte II, § 21.

⁽²⁾ Acc. di Bologna, 1865-67. Cfr. Opere, t. II, pag. 303.

⁽³⁾ L. c., n. 241; « Traité », t. II, pag. 224.

sezioni col detto piano forniscono le intersezioni della superficie e della curva date.

Alla dimostrazione di PONCELET, che sembra esser stata dimenticata dai geometri, si può dar forma proiettiva; ci soffermeremo un momento su questa traduzione, in vista di ulteriori generalizzazioni di cui faremo cenno più avanti. Per semplicità di discorso supporremo dato il teorema di BÉZOUT nel piano, da cui segue che due superficie d'ordine m , n hanno comune una curva d'ordine mn .

Sia f una superficie d'ordine m e C una curva d'ordine n , la quale venga proiettata da un punto generico secondo un cono φ dello stesso ordine. Le superficie f e φ avranno comune una curva K d'ordine mn , di cui debbonsi determinare le intersezioni con C . A tale scopo, poichè C e K giacciono sullo stesso cono φ , eseguiremo una trasformazione biunivoca sopra il cono, che sostituirà alla curva C una sezione piana (arbitrariamente scelta) C' del cono φ (non passante per il vertice) e alla curva K una curva K' del medesimo ordine mn .

L'accennata trasformazione sopra φ si può definire come segue: una generatrice del cono incontra C e C' in due punti A e A' che sono sempre distinti dal vertice O ; si può quindi determinare sulla retta una proiettività in cui O sia punto unito ed A, A' punti omologhi, bastando aggiungere per es. la condizione che la proiettività stessa sia parabolica (PONCELET) oppure che sia involutoria; al variare della generatrice si ottiene una trasformazione biunivoca del cono in se stesso. Siccome la curva K' omologa a K non passa per O , ed è intersecata da un piano per O — come K — in mn punti, segue che essa è pure d'ordine mn . (Per prevenire possibili obiezioni si noti che la trasformazione indicata subordina due proiettività non degeneri sopra una corda di C per O , che è generatrice doppia del cono φ).

c) *Dimostrazione col principio di corrispondenza* (cfr. L. 2°, § 13) che FOURET dette per il caso delle intersezioni di tre superficie (5 marzo 1873) e che riconobbe poi valere in generale per le intersezioni di una curva gobba con una superficie (9 luglio 1873).

d) *Dimostrazione di HALPHEN* ⁽¹⁾ (25 giugno 1873) basata sulla rappresentazione monoidale delle curve gobbe.

(1) Bulletin de la Soc. Math., t. 2, pag. 34.

Si consideri dapprima la curva gobba C , intersezione completa delle due superficie d'ordine m , n :

$$z - f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0$$

(la prima è un *monoide* cioè una superficie — d'ordine m — dotata di un punto $(m - 1)$ -plo, la seconda è un cono col vertice in quel punto); le intersezioni di codesta curva gobba con la superficie d'ordine p

$$\psi(xyz) = 0,$$

si determinano come segue: sostituendo, in ψ , $z = f(xy)$ e facendo sistema delle due equazioni

$$\varphi(xy) = 0, \quad \psi(xy, f(xy)) = 0,$$

si trovano mnp punti, che corrispondono ad altrettante intersezioni della curva C con la superficie ψ .

Ora non accade sempre che una curva gobba C sia intersezione completa di un monoide e di un cono avente il suo vertice nel punto multiplo di quello, ma CAYLEY ⁽¹⁾, (1862) ha osservato che ogni curva gobba C d'ordine n può sempre ottenersi come intersezione parziale di un cono dello stesso ordine avente il vertice in un punto qualunque dello spazio e di un monoide d'un certo ordine m avente quel punto come $(m - 1)$ -plo, i quali avranno comune — oltre C — soltanto un gruppo di $(m - 1)n$ rette; allora togliendo le intersezioni di queste con la superficie ψ , si otterranno le np intersezioni di ψ con C .

I procedimenti algebrici che concernono l'eliminazione di due variabili fra tre equazioni, si estendono senz'altro al caso in cui si tratti di eliminare $n - 1$ variabili fra n equazioni, e conducono così alla diretta generalizzazione del teorema di BÉZOUT.

Date n equazioni fra n variabili, degli ordini $m_1 m_2 \dots m_n$, le quali non posseggano infinite soluzioni comuni, vi sono $m_1 m_2 \dots m_n$ punti-radici che le soddisfano simultaneamente.

(1) Comptes Rendus, t. 54, pag. 55.



Ma, come sopra abbiamo notato, la concezione geometrica allarga la posizione del problema; si è quindi condotti a cercare in generale le intersezioni di due o più varietà algebriche aventi diverse dimensioni e contenute in un medesimo spazio S_n .

Occorre naturalmente conoscere l'ordine di ciascuna varietà, designandosi come ordine di una varietà V_r , ad r dimensioni in S_n il numero delle intersezioni di V_r con un S_{n-r} , generico. Si prova che questo numero è costante al variare dello S_{n-r} , tranne il caso in cui tale spazio incontri la varietà secondo una curva, superficie ecc.. Vale a tal uopo lo stesso ragionamento adoperato innanzi per le curve gobbe, che si estende induttivamente da $n - 1$ a n . L'ipotesi che il teorema sia dimostrato per lo S_{n-1} porta ad assumere, come è noto, che un cono (di prima specie) V_{r+1} di S_n sia intersecato da un S_{n-r} , per il suo vertice secondo un numero di generatrici (uguale all'ordine del cono) che rimane costante al variare dello S_{n-r} , almeno finchè resti finito. Ora proiettando una V_r da due punti di un S_{n-r} si hanno due coni algebrici (L. 1°, § 23) i quali segano lo S_{n-r} secondo due gruppi di generatrici congiungenti le intersezioni di V_r con lo S_{n-r} ; i due gruppi contengono lo stesso numero di generatrici e perciò il cono proiettante V_r da un punto esterno qualsiasi ha un ordine costante, che designa anche il numero costante delle intersezioni di V_r con un S_{n-r} (che non abbia con esso a comune una linea o varietà).

Il problema generale che sopra abbiamo posto riceve risposta dal seguente:

TEOREMA FONDAMENTALE SULLE INTERSEZIONI DI DUE VARIETÀ ALGEBRICHE: *Due varietà (algebriche) V_r^m , V_{n-r}^p di dimensioni r e $n - r$ e di ordini m e p , hanno in generale mp intersezioni; fa eccezione il caso in cui esse abbiano a comune una linea o varietà più estesa.*

Dal teorema fondamentale segue che una V_r^m e una V_s^p dove $r + s > n$, hanno in generale a comune una V_{r+s-n}^{mp} ecc.

La dimostrazione del teorema fondamentale anzidetto riesce una immediata estensione di quella relativa al caso di una curva gobba e di una superficie, finchè si tratta d'intersecare una curva V_1^m e una ipersuperficie V_{n-1}^p di S_n . Ma già nel caso di due superficie V_2^m e V_2^p di S_4 , l'esten-

sione sembra dar luogo a nuove difficoltà. Così p. es. il metodo di degenerazione non è applicabile, ove non sia risolta prima la questione, assai delicata, se una superficie di S_4 possa sempre ridursi per continuità a un sistema di piani.

In ordine storico la prima dimostrazione generale del teorema fondamentale è stata fornita da HALPHEN (l. c., 1873) e — in modo più completo — da NÖTHIER ⁽¹⁾ (1877) estendendo la rappresentazione monoidale delle curve gobbe. Più tardi (1888) il PIERI ⁽²⁾ ha esteso le dimostrazioni di CHASLES e FOURET basate sul principio di corrispondenza, facendo uso del *principio di corrispondenza generalizzato* a forme lineari di più dimensioni ⁽³⁾.

Ma la più semplice dimostrazione del nostro teorema fondamentale si ottiene estendendo la dimostrazione data — per $r = 1$, $n = 3$ — da PONCELET ⁽⁴⁾. A tale scopo ci riferiremo alla forma modificata che sopra abbiamo esposto, e procederemo per induzione completa come segue:

Pongasi che il teorema fondamentale sia stabilito per una V_r^m e una V_{n-1-r}^p di S_{n-1} , e perciò si sappia che una V_{r+1}^m e una V_{n-r}^p di S_n hanno generalmente a comune una curva gobba d'ordine mp (segata da un S_{r-1} in mp punti).

Ciò posto sieno date in S_n una V_r^m e una V_{n-r}^p non aventi comune una curva. Si proietti la V_r^m da un punto generico O secondo un cono V_{r+1}^m . Questo sarà segato dalla V_{n-r}^p secondo una curva K d'ordine mp , di cui occorre trovare le intersezioni con V_r^m .

A tal uopo si porrà sul cono V_{r+1}^m una trasformazione che muti V_r^m in una sezione iperpiana \bar{V}_r^m e K in una curva \bar{K} ,

⁽¹⁾ Math. Annalen, Bd. 11, pag. 570.

⁽²⁾ Giornale di Mat. di Napoli, vol. 26, pag. 251.

⁽³⁾ « Una corrispondenza $[m, m']$ in uno spazio S_r possiede in generale $m + m' + \sum n_i$ punti uniti, n_i designando l'ordine della varietà V_i corrispondente ad un S_i ». Questa estensione del principio di corrispondenza si riattacca anzitutto a SALMON (Treatise on Analytic Geometry of three dimensions, 2^a ed., 1865, pag. 511); CAPORALI e PIERI (Rendic. Lincei, Marzo 1887) han trattato il caso più generale. La formula relativa al piano è stata anche completata da ZEUTHEN. (Comptes rendus, Giugno, 1874) pel caso in cui esista una curva di punti uniti.

⁽⁴⁾ Cfr. ENRIQUES: Rendic. Acc. Bologna, 1915.

non passante pel vertice del cono, e quindi dello stesso ordine mp . Una siffatta trasformazione si definisce per mezzo di una proiettività sopra ogni generatrice del cono V_{r+1}^m , fissando che il vertice O sia unito e che si corrispondano le intersezioni della retta con V_r^m , \overline{V}_r^m ; a tali condizioni basta aggiungere che la proiettività anzidetta sia parabolica o involutoria.

15. Classe d'una curva: abbassamento prodotto da un punto doppio o multiplo. — Nel seguito *escluderemo le curve dotate di parti multiple*, e porremo via via alcune restrizioni in rapporto alle singolarità di cui esse si suppongono dotate.

Si abbia una curva f d'ordine n , dotata di singolarità elementari: ε nodi e k cuspidi ordinarie.

Valutiamo la classe, m , di f . A tale scopo occorre intersecare f colla polare d'un punto generico O ; questa polare, φ , ha l'ordine $n - 1$ e le sue intersezioni con f , fuori dei punti doppi, sono i punti di contatto delle m tangenti ad f condotte per O . Ora φ passa semplicemente per un nodo di f , avendo ivi una tangente (variabile) diversa dalle tangenti principali di f ; inoltre φ passa semplicemente per ogni cuspidale di f toccando la tangente cuspidale (§ 4); le intersezioni di f e φ assorbite nel nodo sono dunque 2, e quelle assorbite nella cuspidale sono 3 (§ 12, criterio 7), sicchè *sussiste la relazione*

$$1) \quad m = n(n - 1) - 2\varepsilon - 3k.$$

La quale si può anche esprimere dicendo: *La classe d'una curva generale d'ordine n vale $n(n - 1)$; ogni nodo abbassa la classe di 2 e ogni cuspidale ordinaria di 3.*

Dalla 1) deduciamo per dualità una relazione ove figurano le singolarità tangenziali della curva.

Si è già accennato (L. 1°, § 11; cfr. anche L. 2°, § 19) che al punto doppio corrisponde per dualità la tangente doppia e precisamente: al nodo la tangente doppia propriamente detta a contatti distinti, ed alla cuspidale la tangente di flesso. Ora notiamo che la polarità permette di precisare queste osservazioni (in modo anche più evidente che le considerazioni del L. 2°, § 19):

1) La tangente doppia corrispondente per dualità a un nodo è una retta che tocca la curva in due punti semplici,

salvo il caso che una tangente principale del nodo sia anche tangente altrove oppure tangente di flesso del relativo ramo. Infatti, nelle condizioni anzidette, se si sceglie O sopra una tangente principale del nodo, la polare di O tocca semplicemente il ramo del nodo, e si vede quindi che la nominata tangente principale conta una volta sola fra le tangenti alla curva per O .

2) Ad una cuspidale ordinaria corrisponde per dualità una tangente di flesso ordinaria, avente contatto tripunto in un punto semplice, escluso il caso che la nominata tangente cuspidale tocchi altrove la relativa curva. Infatti nelle condizioni anzidette, preso O in un punto generico della tangente cuspidale, la sua polare ha nella cuspidale un punto doppio con tangenti diverse dalla tangente cuspidale, dove si assorbono 4 anzichè 3 intersezioni della polare stessa con la curva.

Supponiamo che la curva f , riguardata come involuppo, possieda parimente singolarità tangenziali elementari: τ tangenti doppie (a contatti distinti) e i tangenti di flesso (ordinarie).

Sussisterà la relazione duale della 1):

$$2) \quad n = m(m - 1) - 2\tau - 3i.$$

Nel caso delle cubiche, essendo

$$n = 3, \quad \tau = 0,$$

si deduce

$$3i = m(m - 1) - n;$$

e, per le *cubiche irriducibili*, si hanno i seguenti casi:

$$n = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = k = 0, \quad m = 6, \quad i = 9 \\ \delta = 1, \quad k = 0, \quad m = 4; \quad i = 3 \\ \delta = 0, \quad k = 1, \quad m = 3, \quad i = 1. \end{array} \right.$$

Aggiungasi che: *i flessi di una cubica irriducibile* (indicati nel quadro che precede) *sono sempre distinti fra loro e distinti dall'eventuale punto doppio* (nodo o cuspidale).

Infatti si esclude la possibilità che due flessi della cubica coincidano in un punto semplice, osservando che questo sarebbe un punto di contatto della hessiana e però un punto ove la tangente ha contatto quadripunto (§ 7). Si esclude *a priori* che un flesso possa sovrapporsi ad un punto doppio

(senza bisogno di esaminare il comportamento della hessiana, che analizzeremo più avanti); basta osservare che, ove una tangente di flesso venisse a sovrapporsi ad una tangente principale della cubica nel punto doppio, questa retta avrebbe quattro intersezioni colla cubica e però se ne staccerebbe.

Le formole 1), 2) si possono estendere al caso in cui la curva f possieda singolarità più elevate. Limitiamoci al caso di un punto r -plo ordinario O ($r > 2$): la curva f conterà, in generale, di s ($\leq r$) rami per O , degli ordini $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s$, e contando ν_i volte la tangente all' i -mo ramo si otterrà il gruppo delle r tangenti principali ad f in O ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s = r$).

Allora la polare di un punto generico rispetto ad f possiederà in O un punto $(r-1)$ -plo, e nel gruppo delle sue tangenti principali figurerà $\nu_i - 1$ volte la tangente ad un ramo d'ordine $\nu_i > 1$ di f , giacchè le tangenti principali della curva polare costituiscono il gruppo polare rispetto alle tangenti principali di f (§ 4).

Così ad ogni ramo cuspidale d'ordine $\nu_i (> 1)$ di f , corrisponde un ramo cuspidale d'ordine $\nu_i - 1$ della polare (non escluso il caso di degenerazione in rami d'ordine inferiore). Si deduce (§ 12, criterii 8) e 10)) che il numero delle intersezioni di f con una sua polare generica, assorbite in O , vale

$$r(r-1) + \Sigma(\nu_i - 1) = r(r-1) + (r-s):$$

Un punto r -plo ordinario con s ($\leq r$) tangenti principali distinte, abbassa la classe della curva di $r(r-1) + (r-s)$, cioè equivale nella formula 1) ad $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r-s$ cuspidi.

Correlativamente: una tangente r -pla di f , con s contatti distinti, equivale, agli effetti della formula 2), ad $\frac{r(r-1)}{2}$ tangenti doppie, fra cui $r-s$ tangenti di flesso.

Il concetto di riguardare un punto multiplo di una curva come equivalente ad un certo numero di punti doppi, agli effetti delle relazioni fra i caratteri della curva, appartiene al CAYLEY (¹); esso può essere illustrato mercè semplici considerazioni di limite.

(¹) Quarterly Journal, t. 7.

Cominciamo dal caso più semplice dimostrando che:

Un punto r -plo, a tangenti distinte, si può riguardare come limite di $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi.

Questa proposizione ha carattere intuitivo, quando ci si riferisca a una curva f con r rami reali passanti per un punto O : basta invero spostare di poco codesti rami, perchè essi — in luogo di passare per un medesimo punto — s'incontrino a due a due in $\frac{r(r-1)}{2}$ punti. Questa operazione si può tradurre analiticamente come segue: si consideri un ramo della curva f , rappresentato dallo sviluppo in serie

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots;$$

cambiamo questo ramo in

$$y = \varepsilon + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

dove ε è sufficientemente piccolo; in tal guisa si fa subire al ramo stesso una piccola traslazione.

Operando analogamente sui vari rami, ed escludendo relazioni particolari fra gli ε , resta definita, *in senso differenziale*, cioè nell'intorno del punto O , una curva formata di r rami, o elementi, vicini ai rami di f e intersecantisi a due a due in $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi. Questa curva, \bar{f} , ha per limite f , e la sua considerazione vale a farci riconoscere come il punto r -plo O abbassi la classe di $n(n-1)$ unità, ciò che ha ricevuto innanzi una dimostrazione diretta.

Ora giova osservare che la curva \bar{f} , dotata di $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi tendenti al punto r -plo O , è stata definita soltanto in senso differenziale; ove si consideri la \bar{f} *in senso integrale*, mercè la continuazione analitica delle funzioni che la determinano, si ha invero una curva d'ordine rn (formata da r curve traslate di f) che possiede altri punti doppi e anche r punti r -pli. Sorge quindi la questione di dimostrare che:

Una curva f , dotata di un punto r -plo O a tangenti distinte, può riguardarsi come limite di una curva algebrica dello stesso ordine possedente $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi che vadano a confluire in O .

A tale scopo si consideri il sistema (non lineare) $\}f\{$ costituito dalla totalità delle curve d'ordine n che posseggono un punto r -plo; tenuto conto delle due costanti arbitrarie da cui dipende la posizione del punto, la dimensione del sistema è:

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} + 2,$$

e quindi, per $r > 2$, è minore della dimensione del sistema $\} \varphi \{$ costituito dalla totalità delle curve d'ordine n con $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, poichè quest'ultima dimensione vale

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{r(r-1)}{2}$$

(o risulterebbe superiore al detto numero ove qualche punto doppio fosse conseguenza dei rimanenti). Ora si potrà affermare che una f è limite di curve φ , ove si faccia vedere che il sistema $\}f\{$ è contenuto in $\} \varphi \{$, ossia che le condizioni algebriche per l'esistenza di un punto r -plo per una curva d'ordine n rientrano come caso particolare nelle condizioni per l'esistenza di $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi.

Per vedere la cosa con la massima chiarezza e precisione sotto forma geometrica ⁽¹⁾, ed anche in vista degli sviluppi che seguiranno, facciamo una trasformazione per dualità, continuando a chiamare f e φ le curve duali delle precedenti: si verifica che una tangente r -pla o deve contarsi per $\frac{r(r-1)}{2}$ tangenti doppie sovrapposte, osservando che con gli r punti di contatto si possono formare $\frac{r(r-1)}{2}$ coppie, ciascuna delle quali è coppia di punti di contatto di una bitangente che coincide con la o .

Ora se la tangente r -pla o della curva f non è a contatti distinti, ma possiede per es. un contatto d'ordine ν con $\nu > 1$, accade che una curva φ , di ugual ordine e classe di f , avente

(1) Per ottenere la verifica algebrica dell'asserto, occorre scrivere le condizioni perchè una curva algebrica possieda un certo numero di punti doppi; le quali sono date in forma semplice ed elegante in una lettera di HERMITE che si trova nel vol. 84 del Journal für Mathematik (pag. 298).

per limite f , possiederà $\frac{r(r-1)}{2}$ tangenti doppie prossime ad o , fra le quali vi saranno $\nu - 1$ tangenti di flesso; infatti la φ possiederà $\nu - 1$ intersezioni con la sua hessiana prossime al contatto $(\nu + 1)$ -punto di o con f . Pertanto il teorema precedente può essere completato come segue:

Se una curva f possiede un punto r -plo ordinario con s rami (d'ordine ν_1, \dots, ν_s , $\nu_1 + \dots + \nu_s = r$) essa può riguardarsi come limite di una curva φ , di uguale ordine e classe, dotata di $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r - s$ ($= \Sigma(\nu - 1)$) cuspidi.

16. Numero dei flessi d'una curva: abbassamento prodotto da un punto doppio o multiplo. — Nel seguito s'intendono escluse, non soltanto le curve possedenti parti multiple, ma anche quelle curve riducibili che contengano delle rette come parti, casi in cui una curva f ha infiniti punti a comune colla sua hessiana (§ 8).

Appunto per mezzo della hessiana h , e delle sue intersezioni con la curva f , vogliamo determinare il numero dei flessi di f che, se l'ordine $n > 3$, non può più essere desunto dalle formule 1) e 2) del precedente paragrafo.

Una curva f generale d'ordine n (priva di punti doppi) possiede $3n(n-2) = n(3n-6)$ flessi, intersezioni di f colla sua hessiana.

Ma questo numero si abbassa in corrispondenza a punti multipli di f , giacchè questi appartengono pure, come multipli, ad h .

Calcolando le intersezioni di f ed h che vengono assorbite in un punto doppio, dimostreremo il

Teorema. *Un nodo della curva f abbassa di 6 il numero dei flessi; tale abbassamento può superare 6 soltanto nel caso che una tangente principale sia tangente di flesso per il relativo ramo; una cuspidi ordinaria assorbe precisamente 8 flessi della curva.*

Sussiste dunque la formula

$$1) \quad i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k,$$

dove i designa il numero dei flessi, computati gli eventuali flessi relativi ai rami di un nodo, e dove un flesso d'or-

dine s (in cui la curva ha $s + 2$ intersezioni con la tangente) conta per s flessi del 1° ordine.

La dimostrazione del teorema enunciato, cioè il computo delle intersezioni di f colla hessiana h assorbite in un punto doppio, si svolge come segue:

a) Nel caso in cui la curva f abbia un nodo O , sappiamo (§ 7) che h possiede pure O come doppio ed ha ivi le stesse tangenti principali. Per questo fatto si assorbono in O $\rho = 6$ intersezioni di f ed h ; per escludere che se ne assorbano di più bisogna mostrare che i rami tangenti di f ed h posseggono diversa costante caratteristica e quindi diversa parabola osculatrice.

b) Se O è una cuspidale per f , sappiamo che h ha in O un punto triplo e che due tangenti ad h coincidono con la tangente cuspidale di f . Per questo fatto vengono assorbite in O $\rho = 8$ intersezioni delle due curve; ad escludere che ne vengano assorbite di più basta mostrare che h possiede un ramo di second'ordine avente una costante diversa da quella di f (§ 12, criterio 9).

Ora il calcolo delle costanti caratteristiche riposa per ciascun caso su un *lemma di riduzione*, il cui significato geometrico si può esprimere dicendo: se una curva

$$f(xy) = u_2 + u_3 + \dots + u_n = 0,$$

d'ordine $n > 3$, dotata di un punto doppio (nodo o cuspidale) nell'origine O , possiede in O più che ρ ($= 6, 8$) intersezioni colla sua hessiana, altrettanto accade per ogni altra curva dello stesso ordine che abbia la medesima cubica approssimante

$$u_2 + u_3 = 0.$$

Dimostriamo infatti i due lemmi seguenti:

Lemma di riduzione per il nodo. Se f possiede in O un nodo, le costanti caratteristiche dei rami di h in O dipendono soltanto dall'ordine di f e dalla sua cubica approssimante.

Sappiamo (§ 12) che la parabola osculatrice ad un ramo di f dipende soltanto dai coefficienti u_2 e u_3 . Ora basta mostrare che i termini di secondo e terzo grado in h dipendono soltanto da u_2, u_3 .

Scriviamo il determinante hessiano della forma

$$f(xyz) = \sum u_i z^{n-i},$$

dove si ponga $z = 1$. Troviamo:

$$h = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \sum (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \sum (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial y} \\ \sum (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x} & \sum (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial y} & \sum (n-i)(n-i-1)u_i \end{vmatrix}.$$

Appare allora che i termini di ultimo (più basso) grado in x, y dello sviluppo di h provengono soltanto dai termini di ultimo grado di f , cioè dal determinante

$$|u_2 u_2 u_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} & (n-2) \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} & (n-2) \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ (n-2) \frac{\partial u_2}{\partial x} & (n-2) \frac{\partial u_2}{\partial y} & (n-2)(n-3)u_2 \end{vmatrix};$$

invece i termini di penultimo grado, nello sviluppo di h , proverranno soltanto da u_2, u_3 , e precisamente saranno dati dalla somma di tre determinanti:

$$|u_3 u_2 u_2|, \quad |u_2 u_3 u_2|, \quad |u_2 u_2 u_3|,$$

costruiti in modo che in una linea figurino u_3 e nelle altre due u_2 .

Lemma di riduzione per la cuspidale: Si abbia una curva

$$f = a_{02}y^2 + u_3 + \dots + u_n,$$

dotata di una cuspidale ordinaria in O ; la hessiana h (che è dotata di un punto triplo in O) possiede del pari un ramo del second'ordine con la medesima tangente cuspidale, e la costante caratteristica di questo ramo dipende soltanto dall'ordine e dalla cubica approssimante di f . (Non si esclude *a priori* la degenerazione del detto ramo, che corrisponderebbe all'annullamento della costante caratteristica). Anzi

sappiamo (§ 12) che, data una curva con punto triplo nell'origine:

$$\varphi(xy) = \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \alpha_{40}x^4 + \alpha_{31}x^3y + \dots = 0 \quad (\alpha_{13} \neq 0),$$

dotata di ramo cuspidale tangente all'asse $y=0$, la costante caratteristica di questo ramo vale

$$k = \lim_{x=0} \frac{y^2}{x^3} = \frac{1}{6} \frac{d^3(y^2)}{dx^3} = -\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}};$$

sarà $k \neq 0$, ossia si avrà una cuspidale ordinaria di φ , nell'ipotesi $\alpha_{40} \neq 0$.

Ciò posto scriviamo

$$h = \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \alpha_{40}x^4 + \dots,$$

ricordando che h possiede in O un punto triplo di cui due tangenti coincidono con $y=0$; la costante caratteristica del ramo cuspidale di h sarà $k = -\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}}$.

Ora, nello sviluppo del determinante hessiano, il coefficiente α_{12} dipende soltanto dai termini di secondo e terzo grado di f ; basterà dunque mostrare che anche α_{40} dipende soltanto da codesti termini. Ma nello sviluppo di h i termini di quarto grado si otterranno sommando 6 determinanti del tipo

$$|u_i u_r u_s| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} & (n-i) \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u_r}{\partial y^2} & (n-r) \frac{\partial u_r}{\partial y} \\ (n-s) \frac{\partial u_s}{\partial x} & (n-s) \frac{\partial u_s}{\partial y} & (n-s)(n-s-1) u_s \end{vmatrix},$$

dove $i+r+s=8$

$$(i \geq 2, \quad r \geq 2, \quad s \geq 2, \quad u_2 = a_{02}y^2).$$

Pertanto dobbiamo mostrare che nei tre determinanti contenenti l'indice 4 non figura x^4 , cioè che, per $y=0$, si ha

$$|u_4 u_2 u_2| = |u_2 u_4 u_2| = |u_2 u_3 u_4| = 0.$$

Per il secondo e il terzo determinante ciò risulta evidente dall'osservare che i termini della prima linea sono nulli in quanto $u_2 = a_{02}y^2$; invece il primo determinante si annulla perchè (per $y=0$) sono nulli i termini dell'ultima linea.

Basandoci sui precedenti lemmi di riduzione forniremo due diverse dimostrazioni del teorema già enunciato intorno al « numero dei flessi assorbiti in un punto doppio di f ».

Prima dimostrazione diretta: calcolo delle costanti caratteristiche dei rami della hessiana.

a) Caso del nodo.

Scriviamo

$$f = u_2 + u_3 + \dots + u_n = a_{11}xy + a_{30}x^3 + a_{24}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \dots;$$

avendo preso — per semplicità — come assi x, y le tangenti principali del nodo. Allora sappiamo (§ 12) che la parabola di second'ordine, osculatrice al ramo di f che tocca l'asse $y=0$, è

$$y = -\frac{a_{30}}{a_{11}}x^2;$$

ciò si verifica intersecando questa parabola colla curva $f=0$, perchè l'equazione risultante in x viene di 4° — anzichè di 3° — grado.

Lo hessiano h di f si potrà scrivere:

$$h = v_2 + v_3 + \dots = \alpha_{11}xy + \alpha_{30}x^3 + \dots,$$

e la parabola di second'ordine, che oscula il ramo della curva $h=0$ tangente all'asse $y=0$, sarà

$$y = -\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}}x^2.$$

Vogliamo calcolare la costante caratteristica $-\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}}$ del predetto ramo di h , la quale, come vedremo, si esprime in funzione dell'analogha costante caratteristica $-\frac{a_{30}}{a_{11}}$ relativa ad f .

Adottando le notazioni precedenti, abbiamo

$$v_2 = |u_2 u_2 u_2|,$$

$$v_3 = |u_3 u_2 u_2| + |u_2 u_3 u_2| + |u_2 u_2 u_3|.$$

Il calcolo di v_2 è stato già fatto, seguendo BRILL, in condizioni più generali (§ 7); appunto da quel calcolo si è dedotto $v_2 \equiv u_2$, ossia (nel nostro caso) $v_2 = z_{11}xy$. Quello stesso calcolo, facendo attenzione al coefficiente trascurato, ci permette di determinare z_{11} ; ma giova invece sviluppare di nuovo (per $v_2 = a_{11}xy$) il determinante $|u_2 u_2 u_2|$, giacchè ciascuno dei tre determinanti che occorre poi calcolare per avere v_3 ha due linee comuni con v_2 .

Si trova così

$$v_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & (n-2)a_{11}y \\ a_{11} & 0 & (n-2)a_{11}x \\ (n-2)a_{11}y & (n-2)a_{11}x & (n-2)(n-3)a_{11}xy \end{vmatrix},$$

ossia

$$v_2 = (n-1)(n-2)a_{11}^3xy,$$

$$z_{11} = (n-1)(n-2)a_{11}^3.$$

Dopo ciò occorre calcolare il primo termine di $v_3 : z_{30}x^3$; cioè il valore che v_3 assume per $y=0$. Si svolgerà semplicemente questo calcolo tralasciando addirittura quelli fra i termini dei tre determinanti che danno v_3 , nei quali figuri il fattore y . Con tale avvertenza si trova

$$|u_3 u_2 u_2|_{y=0} = \begin{vmatrix} 6a_{30}x & 2a_{21}x & 3(n-3)a_{30}x^2 \\ a_{11} & 0 & (n-2)a_{11}x \\ 0 & (n-2)a_{11}x & 0 \end{vmatrix},$$

cioè

$$|u_3 u_2 u_2|_{y=0} = -(n-2)a_{11}^2 a_{30} \begin{vmatrix} 6 & 3(n-3) \\ 1 & n-2 \end{vmatrix} x^3 = -3(n-1)(n-2)a_{11}^2 a_{30} x^3.$$

Si ha poi

$$|u_2 u_3 u_2|_{y=0} = \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ 2a_{21}x & 2a_{13}x & (n-3)a_{21}x^2 \\ 0 & (n-2)a_{11}x & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

l'annullamento identico di questo determinante risulta dall'osservazione che i quattro termini situati ai vertici del quadrato sono zero, e questa osservazione rende superfluo anche

il calcolo, fatto innanzi, degli altri termini del determinante medesimo.

In fine

$$|u_2 u_2 u_3|_{y=0} = \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{11} & 0 & (n-2)a_{11}x \\ 3(n-3)a_{30}x^2 & (n-3)a_{21}x^2 & (n-3)(n-4)a_{30}x^3 \end{vmatrix},$$

cioè

$$u_2 u_2 u_3|_{y=0} = - (n-3)a_{11}^2 a_{30} \begin{vmatrix} 1 & n-2 \\ 3 & n-4 \end{vmatrix} x^3 = 2(n-1)(n-3)a_{11}^2 a_{30} x^3.$$

Si ricava

$$(v_3)_{y=0} = -n(n-1)a_{11}^2 a_{30} x^3,$$

$$\alpha_{30} = -n(n-1)a_{11}^2 a_{30},$$

e quindi, essendo $\alpha_{11} = (n-1)(n-2)a_{11}^3$,

$$-\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}} = \frac{n}{n-2} \frac{a_{30}}{a_{11}}.$$

Appare così che la costante caratteristica $-\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}}$ del ramo di h differisce per il fattore numerico $-\frac{n}{n-2}$ dalla costante caratteristica relativa al ramo tangente di f ; e però quando $a_{30} \neq 0$ ($n > 2$) le due costanti caratteristiche sono fra loro diverse: i due rami di f ed h non possono avere un contatto d'ordine superiore al primo. Il caso d'eccezione: $a_{30} = 0$ corrisponde all'ipotesi che l'asse x abbia 4 intersezioni riunite con f , cioè sia tangente di flesso per un ramo di f ; nel qual caso la cubica approssimante contiene il suddetto asse come parte.

b) Caso della cuspidè:

Scriviamo, come innanzi,

$$f = u_2 + u_3 + \dots = a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \dots;$$

verrà

$$h = v_3 + v_4 + \dots = \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{03}y^3 + \alpha_{40}x^4 + \dots,$$

essendo — per il calcolo di BRILL (§ 7) —

$$v_3 \equiv y^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = y^2(6a_{30}x + 2a_{21}y).$$

Lo stesso calcolo di BRILL, facendo attenzione al coefficiente trascurato, permette di determinare α_{12} (e anche α_{03} che non ci interessa); ma giova qui sviluppare di nuovo direttamente il calcolo di v_3 , giacchè i determinanti che si presentano servono per il calcolo di quelli che daranno poi α_{40} .

Avremo

$$v_3 = |u_2 u_2 u_3| + |u_2 u_3 u_2| + |u_3 u_2 u_2|.$$

Ora, poichè $u_2 = a_{02}y^2$ non contiene x , i termini della prima linea nei due determinanti $|u_2 u_2 u_3|$, $|u_2 u_3 u_2|$ sono nulli. Resta

$$v_3 = |u_3 u_2 u_2| = \begin{vmatrix} 6a_{30}x + 2a_{21}y & - & - \\ 0 & 2a_{02} & 2(n-2)a_{02}y \\ 0 & 2(n-2)a_{02}y & (n-2)(n-3)a_{02}y^2 \end{vmatrix},$$

dove abbiamo ommesso di calcolare il secondo e il terzo termine della prima linea che non hanno influenza sul valore del determinante. Sviluppando si trova

$$v_3 = 2 \cdot 6(n-2)a_{30}a_{02}^2 \begin{vmatrix} 1 & n-2 \\ 2 & n-3 \end{vmatrix} xy^2 + 2 \cdot 2(n-2)a_{21}a_{02}^2 \begin{vmatrix} 1 & n-2 \\ 2 & n-3 \end{vmatrix} y^3,$$

ossia

$$\alpha_{12} = -12(n-1)(n-2)a_{30}a_{02}^2.$$

Dopo ciò occorre calcolare il primo termine di v_4 : $\alpha_{40}x^4$, cioè il valore che v_4 assume per $y=0$. Avremo:

$$v_4 = |u_1 u_2 u_2| + |u_2 u_4 u_2| + |u_2 u_2 u_4| + \\ + |u_3 u_3 u_2| + |u_3 u_2 u_3| + |u_2 u_3 u_3|.$$

Ora il secondo, il terzo e il sesto determinante si annullano identicamente perchè, come già è stato notato nel calcolo di v_3 , i termini della loro prima linea sono identicamente nulli. Anche il primo e il quarto determinante si annullano per $y=0$, giacchè sono nulli per $y=0$ i termini della loro

terza linea, già sopra determinati nel calcolo di v_3 . Per conseguenza resta

$$(v_4)_{y=0} = | u_3 u_2 u_3 |_{y=0} = \begin{vmatrix} 6a_{30}x & 2a_{21}x & 3(n-3)a_{30}x^2 \\ 0 & a_{02} & 0 \\ 3(n-3)a_{30}x^2 & (n-3)a_{21}x^2 & (n-3)(n-4)a_{30}x^3 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando si trova

$$(v_4)_{y=0} = 3(n-3)a_{02}a_{30}^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3(n-3) & n-4 \end{vmatrix} x^4 = -3(n-1)(n-3)a_{02}a_{30}^2 x^4,$$

$$\alpha_{40} = -3(n-1)(n-3)a_{02}a_{30}^2.$$

Ricordiamo che, come si è visto innanzi nello svolgimento del lemma di riduzione, la costante caratteristica del ramo (cuspidale) di h tangente all'asse $y=0$, è dato da $-\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}}$; questa costante vale dunque

$$-\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}} = \frac{1}{4} \frac{(n-3) a_{30}}{(n-2) a_{02}}.$$

Appare così che la costante caratteristica del predetto ramo di h , differisce da quella $\left(-\frac{a_{30}}{a_{02}}\right)$ di f per il fattore numerico $-\frac{1}{4} \frac{n-3}{n-2}$, e però quando $a_{30} \neq 0$ ($n > 2$) le due costanti caratteristiche sono fra loro diverse: i due rami di f e h non possono avere più di 6 intersezioni assorbite nell'origine. Ciò è vero anche nel caso $n=3$, in cui, l'anzidetto ramo di h si riduce all'asse $y=0$ contato due volte. Il caso d'eccezione: $a_{30}=0$ corrisponde all'ipotesi che l'asse $y=0$ abbia 4 intersezioni riunite con f , caso in cui f non possiede più una cuspidale ordinaria e che dà luogo a una degenerazione della cubica approssimante. Aggiungasi l'osservazione che essendo $a_{30} \neq 0$, $n > 3$, risulta $\alpha_{40} \neq 0$ e però h possiede sempre un ramo cuspidale ordinario tangente ad $y=0$.

Seconda dimostrazione fondata sulla degenerazione della curva f .

Invece di sviluppare il calcolo delle costanti caratteristiche dei rami di f , si può ragionare come segue. Se alla curva f , d'ordine n , si sostituisce una curva dello stesso ordine avente la medesima cubica approssimante, il numero delle intersezioni di f colla hessiana assorbite in O , cioè l'abbassamento del numero dei flessi prodotto dal punto doppio O , non cambia. Ora osserviamo che, per $n=3$, e supposta f irriducibile, il numero (ρ) che si tratta di determinare vale precisamente 6 o 8 secondochè O è un nodo o una cuspidale (Cfr. la tabella relativa alla cubica nel § 15). Se $n > 4$, è lecito sostituire ad f una curva spezzata in una cubica

$$\varphi_3 = u_2 + u_3 = 0,$$

e in una residua curva

$$\varphi_{n-3} = v_0 + v_2 + \dots + v_{n-3} = 0$$

non passante per O ($v_0 \neq 0$), tale che nella sua equazione manchino i termini di primo grado ($v_1 = 0$); infatti la curva

$$\varphi_3 \varphi_{n-3} = 0,$$

avrà come cubica approssimante la medesima cubica

$$v_0 \varphi_3 = v_0 u_2 + v_0 u_3 = 0.$$

La φ_{n-3} potrà suppersi priva di punti doppi. Allora la hessiana della curva composta $\varphi_3 \varphi_{n-3} = 0$, d'ordine $3n - 6$, segnerà la curva stessa:

1) nei $3n - 9$ punti comuni a φ_3 e φ_{n-3} , assorbenti ciascuno *almeno* 6 intersezioni;

2) nei σ flessi di φ_3 (tre o uno secondochè O è nodo o cuspidale) e negli $(n-3)(3n-15)$ flessi di φ_{n-3} ;

3) infine nel punto O , che conta per ρ intersezioni, dove è

$$\rho \geq 9 - \sigma.$$

Si avrà così

$$n(3n-6) \geq 6(3n-9) + (n-3)(3n-15) + \sigma + \rho,$$

e quindi

$$3n^2 - 6n \geq 3n^2 - 6n - 9 + \sigma + \rho,$$

$$\sigma + \rho \leq 9,$$

sicchè si conclude:

$$\begin{aligned} & \rho = 9 + \sigma, \\ \text{cioè per} & \sigma = 3, \quad \rho = 6, \\ \text{e per} & \sigma = 1, \quad \rho = 8 \end{aligned} \qquad \text{c. d. d.}$$

La dimostrazione precedente suppone $n > 4$. Ma se fosse $\rho > 9 - \sigma$ per una quartica

$$f = u_2 + u_3 + u_4 = 0,$$

sommando ad f una curva

$$\varphi = v_0 + v_2 + \dots \qquad (v_0 \neq 0),$$

si otterrebbe una curva

$$f\varphi = 0$$

avente la medesima cubica approssimante

$$v_0 u_2 + v_0 u_3 = 0,$$

e si dedurrebbe quindi che anche per codesta curva (d'ordine > 4) l'abbassamento del numero dei flessi prodotto da O vale $\rho > 9 - \sigma$; il che contraddice il risultato stabilito.

Così la dimostrazione viene resa completa per tutti i casi; sotto la condizione espressa che la cubica approssimante di f sia irriducibile, il che esclude i nodi possedenti un ramo dotato di flesso e le cuspidi straordinarie.

Osservazione. La dimostrazione che precede si può rendere indipendente dai calcoli su cui abbiamo basato i lemmi di riduzione, mercè semplici *considerazioni di continuità*. Per semplicità di discorso riferiamoci al caso del nodo.

Anzitutto dimostriamo che: per una curva *generale* d'ordine $n > 4$ un nodo, dove le tangenti principali non siano di flesso, diminuisce di 6 il numero dei flessi. Infatti fra le curve f dotate della suddetta singolarità, vi sono curve degeneri in una cubica e in una residua curva d'ordine $n - 3$, per le quali l'abbassamento del numero dei flessi prodotto dal nodo vale 6 e non più di 6; mentre codesto abbassamento può aumentare, ma non diminuire, passando dalla curva generica di una determinata famiglia ad una curva particolare,

limite di essa. Ora se per una particolare curva f accade che un nodo abbassi di più che 6 il numero dei flessi, bisogna che un flesso della curva generica, avente per limite f , venga a sovrapporsi al nodo, cioè che una tangente principale acquisti contatto tripunto col suo ramo (quadripunto con la curva).

Lo stesso ragionamento si può ripetere per la cuspidale, dimostrando prima che (per una curva d'ordine $n > 4$) la cuspidale ordinaria diminuisce in generale di 8 il numero dei flessi, e notando poi che quando — per una curva particolare — un flesso venga a sovrapporsi alla cuspidale, la tangente cuspidale acquista contatto quadripunto, sì che non si ha più una cuspidale ordinaria.

È ovvio che il caso $n = 4$, escluso nelle precedenti considerazioni, si tratta come innanzi, sommando alla quartica un'altra curva.

Passiamo a valutare l'abbassamento del numero dei flessi che viene prodotto da un punto r -plo ordinario, per $r > 2$. Si tratta di determinare le intersezioni della curva f con la hessiana h , che vengono assorbite in un tal punto O .

Supponiamo che in O si abbiano $s \leq r$ tangenti principali distinte, corrispondenti a rami d'ordine ν_1, \dots, ν_s ; e sia dapprima $s > 1$. Il comportamento di h in O , dato dal teorema di BRILL (§ 7), permette di affermare che le intersezioni di f ed h assorbite in O sono almeno

$$r(3r - 4) + r + \Sigma(2\nu - 2) = 3r(r - 1) + 2(r - s);$$

infatti h ha in O un punto $(3r - 4)$ -plo e possiede in generale come tangenti principali le r tangenti di f , più altre $2r - 4$ tangenti che formano il gruppo hessiano delle r nominate nel fascio O ; per ogni ramo d'ordine $\nu > 1$ di f accade che altre $2\nu - 2$ tangenti di h vanno a coincidere con una tangente di f . Si può dimostrare che il numero delle intersezioni di f ed h assorbite in O è precisamente quello espresso dalla formula precedente, salvo il caso che vi siano rami lineari di f dotati di flesso; a tale scopo occorrerebbe calcolare in questo caso, come già si è fatto per $r = 2$, le costanti caratteristiche dei rami di h , escludendo contatti superiori al contatto semplice.

Lo stesso procedimento è applicabile al caso $s = 1$ (ramo cuspidale d'ordine r); occorre soltanto ricordare che in questo caso h possiede in O un punto di molteplicità $3r - 3$ anziché $3r - 4$, e che $2r - 2$ tangenti principali di h coincidono con la tangente di f ; così — dopo aver escluso contatti superiori incompatibili con una cuspidale ordinaria — si concluderà che il numero delle intersezioni di h ed f assorbite in O vale

$$r(3r - 3) + 2r - 2 = 3r(r - 1) + 2(r - 1),$$

risultato che coincide con quello che verrebbe espresso dalla formula precedente per $s = 1$.

Riassumendo otterremo il

Teorema: *Un punto r -plo ordinario con s rami, i cui rami lineari non posseggano flessi, assorbe*

$$3r(r - 1) + 2(r - s)$$

flessi, equivalendo così a $\frac{r(r - 1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r - s$ cuspidi.

In luogo di giustificare la deduzione precedente, sviluppando il calcolo delle costanti caratteristiche cui si è sopra accennato, basterà giustificare l'equivalenza qui enunciata, fondandoci sulle considerazioni di limite del precedente paragrafo.

Ricordiamo dunque che se una curva f possiede un punto r -plo ordinario O , con s rami, essa può ritenersi come limite di una curva φ , di uguale ordine e classe, avente $\frac{r(r - 1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r - s$ cuspidi (cfr. pag. 108). Ora fra le tangenti condotte alla φ da un punto generico, P , del piano, non ve ne è alcuna il cui punto di contatto sia prossimo ad O , giacchè il punto r -plo abbasserebbe la classe di più che $r(r - 1) + (r - s)$ unità. Se dunque il punto P viene preso sopra una tangente propria p di φ , il cui punto di contatto sia prossimo ad O , al limite la retta p deve diventare una tangente principale di f . Effettivamente per un punto P , preso sopra una tangente principale (fuori di O), accade che la retta PO assorbe un'altra tangente condotta per P alla curva; nè può assorbire, invece che una, due tangenti di più, se essa non ha $r + 2$ intersezioni con f in O , caso che deve escludersi — oltrechè

per i rami cuspidali *ordinari* — anche per i rami lineari di f , in virtù delle nostre ipotesi. Ciò posto risulta che la curva φ non possiede alcun flesso prossimo ad O (neppure sul ramo di un nodo); in conseguenza il numero delle intersezioni di f ed h assorbite in O si ottiene come limite delle intersezioni di φ con la propria hessiana che vengono assorbite nei nodi e nelle cuspidi in vicinanza di O , ond'è dato da

$$6 \frac{r(r-1)}{2} + 2(r-s). \quad \text{c. d. d.}$$

17. **Le formule di Plücker e l'equazione del genere.** — Riassumiamo le formule ottenute nei precedenti paragrafi.

Si abbia una curva f , che per semplicità supporremo irriducibile, dotata di singolarità ordinarie, e se ne designi:

- con n l'ordine,
- con δ il numero dei nodi,
- con k il numero delle cuspidi,

valutando come equivalente ad $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi, fra cui

$r-s$ cuspidi, un punto r -plo con s rami; si designi similmente:

- con m la classe,
- con τ il numero delle tangenti doppie a contatti distinte,
- con i il numero dei flessi,

valutando come sopra l'equivalenza delle tangenti multiple, e includendo nel numero i ogni flesso che eventualmente appartenga al ramo lineare d'un punto multiplo; allora

i sei caratteri

$$n, \delta, k, m, \tau, i,$$

sono legati dalle tre relazioni indipendenti:

- 1) $m = n(n-1) - 2\delta - 3k$
- 2) $n = m(m-1) - 2\tau - 3i$
- 3) $i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k.$

Le prime due relazioni risalgono a PONCELET (1818-1831) che vi giunse con considerazioni di continuità (cfr. L. 2°, § 19 e il Cap. IV di questo Libro): PLÜCKER (1834-1839), oltre a svolgere la dimostrazione di codeste relazioni, vi ha aggiunto la formula 3) ed altre formule che ne dipendono;

perciò l'insieme delle relazioni fra i sei caratteri n, δ, k, m, τ, i , ha ricevuto il nome di gruppo delle *formule* di PLÜCKER.

A questo gruppo di formule appartengono le seguenti, che si deducono (cfr. L. 2°, § 21, Vol. I, pag. 266) combinando le 1) 2) 3):

$$4) \quad k = 3m(m - 2) - 6\tau - 8i,$$

$$5) \quad \tau = \frac{1}{2} n(n - 2)(n^2 - 9) - [n(n - 1) - 6](2\delta + 3k) + \\ + 2\delta(\delta - 1) + 6\delta k + \frac{9}{2} k(k - 1),$$

$$6) \quad \delta = \frac{1}{2} m(m - 2)(m^2 - 9) - [m(m - 1) - 6](2\tau + 3i) + \\ + 2\tau(\tau - 1) + 6\tau i + \frac{9}{2} i(i - 1),$$

$$7) \quad 3m - i = 3n - k,$$

$$8) \quad \frac{n(n + 3)}{2} - \delta - 2k = \frac{m(m + 3)}{2} - \tau - 2i$$

$$9) \quad \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \delta - k = \frac{(m - 1)(m - 2)}{2} - \tau - i.$$

La dimostrazione del gruppo di formule 1)....9) importa sostanzialmente la dimostrazione di *due* formule: per esempio della prima, da cui si deduce per dualità la seconda, e della terza, che PLÜCKER ottiene col calcolo diretto del numero dei flessi; questo calcolo ha preso forma più significativa mediante l'introduzione della curva covariante di HESSE (1844).

Ora, in luogo di basarsi sulla formula 3), si può dimostrare in modo diretto qualcuna di quelle che seguono, per esempio valutare il numero delle tangenti doppie d'una curva d'ordine n , che vale in generale $\frac{1}{2} n(n - 2)(n^2 - 9)$, ricercando poi la diminuzione prodotta sul detto numero dalla presenza di punti doppi. A questo proposito PLÜCKER stesso osserva ⁽¹⁾ che la diminuzione del numero delle tangenti doppie prodotta da un punto doppio O , viene data dalle tangenti per O alla curva, ciascuna delle quali è da contare due volte per ragioni di continuità (cfr. Cap. IV).

(1) « Theorie der Algebraischen Curven », pag. 209.

La determinazione delle tangenti doppie ad una curva d'ordine n si può fare con calcolo diretto, assegnando una curva che seghi la data nei punti di contatto delle tangenti doppie; questa via è stata percorsa anzitutto da CAYLEY ⁽¹⁾ nel 1846 e poi da JACOBI (1850) ⁽²⁾, il quale sembra non fosse interamente persuaso dell'uso del principio di dualità, a cui PLÜCKER ricorreva.

Accanto ai due modi di deduzione delle formule di Plücker, ove si apprende a valutare (dopo la classe) il numero dei flessi o delle tangenti doppie, si presenta un terzo modo ove si tratta di stabilire direttamente qualcuna delle equazioni simmetriche fra i caratteri plueckeriani, e segnatamente la 9). Questo modo ha grande importanza perchè mette in luce il significato d'un carattere fondamentale delle curve, designato col nome di *genere* (cfr. L. 2°, § 23). Al quale si riferiscono le seguenti considerazioni.

Chiamasi « genere » l'espressione $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k$

che figura nella formula 9); essa designa il numero dei punti doppi che manca alla curva (irriducibile) d'ordine n per averne il massimo. Infatti si è dimostrato (L. 2°, § 23) che codesta espressione è ≥ 0 nell'ipotesi, che qui sottintendiamo, della irriducibilità, giacchè altrimenti la curva data f avrebbe più che $n(n-1)$ intersezioni con una curva d'ordine $n-1$ che passi $r-1$ volte per ogni punto r -plo di f e contenga altri $\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{(r-1)r}{2}$ punti semplici della f stessa.

Introducendo il genere p , la formula 1) si può scrivere

$$m = 2n + 2p - 2 + k.$$

Ora ricordando che le rette congiungenti le cuspidi sono da ritenere come *tangenti improprie a rami* della curva (cfr. L. 1°, § 11; L. 2°, § 23) si ha che: il numero delle tangenti a rami di una curva d'ordine n e genere p , passanti

⁽¹⁾ Journal für Math., Bd. 34, pag. 37.

⁽²⁾ Journal für Math., Bd. 40, pag. 37. Cfr. CLEBSCH, ibidem, Bd. 63, (1864). Altri sviluppi nello stesso ordine d'idee appartengono a SALMON (1858) e CAYLEY (1859). Cfr. CLEBSCH-LINDEMANN, « Lezioni » trad. fr., t. II, p. 64.

per un punto generico vale

$$2n + 2p - 2.$$

Questo risultato si può estendere, valutando il numero delle tangenti altrove a rami della curva, che passano per un suo punto semplice o multiplo. Già nel L. 2°, §§ 19, 23 abbiamo fatto questa valutazione per il caso di un punto r -plo a tangenti distinte; qui, riprendendo il calcolo sulla base della teoria delle polari, imporremo soltanto la restrizione che si tratti di punti multipli ordinari.

Sia dunque O un punto r -plo ordinario della curva f ($r \geq 1$); vogliamo valutare le tangenti alla curva condotte per O , all'infuori delle tangenti principali che la toccano in O stesso, ed escludendo dapprima che qualche tangente principale risulti tangente in qualche altro punto della curva, oppure tangente di flesso per il relativo ramo; tenuto conto dell'ipotesi fondamentale relativa alle singolarità ordinarie, abbiamo dunque che le tangenti principali in O posseggono $r + 1$, e non più, intersezioni con f .

Posto O nell'origine, scriviamo l'equazione della curva

$$f = u_r + u_{r+1} + \dots + u_n = 0;$$

le tangenti ad f per O sono date dalle intersezioni di f con la polare ψ di O , che — passando attraverso le coordinate omogenee — si trova espressa da:

$$\psi = (n - r)u_r + (n - r - 1)u_{r+1} + \dots = 0;$$

quindi, per ottenere le tangenti altrove ad f per O , occorre cercare quante sono le intersezioni delle due curve f e ψ , assorbite in O .

Ora le curve f e ψ posseggono in O un punto di uguale molteplicità r , colle medesime tangenti principali. Per questo fatto le intersezioni assorbite in O sono $r^2 + r$. Occorre riconoscere che i rami di f e ψ non posseggono contatto superiore al contatto semplice, affinchè si possa concludere che non viene assorbito in O un numero d'intersezioni $> r^2 + r$. Ma questo riconoscimento è immediato se le tangenti principali ad f posseggono $(r + 1)$ e non più intersezioni con f . Infatti si assuma (operando un'eventuale rotazione degli assi

coordinati) la retta $y = 0$ come tangente ad un ramo, d'ordine ν , di f ; sarà

$$u_r = a_{\nu, r-\nu} y^\nu x^{r-\nu} + \dots, \quad (a_{\nu, r-\nu} \neq 0);$$

e se la $y = 0$ è tangente $(r+1)$ -punta di f :

$$u_{r+1} = a_{r+1, 0} x^{r+1} + \dots$$

con

$$a_{r+1, 0} \neq 0.$$

Allora la costante caratteristica del ramo di f tangente ad $y = 0$ è data da

$$c = \lim_{x=0} \frac{y^\nu}{x^{\nu+1}} = -\frac{a_{r+1, 0}}{a_{\nu, r-\nu}},$$

sicchè $c \neq 0$ (cfr. le osservazioni che terminano il § 12); l'analoga costante pel ramo tangente di ψ vale

$$c' = \frac{(n-r)}{(n-r-1)} c,$$

sicchè $c' \neq c$.

Si conclude che le intersezioni di f e ψ fuori di O sono $n(n-1) - r(r+1)$; ma, per avere le tangenti a rami condotte da O ad f , codesto numero va diminuito di 2 per ogni punto doppio, nodo o cuspidale — o di $s(s-1)$ per ogni punto s-plo — che la curva f possenga fuori di O , così come accade quando si cercano le tangenti per un punto esterno. Per tal modo, designando con δ' il numero dei punti doppi di f fuori di O , il numero delle tangenti cercate risulterà:

$$n(n-1) - r(r+1) - 2\delta',$$

e poichè

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{r(r-1)}{2} - \delta',$$

il detto numero verrà espresso da

$$2(n-r) + 2p - 2.$$

Nel computo precedente si sono esclusi due casi particolari che, mediante una *convenzione basata sul principio di continuità*, si lasciano ricondurre alla formula precedente. In primo luogo, se accade che una tangente principale per O

tocchi la curva in un altro punto A , è chiaro che essa deve computarsi fra le tangenti altrove alla curva condotte per O . In secondo luogo, se un ramo lineare di f per O possiede un flesso, la relativa tangente dovrà ritenersi come tangente in un punto infinitamente vicino ad O condotta per O , e figurerà precisamente $s - 2$ volte nel gruppo delle tangenti altrove ad f per O , quando il flesso anzidetto dia luogo a un contatto s -punto; il che, ove non si voglia ricorrere a considerazioni di continuità si può facilmente provare con una verifica diretta.

Riassumendo:

Si abbia una curva irriducibile d'ordine n e genere p (dotata di singolarità ordinarie); il numero delle tangenti altrove alla curva condotte per un punto r -plo O ($r \geq 0$), computate in esso le tangenti proprie e le tangenti improprie a rami cuspidali, vale

$$2\nu + 2p - 2,$$

designando $\nu = n - r$ il numero delle intersezioni variabili della curva con le rette per O ; il numero delle tangenti altrove viene calcolato defalcando dal numero totale delle tangenti per O il gruppo delle r tangenti principali contato 2 volte.

Dopo avere così rilevato il significato caratteristico del genere, ritorniamo alla formula 9), che si può designare come « equazione del genere », in quanto esprime che « il genere di una curva come luogo è uguale al genere della curva come inviluppo ». Ora questa equazione potrà essere dimostrata direttamente in base ad un teorema generale d'invarianza del genere, tenuto conto della corrispondenza biunivoca fra curva luogo e curva inviluppo, dove ad ogni punto corrisponde la relativa tangente. Si avrà così un nuovo modo di dimostrazione della formula 3), la quale si potrà dedurre dalle 1) 2) e 9), senza ricorrere alla hessiana e agli sviluppi dei §§ 7 e 12.

Converrà premettere le seguenti

Osservazioni preliminari sulle corrispondenze birazionali fra curve.

Si abbia una curva algebrica irriducibile

$$f(xy) = f(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

poniamo X e Y funzioni razionali di x e y che, ridotte allo

stesso dominatore possono scriversi:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_3(xy)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_3(xy)}, \\ 0, \text{ in forma omogenea,} \\ X_1 = \varphi_1(x_1 x_2 x_3), \quad X_2 = \varphi_2(x_1 x_2 x_3), \quad X_3 = \varphi_3(x_1 x_2 x_3), \end{array} \right.$$

dove, per semplicità di discorso, viene supposto che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ siano dello stesso ordine (bastando altrimenti moltiplicare per una potenza di x_3).

Il luogo dei punti che corrispondono ai punti di f nella trasformazione a) è una curva algebrica

$$F(XY) = F(X_1 X_2 X_3) = 0,$$

la cui equazione si deduce eliminando le x, y , oppure le $x_1 x_2 x_3$, fra le relazioni a) e l'equazione $f = 0$.

In generale la trasformazione univoca che fa passare dalla curva f alla F è univocamente, cioè razionalmente, invertibile fra le due curve.

Infatti dato un punto (XY) di F , per trovare i punti di f che gli corrispondono nella trasformazione inversa della a), occorre risolvere il sistema delle tre equazioni

$$X = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_3(xy)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_3(xy)}, \quad f(xy) = 0,$$

le quali debbono essere compatibili e definiranno, in generale, una sola coppia di valori x, y . Per escludere il caso particolare in cui ad (XY) corrispondano più punti (xy) di f , si potrà scegliere in modo arbitrario la funzione razionale $\frac{\varphi_1}{\varphi_3}$ la quale assumerà lo stesso valore in un certo gruppo G di punti della f , purchè si prenda poi la $\frac{\varphi_2}{\varphi_3}$ in modo che essa riceva valori diversi nei punti di G .

In ciò che segue supponiamo che la corrispondenza fra f e F sia effettivamente biunivoca, cioè *birazionale*. Mentre a un punto generico di f corrisponde un determinato punto di F , (e così ad un punto generico di F corrisponde un punto di f), potranno esistere su f (e analogamente su F) dei punti d'ecce-

sione per cui le formule della trasformazione riescono indeterminate; tali sono i punti di f dove si abbia contemporaneamente

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.$$

Quando si presenta questa eccezione è naturale chiedersi se essa possa venire rimossa, definendo in base alla legge di continuità i mutui rapporti di X_1 , X_2 , X_3 , che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. A tale scopo svolgeremo le considerazioni seguenti.

Le curve $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$ formeranno in generale una rete; va excepto un solo caso che considereremo in appresso. Ora la trasformazione a) fra le due curve f e F appare subordinata ad una trasformazione razionale A) fra i rispettivi piani, la quale viene rappresentata dalle medesime formule. Questa trasformazione si definisce geometricamente ponendo una *proiettività* fra la rete $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$ e il piano rigato $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 = 0$, in guisa che ad ogni elemento (curva) della rete corrisponda una retta, e ad ogni fascio di curve un fascio di rette. Appare così che la trasformazione A) non sarà in generale univocamente invertibile, perchè — a prescindere dai punti base della rete $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$ — si dovranno ritenere come omologhi di un punto (X) nella corrispondenza A'), inversa di A), i punti comuni alle curve del fascio corrispondente al fascio di rette di centro (X); il numero d di questi punti, cioè il numero delle intersezioni variabili di due curve della rete (*grado* della rete) sarà, in generale, $d > 1$. (Nel caso particolare $d = 0$ la trasformazione A) farà corrispondere ai punti (x) del primo piano i punti della curva $F = 0$, e non sarà invertibile per i punti fuori di questa). La trasformazione A'), in cui ad ogni punto (X) corrispondono $d > 1$ punti (x), farà corrispondere alla curva F una curva composta della f e di una parte complementare θ , che viene descritta dai $d - 1$ punti coniugati di un punto variabile su f , ritenendo come coniugati i punti (x) che hanno un medesimo omologo in A). La corrispondenza biunivoca fra le curve f e F può venire ugualmente subordinata ad una trasformazione razionale fra il secondo piano ed il primo, ove si estendano ai punti (X) fuori di F le formule della trasformazione inversa di a).

Ciò posto torniamo a considerare un punto base per la rete $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$, che designeremo con P , nell'ipotesi in cui esso appartenga ad f (e dia quindi luogo ad una eccezione per la corrispondenza α). Se P è punto semplice per f , le curve della rete che toccano f in P (o che hanno in P un contatto ulteriore qualora il contatto si avverasse già per tutte le curve della rete) formeranno un fascio a cui risponderà un fascio di rette, e così verrà determinato per continuità l'omologo di P su F : l'eccezione considerata è soltanto *apparente*.

Ma pongasi invece che P sia doppio o r -plo, con $r > 2$; per f , a tangenti distinte; allora le curve della rete passanti per P e toccanti (o toccanti ulteriormente) un ramo di f , formano un fascio; si vede quindi che a P corrispondono in generale due o r punti semplici di F ; solo eccezionalmente i due punti anzidetti potranno sovrapporsi in un punto doppio di F . Qualora poi il punto doppio d'eccezione su f divenga una cuspide, i due punti omologhi vengono a coincidere.

L'osservazione precedente permette di riconoscere che ad un punto semplice P di f corrisponde un punto semplice P' di F , semprechè P' non sia eccezionale per la trasformazione inversa; similmente l'omologo di un punto P doppio o multiplo, per f , che non sia punto base della rete trasformante, sarà un punto P' di uguale molteplicità per F , salvo il caso che esso sia un punto di eccezione della trasformazione inversa.

Le cose dette si estendono al caso, eccetto innanzi, in cui le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ appartengano ad un fascio di curve (unisecanti f),

sicchè si abbia $\frac{\varphi_1}{\varphi_3} = k \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$, e $F = X - kX = 0$ risulti una retta:

ai nodi di f corrisponderanno coppie di punti di questa retta, ecc. Quindi i risultati ottenuti si potranno riassumere nel seguente enunciato che ha una validità assolutamente generale, anche fuori delle ipotesi relative alle singolarità delle curve in cui per semplicità ci siamo posti:

Una corrispondenza birazionale fra due curve può ritenersi biunivoca senza eccezione ove si pensi ciascun punto multiplo come risultante dalla sovrapposizione di tanti punti quanti sono i rami (lineari o cuspidali) della curva che vi passano.

Ciò posto veniamo al

TEOREMA DI INVARIANZA DEL GENERE. *Se fra due curve irriducibili dotate di singolarità ordinarie, intercede una corrispondenza birazionale, le due curve hanno lo stesso genere.*

Di questo teorema fondamentale si posseggono varie dimostrazioni (cfr. la Notizia storica che segue); riprodurremo qui la semplice dimostrazione dovuta al BERTINI ⁽¹⁾.

Immaginiamo le due curve f e F collocate in un medesimo piano e proiettiamole rispettivamente da due punti generici O e O' del piano stesso; le intersezioni dei raggi proiettanti i punti omologhi descrivono una curva φ che è in corrispondenza birazionale con le f e F ; designando con n , N gli ordini di f , F , la curva φ sarà intersecata dalle rette per O in n punti variabili e dalle rette per O' in N punti. La considerazione di questa curva ausiliaria permette di riconoscere che le tangenti (proprie o improprie) a rami di f condotte per O sono anche tangenti a rami di φ , sicchè f e φ , essendo intersecate dalle rette per O ugualmente in n punti variabili, avranno lo stesso genere; in modo analogo si trova che φ ed F hanno pure il medesimo genere, e da ciò si conclude l'uguaglianza dei generi di f e F .

Il riconoscimento che le tangenti a rami di f per O coincidono con le tangenti a rami di φ condotte per il medesimo punto, si basa sostanzialmente sul fatto che la corrispondenza fra f e φ è biunivoca senza eccezione fra i rami, sicchè una retta che incontra un ramo di f in due punti infinitamente vicini gode della stessa proprietà rispetto al ramo omologo di φ , e viceversa.

Una analisi più minuta vale a illustrare le circostanze della corrispondenza. Per semplicità supporremo che f e F posseggano soltanto nodi e cuspidi ordinarie; sarà facile vedere le modificazioni di ragionamento che occorrono nel caso di singolarità ordinarie più elevate.

Notiamo anzitutto come prendono origine le singolarità della curva φ . In primo luogo questa curva possiederà come multipli i punti O e O' ; le tangenti in O (e così in O'), possono supporre distinte e non di flesso per i relativi rami, in quanto passano per i punti omologhi delle intersezioni di OO' con F , dove O e O' sono — come si è detto — punti generici del piano.

In secondo luogo nasce un punto doppio di φ quando a due punti distinti A e B di f , allineati con O , rispondono due punti A' e B' di F , allineati con O' , oppure quando ad A , B

(1) Giornale di Matematiche, t. 7, (1869).

corrisponde un punto doppio di F , o infine quando si corrispondono due nodi delle due curve; questi ultimi due casi possono invero ritenersi casi particolari del precedente. Aggiungasi che il punto doppio di φ , così determinato, deve suppersi sempre a tangenti distinte, ove si escludano posizioni particolari di O, O' . Infatti vi è in generale per O un numero finito di rette contenenti coppie di punti (distinti o sovrapposti in un nodo) a cui rispondono coppie di punti allineati con O' ; soltanto quando due fra le nominate rette per O coincidono, ciò che si traduce in una equazione fra le coordinate di O , può aversi un punto doppio di φ dove la curva è costituita da due rami tangenti (singularità straordinaria detta *tacnodo*).

In terzo luogo nasce una cuspide di φ quando si corrispondono due cuspidi di f e F , oppure due punti semplici P, P' dove si abbiano come tangenti le OP e $O'P'$; ma quest'ultimo caso si può escludere evitando posizioni particolari di O, O' .

Ciò posto: una retta generica per O, r , sega f in n punti distinti a cui corrispondono n punti distinti di φ ; a noi occorre esaminare quando due delle intersezioni di r con f , o con φ , vengono a coincidere. È lecito escludere che O si trovi sopra una tangente principale in un punto doppio di f , oppure sopra una tangente doppia o di flesso. Allora:

1) Se due delle intersezioni di r con f vengono a sovrapporsi in un nodo, i punti omologhi a questo sono distinti o sovrapposti in un nodo di φ ; in ogni caso la r non risulta tangente a un ramo di φ , altrimenti più di due intersezioni di r con f sarebbero venute a coincidere.

2) Se due intersezioni di r con f vengono a coincidere in un punto semplice di contatto, a questo punto corrisponde un punto semplice di φ con la medesima tangente (la quale non può essere di flesso).

3) Se invece due intersezioni di f con r vengono a coincidere in una cuspide P , a questa corrisponde un punto semplice, \bar{P} , di φ con la tangente OP , oppure una cuspide.

Reciprocamente se due delle intersezioni di r con φ vengono a coincidere in un punto semplice, altrettanto accade per le intersezioni omologhe di f , perchè a punti distinti corrisponderebbero punti distinti o sovrapposti in un nodo; se invece due intersezioni di r con φ vengono a coincidere in una cuspide questa corrisponde — come abbiám visto — ad una cuspide di f ; la coincidenza di due intersezioni di r

in un nodo di φ risponde, come abbiám visto, ad una retta r secante f in due punti distinti o sovrapposti in un nodo.

In conclusione le

$$2n + 2p - 2$$

tangenti altrove ad f condotte per O (tangenti in punti semplici o rette congiungenti le cuspidi) sono ugualmente tangenti a φ , e perciò φ ha lo stesso genere p di f . Altrettanto si può dire per φ ed F , sicchè si conclude che f e F hanno lo stesso genere p . c. d. d.

Osservazione. Se i punti O e O' cadono nei punti all'infinito degli assi x e y , la curva ausiliaria $\varphi(\bar{x}\bar{y}) = 0$ si ottiene da $f(xy) = 0$ colla trasformazione omologica:

$$a_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_3(xy)} \end{array} \right. \quad \left(y = \theta(\bar{x}\bar{y}) = \frac{\theta_2(\bar{x}\bar{y})}{\theta_3(\bar{x}\bar{y})} \right);$$

e dalla curva $\varphi(\bar{x}\bar{y}) = 0$ si passa alla $F(XY) = 0$ ponendo

$$a_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\psi_1(\bar{x}\bar{y})}{\psi_3(\bar{x}\bar{y})} \\ Y = \bar{y}. \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \frac{\psi_1(\bar{x}\bar{y})}{\psi_3(\bar{x}\bar{y})} = \frac{\varphi_1}{\varphi_3} \bar{x}\theta(\bar{x}\bar{y}) \{$$

Così la dimostrazione dell'invarianza del genere viene basata sulla decomposizione della trasformazione birazionale a nelle due trasformazioni omologiche a_1 a_2 (fatta prima un'eventuale rotazione degli assi coordinati allo scopo di escludere particolari posizioni di O , O').

Qui giova rilevare che le tangenti (proprie e improprie) a rami di f condotte per O corrispondono ai punti di diramazione della funzione algebrica $y(x)$, o della corrispondenza $[x y]$ sulla retta o sul piano complesso (L. 2°, §§ 24, 36). Da ciò si può trarre una nuova dimostrazione dell'invarianza del genere nella trasformazione omologica a_1); infatti un punto di diramazione di $y(x)$, girando attorno al quale si produce lo scambio di due valori di y , risulta pure punto di diramazione per $\bar{y}(\bar{x})$, dando luogo al medesimo scambio dei corrispondenti valori di \bar{y} .

Del teorema d'invarianza del genere si può fare una semplice applicazione al caso delle curve razionali.

Dicesi *razionale* una curva i cui punti (xy) corrispondono birazionalmente ai valori d'un parametro t , sicchè si abbia una rappresentazione parametrica del tipo:

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}; \quad \left(t = \frac{\psi_1(xy)}{\psi_2(xy)} \right)$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ designano dei polinomi. Ora, per definizione, una curva razionale è in corrispondenza biunivoca colla retta su cui è disteso il parametro t e perciò il suo genere vale, come per $n = 1$: $p = \frac{1}{2}(1 - 1)(1 - 2) = 0$.

Dunque: *le curve razionali sono di genere zero*; proposizione di cui abbiamo già fornito una dimostrazione diretta, sulla base del principio di corrispondenza, nel L. 1°, § 23.

Notizia storica. La scoperta dell'invarianza del genere per trasformazioni birazionali dell'equazioni algebrica $f(xy) = 0$ proviene dall'idea di RIEMANN (1857) di rappresentare con un continuo superficiale l'insieme dei punti reali e complessi di $f = 0$: il genere di f corrisponde all'ordine di connessione della superficie di Riemann (cfr. L. 2°, §§ 34-36).

Da questo punto di vista viene messa in luce l'invarianza del genere per qualsiasi trasformazione biunivoca e continua senza eccezione, e quindi in particolare per ogni trasformazione biunivoca analitica, cioè birazionale, eseguita sulla $f = 0$. Dopochè CLEBSCH (1864) ebbe rilevato l'importanza del genere nella teoria delle curve (cfr. la nota storica nel § 23 del libro 2°, vol. I, pag. 285), il teorema dell'invarianza ha ricevuto varie dimostrazioni algebriche: anzitutto una verifica diretta basata sull'analisi delle formule di trasformazione viene data da CLEBSCH e GORDAN (1866) ⁽¹⁾, mentre il CREMONA (1866) porge del teorema una dimostrazione geometrica che si fonda sulla considerazione delle superficie rigate ⁽²⁾. Se si pongono in piani diversi due curve d'ordine n e n' , fra cui intercede una corrispondenza biunivoca, le rette che uniscono i punti omologhi formano una rigata di grado $n + n'$; questa possiede una curva doppia il cui ordine N si esprime per i caratteri plueckeriani n, δ, k , ed

(1) Cfr. le lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN, trad. fr., t. III, pag. 9.

(2) Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, n.º 54. Cfr. Opere, t. II, pag. 328.

n' , δ' , k' delle due curve:

$$N = nn' + \frac{n'(n' - 3)}{2} + \delta + k = n'n + \frac{n(n - 3)}{2} + \delta' + k',$$

dal che si deduce l'uguaglianza dei generi.

A queste dimostrazioni segue quella di BERTINI (1869), che sopra abbiamo svolto. Oltre alla particolare semplicità del concetto informatore, questa dimostrazione ha anche il pregio di rispecchiare il passaggio che può farsi dalla superficie di Riemann rappresentativa della curva f alla superficie della trasformata. Infatti la trasformazione che si eseguisce sopra (xy) viene qui decomposta in due trasformazioni elementari operanti sopra una sola variabile; ora quando si cambia y in una funzione $Y(xy)$ lasciando ferma la x , restano immutati nel piano rappresentativo della x i punti di diramazione, dai quali dipende la costruzione della superficie a fogli che porge la riemanniana di f (cfr. L. 2°, §§ 34 e 36).

Il teorema dell'invarianza del genere appare sotto una nuova luce nella teoria delle funzioni razionali, o serie lineari g_n^1 e g_n^r , sopra una curva; al quale punto di vista si possono collegare diverse dimostrazioni del teorema: (BRILL e NÖTHER, 1874; SEGRE, 1894; ENRIQUES, 1899, 1914). Così, in particolare, il genere si presenta qui in rapporto al discriminante delle funzioni algebriche o, geometricamente, in rapporto al numero delle curve di un fascio che toccano la curva data; la valutazione di questo numero si fa direttamente in funzione del genere e del grado n della serie g_n^1 segata dal fascio, dal che segue pure una semplice dimostrazione del teorema d'invarianza (1).

18. Nota sui caratteri delle curve gobbe: formule di Cayley. — Le relazioni plueckeriane fra i caratteri di una curva algebrica piana si lasciano estendere alle curve gobbe — appartenenti allo spazio di tre dimensioni — ed anche alle curve iperspaziali. La prima estensione è dovuta a CAYLEY (1845) (2), la seconda a VERONESE (1881) (3). Noi ci

(1) Cfr. le Lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN, trad. fr., t. III, pag. 8.

(2) Journal de Math., t. 10, pag. 245; Cambridge and Dublin. Math. Journal, t. 5, pag. 18.

(3) Math. Annalen, Bd. 19, pag. 195.

limiteremo a indicare brevemente come sorgano le formule di CAYLEY.

Premetteremo un breve riassunto di:

Nozioni generali sulle curve gobbe e sulle rigate. Ricordiamo anzitutto la definizione delle curve algebriche dello spazio (¹), conforme a quella generale delle varietà negli spazi a quante si vogliano dimensioni (L. 1°, § 23, Vol. I, pag. 137): dicesi *curva algebrica* il luogo dei punti (xyz) che viene rappresentato da equazioni parametriche del tipo

$$1) \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ y &= \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)} \\ z &= \frac{\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)} \end{aligned} \right\} \varphi(uv) = 0,$$

dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi$ sono simboli di funzioni razionali intere, e dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, possono suppersi in generale dello stesso grado. Se nella rappresentazione precedente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ non contengono v , nel qual caso la $\varphi = 0$ si riduce a $v = \text{cost.}$, si ha una curva *razionale*.

Le curve rappresentate dalle equazioni 1) sono in generale *gobbe* cioè non giacciono in un piano. Una curva algebrica dello spazio, si potrà sempre definire come parte comune a due o più superficie che si ottengono eliminando u e v fra le equazioni precedenti. Una curva che costituisca l'intera intersezione di due superficie $F = 0, \Phi = 0$, dicesi *intersezione completa*. Ma vi sono curve che non possono riguardarsi come intersezioni complete di due superficie: l'esempio più semplice è offerto dalle curve gobbe razionali il cui ordine è un numero primo, cioè dove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 sono funzioni di grado primo; il primo caso è quello notissimo della *cubica gobba*.

Ora ogni curva C , comune a due o più superficie algebriche, viene proiettata da un punto generico secondo un cono algebrico; infatti l'intersezione completa di due superficie viene proiettata secondo un cono algebrico, e perciò la curva comune a tre (o più) superficie sarà proiettata da un punto qualunque secondo il cono algebrico che si ottiene

(¹) Cfr., per es. ENRIQUES « G. Descrittiva » Parte II, Cap. III.

come parte comune dei coni proiettanti le intersezioni complete delle tre superficie a due a due. Se si sceglie come centro di proiezione il punto all'infinito dell'asse z , supposto avere rispetto a C una direzione generica, la C verrà proiettata parallelamente all'asse z secondo un cilindro algebrico $\varphi(xy) = 0$, le cui generatrici saranno segate in un sol punto da C ; si otterrà quindi una rappresentazione parametrica dei punti di C , che rientra come caso particolare nella 1), mediante formule del tipo

$$2) \quad \left. \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= \frac{\varphi_3(xy)}{\varphi_4(xy)} \end{aligned} \right\} \varphi(xy) = 0,$$

e nella quale si deve prescindere dalle rette parallele all'asse z che si ottengono in corrispondenza ai punti (xy) per cui $\varphi_3 = 0$ e $\varphi_4 = 0$. Qui giova osservare che la rappresentazione precedente non corrisponde ad una *curva gobba generale* — in rapporto alla definizione 1) — se non quando φ_3 e φ_4 soddisfino a particolari condizioni e legami; se φ_3 e φ_4 si assumono *a priori* nel modo più generale, accade che la curva rappresentata abbia un ordine m superiore all'ordine n di φ , e passi per il punto all'infinito dell'asse z (con la molteplicità $m - n$).

Una curva algebrica gobba dicesi *irriducibile* se è proiettata da un punto generico secondo un cono irriducibile; basta perciò che sia irriducibile il cono che proietta *semplicemente* la curva da un punto particolare (per modo che una generatrice di esso incontri in un sol punto la curva). L'irriducibilità di una curva gobba, come quella di una curva piana, (cfr. L. 2°, § 32) significa: in primo luogo che si può passare con continuità da un punto della curva a un altro qualsiasi, cioè che la curva dà luogo a una superficie di RIEMANN *connessa*; in secondo luogo che, nel passaggio anzidetto, insieme al punto variabile $(xy z)$ variano con continuità le derivate successive delle sue coordinate.

Tutti i coni proiettanti semplicemente una curva gobba dai punti dello spazio che sono fuori di essa hanno lo stesso ordine, che dicesi *ordine della curva* e designa il numero costante delle sue intersezioni con un piano il quale non ne contenga una parte (cfr. § 14). Quando il centro di proie-

zione O viene a cadere sopra la curva C , il cono proiettante $O(C)$ si riduce in generale d'ordine $n - 1$, staccandosi il piano osculatore in O . Il detto cono si abbassa all'ordine $n - 2$, ecc. ove O sia un punto *doppio* o *multiplo* della curva, cioè tale che ogni piano per O abbia ivi due o più intersezioni riunite con la C . Si noti che nasce un punto doppio della curva C , quando in C si segano due superficie aventi in O lo stesso piano tangente.

Così dal punto di vista precedente, come dal punto di vista della rappresentazione parametrica 1) assunta come definizione delle curve gobbe, appare che l'esistenza d'un *punto doppio* costituisce una *particolarità* che non appartiene alle curve gobbe più *generali* di un dato ordine. Ciò vale anche, rispetto alla stessa rappresentazione parametrica 1), dove si supponga che la curva $\varphi(uv) = 0$ possenga dei punti doppi, purchè le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, sieno assunte in modo che si annullino in codesti punti (il che è lecito di ritenere come il caso generale).

Ora risulta da quanto precede che la proiezione di una curva gobba C fatta da un centro O sopra un piano π , è in generale una curva d'ordine n , ma si riduce ad una curva d'ordine $n - 1$ se O cade in un punto (semplice) della curva. Siccome tutte le proiezioni piane di C sono fra loro in corrispondenza biunivoca, e quindi birazionale, esse avranno lo stesso genere p (cfr. paragrafo precedente), il quale si designerà come *genere della curva*. Segue di qui che la curva piana d'ordine n proiezione generica della curva gobba C , possiede sempre dei punti doppi (o multipli) all'infuori dei punti doppi che provengono per proiezione dagli eventuali D punti doppi effettivi della C ; precisamente si avrà:

$p \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2} - D$, e perciò si troveranno almeno

$$\left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{2} - D \right\} - \left\{ \frac{(n-2)(n-3)}{2} - D \right\} = n - 2$$

punti doppi siffatti, cioè tanti *punti doppi apparenti*, corrispondenti a corde della curva gobba passanti per il centro di proiezione.

A complemento delle nozioni elementari che qui riassumiamo sulle curve gobbe, giova ricordare che le tangenti ad

una curva gobba C costituiscono una *rigata sviluppabile*, cioè una rigata generata, come involuppo, dal movimento di un piano (osculatore alla C). In tutti i punti di una generatrice si ha il medesimo piano tangente, che è il piano osculatore suddetto. Questa proprietà caratterizza, come è noto, le rigate sviluppabili, indipendentemente dalla algebricità; mentre per ogni *rigata gobba* (cioè non sviluppabile) il piano tangente varia col variare del punto di contatto sopra una generatrice, per modo che si hanno ∞^2 anzichè ∞^1 piani tangenti (¹).

È pure noto che una sviluppabile, come serie ∞^1 di piani, costituisce l'ente duale di una curva nello spazio, questi piani essendo in generale osculatori ad una curva gobba. In particolare fra le sviluppabili figura il cono involuppo di piani come ente duale della curva piana, le generatrici del cono corrispondendo alle tangenti della curva piana. Qui si avverta che l'insieme delle tangenti ad una curva piana si può considerare come una rigata sviluppabile la quale ricopre il piano tante volte quante ne indica la classe della curva. Correlativamente il sistema ∞^2 dei piani passanti per le generatrici di un cono si riduce ad una stella multipla secondo l'ordine del cono.

Una rigata algebrica, sviluppabile o no, considerata come luogo di punti, costituisce una superficie rappresentata da un'equazione $f(xyz) = 0$; a tali superficie riferiamo le seguenti considerazioni, dove s'intende generalmente *eccepi*to il cono (e la sviluppabile piana). L'ordine di una rigata, ossia il numero delle sue intersezioni con una retta generica, è uguale al numero delle generatrici della rigata incidenti alla retta, e sotto questo aspetto si designa col nome di *grado della rigata*. La definizione del grado essendo correlativa di se stessa, il grado di una rigata designerà anche la *classe* dell'involuppo degli ∞^2 piani passanti per le generatrici della rigata; per una rigata gobba questi piani sono i piani tangenti alla superficie, mentre per una rigata sviluppabile, costituita dalle tangenti a C , essi risultano tangenti alla curva C e solo impropriamente alla superficie da quelle generata.

La rigata sviluppabile costituita dalle tangenti alla curva gobba C , possiede la C come *spigolo di regresso* o *curva cuspidale*: s'intende che ogni punto O di C è doppio per la super-

(¹) Cfr., per es. ENRIQUES « G. Descrittiva » Parte II, Cap. II e VI.

ficie e dà luogo ad una cuspidale per qualunque sezione fatta con un piano per O . Viceversa, ogni rigata che possenga una curva direttrice cuspidale è sviluppabile, perchè ogni generatrice incontra la curva in un punto, per il quale passa anche la generatrice infinitamente vicina, che riesce così incidente alla prima. Questo teorema infatti appartiene alla geometria differenziale; vale quindi in particolare per le rigate algebriche considerate nella loro interezza, purchè irriducibili.

Una rigata algebrica gobba (irriducibile) non possiede, per quanto si è detto una curva cuspidale; ma *ogni rigata di grado $n > 2$ possiede una curva doppia* (eventualmente sostituita da una curva di molteplicità più elevata) luogo dei punti per cui passano due generatrici della rigata, nella quale (essendo la curva *nodale*) si attraversano due falde della superficie. Si prova l'effettiva esistenza di una curva doppia *che incontri le generatrici della rigata in $n - 2$ punti*, nel modo che segue.

Si mandi per una generatrice p un piano qualsiasi α che segherà la rigata secondo una ulteriore curva k_{n-1} d'ordine $n - 1$. La k_{n-1} interseca p in $n - 1$ punti, ma uno solo di questi, A , è punto di contatto proprio del piano α con la superficie, giacchè il piano tangente in un punto variabile di p varia per p , descrivendo un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto (teorema di CHASLES). Pertanto gli altri $n - 2$ punti comuni a k_{n-1} e a p , fuori di A , resteranno fissi al variare del piano α per p , e costituiranno i punti doppi della rigata; i quali, al variare della generatrice p , descrivono una curva.

Per una *rigata generale*, cioè per la più generale superficie soddisfacente alla condizione di contenere ∞^1 rette (ossia per la rigata che corrisponde ad una curva generale della quadrica di S_3 rappresentativa dello spazio rigato — cfr. I. 1°, § 19; vol. I, pag. 118), si ha effettivamente una curva nodale e non una curva multipla di ordine > 2 , nè una curva cuspidale. Accade invece che una parte della curva doppia divenga cuspidale se la rigata è sviluppabile; in questo caso la curva cuspidale, spigolo di regresso, tocca semplicemente le generatrici, e fuori di essa rimane, per $n > 4$, una curva nodale che interseca le generatrici in $n - 4$ punti e che costituisce il luogo dei punti per cui passano due tangenti alla curva gobba spigolo di regresso. L'osservazione precedente si giustifica

osservando che, nel caso di una rigata sviluppabile, la proiezione fra i punti di una generatrice p e i piani per p diventa degenera; ad un punto generico corrisponde l'unico piano tangente lungo la generatrice che oscula lo spigolo di regresso C in un punto P , e così ad un piano generico per p corrisponde, come punto di contatto (improprio), l'unico punto P della generatrice. Ora accadrà che la sezione della rigata con un piano α per p , sarà — oltre p — una curva k_{n-1} avente con p un contatto tripunto nel punto P ; le rimanenti $n - 4$ intersezioni di k_{n-1} con p restano pure fisse, al variare del piano α per p , e forniscono punti della curva nodale.

A quanto abbiam detto vogliamo aggiungere l'avvertimento esplicito che, oltre la curva direttrice doppia (o multipla), una rigata può anche possedere delle *generatrici doppie* (o multiple). Così, per esempio, se una curva gobba C possiede una tangente doppia, questa costituisce una generatrice doppia per la rigata delle sue tangenti; precisamente sarà una retta *nodale*, dove si attraversano due falde della superficie, se si tratta di una tangente a contatti distinti; invece sarà una retta *cuspidale*, nell'intorno della quale la superficie consta di una sola falda, qualora si tratti di una tangente di flesso della C .

Passiamo ora a stabilire per le curve gobbe le

Formule di CAYLEY. A questo scopo essendo data una curva algebrica gobba C , considereremo una sua proiezione piana C' fatta da un punto generico; i caratteri di C' forniscono caratteri di C , fra i quali si trova un primo gruppo di tre relazioni, in corrispondenza alle formule di PLÜCKER relative alla C' . L'applicazione della legge di dualità nello spazio, ove alla curva gobba si associ la sviluppabile dei suoi piani osculatori, permette di dedurre dalle relazioni trovate altre tre relazioni fra i caratteri di C . Si hanno così 6 relazioni indipendenti, che costituiscono il gruppo delle formule di CAYLEY.

Noi supponiamo che la curva C' , proiezione piana generica di C , sia dotata soltanto di singolarità elementari, e così — dualmente — per la curva sezione piana della sviluppabile osculatrice formata dalle tangenti a C . In tali ipotesi si avranno a considerare per la curva C i seguenti caratteri:

1) L'ordine n , che è anche l'ordine della proiezione piana C' ; e dualmente:

2) la *classe* n' , cioè il numero dei piani osculatori alla curva gobba che passano per un punto generico; le tracce dei piani osculatori della curva gobba C sul piano di C' sono tangenti di flesso per questa curva proiezione.

3) Il numero d dei *punti doppi apparenti*, cioè il numero delle corde della curva gobba C che passano per un punto; alle quali corrispondono punti doppi della proiezione C' , non provenienti da punti doppi di C . Dualmente:

4) il numero d' delle « rette intersezioni di due piani osculatori a C » che appartengono ad un piano generico.

5) Il numero D dei *nodi* della curva C , e dualmente:

6) il numero D' dei piani *biosculatori* alla C .

7) Il numero k delle *cuspidi* di C , e dualmente:

8) il numero k' dei *piani stazionari*, cioè dei piani aventi un contatto quadripunto con la curva C .

9) Il numero t dei *piani bitangenti* alla curva gobba che passano per un punto generico, cioè la classe della sviluppabile costituita dai piani bitangenti; le tracce di codesti piani sul piano della curva C' sono tangenti doppie per questa curva proiezione. Dualmente:

10) l'*ordine* t' della *curva nodale* della rigata sviluppabile circoscritta alla C .

Infine si avranno ancora a considerare i tre caratteri auto-duali della rigata sviluppabile circoscritta alla curva gobba C :

11) il *rango* r di C , grado della rigata, cioè il numero delle tangenti a C che sono incidenti ad una retta generica;

12) il numero T delle *tangenti doppie* di C , generatrici doppie della predetta rigata;

13) il numero N delle *tangenti di flesso*, aventi contatto tripunto con C , che sono generatrici cuspidali della rigata sviluppabile.

Scriviamo per la curva C' , proiezione piana della C , le tre formule di PLÜCKER 1, 2, 7, del § 17, dalle quali seguono le altre dell'intero sistema 1....9; otterremo così le prime tre *formule* di CAYLEY:

$$1) \quad r = n(n-1) - 2(d+D) - 3k,$$

$$2) \quad n = r(r-1) - 2(t+T) - 3(n'+N),$$

$$3) \quad 3(r-n) = (n'+N) - k;$$

dalle quali si deducono per dualità nello spazio le altre tre formule

$$4) \quad r = n'(n' - 1) - 2(d' + D') - 3k',$$

$$5) \quad n' = r(r - 1) - 2(t' + T') - 3(n + N),$$

$$6) \quad 3(r - n') = (n + N) - k'.$$

Queste sei relazioni sono indipendenti e permettono di calcolare 6 fra i caratteri nominati della curva gobba C , quando si conoscano i rimanenti.

A codesti caratteri si può aggiungere il *genere* p della curva gobba, cioè il genere delle sue proiezioni piane, le quali si trovano in corrispondenza biunivoca l'una coll'altra. Del genere p si possono dare le seguenti espressioni notevoli:

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - (d + D) - k$$

$$p = \frac{1}{2}(n' - 1)(n' - 2) - (d' + D') - k'$$

$$p = \frac{1}{2}(r - 1)(r - 2) - (t + T) - (n' + N)$$

$$p = \frac{1}{2}(r - 1)(r - 2) - (t' + T') - (n + N);$$

alle quali aggiungiamo la formula

$$r = 2n + 2p - 2 - k,$$

che, per *curve gobbe prive di cuspidi*, si riduce alla forma

$$r = 2n + 2p - 2.$$

Si consideri una curva gobba C , di dato ordine n , variabile in dipendenza di parametri; accade che la C possa acquistare nodi e cuspidi appearing allora come *particolarizzazione* della C generale. In modo analogo si possono avere, per C particolari, delle tangenti doppie o di flesso, nonchè dei piani biseculatori. Ma per quanto sopra è stato osservato, una *curva gobba* di dato ordine che sia *generale* ai sensi della rappresentazione parametrica assunta come definizione, non possiede punti doppi; similmente si può vedere che essa non possiede neppure tangenti doppie o di flesso, giacchè

le rette dello spazio essendo ∞^4 e le tangenti ad una curva ∞^1 , l'esistenza di una tangente doppia porta *due* condizioni per la curva; infine una curva gobba generale non possiede neppure piani biosculatori, l'esistenza di un tal piano portando per la curva *una* condizione. Così per le curve gobbe generali si ha

$$D = k = D' = T = N = 0;$$

allora le formole di CAYLEY permettono di esprimere 6 caratteri delle curve gobbe generali in funzione di due di essi, per esempio dell'ordine e del rango (oppure del genere, essendo $r = 2n + 2p - 2$). Avremo le espressioni seguenti:

$$d = \frac{1}{2} \} n(n-1) - r \{ = \frac{1}{2} n(n-3) - (p-1) \quad (\text{Cfr. 1})$$

$$n' = 3(r-n) = 3(n+2p-2) \quad (\text{Cfr. 3})$$

$$t = \frac{1}{2} \} r(r-10) + 8n \{ \quad (\text{Cfr. 2})$$

$$t' = \frac{1}{2} r(r-4) \quad (\text{Cfr. 5})$$

$$k' = 6r - 8n = 4(n+3p-3) \quad (\text{Cfr. 6})$$

$$d' = \frac{1}{2} \} 9(r-n)^2 - 22r + 27n \{ \quad (\text{Cfr. 4})$$

Vi è luogo a chiedere se possa trovarsi un'ulteriore relazione che permetta di esprimere anche il rango d'una curva gobba generale per il suo ordine. L'analogia colle curve piane farebbe credere a questa possibilità, inducendo a ritenere che le curve gobbe d'ordine dato formino una sola famiglia, i cui elementi dipendono da parametri variabili in modo continuo. Ma il fatto è che « l'ordine e il rango (o il genere) d'una curva gobba costituiscono caratteri indipendenti ». Ciò risulta dalla scoperta fatta da SALMON (1849) ⁽¹⁾ di una *seconda specie di quartiche gobbe*, oltre a quelle che si ottengono come intersezioni complete di due quadriche e che hanno il rango 8 e il genere 1.

Vediamo come si sia condotti alla considerazione di tali curve trattando il problema della

Classificazione delle quartiche gobbe. Prendiamo le mosse dell'osservazione che: ogni quartica gobba (irriducibile) appar-

(1) Cambridge and Dublin. Math. Journal, t. 5, pag. 23.

tiene ad una superficie del second'ordine o quadrica. Infatti le quadriche dello spazio dipendono linearmente da 9 parametri (l'equazione del secondo grado in x, y, z contiene 10 coefficienti) sicchè esiste una quadrica passante per 9 punti di una quartica, e perciò (§ 14) contenente la quartica.

Ora sia C una quartica, e Q una quadrica passante per essa. La C dovrà avere quattro intersezioni con ogni conica sezione piana di Q e quindi in particolare colla sezione d'un piano tangente, cioè complessivamente quattro intersezioni con due generatrici di diverso sistema della Q . Potrà accadere che la C incontri le generatrici di ciascun sistema in due punti, oppure che incontri le generatrici d'uno dei due sistemi in un punto e quelle dell'altro in tre punti. È escluso che C possa incontrare una retta in quattro punti essendo irreducibile, giacchè un piano per tale retta, contenente un altro punto di C , avrebbe cinque intersezioni con C e quindi dovrebbe contenere l'intera curva.

Si possono effettivamente costruire su Q *quartiche di prima specie* intersecanti le generatrici dei due sistemi in due punti; tali sono le intersezioni di Q con un'altra quadrica. Si verifica che tutte le quartiche di prima specie si ottengono in tal guisa come intersezione completa di Q con un'altra quadrica, contando il numero dei parametri che entrano linearmente nella determinazione delle quartiche di prima specie e delle intersezioni complete delle quadriche con Q . Queste ultime sono ∞^8 giacchè le quadriche sono ∞^9 e per la curva comune a due quadriche $f=0$ e $\varphi=0$ passano le ∞^1 quadriche del fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$; e altrettante sono le quartiche di prima specie appartenenti a Q , giacchè tutte si ottengono come sezioni di Q coi coni del quart'ordine che le proiettano da un punto O di Q , i quali posseggono come rette doppie le due generatrici di Q per O .

D'altra parte si possono costruire su Q *quartiche di seconda specie*, intersecanti in tre punti le generatrici d'un sistema: a, b, \dots e in un punto le generatrici del sistema opposto. A tale scopo occorre segare Q con una superficie cubica passante per a, b ; la curva sezione, privata delle due rette a, b , è una quartica che sega le generatrici di Q incidenti ad a, b in un punto, ed invece sega le generatrici sghembe ad a, b , cioè le generatrici dello stesso sistema, in tre punti. Si prova che tutte le quartiche di seconda specie

giacenti su Q e secanti a e b in tre punti, sono sezioni parziali di superficie cubiche passanti per a e b , mediante un semplice computo delle costanti che entrano linearmente nella determinazione delle nostre curve. Le superficie cubiche dello spazio sono ∞^{19} , e quelle che passano per le due rette date a , b , soddisfano a $4 + 4 = 8$ condizioni, sicchè a prima vista vi sono ∞^{11} quartiche-sezioni su Q ; questo numero si riduce di 4, poichè per ogni quartica passano ∞^4 superficie cubiche linearmente indipendenti, fra cui ∞^3 spezzate in Q ed in un piano residuo. Ordunque esistono, su Q , ∞^7 quartiche di seconda specie intersecanti a e b in tre punti. D'altra parte esistono esattamente ∞^7 quartiche di seconda specie intersecanti le generatrici a e b in tre punti; come si vede contando i coni del 4° ordine proiettanti la curva da un punto O di Q , i quali soddisfano alla condizione di possedere come tripla la generatrice appartenente al sistema di a e come semplice l'altra generatrice. Si conclude che tutte le quartiche di seconda specie si ottengono, su Q , come sezioni parziali di superficie cubiche, nel modo anzidetto.

Ora osserviamo che, essendo C una quartica di prima specie, per un punto generico O dello spazio passano due corde di C , che sono le generatrici della quadrica contenente C e O ; così il numero dei punti doppi apparenti di C vale $d = 2$. Invece se la C è una quartica di seconda specie, preso il punto O in un punto generico della quadrica contenente C , vi è per O una trisecante di C che equivale a tre corde; pertanto quando O è un punto generico fuori della quadrica vi sono per esso tre corde di C , e quindi il numero dei punti doppi apparenti di C vale ora $d = 3$.

Al diverso numero dei punti doppi apparenti si lega il diverso valore del genere delle due quartiche: per la quartica di prima specie il genere vale $p = 1$, e per la quartica di seconda specie $p = 0$. Ciò è d'accordo col fatto (cfr. § 17) che la quartica di seconda specie è una curva razionale come la sua proiezione piana. Le coordinate x , y , z dei punti della curva si esprimono infatti come funzioni razionali di un parametro; si ottiene effettivamente questa espressione parametrica cercando l'intersezione variabile della quartica con un piano condotto per una sua trisecante, questo punto dipende razionalmente dal parametro che determina il piano entro il fascio.

Viceversa: una curva gobba razionale del quart'ordine,

senza punti doppi, è una quartica di seconda specie; sicchè si ottiene la più generale quartica di seconda specie ponendo x, y, z funzioni razionali fratte di quarto grado di un parametro t con lo stesso denominatore. Infatti la curva senza punti doppi che così viene rappresentata ha l'ordine $n=4$ e il genere $p=0$, quindi $d=3$.

A quanto abbiain detto sulla classificazione delle curve gobbe d'ordine $n=4$, aggiungiamo che per $n > 4$ non bastano neppure i caratteri n e d a determinare una famiglia di curve gobbe; intervengono nella classificazione nuovi caratteri indipendenti, sicchè la classificazione stessa viene a costituire un problema straordinariamente complesso; al quale si riferiscono gli studi di HALPHEN e NÖTHER del 1882 ⁽¹⁾.

Ma non è qui il luogo per trattare di tale argomento, cui si è voluto accennare soltanto a scanso di erronee induzioni o interpretazioni dei risultati precedenti.

Osservazione. Nelle formole di CAYLEY scritte innanzi, non si fa differenza fra i punti doppi apparenti e i punti doppi effettivi della curva, comparando in esse la somma $d+D$ (e similmente si dica per riguardo ai caratteri duali). A questa circostanza si collega la possibilità che, per variazione continua, qualesuno dei punti doppi apparenti della curva venga sostituito da un punto doppio effettivo.

Così, ad esempio, la curva razionale del quart'ordine che si è designata come quartica gobba di seconda specie, ed è rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} = \frac{a_1 t^4 + b_1 t^3 + c_1 t^2 + d_1 t + e_1}{\psi(t)} \\ y &= \frac{\varphi_2(t)}{\psi(t)} = \frac{a_2 t^4 + b_2 t^3 + c_2 t^2 + d_2 t + e_2}{\psi(t)} \\ z &= \frac{\varphi_3(t)}{\psi(t)} = \frac{a_3 t^4 + b_3 t^3 + c_3 t^2 + d_3 t + e_3}{\psi(t)} \end{aligned} \right\} \psi(t) \neq 0,$$

acquista un punto doppio nell'origine quando si faccia

$$d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = d_3 = e_3 = 0,$$

⁽¹⁾ HALPHEN « Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques » (Journal de l'École polytec., 1882); NÖTHER « Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven » (Berliner Abh., 1882).

diventando allora comune ad ∞^1 quadriche che vengono determinate dal passaggio per il punto doppio e per altri 7 punti della curva; mentre nel caso generale quella quartica appartiene ad una sola quadrica, sulla quale viene segata da una superficie cubica che ne contiene due generatrici di uno stesso sistema. Ma poichè la quartica gobba di seconda specie, senza punti doppi, possiede tre punti doppi apparenti, risulta che quando la curva acquista un punto doppio, questo sostituisce uno dei tre punti doppi apparenti.

Qui importa avvertire che la quartica razionale con punto doppio, considerata innanzi, si presenta anche come caso particolare di una quartica di prima specie, intersezione (completa) di due quadriche, quando queste diventano tangenti; nella quale particolarizzazione il punto doppio effettivo non *sostituisce* più un punto doppio apparente, ma *si aggiunge* ai due posseduti dalla quartica di prima specie.

L'esempio precedente mostra che le curve gobbe con punti doppi effettivi si possono ritenere generalmente come enti particolari di diverse famiglie di curve dello stesso ordine, aventi fra loro diverso genere.

Chiuderemo questo paragrafo scrivendo la

TABELLA DEI CARATTERI DELLE CUBICHE E QUARTICHE GOBBE GENERALI E DELLA CURVA INTERSEZIONE COMPLETA DI DUE SUPERFICIE.

Cubica gobba. La cubica, essendo segata dai piani per una corda in un sol punto variabile è curva razionale (L. 2°, § 23); si avrà:

$$n = 3, \quad p = 0, \quad r = 4$$

$$d = 1, \quad n' = 3, \quad t = 0, \quad t' = 0, \quad k' = 0, \quad d' = 1.$$

Quartica gobba di prima specie.

$$n = 4, \quad p = 1, \quad r = 8$$

$$d = 2, \quad n' = 12, \quad t = 8, \quad t' = 8, \quad k' = 16, \quad d' = 38.$$

Si osserverà la seguente verifica: il carattere $n' = 12$ si ottiene anche notando che la proiezione della quartica fatta da un suo punto è una cubica con 9 flessi, e tenendo conto che il piano osculatore in un punto, O , della quartica deve contare per tre fra i piani della sviluppabile osculatrice pas-

santi per O , poichè O è intersezione di tre piani osculatori infinitamente vicini.

Quartica gobba di seconda specie.

$$n = 4, \quad p = 0, \quad r = 6$$

$$d = 3, \quad n' = 6, \quad t = 4, \quad t' = 6, \quad k' = 4, \quad d' = 6.$$

La classe della curva si può anche valutare, come per la quartica di prima specie, osservando che la proiezione di C da un suo punto è una cubica con punto doppio, che ha perciò 3 flessi. Si verifica anche che la quartica possiede 4 piani stazionari i cui punti di contatto si ottengono su questa curva razionale come punti uniti di una corrispondenza [3, 1]: infatti se ad ogni punto A si fa corrispondere il punto A' , intersezione del piano osculatore in A , si ottiene la predetta corrispondenza [3, 1].

Curva intersezione completa di due superficie d'ordine μ, ν .

Seguendo una delle vie che vengono appresso indicate, si trovano, nel caso generale, i seguenti caratteri della nostra curva C :

$$D = k = D' = T = N = 0$$

$$n = \mu\nu, \quad d = \frac{1}{2} \mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1), \quad p = \frac{1}{2} \mu\nu(\nu + \mu - 4) + 1$$

$$r = \mu\nu(\nu + \mu - 2)$$

$$n' = 3\mu\nu(\nu + \mu - 3)$$

$$t = \frac{1}{2} \mu\nu \{ \mu\nu(\nu + \mu - 2)^2 - 10(\mu + \nu - 1) + 28 \}$$

$$t' = \frac{1}{2} \mu\nu(\nu + \mu - 2) \{ \mu\nu(\nu + \mu - 2) - 4 \}$$

$$k' = \mu\nu(6\mu + 6\nu - 20)$$

$$d' = \frac{1}{2} \mu\nu \{ 9\mu\nu(\nu + \mu - 3)^2 - 22(\mu + \nu) + 71 \}.$$

In virtù delle formole di CAYLEY basta calcolare, oltre l'ordine $n = \mu\nu$, un altro dei caratteri, per esempio d o r o p . CAYLEY (1845), al termine della citata memoria che contiene le relazioni fra i caratteri delle curve gobbe, dà, senza dimostrazione, il valore del numero dei punti doppi appa-
renti di una C intersezione completa di due superficie f_μ e φ_ν .

Questo numero si lascia scoprire facilmente, riducendosi per continuità al caso particolare in cui, per esempio, la φ , degeneri in ν piani. Si avvertirà che i punti doppi di C , comuni a due sezioni piane, non corrispondono a corde della C condotte per un punto, e quindi non sono limiti di punti doppi apparenti. Così il numero dei punti doppi apparenti della C si ottiene calcolando le rette passanti per un punto che si appoggiano ad una coppia di sezioni di f_μ in punti distinti, cioè fuori dei μ punti che esse hanno in comune:

$$d = \binom{\nu}{2} (\mu^2 - \mu) = \frac{1}{2} \nu(\nu - 1)\mu(\mu - 1).$$

Lo stesso numero d si può valutare mercè un calcolo analitico diretto, che si trova sviluppato dal SALMON ⁽¹⁾ (1849). In questo modo si prova che i punti doppi di una proiezione piana C' della C si ottengono segnando la C' (d'ordine $\mu\nu$) con una curva d'ordine $(\mu - 1)(\nu - 1)$ che passa semplicemente per i punti doppi di C' . Il qual risultato si connette ad un teorema pertinente alla geometria sopra una curva stabilito dal NÖTHER ⁽²⁾, che dà ragione del fatto che la C viene segata in $2p - 2$ punti da una superficie d'ordine $\mu + \nu - 4$.

Indipendentemente dal numero dei punti doppi apparenti della C , SALMON (1849) ne ha pure determinato il rango ⁽³⁾. Ciò può farsi sinteticamente come segue. Si tratta di trovare il numero delle tangenti a C che incontrano una retta a . A tale scopo si consideri un punto A variabile sopra a ; le sue polari rispetto ad f e φ descrivono due fasci proiettivi di superficie d'ordine $\mu - 1$ e $\nu - 1$, le cui intersezioni variabili generano una superficie d'ordine $\mu + \nu - 2$ (cfr. L. 2°, § 17); questa superficie interseca la C in $\mu\nu(\mu + \nu - 2)$ punti, che sono i punti di contatto delle tangenti di C incidenti ad a .

19. Nota su alcuni caratteri delle superficie: formule di Salmon. — Un'altra applicazione delle formule di PLÜCKER, che ne costituisce una interessante estensione, concerne i *piani bitangenti delle superficie*.

(1) Cfr. il citato trattato di Geometria a tre dimensioni, n. 343.

(2) Math. Annalen, Bd. 8, pag. 511, (1874).

(3) Cfr. SALMON, ibidem, n. 342.

Sia $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ una superficie algebrica generale d' un certo ordine n , priva di punti doppi, sicchè in un punto qualsiasi di essa esista un piano tangente determinato:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} y_4 = 0.$$

Il piano tangente in un punto generico sega f secondo una curva dotata di nodo; ma vi è su f una *curva parabolica*, luogo di punti la cui sezione col piano tangente possiede una cuspidale. Per nessuna superficie irreducibile all'infuori delle sviluppabili (che sono superficie rigate dotate d' una curva cuspidale) può accadere che non solo ∞^1 punti ma ∞^2 punti sieno parabolici ⁽¹⁾.

Ora: *la curva parabolica d' una superficie generale d' ordine n è la curva gobba d' ordine $4n(n-2)$ intersezione della f colla sua hessiana:*

$$h = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right| = 0.$$

Infatti si consideri la hessiana di f . Essa è il luogo tanto dei punti doppi delle superficie prime polari

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0,$$

quanto dei punti le cui quadriche polari hanno un punto doppio; la coincidenza delle due definizioni si vede, come al § 7 (pag. 49), in base al teorema di permutabilità di PLÜCKER.

Ora se f ed h hanno comune un punto (semplice) O , esisterà, nel piano tangente ad f in O , un punto P , diverso da O , la cui polare ha in O un punto doppio. Ma la superficie polare di P contiene le curve polari di P rispetto alle sezioni piane di f , fatte coi piani per la retta PO . Si deduce che tutte codeste sezioni piane hanno la PO come tangente di flesso in O , salvo la sezione col piano tangente, che ha in O una cuspidale e la PO come tangente cuspidale. Invero abbiám visto (§ 4, pag. 29) che se un punto doppio O di una curva è doppio per la polare di un punto P , diverso da O , occorre che O sia una cuspidale e PO la tangente cuspidale (salvo casi particolari di singolarità superiori).

⁽¹⁾ Cfr. per es. ENRIQUES « G. Descrittiva » Parte II, § 48.

Viceversa si prova che un punto O , parabolico per f , appartiene alla hessiana h , dimostrando che la quadrica polare di O possiede un punto doppio P . Infatti si consideri una sezione di f fatta con un piano che contenga la tangente principale in O ; rispetto a questa sezione, O ha una conica polare dotata di un punto doppio P , che si trova sulla detta tangente principale; ora P è anche punto doppio per la conica polare di O rispetto alla sezione col piano tangente, la quale ha in O una cuspidè; si deduce che P è doppio per la quadrica polare di O e quindi appartiene all'hessiana. c. d. d.

I piani tangenti alla superficie f , condotti per un punto qualunque A , involuppano un cono circoscritto, le cui generatrici sono le tangenti ad f per A . La f essendo una superficie generale dell'ordine n , il cono circoscritto da un punto generico è d'ordine $n(n-1)$, uguale alla classe delle sezioni piane di f , e di classe $n(n-1)^2$, questo numero designando la classe della superficie f , cioè il numero dei piani tangenti ad f che passano per una retta p ; infatti le polari di due punti qualunque di p si segano secondo una curva d'ordine $(n-1)^2$ che ha comuni con f i punti di contatto dei piani tangenti condotti da p ⁽¹⁾; la curva gobba d'ordine $n(n-1)$ secondo cui il suddetto cono tocca f , è intersezione completa di f con la prima polare di A e dicesi *contorno apparente* di f rispetto ad A ; essa verrà designata con C .

Ora del cono circoscritto ad f da A , conosciamo due caratteri; l'ordine e la classe; occorre un altro carattere per la risoluzione delle formole di PLÜCKER ad esso relative. A tale scopo basta determinare, per es., il numero delle generatrici cuspidali del cono, che sono le tangenti a C per A , cioè le tangenti principali di f (rette aventi un contatto tripunto con la superficie) passanti per A . E perciò si osserverà che il punto di contatto, D , di una tale tangente principale, appartiene alla seconda polare di A , e reciprocamente. Così le generatrici cuspidali del cono $A(C)$ sono date dalle intersezioni di C con la seconda polare, cioè sono in numero di

$$k = n(n-1)(n-2).$$

Mercè le formole di PLÜCKER si trovano ora: il numero δ

(1) La classe di una superficie generale fu trovata da PONCELET nel 1824. Cfr. Journal für Math., Bd. 4, (1828).

delle generatrici doppie del cono $A(C)$, il numero τ dei piani bitangenti ad esso, e il numero i dei piani stazionari (tangenti lungo una generatrice di flesso). Questi caratteri hanno un significato evidente rispetto alla superficie f , tranne l'ultimo, a proposito del quale giova osservare che: un piano stazionario del cono circoscritto $A(C)$ deve ritenersi piano stazionario della superficie f , cioè piano tangente ad essa in due punti infinitamente vicini. *I piani stazionari di f sono i piani tangenti nei punti parabolici* (SALMON, 1847⁽¹⁾); infatti se un piano π sega f secondo una curva dotata di cuspide P , con tangente cuspidale p , la tangente p è coniugata a tutte le altre tangenti per P , il che significa che il piano tangente nel punto infinitamente vicino a P su p coincide con π . (Ciò si vede anche osservando che il paraboloide osculatore è in questo caso un cilindro parabolico).

Ciò posto abbiamo che:

Per un punto esterno ad una superficie generale d'ordine n passano

$$k = n(n-1)(n-2)$$

tangenti principali,

$$\delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

rette bitangenti,

$$i = 4n(n-1)(n-2)$$

piani stazionari, e

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$$

piani bitangenti.

Queste formule sono dovute a SALMON⁽²⁾, che iniziò lo studio della questione nel 1846.

Di alcuni fra i numeri determinati nell'enunciato precedente si può dare una facile verifica. Anzitutto siccome la curva C è intersezione completa della f d'ordine n con una

⁽¹⁾ Cfr. G. Analitica a tre dimensioni, n. 269.

⁽²⁾ Cambridge and Dublin Math. Journal t. 2 (1846), t. 4 (1849). Transactions of the R. Irish Acad., 23, 1857.

Cfr. CREMONA: « Preliminari di una teoria geometrica delle superficie », parte seconda, n. 61 e seguenti. Opere, t. II, pag. 334 e seg.

polare d'ordine $n - 1$, il numero dei punti doppi apparenti della C , in relazione a un punto generico dello spazio, sarà (§ 18)

$$\delta + k = \frac{1}{2} n(n - 1)^2(n - 2).$$

In secondo luogo i punti di contatto dei piani tangenti stazionari condotti da A sono le intersezioni del contorno apparente C con la curva parabolica di f , che è d'ordine $4n(n - 2)$, quindi, intersecando questa linea parabolica con la polare di A si avrà:

$$i = 4n(n - 2) \cdot (n - 1).$$

Qui vi è luogo ad osservare che reciprocamente la conoscenza di i permetterebbe di determinare l'ordine della curva parabolica. E così la conoscenza di τ ci porge il numero delle intersezioni che la polare di A , d'ordine $n - 1$, ha con la curva K luogo dei punti di contatto dei piani bitangenti ad f ; onde si trae l'ordine di K : *il luogo dei punti di contatto dei piani bitangenti ad una superficie generale d'ordine n è una curva d'ordine*

$$n(n - 2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

Osservazione. Se il punto A cade sopra la superficie f , il cono circoscritto da A si riduce d'ordine

$$n(n - 1) - 2,$$

staccandosi due volte il piano tangente in A ; ora il contorno apparente C acquista in A un punto doppio, e le tangenti principali in esso sono le tangenti principali di f per A . La seconda polare di A tocca in A la f e possiede le medesime tangenti principali, quindi (se A è punto generico di f) la C ha con questa polare esattamente 6 intersezioni riunite in A ; si trova così il numero delle rette condotte per A che hanno altrove un contatto tripunto con la superficie:

$$k' = k - 6 = n(n - 1)(n - 2) - 6.$$

Ciò posto si può calcolare il numero δ' delle bitangenti ad f per A che toccano f in punti distinti da A ; infatti si conosce il genere della C che, per l'acquisto di un punto

doppio, diminuisce di un'unità in confronto al caso generale; segue

$$\delta' = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2).$$

Infine calcolando il numero dei piani bitangenti al cono circoscritto $A(C)$, si troverebbe uno di più che nel caso generale; ma è da osservare che il piano tangente ad f in A tocca il predetto cono circoscritto secondo le due tangenti principali, giacchè le due tangenti principali della curva sezione col piano tangente in A assorbono 4 fra le tangenti condotte da A , in confronto ad una sezione generica per A . Così il numero dei piani bitangenti alla superficie condotti per A conserva il suo valore $\tau' = \tau$. Nello stesso modo il numero dei piani stazionari condotti per A conserva il suo valore $i' = i$. L'invarianza di τ e di i risulta chiara *a priori* se si prende A fuori della rigata sviluppabile generata dai piani bitangenti o, rispettivamente, dai piani stazionari di f , designando τ e i le classi di codeste sviluppabili.

Applichiamo i risultati precedenti al caso delle superficie cubiche: $n = 3$. Osservando che un piano bitangente sega la superficie, f , secondo una curva composta di una retta e d'una conica, si deduce: *La superficie cubica generale contiene 27 rette.*

Infatti il cono circoscritto alla superficie f da un punto O , situato su di essa, è un cono del 4° ordine, evidentemente privo di generatrici doppie; perciò vi sono 28 piani bitangenti al detto cono (§ 17); uno di questi è il piano tangente ad f in O , gli altri 27 sono i piani proiettanti da O le 27 rette giacenti sulla superficie.

Appunto mediante la considerazione del cono circoscritto da un punto (che egli assume fuori della superficie) CAYLEY ⁽¹⁾ (1849), adoperando le formole di SALMON, ha dimostrato l'esistenza di 27 rette appartenenti ad una superficie cubica, e ha trovato anche le proprietà fondamentali d'incidenza che vi si riferiscono. Ma la scoperta delle 27 rette appartiene a SALMON ⁽²⁾, che vi è giunto movendo dall'equazione canonica della superficie cubica: $f = x_3\varphi_2 + x_4\psi_2 = 0$, ove si pone in evidenza una retta $p: x_3 = x_4 = 0$. Annullando il discriminante

(1) Cambridge and Dublin. Math. Journal, t. 4.

(2) Cfr. CAYLEY, l. c.

della conica sezione d'un piano $\alpha x_3 + \beta x_4 = 0$, si ottengono 5 piani, passanti per la retta p , che intersecano la superficie secondo una coppia di rette; così si trovano sopra f 10 rette incidenti alla p , distribuite in 5 trilateri, di cui p è un lato. Ora, partendo da un trilatero pqr , si troveranno altre $8 + 8 = 16$ rette appartenenti ad f che, insieme alla p e alle rette ad essa incidenti, danno tutte le 27 rette appartenenti ad f . Così appare anche che le 27 rette di f si distribuiscono in $\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$ piani tritangenti, cioè secanti f in altrettanti trilateri.

Per ottenere mediante un calcolo analitico diretto le 27 rette della superficie cubica f , si è condotti a scrivere le condizioni perchè una retta r incontri quattro sezioni piane di f : C_1, C_2, C_3, C_4 ; se la r si appoggia alle C in punti distinti, essa giace su f . Ma così procedendo ⁽¹⁾ si ottengono anche soluzioni estranee al problema, quali sono le rette che passano per un punto comune a due C e si appoggiano alle altre due. Valutando il grado della rigata generata dalle rette che si appoggiano a C_1, C_2, C_3 , si trova $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$; ma da questa rigata si staccano 9 conici cubici, sicchè rimane una rigata di grado 27. Questa incontra C_4 in $3 \cdot 27 = 81$ punti, a cui corrispondono altrettante rette incidenti a C_1, C_2, C_3, C_4 ; ma occorre qui scartare le rette che passano per un punto comune a C_4 e a una delle C_1, C_2, C_3 , sicchè rimangono

$$81 - 6 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

rette.

D'altra parte SALMON (1849) ha dimostrato che l'insieme delle 27 rette di una superficie cubica f , costituisce l'intersezione completa di f con una superficie del nono ordine, di cui ha scritto l'equazione, anche in forma invariante (1857) ⁽²⁾.

Osservazione. Aggiungeremo che: un punto doppio conico (le cui tangenti principali formano un cono irriducibile del 2° ordine) diminuisce la classe della superficie cubica da 12 a 10, e diminuisce il numero delle rette di 6; si trovano infatti su f 6 rette passanti per il punto doppio ed altre 15 rette. Si

⁽¹⁾ Cfr. per es. ENRIQUES. « G. Descrittiva ». Parte II, § 54.

⁽²⁾ Cfr. anche per notizie complementari l'articolo III, C. 6 *a* di F. MEYER nella Encyclopädie der math. Wissenschaften.

osservino ulteriormente i casi in cui la f acquista 2, 3, 4 punti doppi conici: la superficie cubica con 4 punti doppi ha il massimo numero di punti doppi che possa avere senza possedere una retta doppia; essa è di classe 4 e contiene soltanto 9 rette, cioè i 6 spigoli del tetraedro formato dai 4 punti doppi, ed altre 3 rette incidenti alle tre coppie di spigoli opposti del detto tetraedro. Tutti questi risultati si trovano con lo stesso metodo del cono circoscritto, e la loro dimostrazione può costituire un utile esercizio per il lettore.

Aggiungeremo la notizia che SALMON nel 1855 (cfr. Transactions of the Irish Ac. vol. 23, pag. 461), studiando la sviluppabile circoscritta dei piani bitangenti è riuscito anche a determinare il numero dei piani tritangenti a una superficie generale d'ordine n , che vale

$$\frac{1}{6} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 548n - 960).$$

20. Punti doppi delle curve di un fascio. — Si abbia un fascio di curve d'ordine n :

$$\lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Le curve del fascio dotate di un punto doppio si ottengono annullando simultaneamente i minori estratti dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

cioè ponendo:

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0,$$

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

$$3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

Infatti le equazioni 1), 2), 3) si ottengono eliminando λ e μ

fra le 3 equazioni

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

che vengono verificate dalle coordinate di un punto (x) doppio per una curva del fascio.

Ora le curve rappresentate dalle equazioni 1) e 2) sono d'ordine $2(n-1)$ e s'intersecano in $4(n-1)^2$ punti; queste intersezioni sono comuni anche alla curva 3), quando non appartengono simultaneamente alle due curve

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0;$$

scartando così gli $(n-1)^2$ punti comuni a queste, rimangono $3(n-1)^2$ punti doppi per le curve del nostro fascio. Si conclude che: *un fascio di curve d'ordine n contiene in generale $3(n-1)^2$ curve dotate di punto doppio.*

Il gruppo dei punti doppi d'un fascio, rappresentato dalle equazioni 1) 2) 3), dicesi *gruppo jacobiano* del fascio. Esso può definirsi geometricamente interpretando le precedenti equazioni, come segue (1): si considerino tre punti non in linea retta (i vertici del triangolo fondamentale per le coordinate); le prime polari di questi punti rispetto alle curve del dato fascio formano tre fasci proiettivi; il nostro gruppo jacobiano è costituito dai punti per cui passano tre curve omologhe di questi fasci; invero le curve 1), 2), 3) sono generate come luogo delle intersezioni delle curve omologhe, da due tra i fasci proiettivi anzidetti (Cfr. L. 2°, § 17).

Il gruppo jacobiano può contenere dei punti multipli, oppure può diventare indeterminato, le curve 1) 2) 3) avendo una componente comune, nei casi che esamineremo in appresso.

Intanto giova osservare che, ove le curve del fascio siano rappresentate in coordinate cartesiane non omogenee da

$$\lambda f(xy) + \mu \varphi(xy) = 0,$$

il gruppo jacobiano si ottiene annullando i minori estratti

(1) Cfr. CREMONA « Introduzione... », Opere t. I, pag. 392.

dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & f \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \varphi \end{vmatrix}.$$

Le tre equazioni così ottenute:

$$\text{I)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} f = 0$$

$$\text{II)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} \varphi = 0$$

$$\text{III)} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

dove si faccia $x_3 = 1$, $x = x_1$, $y = x_2$, risultano combinazioni lineari delle precedenti 1), 2) e 3), per il teorema di EULERO.

Nel sistema scritto innanzi, le prime due equazioni sono d'ordine superiore alle 1), 2); ma nella ricerca delle soluzioni comuni si debbono scartare le soluzioni improprie all'infinito, cioè le intersezioni della retta $x_3 = 0$ con la curva 3), che qui sono state introdotte; per verità queste soluzioni vengono scartate automaticamente, quando si passa alle coordinate cartesiane facendo $x_3 = 1$.

Osservazione. Il gruppo jacobiano può essere definito anche in relazione a due curve $f(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ di ordini diversi: n , m . Annullando la matrice formata con le derivate parziali di f e φ , si determina appunto un gruppo di

$$(n-1)^2 + (n-1)(m-1) + (m-1)^2$$

punti, covariante di f e φ , che dicesi *jacobiano delle due curve*. Proprietà generale del gruppo jacobiano, valida per curve di ordine uguale o diverso, è che *i punti di esso posseggono la medesima retta polare rispetto alle due curve*.

Qui occorre notare che se si scrivono le equazioni delle due curve d'ordine diverso in coordinate non omogenee:

$$f(xy) = 0, \quad \varphi(xy) = 0,$$

l'annullamento della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & f \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \varphi \end{vmatrix}$$

non rappresenta più il gruppo jacobiano delle due curve definito innanzi, bensì il gruppo jacobiano del fascio che esse determinano quando la curva d'ordine minore venga completata con la retta all'infinito; ed è chiaro che quest'ultimo gruppo non è legato proiettivamente alle due curve nominate.

Riferiamoci al gruppo jacobiano d'un fascio, supponendo che esso non sia indeterminato, cioè che le curve 1), 2), 3), oppure le I), II) III), abbiano in comune un numero finito di punti. Ci proponiamo di ricercare quanti punti del gruppo jacobiano vengano assorbiti:

a) in un punto che sia r -plo per una curva del fascio e cada fuori dei punti base;

b) in un punto base r -plo per le curve del fascio.

a) Sia un punto P , fuori dei punti base del fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$, r -plo (con $r \geq 2$) per una curva di questo; si può supporre che P sia r -plo per f e non appartenga a φ . Il punto P sarà $(r - 1)$ -plo per le curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e quindi $(r - 1)$ -plo (almeno in generale) per le curve I) II); non appartenendo esso alla $\varphi = 0$ figurerà appunto $(r - 1)^2$ volte nel gruppo jacobiano, salvo a contare un numero maggiore di volte nei casi che procediamo a esaminare.

In primo luogo supponiamo che il punto r -plo, P , di f sia a tangenti distinte e cada nel punto origine (00). Il detto punto sarà $(r - 1)$ -plo per le curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, mentre è r -plo per $f = 0$. Tenuto conto che $\varphi(00) \neq 0$, si deduce che la curva I) ha in P precisamente la molteplicità $r - 1$, ed ammette come tangenti le $r - 1$ rette tangenti alla $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; similmente la curva II) ha in P la molteplicità $r - 1$ e tocca

ivi le rette tangenti alla $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Ma queste due curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (polarî dei punti all'infinito degli assi) non hanno in P tangenti comuni se, come si è supposto, le tangenti principali della curva f sono distinte. Si conclude dunque che *un punto r -plo per una curva del fascio, che sia fuori dei punti base e dove si abbiano tangenti distinte, ha esattamente la molteplicità $(r - 1)^2$ per il gruppo jacobiano, equivalendo così a $(r - 1)^2$ punti doppi del fascio.*

Il punto P assorbe un maggior numero di punti del gruppo jacobiano quando le tangenti ad f in esso non sono distinte. La stessa analisi precedente mostra che se $\nu (> 1)$ tangenti coincidono in una retta, questa figura come $\nu - 1$ tangenti comuni alle due curve I) e II), sicchè: *un punto r -plo P con ν_1, ν_2, \dots tangenti coincidenti conta in generale per*

$$(r - 1)^2 + \Sigma(\nu - 1)$$

punti doppi del fascio. Un esame più minuto permetterebbe di riconoscere che tale è precisamente l'equivalenza del punto r -plo P , quando si escluda il caso di singolarità straordinarie.

b) Pongasi ora che il fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$ possenga un punto base r -plo, P , il quale cada nell'origine (00). Il punto P sarà allora $(2r - 1)$ -plo per le curve I) e II); ma accade che queste curve abbiano $2r - 2$ tangenti comuni. Infatti, scrivendo come più volte si è fatto:

$$f = f_r + f_{r+1} + \dots, \quad \varphi = \varphi_r + \varphi_{r+1} + \dots,$$

i termini di più basso grado nella equazione I) vengono dati dal determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial y} & f_r \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} & \varphi_r \end{vmatrix} = \frac{x}{r} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial y} & \frac{\partial f_r}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} \end{vmatrix},$$

dove il passaggio è giustificato dal teorema di EULERO; e similmente i termini di più basso grado nell'equazione II)

sono dati dal determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} & \varphi_r \\ \frac{\partial f_r}{\partial x} & f_r \end{vmatrix} = \frac{y}{r} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x} & \frac{\partial f_r}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Ammettendo che le curve I) e II) abbiano in P contatti semplici, si trova che P assorbe $(2r-1)^2 + 2r - 2$ intersezioni delle due curve; ma da questo numero dobbiamo sottrarre il numero r^2 che designa le intersezioni delle f e φ , nell'ipotesi che le curve del fascio abbiano in P tangenti variabili. Così siamo tratti a dedurre che: *un punto base r -plo del fascio, a tangenti variabili, assorbe in generale*

$$(r-1)(3r+1)$$

punti del gruppo jacobiano.

Occorre riconoscere più precisamente sotto quali condizioni la conclusione viene veramente giustificata. Per ciò si dovrebbe calcolare le costanti caratteristiche dei rami delle due curve (§ 12); ma possiamo dispensarci da questo calcolo in base all'osservazione che l'equivalenza del punto P può essere valutata, invece che per il fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$, per il fascio delle curve approssimanti $\lambda(f_r + f_{r+1}) + \mu(\varphi_r + \varphi_{r+1}) = 0$, almeno in quanto non risulti per quest'ultimo fascio superiore al numero sopra indicato $(r-1)(3r+1)$. Infatti i termini di grado $2r-1$ e $2r$ nelle equazioni I) e II) dipendono appunto da $f_r, f_{r+1}, \varphi_r, \varphi_{r+1}$.

Ora un fascio di curve C_{r+1} , d'ordine $r+1$, dotato di un punto base r -plo P , la cui curva generica sia irriducibile, possiede

$$(r+1)^2 - r^2 = 2r+1$$

punti base semplici, che sono distinti da P , se si hanno in P tangenti variabili; invero codesti punti base possono divenire fra loro infinitamente vicini, ma non essere sostituiti da punti multipli senza che si distacchi da tutte le curve del fascio qualche retta per P . Nel fascio anzidetto, ove si abbiano $2r+1$ punti base semplici distinti A_1, \dots, A_{2r+1} , sono contenute $2r+1$ curve dotate di punto doppio, ciascuna delle

quali viene determinata dalla condizione di contenere un punto generico della retta PA_i . Infatti una tale curva risulta composta della PA_i stessa e di una curva residua d'ordine r , avente in P un punto $(r-1)$ -plo, la quale generalmente segnerà PA_i in un punto D fuori di P , che riesce così punto doppio per la C_{r+1} ; e viceversa una C_{r+1} che abbia come doppio un punto D , fuori di P , contiene come parte la retta PD , la quale risulta passare per uno dei $2r+1$ punti base A_i ; invero non è possibile che la curva residua (d'ordine r) contenga essa tutti i punti A_i , risultando in tal caso avere $(r-1)r + (2r+1) > r(r+1)$ intersezioni con una C_{r+1} generica. Così nel fascio anzidetto figurano precisamente $2r+1$ curve dotate di punto doppio, fuori del punto r -plo P , e quindi P assorbe

$$3r^2 - (2r+1) = (r-1)(3r+1)$$

punti del gruppo jacobiano.

Con ciò resta provato che un punto base r -plo, a tangenti variabili, per un fascio qualsiasi di curve C , assorbe precisamente $(r-1)(3r+1)$ punti del gruppo jacobiano, purchè la curva d'ordine $r+1$ approssimante la C generica del fascio sia irriducibile, e purchè ancora le curve approssimanti spezzate (da cui si distacca una retta PA_i) non abbiano un punto doppio infinitamente vicino a P . È facile riconoscere che ambedue queste condizioni vengono soddisfatte se si esclude che il fascio delle curve date C contenga una curva che abbia in P una singolarità straordinaria. Invero i gruppi delle r tangenti variabili alle curve del fascio formano una g_r^1 che ha $2r-2$ raggi doppi; questi raggi doppi sono tangenti cuspidali per altrettante curve C , e soltanto nel caso di singolarità straordinarie possono coincidere con qualcuna delle $2r+1$ rette PA_i , che sono tangenti di flesso avendo $r+2$ intersezioni riunite con la C da esse toccata; ma — escluso questo caso, e quindi anche che la g_r^1 suddetta abbia qualche raggio fisso — si vede che le curve approssimanti alle C generiche devono essere irriducibili, altrimenti tutte le rette per P sarebbero tangenti di flesso per le C , e inoltre appare che le curve approssimanti spezzate hanno un punto doppio distinto da P . Concludiamo pertanto che: *un punto r -plo a tangenti variabili per un fascio di curve, assorbe $(r-1)(3r+1)$*

punti del gruppo jacobiano; se un punto di questo gruppo viene a cadere infinitamente vicino a P , nasce nel fascio una curva dotata di singolarità straordinaria (punto doppio infinitamente vicino a P).

Il metodo precedente permette anche di riconoscere che: *per $r > 1$ una tangente fissa nel punto base r -plo P non accresce la molteplicità di P per il gruppo jacobiano.* Invero basta provare la cosa per un fascio di curve d'ordine $r + 1$; allora si vede che la curva del fascio che contiene come parte la tangente fissa p ha un punto doppio, intersezione di p colla parte residua, che sta in generale fuori di P . Sia, per es. $r = 2$; abbiamo un fascio di cubiche con un punto doppio P , nel quale è data una tangente fissa p , e con 4 punti base semplici $ABCD$; si verifica che la conica $ABCDP$ non tocca in generale p , e che — d'altra parte — la conica tangente a p in P e passante per tre dei punti $ABCD$ non riesce tangente alla retta che proietta da P il quarto punto; così stando le cose la molteplicità di P per il gruppo jacobiano del fascio di cubiche vale 7, come se non vi fosse tangente fissa in P .

Ma la conclusione non sussiste per $r = 1$. Infatti in un fascio di coniche aventi un punto base di contatto P , il punto P assorbe 2 punti doppi del fascio, mentre un punto semplice non ne assorbe alcuno.

Questa osservazione si può generalizzare; si ha che: *mentre la presenza di una tangente fissa (o anche di $k < r$ tangenti fisse) in un punto base r -plo P non aumenta in generale la molteplicità di P per il gruppo jacobiano, tale molteplicità cresce necessariamente se sono fisse in P tutte le r tangenti,* nel qual caso il fascio contiene una curva particolare dotata di un punto $(r + 1)$ -plo (almeno). Ricerchiamo infatti la molteplicità di P per il gruppo jacobiano quando P sia r -plo per f ed s -plo per φ , con $s > r$. Allora le curve I), II) hanno in P la molteplicità $(r + s - 1)$ e quindi le intersezioni delle due curve assorbite in P sono in generale

$$(r + s - 1)^2;$$

ammesso che le curve f e φ non abbiano tangenti comuni in P , il numero precedente deve essere diminuito di rs e quindi la molteplicità di P nel gruppo jacobiano risulta

$$(r + s - 1)^2 - rs.$$

Si può provare che tale, e non maggiore, è precisamente la suddetta molteplicità di P , cioè che le curve I) e II) non si toccano in P , quando le tangenti ad f e φ in P siano $r + s$ rette tutte distinte. Scriviamo invero

$$f = f_r + \dots, \quad \varphi = \varphi_s + \dots;$$

i due gruppi di tangenti in P alle due curve I) e II) sono dati da

$$I') \quad \frac{\partial f_r}{\partial y} \varphi_s - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} f_r = 0$$

$$II') \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} f_r - \frac{\partial f_r}{\partial x} \varphi_s = 0.$$

Anticipando un teorema sulla indeterminazione del gruppo jacobiano che viene svolto in appresso in questo stesso paragrafo, possiamo ammettere che ove le due curve I') e II') abbiano comune una retta p per P , questa dovrà essere comune ai due gruppi di rette $f_r = 0$ e $\varphi_s = 0$, oppure dovrà essere componente doppia per una curva del fascio $\lambda f_r + \mu \varphi_s = 0$. Per escludere la seconda ipotesi basta osservare che tutte le curve di questo fascio, all'infuori della $\varphi_s = 0$, hanno come tangenti in P le rette $f_r = 0$, e quindi p dovrebbe essere una retta doppia del gruppo $f_r = 0$ o del gruppo $\varphi_s = 0$. In conclusione: *se le curve f e φ hanno comune un punto P di molteplicità diverse, r e s , a tangenti distinte, e se le due curve non hanno tangenti comuni, il punto P conta precisamente per*

$$(r + s - 1)^2 - rs$$

punti doppi del fascio.

Per $s = r + 1$ si deduce che: *un punto base r -plo a tangenti fisse ha in generale la molteplicità*

$$3r^2 - r = (r - 1)(3r + 1) + (r + 1)$$

per il gruppo jacobiano del fascio.

Fra le circostanze che accrescono questa molteplicità vale la pena di notare le seguenti:

se ν fra le tangenti fisse coincidono in un'unica retta, la molteplicità cresce di $\nu - 1$;

la molteplicità cresce pure di $\nu - 1$ se la curva del fascio che possiede P come $(r + 1)$ -plo ha ν tangenti coincidenti.

L'analisi delle intersezioni delle curve I) II) — da cui si tolgano i punti comuni ad f e φ — permette di riconoscere i risultati anzidetti e di precisarne i casi di eccezione.

Osservazione. Ricordiamo le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0 \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \end{array} \right.$$

dalle quali — eliminando λ e μ — abbiamo dedotte le 1), 2), 3) rappresentanti il gruppo jacobiano del fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$; se fra quelle tre equazioni si eliminano invece x_1, x_2, x_3 , si ottiene un'equazione omogenea in λ, μ :

$$\begin{array}{l} 4) \quad D(\lambda, \mu) = 0, \\ \text{o, per } \mu = 1, \\ \quad \quad \quad D(\lambda) = 0, \end{array}$$

ove D designa il *discriminante* di $\lambda f + \mu \varphi$.

Il grado del discriminante D si può determinare ricordando che il resultante di tre equazioni di grado m :

$$\psi_1(xy) = 0, \quad \psi_2(xy) = 0, \quad \psi_3(xy) = 0,$$

è di grado m^2 rispetto ai coefficienti delle ψ_1, ψ_2, ψ_3 presi separatamente, e quindi è complessivamente di grado $3m^2$ rispetto ad essi. Le equazioni 1), 2), 3) sono di grado $n-1$ rispetto ai rapporti $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ e contengono linearmente nei coefficienti il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, o il parametro λ per $\mu = 1$; si deduce che l'equazione risultante $D = 0$ è di grado $3(n-1)^2$ rispetto a λ .

Questa equazione 4) svanisce identicamente se vi è un punto base multiplo oppure una componente fissa del fascio avente intersezioni variabili con le curve residue; in tutti gli altri casi D non è identicamente nullo, come risulta dal teorema di BERTINI che abbiamo dimostrato nel L. 2°, § 5, e di cui forniremo più avanti, in questo stesso paragrafo, una dimostrazione algebrica diretta.

Riferiamoci al caso generale in cui il fascio non possiede punti base multipli e il suo gruppo jacobiano non diventa indeterminato. Allora ad ogni punto del gruppo jacobiano corrisponde una curva del fascio dotata di punto doppio e viceversa, tranne il caso in cui si abbia una curva dotata di due (o più) punti doppi, la quale corrisponderà a una radice doppia dell'equazione $D(\lambda) = 0$.

Ora i punti del gruppo jacobiano si possono ritenere corrispondenti in modo univoco alle radici di un'equazione $R(x) = 0$, ottenuta come risultante delle equazioni compatibili I), II), III), dove si suppongono gli assi orientati in modo generico. Avremo dunque in generale una corrispondenza biunivoca fra le radici delle due equazioni di grado $3(n-1)^2$:

$$D(\lambda) = 0, \quad R(x) = 0.$$

Come abbiamo detto, ad una radice doppia della $D(\lambda) = 0$, possono corrispondere due radici di $R(x) = 0$; ma invece ad una radice doppia di $R(x) = 0$ non può corrispondere che una sola radice, che dovrà del pari esser doppia, della $D(\lambda) = 0$. Quindi si può dire che, se due punti del gruppo jacobiano divengono infinitamente vicini (coincidendo in un punto di molteplicità 2 per il gruppo stesso), anche due curve dotate di punto doppio del fascio divengono infinitamente vicine. Ma l'avvicinamento indefinito di due punti del gruppo jacobiano dà luogo a due casi:

a) alla presenza di due punti base semplici del fascio infinitamente vicini;

b) oppure ad una curva del fascio dotata di cuspidale.

Questi due casi corrispondono dunque a fasci determinati da curve infinitamente vicine dotate di punto doppio. Invece nel L. 2°, § 5 (Vol. I, pag. 183) abbiamo dimostrato che se due curve dotate di punto doppio si avvicinano indefinitamente restando fissa una di esse, il fascio limite da loro determinato possiede due punti base semplici infinitamente vicini. Questa conclusione può sembrare contraddetta dal risultato dell'analisi precedente. Convien pertanto rendersi conto in qual modo effettivamente due curve dotate di punto doppio, che variano avvicinandosi indefinitamente, possono definire un fascio limite contenente una curva dotata di cuspidale, senza che questa cada in un punto base del fascio. A tale

scopo occorre far variare, insieme alle due curve, anche l'angolo delle loro tangenti principali, nel modo che procediamo ad esaminare.

Potremo riferirci ad un fascio di cubiche, giacchè ove sia dato un fascio d'ordine superiore per cui l'origine sia punto doppio del gruppo jacobiano, sarà lecito sostituire alle curve del fascio le loro cubiche approssimanti. Assumasi per semplicità il fascio di cubiche

$$f_{\lambda} = y^2 - kx^3 + \lambda = 0,$$

che contiene la curva

$$y^2 - kx^3 = 0$$

dotata di cuspide nell'origine, e la retta all'infinito contata tre volte, sulla quale pertanto si trovano i punti base del fascio. Il fascio anzidetto può ritenersi come limite, per $\varepsilon = 0$, di

$$f_{\lambda, \varepsilon} = y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 + \lambda = 0;$$

proveremo che questo fascio variato contiene due curve dotate di punto doppio, cioè la

$$y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 = 0,$$

e una seconda curva, prossima a questa, il cui punto doppio si trova sull'asse $y = 0$ a una distanza x dall'origine, definita in funzione di ε .

Infatti scriviamo che la curva $f_{\lambda, \varepsilon}$ possiede un punto doppio (x, y) ; avremo le tre equazioni:

$$f_{\lambda, \varepsilon} = y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial f_{\lambda, \varepsilon}}{\partial x} = -2\varepsilon^2 x - 3kx^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f_{\lambda, \varepsilon}}{\partial y} = 2y = 0.$$

La terza equazione dà

$$y = 0;$$

la seconda è soddisfatta, oltrechè per $x = 0$, per

$$x = -\frac{2\varepsilon^2}{3k};$$

la prima, postovi $y = 0$, dà

$$\lambda = \varepsilon^2 x^2 + kx^3.$$

Quando ε (che a meno del segno dà il coefficiente angolare delle due tangenti principali di $y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 = 0$) diventa infinitesimo, anche x diventa infinitesimo come ε^2 , e λ diventa infinitesimo di terzo ordine rispetto ad x . Questa circostanza spiega perchè il punto (00) divenga una cuspide per la curva f_{00} anzichè un punto base di contatto pel fascio di curve $f_{\lambda,0}$; invero questo fascio sega sulla retta $y = 0$ una g_3^1 che ha nell'origine un punto triplo (cfr. L. 2°, § 5, Vol. I, pag. 179).

Quantunque il calcolo fatto innanzi sia relativo ad un caso semplice, esso può riguardarsi caratteristico del caso generale; il fascio

$$y^2 - kx^3 + \lambda(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + \dots) = 0,$$

contenente la cubica cuspidata nell'origine e non avente questo punto come base ($b_{00} \neq 0$), è limite del fascio

$$y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 + \lambda(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + \dots) = 0,$$

che contiene la cubica

$$y^2 - \varepsilon^2 x^2 - kx^3 = 0$$

dotata di nodo nell'origine e una seconda cubica, prossima alla prima, avente parimente un nodo (xy); il calcolo effettivo permette di trovare le coordinate di questo punto doppio e il parametro λ della curva corrispondente, che — a meno d'infinitesimi d'ordine superiore — sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2\varepsilon^2}{3k}, \quad y = -\frac{1}{2} \frac{b_{01}}{b_{00}} (\varepsilon^2 x^2 + kx^3) \\ \lambda = \frac{\varepsilon^2 x^2 + kx^3}{b_{00}}. \end{array} \right.$$

Così viene pienamente rimossa l'apparente contraddizione segnalata innanzi.

Ora ritorniamo alla questione di contare quanti punti doppi delle curve di un fascio vengono assorbiti in un punto multiplo.

Le formule sopra riferite appartengono al CREMONA ⁽¹⁾. Il CAPORALI ⁽²⁾ ne ha dedotto una formula molto notevole dove figura il numero s dei punti base, supposti a tangenti variabili, e il genere p della curva generica del fascio.

Designando con n l'ordine, con $r_1 r_2 \dots r_s$ le molteplicità dei punti base del fascio, e con δ il numero dei punti del gruppo jacobiano fuori dei punti base, si ha in generale, secondo le formule precedenti:

$$\delta = 3(n-1)^2 - \Sigma(r-1)(3r+1).$$

Di qui, tenuto conto che

$$\Sigma r^2 = n^2,$$

$$\Sigma(r-1)(3r+1) = \Sigma(3r^2 - 2r) - s,$$

segue

$$\delta = 3(n-1)^2 - n^2 - 2\Sigma r(r-1) + s,$$

$$\delta = 2(n-1)(n-2) - 1 - 2\Sigma r(r-1) + s.$$

Ma il genere delle curve del fascio vale

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{r(r-1)}{2},$$

quindi, un fascio di curve di genere p con s punti base, semplici o multipli, a tangenti variabili, contiene in generale

$$\delta = s + 4p - 1$$

curve dotate di un punto doppio fuori dei punti base.

I casi in cui δ risulterebbe minore del numero precedente si sogliono riguardare come casi limiti, dove qualche punto doppio del fascio si sia avvicinato indefinitamente ad un punto base; in tal modo si estende la validità della formula di CAPORALI al caso in cui il fascio contenga qualche curva dotata di singolarità straordinaria, intendendo che l'espressione « fuori dei punti base » vada interpretata conforme

(1) Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane. Annali di Matematica, t. 6, 1864. (Opere, t. II, pag. 138).

(2) Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane. (1881). Cfr. « Memorie di Geometria di ETTORRE CAPORALI », Napoli 1888, pag. 171.

al principio di continuità, cioè escludendo dal gruppo jacobiano del fascio ogni punto r -plo a tangenti variabili contato $(r-1)(3r+1)$ volte, come vi figura nel caso generale. Per rimuovere l'eccezione relativa al caso di punti base con tangenti fisse, converrebbe ulteriormente dimostrare che un tal fascio può ritenersi dotato di punti base infinitamente vicini per modo che ciascun punto r -plo assorba r^2 intersezioni delle curve del fascio. Ma ciò richiede l'analisi completa delle singolarità straordinarie, che verrà svolta nel libro quarto.

Nota. Coi caratteri su menzionati δ , s , p , relativi ad un fascio di curve, si può formare l'espressione

$$I = \delta - s - 4p,$$

la quale avrà costantemente il valore -1 , comunque si scelga il fascio anzidetto. Codesta espressione, estesa ai fasci di curve sopra una superficie, fornisce del pari un invariante che porta il nome di *invariante* di ZEUTHEN-SEGRE (¹). Per esempio sopra una quadrica, un fascio di coniche (sezioni piane per una retta) contiene 2 coniche dotate di punto doppio, sicchè

$$\delta = 2, \quad s = 2, \quad p = 0,$$

e per la quadrica risulta

$$I = 0.$$

Indeterminazione del gruppo jacobiano d'un fascio. Ora ricerchiamo i casi d'indeterminazione del gruppo jacobiano del fascio

$$\lambda f(xy) + \mu \varphi(xy) = 0.$$

Anzitutto l'indeterminazione assoluta del gruppo jacobiano porta la coincidenza delle curve $f=0$ e $\varphi=0$, e non può quindi avverarsi per due curve determinanti un fascio (non degenere). Infatti se le equazioni I) II) debbono essere identicamente soddisfatte per funzioni f e φ non identicamente

(¹) Cfr. ZEUTHEN, Math. Annalen. Bd. 4, (1871); SEGRE, Atti dell'Accademia di Torino, Vol. 31, (1896); CASTELNUOVO-ENRIQUES, Annali di Matematica, t. 6, serie 3, (1910), pag. 184.

nulle, f e φ debbono soddisfare alle equazioni a derivate parziali:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}, \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\varphi} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f},$$

ossia

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \log f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \log f}{\partial y};$$

ed integrando si deduce

$$\frac{\varphi}{f} = \text{cost.}$$

Pongasi invece che il gruppo jacobiano del fascio $\psi f + \mu \varphi = 0$ sia indeterminato nel senso che le equazioni I), II) e III) vengano soddisfatte dai punti d'una curva $\psi(xy) = 0$. Possiamo supporre che ψ sia irriducibile, bastando altrimenti prendere in considerazione una sua componente; inoltre — escludendo eventualmente posizioni particolari degli assi — si può anche ammettere che $\psi = 0$ definisca una funzione algebrica irriducibile $y = y(x)$ (non essendo su di essa $x = \text{cost.}$). Ciò posto, se la ψ non fa parte di f , sulla detta curva ψ , ossia per $y = y(x)$, avremo identicamente

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\varphi}{f},$$

e moltiplicando la seconda equazione per $y' = \frac{dy(x)}{dx}$ e componendo:

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{d\varphi}{df}$$

cioè

$$d \log \varphi = d \log f;$$

di qui, integrando, si deduce

$$\frac{\varphi}{f} = \text{cost.}$$

sopra la curva $\psi = 0$.

Ciò significa che la curva ψ , sopposta non far parte di f , fa parte di un'altra curva del fascio, che può addirittura assumersi come curva φ . Allora, per i punti della ψ , le I) e II) danno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

cioè dicono che la ψ è componente doppia (o multipla) di φ .

Tenendo conto anche del caso, escluso innanzi, in cui ψ faccia parte insieme delle curve f e φ , cioè sia parte fissa delle curve del fascio, concluderemo che:

Se il gruppo jacobiano d'un fascio riesce indeterminato, in guisa che di esso venga a far parte una curva irriducibile ψ , questa è una componente fissa per tutte le curve del fascio, oppure una componente doppia o multipla per una curva del fascio stesso.

Questo teorema include il *teorema di BERTINI* che « la curva generica d'un fascio non può avere punti doppi variabili fuori dei punti base o delle parti fisse comuni alle curve del fascio »; così questo teorema, che abbiamo già incontrato nel L. 2°, § 5, riceve qui una nuova dimostrazione.

Al teorema dimostrato innanzi si possono aggiungere alcune osservazioni.

Anzitutto una curva ψ , che sia componente comune delle f e φ e quindi delle $\lambda f + \mu \varphi = 0$, è veramente appartenente al gruppo jacobiano del fascio. Ciò è chiaro geometricamente, sia nel caso in cui ψ abbia intersezioni variabili con le parti residue del fascio, sia nel caso opposto in cui ψ risulta componente doppia per una particolare curva del fascio.

L'esame delle equazioni 1), 2), 3) conferma questa conclusione: infatti le curve 1) e 2) posseggono la ψ come parte comune, mentre questa non è contenuta nelle curve

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$; basterà verificare ciò per la 1) che scriveremo, ponendo in essa

$$f = \psi \bar{f} \quad \text{e} \quad \varphi = \psi \bar{\varphi}:$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \bar{f} \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \bar{\varphi} \right) - \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \bar{f} \right) \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_2} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \bar{\varphi} \right) = 0,$$

sicchè appare che i due termini non moltiplicati per ψ si elidono reciprocamente.

Ora si può dire che: una curva ψ , d'ordine m , comune alle f e φ equivale a

$$3(n-1)^2 - 3(n-m-1)^2 = 3m(2n-m-2)$$

punti del gruppo jacobiano del loro fascio, restando (in generale) fuori di essa i punti doppi del fascio determinato dalle curve residue.

Cerchiamo invece l'equivalenza nel gruppo jacobiano di una curva ψ , d'ordine m , che sia i -pla (con $i > 1$) per una curva φ del fascio (e non appartenga ad f). A tale scopo basta osservare che, nelle equazioni 1) e 2), il fattore ψ compare alla potenza $i-1$, e che il fattore ψ^{i-1} compare pure in $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$. Ciò posto i punti comuni alle curve 1) e 2), fuori di ψ , saranno

$$\} 2n - 2 - m(i-1)\{^2;$$

di qui si deve togliere il numero dei punti comuni a $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$, che sono fuori di ψ , cioè

$$(n-1)\} n - 1 - m(i-1)\{;$$

si deduce che: dato un fascio d'ordine n , il quale possenga una curva dotata di una parte i -pla, ψ , d'ordine m ($mi \leq n$), l'equivalenza di ψ nel gruppo jacobiano è

$$(i-1)m\} 3(n-1) - (i-1)m\{;$$

oltre a questa curva si ha un gruppo jacobiano costituito di

$$3(n-1)^2 - (i-1)m\} 3(n-1) - (i-1)m\{$$

punti, fra i quali figurano gli

$$m(n-mi)$$

punti comuni alla ψ e alla parte residua (contati ciascuno una volta).

21. Curve singolari di una rete. — Si consideri una rete di curve d'ordine n

$$\lambda f(xy) + \mu \varphi(xy) + \nu \psi(xy) = 0;$$

ci proponiamo di ricercare le curve della rete dotate di due punti doppi e quelle dotate di una cuspid.

Domandiamoci anzitutto se la jacobiana, luogo dei punti doppi delle curve della rete, possenga o meno delle singolarità puntuali. A questa domanda risponde il seguente

Lemma. *La jacobiana di una rete non possiede in generale punti doppi.*

Infatti un punto doppio può nascere solo da quattro circostanze particolari che vengono messe in luce dall'analisi seguente.

Pongasi il dato punto doppio nell'origine, O , delle coordinate. Si può sempre supporre che due delle curve scelte a determinare la rete, per es. φ e ψ , passino per O , ed anzi che ψ abbia in O un punto doppio. Distingueremo in f , φ , ψ i termini dei vari gradi scrivendo

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \quad \psi = \psi_2 + \dots + \psi_n.$$

Dobbiamo annullare i coefficienti dei termini di primo grado nel determinante jacobiano $J(f, \varphi, \psi)$, nel quale manca già il termine di grado zero poichè si è presa ψ con un punto doppio nell'origine. Codesti termini di primo grado provengono dallo sviluppo di $J(f_0 + f_1, \varphi_1, \psi_2)$ e sono dati da

$$-\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \begin{vmatrix} f_0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \begin{vmatrix} f_0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{vmatrix} = f_0 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Pertanto il complesso dei termini di primo grado di J si annulla identicamente nei seguenti casi:

1) Se è

$$f_0 = 0,$$

cioè se O è un punto base per la rete.

2) Se è

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0,$$

cioè identicamente

$$\varphi_1 = 0;$$

in questo caso anche la curva φ , come ψ , ha in O un punto

doppio e quindi O è un punto base doppio per un fascio di curve della rete.

3) Se è identicamente

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0,$$

cioè

$$\psi_2 = 0;$$

in questo caso la rete contiene una curva (ψ) che ha in O un punto triplo.

4) Se, non essendo nulli ambedue gli elementi della prima colonna nè ambedue quelli della seconda, sussiste la proporzione

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y}.$$

Scriviamo

$$\psi_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2;$$

essendo $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ delle costanti, α e β , si trova

$$\alpha : \beta = a : b = b : c,$$

da cui segue intanto

$$b^2 - ac = 0:$$

la curva ψ possiede in O una cuspidale la cui tangente cuspidale coincide con la tangente di φ , per modo che il fascio $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$ possiede tre punti base infinitamente vicini. Aggiungasi che questa tangente cuspidale riesce una tangente principale della curva jacobiana nel punto doppio O , come si verifica facilmente calcolando i termini di secondo grado di J , ove si può assumere $\psi_2 = y^2$. Il caso di cui stiamo trattando è caratterizzato dalla circostanza che: *il fascio con tangente fissa determinato nella rete da una delle curve cuspidate (che sono in generale in numero finito) ha come tangente fissa la tangente cuspidale.*

I quattro casi esaminati in cui la jacobiana della rete possiede un punto doppio, corrispondono a particolarizzazioni della rete, e precisamente i casi 1) 2) 4) implicano una condizione, mentre il caso 3) implica due condizioni.

Ciò posto consideriamo una rete di curve d'ordine n , affatto generale, escludendo le particolarità 1), 2), 3), 4);

rappresentiamo la rete in coordinate omogenee con l'equazione

$$f = u_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + u_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + u_3 f_3(x_1, x_2, x_3) = 0:$$

Riferiamo proiettivamente la rete $|f|$ al piano (y) assumendo u_1, u_2, u_3 come coordinate di rette nel piano (y) , cioè chiamando « rette » le « curve f ». Ciò equivale a porre fra il piano (x) e il piano (y) la trasformazione razionale

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3),$$

nella quale, viceversa, ad un punto (y) corrispondono gli n^2 punti base di un fascio di curve f .

Vi è nel piano (y) una curva C luogo di punti per cui due degli n^2 punti base (x) corrispondenti coincidono; così ad un punto, A , di C corrisponde un fascio di curve f che possiede in uno degli omologhi A' una tangente fissa; questo fascio contiene una curva dotata di punto doppio in A' , e perciò A' sta sulla jacobiana di $|f|$. Ora si può vedere che la curva C è l'involuppo delle rette cui corrispondono le f della rete dotate di punto doppio; infatti due f infinitamente vicine dotate di punto doppio determinano un fascio con due punti base infinitamente vicini. (Cfr. il ragionamento svolto per il teorema di BERTINI nel L. 2°, § 5).

Cerchiamo di valutare i caratteri della curva C .

Anzitutto la classe di C è data dal numero delle curve f dotate di punto doppio che appartengono ad un fascio e quindi vale (§ 20)

$$M = 3(n - 1)^2.$$

L'ordine N di C viene fornito dal numero delle curve f che appartengono ad un fascio di curve tangenti entro cui si trova una data \bar{f} della rete; il punto base di contatto per un tale fascio appartiene alla jacobiana, e così il numero N è dato dalle intersezioni di \bar{f} con la jacobiana suddetta, cioè vale

$$N = (3n - 3)n = 3n(n - 1).$$

Oltre a questi due numeri si trova subito il genere P della curva C , poichè esso equivale al genere della jacobiana di f , essendovi fra le due curve una corrispondenza biuni-

voca (§ 17); si trova così

$$P = \frac{(3n-4)(3n-5)}{2}.$$

La conoscenza dei tre caratteri M , N , P permette di determinare gli altri caratteri plueckeriani della curva C (o i loro equivalenti), cioè il numero Δ dei nodi, il numero K delle cuspidi, il numero T delle tangenti doppie e il numero I dei flessi.

Richiamiamo anzitutto le formule di Plücker (§ 17):

$$M = 2N + 2P - 2 - K, \quad N = 2M + 2P - 2 - I,$$

(da cui $K - I = 3(N - M)$); queste formule ci porgono

$$1) \quad K = 3(n-1)(4n-5),$$

$$2) \quad I = 12(n-1)(n-2).$$

Alle formule ricordate si aggiungono pure le seguenti:

$$M = N(N-1) - 2\Delta - 3K, \quad N = M(M-1) - 2T - 3I;$$

le quali, ove si introducano i valori precedentemente calcolati di K e I , danno

$$3) \quad \Delta = \frac{3}{2}(n-1)(n-2) \{ 3n^2 + 3n - 8 \},$$

$$4) \quad T = \frac{3}{2}(n-1)(n-2) \{ 3n^2 - 3n - 11 \}.$$

Quale significato hanno i caratteri così calcolati Δ , K , T e I , della curva C ?

Anzitutto a un nodo di C corrispondono nel piano (x) due coppie di punti coincidenti, quindi il Δ dato dalla formula 3) *esprime il numero dei fasci di curve bitangenti contenuti nella rete $|f|$.*

Se invece di un nodo si considera una cuspidi di C , a questa corrisponde un punto della jacobiana della rete tale che le curve di questa che vi passano hanno ivi un contatto di second'ordine (invece che due punti distinti di contatto semplice); dunque il K , espresso dalla formula 1), è il numero

dei fasci di curve f dotati di tre punti base infinitamente vicini.

I caratteri duali T e I rispondono alla questione proposta in principio di questo paragrafo.

Il T , espresso dalla formula 4), è il numero delle curve f dotate di due punti doppi; infatti si è visto che ad una tangente, p , della curva C corrisponde nel piano (x) una curva f che possiede un punto doppio nel punto omologo al punto di contatto di p .

Infine lo I , espresso dalla formula 2), è il numero delle curve cuspidate della rete. Infatti la curva f , che corrisponde ad una tangente di flesso di C , deve contare per due fra le curve dotate di punto doppio in ogni fascio a cui essa appartenga, così come la tangente di flesso conta per due fra le tangenti condotte a C da un suo punto generico; si deduce (§ 20) che la suddetta f , non possedendo due punti doppi distinti, è dotata di cuspidate.

Le considerazioni ed i calcoli precedenti si estendono facilmente al caso in cui la rete $|f|$ possessa r (> 0) punti base semplici o multipli, dove supporremo che si tratti di punti base a tangenti variabili. Designeremo con i la molteplicità generica di un punto base, e così sarà $d = n^2 - \sum i^2$ il numero delle intersezioni variabili di due curve della rete (grado della rete). Codesto punto i -plo sarà $(3i - 1)$ -plo per la jacobiana e — nell'ipotesi più generale — la rete non avrà altre singolarità, sicchè il suo genere varrà

$$P = \frac{(3n - 4)(3n - 5)}{2} - \sum_1^r \frac{(3i - 1)(3i - 2)}{2}.$$

Qui conviene ricordare anzitutto che in un fascio di curve di genere p con s punti base a tangenti variabili esistono $s + 4p - 1$ curve dotate di un punto doppio fuori dei punti base (Cfr. § 20).

Ora si designi con p il genere delle curve f :

$$p = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \sum \frac{i(i - 1)}{2};$$

e si noti che un fascio di curve f possiede $s = n^2 - \sum (i^2 - 1)$ punti base, giacchè un unico punto base i -plo sostituisce i^2 punti base.

Ciò posto avremo per i caratteri della curva C :

$$M = s + 4p - 1 = n^2 - \Sigma(i^2 - 1) + 4p - 1 = d + r + 4p - 1,$$

$$N = (3n - 3)n - \Sigma i(3i - 1) = 3n(n - 1) - 3\Sigma i^2 + \Sigma i = 2(d + p - 1),$$

$$P = 9p + 1 - r.$$

Allora, ripetendo i calcoli fatti precedentemente, si ottengono i valori di K , I , Δ , T . Pertanto si conclude che:

In una rete di curve f , di grado d e di genere p , dotata di r punti base semplici o multipli a tangenti variabili, vi sono in generale:

$\Delta = 2\} (d + p)^2 - 17p - 5d + 2r + 4\} \text{ fasci di curve bitangenti,}$

$K = 3(d + 6p - r - 1)$ fasci di curve osculatrici,

$T = \frac{1}{2}\} (d + 4p + r - 1)^2 - 3d - 78p - r + 3\} \text{ curve dotate di due punti doppi, e}$

$I = 24p$ curve cuspidate ⁽¹⁾.

Nota. Si noterà, come eccezione essenziale al teorema, il caso in cui la rete possenga curve fondamentali facenti parte di ∞^1 curve f spezzate; nel qual caso si troverebbe un fascio di rette che si stacca (una o più volte) dall'involuppo C .

22. Caratteri della hessiana e della steineriana. — L'analisi dei vari casi in cui può nascere un punto doppio per la jacobiana di una rete si può applicare al caso speciale di una rete di polari, e così permette di stabilire che la hessiana di una curva f non possiede in generale punti doppi fuori di f . Qui giova osservare che questa applicazione aggiunge qualche cosa a quanto abbiamo stabilito. Invero la rete delle polari di una curva f d'ordine n , dipende, come f , da $\frac{n(n+3)}{2}$ costanti arbitrarie, mentre tutte le reti di curve d'ordine $(n-1)$ dipendono, come i piani dello spazio ad $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

⁽¹⁾ Queste formule, che pongono in una forma generale e semplice i risultati già conseguiti dal CREMONA, appartengono al CAPORALI (Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane; l. c. pag. 181, 182) che le ha dedotte dallo studio della rappresentazione piana delle superficie razionali, e dalla considerazione del cono circoscritte ad esse da un punto.

dimensioni, da $3 \frac{(n-1)(n+2)}{2} - 6$ costanti; perciò appena $n > 3$ la rete delle polari di una f generica appare una rete di curve d'ordine $n-1$ essenzialmente particolare; si potrebbe quindi dubitare che la particolarizzazione portasse con sé l'esistenza di singolarità della jacobiana che è l'hessiana di f . Ma per escludere il dubbio basta prendere in esame le tre specie di singolarità che una jacobiana può possedere fuori dei punti base della rete.

Supporremo per semplicità che la curva f non possenga punti doppi, e così la rete delle polari sia priva di punti base.

1) Si ha una singolarità di prima specie della hessiana — caso 2) del precedente paragrafo — quando esiste un punto O che è doppio per un fascio di curve polari. Ora i poli di codeste curve appartengono alla retta o , polare di O ; ma poichè le seconde polari dei punti di o vengono a passare per O , si deduce che tutti i punti di o appartengono alla conica polare di O , e perciò questa conica — contenendo la retta o , polare di O rispetto ad essa — deve ridursi alla retta o contata due volte. Siccome fra le ∞^5 coniche del piano (concepite come luogo di punti) ve ne sono ∞^2 degeneri in una retta contata due volte, così la condizione che la conica polare del punto O si riduca ad una retta contata due volte implica tre condizioni semplici, e l'esistenza di un punto O siffatto, di cui non venga prefissata la posizione, cioè l'esistenza di una singolarità di prima specie per la hessiana di f , si traduce in una condizione particolarizzatrice della f . Questa si può scrivere facilmente, in base all'analisi del precedente paragrafo.

Pongasi infatti O nell'origine delle coordinate, e o nella retta all'infinito. Affinchè le curve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + \dots = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \dots = 0$$

abbiano un punto doppio in O si hanno 5 condizioni lineari nei coefficienti di f :

$$a_{10} = a_{20} = a_{11} = a_{01} = a_{02} = 0.$$

Queste equazioni debbono potersi soddisfare quando si

effettui una trasformazione di coordinate in cui si dispone di 4 costanti essenziali (le coordinate di O e di o); ciò implica una condizione di compatibilità che è una relazione particolare fra i coefficienti di f . Giova notare che se un punto doppio di prima specie della hessiana viene a cadere sulla sua retta polare o , accade che la prima polare di O passi per O e abbia ivi un punto doppio, dal che segue che O diventa doppio per f .

2) Si ha una singolarità di seconda specie per la hessiana di f — caso 3) del precedente paragrafo — quando esiste una curva polare, φ , dotata di punto triplo. Designamo con O questo punto e con O' il polo della φ ; si vede allora che la cubica polare di O deve avere un punto triplo in O' , cioè deve constare di tre rette per O' . L'esistenza di un punto O , triplo per una curva polare, si traduce in due condizioni per f .

Invero pongasi O nell'origine e assumasi come punto coniugato O' il punto all'infinito dell'asse delle x ; affinchè la polare di questo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + \dots = 0$$

abbia O come punto triplo si hanno le 6 condizioni lineari

$$a_{10} = a_{20} = a_{11} = a_{30} = a_{21} = a_{12} = 0;$$

queste equazioni debbono potersi soddisfare disponendo delle 4 costanti essenziali da cui dipende la posizione di O e O' , sicchè eliminando queste costanti si ottengono appunto due relazioni fra i coefficienti di f .

3) Una singolarità di terza specie della hessiana di f — caso 4) del precedente paragrafo — si ottiene quando esista un fascio di polari osculatrici che contenga una curva dotata di cuspidale nel punto di contatto O . Per una f generale vi è un numero finito di fasci di curve polari osculatrici e un numero finito di polari cuspidate, ma quelli non contengono queste. Pongasi invero che la retta o , polare di O , sia la retta all'infinito e che O cada nell'origine; inoltre la polare del punto all'infinito dell'asse delle x , cioè la $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, sia la curva cuspidata nel fascio; si trova allora la condizione aggiuntiva che

la tangente della $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sia la tangente cuspidale della $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Scrivendo questa condizione si riconosce che essa riesce indipendente dalle rimanenti, che pure sono indipendenti fra loro, per modo che essa implica una particolarizzazione proiettiva della curva f .

Concludiamo che *la hessiana di una curva generale è priva di punti doppi*.

Basandoci quindi sulla conoscenza del genere della hessiana, si possono ottenere i caratteri della *curva steineriana*, luogo dei punti la cui polare rispetto ad f possiede un punto doppio, ossia luogo dei punti doppi delle coniche polari di f (§ 7). A tal fine occorre tener presente che la corrispondenza fra i poli e le curve polari è proiettiva, cioè che ai punti di una retta corrispondono le polari di un fascio (§ 4). Se poniamo fra il piano (x) della f e un piano (y) una reciprocità, il piano rigato (y) risulta riferito proiettivamente alla rete delle curve φ polari di f e quindi, come nel paragrafo precedente, vi è luogo a considerare in (y) la curva C involuppo delle rette corrispondenti alle φ dotate di punto doppio; ora la C è la curva reciproca della steineriana di f . Si deduce che:

Per una curva generale d'ordine n , i caratteri della steineriana (ordine, classe, numero dei nodi, delle cuspidi, delle tangenti doppie e dei flessi) sono dati da

$$\begin{aligned} \nu &= 3(n-2)^2, \\ \mu &= 3(n-1)(n-2), \\ \delta &= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5), \\ k &= 12(n-2)(n-3), \\ \tau &= \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8), \\ i &= 3(n-2)(4n-9). \end{aligned}$$

I punti doppi della steineriana corrispondono alle polari dotate di due punti doppi e le cuspidi alle polari cuspidate; le tangenti doppie invece corrispondono ai fasci di polari bitangenti e le tangenti di flesso ai fasci di polari osculatrici.

Gli sviluppi del precedente paragrafo permettono di riconoscere in qual modo si modifichino i numeri precedenti quando la curva fondamentale f possenga un nodo; il caso

in cui essa possedga una cuspidè esige esame piÙ minuto. Giova poi notare che:

se una curva possiede un punto triplo la sua steineriana è indeterminata, e viceversa.

Infatti se la f possiede un punto triplo tutte le polari hanno in esso un punto doppio; viceversa se tutte le polari hanno un punto doppio, per il teorema di BERTINI (L. 3°, § 20) esso è un punto base della rete e quindi è triplo per la f .

Osservazione. Se (x) è un punto variabile della hessiana h , ad esso corrisponde in generale un punto coniugato della steineriana, la cui polare ha in (x) un punto doppio; questo punto coniugato (y) si ottiene in funzione razionale di (x) :

$$y_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3);$$

aggiungendo a queste tre equazioni la equazione della hessiana

$$h(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ed eliminando x_1, x_2, x_3 , si ottiene l'equazione $s = 0$ della steineriana, che è anche data direttamente annullando il discriminante della curva polare di (y) . Ora quando f acquista un punto triplo O , s si annulla identicamente, ma le relazioni $y_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3)$ conservano il loro significato, annullandosi le tre y_i solo quando (x) cada in O . Così la curva descritta dal punto (y) quando (x) varia su h , porge un nuovo covariante s' che prende il posto della steineriana.

Si vede senza difficoltà che l'ordine di s' è in generale di 7 unità inferiore a quello di s , giacchè il punto base doppio O conta per 7 nel gruppo jacobiano di un fascio qualunque della rete delle polari di f (Cfr. § 20).

Notizia storica. Che la hessiana di una curva generale sia priva di punti doppi fu ammesso dal CREMONA, il quale, basandosi su questo implicito presupposto, ne dedusse i caratteri della steineriana (Introd. n. 118, Opere, t. I, pag. 426). Il CREMONA — in luogo del genere — valuta il numero dei flessi della steineriana; a tal uopo egli considera la curva K involuppo delle rette polari dei punti della hessiana: questa curva K si compone della steineriana e delle sue tangenti di flesso, ma per averne l'ordine occorre conoscere la classe della hessiana.

Nelle Lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN si segue una via sostanzialmente analoga, da cui erroneamente si vuol desu-

mere il genere della hessiana e dimostrare così che questa curva è in generale priva di singolarità.

La dimostrazione rigorosa di questo fatto è dovuta a DEL PEZZO ⁽¹⁾ (1883); il quale svolge sostanzialmente l'analisi che noi abbiamo esposta dapprima per la jacobiana di una rete e applicata poi alle reti di curve polari.

Quanto alle singolarità della steineriana conviene ricordare che anzitutto STEINER (1848) enunciò come questa curva possedga $12(n-2)(n-3)$ cuspidi. Poi CLEBSCH, avendo trovato lo stesso numero di polari cuspidate, sospettò che i poli di questi fossero le cuspidi della steineriana e dimostrò questa proprietà per il caso di $n=4$ (1861) ⁽²⁾. L'esame completo delle singolarità della steineriana appartiene al CREMONA (l. c., 1861) in cui si trova appunto il riferimento di CLEBSCH.

23. Notizia storica sulle curve covarianti. — L'introduzione del determinante funzionale, $\frac{D(f_1 \dots f_n)}{D(x_1 \dots x_n)}$, di n funzioni con n variabili, è dovuta a JACOBI ⁽³⁾ (1841), che ha messo in luce il significato del suo annullamento identico, cioè l'esistenza di una corrispondente relazione fra $f_1 \dots f_n$.

Il significato dell'equazione $\frac{D(f_1 f_2 f_3)}{D(x_1 x_2 x_3)} = 0$, nel caso di tre forme ternarie, è stato rilevato da HESSE ⁽⁴⁾ (1844), riferendosi al caso della rete delle polari di una cubica: la curva che si ottiene annullando il determinante delle derivate seconde viene ivi definita geometricamente come luogo dei punti le cui rette polari passano per un punto, proprietà che si estende alla jacobiana di tre curve qualunque ⁽⁵⁾.

Nella stessa memoria di HESSE viene riconosciuto che i flessi della cubica sono le intersezioni di questa con la nominata curva covariante; anzi la ricerca di HESSE muove appunto dal problema di determinare i flessi, considerati come punti di curvatura nulla. Dal nome di hessiano dato al determi-

⁽¹⁾ Rendiconti dell'Acc. di Napoli, t. 22, pag. 203.

⁽²⁾ Journal für Math., Bd. 59, pag. 131.

⁽³⁾ « De determinantibus functionalibus », Journal für Math., Bd. 22, pag. 319.

⁽⁴⁾ Journal für Math., Bd. 28, pag. 97.

⁽⁵⁾ Cfr. SYLVESTER « Philos. Transactions » CXLIII. Parte III, pag. 546, (1853). — CREMONA « Introduzione » Opere, t. I, pag. 398.

nante $h = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right|$ (SYLVESTER), è venuto quello di curva hessiana di f , dato alla $h=0$ (CREMONA). Il nome di curva jacobiana di tre curve, usato da SYLVESTER e adottato dal CRÉMONA, ha dato luogo alla designazione « jacobiana di una rete » che, dopo qualche incertezza, ha finito per prevalere sulla designazione « hessiana d'una rete » usata pure dal CREMONA (cfr. la nota 77 dei revisori in « Opere », t. I, pag. 489), fissandosi così per la hessiana il significato più ristretto di « jacobiana di una rete di polari ».

STEINER ⁽¹⁾ (1848) riguardando la curva hessiana di una data (che egli chiama *Kerncurve*) come luogo dei punti doppi delle sue polari (pag. 4) è tratto a considerare, accanto a codesta curva, anche il luogo dei poli corrispondenti, cioè la curva che da lui appunto il CREMONA ha designata col nome di steineriana.

Accanto alle nominate curve vi è luogo a considerare anche l'inviluppo delle rette che uniscono i punti coniugati della hessiana e della steineriana, cioè una nuova curva covariante a cui il CREMONA ha dato il nome di *cayleyana*, in onore di CAYLEY che ne sviluppò la teoria per riguardo alle cubiche ⁽²⁾.

Effettivamente la cayleyana ha particolare importanza nello studio di queste curve, giacchè in tal caso convengono ad essa diverse definizioni geometriche. Anzitutto CAYLEY ha incontrato tale curva (1844) studiando la corrispondenza involutoria che viene determinata sopra una linea del terz'ordine, φ , da due punti aventi il medesimo tangenziale: le congiungenti i punti coniugati inviluppano una curva di terza classe, che più tardi (1856) ha ritrovato partendo da una cubica f di cui φ sia l'hessiana (come vedremo, data la φ , si può definire in tre modi diversi una f di cui φ è hessiana).

Nella citata memoria del 1856, CAYLEY ha pure scoperto la proprietà fondamentale che: la cayleyana di una cubica (da lui designata col nome di *pippiana*) è anche l'inviluppo delle rette che costituiscono le coniche polari spezzate.

Lo studio delle tre curve covarianti, hessiana, steineriana

⁽¹⁾ Journal für Math., Bd. 47, (1854).

⁽²⁾ Journal de Mathématiques, t. 9, pag. 285, (1844). Philos. Transactions, vol. 147, pag. 415, (11 dec. 1856).

e cayleyana, è stato proseguito da CREMONA ⁽¹⁾ (1861) e da CLEBSCH ⁽²⁾ (1861, 1865).

La cayleyana di una curva generale d'ordine n (> 3) ha i seguenti caratteri:

$$\text{ordine: } 3n(n-2)(5n-11),$$

$$\text{classe: } 3(n-1)(n-2),$$

$$\text{numero dei punti doppi: } \frac{9}{2}(n-2)(5n-13)(5n^2-19n+16),$$

$$\text{numero delle tangenti doppie: } \frac{9}{2}(n-2)^2(n^2-2n-1),$$

$$\text{numero delle cuspidi: } 18(n-2)(2n-5),$$

$$\text{numero dei flessi: } 0.$$

Per $n=3$ accade che la cayleyana, anzichè essere di classe 6, diviene una curva di terza classe contata due volte, d'accordo con la circostanza che la hessiana coincide con la steineriana sicchè ogni tangente della cayleyana nasce qui da due anzichè da un punto della hessiana. È ovvio pertanto che non sono più applicabili le formule che forniscono gli altri caratteri della curva.

La molteplicità della curva jacobiana J , in un punto comune a tre curve date, è stata ricercata con procedimenti sintetici, attraverso una generazione proiettiva di J , dal CREMONA (l. c.), e poi dal DOEHLEMANN, dal GUCCIA e dal GERBALDI ⁽³⁾. Questi ha determinato analiticamente i casi in cui la jacobiana di tre curve, aventi un punto di molteplicità rispettiva r, s, t , possiede ivi un punto di molteplicità superiore ad $r+s+t-2$.

Il modo di comportarsi della hessiana in un punto doppio della curva (caso generale) è stato riconosciuto fino da HESSE ⁽⁴⁾ (1850). Il caso del punto i -plo è stato studiato dal BRILL nella citata memoria del 1878 e da KÖRTER ⁽⁵⁾ (1888).

⁽¹⁾ Introduzione. Articoli XX-XXIV.

⁽²⁾ Journal für Math., Bd. 59, (pag. 125) e Bd. 64 (pag. 288).

Cfr. « CLEBSCH-LINDEMANN » trad. francese, t. II, pag. 102.

⁽³⁾ Circolo Mat. di Palermo, t. 8, (1893-94).

⁽⁴⁾ Journal für Math., Bd. 40.

⁽⁵⁾ « Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung ». (Math. Annalen, Bd. 34).

Giova notare che per le singolarità straordinarie, già nel caso dei punti doppi, occorrono varie complicazioni, per esempio: un *tacnodo* ordinario (punto di contatto ordinario di due rami lineari) è in generale *triplo* per la hessiana ⁽¹⁾, ma esso può divenire *quadruplo* anche restando il *tacnodo ordinario*; ciò accade se le curvature dei due rami sono uguali e di segno opposto, caso che viene designato dal SEGRE (l. c.) come *tacnodo simmetrico* od *armonico* ⁽²⁾.

Delle singolarità che la hessiana d'una curva può avere fuori della curva abbiamo discorso nella speciale notizia storica che chiude il § 22.

Il teorema sull'indeterminazione della hessiana (esistenza d'un punto n -plo per la forma f d'ordine n) è stato enunciato da HESSE (1851) ⁽³⁾ per le forme con un numero qualunque di variabili, ma la dimostrazione è scorretta, ed anzi il teorema stesso non vale più per le forme (con parti multiple) in cui entri un numero di variabili > 4 ⁽⁴⁾. Ciò spiega le difficoltà che presenta l'estensione di questo teorema dal caso semplicissimo delle forme binarie (cfr. L. 2°, § 5) al caso delle forme ternarie e quaternarie (curve e superficie). La prima dimostrazione rigorosa per le curve è dovuta al GORDAN ⁽⁵⁾, quella elementare del testo viene svolta in una nota di CHISINI nel Giornale di Matematiche (1915).

Il teorema sull'indeterminazione della jacobiana d'una rete, che qui si prende come base, è dato sostanzialmente sotto forma algebrica dal PASCH (1881) ⁽⁶⁾ ed il suo enunciato geometrico s'incontra in A. LEVI (1896) ⁽⁷⁾; noi ne abbiamo dato una dimostrazione più diretta, aggiungendo poi la elegante dimostrazione geometrica dovuta al BERTINI (l. c.).

(1) Cfr. SEGRE « Giornale di Matematiche » vol. 36, pag. 48.

(2) Cfr. anche SEGRE « Rendic. Lincei » (19 sett. 1897).

(3) Journal für Math., Bd. 49, pag. 117. (Cfr. Bd. 56, pag. 263).

(4) GORDAN e NÖTHER « Math. Ann. » Bd. 10, pag. 547, (1876).

(5) Sitzungber. der phys. med. Soc. Erlangen (13 dec. 1875).

(6) Math. Ann., Bd. 18, pag. 84.

(7) Giornale di Mat., t. 34.

CAPITOLO III

La cubica piana

24. **Il teorema di Salmon e la condizione di proiettività fra due cubiche.** — Ci proponiamo di applicare la teoria della polarità allo studio delle cubiche: considereremo sempre cubiche *irriducibili* e, dove non si avverta il contrario, *senza punti doppi*.

Ricordiamo anzitutto i risultati ottenuti, cioè che:

una cubica C_3 , senza punti doppi, è di classe 6 (§ 17); per un punto di essa possono condursi in generale quattro tangenti altrove alla cubica (ibidem); la hessiana e la steineriana coincidono in una medesima curva del 3° ordine (§ 7), la quale sega la curva data nei suoi 9 flessi, tutti distinti fra loro (§ 15).

Dimostriamo ora che:

Le quattro tangenti condotte alla cubica da un suo punto, P , formano un birapporto costante al variare di P sulla cubica (⁴), che dicesi anche *modulo* di questa.

Per dimostrare che il detto birapporto non varia, basterà far vedere che, spostando P sulla C_3 di un infinitesimo ds , il birapporto assume un incremento infinitesimo d'ordine superiore rispetto a ds .

Sia dunque P' un punto della cubica C_3 , infinitamente vicino a P . La conica polare del punto P , che è tangente in P (§ 4) e quindi passa per P' , sega ulteriormente la C_3 in quattro punti: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ; le rette PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4 , sono le quattro tangenti uscenti da P . La conica polare di P' intersecherà la C_3 in quattro punti Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4

(⁴) Cfr., anche per la dimostrazione, SALMON « Journal für Math. » Bd. 42, pag. 274, (1851). Un'altra dimostrazione del teorema si è incontrata nel L. 2°, § 22.

infinitamente vicini ai punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ; le rette $P'Q_1', P'Q_2', P'Q_3', P'Q_4'$ sono le quattro tangenti uscenti da P' .

Per il teorema di STEINER il birapporto delle quattro rette

$$PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4$$

è uguale al birapporto delle quattro rette

$$P'Q_1, P'Q_2, P'Q_3, P'Q_4,$$

essendo P' sulla conica polare di P . Se dimostreremo che l'angolo formato dalla coppia di rette

$$P'Q_1, P'Q_1'$$

è, come gli altri tre analoghi, un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a PP' , sarà dimostrato che il primo birapporto differisce dal secondo per infinitesimi d'ordine superiore. Perciò notiamo che Q_1' , punto di C_3 infinitamente vicino a Q_1 , si trova sulla tangente PQ_1 . Ora l'area del triangolo $Q_1Q_1'P'$, che ha la base Q_1Q_1' infinitesima, è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a PP' ; ma

quest'area è $\frac{1}{2} P'Q_1 \cdot P'Q_1' \cdot \text{sen } \widehat{Q_1P'Q_1'}$, quindi

l'angolo $Q_1P'Q_1'$ è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto a PP' . c. d. d.

Il birapporto α delle quattro tangenti, condotte alla C_3 da un suo punto P , che abbiamo dimostrato risultare indipendente da P , costituisce un *invariante assoluto* rispetto alle *trasformazioni proiettive* della cubica. Per verità α dipende irrazionalmente dai coefficienti dell'equazione della cubica, ma in seguito vedremo che l'invariante assoluto, introdotto nel § 4 del L. 1° come funzione del birapporto, cioè

$$J = \frac{4(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)^2(2\alpha - 1)^2},$$

si esprime razionalmente per i coefficienti suddetti, cioè porge un *invariante assoluto razionale* della cubica stessa.

Se la quaterna delle tangenti condotte da P alla C_3 è armonica ($\alpha = -1$) oppure equianarmonica ($\alpha = 1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$), la cubica si dice rispettivamente *armonica* ed *equianarmonica*.

Se nella quaterna anzidetta due tangenti coincidono, si ha $z = 1, (0, \infty)$, e la cubica possiede un *punto doppio*. Il *birapporto* z diventa *indeterminato* soltanto se tre tangenti della quaterna coincidono (L. 1°, § 4) cioè per le cubiche dotate di *cuspidi*.

Ritorniamo alle cubiche C_3 , senza punti doppi. Quando il punto P da cui si conducono le quattro tangenti alla C_3 si fa variare sulla curva fino a cadere in un flesso F , la quaterna delle tangenti si riduce alla tangente di flesso e ad altre tre tangenti. Essendo F un punto della hessiana la sua conica polare si spezza, e poichè F è semplice per la cubica, questa conica non può avere in F un punto doppio (§ 4); deduciamo che la nominata conica si compone della tangente in F (tangente di flesso) e di un'altra retta che contiene i tre punti di contatto delle tangenti uscenti da F , la quale riceve il nome di *polare armonica* del flesso. Allora il birapporto costante della cubica viene espresso come birapporto di quattro punti appartenenti alla polare armonica di un flesso, cioè delle intersezioni di questa retta con la cubica e con la tangente di flesso. Da tale osservazione si trae che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due cubiche C_3 e C'_3 siano proiettive, è che esse abbiano lo stesso invariante assoluto (ossia lo stesso modulo).

Si ripete qui il ragionamento già svolto nel L. 2°, § 22.

Che la condizione sia necessaria, cioè che due cubiche proiettive fra loro abbiano lo stesso invariante è cosa evidente: resta quindi a dimostrarsi che la condizione è anche sufficiente, cioè che due cubiche C_3 e C'_3 , aventi lo stesso invariante, possono proiettarsi l'una nell'altra.

Sia F un flesso della C_3 , e $HKLM$ le intersezioni della polare armonica di F con la tangente di flesso e con le altre tre tangenti uscenti da F , sia inoltre F' un flesso di C'_3 e $H'K'L'M'$ i quattro punti analoghi di $HKLM$; per ipotesi sussiste l'uguaglianza fra i birapporti

$$(HKLM) = (H'K'L'M').$$

Sia ora P un punto qualunque della C_3 e sia Q l'intersezione di FP con la polare armonica di F ; e sia Q' il punto della polare armonica di F' tale che

$$(H'K'L'Q') = (HKLQ),$$

P' una delle due ulteriori intersezioni di C_3' con la retta $F'Q'$. Consideriamo la proiettività che trasforma il piano della C_3 nel piano della C_3' , in modo che i quattro punti $FHKP$ cadano nei punti $F'H'K'P'$. Questa proiettività porterà il punto Q , intersezione di HK con FP , nel punto Q' intersezione di $H'K'$ con $F'P'$, e inoltre, essendo

$$(HKLM) = (H'K'L'M')$$

$$(HKLQ) = (H'K'L'Q'),$$

porterà anche L in L' e M in M' , e quindi trasformerà la cubica C_3 in una cubica C_3'' che coinciderà con la C_3' , avendo a comune con essa dieci punti, di cui tre sono riuniti in F' , due in K' , due in L' , due in M' e il decimo è dato da P' .

Ricordiamo che esistono quattro permutazioni per cui resta invariato il birapporto di quattro elementi in posizione generica: quando però si voglia tener fermo uno prefissato fra i quattro elementi, vi è la sola identità che lascia invariato il birapporto suddetto. Se invece i quattro elementi formano un gruppo armonico vi è, oltre l'identità, una sola permutazione che non ne altera il birapporto; mentre, se i quattro elementi formano un gruppo equianarmonico si hanno, oltre l'identità, due permutazioni siffatte (L. 1°, § 4). Ora l'omografia che trasforma la C_3 nella C_3' , trasformando il gruppo $FHKP$ nel gruppo $F'H'K'P'$, deve portare un flesso della C_3 in uno dei 9 flessi della C_3' e portare l'una nell'altra le relative tangenti inflessionali, inoltre deve trasformare il gruppo delle altre tre tangenti uscenti dal flesso medesimo nel gruppo analogo; si può invece scegliere il punto P' , omologo di P , fra i due punti intersezione di C_3' con la retta $F'Q'$. Da quanto precede si deduce immediatamente che:

Esistono $9 \cdot 2 = 18$ omografie che trasformano l'una nell'altra due cubiche di uguale modulo se questo ha un valore generico, ma queste omografie diventano $9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ se le due cubiche sono armoniche e $9 \cdot 2 \cdot 3 = 54$ se sono equianarmoniche.

In particolare: per una cubica generale esistono 18 omografie che la trasformano in sè stessa; ne esistono 36 per una cubica armonica e 54 per una cubica equianarmonica.

Osservazione. Dal fatto che l'uguaglianza dei birapporti delle quattro tangenti, ossia degli invarianti assoluti delle relative quaterne, esprime la condizione di proiettività di due

cubiche, si deduce che: *la cubica possiede un solo invariante assoluto.* Questa conclusione si accorda con la circostanza che l'equazione della cubica contiene 9 parametri essenziali, mentre vi sono ∞^8 omografie piane e vi è in generale un numero finito di omografie che trasformano una cubica in se stessa.

Possiamo completare i risultati precedenti determinando le trasformazioni proiettive di due cubiche con punto doppio; questo caso corrisponde al valore $J = 1$ dell'invariante assoluto, ma sfugge alle considerazioni fatte, dove era essenziale riferirsi a quaterne di tangenti con elementi distinti.

Qui occorre fare una distinzione secondo che si tratti di cubiche dotate di punto doppio a tangenti distinte (reali o no) oppure di cuspidi, ricordando che: nel primo caso per un flesso passa una tangente altrove alla curva fuori della tangente di flesso, mentre nel secondo caso non ve ne è alcuna.

1) Se due cubiche C_3 e C'_3 , dotate di punto doppio O e O' , si debbono trasformare proiettivamente l'una nell'altra, bisognerà anzitutto che O , O' e le relative tangenti principali si corrispondano; se inoltre ad un flesso F di C_3 si associa uno F' , fra i tre flessi di C'_3 , la proiettività in cui si corrispondono F e F' farà anche corrispondere le tangenti condotte da F e F' alle due cubiche, e precisamente fra loro le due tangenti di flesso e le due tangenti altrove, nonchè i loro punti di contatto P e P' . Si vede così che le condizioni precedenti determinano, in sei modi diversi, quattro coppie di rette omologhe nei piani di C_3 e di C'_3 , cioè le FP e $F'P'$, PO e $P'O'$, le due tangenti di flesso e due tangenti principali rispettivamente in O e O' (scelta possibile in due modi). Con ciò resta provato che una trasformazione proiettiva di C_3 in C'_3 è suscettibile di sei determinazioni al più. Ma d'altra parte, fissando — in uno dei sei modi anzidetti — quattro coppie di rette omologhe nei piani di C_3 e di C'_3 , si determina un'omografia che trasforma la prima cubica in un'altra avente a comune con C'_3 dieci punti (cinque riniti in O' , tre in F' e due in P') e però coincidente con C'_3 . Si conclude che:

Due cubiche dotate di nodo sono trasformabili proiettivamente l'una nell'altra in 6 modi diversi, e in particolare ogni cubica con nodo ammette 6 trasformazioni proiettive in se stessa.

Il caso delle cubiche con cuspidi si può trattare come limite del precedente. Qui per stabilire una proiettività

fra le due cubiche C_3 e C_3' si dovranno associare: le due cuspidi O e O' , i due flessi F e F' (ciascuna curva ne possiede uno solo) e le relative tangenti, cioè le tangenti cuspidali e di flesso; in tal guisa si ottengono soltanto tre coppie di rette omologhe, e per determinare la proiettività è lecito ancora scegliere arbitrariamente sulla seconda curva il punto Q' , corrispondente ad un punto Q prefissato sulla prima. D'altra parte una omografia così determinata fa corrispondere a C_3 una cubica avente con C_3' dieci punti comuni (sei in O' , tre in F' , e uno in Q') e però coincidente con essa. Si conclude che:

Due cubiche dotate di cuspidi sono trasformabili proiettivamente l'una nell'altra in ∞^1 modi; in particolare una cubica con cuspidi ammette ∞^1 trasformazioni proiettive in se stessa, essendovi una trasformazione che porta l'uno nell'altro due punti generici della curva.

Questa conclusione è d'accordo col fatto che vi sono ∞^8 omografie piane, le quali lasciano invariata la famiglia delle ∞^7 cubiche dotate di cuspidi.

25. Invarianti di Aronhold e equazione normale. — Cerchiamo di esprimere l'invariante assoluto J di una cubica

$$f = \sum a_{ik} x^i y^k = 0 \quad (i+k \leq 3)$$

in funzione dei coefficienti a . Designando con z il birapporto costante delle quattro tangenti condotte alla curva da un suo punto, si ha — per definizione —

$$J = \frac{4(1 - z + z^2)^3}{(z - 1)^2(z - 2)^2(2z - 1)^2},$$

sicchè J risulta indipendente dall'ordine delle quattro tangenti e perciò univocamente definito in rapporto ad f ; sarà dunque J funzione razionale dei coefficienti a :

$$J = \frac{A(a)}{B(a)},$$

dove A e B sono polinomi aventi lo stesso grado, dovendo J dipendere soltanto dai rapporti dei coefficienti.

Per determinare il grado di A e B , basta cercare quante sono le cubiche di un fascio che posseggono un dato invariante assoluto; è chiaro infatti che mutando i coefficienti a

in $a + \lambda a'$, il grado di $A(a + \lambda a')$ e $B(a + \lambda a')$ rispetto a λ è precisamente il grado complessivo rispetto ai coefficienti a dei due polinomi A e B .

Si consideri un fascio generale di cubiche e sia P uno dei suoi punti base, che collochiamo nell'origine delle coordinate. Sopra una retta p per P , che non contenga altri punti base, le cubiche del fascio segano una involuzione di coppie di punti (cfr. L. 2°, § 2), che ha due punti doppi; perciò vi sono due cubiche del fascio tangenti a p . Segue di qui che le ∞^1 quaterne di rette tangenti alle nostre cubiche per P formano, nel fascio di raggi P , una serie (razionale) d'indice 2, cioè una serie tale che una retta determina due quaterne: il parametro λ delle cubiche del fascio figura al secondo grado nell'equazione di una quaterna.

Ora le quattro tangenti condotte da $P = (00)$ ad una cubica del fascio verranno rappresentate annullando una forma del quarto grado: $\varphi(xy) = 0$, e l'espressione dell'invariante assoluto è (L. 1°, § 4)

$$J = \frac{4i^3}{j^2},$$

dove i è di secondo grado e j di terzo grado nei coefficienti di φ . Siccome questi coefficienti contengono λ al secondo grado, segue che:

1) J contiene λ al dodicesimo grado, cioè *vi sono 12 cubiche del fascio per cui l'invariante assoluto assume un valore generico*. In particolare vi sono 12 cubiche con punto doppio per cui $J = 1$, d'accordo con la deduzione del § 20: ciò risulta anche direttamente ove si riprenda la costruzione delle cubiche del fascio tangenti ad una retta p per P ; considerando come omologhe due rette per P tangenti a una medesima cubica del fascio, si ottiene una corrispondenza $[6, 6]$ i cui 12 raggi uniti vanno ai punti doppi delle cubiche del fascio.

2) *Ma vi sono nel fascio 4 cubiche equianarmoniche* per cui $J = 0$, le quali conterranno ciascuna per 3 in rapporto alle radici dell'equazione che si ottiene annullando il numeratore di $J: A = 0$. Sarà dunque A il cubo di una forma di quarto grado nei coefficienti di f , cioè

$$A = S^3,$$

dove S designa un invariante razionale di quarto grado (e di peso 4) della cubica.

3) Similmente vi sono nel fascio 6 cubiche armoniche per cui $J = \infty$, e così l'equazione $B = 0$, che si ottiene annullando il denominatore di J , ammette 6 radici doppie, ossia

$$B = T^2,$$

dove T designa un invariante razionale di sesto grado (e di peso 6) della cubica.

In conclusione:

La cubica piana possiede un invariante di quarto grado, S , e un invariante di sesto grado, T , per mezzo dei quali si esprime l'invariante assoluto:

$$J = \frac{S^3}{T^2};$$

le condizioni

$$S = 0, \quad T = 0,$$

esprimono che la cubica è, rispettivamente, equianarmonica ed armonica.

L'unicità dell'invariante assoluto, già osservata nel paragrafo precedente, porta che ogni altro invariante della cubica si esprime razionalmente per S e T . In particolare *gli invarianti S e T sono definiti dal loro grado a meno di fattori numerici; il discriminante della cubica viene dato da $S^3 - T^2$ ($J = 1$ per le quaterne con raggio doppio) e così i fattori numerici che compariscono nella definizione di S e T sono il quadrato e il cubo d'una medesima costante.*

Nota. Gli invarianti S e T della cubica sono stati introdotti da ARONHOLD ⁽¹⁾ (1849); ma il loro significato geometrico viene in chiara luce soltanto con la scoperta di SALMON relativa al birapporto delle quattro tangenti condotte per un punto P della cubica. SALMON, partendo dalla ricerca di questo birapporto, ritrova gli invarianti di ARONHOLD, dandone il calcolo effettivo.

Qui giova avvertire che ove si assuma l'espressione dell'invariante assoluto in rapporto alla sopra nominata quaterna:

$$J = \frac{4i^3}{j^2},$$

⁽¹⁾ Journal für Math., Bd. 39, pag. 149.

non è lecito ritenere *a priori* che i e j siano funzioni razionali dei coefficienti della cubica f , ciò che abbrevierebbe le considerazioni precedenti. Infatti, a differenza dell'invariante assoluto J , gli invarianti relativi i e j dipendono non soltanto dalla quaterna delle tangenti per P , ma anche dal sistema delle coordinate a cui questa quaterna viene riferita (L. 1°, § 2); ora i tre raggi fondamentali di questo sistema non vengono definiti razionalmente in funzione delle quattro tangenti nominate, sicchè i ed j sembrano dipendere irrazionalmente dai coefficienti di f ⁽¹⁾.

Se, richiamando la notazione simbolica, si scrive la cubica sotto la forma

$$a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 = e_x^3 = f_x^3,$$

si possono costruire due invarianti del quarto e del sesto grado in base al teorema del libro primo, § 15, (vol. I, pag. 98), e così si ottengono — a meno di fattori numerici — le espressioni di S e di T :

$$S \equiv (abc)(abd)(acd)(bcd)$$

$$T \equiv (abc)(abd)(ace)(bcf)(def)^2,$$

dalle quali è facile passare alle espressioni effettive.

Il calcolo dell'invariante assoluto di una cubica diventa particolarmente semplice quando l'equazione di questa sia ridotta ad una *forma normale*, cui si riattaccano importanti conseguenze.

Sia data una cubica C_3 , senza punti doppi, di equazione

$$f(xy) = 0.$$

Con una proiezione di C_3 , equivalente ad una trasformazione delle coordinate, si può fare in modo che un flesso di C_3 divenga il punto all'infinito dell'asse y e la sua polare armonica divenga l'asse x (cioè $y = 0$). Di più sarà lecito supporre che la tangente di flesso nel punto all'infinito del-

(1) La rappresentazione degli invarianti e covarianti della forma binaria delle quattro tangenti $\varphi(xy) = 0$ per mezzo delle forme invariantive di f , è stata data completamente da HARNACK « Math. Annalen » Bd. 9, pag. 218.

l'asse y sia divenuta la retta all'infinito del piano. Prescindiamo — per un momento — da quest'ultima supposizione.

In ogni caso la curva C_3 sarà intersecata in due punti simmetrici rispetto all'asse x , $+y$ e $-y$, dalle perpendicolari all'asse x . Perciò y^2 sarà funzione razionale di x , del 3° grado, cioè

$$y^2 = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

L'equazione della cubica sarà

$$y^2 \psi(x) = \varphi(x),$$

del 3° grado, e perciò ψ è di 1° grado e si può porre (dividendo eventualmente per una costante)

$$\psi(x) = x - a.$$

Per $x = a$ si ha $y = \infty$, cioè la retta $x = a$ è la tangente di flesso di C_3 nel punto all'infinito dell'asse y . Se dunque si suppone che codesta tangente sia la retta all'infinito, l'equazione della cubica diventa

$$y^2 = \varphi(x),$$

dove φ è un polinomio di terzo grado

$$\varphi(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

Allora, poichè $\varphi = 0$ è l'equazione delle quattro tangenti condotte dal punto all'infinito dell'asse y alla cubica, si ottiene

$$J = \frac{S^3}{T^2} = \frac{4i^3}{j^2},$$

dove i e j sono gli invarianti del polinomio φ considerato come polinomio del quarto grado col primo coefficiente uguale a zero; e perciò si deduce

$$S = \rho^2 i, \quad T = \rho^3 \frac{j}{2},$$

con ρ fattore numerico arbitrario.

Con una nuova trasformazione di coordinate, cambiando x

in $x - \frac{b}{3}$, l'equazione della cubica si ridurrà alla forma

$$y^2 = k(x^3 - px + q);$$

e cambiando ancora y in $\sqrt{k} \cdot y$, l'equazione precedente assumerà la *forma normale*

$$y^2 = x^3 - px + q.$$

Partendo da questa equazione si calcoleranno gli invarianti della cubica.

Si ha (L. 1°, § 5; Vol. I, pag. 34):

$$i = 3p, \quad j = 27q,$$

e quindi

$$S = 3p^2, \quad T = \frac{27}{2} p^3 q.$$

Determiniamo il fattore numerico ρ prendendo *per convenzione* $\rho = 1$, risulterà

$$S = 3p, \quad T = \frac{27}{2} q,$$

e quindi il discriminante della cubica

$$D = S^3 - T^2 = 27 \left(p^3 - \frac{27}{4} q^2 \right),$$

differisce per il fattore $\frac{4}{27}$ da $4p^3 - 27q^2$ $\left(= \frac{4i^3 - j^2}{27} \right)$ che, nel § 4 del L. 1° (Vol. I, pag. 30), abbiamo definito come discriminante della quaterna $\varphi = 0$.

La cubica è equianarmonica per $p = 0$, e armonica per $q = 0$.

Di qui si deduce l'interpretazione degli invarianti S e T data da ARONHOLD (1849). In primo luogo:

La forma cubica ternaria $f(xyz)$ (equianarmonica) per cui $S = 0$ si può esprimere come somma di tre cubi, cioè, per una scelta conveniente del punto unità:

$$f = x^3 + y^3 + z^3.$$

Si ha infatti dalla precedente forma normale

$$f = x^3 - y^2 z + qz^3,$$

e basta quindi ridurre la forma binaria $\varphi(yz) = -y^2 z + z^3$ a una somma di due cubi, il che si effettua considerando i due punti uniti della proiettività ciclica del terz' ordine definita dalla terna di punti $\varphi(yz) = 0$ (Cfr. L. 1°, § 5).

L'equazione

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

mette in evidenza che: *la hessiana di una cubica equianarmonica si riduce a un trilatERO*; infatti lo hessiano della forma

$$x^3 + y^3 + z^3 \quad \text{è} \quad 6^3xyz.$$

Questa proprietà è caratteristica per le cubiche equianarmoniche, come vedremo più avanti (§ 28).

In secondo luogo: *la cubica (armonica) per cui $T=0$ è la hessiana della propria hessiana*. Infatti il determinante hessiano della forma

$$f = x^3 - y^2 z - pxz^2 \quad (q=0)$$

è

$$h = \begin{vmatrix} 6x & 0 & -2pz \\ 0 & -2z & -2y \\ -2pz & -2y & -2px \end{vmatrix} = 24px^2z - 24xy^2 + 8p^2z^3,$$

e calcolando lo hessiano di h si trova

$$8^3 \cdot 6^3 \cdot p^2 \cdot f.$$

Vedremo più tardi che la proprietà espressa dall' enunciato precedente caratterizza le cubiche armoniche (Cfr. § 28).

È degna di nota la circostanza che il *fascio*

$$y^2 = \lambda(x^3 - px + q),$$

definito dal variare di λ , è *costituito tutto di cubiche di ugual modulo*: l'invariante assoluto J che, come abbiamo visto, si esprime quale funzione razionale fratta di 12° grado in λ , si riduce qui costante, cioè indipendente da λ . Non è questo il solo caso in cui si presenta tale circostanza particolare, cioè

l'annullamento dei coefficienti di λ nell'espressione di $J(\lambda)$; anzi si hanno *diverse famiglie di fasci di cubiche di ugual modulo*, di cui qualche esempio è stato incontrato da S. KANTOR e che sono state classificate da O. CHISINI ⁽¹⁾. Fasci siffatti, dove non sieno formati di cubiche con punto doppio, godono della proprietà che J non può assumere il valore 1 senza divenire in pari tempo indeterminato, sicchè le cubiche dotate di punto doppio appartenenti al fascio debbono possedere una cuspide o una singolarità derivata come caso particolare dalla cuspide, cioè spezzarsi in conica e retta tangente o in tre rette per un punto. Quest'ultima circostanza contrassegna il fascio $y^2 = \lambda(x^3 - px + q)$ sopra nominato: per $\lambda = 0$ si ottiene infatti una cubica spezzata nella retta all'infinito e nella retta $y = 0$ contata due volte, e per $\lambda = \infty$ si ottengono tre rette parallele

$$x^3 - px + q = 0.$$

Aggiungiamo l'osservazione che anche le *cubiche con punto doppio* possono essere rappresentate da un'equazione normale del tipo

$$y^2 = \varphi(x) = x^3 - px + q.$$

L'esistenza d'un punto doppio porta che $\varphi(x) = 0$ possieda una radice doppia:

$$\varphi(x) = (x - a)^2(x - c),$$

e, affinchè manchi il termine in x^2 ,

$$c = -2a:$$

$$p = 3a^2, \quad q = 2a^3.$$

Se poi il punto doppio della cubica deve essere una *cuspide*, occorre che $\varphi(x) = 0$ abbia una radice tripla, e quindi, riducendo alla forma normale priva di termine in x^2 ,

$$\varphi(x) = x^3,$$

$$p = q = 0.$$

(1) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1916.

Si noti in fine che l'equazione normale della cubica con cuspidè:

$$y^2 = x^3,$$

pone in evidenza le *infinite trasformazioni proiettive* della curva (§ 24):

$$x' = \alpha^2 x, \quad y' = \alpha^3 y,$$

dove α è un parametro arbitrario.

26. Forma delle cubiche reali. — La riduzione della cubica alla equazione normale, implicando la scelta di un flesso (e della relativa polare armonica), non si effettua razionalmente in rapporto ai coefficienti della cubica; ma se questa è reale, cioè rappresentata da un'equazione a coefficienti reali, l'equazione di nono grado dei flessi possiede certo almeno una radice reale, e perciò è sempre possibile ridurre la cubica alla forma

$$y^2 = k(x^3 - px + q),$$

con una *trasformazione reale*. Ora, per ridurre k all'unità, occorre cambiare y in $\sqrt{k} \cdot y$, ciò che costituisce ancora una trasformazione reale se $k > 0$; se invece k è negativo, lo si ridurrà prima positivo cambiando x in $-x$, con che l'equazione precedente diviene

$$y^2 = k(-x^3 + px + q) = -k(x^3 - px - q),$$

cioè assume ancora la forma normale, dove non è fatta alcuna ipotesi circa il segno di p e di q .

L'equazione normale della cubica

$$y^2 = \varphi(x) = x^3 - px + q$$

permette di riconoscerne la forma. A tale scopo conviene distinguere due casi:

1) La $\varphi(x) = 0$ ammette *tre* radici reali a, b, c , dove

$$a < b < c.$$

Allora

$$\varphi(x) = (x - a)(x - b)(x - c),$$

e si vede che

$$y = \sqrt{\varphi(x)}$$

riesce reale soltanto per

$$a \leq x \leq b,$$

e per

$$x \geq c.$$

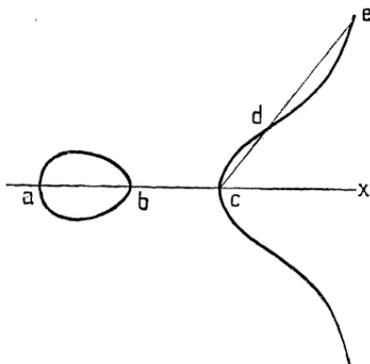
Corrispondentemente si hanno *due rami reali* di C_3 : un ramo chiuso a forma di ovale che è intersecato da ogni retta, non tangente, in due o in nessun punto (ramo *pari* segato da una retta qualsiasi non tangente in un numero pari di punti); e un ramo aperto, segato da ogni retta non tangente in uno o in tre punti, uno dei quali può anche essere il punto all'infinito dall'asse y (ramo *impari* incontrato da ogni retta non tangente in un numero dispari di punti).

Ora si vede che il ramo pari di C_3 non può possedere una tangente di flesso: questa infatti, dovendo avere un numero pari di intersezioni col ramo stesso, e avendone già tre riunite nel flesso, dovrebbe averne almeno quattro, il che è assurdo, appartenendo il ramo a una curva del terz'ordine. Invece il ramo impari possiede *due* flessi simmetrici rispetto all'asse x (oltre quello all'infinito). Si arriva a questa conclusione considerando una retta

per il punto c , congiungente un altro punto del detto ramo, e perciò secante il ramo in tre punti c, d, e ($d < e$). Infatti assumiamo questa retta (secante il ramo in tre punti) come asse x , e consideriamo quindi la funzione y , distanza dei punti del ramo cde dalla nominata retta. Questa funzione si annulla in tre punti c, d, e , quindi, per il teorema di ROLLE⁽¹⁾,

la sua derivata si annulla fra c e d , e fra d ed e ; ma fra le due radici della derivata prima c'è una radice della derivata seconda, perciò quest'ultima si annulla in un certo punto fra c ed e . Dove la derivata seconda si annulla ivi è un flesso, quindi tra c ed e vi è almeno un flesso. c. d. d.

Semplici considerazioni intuitive mostrano ancora che non ci sono altri flessi reali sul ramo impari, poichè se ne



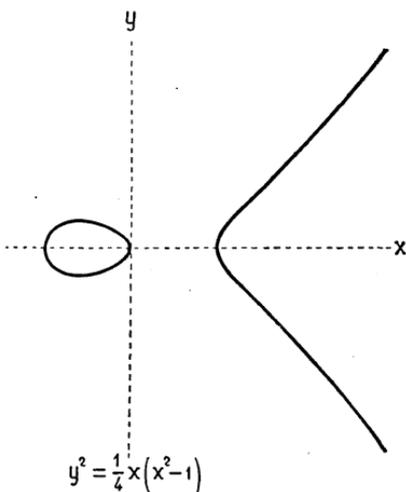
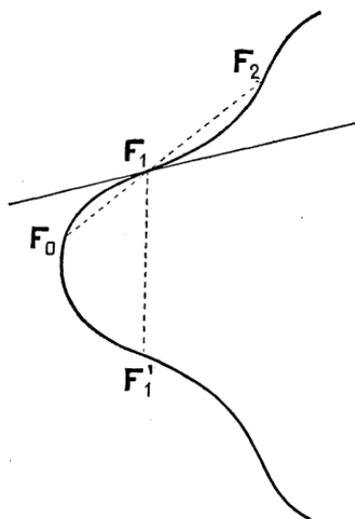
(1) Cfr. per es. S. PINCHERLE « Lezioni di Calcolo infinitesimale ». Bologna 1915, pag. 116.

dedurrebbe l'esistenza di tangenti doppie (a contatti distinti). Ma per dar forma rigorosa a tali considerazioni occorre entrare in un'analisi delicata che — indipendentemente dalla particolarizzazione metrica della cubica a cui ci riferiamo — fu svolta da MÖBIUS ⁽¹⁾ (cfr. Cap. IV). Si può evitare questa analisi, adoperando il teorema di MAC-LAURIN, che fu già incontrato nel libro 1°, § 22 e di cui porgiamo una nuova dimostrazione nel paragrafo seguente: « la retta congiungente due flessi sega la cubica in un terzo flesso ».

I flessi del ramo aperto di C_3 si presentano a coppie simmetriche rispetto all'asse x ; se vi sono più coppie di flessi, vi sarà al disopra dell'asse x un primo flesso F_1 a cui segue, per ordine di ascissa, un secondo flesso F_2 . Designando con F_1' il flesso simmetrico di F_1 , il segmento F_1F_1' , insieme con l'arco determinato sul nostro ramo dai medesimi estremi, forma una curva chiusa finita, in cui non penetra la tangente di flesso in F_1 (altrimenti vi sarebbe una quarta intersezione di questa retta con la cubica). Si deduce che il punto F_2 giace al disopra della nominata tangente di flesso in F_1 , e perciò la retta F_1F_2 penetra nella regione limitata dalla suddetta curva chiusa, e quindi sega l'arco di curva F_1F_1' in un punto F_0 di ascissa minore che F_1 ; questo punto F_0 dovrebbe essere un flesso; ma tale conclusione è assurda giacchè, per ipotesi, non vi sono flessi di ascissa minore che F_1 .

In conclusione la cubica possiede in tutto *tre* flessi reali

(1) Ueber die Grundformen der Linien dritter Ordnung. Leipziger Abhandlungen, Bd. I, 1852.



(uno dei quali è all'infinito) ⁽¹⁾ sopra il ramo impari; questa curva si presenta dunque come una *parabola campaniformis cum ovali*, secondo la denominazione di NEWTON.

2) La $\varphi(x) = 0$ possiede una sola radice reale $x = a$ e due radici immaginarie coniugate.

Allora si ha

$$\varphi(x) = (x - a)\psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è un polinomio di 2° grado, che conserva sempre lo stesso segno, p. es.

$$\psi(x) > 0.$$

Si vede quindi che

$$y = \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{x - a} \sqrt{\psi(x)}$$

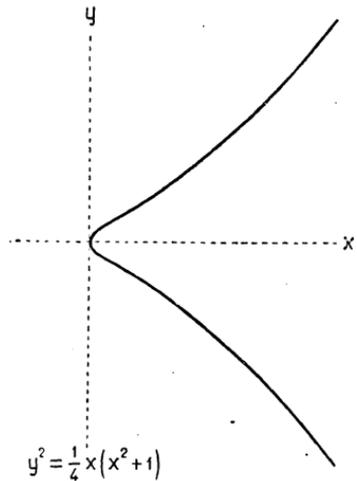
riesce reale per

$$x \geq a,$$

e si ha corrispondentemente un solo ramo aperto, sul quale — come nel caso precedente — si trovano due flessi reali, oltre quello all'infinito. L'andamento della curva riesce bene caratterizzato dalla designazione di *parabola pura campaniformis*, datale da NEWTON.

La riduzione al tipo normale essendo ancora possibile in modo reale per le cubiche (irriducibili) dotate di punto doppio o di cuspide (giacchè in ogni caso vi è un numero dispari di flessi e quindi almeno uno reale), possiamo studiare la forma delle cubiche dotate di punto doppio, a cui si è condotti dalla discussione dei casi seguenti.

3) L'equazione $\varphi(x) = 0$ ammetta una radice doppia $a = b$, e un'altra radice reale c ; sicchè, riducendo $\varphi(x)$ alla



⁽¹⁾ Indipendentemente dalla visione della forma particolare della cubica considerata, l'osservazione fondamentale che la retta congiungente due flessi reali contiene un terzo flesso reale, permette di riconoscere che « una cubica reale non può avere più di tre flessi reali ». Infatti, se ne sono dati quattro, si arriva a costruire più di nove flessi reali, il che è assurdo.

forma normale in cui manca il termine in x^2 ($c = -2a$):

$$y = \sqrt{\varphi(x)} = (x - a)\sqrt{x + 2a};$$

si vede pertanto che la curva è composta di un solo ramo corrispondente a $x \geq -2a$.

Vi è un punto doppio per $x = a$ e questo è un *nodo* (a tangenti reali) o un *punto isolato*, secondochè

$$a > 0 \quad \text{oppure} \quad a < 0;$$

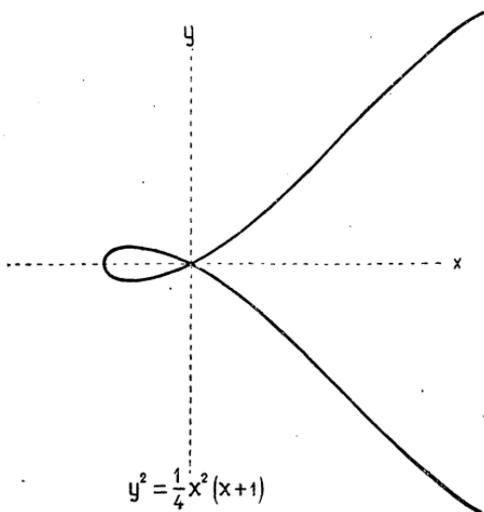
corrispondentemente si hanno la *parabola nodata* e la *parabola punctata* di NEWTON.

La *parabola nodata* non possiede alcun flesso all'infuori di quello all'infinito.

Per dimostrarlo si può ricorrere a diversi metodi; diamo qui la preferenza al metodo che si fonda sulla razionalità della cubica dotata di punto doppio, poichè esso vale a mettere in luce la differenza fra la parabola nodata e la parabola punctata.

La cubica C , essendo dotata di punto doppio, O , si

lascia rappresentare (per proiezione da questo) sopra una retta r in guisa che alle terne di punti segate dalle rette del piano corrispondano su r le terne di punti di un'involuzione di seconda specie g_3^2 . Ora se la C possiede due flessi, a questi corrispondono su r due punti A e B che, contati tre volte, appartengono alla g_3^2 , mentre al punto doppio O corrisponde una coppia di punti, O_1 e O_2 , appartenente a ∞^1 terne della g_3^2 . Si deduce che la coppia $O_1 O_2$ appartiene a una terna della g_3^1 determinata da A^3 e B^3 , cioè a una terna della proiettività ciclica del terz'ordine che ha come punti uniti A e B . Ma questa conclusione è assurda se A, B, O_1, O_2 sono insieme reali: quando A e B sono reali, la proiettività del terz'ordine



risulta immaginaria, e così la coppia $O_1 O_2$ risulta pure immaginaria, cioè il punto doppio della cubica, O , deve essere un punto isolato anzichè un nodo; se invece O_1, O_2 sono punti reali, uno almeno fra i punti A e B (corrispondenti a flessi della cubica) deve essere immaginario.

[La dimostrazione indicata si può svolgere in forma lievemente diversa, ove non compare più la nozione della razionalità della cubica con punto doppio. Se una cubica C_3 dotata di punto doppio O possiede più di un flesso reale, essa ne possiede tre ABC , appartenenti ad una retta α . Allora la C_3 è trasformata in se stessa da due omologie armoniche che scambiano AB e AC , e quindi dall'omografia prodotto che scambia ciclicamente ABC . La proiettività ciclica del terz' ordine, così definita sopra α , possiede come punti uniti le tracce $O_1 O_2$ delle tangenti alla cubica nel punto doppio O : segue che O_1 e O_2 sono immaginari].

Il ragionamento che precede prova che la parabola nodata non può avere altri flessi fuori di quello all'infinito, mentre esso permette di costruire una cubica razionale dotata di due — e quindi di tre — flessi reali, il cui punto doppio deve essere un punto isolato.

D'altronde si riconosce direttamente che la parabola *punctata* possiede, oltre quello all'infinito, due flessi (reali) simmetrici rispetto all'asse x , ripetendo qui il ragionamento fatto in generale per il ramo impari di una cubica senza punti doppi.

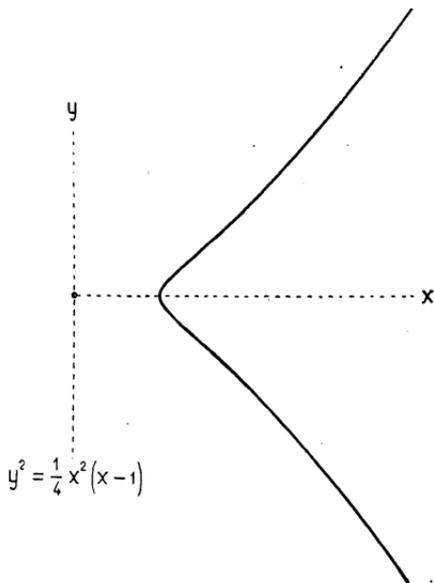
4) L'equazione $\varphi(x) = 0$ ammetta una radice tripla $a = b = c$:

$$\varphi(x) = (x - a)^3,$$

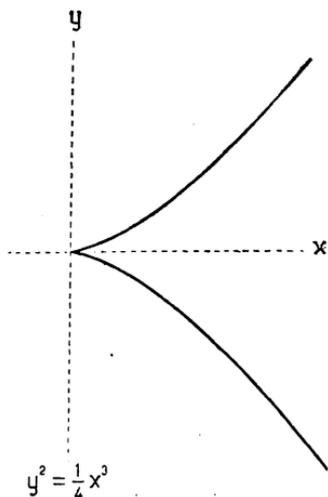
o

$$\varphi(x) = x^3 \quad (a = 0)$$

riducendo φ alla forma $x^3 - px + q$ che abbiamo assunta come normale ($p = q = 0$).



In questo caso la cubica $y^2 = \varphi(x)$ ha una cuspide nell'origine e viene designata da NEWTON come *parabola cuspidata (semicubica)*. Questa curva, per le formole di PLÜCKER, non possiede altro flesso che il punto all'infinito dell'asse y .



Ora i cinque tipi di cubiche, con tangente di flesso all'infinito, si raccolgono sotto la comune denominazione di *parabole divergenti*, che bene ne esprime l'andamento. La riduzione dell'equazione della cubica a forma normale si può interpretare come una proiezione, sicchè essa esprime il celebre teorema (*genesis curvarum per umbras*) enunciato da NEWTON al termine della sua *Enumeratio*:

Tutti i tipi delle cubiche reali si deducono proiettivamente dai cinque tipi delle parabole divergenti: parabola campaniforme con o senza ovale, parabola nodata, punctata e cuspidata.

Per quanto sopra abbiamo detto, la proiezione di una cubica in una parabola si effettua mandando all'infinito una retta di flesso (CHASLES ⁽¹⁾), ed è anche lecito aggiungere la condizione che il diametro fornito dalla polare armonica del flesso all'infinito risulti normale alla direzione segnata dal flesso, e quindi sia asse di simmetria ortogonale.

Dal punto di vista *metrico* si debbono distinguere i vari casi cui dà luogo la posizione della retta all'infinito rispetto alla curva; un ramo di una parabola divergente può dare origine così fino a tre rami, congiunti attraverso all'infinito. Per tal modo si ottengono tutti i tipi di cubiche metricamente distinti, che sono classificati nel citato lavoro di NEWTON.

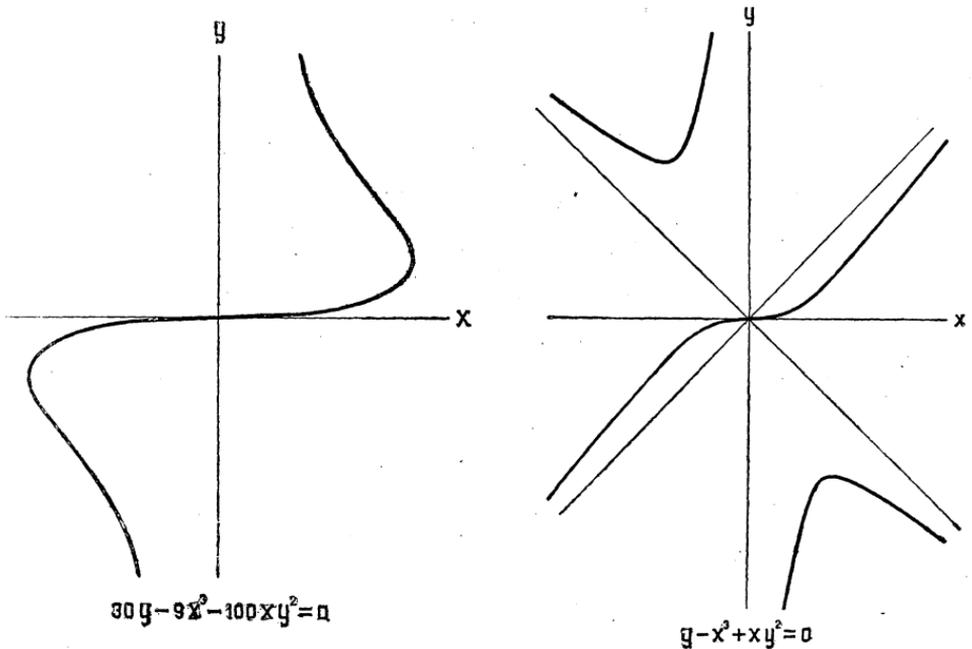
Ma, secondo la veduta proiettiva che qui adottiamo, gli archi di curva separati da punti all'infinito si riterranno sempre costituire un unico *ramo* o *circuito*; si avranno quindi cubiche (*unipartite*) con un ramo, e cubiche (*bipartite*) con due rami. La proiezione di una parabola conserva la *parità* e *disparità* dei suoi rami, e così: *le cubiche unipartite (senza*

(1) Aperçu Historique. Nota 20.

punto doppio) posseggono un ramo impari dotato di tre flessi reali, e le cubiche bipartite posseggono un ramo impari con tre flessi reali e un ramo pari senza flessi.

Aggiungeremo che la distinzione fra rami pari e impari per le curve algebriche, risulta subito dalla legge di continuità per cui le intersezioni reali con un ramo possono divenire immaginarie soltanto a coppie, attraverso un contatto. Ma questa distinzione vale indipendentemente dalla algebricità, potendosi fondare sulla natura topologica del piano proiettivo, e sulla distinzione che ivi ricorre di due specie di linee chiuse, seguendo STAUDT e MÖBIUS. Queste considerazioni ci riserviamo riprendere e sviluppare più avanti (Cap. IV).

Per una migliore intuizione della forma delle cubiche, giova aggiungere, ai cinque tipi delle parabole divergenti di



NEWTON, i cinque tipi di CHASLES, che corrispondono ad una diversa particolarezzazione metrica, mandandosi all'infinito la polare armonica d'un flesso, il quale diviene *centro di simmetria* della curva. E basterà all'uopo disegnare due figure con riferimento alle speciali cubiche, la prima unipartita e la seconda bipartita, di cui viene indicata l'equazione.

Osservazione. SYLVESTER ha avvertito e CREMONA ⁽¹⁾ (1854) ha dimostrato, che si può riconoscere se una cubica sia unipartita o bipartita, in funzione del segno del discriminante

$$D = S^3 - T^2.$$

Riduciamo l'equazione della cubica alla forma normale

$$y^2 = x^3 - px + q,$$

dove

$$S = 3p, \quad T = \frac{27}{2}q, \quad D = \frac{4}{27}(4p^3 - 27q^2).$$

Allora si vede ⁽²⁾ che: per $D > 0$ l'equazione $x^3 - px + q = 0$ ha una sola radice reale, mentre per $D < 0$ essa ha tre radici reali (caso irriducibile dell'equazione di terzo grado). Si deduce che le cubiche con discriminante positivo sono unipartite e quelle con discriminante negativo sono bipartite. In particolare per $T = q = 0$, il segno di D è uguale a quello di S ossia a quello di p : le cubiche armoniche per cui $S > 0$ sono unipartite e quelle con $S < 0$ sono bipartite; se anche $S = p = 0$ la curva ha una *cuspidè*, d'accordo con la indeterminazione del valore del birapporto relativo alle sue quattro tangenti condotte da un punto.

Si aggiunga che, per

$$D = 4p^3 - 27q^2 = 0,$$

si ha una cubica con *nodo* o con *punto isolato secondo che* $T < 0$ oppure $T > 0$; infatti l'equazione $x^3 - px + q$ ha in questo caso una radice doppia a e una radice semplice $-2a$, sicchè il segno di $T = \frac{27}{2}q = -27a^3$ è l'inverso di quello di a , da cui abbiam visto dipendere la distinzione fra parabole nodate e punctate.

La conclusione ottenuta per le cubiche armoniche, che esse possono essere unipartite o bipartite secondo il segno dell'invariante S , sembra contraddire al teorema fondamentale

⁽¹⁾ Opere t. II, pag. 100.

⁽²⁾ Cfr. per es. CAPELLI « Istituzioni di analisi algebrica ». Cap. XIV, § 5.

che due cubiche sono proiettive quando hanno il medesimo invariante assoluto, e analoga contraddizione apparisce in ordine alle cubiche dotate di punto doppio che — estendendosi il teorema fondamentale per il valore $J=1$ dell'invariante assoluto — debbono formare, dal punto di vista proiettivo, una sola famiglia. Ma la contraddizione si toglie osservando che due curve reali, trasformabili l'una nell'altra con una proiettività complessa, non sono sempre trasformabili con una proiettività reale. Accade qui un fatto analogo alla distinzione che si stabilisce nel campo reale fra le superficie del second'ordine rigate e non rigate, mentre nel campo complesso tutte le superficie di second'ordine, che non sieno coni, formano una sola famiglia di superficie proiettivamente identiche.

Precisamente si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due cubiche reali siano proiettive nel campo reale, è che esse abbiano uguale l'invariante assoluto $J = \frac{S^3}{T^2}$ e il segno dell'invariante T , supposto $T \neq 0$; per $T=0$ la condizione di proiettività reale è espressa dall'uguaglianza del segno di S valida anche, per cubiche irriducibili, nel caso limite $S=0$, che porta l'esistenza di una cuspidè.

Infatti si prendano le equazioni di due cubiche sotto la forma normale

$$y^2 = x^3 - px + q$$

$$y^2 = x^3 - p'x + q',$$

o, introducendo coordinate omogenee col sostituire ad x e y $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$,

$$zy^2 = x^3 - pxz^2 + qz^3$$

$$zy^2 = x^3 - p'xz^2 + q'z^3.$$

Posto

$$\frac{q'}{q} = \alpha^3 \quad (q \neq 0),$$

si sostituiscano x , y , z con

$$x, \alpha^{-\frac{1}{2}}y, \alpha z;$$

con ciò l'equazione della prima cubica, diviene

$$zy^2 = x^3 - \alpha^2 pxz^2 + \alpha^3 qz^3,$$

e quindi coincide con quella della seconda essendo

$$q' = \alpha^3 q$$

e

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{p'^3}{q'^2}$$

e però, estraendo la radice cubica reale,

$$p' = \alpha^2 p.$$

Ma la sostituzione sopra indicata, che pone due trasformazioni proiettive reali quando $\alpha > 0$, dà luogo a due trasformazioni immaginarie per $\alpha < 0$; e poichè vi sono soltanto, nel caso generale, due proiettività che trasformano una cubica nell'altra facendo corrispondere due flessi assegnati di esse, così si conclude che per $\alpha < 0$ le nostre cubiche non sono proiettive nel campo reale. Il caso particolare delle cubiche equianarmoniche ($S=0$) non dà luogo ad eccezione, quantunque le trasformazioni proiettive che fanno corrispondere due flessi assegnati siano ora sei anzichè due; imperocchè le nuove proiettività che nascono dal sostituire x con εx , o con $\varepsilon^2 x$, dove ε è una radice cubica dell'unità, sono immaginarie. Invece il caso $T=0$ dà origine ad un particolare esame, giacchè per $q = q' = 0$ il rapporto $\frac{q'}{q}$ è indeterminato.

Scriviamo le equazioni normali di due cubiche armoniche ($T=0$)

$$y^2 = x^3 - px,$$

$$y^2 = x^3 - p'x,$$

o, in forma omogenea,

$$zy^2 = x^3 - pxz^2$$

$$zy^2 = x^3 - p'xz^2,$$

e, posto $\frac{p'}{p} = \beta$, sostituiamo x, y, z con $x, \left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot y, \beta^{\frac{1}{2}} \cdot z$. Si ottengono così le trasformazioni proiettive della prima cubica

nella seconda, che lasciano fermi gli assi; due di queste trasformazioni sono reali per $\beta > 0$, mentre le quattro trasformazioni sono tutte immaginarie per $\beta < 0$. c. d. d.

Osservazione. In ultima analisi, come tipi proiettivi reali delle cubiche equianarmoniche ed armoniche si possono prendere le

$$y^2 = x^3 \pm 1,$$

e

$$y^2 = x(x^2 \pm 1).$$

27. Configurazione dei flessi. — Nel § 24 abbiamo veduto che una cubica ammette sempre due trasformazioni proiettive in sè che lasciano fermo un flesso F , la relativa polare armonica e le tre intersezioni di questa con la curva. Una di queste due trasformazioni è l'identità, l'altra è una omologia armonica: *un flesso e la relativa polare armonica sono centro ed asse di una omologia ω che trasforma la cubica in se stessa.* Ciò è d'accordo col fatto che la conica polare di F , e quindi (staccando la tangente in F) la polare armonica di F , viene costruita come luogo dei coniugati armonici di F rispetto alle coppie di punti della cubica allineati con F (§ 4). Nel caso particolare metrico che corrisponde all'equazione normale, l'omologia armonica si riduce alla simmetria che è stata notata nel § 25.

Ora l'omologia armonica di centro F , trasformando in se stessa la cubica, deve trasformare in sè il gruppo degli otto flessi all'infuori di F ; e poichè l'asse d'omologia incontra la curva nei tre punti di contatto delle tangenti condotte da F , e però non contiene alcun flesso, si deduce che gli otto flessi suddetti sono a coppie su quattro rette per F . Ciò fornisce una dimostrazione del

Teorema di MAC-LAURIN ⁽¹⁾: *La retta che unisce due flessi di una cubica contiene un terzo flesso.*

Le rette che contengono tre flessi sono state da noi denominate *rette di Mac-Laurin*. Basandoci sulla esistenza di 9 flessi, abbiamo dedotto, con PLÜCKER (1835), che vi sono

$$\binom{9}{2} \frac{1}{3} = 12 \text{ rette di Mac-Laurin, di cui 4 passano per un flesso;}$$

⁽¹⁾ Nel L. 2°, § 22 si è visto come al teorema stesso si pervenga partendo dalla proprietà fondamentale dei nove punti base d'un fascio di cubiche.

le quali formano *quattro trilateri (inflessionali)*, in guisa che ciascun trilatero contenga i nove flessi. Uno di questi trilateri si costruisce prendendo come lato una retta di Mac-Laurin a ; per i tre flessi su a passano, oltre a , $3 \cdot 3 = 9$ rette di Mac-Laurin, sicchè ne restano fuori due: b e c ; siccome le nove rette anzidette si ottengono già congiungendo i flessi di b con quelli a , si conclude che b e c non hanno comune un flesso, e però a , b , c formano un trilatero contenente i nove flessi.

Ora, volendo approfondire lo studio della configurazione dei flessi, aggiungeremo anzitutto l'osservazione seguente: *le tre rette di un trilatero a , b , c , contenente i nove flessi, non passano per un medesimo punto*, cioè formano un effettivo triangolo. Infatti i quattro trilateri insieme alla cubica data appartengono ad un medesimo fascio che ha come punti base i nove flessi; questo fascio ha un gruppo jacobiano di dodici punti; un trilatero le cui rette non passino per un punto ne fornisce tre, e così si trovano tutti i dodici punti, mentre se al fascio appartenesse una cubica dotata di punto triplo, cioè se vi fosse un trilatero costituito da tre rette concorrenti, il detto punto triplo conterebbe per quattro nel gruppo jacobiano (§ 20) ⁽¹⁾.

Come abbiamo osservato, i nove flessi di una cubica f sono punti base per un fascio di cubiche, che verrà determinato dalla f e dalla sua hessiana h . Si ha il:

Teorema (2). Tutte le cubiche del fascio $\lambda f + \mu h$ hanno come flessi i nove punti base.

Infatti preso un punto base F , la conica polare di esso rispetto a una qualunque cubica del fascio, riesce spezzata, staccandosi la polare armonica di F rispetto f ; invero quattro punti di questa retta si ottengono come coniugati armonici di F rispetto alle quattro coppie di flessi di f allineati con F .

Il fascio $\lambda f + \mu h = 0$, di cui le cubiche hanno i flessi in comune, si chiamerà, con CREMONA, *fascio sizigetico*.

La costruzione e la proprietà del fascio sizigetico sono basate unicamente sul fatto che la retta congiungente due

(1) Si può anche fornire una dimostrazione più elementare dell'enunciato, basata unicamente sulla proprietà fondamentale della configurazione dei flessi.

(2) Cfr. L. 2°, § 22, (vol. I, pag. 274) e il Teorema di HESSE nel seguente paragrafo.

fra i nove flessi della cubica contiene un terzo flesso. Pertanto si deduce che il teorema di MAC-LAURIN esprime la *proprietà caratteristica della configurazione dei nove flessi*, cioè:

Se nove punti del piano sono tali che la retta congiungente due di essi ne contiene un terzo, essi sono i flessi delle cubiche di un fascio (che viene determinato da due fra i quattro trilateri contenenti i nove punti).

Lo studio delle proprietà geometriche della configurazione dei flessi, dovuto a MAC-LAURIN, PONCELET e PLÜCKER, è stato da HESSE non soltanto approfondito, come vedremo più avanti, ma anche messo in relazione con le proprietà dell'*equazione algebrica dei nove flessi*, cioè dell'equazione del nono grado risultante di $f=0$ e della hessiana $h=0$. HESSE nel 1846 ⁽¹⁾ osserva che la proprietà fondamentale del gruppo dei nove flessi conduce ad esprimere una radice della predetta equazione come funzione razionale di altre due. Sotto questo punto di vista l'equazione dei nove flessi appare come estensione delle equazioni di grado primo, risolubili per radicali, considerate da ABEL (caso metaciclico). HESSE riprendendo e svolgendo tali ricerche riesce a dimostrare la *risolubilità per radicali dell'equazione dei nove flessi*.

Lo sviluppo effettivo, in rapporto ai covarianti della cubica, si trova in una memoria di ARONHOLD del 1849 ⁽²⁾ e poi in un'altra di CLEBSCH del 1860 ⁽³⁾. Queste memorie contengono anche importanti risultati che faremo conoscere nei seguenti paragrafi; qui vogliamo dimostrare la proprietà anzidetta che « l'equazione dei nove flessi, risultante di $f=0$ e $h=0$, è risolubile per radicali ».

A tale scopo si risolverà anzitutto un'equazione di quarto grado che vale a staccare uno fra i quattro trilateri del fascio $\lambda f + \mu h = 0$. Perciò si annullerà il discriminante di $\lambda f + \mu h = 0$; si otterrà così un'equazione di dodicesimo grado in $\frac{\lambda}{\mu}$ che sarà il cubo perfetto di un'equazione di quarto grado (costruibile razionalmente), in rapporto alla circostanza che il fascio contiene 4 cubiche trilateri dotata

(1) Journal für Math., Bd. 34, pag. 193.

(2) Journal für Math., Bd. 39, pag. 140, Cfr. Bd. 55, pag. 97.

(3) Journal für Math., Bd. 58, pag. 229.

ciascuna di tre punti doppi. Ora, per ottenere i flessi, occorrerà staccare i tre lati di un trilatero, ciò che conduce a risolvere l'equazione cubica da cui dipende la determinazione dei tre punti doppi della cubica trilatera; si dovrà poi intersecare la cubica con le tre rette di Mac-Laurin che sono i lati del nominato trilatero.

Osservazioni sulla realtà. Abbiamo veduto che, tra i nove flessi di una cubica reale, ve ne sono tre reali A, B, C appartenenti a una retta reale d . Ora gli altri sei flessi si distribuiscono in tre coppie di punti immaginari coniugati, e quindi fra le rette di Mac-Laurin, che ne congiungono due, si trovano tre rette reali. D'altra parte vi è almeno una retta reale di Mac-Laurin per ciascuno dei flessi A, B, C fuori della retta d , giacchè per ognuno dei punti suddetti passano quattro rette rappresentate complessivamente da un'equazione reale. Si conclude che per A, B, C passano rispettivamente tre rette reali di Mac-Laurin a, b, c , congiungenti le tre coppie di flessi immaginari coniugati. E così si ha con PLÜCKER (1835); *nella configurazione dei flessi di una cubica reale vi sono quattro rette di Mac-Laurin reali, di cui tre costituiscono i lati di un trilatero inflessionale, mentre la quarta contiene i tre flessi reali*, ciascuno dei quali appartiene a un lato del detto trilatero; sono pure reali quattro vertici di triangoli inflessionali, cioè i tre vertici del trilatero reale e il vertice opposto alla retta che contiene i tre flessi reali nel relativo trilatero inflessionale ⁽¹⁾.

Aggiungiamo che nove punti reali del piano non possono essere flessi neppure per una *cubica immaginaria*.

Invero una cubica immaginaria

$$f(xy) + i\varphi(xy) = 0$$

(dove f e φ sono reali), può possedere *fino a 9 punti reali*, comuni alle cubiche

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Ma, se vi sono nove punti reali comuni a $f = 0$ e $\varphi = 0$, che sieno flessi per

$$f + i\varphi = 0,$$

⁽¹⁾ Cfr. PLÜCKER « System der Analytischen Geometrie », Berlino, 1835, pag. 285.

tutte le cubiche pei nove punti, e quindi anche le cubiche reali $f=0$ e $\varphi=0$, hanno i medesimi flessi. E questa conclusione contraddice al teorema che la $f=0$ possiede soltanto tre flessi reali.

28. Fascio sizigetico. — Risulta dal precedente paragrafo che il fascio determinato dalla cubica f e dalla sua hessiana h è costituito di cubiche aventi a comune i nove flessi; perciò la hessiana di una qualunque cubica $\lambda f + \mu h = 0$, passando per i nove punti base di questo fascio, deve appartenere al fascio medesimo (L. 1°, § 14). Ora questa proprietà può essere dimostrata direttamente, e dalla nuova dimostrazione seguono anche notevoli conseguenze nello studio del fascio sizigetico.

Premettiamo il

Lemma. Le hessiane delle cubiche di un fascio formano una serie razionale d'indice 3, cioè contengono razionalmente al terzo grado il parametro del fascio.

Ciò è evidente, perchè il determinante hessiano di $f + h\varphi$ è del terz'ordine.

Ora si ha il

Teorema. Se ad un fascio di cubiche, non contenente una terna di rette passanti per un punto, appartengono le hessiane di quattro curve del fascio medesimo, *tutte* le cubiche del fascio hanno in questo le loro hessiane.

Si ha qui una conseguenza del precedente lemma. Anzitutto una serie d'indice 3 non può avere più di tre curve comuni con un fascio, senza che questo si stacchi dalla serie (nella geometria astratta ciò si traduce dicendo che « una retta non può avere più di tre punti comuni con una linea, piana o gobba, d'ordine tre »). In secondo luogo, se la serie delle hessiane delle cubiche di un fascio contiene il fascio, bisogna che la serie suddetta coincida col fascio contato *tre* volte, altrimenti vi sarebbe nel fascio qualche curva avente una hessiana nel fascio ed una fuori di esso, cioè avente la hessiana indeterminata; e una tale cubica si dovrebbe comporre di tre rette passanti per un punto (§ 8).

Il teorema precedente si può applicare al fascio determinato da una cubica (senza punti doppi) e dalla sua hessiana; infatti sappiamo che questo contiene quattro cubiche trilateri ognuna delle quali è hessiana di se stessa (§ 8), mentre non

vi è nel fascio alcuna cubica costituita da tre rette concorrenti (§ 27). Si conclude dunque il

Teorema di HESSE: *Il fascio determinato da una cubica e dalla sua hessiana contiene le hessiane di tutte le sue curve; e, poichè la serie — d'indice 3 — delle hessiane si riduce al fascio contato tre volte, ogni cubica è hessiana di tre altre, le quali appartengono al fascio sizigetico avente come punti base i suoi nove flessi.*

Per approfondire lo studio del fascio sizigetico conviene ridurne l'equazione ad una forma canonica, dalla quale appunto HESSE ⁽¹⁾ (1844) ha dedotto il suo teorema. A tale scopo osserviamo che le cubiche del fascio hanno un invariante assoluto J variabile, giacchè questo invariante, che è diverso da 1 per le cubiche prive di punti doppi, si riduce uguale ad 1, senza divenire indeterminato, per le cubiche trilateri. Segue da ciò che il fascio contiene in generale 12 cubiche aventi un dato valore per J , 4 cubiche equianarmoniche e 6 armoniche. Ora abbiamo veduto (con ARONHOLD, 1849) che l'equazione di una cubica equianarmonica si può ridurre alla forma

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0,$$

ed allora la sua hessiana è

$$6^3 x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Si deduce che: *il fascio sizigetico si può rappresentare sotto la forma canonica*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (2)$$

e, per un conveniente valore di λ , questa equazione è atta a rappresentare una qualsiasi cubica senza punti doppi.

Partendo dalla forma canonica

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

si verifica subito che la hessiana di una cubica del fascio

(1) Cfr. L. 2°, § 22, (vol. I, pag. 279).

(2) Il coefficiente numerico -3 viene introdotto per semplicità di calcolo, in relazione agli sviluppi che seguono.

appartiene al fascio. Infatti si ha

$$h = \begin{vmatrix} 6x_1 & -3\lambda x_3 & -3\lambda x_2 \\ -3\lambda x_3 & 6x_2 & -3\lambda x_1 \\ -3\lambda x_2 & -3\lambda x_1 & 6x_3 \end{vmatrix},$$

e quindi l'equazione $h = 0$ si riduce a

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\mu x_1 x_2 x_3 = 0,$$

dove

$$\mu = \frac{4 - \lambda^3}{3\lambda^2}.$$

Questa equazione rappresenta nel fascio (ossia, astrattamente, sopra una retta) una corrispondenza [3, 1]; le quattro coincidenze corrispondono alle cubiche trilateri del fascio, che sono hessiane di se stesse (§ 8). Una di queste cubiche trilateri, la $x_1 x_2 x_3 = 0$, si ottiene per $\lambda = \infty$, le altre tre sono date dalle radici dell'equazione

$$\lambda = \frac{4 - \lambda^3}{3\lambda^2},$$

ossia dalle tre radici cubiche dell'unità

$$\lambda = 1, \epsilon, \epsilon^2 \quad \left(\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right).$$

Le cubiche trilateri corrispondenti ai suddetti valori di λ , oltrechè di se stesse, sono anche hessiane di altre cubiche del fascio che vogliamo determinare. A tale scopo si farà successivamente $\mu = \infty, 1, \epsilon, \epsilon^2$, e si calcoleranno i corrispondenti valori di λ , diversi da μ .

Anzitutto per $\mu = \infty$, si trova l'equazione

$$\lambda^2 = 0,$$

che ammette la radice doppia

$$\lambda = 0.$$

Se poi si prende, per es., $\mu = 1$, si trova

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0,$$

e dividendo per $\lambda - 1$ viene

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

che ammette la radice doppia

$$\lambda = -2.$$

Analogamente per $\mu = \varepsilon$ e ε^2 si trova un'equazione di secondo grado con radice doppia:

$$\lambda = -2\varepsilon, \quad \lambda = -2\varepsilon^2.$$

Risulta di qui che ciascun trilatero del fascio sizigetico costituisce l'hessiana di una sola cubica irriducibile, da contarsi due volte; e, come appare in relazione al trilatero $\lambda = \infty$, *le quattro cubiche irriducibili aventi per hessiana un trilatero sono le cubiche equianarmoniche del fascio*. Queste curve rispondono agli elementi doppi della g^1_3 che resta definita entro il fascio mediante la corrispondenza [3, 1] fra le cubiche e le loro hessiane.

Riprendiamo questa corrispondenza [3, 1] e consideriamone il quadrato, che è una corrispondenza [9, 1]; questa avrà 10 coincidenze, che sono date dai 4 trilateri e dalle 6 cubiche armoniche del fascio, le quali abbiam visto essere *hessiane della propria hessiana*: risulta così che questa *proprietà è caratteristica per le cubiche armoniche*.

Per calcolare i valori del parametro λ corrispondenti alle cubiche armoniche del fascio, porremo

$$\mu = \frac{4 - \lambda^3}{3\lambda^2}, \quad \nu = \frac{4 - \mu^3}{3\mu^2};$$

esprimendo ν per λ e ponendo poi $\nu = \lambda$, si trova un'equazione di nono grado in λ che, divisa per $\lambda^3 - 1$, dà

$$\lambda^6 - 20\lambda^3 - 8 = 0.$$

Risulta da quanto precede che gli invarianti S e T delle cubiche del fascio sono, a meno di fattori numerici,

$$S \equiv \lambda(\lambda^3 - 1), \quad T \equiv \lambda^6 - 20\lambda^3 - 8,$$

giacchè $S = 0$ e $T = 0$ rappresentano le cubiche equianar-

moniche ed armoniche. Dividendo S^3 per T^2 si otterrà l'invariante assoluto J , il cui fattore numerico dovrà essere determinato in modo che per $\lambda = \infty$ (cubica $x_1 x_2 x_3 = 0$) sia $J = 1$. Così si conclude che l'espressione dell'invariante assoluto delle cubiche del fascio sizigetico è

$$J = \frac{\lambda^3(\lambda^3 - 1)^3}{(\lambda^6 - 20\lambda^3 - 8)^2}.$$

Gioverà riportare la *tabella delle coordinate dei flessi* appartenenti alle cubiche del fascio sizigetico

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0;$$

si ottengono semplicemente segnando la cubica equianarmonica

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

coi lati del triangolo hessiano

$$x_1 x_2 x_3 = 0,$$

e sono quindi:

$$\begin{array}{ccc} (0, 1, -1) & (0, 1, -\varepsilon) & (0, 1, -\varepsilon^2) \\ (-\varepsilon^2, 0, 1) & (-1, 0, 1) & (-\varepsilon, 0, 1) \\ (1, -\varepsilon, 0) & (1, -\varepsilon^2, 0) & (1, -1, 0) \end{array}$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right).$$

Si può anche notare che la riduzione delle coordinate dei flessi alla precedente tabella, si effettua con trasformazione reale per una cubica reale. Infatti nel fascio sizigetico c'è un trilatero (inflexionale) composto di tre rette reali che si assumerà come trilatero $x_1 x_2 x_3 = 0$; con ciò l'equazione della cubica si ridurrà alla forma

$$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 + dx_1 x_2 x_3 = 0,$$

e la scelta del punto unità, che rende a, b, c uguali ad 1, dipende dall'estrazione di radici cubiche, che è sempre effettuabile in modo reale.

Osservazione. Per completare gli sviluppi precedenti giova considerare che cosa divenga il fascio sizigetico di una cubica, quando questa abbia un punto doppio, O .

Se O è un nodo anche la hessiana ha in O un nodo, con le stesse tangenti, e quindi la cubica e la sua hessiana determinano un fascio di cubiche aventi in comune un nodo a tangenti fisse e tre flessi in linea retta.

Infatti si prova che la conica polare di un flesso F della cubica data, rispetto a tutte le curve del fascio, si spezza, dovendo contenere tre punti della polare armonica di F , cioè il coniugato armonico di F rispetto agli altri due flessi e il punto doppio O , in cui la nominata polare armonica deve riuscire tangente alla conica polare di F .

Ora il fascio sizigetico delle cubiche con nodo, essendo costituito da cubiche di ugual modulo ($J=1$), non contiene più curve equianarmoniche, e però la sua equazione non può più ridursi alla forma canonica

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

La circostanza che si presenta qui, nel passare da una cubica generale ad una con punto doppio, si rende evidente scrivendo l'equazione generale del fascio sizigetico nella forma

$$ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3 - dx_1 x_2 x_3 = 0.$$

Se si vuole che il fascio, contenente il trilatero $x_1 x_2 x_3 = 0$, acquisti un punto doppio in uno dei vertici di questo, per es. in (001), bisogna che divenga $c=0$, e allora non è più possibile rendere $a=b=c=1$ con una scelta conveniente del punto unità.

Il fascio sizigetico di cubiche con nodo si rappresenta invece coll'equazione canonica

$$f = x_1^3 + x_2^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Da questa equazione appare che la hessiana di una cubica f del fascio appartiene ancora al fascio, essendo data da

$$x_1^3 + x_2^3 - 3\mu x_1 x_2 x_3 = 0,$$

con

$$\mu = -\frac{\lambda^3}{3\lambda^2} = -\frac{\lambda}{3}.$$

Pertanto la cubica h è hessiana della sola f , prescindendo dalla cubica $x_1^3 + x_2^3 = 0$, degenerare in una terna di rette, che corrisponde a $\lambda = 0$ e la cui hessiana è indeterminata (§ 8).

Dunque: *una cubica dotata di nodo è hessiana di una sola cubica irriducibile* (avente lo stesso nodo, colle stesse tangenti).

Passiamo alle *cubiche dotate di cuspidale*. La hessiana di una tal curva si spezza nella tangente cuspidale contata due volte e nella retta che unisce il flesso alla cuspidale (§ 7); conforme a ragioni di continuità, il fascio determinato dalla cubica data e dalla sua hessiana risulta parimente costituito di curve cuspidate con un flesso comune nel punto base semplice, le quali ammettono la medesima hessiana degenerare.

Tutto ciò si convalida scrivendo l'equazione del fascio. Non è possibile adoperare qui una forma limite della precedente equazione canonica, poichè viene a degenerare il trilatero fondamentale per le coordinate $x_1 x_2 x_3 = 0$. Ma si può prendere l'equazione della cubica cuspidata sotto la forma

$$x_2^2 x_3 + x_1^3 = 0,$$

e allora il fascio da questa determinato con l'hessiana è

$$x_2^2 x_3 + x_1^3 + \lambda x_1 x_2^2 = 0;$$

si vede così che tutte le curve del fascio hanno la stessa hessiana

$$x_1 x_2^2 = 0.$$

Questa conclusione è d'accordo col fatto che una cubica dotata di cuspidale non è hessiana di alcuna altra cubica (irriducibile).

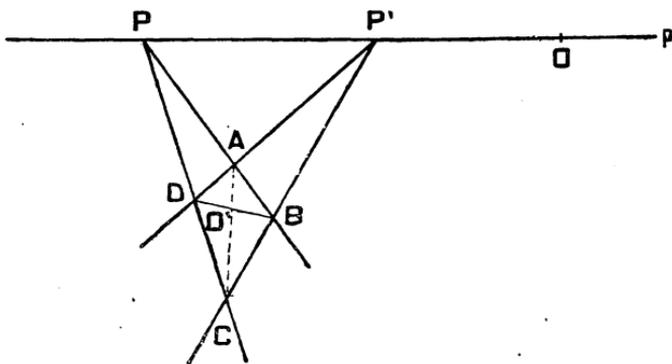
29. La cayleyana e le tre involuzioni di punti coniugati sopra una cubica. — Ricordiamo che per una curva generale d'ordine n (> 2) alla curva hessiana, luogo dei punti doppi delle prime polari, ossia luogo dei punti le cui coniche polari hanno un punto doppio, corrisponde la curva steineriana, luogo dei punti doppi delle coniche polari, ossia luogo dei punti le cui prime polari hanno un punto doppio: congiungendo i punti coniugati della hessiana e della steineriana si ottiene una curva inviluppo che ha ricevuto il nome di

cayleyana ⁽¹⁾. Per $n=3$ la steineriana coincide con la hessiana, alla quale appartengono dunque infinite coppie di *punti coniugati* P, P' : la conica polare di P ha un punto doppio in P' e reciprocamente. La *cayleyana* è, per definizione, l'involuppo delle rette congiungenti le coppie di punti coniugati della hessiana.

Ora si ha il

Teorema: *La cayleyana di una cubica coincide con la curva involuppo delle rette facenti parte di coniche polari spezzate.*

Sia p una retta della cayleyana che contenga la coppia di punti coniugati P, P' , e seghi ulteriormente la hessiana in un terzo punto O ; mostreremo che la conica polare avente



un punto doppio in O contiene come parte la retta p . Infatti le coniche polari di P e P' sono spezzate e formano due coppie di lati opposti di un quadrangolo completo $ABCD$ avente due punti diagonali in P' e P . Le coniche polari dei punti di p formano il fascio che ha come punti base $ABCD$; in particolare la conica spezzata polare di O è costituita dalla terza coppia di lati opposti del quadrangolo, cioè dalle rette AC e BD intersecantisi nel punto diagonale O' , coniugato di O . Ciò posto si vede che le rette polari di P, P', O , passano per O' ; invero le prime due sono le rette $P'O'$ e PO' , coniugate armoniche di p rispetto alle coppie di lati del quadrangolo per P', P ; la retta polare di O passa naturalmente per il punto doppio O' della conica polare. Segue che la conica polare di O' con-

⁽¹⁾ Cfr. il § 23, nel quale sono dati i riferimenti delle memorie di CAYLEY a cui sono dovuti i principali risultati che formano oggetto di questo paragrafo.

tiene P, P', O , cioè contiene la retta p ; questa retta fa dunque parte di una conica polare spezzata, che ha O come punto doppio.

La dimostrazione precedente si inverte. Sia p una retta facente parte della conica polare spezzata di un punto O' ; sia O il punto doppio di questa conica, P e Q le intersezioni ulteriori di p con la hessiana. Mostriamo che P e Q sono punti coniugati.

Si considerino le coniche polari spezzate di P e Q , i cui punti doppi verranno designati con P' e Q' (risulterà poi $P' = Q, Q' = P$). Le due coppie di rette $AB \cdot CD, AD \cdot BC$ costituenti le nominate coniche polari sono i lati opposti di un quadrangolo $ABCD$, che ha come punti diagonali P' e Q' ; le coniche polari dei punti di p passano per $ABCD$, e quindi — in particolare — la conica polare di O sarà costituita dalle rette AC e BD , e il punto ad esse comune sarà il punto O' coniugato ad O . Ora, poichè la conica polare di O' contiene p , si deduce che la retta polare di P passa per O' e quindi è la $P'O'$, e così la retta polare di Q è la $Q'O'$. Ma poichè le rette PP' ed $O'P'$ debbono separare armonicamente le AD, BC , si conclude che P deve trovarsi sulla retta $P'Q'$; lo stesso accade di Q . Pertanto P' e Q' si trovano sulla retta p e coincidono quindi — a parte l'ordine — con le intersezioni di p con la hessiana fuori di O , cioè con Q e P . c. d. d.

In conclusione abbiamo *due diverse definizioni per la cayleyana di una cubica*:

- 1) come involuppo delle congiungenti le coppie di punti coniugati della hessiana;
- 2) come involuppo delle rette facenti parte di coniche polari spezzate.

Preso sulla hessiana un punto generico O , si hanno per esso tre rette della cayleyana, cioè: la retta che congiunge O al punto coniugato O' e le due rette p e p' componenti la conica polare spezzata (di O') che ha il punto doppio in O .

Osservando che la hessiana non fa parte della curva involupata dalle tangenti della cayleyana, si deduce che: *La cayleyana è una curva di terza classe.*

A questa conclusione si perviene anche in modo diretto, partendo da ciascuna delle due definizioni sopra riferite.

Anzitutto partendo dalla prima definizione, le tangenti

alla cayleyana per un punto A si presentano come coincidenze doppie di una corrispondenza $[3, 3]$, nel fascio A . Infatti si mandi per A una retta p la quale segghi la hessiana nei punti $P_1 P_2 P_3$, e si costruiscano i loro coniugati $P_1' P_2' P_3'$; proiettando questi punti da A si ottengono tre rette che facciamo corrispondere alla retta p . La corrispondenza $[3, 3]$, così definita nel fascio A , possiede 6 coincidenze, ciò che darebbe la classe della cayleyana uguale a 6 (conforme alla formula generale indicata nel § 23); ma le tangenti alla cayleyana contano due volte come raggi doppi della nominata corrispondenza, perchè ciascuna di esse coincide con due rette omologhe.

In secondo luogo, partendo dalla seconda definizione, occorre trovare le coniche polari che passano per un punto A . Ma le coniche polari formano una rete e quelle che passano per A formano un fascio; al fascio appartengono tre coniche spezzate, di cui fan parte tre rette della cayleyana passanti per A . Di nuovo appare così che la cayleyana è di classe 3.

E si noti che la conoscenza della classe della cayleyana, determinata attraverso le due diverse definizioni di essa, permette di semplificare la dimostrazione del teorema di identificazione che sopra abbiamo svolto; infatti basterà dimostrare, per esempio, che le rette congiungenti due punti coniugati dell'hessiana fan parte di coniche polari spezzate, risparmiando la dimostrazione della proprietà inversa.

Sopra la hessiana h di una cubica data, f , si considerino le coppie di punti coniugati P, P' . Abbiamo visto che la retta $p = PP'$ fa parte della conica polare di un punto O' , che è il punto coniugato alla terza intersezione, O , di p con h . Ora P è punto doppio di una conica polare composta di due rette AB, CD , e perciò le infinite coniche polari passanti per P formano un fascio che ha in P una tangente fissa: questa tangente è la retta p . Ma se si fa muovere P sulla hessiana h , si ottiene una conica polare con punto doppio infinitamente vicino a P , la quale appartiene al detto fascio; si deduce (§ 7, pag. 50) che la tangente in P alla hessiana h è coniugata armonica di p rispetto alle due rette AB e CD , e quindi la nominata tangente è la retta PO' che congiunge P al punto O' , coniugato di O .

Dunque: *le tangenti in due punti coniugati P, P' della hessiana si segano sulla hessiana stessa, e precisamente nel punto coniugato alla terza intersezione della curva colla retta PP' .*

Il risultato precedente può anche essere espresso dicendo che la tangente in P alla hessiana è la retta polare di P' , e perciò:

La hessiana è l'inviluppo delle rette polari dei suoi punti.

Ciò posto si considerino sopra una cubica generale f i quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 che hanno un medesimo tangenziale O . Le rette polari di P_1 , rispetto alle cubiche sizigetiche ad f , formeranno un fascio a cui apparteneranno: la retta P_1O , polare rispetto ad f , e le rette polari di P_1 rispetto alle tre cubiche $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (contenute nel medesimo fascio) di cui f è hessiana. Queste ultime tre rette toccheranno f rispettivamente nei tre punti coniugati a P_1 , e andranno a passare tutte per il punto O ; pertanto i coniugati di P_1 (in relazione alle cubiche $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, di cui f è hessiana) saranno i tre punti distinti P_2, P_3, P_4 : infatti le quattro rette OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 , polari di P_1 rispetto alle cubiche $f, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, formano un birapporto uguale a quello delle quattro curve (ossia dei relativi parametri) del fascio sizigetico.

Si conclude che:

I punti d'una cubica che hanno il medesimo tangenziale si corrispondono in tre corrispondenze involutorie, una delle quali rimane determinata dalla separazione in coppie di una quaterna di punti siffatti. I punti corrispondenti in una delle tre involuzioni sono coniugati rispetto ad una delle tre cubiche che hanno come hessiana la data.

Osserviamo: dal Libro secondo (§ 22) risulta che, separando in coppie la quaterna dei punti di una cubica che hanno lo stesso tangenziale O , si ottengono tre trasformazioni involutorie della curva in se stessa, ciascuna delle quali si può costruire mediante due proiezioni fatte da punti della cubica stessa. Ora si vede che queste tre trasformazioni involutorie non dipendono dalla scelta arbitraria del punto O , essendo definite come involuzioni di punti coniugati rispetto alle tre cubiche di cui la data è hessiana.

D'altra parte la costruzione delle tre involuzioni è strettamente connessa ai tre sistemi di coniche tritangenti che

abbiamo trovato nello stesso paragrafo del libro secondo. Infatti se P e P' sono due punti della cubica aventi lo stesso tangenziale O , e se Q è un altro punto avente come tangenziale M , il coniugato Q' di Q si ottiene come sesta intersezione della conica passante per P, P', O, Q, M , giacchè la conica spezzata $QM \cdot Q'M$ deve riuscire tritangente alla cubica come la $PO \cdot P'O$.

Nota. Una conseguenza importante delle considerazioni che precedono è il

Teorema di HERMITE ⁽¹⁾ (1860): *Una rete affatto generale di coniche si può riguardare come rete delle coniche polari rispetto ad una cubica (ben determinata).*

Infatti si consideri la cubica J , jacobiana della rete; su questa riesce determinata una involuzione di punti coniugati: i punti coniugati P, P' vengono definiti dalla condizione che le rette polari di P , rispetto a tutte le coniche della rete, passano per P' , e reciprocamente.

Ora esiste una cubica C , di cui J è hessiana, ed in rapporto a cui si corrispondono come coniugati due punti P e P' (aventi lo stesso tangenziale). La rete delle coniche polari rispetto a C contiene le coniche spezzate della nostra rete, e perciò coincide con questa.

Il teorema di HERMITE dà forma precisa al risultato che si può prevedere in base a un computo di costanti; infatti le cubiche piane sono ∞^3 come le reti di coniche (piani di uno spazio astratto S_3), sicchè appare *a priori* che una rete generale di coniche sia la rete delle polari rispetto a una cubica (o a un numero finito di cubiche); perciò basta escludere che una rete di polari possa corrispondere a infinite cubiche diverse, e si esclude questa ipotesi rilevando che essa porterebbe l'esistenza di una cubica con punto doppio le cui polari dovrebbero avere un punto base.

Qui giova ricordare che, come è osservato nel § 22, lo stesso computo di costanti prova che, per $n > 2$, una rete di curve d'ordine n non è in generale una rete di polari.

⁽¹⁾ Journal für Math., Bd. 57, pag. 371. In base a questo teorema la cayleyana si potrà definire come involuppo delle coniche spezzate di una rete comunque definita; sotto tale aspetto la curva di CAYLEY si è a noi presentata nel L. 2°, § 26; Vol. I, pag. 306.

30. La configurazione delle polari armoniche e la schiera sizigetica delle cayleyane. — Le polari armoniche dei nove flessi di una cubica C formano una configurazione duale di quella dei flessi (HESSE, 1847). Infatti la proprietà caratteristica espressa dal teorema di MAC-LAURIN « la congiungente due flessi contiene un terzo flesso » si deduce (§ 27) dal fatto che il gruppo dei nove flessi è trasformato in sè dall'omologia armonica che ha per centro un qualsiasi flesso F e per asse la relativa polare armonica p ; ora questa omologia trasforma in se stesso anche il gruppo delle nove polari armoniche, e perciò le 8 polari armoniche fuori di p si dividono in 4 coppie di rette secantisi su p : *per il punto comune a due polari armoniche passa una terza polare armonica.*

Ora, come i nove flessi si distribuiscono a terne sopra 12 rette formanti 4 trilateri inflessionali, così le nove polari armoniche passeranno a terne per 12 punti, 4 dei quali si troveranno sopra ciascuna delle polari armoniche; e questi 12 punti daranno origine a 4 triangoli. Ma non si ottengono così nuovi elementi della configurazione, giacchè i detti triangoli sono formati dai vertici dei trilateri inflessionali: *le polari armoniche dei tre flessi appartenenti a una retta di Mac-Laurin passano per il vertice opposto del trilatero inflessionale determinato da codesta retta.*

L'enunciato si dimostra basandosi sul fatto che le polari armoniche dei nove flessi sono fisse per tutte le cubiche del fascio, giacchè vengono costruite a partire da questi punti (§ 27). Infatti se abc è un trilatero inflessionale ed F un flesso sopra a , la polare armonica di F , rispetto alla cubica trilatera abc , è la polare di F rispetto alla conica degenera bc , e quindi passa per il punto (bc) .

Ciò posto, le nove polari armoniche formeranno il gruppo base di una schiera sizigetica di curve di terza classe, a cui spetteranno tutte le proprietà duali di quelle spettanti al fascio sizigetico di curve del terz' ordine, che ha come punti base i nove flessi: tutte le curve di terza classe anzidette avranno dunque le nove polari armoniche come tangenti cuspidali. Queste curve hanno un significato importante, in quanto si presentano come cayleyane delle cubiche del fascio sizigetico.

Infatti, essendo data una cubica fondamentale, la conica polare di un suo flesso si spezza nella tangente di flesso e

nella polare armonica; perciò queste due rette fanno parte della cayleyana.

Si deduce il

Teorema. Le cayleyane delle curve del terz' ordine di un fascio sizigetico, aventi in comune i nove flessi, formano la schiera sizigetica delle curve di terza classe che hanno come tangenti cuspidali le nove polari armoniche dei flessi suddetti⁽¹⁾.

Questo importante risultato si può convalidare scrivendo l'equazione della cayleyana della cubica

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (2).$$

Pongasi che la conica polare del punto (y) si spezzi in due rette $u_x = 0, v_x = 0$; si avrà l'identità

$$\begin{aligned} (x_1^2 - \lambda x_2 x_3) y_1 + (x_2^2 - \lambda x_3 x_1) y_2 + (x_3^2 - \lambda x_1 x_2) y_3 = \\ = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3); \end{aligned}$$

e, uguagliando i coefficienti delle x :

$$y_1 = u_1 v_1, \quad -\lambda y_1 = u_2 v_3 + u_3 v_2$$

$$y_2 = u_2 v_2, \quad -\lambda y_2 = u_3 v_1 + u_1 v_3$$

$$y_3 = u_3 v_3, \quad -\lambda y_3 = u_1 v_2 + u_2 v_1,$$

da cui:

$$\lambda u_1 v_1 + u_2 v_3 + u_3 v_2 = 0$$

$$\lambda u_2 v_2 + u_3 v_1 + u_1 v_3 = 0$$

$$\lambda u_3 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0,$$

onde, eliminando le v_1, v_2, v_3 , che entrano qui linearmente, si ottiene

$$\begin{vmatrix} \lambda u_1 & u_3 & u_2 \\ u_3 & \lambda u_2 & u_1 \\ u_2 & u_1 & \lambda u_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando, si ha l'equazione della cayleyana:

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 - \frac{\lambda^3 + 2}{\lambda} u_1 u_2 u_3 = 0.$$

⁽¹⁾ Cfr. CREMONA « Introduzione » (Opere, t. I, pag. 450).

⁽²⁾ Cfr. le Lezioni di CLEBSCH-LINDEMANN, trad. fr., t. II, pag. 246.

Questa equazione mette in evidenza che: *una curva di terza classe C è la cayleyana di tre curve del terz'ordine*. Per determinare una di queste cubiche, si costruiranno anzitutto i suoi nove flessi, i quali vengono determinati, colla costruzione duale delle polari armoniche, dalla configurazione delle nove tangenti cuspidali della data curva-inviluppo C (che ne sono le polari armoniche); dopo ciò si determinerà una cubica scegliendo come tangente ad essa in uno dei flessi una delle tre rette di C passanti per il punto.

31. Trasformazioni proiettive delle cubiche e della configurazione dei flessi. — Nel § 24 abbiamo veduto che una cubica generale possiede 18 trasformazioni proiettive in se stessa le quali formeranno un gruppo Γ_{18} : vi è un sottogruppo Γ_2 che lascia fermo un flesso assegnato e contiene — oltre l'identità — l'omologia involutoria che ha per centro questo flesso e per asse la sua polare armonica. Lo studio delle anzidette trasformazioni proiettive deve essere riattaccato ad HESSE (1844).

L'equazione canonica della cubica

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

pone in evidenza le 18 trasformazioni proiettive di Γ_{18} ⁽¹⁾; queste si ottengono moltiplicando due fra le x_1, x_2, x_3 per ε e ε^2 (essendo ε una radice cubica immaginaria dell'unità) e anche scambiando fra loro le tre variabili nei sei modi possibili. Così le x_1, x_2, x_3 vanno ordinatamente nelle

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3; \quad x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_3; \quad x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3 \\ x_2, x_3, x_1; \quad x_2, \varepsilon x_3, \varepsilon^2 x_1; \quad x_2, \varepsilon^2 x_3, \varepsilon x_1 \\ x_3, x_1, x_2; \quad x_3, \varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2; \quad x_3, \varepsilon^2 x_1, \varepsilon x_2 \\ \\ x_1, x_3, x_2; \quad x_1, \varepsilon x_3, \varepsilon^2 x_2; \quad x_1, \varepsilon^2 x_3, \varepsilon x_2 \\ x_3, x_2, x_1; \quad x_3, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_1; \quad x_3, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_1 \\ x_2, x_1, x_3; \quad x_2, \varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_3; \quad x_2, \varepsilon^2 x_1, \varepsilon x_3. \end{array}$$

In questa tabella figurano l'identità e 8 omografie cicliche

(1) Cfr. KLEIN, Math. Annalen, Bd. 4.

del terz'ordine corrispondenti alle prime tre linee, nonchè 9 involuzioni corrispondenti alle ultime tre linee. Ora si ha il

Teorema: Il gruppo Γ_{18} di una cubica generale contiene, oltre l'identità e le 9 omologie armoniche aventi il centro in un flesso, anche 8 omografie cicliche del terz'ordine (non omologiche) che lasciano fermi i quattro triangoli inflessionali. Gli elementi uniti per ciascuna di tali omografie costituiscono uno dei 4 triangoli, che corrisponde così a 2 omografie, quadrato l'una dell'altra; i vertici (e parimenti i lati) degli altri tre triangoli formano tre cicli dell'omografia medesima.

Infatti uno qualunque dei 4 triangoli preso come fondamentale per le coordinate ($x_1, x_2, x_3 = 0$) permette di ridurre la cubica all'anzidetta forma canonica:

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Allora si vede che: tutte le omografie cicliche del 3° ordine indicate nella precedente tabella lasciano fermo il triangolo $x_1 x_2 x_3 = 0$, ma soltanto due di esse, cioè quelle (non identiche) segnate nella prima linea, che sono il quadrato l'una dell'altra, hanno come elementi uniti i lati e i vertici del triangolo stesso. Le due omografie del 3° ordine che hanno come triangolo di elementi uniti un altro fra i quattro triangoli inflessionali si troveranno dunque fra quelle che permutano ciclicamente $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Si può aggiungere che l'intero gruppo della cubica, Γ_{18} , è generato per moltiplicazione dalle 9 omologie armoniche ω_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) relative ai 9 flessi.

Ciò risulta dalla precedente tabella o dalla semplice considerazione che segue: se 1, 2, 3 designano tre flessi in linea retta, l'omografia prodotta $\omega_3 \omega_2$ produce su 1, 2, 3 la sostituzione ciclica del 3° ordine

$$(13)(12) = (1\ 2\ 3),$$

e quindi è un'omografia del 3° ordine che lascia fermi i tre lati del triangolo inflessionale determinato dalla retta 123.

Esaminiamo ora particolarmente il caso delle cubiche armoniche ed equianarmoniche.

Una cubica armonica possiede un gruppo Γ_{36} di 36 trasformazioni proiettive in sè, che contiene il Γ_{18} della cubica generale. Il sottogruppo delle omografie di Γ_{36} che lasciano

fermo un flesso è un Γ_4 ciclico del quart'ordine. Ciò risulta dall'equazione normale

$$y^2 = x^3 - px$$

che viene trasformata in sè mutando x in $-x$ e y in iy (il quadrato di questa omografia è l'omologia armonica che lascia fermo il flesso posto nel punto all'infinito dell'asse y).

Ora per ogni flesso esistono, nel corrispondente Γ_4 , due trasformazioni proiettive del quart'ordine, cioè quella di cui sopra è scritta l'equazione e il suo cubo ($y' = -iy$, $x' = -x$), le quali non lasciano fermo alcun altro flesso; pertanto *la cubica armonica possiede, fuori del Γ_{18} , $2 \cdot 9 = 18$ trasformazioni proiettive del quart'ordine, che completano il Γ_{36} .*

La cubica equianarmonica possiede un gruppo Γ_{54} di 54 trasformazioni proiettive in se stessa. Quelle che lasciano fermo un flesso formano un sottogruppo ciclico Γ_6 , che si genera moltiplicando l'omologia armonica col centro in quel flesso per un'omologia ciclica del terz'ordine avente come asse il lato del trilatero hessiano che passa per il flesso, e come centro l'intersezione della tangente di flesso con la relativa polare armonica. Ciò risulta dall'equazione normale

$$y^2 = x^3 + q,$$

che viene trasformata in sè (oltrechè dall'omologia involutoria $y' = -y$), dalla omologia ciclica del terz'ordine $x' = \varepsilon x$ avente come asse $x = 0$, e come centro il punto all'infinito dell'asse x ; si verifica con un semplice calcolo diretto che la retta $x = 0$ appartiene alla hessiana della nostra cubica, data da

$$x(y^2 - 6q) = 0.$$

Questa equazione mostra anche che il centro dell'omologia ciclica del terz'ordine predetta è il vertice del trilatero hessiano opposto ad $x = 0$. Le quali conclusioni vengono anche fornite da facili ragionamenti geometrici.

Si è visto che la *cubica equianarmonica* possiede fuori del Γ_{18} , pertinente alla cubica generale, 6 omologie cicliche del terz'ordine che hanno come centro ad asse un vertice e il lato opposto del trilatero hessiano (ad ogni asse e centro corrispondono due omologie quadrato l'una dell'altra). Ora si può riconoscere che le nominate omologie cicliche generano, per

moltiplicazione col Γ_{18} l'intero gruppo Γ_{54} . Ciò risulta nel modo più semplice scrivendo l'equazione della cubica equianarmonica sotto la forma canonica

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Infatti questa equazione è trasformata in se stessa dalle 54 sostituzioni che si ottengono moltiplicando una, o più, delle x_i per ε e permutandole fra loro; le nuove sostituzioni del Γ_{54} si deducono dalla tabella relativa alla cubica generale moltiplicando le omografie del Γ_{18} , che in essa figurano, per le omologie cicliche del terz'ordine $x_i' = \varepsilon x_i$ e $x_i' = \varepsilon^2 x_i$.

Giova anche rilevare che: *l'esistenza di un'omologia ciclica del terz'ordine trasformante in sè la cubica caratterizza la cubica equianarmonica.*

Questa proprietà importa che le tre tangenti di flesso, i cui punti di contatto appartengono a un lato dell'hessiana, passino per un punto che è il vertice opposto del trilatero hessiano. Viceversa se *tre tangenti di flesso*, i cui punti di contatto siano in linea retta, passano per un punto, la cubica è equianarmonica e la *retta contenente i tre flessi* è un lato del triangolo hessiano. Infatti, mandiamo nel punto all'infinito dell'asse y il punto di concorso delle tre tangenti e facciamo coincidere con l'asse x la retta che ne contiene i punti di contatto, l'equazione della cubica assumerà la forma

$$y^3 = f_3(x),$$

esprimente che la curva appartiene al fascio determinato dalle tre tangenti di flesso nominate e dalla retta $x = 0$; dall'anzidetta equazione appare che la cubica è trasformata in sè dall'omologia ciclica del terz'ordine $y' = \varepsilon y$. Si verifica anche che la retta $y = 0$ fa parte della hessiana.

Ogni trasformazione proiettiva che lasci invariata una cubica, trasforma anche in sè il gruppo dei suoi nove flessi G_9 . Ma invece una omografia che trasformi in sè il G_9 non lascia sempre invariate le singole cubiche formanti il fascio sizigetrico che ha il G_9 come gruppo di punti base, poichè scambia fra loro le cubiche di questo fascio. Più precisamente le omografie del Γ_{18} , che lascian ferma una cubica generale, lascian ferme tutte le cubiche del fascio; ma, oltre a queste, sono

trasformazioni proiettive del fascio, quelle del Γ_{36} o del Γ_{54} che lasciano ferme una cubica armonica o equianarmonica.

Che così si ottengano tutte le trasformazioni proiettive del fascio, e quindi del G_9 , risulta da ciò che una trasformazione proiettiva del fascio ne permuta circolarmente gli elementi e perciò lascia ferme due cubiche particolari; se una di queste è un trilatero, l'altra è la cubica equianarmonica di cui esso è hessiano.

Ora l'intero gruppo delle trasformazioni proiettive del G_9 si può determinare mediante l'isomorfismo meriedrico che lega codesto gruppo al gruppo di proiettività che viene determinato sopra la retta r , su cui viene disteso il parametro del fascio: questo isomorfismo fa corrispondere all'identità il gruppo Γ_{18} , che lascia ferme tutte le cubiche del fascio sizigetico. Si consideri il Γ_{54} costituito dalle omografie che lasciano ferma una delle quattro cubiche equianarmoniche del fascio, corrispondenti ai punti A, B, C, D di r : si avranno su r le proiettività di un gruppo Γ_3 che lasceranno fermo un sol punto della quaterna, per esempio A , e permuteranno (ciclicamente) B, C, D . Infatti ciascuna omografia del Γ_{54} , fuori del Γ_{18} , lascia ferma oltre la nominata cubica equianarmonica anche il suo trilatero hessiano; non ci sono nel fascio altre cubiche unite, altrimenti lo sarebbero tutte. Moltiplicando i gruppi analoghi a Γ_3 che corrispondono a B, C, D , si ottiene un gruppo Γ_{12} di proiettività che lascian ferma la quaterna $(ABCD)$; la quaterna $(ABCD)$ risulta equianarmonica, d'accordo coi valori, $\lambda = \infty, 1, \varepsilon, \varepsilon^2$, che ne rappresentano i punti (§ 28), e il Γ_{12} comprende tutte le trasformazioni proiettive della quaterna (L. 1°, § 4).

Mercè l'isomorfismo [1, 18] fra il Γ_{12} e il gruppo delle trasformazioni del G_9 , si deduce che quest'ultimo è un Γ_{216} costituito di $12 \cdot 18 = 216$ omografie. Il Γ_{216} comprende non soltanto le $4(54 - 18) = 144$ trasformazioni proiettive che lasciano ferme le singole cubiche equianarmoniche del fascio sizigetico (dalle quali risulta per moltiplicazione), ma anche altre $3 \cdot 18 = 54$ trasformazioni proiettive, che operano sulla quaterna $(ABCD)$ producendo gli scambi $(AB)(CD)$, $(AC)(BD)$, $(AD)(BC)$. Queste trasformazioni lasciano invariate due cubiche che — non essendo le equianarmoniche del fascio nè le loro hessiane trilatero — saranno armoniche, hessiana l'una dell'altra. Invece le anzidette 144 trasformazioni che lasciano

ferma una cubica equianarmonica, permutano le sei cubiche armoniche, separandole in due cieli del terz'ordine.

Queste conclusioni sono d'accordo con ciò che abbiamo veduto, nel quarto paragrafo del libro primo, sul gruppo Γ_{12} di una quaterna equianarmonica $(ABCD)$: infatti il Γ_{12} lascia ferma un'altra quaterna che è hessiana della prima e a cui corrisponde, nel fascio sizigetico, la quaterna delle cubiche trilatere, e possiede ancora una sestina invariante rappresentata dal covariante T della quaterna; a questa sestina che contiene le tre coppie di punti doppi delle involuzioni permutabili $(AB)(CD)$, $(AC)(BD)$, $(AD)(BC)$, corrisponde nel fascio la sestina delle cubiche armoniche.

Possiamo concludere enunciando il

Teorema. *Esistono 216 omografie trasformanti in sè la configurazione dei flessi di una cubica, le quali formano un gruppo Γ_{216} in isomorfismo meriedrico [1, 18] col gruppo tetraedrico sopra la retta. Il Γ_{216} comprende:*

18 omografie che lasciano ferme tutte le cubiche del fascio sizigetico, formanti un sottogruppo invariante Γ_{18} ;

altre 144 omografie che lasciano ferma una cubica equianarmonica del detto fascio (col relativo trilatero hessiano), permutando ciclicamente le rimanenti tre;

ed infine altre 54 omografie cicliche del 4° ordine che lasciano invariate due cubiche armoniche del fascio, hessiana l'una dell'altra.

Osserveremo che la considerazione del gruppo d'omografie Γ_{216} , permette di ritrovare facilmente molte proprietà del fascio sizigetico, già riconosciute in modo diretto: per esempio che i quattro trilateri inflessionali sono ciascuno la hessiana di una sola cubica (equianarmonica), e che le sei cubiche armoniche del fascio sono — a coppie — hessiana l'una dell'altra.

Anche le *questioni di realtà* concernenti la configurazione dei flessi d'una cubica reale, vengono qui lumeggiate e completate.

32. Nota sulla superficie di Riemann relativa a una cubica. — Alla cubica piana senza punto doppio (cioè di genere $p=1$), considerata come luogo di punti reali e immaginari, corrisponde una superficie di Riemann di cui si può prendere come tipo il toro o anello. La costruzione di

questa riemanniana risulta infatti dall'equazione normale della cubica

$$y^2 = x^3 - px + q;$$

la funzione a due rami $y(x)$ possiede 4 punti di diramazione, cioè le radici dell'equazione $x^3 - px + q = 0$, a cui si aggiunge il punto all'infinito (corrispondente alla tangente di flesso). Si ottiene così una superficie di Riemann a due fogli che, mediante la semplice trasformazione di CLIFFORD, si riduce a una superficie anulare (cfr. L. 2°, § 38; vol. I, pag. 382).

Ora KLEIN ⁽¹⁾ ha osservato che la costruzione della superficie di Riemann relativa alla cubica (o in generale ad una curva qualsiasi) si può riattaccare alla nozione della forma della curva reale, che viene assunta come linea di passaggio fra più fogli, mediante il procedimento che segue.

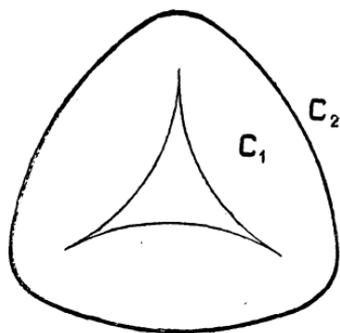
Per chiarezza si cerchi dapprima di costruire la superficie di Riemann, R , relativa ad una conica reale, per esempio ad una ellisse C , che verrà considerata come involuppo delle sue tangenti. I punti della superficie R corrispondono biunivocamente alle tangenti reali e immaginarie di C . Facciamo che a una tangente reale di C corrisponda il suo punto di contatto, mentre a una tangente immaginaria venga associato il punto reale in cui essa interseca la tangente coniugata, questo punto corrispondendo così a *due* tangenti diverse. Per tal modo la superficie R viene rappresentata sulla regione di piano interna a C , contata due volte: ogni punto interno a C , come intersezione di due tangenti immaginarie coniugate, è immagine di *due* punti di R , mentre i punti della linea di contorno, come intersezioni di due tangenti infinitamente vicine, risultano immagini di due punti coincidenti di R . La superficie R , i cui punti corrispondono biunivocamente agli elementi (punti o tangenti) reali o no di C , viene così rappresentata doppiamente sulla regione di piano interna alla ellisse C , dove la C figura come curva di passaggio fra due porzioni di R , allo stesso modo che la superficie di un ellissoide, il quale venga proiettato sul piano da un punto esterno in guisa che C risulti immagine del contorno appa-

(1) Math. Annalen, Bd. 7, pag. 558.

rente. In conclusione questo ellissoide fornisce la superficie di Riemann R .

Il procedimento indicato si estende alle cubiche. Alla curva data di terz'ordine si sostituirà una *curva di terza classe*, C , che se ne deduce con una correlazione del piano. La superficie di Riemann, R , relativa alla data cubica, si trova in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle tangenti a C . Ora, ad una tangente reale di C si farà corrispondere il suo punto di contatto, ed invece ad una tangente immaginaria il punto reale in cui essa interseca la tangente coniugata; per tal modo la R viene rappresentata sopra una superficie piana doppia avente per contorno la linea involuppo C , e cioè sopra la regione di piano per cui passano due tangenti immaginarie (ed una tangente reale) alla curva di terza classe C .

Per costruire R occorre riconoscere la forma delle linee di terza classe, C . Queste possono essere costituite di uno o di due rami, corrispondendo per dualità alle cubiche unipartite e bipartite. Al ramo impari della cubica, che contiene tre flessi in linea retta, corrisponde per dualità una curva tricuspide, C_1 , priva di flessi, le cui tangenti cuspidali passano per un punto; al ramo pari (se esiste) corrisponde per dualità una curva, C_2 , priva di flessi e di cuspidi. Riconosciamo



che: le linee C_1 e C_2 , considerate come luogo di punti sono curve pari. Anzitutto la curva complessiva $C = C_1 + C_2$ è di ordine $3 \cdot 2 = 6$, ossia è una curva pari; perciò se uno dei suoi rami fosse impari anche l'altro ramo dovrebbe essere impari, e quindi le C_1 e C_2 si segherebbero in un punto ⁽¹⁾ che risulterebbe doppio per C ; invece la C non possiede punti doppi, fuori delle tre cuspidi di C_1 .

La curva tricuspide C_1 , essendo un ramo pari, equivale topologicamente a un cerchio, cioè separa il piano in due

(1) Con una deformazione continua due rami impari possono sempre ridursi a due rette, e ciò ha per effetto di togliere eventualmente un numero pari di intersezioni; si vede così che due rami impari hanno almeno un punto comune; a tale proposito vedi § 34. (Cfr. STAUDT « Geometria di Posizione », § 1).

regioni; dimostriamo che quella contenente il punto, O , comune alle tre tangenti cuspidali, è la regione interna e per ciascun punto di essa vi sono quindi, come per O , tre tangenti a C_1 , mentre — passando da un punto interno a un punto della regione esterna — due fra le tangenti nominate divengono immaginarie, è così per un punto esterno vi è una sola tangente alla C_1 .

Per dimostrare che O è interno al ramo C_1 occorre stabilire che *ogni* retta per O sega C_1 in due punti; ora questo accade per le tre tangenti cuspidali che concorrono in O , quindi anche per tutte le rette comprese nei loro angoli, giacchè una retta secante del fascio O potrebbe divenire non secante solamente passando per la posizione di una delle tre rette dell'involuppo, che sono le nominate tangenti cuspidali. (Taluno potrà chiarire questo ragionamento trasformandolo per dualità, ciò che porta a considerare la figura del ramo impari di una cubica, con la quale si ha maggior familiarità).

Invece la curva C_2 , costituita da un ovale senza flessi, divide il piano in due regioni, in guisa che per i punti della regione esterna passano *due* tangenti ad essa, mentre per i punti interni non ne passa alcuna. Si deduce che C_2 (se esiste) comprende nel suo interno C_1 , giacchè altrimenti si avrebbe un punto, esterno a C_2 e interno a C_1 , per cui passerebbero cinque tangenti di $C = C_1 + C_2$.

Ciò posto distinguiamo due casi, secondo l'esistenza o meno del ramo ovale C_2 .

Primo caso: curva C costituita di un ramo tricuspide C_1 e di un ovale C_2 a cui C_1 è interno. La superficie di Riemann, relativa a C , viene rappresentata doppiamente sopra la regione di piano compresa fra le due curve C_1 e C_2 , in guisa che C_1 e C_2 figurano come curve di passaggio. Ora la suddetta regione piana, considerata dal punto di vista topologico, equivale a una corona circolare, che, contata due volte, si può considerare come un toro schiacciato, o anche come proiezione doppia di un toro di cui i nominati cerchi costituiscano il contorno apparente.

Secondo caso: curva C costituita dal solo ramo tricuspide C_1 .

La superficie di Riemann, relativa a C , viene rappresentata doppiamente sulla regione di piano esterna a C_1 , figu-

rando C_1 come linea di passaggio. Ma dal punto di vista topologico questa regione equivale alla regione piana esterna ad un cerchio, e perciò la nostra riemanniana equivale alla superficie dell'iperboloide di rotazione ad una falda avente il detto cerchio come cerchio di gola, il quale iperboloide per proiezione ortogonale ricopre due volte la nominata regione. La superficie dell'iperboloide ad una falda, considerata nello spazio proiettivo, costituisce evidentemente una superficie anulare, equivalente al toro.

CAPITOLO IV

Appendice: realtà e continuità; geometria numerativa.

A complemento degli sviluppi contenuti in questo libro raccogliamo qui alcune note storiche, dalle quali prendiamo occasione per illustrare importanti principii di ricerca.

Gli argomenti trattati possono apparire, a prima vista, senza connessione fra loro; giacchè chi cerchi, per esempio, il possesso delle principali nozioni di geometria numerativa, potrà dispensarsi dallo studio delle questioni di realtà, che occupa la prima parte del capitolo. Ma il legame fra le idee dominanti queste diverse parti appare dallo sviluppo storico: così appunto si riconosce in qual modo le considerazioni sulla forma delle curve abbiano suggerita quella visione della continuità, che porge un fecondo principio di scoperta nei più vari campi della ricerca geometrica.

Aggiungeremo che, trattando come applicazioni del principio di continuità i primi problemi della geometria numerativa, usciamo dall'ambito della geometria piana che forma l'argomento di questo libro, per riferire alcuni risultati fondamentali della teoria delle curve gobbe ⁽¹⁾.

33. Introduzione: cenno storico sulla classificazione delle cubiche e delle quartiche. — Nella teoria delle curve, cui si riferiscono gli sviluppi precedenti, vediamo un ordine di problemi con carattere nettamente algebrico: l'immaginario essendo posto alla pari del reale, si tratta in ultima analisi di formare sistemi d'equazioni algebriche, investigare i rap-

(1) Ringraziamo la signorina D.³ BIANCA ZUCCHI che ha disegnato la maggior parte delle figure occorrenti in questo Capitolo e ci ha pure aiutato con informazioni bibliografiche concernenti la forma delle curve.

porti di dipendenza, e quindi calcolare i gradi delle equazioni risultanti che designano le soluzioni cercate. Ma lo scopo algebrico, che oggi appare in prima linea, non è originario; negl'inizî della Geometria analitica, e massime per DESCARTES e NEWTON, l'interesse immediato si riattacca al problema geometrico concreto di determinare la *forma* della curva rappresentata da un'equazione algebrica reale; e a questo scopo vengono subordinati i principali problemi ond'è uscito il corpo di dottrina che forma oggetto della nostra esposizione. Nominiamo in specie i seguenti:

1) Ricerca della forma delle curve in *sensu differenziale*, cioè nell'intorno d'un punto: determinazione della tangente e dei massimi e minimi, approssimazioni successive e sviluppi in serie di Taylor, analisi dei punti singolari.

2) Comportamento dei rami di curva all'infinito: asintoti e sviluppi in serie (convergenti asintoticamente) di CRAMER, singolarità all'infinito ecc.

3) Proprietà di simmetria delle curve considerate nella loro *integrità*: diametri e curve diametrali, e quindi curve polari (cfr. § 4).

Per intendere storicamente lo sviluppo della teoria così disegnato, giova riportarsi all'intuizione metrica delle figure che precede la costituzione della Geometria proiettiva. Questo punto di vista è dominato dalla distinzione fra rami chiusi ed aperti, iperbolici e parabolici, che prende origine nello studio delle coniche, e si estende naturalmente alla classificazione newtoniana delle cubiche. L'osservazione di DESARGUES, circa la possibilità di derivare da quelle del cerchio le proprietà proiettive delle coniche, e così la *genesis per umbras*, mercè cui NEWTON deriva le cubiche dalle parabole divergenti, non porta ancora un concetto unificatore delle varie specie di curve proiezioni di una medesima.

Infatti l'accennata generazione, che NEWTON (1704) enuncia senza dimostrare al termine della sua « Enumeratio », costituisce per l'Autore un semplice complemento anziché un principio. Fondamento della classificazione newtoniana è invece la distinzione delle cubiche in quattro famiglie, che si ottiene considerando una conica diametrale, in rapporto ad un punto all'infinito della curva. Preso come asse y una retta per questo punto, l'equazione della curva assume la

forma

$$1) \quad y^2(ax + b) + y(cx^2 + dx + e) - (fx^3 + gx^2 + hx + i) = 0,$$

dove manca il termine in y^3 .

Il luogo dei punti di mezzo delle corde parallele all'asse y è la conica

$$2) \quad 2axy + 2by + cx^2 + dx + e = 0,$$

cioè — in generale — un'iperbole avente un asintoto parallelo all'asse y , che è pure asintoto della cubica. L'iperbole diametrale riferita agl'asintoti acquista un'equazione del tipo $xy = k$, sicchè la corrispondente trasformazione di coordinate porta

$$b = c = d = 0.$$

Pertanto, se $a \neq 0$, l'equazione della cubica — dividendo per a — si riduce:

$$I) \quad xy^2 + ey = fx^3 + gx^2 + hx + i.$$

Quando sia $a = 0$ la conica diametrale diventa una parabola, corrispondentemente alla circostanza che due punti all'infinito della cubica coincidono, ma il terzo punto rimane distinto finchè $e \neq 0$, sicchè prendendolo come punto all'infinito dell'asse y si ottiene ancora la riduzione al tipo I). Se invece $a = 0$ e $e = 0$, (la cubica ha come tangente di flesso la retta all'infinito) e l'iperbole diametrale si riduce alla retta

$$2by + dx + e = 0,$$

da completarsi colla retta all'infinito; codesta retta diametrale si può assumere come asse x , tranne che sia parallela all'asse y , e in questo caso può assumersi come asse y salvo che diventi la retta all'infinito. Corrispondentemente si ottengono, accanto alla I), le tre famiglie di cubiche:

$$II) \quad y^2 = fx^3 + gx^2 + hx + i,$$

$$III) \quad xy = fx^3 + gx^2 + hx + i,$$

$$IV) \quad y = fx^3 + gx^2 + hx + i.$$

NEWTON analizza quindi le cubiche delle varie famiglie risolvendone l'equazione rispetto ad y . Così ad esempio per

le cubiche della prima famiglia, egli è condotto a distinguere i casi in cui vi sono *tre asintoti* reali, oppure *un asintoto* reale e due immaginari, oppure la cubica tocca la *retta impropria* (che assorbe *due* asintoti) e possiede ulteriormente *un asintoto proprio*, o infine la cubica possiede *un asintoto* e un *punto doppio all'infinito*, ecc.

Anche le classificazioni delle cubiche che seguono a quella di NEWTON, per opera di EULERO e CRAMER, riposano sopra un'intuizione metrica, prendendo come punto di partenza il comportamento della curva all'infinito e l'esistenza o meno di asintoti: si distinguono ulteriormente gli asintoti che hanno semplice contatto colla curva, i quali sono accostati da due rami aperti giacenti da bande opposte, e gli asintoti che sono tangenti di flesso, i quali vengono accostati da due rami, o da due lati d'un ramo, giacenti in uno stesso semipiano.

Frattanto però il nuovo concetto unificatore della Geometria proiettiva guadagna rapidamente terreno: in forza di tale concetto tutto il capitolo concernente le proprietà asintotiche delle curve doveva ridursi allo studio delle proprietà differenziali relative all'intorno d'un punto, o dei punti, in cui la curva è segata da una retta qualunque. Infatti POINCARÉ ha messo in chiaro che i punti all'infinito del piano debbono ritenersi costituire una *retta impropria*, la quale — secondo il punto di vista delle proiezioni — non si distingue dalle rette, nel significato proprio della parola.

Sorge così la nozione dei *rami reali d'una curva in senso proiettivo*. E la distinzione in rami che qui viene fatta significa: *riducibilità* della curva nel campo reale, due rami apparendo come curve rappresentative di funzioni algebriche che non si prolungano per continuità analitica l'una nell'altra mentre la variabile si muove nel campo reale; s'intende che il prolungamento non avvenga neppure attraverso un punto critico, come accade invece per due archi di un ramo nel punto di contatto di una tangente parallela all'asse y o di una cuspidè. Codesta distinzione dei rami in *senso integrale reale*, non deve dunque confondersi con la distinzione dei rami in *senso differenziale* che occorre nello studio delle singularità e che significa *riducibilità* della funzione algebrica nell'intorno di un punto (cfr. L. 1°, §§ 11, 12, L. 2°, § 30), mentre la variabile si muove in tutto il campo complesso. Alla quale si può riattaccare, come è detto innanzi, la distin-

zione dei rami in senso metrico, che viene subordinata alla classificazione dei tipi proiettivamente distinti, tagliando la curva con la retta all'infinito.

Alla classificazione proiettiva si attaccò ora l'interesse essenziale. Così CHASLES (1835) mette in luce il vero significato della riduzione delle cubiche alle parabole divergenti, scoperta da NEWTON (cfr. § 26): ne segue la più semplice discussione della forma delle cubiche in rapporto all'equazione normale, che noi abbiamo svolto nel citato § 26, sulle tracce del SALMON (1852). Tuttavia la classificazione che PLÜCKER dà delle cubiche nel « System der analytischen Geometrie » (1835) è sempre concepita dal punto di vista metrico, quantunque per altri riguardi vi appaia l'influenza del pensiero di PONCELET, segnatamente per quanto concerne il concetto della continuità di cui discorreremo più avanti.

Il punto di vista proiettivo compare nella scuola tedesca per opera di STAUDT e MÖBIUS da cui riceve un importante incremento. STAUDT (1847) pone i principi dell'analisi topologica del piano proiettivo reale distinguendo le linee chiuse pari e impari; MÖBIUS (1852) ⁽¹⁾ svolge da questo punto di vista la classificazione delle curve del terz'ordine. Frattanto BELLAVITIS (1852) ⁽²⁾ intraprende la classificazione delle curve di terza classe.

Di buon'ora le ricerche di NEWTON sulla forma delle cubiche dettero impulso ad analoghe ricerche concernenti le quartiche. Qui è da menzionare anzitutto la classificazione dovuta all'abate di BRAGELOGNE (1830-1832) ⁽³⁾, il quale distingue i quattro casi in cui l'equazione della quartica possa ridursi di grado 1, 2, 3 rispetto a una variabile, oppure rimanga essenzialmente di grado 4, cioè i casi in cui la quartica possenga all'infinito un punto triplo, oppure doppio o semplice, o invece non abbia alcun punto reale all'infinito. EULERO e CRAMER, nei loro citati trattati del 1848 e 1850, riprendono lo studio delle quartiche, analizzandone la forma in rapporto alle intersezioni con la retta all'infinito; tuttavia

⁽¹⁾ Leipziger Abh. 1.

⁽²⁾ Atti dell'Istituto Veneto, III, 4.

⁽³⁾ Mémoires de l'Académie de Sciences de Paris.

queste ricerche non sono scevre da errori e vi si rivela una insufficiente nozione delle curve asintotiche, tangenti od osculatrici ad una data in un punto all'infinito.

Una classificazione accurata delle quartiche, basata sopra un esatto concetto delle curve asintotiche, venne svolta da PLÜCKER nel suo trattato del 1839. PLÜCKER osserva anzitutto che se una curva d'ordine n , $f_n = 0$, possiede come asintoto una retta $p = 0$, l'equazione della curva si lascia porre sotto la forma

$$pf_{n-1} + f_{n-2} = 0,$$

e che il polinomio f_{n-2} si riduce all'ordine $n - m$ ($m > 2$) qualora l'asintoto p possegga con la curva f_n un contatto m -punto.

Quando la curva $f_n = 0$ tocca in un punto O la retta all'infinito, vi è una parabola osculatrice che tocca in O la curva con un contatto quintipunto; designando con

$$p^2 + \lambda q = 0$$

questa parabola, l'equazione $f_n = 0$ assume la forma

$$(p^2 + \lambda q)f_{n-2} + (p + r)f_{n-3} + f_{n-4} = 0,$$

dove p , q , r sono polinomi di primo grado.

Le equazioni canoniche relative alle curve asintotiche, che si ottengono proseguendo quest'ordine di considerazioni, permettono a PLÜCKER di classificare tutti i tipi di quartiche in rapporto alle intersezioni con la retta all'infinito del piano, che — a seconda della realtà o meno di questi quattro punti, e delle loro possibili coincidenze — danno luogo ad 8 classi, distinte poi in diversi tipi.

Nuove ricerche sulle forme delle quartiche vennero intraprese da CAYLEY (1865) ⁽¹⁾ e poi da ZEUTHEN (1874); la classificazione stabilita da quest'ultimo porge risposta ai problemi fondamentali che qui si presentano; ne riferiremo particolarmente nel § 35.

34. La classificazione proiettiva delle cubiche e il metodo di piccola variazione. — A fondamento della classificazione proiettiva delle curve reali, stà la proprietà

(1) « On Quartics Curves » Phil. Magazine. Vol. 29.

topologica del piano proiettivo di possedere due specie di linee chiuse ⁽¹⁾:

linee (*bilatere*) che dividono la superficie piana in due parti, cioè linee topologicamente equivalenti ad un *cerchio*;

e linee *unilateri* equivalenti ad una *retta*, per cui non è possibile distinguere un lato destro e un lato sinistro, scambiandosi l'uno coll'altro quando si percorre la linea.

Le linee della prima specie sono caratterizzate dalla proprietà di possedere un numero pari d'intersezioni con una retta (computati debitamente i contatti), e perciò si dicono *linee pari*; invece le linee della seconda specie sono *linee impari*, aventi un numero dispari d'intersezioni colle rette del piano. Accade infatti che, mutando con continuità la posizione d'una retta variabile, possa mutare il numero delle intersezioni (reali) che essa ha con una linea chiusa, ma i punti d'intersezione spariscono o compaiono sempre a coppie, attraverso i contatti, e perciò il numero anzidetto si mantiene sempre pari o dispari al variare della retta.

In forza di questa stessa osservazione (di PONCELET) si ha con MÖBIUS:

Una linea pari ha sempre un numero pari d'intersezioni con qualsiasi altra linea chiusa del piano, pari o impari. Due linee chiuse impari hanno un numero dispari d'intersezioni; perciò questo numero non può mai essere zero.

Ora si possono fare alcune facili osservazioni circa i rami o circuiti che compongono una curva algebrica, e in particolare una cubica.

1) Una curva algebrica reale si compone di *rami o circuiti* distinti in senso proiettivo, che possono essere linee pari (*bilatere*) o impari (*unilateri*).

2) Una curva algebrica senza punti doppi non può possedere due rami impari; giacchè questi avrebbero almeno un punto comune, che risulterebbe doppio per la curva.

3) Una curva algebrica d'ordine pari, senza punti doppi, non può possedere rami impari, una curva d'ordine dispari contiene certo un ramo impari ed altri eventuali rami pari.

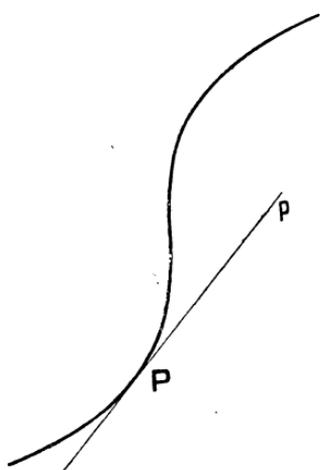
4) In particolare le curve di *terz' ordine*, prive di punti doppi, possiederanno sempre *un* ramo impari ed eventualmente anche un ramo pari. Quest'ultimo ramo è un' *ovale*,

(¹) Cfr. L. 2^o, § 35.

cioè una linea chiusa bilatera *priva di flessi*. Infatti una tangente di flesso dovrebbe avere (almeno) una quarta intersezione col ramo pari.

5) Un ramo impari (non rettilineo) possiede sempre un numero dispari di flessi, e un ramo pari ne possiede un numero pari (o zero).

Infatti sia C una linea chiusa tracciata nel piano proiettivo e P un punto generico di essa, ove la tangente p lascia l'intorno di P tutto da una parte. Quando si percorre la



linea C , partendo da P e ritornando in P , in un dato verso, la tangente p ritorna sempre alla posizione iniziale dopo essere passata dall'uno all'altro lato della linea ogniqualvolta il punto di contatto è passato per un flesso di C . Ora se la C è una linea bilatera accade che — dopo un giro — il lato della linea C a cui appartiene p , diciamo p. es. il lato *destro*, ritorna in se stesso, quindi nel movimento di P si deve incontrare un numero pari di flessi. Se invece la C è unilatera, percorrendo P la linea il lato destro si

cambia col sinistro; affinché la tangente p si trovi — dopo il giro compiuto — dal lato opposto a quello da cui siamo partiti, bisogna che P abbia incontrato su C un numero dispari di flessi. c. d. d.

6) Un ramo impari, privo di nodi o di cuspidi, possiede *almeno tre flessi*.

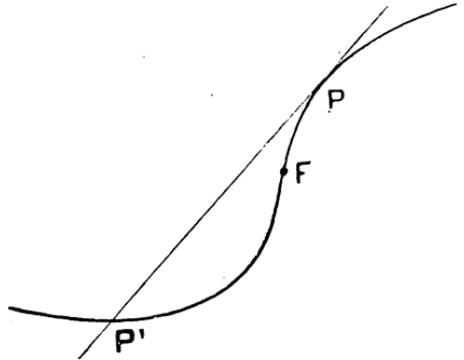
MÖBIUS stabilisce questa proposizione proiettando la curva sopra una sfera, dal suo centro, e riferendosi all'intuizione della linea così tracciata sopra la sfera, dove deve esser possibile passare da un punto della sfera al suo opposto. Il ragionamento di MÖBIUS si rende più chiaro, restando nel piano, ove si mandi all'infinito un flesso della curva impari, sicchè i due archi C e C' della curva, che si riattaccano all'infinito, giacciono dalla medesima parte dell'asintoto a . Allora, percorrendo di seguito i due archi C e C' della curva senza attraversare il punto all'infinito, l'angolo della tangente con l'asintoto, che dapprima cresce a partire dallo zero, dove poi ridursi congruo a zero; ciò è possibile in due modi:

se la tangente compie un giro completo, caso in cui la curva possiede un nodo; oppure se vi è qualche flesso (o cuspidi) ove s'inverta la direzione della tangente.

Senza fare appello all'intuizione precedentemente invocata, si può dimostrare la proposizione 6) nel modo seguente, che si applica immediatamente al ramo d'una cubica, ma appare anche estendibile a curve d'ordine superiore.

Sia dunque C il ramo impari di una cubica, che possiede certo un flesso F . Preso su C un punto P , vicino ad F , il suo tangenziale P' si trova su C dall'altra parte di F . Questa osservazione fondamentale si riattacca al fatto che la tangente di flesso lascia da bande opposte due archi contigui di curva i quali volgono ad essa la loro convessità.

Ora, quando P si muove percorrendo la linea C , a partire da F e in un dato verso, P' percorrerà la medesima linea chiusa in senso inverso, giacchè, proseguendo P il suo movimento, non potrà invertirsi la direzione del movimento di P' fino a che P non cada in un nodo oppure in un flesso (punto di contatto di una tangente stazionaria) dove P coincide con P' . Si deduce che P e P' , movendosi in senso opposto a partire da F , s'incontreranno sulla cubica un'altra volta almeno, ciò che accade in un flesso. No-



tisi che, se la corrispondenza fra P e P' fosse univocamente invertibile, si troverebbe soltanto un secondo punto unito (di flesso), come accade per le proiettività discordi sulla retta; ma la corrispondenza $[PP']$ non è univocamente invertibile, d'accordo colla necessità che si abbia su C un numero dispari di flessi, e quindi tre almeno. e. d. d.

[Osserveremo che ove si voglia estendere il ragionamento precedente al caso di linee impari C , d'ordine > 3 , si deve considerare la possibilità che un punto P , scelto in un certo tratto di C , possieda più tangenziali $P', P'' \dots$, e che due di questi — p. es. P' e P'' — vengano a coincidere, divenendo poi immaginari quando P prosegue a percorrere la C ; ma questa eventualità, che non permette di estendere senz'altro

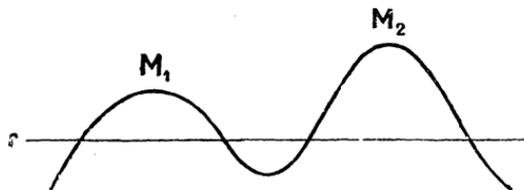
il ragionamento precedente, porta che la linea C possieda una tangente doppia a contatti reali e contenga un flesso nell'arco racchiuso fra questi due punti; si riconosce allora che lo stesso arco possiede un secondo flesso].

7) La cubica dotata di nodo si può riguardare come riunione di un ramo pari K (occhiello) e di un ramo impari K' , che si congiungono nel nodo O ; è appena necessario avvertire che ciascuna delle due linee suddette si chiude ad angolo nel nodo stesso. Nella parte fuori dell'occhiello, che costituisce il ramo impari, la cubica nodata possiede un flesso. Per dimostrarlo in quest'ordine di idee procediamo come segue.

Anzitutto il ragionamento svolto innanzi, alla prop. 5, dove si considera l'intera cubica come una linea chiusa, non cade in difetto per la circostanza che la linea attraversi se stessa, sicchè siamo autorizzati ad affermare l'esistenza di un flesso almeno. Questo non potrà certo cadere sul ramo pari K come già abbiamo notato. Ora se F è un flesso, appartenente a K' , si riconosce che la linea K' viene divisa da F e da O in due archi tali che ciascun punto dell'uno ha il suo tangenziale sull'altro, donde segue che K' non contiene altri flessi. Infatti basta osservare che ogni punto P' di K' è tangenziale di due punti della cubica (che per ipotesi ha un punto doppio) e che uno di questi punti descrive l'occhiello K , mentre P' descrive K' ; si deduce che sopra K' si ha fra i punti P e i loro tangenziali P' una corrispondenza biunivoca discorde, le cui due coincidenze cadono una in F e l'altra in O .

In conclusione una cubica dotata di nodo possiede un solo flesso reale. E questa conclusione si accorda col passaggio alla forma limite della cubica con cuspidi, per cui le formule di PLÜCKER danno un solo flesso, giacchè nel passaggio si vede invariato il numero dei flessi reali.

8) Il ramo impari d'una cubica non può avere più di tre flessi e quindi (per la prop. 6): *il ramo impari d'una cubica, che non possieda un nodo, contiene precisamente tre flessi.*

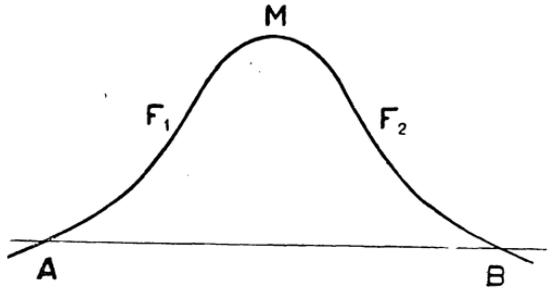


MÖBIUS stabilisce questa proprietà attraverso le seguenti:

a) Una cubica non può avere due massimi o due minimi rispetto ad una

retta, poichè si troverebbe una tangente doppia o una retta che incontri la linea in 4 punti.

b) Se tra due punti, A e B , del ramo impari d'una cubica, vi sono due flessi, c'è anche un massimo o un minimo rispetto alla retta AB .



Ciò posto se si avessero quattro flessi A, B, C, D , si troverebbero due massimi o minimi fra due punti, il che è escluso dal lemma a).

I lemmi a) e b) su cui riposa la dimostrazione della prop. 8 hanno carattere intuitivo, ma occorre un'analisi delicata se si vuol procedere con rigore. Ce ne dispenseremo prendendo un'altra via che si basa su considerazioni di *continuità*, delle quali si mette così in evidenza la grande fecondità in quest'ordine di questioni.

Consideriamo una cubica variabile: con variazione continua dei parametri si può passare dalla cubica generale unipartita alla bipartita e viceversa, attraverso una *forma limite di passaggio* in cui l'ovale si riduca ad un punto isolato; frattanto il ramo impari della cubica variabile conserva sempre lo stesso numero di flessi, imperocchè i flessi reali possono divenire immaginari soltanto a coppie attraverso forme di passaggio in cui due flessi coincidano, mentre siffatta coincidenza non può aversi che in un nodo della cubica (essendo escluso il caso di una tangente quadripunta).

Ciò posto, il numero dei flessi che appartengono al ramo impari di una cubica generale sarà uguale al numero dei flessi della cubica dotata di punto isolato; ora su questa curva razionale la corrispondenza fra il punto P e il suo tangenziale P' è una corrispondenza $[2, 1]$, che al massimo avrà tutte e tre le coincidenze reali: il numero dei flessi reali (coincidenze di P e P') non potrà dunque superare 3, e sarà precisamente uguale a questo numero. c. d. d.

Soltanto nel caso in cui la cubica acquisti un nodo, congiungendosi in questo il ramo impari e il ramo pari, si perdono due flessi della curva. Il modo di sparizione di questi due flessi si rende chiaro osservando le forme delle cubiche

prossime ad una cubica nodata. Pongasi il nodo nell'origine delle coordinate e assumansi come assi le tangenti principali; allora l'equazione della cubica prende la forma

$$xy + \varphi_3(xy) = 0$$

e le cubiche, prossime alla nominata,

$$xy + k + \varphi_3 = 0 \quad \text{e} \quad xy - k + \varphi_3 = 0,$$

posseggono come coniche approssimanti rispettivamente le iperbole

$$xy + k = 0 \quad \text{e} \quad xy - k = 0,$$

le quali appartengono alle due coppie di angoli opposti determinanti dalle rette x, y . Se, per es., un ramo della prima iperbole si trova nell'angolo occupato dall'occhiello della cubica, accade che la cubica variata

$$xy + k + \varphi_3 = 0$$

è bipartita, mentre la

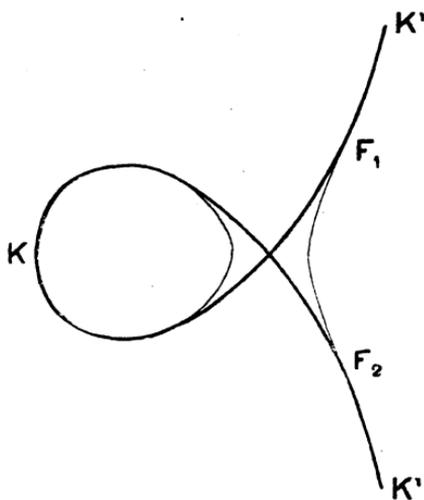
$$xy - k + \varphi_3 = 0$$

è unipartita (s'intende per k assai piccolo); la prima cubica si ottiene raccordando i due archi del ramo impari K' che si

congiungono angularmente nel nodo e, dall'altra parte, i due archi dell'occhiello K ; la seconda (vedi fig. a pag. 253) nasce raccordando ciascun arco di K con l'arco di K' che l'incontra ad angolo nel nodo. L'esame di tali raccordi mostra che nascono in ogni caso due flessi della cubica variata, poichè:

a) non nasce alcun flesso raccordando due archi che volgono ambedue la concavità all'angolo compreso;

b) nascono invece due flessi raccordando due archi volgenti ambedue la convessità all'angolo compreso;



c) e finalmente nasce un flesso se si raccordano due archi uno dei quali volga la concavità e l'altro la convessità all'angolo compreso.

Riassumendo i risultati ottenuti abbiamo che:

Le cubiche reali danno luogo a due famiglie topologicamente distinte entro il piano proiettivo:

I) cubiche composte d'un solo ramo impari, con tre flessi,

II) e cubiche composte di un ramo impari, con tre flessi, e d'un ovale.

Come forme di passaggio tra le due famiglie si hanno:

III) le cubiche dotate di nodo, che posseggono un flesso,

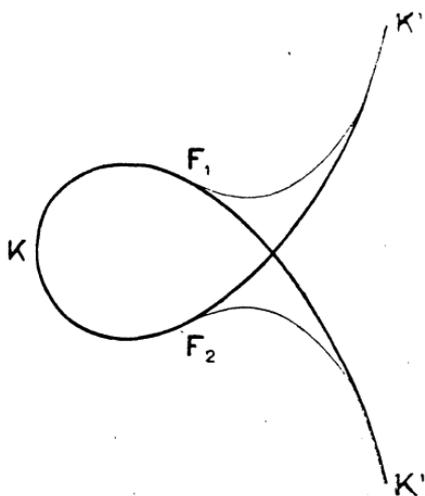
IV) e le cubiche dotate di punto isolato: ramo impari con tre flessi.

Infine la forma di passaggio fra le III) e IV) è

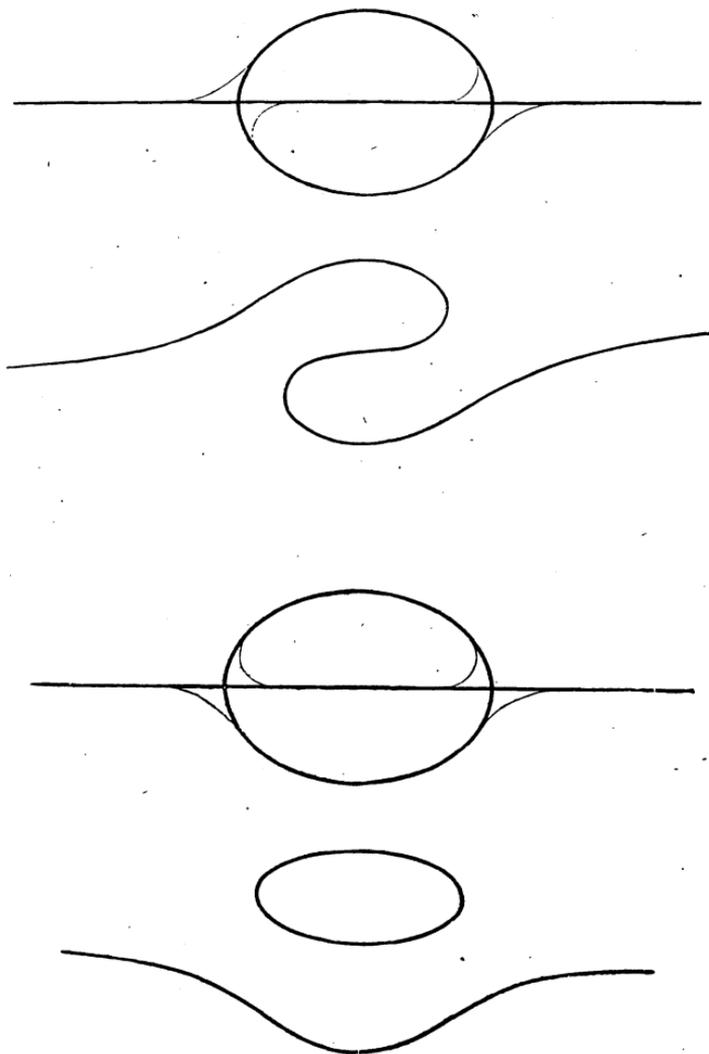
V) la cubica con cuspidi, costituita da un ramo impari con un flesso.

Le considerazioni di continuità, mercè cui abbiamo stabilito il numero dei flessi reali d'una cubica, vale anche a dimostrare l'esistenza dei due tipi di cubiche generali, possedenti uno o due rami. Infatti il *metodo di piccola variazione* di cui sopra è fatto uso, permette — come si è visto — di riconoscere che vi sono cubiche dei due tipi in prossimità d'una cubica dotata di nodo; è anche chiaro che ve ne sono in prossimità d'una cubica dotata di punto isolato, giacchè — mutando in senso opposto un parametro della cubica — codesto punto è suscettibile di scomparire, come un cerchietto nullo che diviene immaginario, oppure di divenire un ovale.

Lo stesso metodo si può applicare partendo, non più da una cubica irriducibile dotata di punto doppio, ma da una cubica composta di conica e retta secante: *tutti i tipi di cubiche reali si ottengono così, con piccola variazione, dalla figura d'una conica presa insieme con una retta secante.* Il



passaggio alle cubiche generali con uno o due rami, viene indicato dalle annesse figure:



Come *notizia storica* diremo che le considerazioni di continuità di cui qui è fatto uso appartengono a un ordine d'idee largamente sviluppato da PONCELET, che sarà ripreso ed esaminato nel seguito. Per lo studio della forma delle cubiche codeste considerazioni ricorrono nella classificazione di PLÜCKER (1835).

Infatti questa classificazione si basa sulla riduzione della cubica generale alla forma canonica $abc - \lambda d^2 e = 0$,

dove a, b, c, d, e sono cinque rette; PLÜCKER assume la retta d all'infinito, la retta e contiene i tre tangenziali dei punti all'infinito, ed a, b, c sono i tre asintoti. Pertanto la forma della cubica viene dedotta per continuità a partire dal caso degenerare del trilatero abc (che corrisponde a $\lambda = 0$). PLÜCKER considera le varie posizioni della retta e rispetto al detto trilatero, e la posizione dei *centri critici* o punti doppi delle cubiche del fascio ottenuto al variare di λ ; appaiono così le cubiche con punto doppio come forme di passaggio fra cubiche con uno e due rami.

Più tardi il metodo di piccola variazione ha ricevuto un impiego sistematico come modo per dimostrare l'*esistenza* di certe forme delle curve reali; così per esempio nelle ricerche di HARNACK, che menzioneremo più avanti.

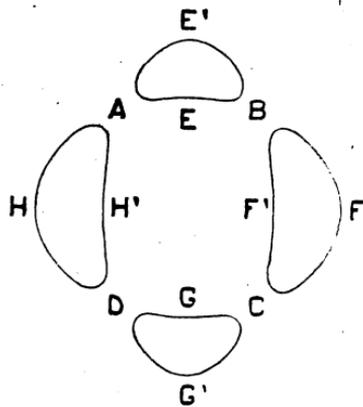
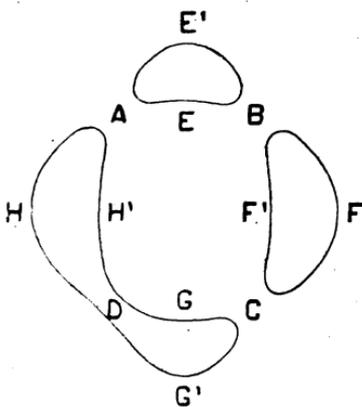
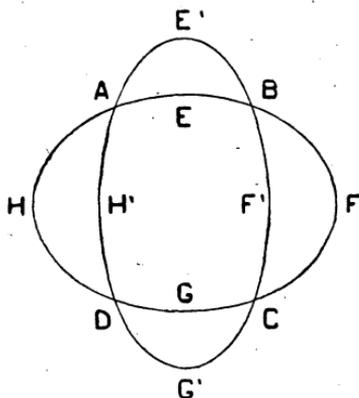
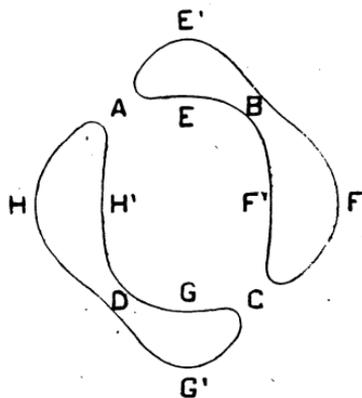
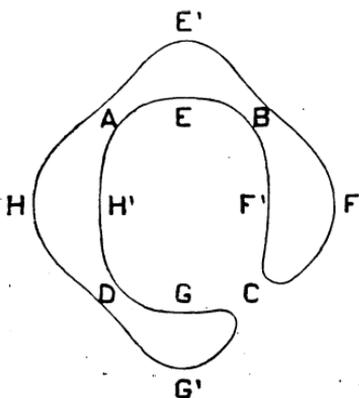
35. Cenno sulla forma delle quartiche. — Una curva piana del quart'ordine, priva di punti doppi, si compone soltanto di rami pari: il numero di questi rami non può superare 4. Infatti se una quartica, K , potesse possedere 5 rami pari, una conica contenente un punto di ciascun ramo avrebbe con esso un'altra intersezione (almeno) e quindi segherebbe K in 10 punti!

Analoghe considerazioni provano che una quartica, la quale possenga un ramo interno ad un altro, è costituita soltanto da questi due rami, giacchè si arriva altrimenti ad un assurdo, intersecando la curva con una retta che congiunga un punto di un ipotetico terzo ramo con un punto interno ai due primi.

Ora si può riconoscere che: *esistono quartiche senza punti doppi, rappresentate da equazioni a coefficienti reali, che posseggono 4, 3, 2, 1 rami o anche 0 rami (caso in cui la curva è interamente immaginaria).*

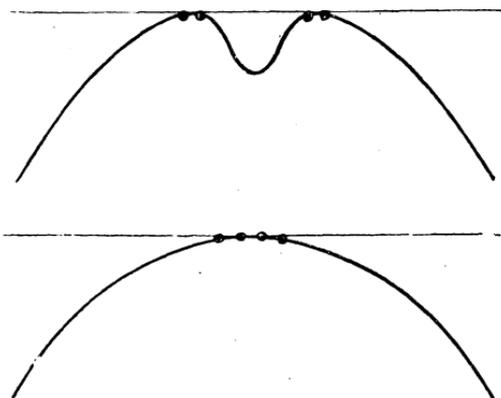
Quartiche siffatte si trovano come curve prossime ad una coppia di coniche. In prossimità di una coppia di ellissi immaginarie, rappresentate da equazioni reali, si trovano curve del quart'ordine senza rami reali. In prossimità di una coppia di coniche reali, con quattro intersezioni reali, si trovano quartiche reali costituite da 1, 2, 3, 4 rami. Infatti, riferendoci all'annessa figura, si può passare ad una quartica priva di punti doppi, prossima alla coppia di coniche $ABCDEFGH, ABCDE'F'G'H'$, collegando gli archi che convergono a cia-

scuno dei punti doppi A, B, C, D in due modi diversi: p. es. collegando in A le coppie di archi $DHA, DH'A$ e $BEA, BE'A$, oppure le $DHA, BE'A$ e $DH'A, BEA$ ecc.



Si ottengono così $2^4 = 16$ forme di quartiche prossime alla nominata coppia di coniche, e fra queste si riconoscono curve composte di 4, 3, 2, 1 rami.

La costruzione precedente dà luogo in ogni caso a quartiche dotate di 8 flessi reali: vi sono due flessi che scompaiono nella forma limite, riunendosi in un nodo, così come abbiamo veduto per la cubica. Ora, facendo variare i parametri di una quartica, può accadere che i flessi reali scompaiano, o nascano, a coppie; le forme di passaggio in cui due flessi vengono a coincidere possono corrispondere: o a quartiche con un nodo, o a quartiche con una tangente quadripunta. In realtà soltanto in questo secondo caso, quando una bitangente a contatti reali si trasforma in una bitangente a contatti immaginari, si perdono effettivamente due flessi; passando attraverso ad un nodo rinascono sempre due flessi al posto dei due che si perdono.



Le osservazioni che precedono mostrano che la semplice applicazione del metodo di piccola variazione, a partire dalla forma limite di una coppia di coniche, non basta a porgere un'adeguata conoscenza dei caratteri proiettivi reali delle quartiche reali. Una classificazione che tenga conto di questi caratteri si ottiene con ZEUTHEN⁽¹⁾, in base ad una distinzione delle tangenti doppie, cui vogliamo rapidamente accennare.

ZEUTHEN chiama *bitangenti di prima specie* d'una quartica reale:

- a) le rette che toccano un ramo della curva in due punti reali;
- b) e le rette (reali) aventi colla curva due contatti immaginari coniugati.

Il nome di *bitangenti di seconda specie* viene attribuito alle

- c) rette che toccano in due punti reali due diversi rami della curva.

L'importanza di questa distinzione è relativa all'osservazione seguente:

Una quartica reale generale, variando per continuità,

(¹) Math. Annalen, Bd. 7, pag. 411.

non può perdere o acquistare bitangenti di prima specie. Infatti:

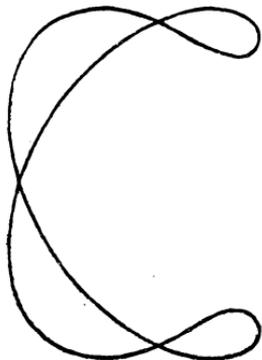
1) attraverso a forme di passaggio dotate di tangente quadripunta le bitangenti di prima specie *a*) vengono soltanto scambiate colle *b*);

2) le bitangenti di prima specie possono riunirsi a coppie, e divenire immaginarie, passando attraverso quartiche dotate di punto doppio, ma un esame approfondito ⁽¹⁾ permette di riconoscere che, in tal caso, per ogni coppia di bitangenti di prima specie perduta nel passaggio da una ad un'altra forma, prossima alla forma limite, si acquista sempre una nuova coppia siffatta.

Conseguenza di questa osservazione è che tutte le quartiche generali posseggono lo stesso numero di bitangenti di prima specie, giacchè si può passare per continuità da una quartica $f=0$ ad una $\varphi=0$, entro il fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$.

Ora, per valutare il numero costante delle bitangenti di prima specie, basta riferirsi ad un caso particolare. Si consideri, per esempio, la quartica razionale, dotata di tre punti doppi:

$$\Omega = (y^2 - x^2)(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2\left[y^2 + x(x - 2)\right]^2 = 0;$$



le curve, prossime alla nominata,

$$\Omega = \pm k,$$

non hanno intersezioni con $\Omega = 0$, e — a seconda del segno di k — giacciono tutte all'interno o tutte all'esterno di essa.

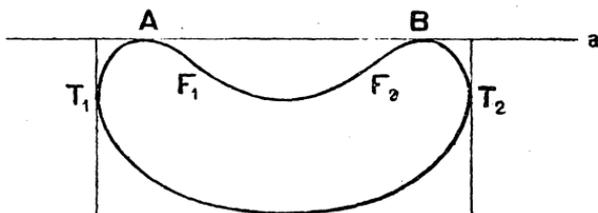
Nel primo caso (curva interna) si ha una quartica composta di quattro rami (unifolia), ciascuno dei quali possiede una tangente doppia. Questa *quartica di PLÜCKER* possiede dunque 4 bitangenti di prima specie, e possiede inoltre 24 bitangenti di seconda specie giacchè le tangenti comuni a due rami sono qui (come per due cerchi) in numero di 4 e le coppie di rami sono $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$: PLÜCKER ha mostrato appunto

(1) ZEUTHEN, l. c.

con tale esempio che una quartica può avere tutte le 28 bitangenti reali. Ora ne deduciamo che: *ogni quartica generale possiede quattro bitangenti di prima specie.*

Su questo risultato ZEUTHEN fonda la classificazione delle quartiche piane non singolari.

Quando un ramo della quartica, (che per semplicità di discorso supponiamo finito) è toccato da una retta a in due punti reali A , B , in ciascuno di questi punti la curva volge



alla retta la sua convessità, mentre ognuno dei due archi compresi fra i punti di contatto, A e B , contiene un tratto che volge ad a la sua concavità; pertanto in ognuno dei due archi AB esistono due punti (almeno) in cui si passa dal concavo al convesso, i quali sono flessi della quartica oppure punti in cui la tangente alla curva è perpendicolare ad a : è facile vedere che vi è un arco AB , compreso fra le perpendicolari ad a , per cui i punti di passaggio suddetti sono flessi. Viceversa se un ramo (pari) d'una quartica contiene due flessi, si trova che esso possiede una bitangente (di prima specie) che lo tocca in due punti reali.

Da tali considerazioni ZEUTHEN deduce che *una quartica può avere al più otto flessi reali*. I rami (pari) della curva ricevono il nome di *ovali*, *unifolia*, *bifolia*, *trifolia* e *quadrifolia*, a seconda del numero delle bitangenti che li toccano in due punti reali: questo numero, che è la metà del numero dei flessi, vale 0 per un ovale, 1 per un unifolium ecc.

Aggiungeremo che l'analisi di ZEUTHEN classifica le quartiche in rapporto alle diverse posizioni che esse sono suscettibili di assumere rispetto al quadrilatero delle quattro bitangenti di prima specie; in particolare giova qui l'osservazione che i punti di contatto di una delle nominate bitangenti, supposti reali, non possono separare le intersezioni della retta medesima con altre due bitangenti, onde segue (L. 2°, § 27;

vol. I, pag. 316) che « i punti di contatto di tre bitangenti di prima specie si trovano sopra una conica ».

36. Il teorema di Harnack e altre proprietà generali concernenti la forma delle curve. — Alcune delle considerazioni che s'incontrano nello studio delle cubiche e delle quartiche sono suscettibili di essere estese, e conducono così a teoremi generali in ordine alla forma delle curve algebriche.

Il primo teorema che qui s'incontra, concerne il numero dei rami, ed è dovuto a A. HARNACK ⁽¹⁾ (1876):

Una curva piana d'ordine n possiede al massimo $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ rami, ed una curva (irriducibile) d'ordine n dotata di δ punti doppi possiede al massimo $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta + 1$ rami, cioè

il massimo numero dei rami reali che può possedere una curva di genere p vale $p + 1$.

Dimostriamo prima che la curva d'ordine n , senza punti doppi, o con $\delta > 0$ punti doppi, non può avere più che

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 - \delta$$

rami; riconosceremo poi che codesto massimo è effettivamente raggiunto.

Notiamo anzitutto che una curva d'ordine n , priva di punti doppi, non può possedere che un solo ramo impari, che esiste veramente quando n è dispari. Ciò posto pongasi che una curva f d'ordine n , priva di punti doppi, possedga (almeno) $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ rami; si può allora determinare una curva φ , d'ordine $n-2$, che passi per $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ punti presi ciascuno sopra un ramo pari di f , ed inoltre per altri $n-3$ punti scelti sopra l'ultimo ramo (pari o impari): allora la φ segnerà ciascuno dei nominati $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ rami pari di f in un altro punto, sicchè il numero totale

⁽¹⁾ Math. Annalen, Bd. 10, pag. 189.

delle intersezioni di f e φ risulterà almeno

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) + n - 3 = n(n-2) + 1;$$

ma questa conclusione è assurda, essendo f una curva irriducibile.

Questo ragionamento si estende al caso in cui la curva f , supposta irriducibile, possenga un certo numero δ di punti doppi. In questo caso la f conterrà un certo numero ν di rami impari, dove ν avrà la stessa parità di n ; si avranno quindi $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ punti doppi almeno, intersezioni di codesti rami a due a due, ed inoltre altri $d = \delta - \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ punti doppi, provenienti da intersezioni di due rami o di un ramo con se stesso, o punti isolati. Pongasi che f contenga almeno $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta + 2$ rami; allora si costruirà, come innanzi, una curva φ d'ordine $n-2$, avente con f più che $n(n-2)$ intersezioni. A tale scopo basterà far passare φ per i $\delta = \frac{\nu(\nu-1)}{2} + d$ punti doppi, ed inoltre per un punto scelto sopra ciascuno dei suoi rami pari e per $n + \nu - 4$ ($\nu > 0$) punti scelti sopra un ramo impari (oppure ancora sopra un ramo pari qualora sia $\nu = 0$). Si dimostra che effettivamente f e φ avranno più che $n(n-2)$ intersezioni fra loro, distinguendo i due casi in cui n sia pari o dispari. Le osservazioni fondamentali che servono all'uopo sono le seguenti:

1) un ramo pari di f ha un numero pari di intersezioni con gli altri rami e perciò deve avere un numero pari di intersezioni con una φ che passi per i punti doppi appartenenti ad esso (e ciò qualunque sia il numero di volte in cui il ramo taglia sè stesso);

2) un ramo impari di f ha un numero dispari o pari di intersezioni con gli altri rami secondochè n (e ν) è pari o dispari; nel primo caso codesto ramo vien intersecato dalla curva pari φ , d'ordine $n-2$, in un altro punto almeno fuori dei punti doppi appartenenti ad esso; nel secondo caso vale la stessa conclusione tenuto conto che la φ è d'ordine impari e che il detto ramo contiene un numero pari di punti doppi,

intersezioni con altri rami (la conclusione non viene infirmata dalla circostanza che il ramo attraversi sè stesso un numero qualunque di volte).

Il ragionamento svolto prova, come si è detto, che una curva irriducibile di genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$, non può avere più che $p+1$ rami, almeno se essa è dotata soltanto di punti doppi. In realtà il caso in cui si presentino singolarità più elevate non dà luogo ad eccezione; ma non ci soffermeremo su ciò, limitandoci ad avvertire che ove si abbia un punto i -plo (ordinario) di f occorre imporre alla φ di passare per questo con la molteplicità $i-1$.

Ora vogliamo provare che esistono effettivamente curve d'ordine n per cui è raggiunto il massimo numero di rami:

$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$. A tal uopo faremo uso, con HARNACK,

di un procedimento induttivo, supponendo che esista una curva, f_{n-1} , d'ordine $n-1$, la quale possieda il massimo

numero di rami, $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$, e tale che un ramo di

essa abbia $n-1$ intersezioni con una retta, a ; in tale ipotesi costruiremo una curva d'ordine n , prossima alla curva spezzata $af_{n-1} = 0$, la quale conterà di

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

rami, e tale che uno di questi incontri la retta a in n punti.

Consideriamo n rette parallele $p_1 p_2 \dots p_n$, seganti a in n punti, $P_1 P_2 \dots P_n$, che appartengano tutti ad uno stesso segmento avente come estremi due intersezioni di f_{n-1} con la a ; nel fascio di curve

$$af_{n-1} + \lambda p_1 p_2 \dots p_n = 0$$

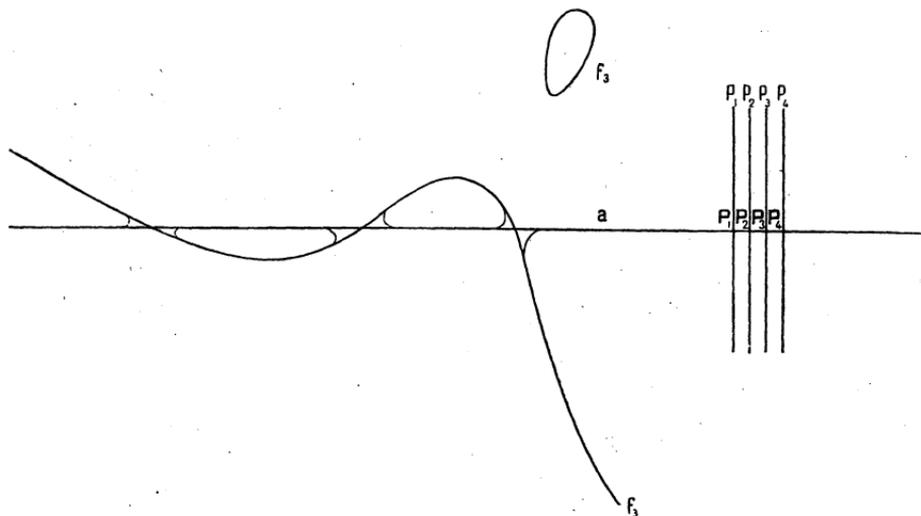
vi sono curve, f_n , prossime ad af_{n-1} , e contenenti un punto interno a uno degli $n-1$ occhielli formati dalla retta a col ramo di f_{n-1} che la sega in $n-1$ punti; curve f_n siffatte segano la retta a nei punti fissi $P_1 P_2 \dots P_n$ e perciò debbono contenere $n-1$ rami prossimi all'anzidetto ramo di f_{n-1} , e

tutti interni agli $n - 1$ occhielli anzidetti, sicchè conterranno in tutto

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 + (n-1) - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

rami; inoltre un ramo della f_n sega la retta a nei punti $P_1 P_2 \dots P_n$.

Per chiarire la dimostrazione il lettore può con vantaggio riferirsi per es. al caso particolare $n = 4$, che è illustrato dalla ammessa figura.



Una lieve modificazione del ragionamento precedente permette anche di costruire curve di un dato ordine n , con $1, 2, \dots, n-3$ punti doppi, aventi il massimo numero di rami compatibile col loro genere, e quindi di riconoscere che per ogni genere p esistono curve possedenti il numero massimo di rami: $p+1$. Ma un esempio di tali curve, ove si lasci cadere la restrizione delle singolarità elementari, si può trarre più semplicemente dall'esame delle curve che (in rapporto alla teoria delle funzioni abeliane) denominansi iperellittiche:

$$y^2 = f(x).$$

Se f è un polinomio di grado $2p+2$, la curva $y^2 = f(x)$ è di genere p (cfr. L. 2°, Cap. III, § 38); è facile vedere che essa contiene esattamente $p+1$ rami nel caso che gli

zeri di $f(x)$ siano tutti reali: vi sono allora sull'asse x $2p + 2$ segmenti consecutivi determinati da codesti zeri, e alternativamente codesti segmenti corrispondono a valori positivi e negativi di $f(x)$, e quindi a valori reali e immaginari della y .

Altre dimostrazioni del teorema di HARNACK possono riuscire interessanti in vista dell'importanza del risultato.

Una dimostrazione semplicissima si può dare in base al concetto delle funzioni razionali sopra una curva, i cui gruppi di livello formano un'involuzione g_n^1 . Si dimostra in quest'ordine di idee (vedi L. 5°) che, a differenza di ciò che accade sopra una retta, un gruppo di n punti che debba appartenere ad una g_n^1 (cioè il gruppo dei poli di una funzione razionale) non può essere dato ad arbitrio sopra una curva di genere $p > 0$, finchè è $n < p + 1$; invece « $p + 1$ punti presi ad arbitrio sopra una curva di genere p formano un gruppo di una g_{p+1}^1 , che rimane in generale determinata dal gruppo ». Ora, se una curva f di genere p contiene $p + 1$ rami distinti, si può costruire sopra di essa una g_{p+1}^1 reale scegliendo $p + 1$ punti appartenenti a rami diversi, ed allora al variare, nel campo reale, del parametro t corrispondente ai gruppi dell'involuzione, non può mai accadere che il punto di un gruppo esca dal relativo ramo, giacchè le radici reali di un'equazione possono sparire soltanto a coppie attraverso una coincidenza; si deduce che la curva f non può possedere un $(p + 2)$ -esimo ramo reale, giacchè un punto di questo determinerebbe un gruppo reale della g_{p+1}^1 , che dovrebbe possedere un punto reale sopra ciascuno degli altri rami.

Anche la rappresentazione dei punti immaginari di una curva algebrica mediante una superficie di RIEMANN, F , conduce a riconoscere il teorema di HARNACK. A tale scopo giova rappresentare F sopra una superficie doppia F' i cui punti corrispondano alle coppie di punti immaginari coniugati di F . I ρ rami reali della curva f verranno ora rappresentati da orli della superficie (doppia) F' ; e pertanto, ove si attribuisca a F' uno spessore, si avrà una rappresentazione univoca di F sulle due facce di F' , costituenti la superficie di un disco (piano o curvo) dotato di $\rho - 1$ fori (almeno). Se la superficie F deve avere il genere p bisogna che sia

$$\rho - 1 \leq p.$$

e. d. d.

HILBERT (1890) ⁽¹⁾, proseguendo le ricerche di HARNACK, è pervenuto a importanti risultati che qui ci limiteremo a menzionare per informazione dei lettori. Anzitutto egli nota che il numero dei rami (pari), di una curva d'ordine n , che possono essere contenuti uno dentro dell'altro, è al massimo $\frac{n}{2} - 1$ per n pari, e $\frac{1}{2}(n - 3)$ per n dispari; inoltre dimostra che il massimo numero dei rami di una curva gobba è

$$\frac{1}{4}(n - 2)^2 + 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{4}(n - 1)(n - 3) + 1,$$

secondochè l'ordine n è pari o dispari; e questi massimi sono effettivamente raggiunti.

Mentre HARNACK estendeva i risultati pertinenti alla classificazione delle cubiche e delle quartiche per quanto concerne il numero dei rami di una curva d'ordine n , KLEIN — in una memoria dello stesso anno 1876, che si trova accanto a quella del predetto autore nell'indicato volume 10 dei *Math. Annalen* — perveniva a una relazione generale fra i caratteri reali di una curva, che le ricerche di ZEUTHEN lasciano riconoscere per $n = 4$.

Si è visto infatti (§ 35) che una quartica piana possiede sempre 4 bitangenti di prima specie, e che per ogni bitangente a contatti reali si hanno due flessi, sicchè, designando con i' il numero dei flessi reali e con τ'' il numero delle tangenti isolate, sussiste la relazione

$$i' + 2\tau'' = 8.$$

KLEIN generalizza questa relazione dimostrando che per una curva d'ordine n , senza punti doppi, si ha

$$i' + 2\tau'' = n(n - 2).$$

La dimostrazione di questo risultato si fonda sul principio di continuità, osservando che il numero $i' + 2\tau''$ rimane invariato al variare della curva d'ordine n , quando in questa

⁽¹⁾ *Math. Annalen*, Bd. 38 (1891), pag. 115. Ulteriori sviluppi trovansi in recenti lavori di BRUSOTTI nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo e negli *Annali di Matematica*.

coincidano due flessi o due bitangenti isolate, oppure una bitangente isolata si cambi in una tangente a contatti reali o viceversa. La relazione di KLEIN risulta quindi dimostrata, quando si faccia vedere, con l'autore, che esistono curve d'ordine n , prive di bitangenti isolate, aventi il massimo numero di flessi $n(n-2)$.

Aggiungeremo che la *relazione di KLEIN fra i caratteri reali di una curva d'ordine n* si estende al caso di curve dotate di singolarità; se si hanno soltanto singolarità elementari, e si designa con m la classe, con k' il numero delle cuspidi reali e con δ'' il numero dei punti isolati reali, si ha

$$n + i + 2\tau'' = m + k' + 2\delta''.$$

37. Nota sulla rappresentazione analitica dei rami reali. —

In ciò che precede i rami delle curve algebriche sono stati considerati come puro oggetto di visione geometrica; qui vogliamo accennare rapidamente ai problemi cui dà luogo la considerazione propriamente algebrica. Si tratta di rappresentare analiticamente i suddetti rami, cioè di « *risolvere nel campo reale l'equazione algebrica $f(xy) = 0$* », secondo lo stesso spirito che presiede alla ricerca delle radici reali d'una equazione $f(x) = 0$, mediante serie o frazioni continue ecc.

I problemi a cui vogliamo accennare sono, per quanto crediamo, in gran parte nuovi; in vista di tale circostanza si vorrà accordare un interesse anche alla semplice posizione di domande, cui non si rechi, nel seguito, una completa risposta.

Sia C un ramo reale della curva algebrica $f(xy) = 0$; la rappresentazione analitica del ramo C si lascia riattaccare, nel modo più naturale, alla *costruzione d'una funzione razionale $t = t(xy)$, la quale non assuma mai due volte lo stesso valore nei punti di C* (neppure in punti infinitamente vicini di C); una tale funzione verrà da noi designata col nome di *funzione normale del ramo*.

Pongasi che sia costruita una funzione normale $t = t(xy)$ di C ; allora la rappresentazione analitica del ramo C , considerato nella sua integrità, si ottiene mediante sviluppi che valgono ad esprimere per il parametro t le funzioni algebriche $x(t)$ e $y(t)$, funzioni ad un valore nel campo reale. A tale scopo giova richiamare una semplice trasformazione con-

forme del piano, la quale viene comunemente usata nello studio delle equazioni differenziali a comportamento regolare in tutto il campo reale (1).

La trasformazione conforme a cui alludiamo è quella che viene posta dalla funzione

$$1) \quad \tau = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^{\lambda t} + 1} \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{2a} \right),$$

e vale a rappresentare biunivocamente la striscia del piano $t = t_1 + it_2$, di larghezza a , che ha per mediana l'asse reale $t_2 = 0$, sul cerchio $|\tau| \leq 1$ del piano della variabile complessa τ (2).

Ora le funzioni algebriche reali $x(t)$ e $y(t)$, che sono ad un valore sull'asse reale della variabile t , e non posseggono su quest'asse punti di diramazione, si mantengono regolari entro una striscia convenientemente piccola avente come mediana l'asse medesimo, salvo — in generale — un numero finito di poli. Quando si eseguisce la trasformazione 1), le $x(t)$ e $y(t)$ si convertono in funzioni di τ che risultano regolari entro il cerchio $|\tau| < 1$, salvo un numero finito di poli.

Pertanto le $x(\tau)$ e $y(\tau)$, moltiplicate per un prodotto del tipo $(\tau - \alpha)(\tau - \beta) \dots$, diverranno regolari entro il cerchio $|\tau| \leq 1$, e però saranno svilupppabili in serie di potenze di τ , convergenti entro l'intero cerchio: si ottiene così la *rappresentazione analitica del ramo reale C, nella sua integrità*.

In ordine alla questione di « costruire funzioni normali corrispondenti ai rami reali d'una curva algebrica » ci limiteremo a trattare alcuni casi particolari.

1°) La curva data sia una cubica:

$$y^2 = x^3 - px + q.$$

Qui si ottiene già una funzione algebrica normale del ramo impari prendendo $t = y$, imperocchè le rette $y = \text{cost.}$ segano codesto ramo in un punto. Per avere una funzione normale del ramo pari (nel caso in cui questo esista), basta porre t uguale al parametro delle rette d'un fascio che abbia il suo

(1) Cfr. p. es. PAINLEVÉ « Leçons sur la théorie des équations différentielles professées à Stockholm », Parigi 1897, pag. 547.

(2) Cfr. p. es. GOURSAT « Cours d'analyse mathématique », t. 2, pag. 56.

centro O in un punto del ramo; giacchè tali rette segano il ramo anzidetto in *un* punto fuori di O .

2°) La curva data, f , avente un certo genere p , possegga il massimo numero di rami reali, cioè $p+1$ rami.

Qui si costruisce facilmente una funzione algebrica che riesce contemporaneamente normale per ciascuno dei $p+1$ rami; a tale scopo occorre invocare un teorema generale della geometria sopra una curva, che già abbiamo avuto occasione di menzionare, e che riceverà la sua dimostrazione nel Libro 5°: data una curva di genere p , esiste una funzione razionale dei punti di essa che possiede $p+1$ poli assegnati ad arbitrio, e tale funzione riceve $p+1$ volte ciascuno dei suoi valori, cioè in $p+1$ punti; i gruppi di $p+1$ punti analoghi descrivendo una involuzione g^1_{p+1} sopra la curva.

Applichiamo il teorema anzidetto, per costruire una funzione $t = t(xy)$ sopra la curva f , assumendo un polo su ciascun ramo di f . La funzione t così ottenuta riesce normale per ciascun ramo, imperocchè è facile riconoscere che ad un valore reale qualunque di t corrisponderanno sempre $p+1$ valori reali di x e y , cioè $p+1$ punti di f appartenenti a $p+1$ rami diversi. Questa affermazione si giustifica in base al principio di continuità, per cui è impossibile che un punto corrispondente a t sopra un ramo cessi di appartenervi (diventando immaginario o passando sopra un altro ramo) senza che si passi per una posizione in cui due punti omologhi a t , appartenenti a rami diversi, dovrebbero coincidere. E si avverta che questo ragionamento, ove apparentemente si suppone che i $p+1$ rami di f non abbiano punti comuni (nodi per f), si estende al caso in cui all'opposto due rami di f abbiano punti comuni, non potendosi passare da un ramo all'altro attraverso uno di tali punti.

38. Sulla storia del principio di continuità. — Nello studio della *forma* delle curve algebriche abbiám visto presentarsi talune considerazioni di *continuità*, a cui si riattacca una veduta generale, caratteristica della moderna Geometria, in contrapposto all'antica. Vale la pena di sforzarsi a comprendere storicamente questa veduta, traverso le ombre metafisiche che ne oscurano le origini; soprattutto perchè idee e dottrine che si svolgono oggi come indipendenti, trovano in essa il loro punto d'unione.

A tale scopo conviene prender le mosse un po' da lontano.

Il passaggio dal finito all'infinito o all'infinitesimo, cioè il passaggio al limite, è un'idea che si presenta fino dall'antichità, col sorgere di una matematica razionale: nella geometria greca quest'idea s'incontra colla teoria dei rapporti di grandezze incommensurabili e colla misura del cerchio e delle piramidi, cui fanno seguito le più vaste ricerche di ARCHIMEDE. Tuttavia lo spirito di rigore, che si affermò di buon'ora in quella matematica, pose ostacolo allo sviluppo dei metodi infinitesimali propriamente detti, costringendo questi modi di ragionamento entro forme precise: procedimenti di esaustione, riduzione all'assurdo, ecc.

In quest'ordine di idee, l'appello alla continuità, là dove si presenterebbe naturale, viene sempre surrogato con un ragionamento diretto; così per esempio EUCLIDE dimostra espressamente nella Prop. 32 del Libro 3° dei suoi Elementi il caso limite della proprietà generale relativa all'angolo iscritto in un arco di cerchio, che trovasi contemplata nella Prop. 27, dove sarebbe bastato cambiare una corda in una tangente. Ed è anche degno di nota che — per difetto di visione della continuità — APOLLONIO (nel terzo secolo a. C.) mancò la scoperta del fuoco della parabola, per la quale egli avrebbe dovuto far divenire infinita una certa « area applicata » da cui dipende la costruzione generale data per le altre coniche (¹). Ma, con lo sviluppo delle idee che portarono alla formazione dell'analisi infinitesimale, le nozioni di continuità appaiono in tutti i rami delle Matematiche come mezzo naturale d'estensione delle proprietà conosciute. Questo movimento d'idee, che si svolge agl'inizî della scienza moderna, prepara anche l'odierna veduta della Geometria, appartenente alla scuola di MONGE e di PONCELET, che ravvisa nelle figure trasformabili per continuità l'una nell'altra una fondamentale identità di natura, superando le anguste divisioni e classificazioni della Geometria greca. Così nei « Paralipomena ad Vitellionem » di KEPLERO (²) (1572) si trovano osservazioni sul passaggio dall'una all'altra specie di coniche e anche sul « fuoco cieco » (all'infinito) della parabola; e vi si parla di una *analogia* fra le varie coniche che può servire di guida alla

(¹) Cfr. C. TAYLOR, Cambridge, Phil. Soc., Vol. IV, pag. 14.

(²) Cfr. TAYLOR, l. c.

scoperta delle loro proprietà o meglio alla estensione delle proprietà dall'uno all'altro caso: « plurimum namque amo analogias, fidelissimos meos magistros, omnium naturae arcanorum conscios ».

Intanto, per un fenomeno naturale di dilatazione del pensiero onde le dottrine scientifiche tendono a universalizzarsi nelle Metafisiche, le grandi idee che stanno alla base dell'Analisi infinitesimale e della Meccanica assurgono a più alto significato nella costruzione del sistema filosofico di LEIBNIZ. Qui anche la *legge di continuità* appare come « principio »; il filosofo riprendendo l'antico adagio scolastico « Natura non facit saltus » vuol dargli una base razionale ⁽¹⁾: « Lorsque la différence de deux cas peut être diminuée au-dessous de toute grandeur donnée, *in datis*, ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au-dessous de toute grandeur donnée *in quaesitis*, ou dans ce qui en résulte; ou pour parler plus familièrement, lorsque les cas (ou ce qui est donné) s'approchent continuellement et se perdent enfin l'un dans l'autre, il faut que la suite des événements (ou ce qui est demandé) le fassent aussi ». E il carattere logico del principio (conforme allo spirito del razionalismo leibniziano) si scorge ancor meglio nel principio più generale cui l'autore stesso si riattacca: « Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata ».

Tacendo delle applicazioni filosofiche fattene nella « Teodicea » e nei « Nuovi saggi sull'intelletto umano », si trovano espliciti appelli alla legge di continuità nella corrispondenza matematica di LEIBNIZ con BERNOUILLI e VARIGNON ⁽²⁾; ma lo spirito di quella legge è passato soprattutto nei successori colla sistematica applicazione dell'Analisi infinitesimale.

Qui interessa notare che un riferimento diretto alla continuità s'incontra anche nel ragionamento geometrico, fino dai primi Trattati ove sono esposti i risultati di DESARGUES e PASCAL sulle coniche. Così nel Trattato di SIMSON (prop. 48 del V libro) trovasi l'estensione del Teorema di PASCAL, sull'esagono iscritto ad una conica, al caso d'un pentagono, dove un lato viene surrogato dalla tangente in un vertice.

(1) Nouvelles de la république des lettres (1687). Cfr. ed. Erdmann, XXIV, pag. 104.

(2) Math. Schriften, ed. Gérhardt, III, pag. 432 e IV, pag. 93.

Esempio significativo di passaggio al limite nei casi in cui colla particolarizzazione di certi elementi viene a cadere sia la dimostrazione sia anche il significato letterale della proprietà che si vuole estendere!

Ora l'idea della continuità si palesa in un nuova luce colla ricerca di collegare — traverso forme limiti di passaggio — le proprietà di figure variabili che, secondo l'intuizione ristretta dell'antica geometria, appaiono come casi assolutamente disgiunti: questo è appunto il significato generale del principio accolto nella scuola francese del secolo decimonono, il cui archetipo si lascia riconoscere nel già citato principio d'*analogia* di KEPLERO. E qui in particolare si può scorgere il legame della continuità collo sviluppo di concetti onde s'introducono nelle Matematiche le quantità negative e le immaginarie.

Chi consideri il carattere peculiare della dimostrazione geometrica euclidea, vi ravvisa un metodo di distinzione onde uno stesso teorema dà luogo a molteplici casi in ordine a diverse disequaglianze fra i dati, cui rispondono differenti posizioni di certi elementi caratteristici. Inoltre proprietà affatto analoghe, ove p. es. differenze di segmenti prendono il posto di somme ecc., figurano l'una accanto all'altra come teoremi distinti, senza alcun rapporto fra loro.

La trattazione analitica svela un legame fra simili casi, ponendo fra di essi un'unità formale: accade infatti che figure distinte dal punto di vista euclideo si lascino riattaccare ad una medesima formola o gruppo di formole, dove — oltrepassando certe disequaglianze — alcuni elementi mutano di segno o divengono immaginari. Che, anche in quest'ultimo caso, le formole possano essere suscettibili di qualche effettiva interpretazione geometrica (reale), ebbe a riconoscersi occasionalmente fino da MAG-LAURIN, che interpreta il prodotto delle distanze di un punto da altri due immaginari coniugati come quadrato della distanza da un punto ausiliario ⁽¹⁾.

Ma l'uso sistematico dell'immaginario in geometria, s'introduce colla scuola di MONGE. Ed a MONGE stesso è dovuta la felice intuizione che consiste nell'estendere ad una figura, in cui vengono a mancare (diventando immaginari) taluni

(1) Cfr. il trattato trad. JONQUIÈRES, pag. 197, n. 2.

elementi ausiliari, le proprietà che sono state dimostrate sotto la particolare ipotesi dell'esistenza reale di codesti elementi. Così p. es. egli dimostra la proprietà fondamentale delle rette polari rispetto ad una quadrica, riferendosi al caso in cui per la retta di cui si cerca la polare passino due piani tangenti reali ⁽¹⁾.

Del metodo che MONGE adopera senza curarsi di dimostrarlo, ed anzi senza farvi neppure alcun accenno, vuol fornire una giustificazione la teoria delle correlazioni di CARNOT ⁽²⁾ e il principio di continuità di PONCELET.

Il metodo di CARNOT consiste nel confrontare una *figura primitiva* con tutte quelle (*correlative*) che possono dedursene per variazione continua delle sue parti, senza violare la legge di reciproca dipendenza stabilita fra di esse ⁽³⁾. La teoria delle figure correlative giunge fino a porgere l'interpretazione delle quantità negative ed immaginarie, generalizzando il significato delle relazioni geometriche, in tal guisa che — dove venga a mancare il significato di una certa proprietà — si passi senz'altro dalla figura data ad una figura correlativa.

PONCELET riprende queste speculazioni ed afferma più nettamente la visione unificata che si ottiene per ciascuna famiglia o sistema di figure variabili con continuità, affrancandosi dalle disequaglianze fra i loro elementi: frutto di tale visione è il concetto dello *stato generale* o *indeterminato* per contrapposto a uno *stato particolare* del sistema ⁽⁴⁾; la quale distinzione — come PONCELET avverte — si presenta facile in ogni singolo caso.

Il carattere peculiare dell'antica concezione geometrica, la rigida disgiunzione di casi a cui dà luogo l'analisi delle figure in rapporto a varie disequaglianze fra i dati, appare in nuova luce secondo i principî di CARNOT e di PONCELET. Pei quali si riesce a superare la difficoltà attinente alla circostanza che « le relazioni segmentarie non permangono generalmente immutate quando qualcuno dei segmenti in esse contenuto diventi nullo o infinito, accadendo allora che questo segmento muti di segno ». La veduta più importante

(1) « Géométrie descriptive », Parigi 1807, art. 36-40; cfr. PONCELET. « Traité.... » t. II, pag. 75.

(2) « De la corrélation des figures de Géométrie », Parigi 1801. — « Géométrie de position », Parigi 1804.

(3) Cfr. « Géométrie de position » art. 23, 78.

(4) « Traité.... » 2^a ed. Introduction pag. XV.

a cui si perviene in tal modo è che « una relazione grafica o metrica, dimostrata per una figura i cui elementi soddisfino a certe diseguglianze, si estende senz'altro al di là di queste, purchè — nei casi metrici — si tenga conto delle possibili variazioni di segno dei segmenti che vi compariscono, e supposto sempre che gli elementi fra cui la relazione intercede mantengano la loro realtà ». Così p. es. date due rette parallele a e b , e un punto P fuori della striscia da esse compresa, la differenza delle distanze di P da a e b si mantiene costante; quando P passa entro la striscia, annullandosi una delle distanze predette, il corrispondente segmento cambia segno e la « differenza costante » si muta in una « somma costante ». Così ancora la proprietà relativa alla costanza della somma dei raggi focali nell'ellisse si converte nell'analoga proprietà relativa alla differenza dei raggi focali nell'iperbole, passando attraverso la forma limite della parabola, in cui uno dei raggi focali diviene infinito.

Diciamo ora che, come negli sviluppi di CARNOT, anche nelle idee di PONCELET sulla continuità geometrica rimane sempre qualcosa di oscuro: nella mente creatrice del geometra vi è un largo e fecondo principio che possiamo valutare dalle sue applicazioni e dai progressi che ne sono conseguiti, ma nell'espressione del principio stesso, quando si tratta di assegnare la formula generale e soprattutto di ricercarne il fondamento, l'autore non riesce a dare qualcosa di preciso, smarrendosi spesso nella Metafisica. Così nella lettera a TERQUEM del 23 Novembre 1818 ⁽¹⁾ PONCELET esprime il pensiero che la generalità dell'Algebra debba appartenere anche alla pura Geometria ed abbia radice in un assioma primitivo comune ai vari rami delle Matematiche; quest'assioma viene riconosciuto nel « *principe de permanence ou continuité indéfinie des lois mathématiques des grandeurs variables par succession insensible* ». E tale principio l'autore ritiene che non possa in alcun modo provarsi o ridursi ad altro, costituendo « une de ces vérités premières qu'il est impossible de ramener à des idées plus simples, parce-qu'elles ont leur source et leur certitude immédiates dans notre manière de voir autant que dans les faits, dans la nature des choses » ⁽²⁾.

⁽¹⁾ « Applications d'Analyse et de Géométrie », t. II, pag. 593.

⁽²⁾ « Applications... » t. II, pag. 336.

Rimane tuttavia un vantaggio peculiare del punto di vista a cui si colloca PONCELET, di dominare il più vasto orizzonte geometrico, contenendo in sè i germi di diverse dottrine che si vedono svolgersi separate nei successori. Accade infatti che — per sfuggire alle critiche cui accenneremo più avanti — la teoria geometrica dell'immaginario venga a sciogliersi da ogni legame colla continuità.

Questo indirizzo appare già nel *principio delle relazioni contingenti* dello CHASLES ⁽¹⁾, che — rinunziando almeno provvisoriamente ad una base puramente geometrica — ritiene il procedimento di MONGE sufficientemente giustificato dall'analisi algebrica. Vi sono, egli dice, due specie di parti e proprietà delle figure: parti e proprietà integranti o permanenti e all'opposto secondarie o contingenti; le relazioni permanenti comunque stabilite attraverso all'uso di parti e relazioni secondarie (cioè con la considerazioni di enti suscettibili di diventare immaginari) sono vere indipendentemente dall'esistenza di quest'ultime parti. CHASLES opina che una giustificazione a posteriori possa darsi nei singoli casi, liberando la dimostrazione delle proprietà permanenti dalla considerazione di elementi contingenti.

Del resto tali considerazioni, come quelle con cui più tardi lo CHASLES introduceva gli elementi immaginari a coppie nelle forme di prima specie, sono ben lungi dal porgerci una teoria geometrica dell'immaginario in forma rigorosa, che può dirsi sorgere soltanto con lo STAUDT (1856) ⁽²⁾. In questa dottrina non resta più alcuna traccia del principio di continuità, ma si ha soltanto una rappresentazione degli elementi immaginari mediante involuzioni della forma, a cui si associa un senso determinato.

D'altra parte l'idea della continuità si ravvisa ancora come principio vivo di scoperta in altre ricerche coltivate pure da continuatori di PONCELET, p. es. nelle ricerche di Geometria numerativa proseguite dal DE JONQUIERÈS ecc. (cfr. §§ 41 e 42). E non vi ha dubbio che ogni geometra potrà trarre da quell'idea potenti suggestioni, quasi in ogni ordine di problemi!

(1) « Aperçu Historique » 5^{me} époque, §§ 12-17, pag. 200 e seg.; Cfr. note XXV e XXVI.

(2) Cfr. L. 2^o, § 29.

39. Il principio di Poncelet esaminato nelle sue applicazioni. — Per chiarire il contenuto del principio di continuità secondo PONCELET, giova soprattutto esaminare l'uso fattone dall'autore, uso che ne costituisce una giustificazione storica e pragmatistica.

Un bell'esempio dell'utilità che può fornire il passaggio dal reale all'immaginario nelle dottrine geometriche, è offerto dalla teoria dei fasci di coniche, le cui proprietà vengono ridotte a quelle dei fasci di cerchi: gli sviluppi un po' lunghi e minuziosi di PONCELET sulle corde ideali delle coniche tendono insomma a questo risultato che, fra l'altro, mette in nuova luce il teorema di DESARGUES sul quadrangolo iscritto in una conica ⁽¹⁾.

Per vedere con quale facilità si può impiegare il passaggio dal reale all'immaginario in quest'ordine di questioni, giova considerare più da vicino la proprietà della corda ideale comune, o asse radicale ⁽²⁾, di due cerchi che non si segano.

Dati due cerchi, si consideri la retta a congiungente i loro centri e siano A, A' e B, B' le sue intersezioni con le due curve; allora esiste su a un punto O , ben determinato, per cui

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB';$$

la perpendicolare ad a in O , qualora incontri uno dei due cerchi li incontra entrambi nei medesimi punti comuni M e N , e in tal caso le tangenti ai due cerchi condotte da un punto esterno P della retta MN , riescono uguali perchè il loro quadrato uguaglia il prodotto $PM \cdot PN$. Ora, se i due cerchi non si segano, i punti M e N riescono immaginari, ma, in forza della continuità, permane sempre l'uguaglianza delle tangenti condotte ai due cerchi da un punto della retta perpendicolare in O alla a ⁽³⁾.

Ad illuminare altri aspetti del principio di continuità di PONCELET, richiameremo ora la sua osservazione che i punti all'infinito del piano debbono costituire una *retta all'infinito*, la quale veduta illumina il concetto delle *proprietà asintotiche*

(1) « *Traité...* » Sezione I, Cap. II e III, Cfr. ENRIQUES « *G. Proiettiva* », § 65, osservazione 3^a.

(2) Cfr. PONCELET « *Traité...* » nn. 69-70.

(3) Denominazione di GAULTIER DE TOURS. *Journal de l'École Polyt.*, t. 15, (1812).

delle curve; a quest'ordine di idee sono da riattaccare le considerazioni del nostro L. 1°, §§ 1, 9, ricordando che PONCELET stesso avverte come un cerchio di raggio infinito degeneri in una retta propria e nella retta all'infinito ⁽¹⁾.

Il *metodo delle proiezioni*, cioè infine l'intera Geometria proiettiva secondo il concetto di PONCELET, appare una grandiosa applicazione del principio di continuità. Infatti quel metodo consiste nel dedurre le proprietà proiettive delle figure più generali da speciali casi limiti in cui alcuni elementi vanno all'infinito, cioè dai casi particolari metrici.

D'altra parte la considerazione dei punti che vanno a *distanza infinita* e di quelli che divengono *infinitamente vicini*, permette a PONCELET di analizzare le circostanze relative alla scomparsa di talune fra le intersezioni di una curva con una retta, avvertendo che queste intersezioni possono divenire immaginarie soltanto a coppie, attraverso un contatto ⁽²⁾. Più oltre egli si spinge ad analizzare la produzione delle singolarità delle curve ⁽³⁾, e di qui è condotto più tardi a riconoscere come applicazione del principio di continuità la relazione che esprime la classe di una curva per mezzo dei caratteri della curva luogo ⁽⁴⁾. Questa relazione si può dedurre come segue.

Anzitutto se una curva

$$f(xy) = f_2(xy) + \dots + f_n(xy) = 0$$

possiede un punto doppio nell'origine O , la retta OP , che congiunge O ad un qualsiasi punto P del piano, assorbe 2 fra le tangenti condotte da P ; infatti per una piccola variazione della curva la conica approssimante degenerare $f_2(xy) = 0$ si muta in una ellisse o in una iperbole

$$f_2(xy) + k = 0,$$

la quale possiede due tangenti per P vicine alla retta OP ;

⁽¹⁾ Cfr. « *Traité...* » pag. 48, 49.

⁽²⁾ « *Applications...* », t. II, pag. 350.

⁽³⁾ *Ibidem*, nota a pag. 353.

⁽⁴⁾ *Journal für Math.*, Bd. 4 (1829); Cfr. « *Traité...* », II ed., t. II, pag. 67 e seg. - *Journal für Math.*, Bd. 8, (1832); Cfr. « *Traité...* », II ed., t. II, pag. 216, nn. 233-237.

nel caso del punto isolato occorre determinare il segno di k in guisa da assicurare la realtà dell'ellisse infinitesima che qui si presenta.

Ora il numero, m , delle tangenti condotte da un punto a una curva generale d'ordine n , si lascia determinare facendo spezzare la curva in due o più altre. Per esempio la riduzione ad n rette dà subito

$$m = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

PONCELET nota anche che, mentre un nodo abbassa la classe m di 2, una cuspide ordinaria la abbassa di 3, giacchè in tal caso un'altra fra le tangenti condotte da P viene a sovrapporsi a PO (cfr. l'osservazione del L. 1°, § 11, vol. I, pag. 78); si ottiene così la relazione

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3k,$$

o similmente la duale

$$n = m(m-1) - 2\tau - 3i \quad (1).$$

Importa notare che questo modo di deduzione si estende alla relazione che esprime τ per n , m , δ , k , la quale può essere assunta come terza formula di PLÜCKER. All'uopo vale il seguente ragionamento accennato da PLÜCKER (2). Se una curva acquista un punto doppio O , il numero delle sue tangenti doppie diminuisce in corrispondenza alle tangenti altrove alla curva condotte per O , e ciascuna di codeste tangenti conta generalmente per 2, come appare particolarmente intuitivo nel caso che O sia un punto isolato (ellisse infinitesima); nel caso di una cuspide ordinaria ogni tangente viene a contare per 3. Ora il numero delle tangenti doppie di una curva generale d'ordine n si può calcolare spezzando la curva in coniche oppure in $\frac{n-3}{2}$ coniche e una cubica se n è dispari: giova infatti evitare lo spezzamento in rette che dà luogo a qualche difficoltà. Tenendo conto che la congiungente due punti doppi assorbe quattro tangenti doppie,

(1) Cfr. § 17; vedi anche L. 1°, § 21.

(2) « Theorie der algebraischen Curven », II parte, § 4, n. 65, pag. 209.

si trova, per la curva generale d'ordine n ,

$$\tau = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) \quad (4).$$

Aggiungeremo che una relazione equivalente alla precedente (terza formula di PLÜCKER) può anche ottenersi con analogo ragionamento, valutando la diminuzione del numero dei flessi portata da un punto doppio. Abbiamo già veduto (§ 16) come l'uso della cubica approssimante conduca a riconoscere che codesta diminuzione vale 6 per il nodo e 8 per la cuspidè ordinaria; si ha già qui un'applicazione del principio di continuità. Ora è facile dedurne il numero dei flessi d'una curva generale d'ordine n ; basta infatti fare spezzare la curva in coniche e cubiche; si trova così la nota formula:

$$i = n(3n - 6).$$

Oltre a questi modi di deduzione delle formule di PLÜCKER basati sulla continuità, se ne possono indicare altri, e in ispecie una interessante dimostrazione di DE JONQUIÈRES, che incontreremo nel § 42.

40. Analisi critica del principio di continuità di Poncelet.

— Nel rapporto sopra una memoria di PONCELET relativa alle proprietà proiettive delle coniche, presentato all'Accademia di Parigi nella seduta del 5 giugno 1820, il relatore CAUCHY così giudica il valore del principio di continuità:

« Ce principe n'est, à proprement parler, qu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis, d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus. Étant appliqué aux courbes du second degré, il a conduit l'auteur à des résultats exacts. Néanmoins, nous pensons qu'il ne saurait être admis généralement et appliqué indistinctement à toutes sortes de questions en Géométrie, ni même en Analyse. En lui accordant trop de confiance on pourrait tomber quelques fois dans des erreurs manifestes. On sait, par exemple, que dans la détermination des intégrales définies, et par suite dans l'évaluation des longueurs, des surfaces et des volumes, on rencontre un grand

(4) Cfr. § 17.

nombre de formules qui ne sont vraies qu'autant que les valeurs des quantités qu'elles renferment restent comprises entre certaines limites ».

A vero dire gli errori cui allude CAUCHY sono soltanto possibili fuori dell'ipotesi della algebricità che deve ritenersi un sottinteso in questo ordine di ricerche. Tuttavia appaiono giuste le osservazioni di GERGONNE espresse in una nota, a pag. 73 del tomo 11 dei suoi « Annales », che accompagna la pubblicazione del rapporto di CAUCHY: « Il faut employer le principe de M. PONCELET, ainsi que le tour de démonstration introduit par MONGE, à peu près comme on employait le calcul différentiel lorsqu'on n'en voyait pas bien encore la métaphysique, c'est-à-dire uniquement comme instrument de découverte; mais ce n'en seront pas moins des instruments très précieux, car le plus souvent, en mathématiques, découvrir est tout; ce ne sont pas d'ordinaire les démonstrations qui embarrassent beaucoup ».

Più tardi (1827) lo stesso GERGONNE in una nota a pag. 135 del tomo 18 degli « Annales » così si espresse: « je persiste à penser que M. PONCELET a gravement compromis ses doctrines en mêlant au *classique* que tout le monde admet, le *romantique* que, pour ma part, je suis fort loin de repousser, mais sur lequel enfin on discute encore... ».

Oggi, dopo un secolo quasi di lavoro e di critica, è lecito chiedere un giudizio più preciso intorno al contenuto matematico e alla significazione rigorosa del principio di PONCELET; per il che giova portarsi sopra un terreno estraneo alle preoccupazioni puristiche del suo autore.

Esaminiamo partitamente i diversi principî che, secondo quanto risulta dallo studio storico fatto innanzi, si possono riguardare contenuti nella veduta generale della continuità.

1) *Principio del passaggio al limite*: se x_1, x_2, \dots, x_m sono elementi di una figura variabile, dipendenti algebricamente da più parametri: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, ogni relazione algebrica

$$\varphi(\lambda, x) = 0,$$

che viene verificata nell'intorno di un gruppo di valori (λ) viene verificata anche al limite (per $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$).

Questo principio, restando nel campo algebrico, non dà luogo ad alcuna eccezione; occorre soltanto notare che la

relazione $\varphi = 0$ nel passaggio al limite può svanire identicamente, ed allora la proprietà da essa espressa, fuori del limite, appare perduta in codesto passaggio. In simili casi conviene cercare un'applicazione più espressiva della legge di continuità, operando sulla φ fuori del limite (per esempio con divisione per un λ che si annulla, ecc.) in guisa da ottenere al limite una vera equazione fra le x . Come esempio relativo a tali circostanze basta richiamare l'osservazione che quando una conica luogo si riduce ad una retta contata due volte, la corrispondente conica involuppo, pensata come l'insieme delle rette che hanno due intersezioni riunite con la curva, diviene indeterminata; invece, se la conica variabile passa al limite in un modo determinato, essa si riduce ad una retta con due punti di diramazione assegnati, e il corrispondente involuppo tende alla coppia dei due fasci che hanno per centro codesti punti. Così la retta doppia

$$y^2 = 0,$$

concepita come limite della conica

$$y^2 = k(x - a)(x - b),$$

per $k = 0$, deve ritenersi avere come punti di diramazione a e b .

2) *Principio di estensione* delle relazioni, al di là di date disequaglianze: la relazione algebrica

$$\varphi(\lambda, x) = 0$$

supponendosi dimostrata per i valori di λ che soddisfano a certe disequaglianze, si estende senz'altro a tutti i valori di λ .

La legittimità dell'estensione risulta senz'altro dalla proprietà fondamentale per un'equazione algebrica di grado n di divenire un'identità quando possessa più di n radici, o — in un ordine di idee più elevato — dalla proprietà fondamentale delle funzioni analitiche di essere determinate da un loro elemento. Ma occorre tenere presente un'avvertenza essenziale: se le x sono funzioni razionali (monodrome) dei parametri λ , l'estensione non dà luogo ad alcuna difficoltà; se invece le x sono funzioni algebriche a più valori, la relazione

$$\varphi(\lambda, x) = 0$$

sussisterà in generale solo quando si associno convenientemente i rami di x_1, x_2, \dots, x_m , e precisamente, se la relazione è data agli inizi per certi valori delle x_i , saranno da associare fra loro i rispettivi prolungamenti analitici, ottenuti per un medesimo cammino di variazione delle λ .

Il caso più semplice che vale ad illuminare l'osservazione precedente, si riferisce alle relazioni che posson sussistere fra i segmenti di una figura; il segmento concepito come funzione delle coordinate dei suoi estremi è espresso da una radice quadrata che cambia di segno quando il radicando diventa nullo o infinito (del prim'ordine).

3) *La legittimità del calcolo sugli immaginari* consegue in particolare dal principio precedente, almeno in quanto si abbiano in vista le relazioni reali di *uguaglianza* cui si perviene attraverso tali calcoli. Dal punto di vista geometrico, ciò equivale a giustificare l'introduzione delle *coppie di elementi immaginari coniugati*. L'uso più vasto degli elementi immaginari, come oggetto proprio della conoscenza geometrica, riceve la sua piena giustificazione mercè lo sviluppo dell'algebra dei numeri complessi e della teoria delle funzioni, sicchè può ben dirsi che CAUCHY stesso — che abbiám visto critico severo del principio di continuità di PONCELET — ha contribuito più di ogni altro a darne la vera giustificazione. Per chi si ponga invece dal punto di vista della geometria pura giova qui richiamare gli sviluppi di STAUDT che abbiamo altrove citati (Cfr. L. 2°, § 29). Però occorre aggiungere che, ove l'edificio della costruzione scientifica venga elevato sopra una base geometrica anzichè algebrica, accade che i postulati relativi essenzialmente all'intuizione dello spazio reale, per es. alla nozione dei due versi di una retta ecc., conducono a proprietà espresse da disequaglianze anzichè da *eguaglianze*, per le quali più non vale il principio di estensione.

4) *Principio di induzione dal caso limite al caso generale*: poichè le proprietà algebriche delle figure variabili si conservano passando dallo stato generale a uno stato limite, la conoscenza relativa a quest'ultimo caso permette di risalire induttivamente al caso generale. Così la conoscenza della forma di una curva dotata di punti doppi permette di scoprire talune proprietà di forma delle curve prossime a quelle (§ 34). Così ancora la determinazione di un numero (grado d'un'equazione) dipendente dall'elemento variabile di un sistema, si lascia ricon-

durre — con le dovute cautele — alla determinazione analoga per enti particolari del sistema, come abbiamo veduto prima nella dimostrazione delle formole di PONCELET e PLÜCKER.

Ora la giustificazione del principio che qui si invoca, richiede uno speciale esame dell'ordine di problemi in cui il principio stesso assume un senso determinato. Noi esamineremo in particolare le applicazioni che concernono la *geometria numerativa*, e ne analizzeremo poi criticamente il principio.

41. **Sviluppo della geometria numerativa.** — Il principio di continuità di PONCELET offre la base di un metodo atto a risolvere le questioni numerative, dove si tratta di determinare il *numero* delle soluzioni di un problema geometrico determinato, senza scrivere effettivamente l'equazione algebrica, o la resultante del sistema di equazioni, da cui esso dipende; abbiamo veduto che in questo senso PONCELET stesso si valse della continuità, facendone applicazioni importanti. Tuttavia non si può tacere che, come nella formulazione generale del principio, anche in queste sue applicazioni il pensiero di PONCELET non si manifesta con la chiarezza che noi abbiamo cercato di recare nella sua esposizione; s'incontrano qui oscurità ed incertezze, frutto fors'anche di dubbi sull'accoglienza che altri avrebbe fatto a tal genere di ragionamenti, onde riesce difficile al lettore di cogliere il vero spirito e il valore del metodo. Pertanto non dobbiamo meravigliarci se fra i continuatori dell'opera di PONCELET, che si volsero più specialmente alle questioni numerative, l'uso del principio di continuità, come « principio di conservazione del numero », appare dapprima timidamente, e solo a poco a poco diviene un istrumento sistematico della ricerca.

I geometri, cui qui accenniamo come fondatori della geometria numerativa, dopo PONCELET, sono STEINER, DE JONQUIÈRES, CREMONA, CHASLES, CAYLEY, ZEUTHEN, fino a SCHUBERT al cui « *Kalkül der abzählenden Geometrie* » (1879) si riattaccano alcune fra le più moderne ricerche ⁽¹⁾. E i

(1) Una esposizione generale di queste ricerche trovasi nel recente bellissimo trattato di ZEUTHEN: « *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* » Teubner, Lipsia 1914.

problemi fondamentali intorno a cui si svolge codesto movimento scientifico si lasciano riattaccare ai tre temi seguenti:

1) teoria delle caratteristiche dei sistemi di coniche o di curve;

2) caratteri delle curve gobbe, in particolare secanti e corde comuni a più curve, trisecanti e quadrisecanti di una curva;

3) problema degli spazi lineari secanti, nella geometria degli iperspazi.

Appunto a proposito di problemi generali della teoria delle caratteristiche, il DE JONQUIÈRES, in una memoria del 1866 ⁽¹⁾, enuncia espressamente il principio di cui ha già fatto largo uso che « si possono concludere legittimamente le proprietà di una curva generale di grado m da quelle di un'altra curva particolare di ugual grado, purchè si tenga esatto conto della influenza esercitata dalle particolarità di questa sulla questione proposta ». Aggiunge che ciò segue in fine dalla legge di continuità, a cui sono sottoposte le funzioni algebriche, e viene a dire che il numero delle soluzioni di un problema resta invariabile per qualsiasi particolarizzazione della figura, purchè si tenga il debito conto delle soluzioni multiple. Nota anche che vi sono casi più imbarazzanti d'indeterminazione, quando il numero delle soluzioni diventa infinito, avvertendo che tali particolarizzazioni devono essere evitate per il successo del metodo. Il DE JONQUIÈRES invoca in appoggio del « principio » così formulato l'autorità di PONCELET e l'esempio di CHASLES, CAYLEY, CREMONA, ZEUTHEN, che in vario modo hanno adoperato quest'ordine di considerazioni.

Come si vede, il DE JONQUIÈRES ha esplicitamente avvertito le due circostanze notevoli che occorre tener presenti nelle applicazioni della continuità alla geometria numerativa, cioè il calcolo delle molteplicità delle soluzioni e l'esclusione dei casi in cui il numero che si cerca divenga infinito; circostanze a cui si collegano difficoltà che esamineremo in concreto a proposito dei problemi fondamentali sopra indicati.

Poco dopo la citata memoria di DE JONQUIÈRES, in una nota dello SCHUBERT del 1874 ⁽²⁾ s'incontra la seguente for-

(1) Journal für Math., Bd. 66, pag. 289. Cfr. in specie pag. 312.

(2) Göttingen Nachrichten, 1874, pag. 267.

mulazione del principio, che — dallo SCHUBERT appunto — riceve il nome di *principio della conservazione del numero* (Princip der Erhaltung der Anzahl):

Abbiassi una varietà (algebraica) \sim^k di enti Γ , ai quali si imponga una condizione (algebraica) di dimensione k (equivalente a k condizioni semplici), che sia definita da assegnate relazioni fra l'ente Γ e un altro ente Γ' , che si suppone definito insieme a Γ . Allora il numero (finito) degli enti Γ che soddisfano alla data condizione si conserva invariato per qualsiasi particolarizzazione dell'ente Γ' , per la quale il numero stesso non divenga infinito.

L'una o l'altra di queste formulazioni, se pure vi si riscontri qualcosa di indeterminato, lasciano chiaramente intendere il significato del principio che viene posto in opera nelle ricerche numerative e che vogliamo appunto illustrare esaminandone l'uso; rimandiamo a più oltre le osservazioni critiche e le giustificazioni cui il principio stesso ha dato luogo negli sviluppi più recenti.

42. Appunti sulla teoria delle caratteristiche. — Già nel § 25 del libro secondo abbiamo dato qualche notizia sui problemi della teoria delle caratteristiche, in cui si tratta di determinare il numero (finito) delle coniche, o curve, soddisfacenti a certe condizioni, e in particolare alle condizioni di passare per dati punti e di avere contatti d'ordine assegnato con curve date. Ivi abbiamo espressamente rilevato la difficoltà che si presenta in ordine alle soluzioni improprie del problema (coniche degeneri ecc.); e su questo argomento non abbiamo qui nulla da aggiungere. Ma vogliamo riprendere la considerazione di tali questioni dal punto di vista della conservazione del numero, che pure fu ivi fugacemente accennato.

Prendasi come esempio il problema elementare di contare le curve di una serie $\sim^1 \} C \{$ che toccano una curva K_n , d'ordine n (incluse nel numero che si cerca anche le soluzioni improprie).

Con DE JONQUIÈRES (1861) ⁽¹⁾ possiamo procedere come segue. Si sostituisca la curva data K_n con una curva (razionale) avente il massimo numero di punti doppi compatibile con

(1) Journal de Math., serie II, t. 6, pag. 113.

la sua irriducibilità, cioè $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi. Allora, designando con μ l'indice della serie $\}C\{$, cioè il numero delle C passanti per un punto generico, si ha che le C segano sopra K_n una serie parimenti d'indice μ : i punti di contatto delle C , tangenti a K_n , si ottengono quindi come punti uniti di una corrispondenza sopra la curva, e il loro numero si determina in base al principio di corrispondenza, trattandosi di una curva razionale.

Per passare dal caso della K_n razionale al caso della K_n senza punti doppi (o con un diverso numero di punti doppi), occorre riconoscere quante C , tangenti a K_n , vengano assorbite da una C passante per un punto doppio di K_n . A tale scopo DE JONQUIÈRES fa spezzare opportunamente la curva K_n ; per esempio, per $n=4$, si sostituirà alla curva K_4 con tre punti doppi la K_4 con 4 punti doppi composta di due coniche, le quali sono ancora curve razionali: in questo modo si trova che il quarto punto doppio diminuisce di 2μ il numero delle C tangenti a K_4 , sicchè si conclude che ogni conica passante per un punto doppio di K_4 (o in generale di K_n) conta per due curve tangenti.

Nel citato § 25 del L. 2° delle nostre Lezioni (pag. 298 del Vol. I), questa influenza di un punto doppio sul numero delle coniche (o curve) tangenti è stata giustificata rapidamente con l'accenno al fatto che il fascio di rette col centro nel punto doppio si stacca due volte dall'inviluppo della curva K_n . Ove si approfondisca questa giustificazione si fa capo ancora a considerazioni di continuità: per esempio, facendo variare la serie d'indice μ delle coniche C , si può immaginare che essa diventi un involuppo di rette, Σ_μ , di classe μ , aggiungendosi alle rette variabili di questo una retta fissa; in tal guisa appare che le μ coniche C passanti per un punto doppio, O , di C_n contano ciascuna per due coniche tangenti, così come una retta (tangente impropria) che passi per O conta due volte nell'inviluppo di K_n .

Nella citata memoria di DE JONQUIÈRES del 1861, la formula che dà il numero delle curve di una serie $\}C\{$ tangenti ad una K_n riceve alcune interessanti applicazioni, cui vogliamo qui brevemente accennare.

Anzitutto un caso particolare di quella formula permette

di determinare il numero delle curve C , di un fascio, che toccano una K_n generale: designando con m l'ordine delle C si trovano precisamente

$$2mn + (n - 1)(n - 2) - 2$$

curve C tangenti a K_n . Ora il DE JONQUIÈRES deduce da questa formula il numero dei flessi di una curva generale d'ordine n , e arriva poi, con semplici considerazioni di continuità, a valutare il numero delle tangenti doppie, porgendo così una elegante *dimostrazione delle formule di PLÜCKER* (che egli accenna potersi estendere al caso di K_n dotate di singolarità).

Per numerare i flessi di una K_n generale, DE JONQUIÈRES considera le curve polari dei punti di una retta r ; queste curve C_{n-1} formano un fascio che contiene

$$2n(n - 1) + (n - 1)(n - 2) - 2 = (n - 1)(3n - 2) - 2 = 3n^2 - 5n$$

C_{n-1} tangenti a K_n . Fra queste C_{n-1} tangenti vi sono le n curve polari delle intersezioni di r con K_n ; all'infuori di queste restano

$$3n^2 - 6n = 3n(n - 2)$$

C_{n-1} tangenti nei flessi della K_n ; infatti una retta (non bitangente) che conta per due fra le tangenti a K_n condotte per un punto O , deve avere un contatto tripunto con la K_n , o essere tangente nel punto O .

Per numerare le tangenti doppie della K_n il DE JONQUIÈRES insegna diversi procedimenti. Riferiremo soltanto il seguente che costituisce un antecedente storico immediato ⁽¹⁾ della dimostrazione data da BECK delle formule di PLÜCKER. (Cfr. § 28 I. 2°, Vol. I, pag. 331).

Facciamo subire alla curva K_n una traslazione (o un' omologia) infinitesima, che porterà K_n in una K_n' . Le due curve K_n e K_n' hanno a comune $n^2(n - 1)^2$ tangenti, essendo questo

(1) BECK non sembra averne avuto conoscenza e — nella sua memoria del vol. 14 dei Math. Annalen — cita soltanto il lavoro del 1854 di STEINER che, nella ricerca delle normali ad una curva K_n passanti per un punto O , fa subire a K_n una rotazione infinitesima attorno ad O (cfr. Journal für Math. Bd. 44, pag. 333).

numero il prodotto della loro classe; ora queste tangenti si riducono alle

- 1) $3n(n-2)$ tangenti di flesso di K_n contate ciascuna tre volte,
- 2) alle n^2 tangenti nei punti comuni a K_n e K_n' da contarsi ciascuna una volta
- 3) e finalmente a

$$\frac{n^2(n-1)^2 - 9n(n-2) - n^2}{2} = \frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}$$

tangenti doppie di K_n , da contarsi ciascuna due volte.

Così si determina appunto il numero delle tangenti doppie della curva K_n , ma occorre invero giustificare le affermazioni contenute nel ragionamento precedente, che non si trova approfondito dal DE JONQUIÈRES. A tale scopo osserveremo che:

1) Una tangente di flesso della K_n risponde per dualità ad una cuspide, la quale sappiamo appunto assorbire tre intersezioni di una curva con la curva infinitamente vicina (Libro 2°, § 28; Vol. I, pag. 328).

2) Quando si eseguisce sopra la curva K_n una omologia infinitesima di centro O e di asse o , avviene che rimangono ferme, e però sono tangenti comuni a K_n e K_n' , le $n(n-1)$ tangenti condotte da O a K_n , che corrispondono alle $n(n-1)$ intersezioni di K_n e K_n' fuori dell'asse di omologia. Ora si vede che anche le n tangenti nei punti comuni a K_n e all'asse o debbono ritenersi comuni alle due curve omologiche; ciò corrisponde per dualità al fatto che i punti di contatto delle tangenti condotte da O sono comuni alle due curve.

3) È infine evidente come una tangente doppia a K_n , figuri due volte, in relazione ai due punti di contatto, fra le tangenti comuni a K_n e K_n' .

Non entra fra gli scopi di questo paragrafo dare un più ampio ragguaglio dei risultati ottenuti nella teoria delle caratteristiche; basti dire che in ispecie nella memoria del DE JONQUIÈRES del 1866 è contenuta una formola generalissima che costituisce un antecedente storico di quelle con cui SEGRE e CASTELNUOVO (nel 1889) hanno risoluto essenziali problemi numerativi concernenti le serie lineari g_n^r sopra una

curva (cfr. L. 5°). Qui vogliamo piuttosto indicare l'uso che può farsi in tali problemi delle *equazioni funzionali* di CAYLEY. A tale uopo ci varremo del seguente esempio (¹).

Si tratti di determinare il numero delle *coniche* C che hanno un *contatto sestipunto* con una curva K_n d'ordine n , affatto generale. Questo numero essendo designato con $f(n)$, potremo esprimere il numero $f(n+3)$ considerando una curva composta d'una K_n e d'una cubica K_3 :

$$f(n+3) = f(n) + f(3) + 3an,$$

dove si ammette che ciascuno dei $3n$ punti doppi di K_{n+3} , comuni a K_n e a K_3 , assorba a soluzioni del problema.

Ora ricordiamo (cfr. L. 2°, § 22; Vol. I, pag. 277) che

$$f(3) = 27$$

per la cubica K_3 generale, ottenendosi i punti sestatici come intersezioni di K_3 colle polari armoniche dei 9 flessi; invece, proprio in forza di tale costruzione, per una cubica dotata di punto doppio il numero delle coniche con contatto sestipunto si riduce a 3. Segue di qui:

$$a = 24,$$

$$f(n+3) = f(n) + 27 + 3 \cdot 24n.$$

Questa relazione costituisce un'equazione funzionale che, integrata, fa conoscere f_n .

A tal fine deriviamo due volte l'equazione precedente; si avrà

$$f'(n+3) = f'(n) + 3 \cdot 24$$

$$f''(n+3) = f''(n) = \text{cost.}$$

Quindi si deduce

$$f(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma,$$

e resta soltanto da determinare le costanti α , β , γ ; il che si ottiene con *metodo sperimentale*, cioè ricorrendo ad esempi particolari.

(¹) Cfr. CAYLEY, Philos. Transactions. Vol. 158, parte I, pag. 75, (1878).

Per esempio possiamo determinare le suddette costanti ricorrendo a cubiche e curve composte di cubiche:

$$f(3) = 9z + 3\beta + \gamma = 27$$

$$f(6) = 36z + 6\beta + \gamma = 2 \cdot 27 + 9 \cdot 24$$

$$f(9) = 81z + 9\beta + \gamma = 3 \cdot 27 + 27 \cdot 24.$$

Di qui, eliminando z , segue

$$6\beta + 3\gamma = 2 \cdot 27 - 9 \cdot 24$$

$$18\beta + 8\gamma = 6 \cdot 27 - 27 \cdot 24,$$

e però

$$\gamma = 0, \quad \beta = -27$$

$$z = 12,$$

$$f(n) = 12n^2 - 27n.$$

E per una curva dotata di δ nodi:

$$f(n, \delta) = 12n^2 - 27n - 24\delta,$$

che è la formula di CAYLEY.

43. *Curve gobbe: trisecanti e quadrisecanti.* — Dei metodi della geometria numerativa offrono esempi luminosi i problemi in cui si tratta di determinare il grado della rigata costituita dalle rette trisecanti una curva gobba e il numero delle sue quadrisecanti.

Notiamo anzitutto che una *curva gobba irriducibile*, C , possiede una semplice infinità di trisecanti, costituenti una rigata di grado > 0 , oppure non possiede alcuna trisecante (rigata di grado zero); *non può possedere* ∞^2 *trisecanti*, costituenti una *congruenza*, poichè questa ipotesi porterebbe che tutte le corde della C sieno trisecanti, il che è impossibile. Presi infatti su C due punti qualunque P e Q , l'ipotesi fatta porta che la retta PQ incontri C in un punto R ; segue da ciò che le tangenti in P , Q debbono incontrarsi, giacchè la congiungente di R col punto di C infinitamente vicino a P deve incontrare C nel punto infinitamente vicino a Q . Ora la proprietà che le tangenti d'una curva a due a due s'incontrino trae come conseguenza che la curva stessa sia piana.

Quanto alle quadrisecanti d'una curva gobba, esse sono in generale in numero finito, trattandosi d'una ulteriore condizione imposta alle trisecanti; ma non si può escludere il caso che esistano infinite quadrisecanti, la cui rigata deve essere ritenuta come una rigata di trisecanti contata quattro volte.

I problemi di determinare il grado della rigata delle trisecanti di una curva gobba, e il numero delle sue quadrisecanti (supposto finito), si riattaccano a CAYLEY (1863), che adoperò per la loro risoluzione il metodo delle *equazioni funzionali* (cfr. § 42) movendo dal presupposto che i numeri da determinare dipendano soltanto dall'ordine e dal numero dei punti doppi apparenti (o dal genere) della curva, che si assume priva di punti doppi effettivi.

Se si uniscono due curve gobbe C , C^* degli ordini n , n^* , possedenti rispettivamente d , d^* punti doppi apparenti, si ottiene una curva $C + C^*$ d'ordine $n + n^*$ con $nn^* + d + d^*$ punti doppi apparenti, e:

1) la rigata delle trisecanti di $C + C^*$ risulta dalla somma delle analoghe rigate relative alle due componenti, più la rigata delle corde di C incidenti a C^* e la rigata delle corde di C^* incidenti a C ;

2) le quadrisecanti di $C + C^*$ sono le quadrisecanti di C e di C^* , più le trisecanti di una delle due curve incidenti all'altra, più le corde comuni di C e C^* .

Da ciò si ricavano le equazioni funzionali capaci di determinare il grado $f(n, d)$ della rigata delle trisecanti di C , e il numero $\varphi(n, d)$ delle sue quadrisecanti.

Tuttavia, per giustificare il presupposto di tale determinazione, si è condotti a ricercare se in ogni famiglia di curve gobbe di un dato ordine e con un dato numero di punti doppi, dipendenti da parametri variabili in modo continuo, si trovino curve opportunamente degeneri. E si riconosce allora che lo spezzamento d'una curva, generalmente irreducibile, non può mai condurre a curve che non sieno tra loro *connesse*, cioè che non abbiano punti comuni. Diguisachè il metodo di CAYLEY deve modificarsi prendendo in considerazione curve composte di parti con punti comuni (PICQUET 1873 ⁽¹⁾).

⁽¹⁾ Cfr., per le citazioni ulteriori, il Cap. XXXI di BERZOLARI nel « Pascal's Repertorium » vol. II, pag. 905.

D'altra parte, fino dal 1869, ZEUTHEN ⁽¹⁾ è riuscito a determinare i numeri relativi alle trisecanti e quadrisecanti delle curve gobbe con una pura applicazione del principio di corrispondenza, che riesce esente dalle delicate difficoltà cui dà origine il metodo delle degenerazioni.

Finalmente i problemi stessi si lasciano trattare anche col metodo che DE JONQUIÈRES e BECK hanno adoperato per stabilire le formule di PLÜCKER (cfr. § 42), considerando una curva gobba come limite di più curve che si avvicinano indefinitamente ⁽²⁾.

Noi limiteremo i nostri sviluppi ad un cenno del primo e del terzo metodo.

Applicheremo il metodo di degenerazione alle curve razionali (senza punti doppi effettivi) cioè alle curve (irriducibili), d'ordine n , col massimo numero di punti doppi apparenti:

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Una curva, C_n , siffatta è di genere zero essendo tale una sua proiezione piana, e perciò è una curva razionale, cioè ammette una rappresentazione parametrica dove, supposti gli assi orientati in modo generico, le x , y , z si esprimono come funzioni razionali fratte, di grado n , di un parametro t , col medesimo denominatore. Infatti la curva $\varphi(xy) = 0$, proiezione ortogonale della C_n dal punto all'infinito dell'asse z sul piano $z = 0$, ammetterà (L. 2°, § 23, pag. 282) una rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_4(t)}, \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_4(t)}$$

dove φ_1 , φ_2 , φ_4 possono ritenersi polinomi di un medesimo grado n ; e, appunto perchè si sono supposti gli assi orientati in modo generico, la terza coordinata z dei punti di C_n risulterà funzione univoca, e perciò razionale, del parametro t che determina il corrispondente punto (xy) di φ . Si avrà dunque:

$$z = \frac{\varphi_3(t)}{\varphi_4(t)},$$

(1) Annali di Mat., serie 2, t. 3, pag. 173.

(2) Cfr. BECK, Naturf. Gesellschaft in Zurich Jahrgang 52, 1907.

presentandosi in questa frazione lo stesso denominatore φ_1 che nelle precedenti, giacchè codesto denominatore deve essere uguale a φ_1 , o a un suo divisore, essendo n il numero delle intersezioni della C_n con un piano qualunque $ax + by + cz + d = 0$, e non può presentarsi un divisore di φ_1 se non, eventualmente, per posizioni particolari dell'asse z .

Pertanto scriveremo la rappresentazione parametrica della curva C_n sotto la forma seguente:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} t + \alpha_n}{\delta_0 t^n + \delta_1 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} t + \delta_n}, \\ y = \frac{\beta_0 t^n + \beta_1 t^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} t + \beta_n}{\delta_0 t^n + \delta_1 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} t + \delta_n}, \\ z = \frac{\gamma_0 t^n + \gamma_1 t^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} t + \gamma_n}{\delta_0 t^n + \delta_1 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1} t + \delta_n}. \end{array} \right.$$

Ora vediamo che, nella famiglia delle curve C_n , si trovano — in corrispondenza a valori particolari dei parametri — curve C_n degeneri in una curva razionale C_{n-1} e in una retta r , aventi un punto comune. Infatti basta porre

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n = \beta_{n-1} = \beta_n = \gamma_n = \delta_n = 0,$$

per ottenere una C_n che si spezza nella curva razionale

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\alpha_0 t^{n-1} + \dots + \alpha_{n-2} t}{\delta_0 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}}, \\ y = \frac{\beta_0 t^{n-1} + \dots + \beta_{n-2} t}{\delta_0 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}}, \\ z = \frac{\gamma_0 t^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}}{\delta_0 t^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}}, \end{array} \right.$$

e nella retta $x=y=0$; la quale incontra la curva 2) nel punto $(0, 0, \frac{\gamma_{n-1}}{\delta_{n-1}})$, corrispondente al valore $t=0$ del parametro.

Si noti che la curva razionale degenera $C_{n-1} + r$, avente un punto doppio effettivo, O , comune a C_{n-1} e r , possiede, come la C_n generale, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi

apparenti, giacchè vi sono $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ punti doppi apparenti di C_{n-1} e $n-2$ rette per un punto che incontrano — fuori di O — la C_{n-1} e la r :

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ora il grado della rigata delle trisecanti di C_n e il numero delle sue quadrisecanti dipenderanno soltanto dall'ordine n . L'asserto si può giustificare *a priori* in base all'osservazione che le curve razionali C_n formano una sola famiglia, dipendente da $4n$ parametri variabili in modo continuo; *a posteriori* se ne ottiene la prova mediante la determinazione effettiva degli anzidetti numeri, che fin d'ora possiamo designare, per comodità di discorso, coi simboli $f(n)$ e $\varphi(n)$.

Anzitutto il grado della rigata delle trisecanti $f(n)$ sarà uguale a $f(n-1)$ aumentato del grado della rigata delle corde di C_{n-1} che si appoggiano ad r in un punto diverso da O . Per determinare questo grado, occorre trovare le rette incidenti a C_{n-1} , r , s , essendo s un'altra retta qualunque. Poniamo che s divenga incidente ad r ; allora le rette nominate divengono le corde di C_{n-1} passanti per il punto $(r\ s)$ e quelle (che non passano per O) giacenti nel piano $(r\ s)$, sicchè il loro numero vale

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-2)}{2} = (n-2)(n-3).$$

Si avrà dunque

$$f(n) = f(n-1) + (n-2)(n-3).$$

Derivando tre volte questa equazione funzionale (alle differenze) si trova

$$f'''(n) = f'''(n-1) = \text{cost.},$$

e però, integrando:

$$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

dove le costanti a , b , c , d , si lasciano determinare *sperimentalmente*, cioè coll'esame di casi particolari.

Ma, anche senza ricorrere a tale integrazione, si può determinare $f(n)$ in modo diretto facendo degenerare successivamente la C_{n-1} ecc., in guisa che la C_n si riduca all'insieme di $n-1$ rette sghembe r_1, r_2, \dots, r_{n-1} e di una retta, r , incidente ad esse. Allora la rigata delle trisecanti di C_n si compone di

$$\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

rigate quadriche determinate dalle terne di direttrici rettilinee r_i, r_l, r_k . Si deduce

$$f(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Ora si può applicare lo stesso metodo al calcolo di $\varphi(n)$, ma s'incontra una difficoltà che occorre segnalare.

La curva degenera

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r;$$

a cui si riduce per continuità la C_n , possiede (per $n-1 \geq 4$) una quadrisecante, fuori di r , per ogni quaterna di rette formata colle r_i ; ma resta dubbio se e quante volte sieno da computare nel numero $\varphi(n)$ le stesse rette r_i e la r . A prima vista ciascuna delle r_i , avendo infiniti punti comuni colla C_n degenera, potrebbe sostituire qualche quadrisecante della C_n generale; ma il dubbio si esclude osservando che le quadrisecanti di C_n sono *generatrici quadruple* della rigata delle trisecanti, mentre le rette r_i non sono affatto generatrici (bensì direttrici) della rigata stessa, relativa alla C_n degenera. Non così può dirsi della retta r , che è generatrice multipla secondo $\binom{n-1}{4}$ per questa rigata, e può quindi essere limite di $x \leq \binom{n-1}{4}$ quadrisecanti di C_n ; pertanto della r resta dubbio con quale molteplicità, x , figuri effettivamente nel numero $\varphi(n)$.

Per superare la difficoltà conviene riferirsi a un'altra degenerazione della C_n , che si deduce subito dalla precedente: si riduca C_n ad $n-2$ rette sghembe r_1, r_2, \dots, r_{n-2} e ad una conica C_2 incidente ad esse. Allora il numero $\varphi(n)$

verrà dato da:

$$\varphi(n) = 2 \binom{n-2}{4} + \binom{n-2}{3},$$

essendovi due rette incidenti a 4 fra le direttrici r_i , ed una retta incidente a C_2 e a tre r_i (in corrispondenza al quarto punto d'intersezione di C_2 colla quadrica determinata da queste tre rette). Si trova quindi

$$\varphi(n) = 2 \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3},$$

cioè

$$\varphi(n) = \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3 \cdot 4}.$$

Risolto il problema per le C_n razionali (con

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

punti doppi apparenti) si può passare al caso di curve di genere qualunque, cioè di curve (irriducibili) d'ordine n con $d < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi apparenti. Il passaggio è assai

facile se si ammette che i numeri da determinare dipendano soltanto da n e d , sicchè possano venir designati con $f(n, d)$ e $\varphi(n, d)$. Valutiamo p. es. che cosa divengano quei numeri per una curva composta d'una C_{n-p} razionale e di p rette, r_1, \dots, r_p , corde di essa: la quale $C_n = C_{n-p} + r_1 + \dots + r_p$, possiede

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi apparenti e può quindi riguardarsi *virtualmente* come una *curva riducibile di genere p* .

In queste condizioni il calcolo di $f(n, d)$ e $\varphi(n, d)$ non offre difficoltà. Per avere $f(n, d)$ occorre aggiungere al grado della rigata delle trisecanti di C_{n-p} , il grado della rigata costituita dalle corde di C_{n-p} incidenti a una retta r_i , moltiplicato per il numero p delle r_i , nonchè due volte il numero delle terne formate con le rette r_i . Per avere $\varphi(n, d)$ occorre aggiungere al numero delle quadriseccanti di C_{n-p} il numero delle trisecanti di essa incidenti alle r_i , più il numero delle

corde di C_{n-p} incidenti a due r_i , più il numero delle rette incidenti a tre r_i e alla C_{n-p} , più infine il numero delle rette incidenti a quattro r_i . I calcoli relativi si affettuano facilmente: così per avere le trisecanti di C_{n-p} incidenti ad una r_i basta intersecare la rigata delle trisecanti con r_i , togliendo le intersezioni che cadono nei punti comuni a C_{n-p} e alla r_i , dove si avverta che la rigata delle trisecanti possiede la C_{n-p} razionale come curva multipla secondo l'ordine

$$\frac{(n-p-2)(n-p-3)}{2},$$

poichè per ogni suo punto passano tante trisecanti, essendo questo il numero dei punti doppi di una curva proiezione C_{n-p-1} ; per determinare il numero delle corde di C_{n-p} incidenti a due rette basta far diventare queste incidenti come vedremo più avanti (pag. 298). Così si arriverebbe alle formule:

$$f(n, d) = (n-2) \left(d - \frac{n(n-1)}{6} \right)$$

$$\varphi(n, d) = \frac{1}{2} d(d-4n+11) - \frac{1}{24} n(n-2)(n-3(n-13)).$$

Ma queste formule potranno in tal guisa ritenersi dimostrate per tutti i valori di n e d ?

Intanto la degenerazione di una C_n in una C_{n-p} con p corde è certo impossibile per $p \geq n$, cioè per $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n$.

In tal caso occorre almeno modificare il procedimento precedente prendendo a considerare curve composte d'una curva razionale e di rette o coniche trisecanti, quadrisecanti, ecc.

Tuttavia, perchè le formule anzidette vengano dimostrate per questa via, occorrerebbe sapere *a priori* che i numeri cercati dipendono soltanto dai caratteri n e d . Su questo punto potrà sollevarsi ragionevolmente un dubbio, ove si avverta che le curve gobbe d'ordine n con d punti doppi apparenti danno luogo, in generale, a diverse famiglie, per modo che non si può passare per continuità dall'una all'altra. Occorrerà pertanto esaminare più profondamente le *possibili degenerazioni d'una curva gobba* per variazione continua dei suoi parametri, onde riconoscere se in ogni famiglia si rinvenano

curve composte di curve razionali e di rette (e quindi curve riducibili a gruppi di rette). Il quale esame importa un'analisi delicata, svolta recentemente da F. SEVERI ⁽¹⁾.

Noi non ci addentreremo in siffatta analisi e forniremo invece un'altra dimostrazione diretta delle formule precedenti, cioè la dimostrazione di BECK, cui si è poc' anzi accennato.

Come punto di partenza, in ordine al problema delle trisecanti, assumiamo la ricerca del grado della *rigata delle rette che si appoggiano a tre curve direttrici* C_m, C_n, C_r di dati ordini: m, n, r ; questo problema con cui s'inizia la citata memoria di CAYLEY, si risolve con un ben noto metodo ricorrente ⁽²⁾ che qui brevemente riprendiamo. Il grado cercato, cioè il numero delle generatrici della rigata che si appoggiano ad una retta a , si designi con $\psi(m, n, r)$; allora considerando la rigata che ha come curve direttrici le C_m, C_n , e intersecandola con la C_r , si trova

$$\psi(m, n, r) = r\psi(m, n, 1)$$

e, analogamente

$$\psi(m, n, r) = mnr\psi(1, 1, 1) = 2mnr,$$

essendo $\psi(1, 1, 1)$ il grado della quadrica determinata da tre direttrici rettilinee.

Inoltre la rigata determinata dalle curve direttrici C_m, C_n, C_r , contiene le tre curve C_m, C_n, C_r con le *molteplicità* rispettive: nr, rm, mn . Infatti per ogni punto della C_m passano nr rette incidenti a C_m e C_r , sicchè vi sono appunto nr falde della superficie rigata che s'incrociano lungo la C_m , ecc.

Si può aggiungere che se due curve, per es. C_m e C_n , hanno un *punto* (semplice) *comune*, dalla rigata delle rette incidenti a C_m, C_n, C_r si *distacca il cono d'ordine* r che proietta C_r . Il caso in cui le tre curve C_m, C_n, C_r abbiano uno stesso punto comune, O , esige un'analisi più delicata, perchè tutte le rette della stella O vengono a figurare impropriamente nella rigata. Tuttavia il metodo precedente permetterebbe di riconoscere che, tolta la stella suddetta, la rigata che ha per diret-

(1) Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 2 e 16 maggio 1915.

(2) Cfr. per es. F. ENRIQUES « G. Descrittiva », Parte II, § 55.

trici C_m, C_n, C_r , diviene ora di ordine $2mnr - (m + n + r - 1)$, salvo il caso in cui le tre curve abbiano nel punto comune un medesimo piano tangente, ciò che dà luogo ad una riduzione ulteriore. (Allo stesso risultato si perviene anche facendo degenerare le tre curve in guisa da contenere tre rette passanti per un punto).

Passiamo a considerare la *rigata delle corde di una curva* C_n che si appoggiano a una C_m . Questo caso può essere studiato come limite del caso precedente, dove si portino a coincidere le curve C_n e C_r . A tale scopo conviene assumere come curva C_r la C_n stessa trasformata con una traslazione infinitesima o, più generalmente, con un'omologia infinitesima di centro A e di piano z : la rigata R che ha per curve direttrici le $C_m, C_n, C_r = C_n$, si riduce alla rigata R_1 delle corde di C_n incidenti a C_m contata due volte, più la rigata R_2 delle rette incidenti a C_m e C_n che toccano il cono proiettante $A(C_n)$ nel punto d'appoggio con la C_n ; infatti i due punti d'appoggio di una retta incidente a C_n e C_r potranno restare distinti al limite o divenire infinitamente vicini; in quest'ultimo caso la retta diventa tangente al cono su cui si trova, insieme a C_n , la curva trasformata infinitamente vicina. Allora determinando il grado della rigata R_2 si ottiene quello della R_1 . Ma lo stesso metodo con cui si determina quel grado conduce direttamente allo scopo.

Pongasi che la curva C_n abbia d punti doppi apparenti; il grado della rigata delle corde di C_n incidenti a C_m verrà espresso da una funzione $\theta(m; n, d)$. Per calcolare θ basta osservare che esso equivale al numero delle corde di C_n che sono incidenti a C_m e ad una retta, sicchè

$$\theta(m; n, d) = m\theta(1; n, d).$$

Ora $\theta(1; n, d)$ è il numero delle corde di C_n che si appoggiano a due rette sghembe a, b ; facciamo diventare le a, b , incidenti; le corde incidenti ad a e b si riducono alle d corde passanti per il punto (ab) , e alle $\frac{n(n-1)}{2}$ corde giacenti nel piano (ab) ; pertanto:

$$1) \quad \theta(m; n, d) = m \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + d \right\}.$$

Inoltre la curva C_n risulta multipla per la rigata secondo la molteplicità $m(n-1)$, poichè tante sono le generatrici della rigata passanti per un punto della C_n . Si avverta poi che quando la C_m abbia un punto (semplice) O comune con la C_n , dalla rigata anzidetta si stacca il cono d'ordine $n-1$ che proietta da O la C_n .

Ora procediamo a determinare il grado della *rigata delle trisecanti* alla curva C_n , grado che si è designato con $f(n, d)$. A tale uopo conviene particolarizzare la rigata precedente facendo tendere C_m a C_n ($m=n$); perciò si assumerà come curva C_m la trasformata di C_n mediante un'omologia infinitesima di centro A e di piano α .

Osserviamo subito che le due curve C_n e $C_m=C_n$ hanno qui n punti comuni, intersezioni col piano α , e quindi le corde di C_n incidenti a C_m formano una rigata che contiene n coni d'ordine $n-1$, staccati i quali si riduce dell'ordine

$$\theta(n; n, d) - n(n-1) = n\left(\frac{n(n-1)}{2} + d\right) - n(n-1).$$

Ora questa rigata limite, R , consta di una rigata, R_1 , costituita dalle trisecanti di C_n , contata tre volte (poichè una trisecante figura tre volte come corda che si appoggia ulteriormente alla curva data, in rapporto alle tre coppie della terna dei punti di appoggio) ed inoltre di una rigata, R_2 , costituita dalle corde di C_n che toccano — in uno dei punti d'appoggio — il cono proiettante $A(C_n)$. Di quest'ultima rigata possiamo valutare il grado, N_2 , intersecandola con una retta che passa per il vertice del cono. Le intersezioni di una siffatta retta a corrispondono: in primo luogo ai piani tangenti alla C_n per a , e precisamente in ognuno di questi piani si trovano $n-2$ corde della C_n passanti per il punto di contatto, le quali sono generatrici della rigata R_2 ; in secondo luogo a incontra R_2 anche nel vertice A del cono, e precisamente incontra ivi d generatrici di R_2 che sono le corde di C_n per A , ognuna delle quali deve essere contata due volte in quanto ha comuni con la trasformata di C_n i due punti infinitamente vicini ai punti d'appoggio su C_n . Si trova

$$2) \quad N_2 = (n-2) \{ n(n-1) - 2d \} + 2d$$

e così si deduce:

$$3) f(n, d) = n \left(\frac{n(n-1)}{2} + d \right) - n(n-1) - [(n-2)\{n(n-1) - 2d\} + 2d]$$

cioè il grado della rigata delle trisecanti vale:

$$3) f(n, d) = (n-2) \left\{ d - \frac{n(n-1)}{6} \right\}.$$

Aggiungasi che la *rigata delle trisecanti* di C_n , il cui ordine è espresso dalla formola precedente, *contiene la curva C_n con la molteplicità*

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} - p = d - n + 2,$$

poichè la proiezione piana di C_n , fatta da un suo punto, è una curva d'ordine $n-1$ di genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, che ha dunque $\frac{(n-2)(n-3)}{2} - p$ punti doppi.

Si avverta inoltre che la rigata delle trisecanti di una curva C_n , irriducibile e senza punti doppi effettivi, è generalmente irriducibile. Se la C_n acquista un punto doppio, limite di un punto doppio apparente, è naturale che si stacchi il cono proiettante la curva da questo punto. Ma se la C_n non ha punti doppi, la rigata delle trisecanti non può spezzarsi in due superficie *distinte*, giacchè verrebbero così separate razionalmente due parti della C_n , che perciò sarebbe riducibile. Può bensì darsi che le trisecanti di C_n formino una superficie rigata multipla, il che accade:

1) quando la C_n possiede una serie ∞^1 di ν -secanti con $\nu > 3$; ogni ν -secante conta allora per $\binom{\nu}{3}$ trisecanti e così la rigata delle ν -secanti, contata secondo quest'ordine di molteplicità, forma appunto la rigata delle trisecanti;

2) quando la C_n stia sopra una superficie quadrica, segnando le generatrici di ciascun sistema in tre o più punti; riferendosi al caso più semplice di una C_n che seghi in tre punti i due sistemi di generatrici, si vede che la rigata delle trisecanti deve ritenersi formata da due rigate quadriche sovrapposte e perciò è, in questo caso, d'ordine 4.

Osservazione. Se per una curva gobba C_n (irriducibile) non esistono trisecanti, il grado della rigata di esse dovrà esser nullo e così pure la molteplicità della C_n ; si avrà pertanto

$$d = \frac{n(n-1)}{6}, \quad d = n - 2$$

da cui

$$\frac{n(n-1)}{6} = n - 2,$$

cioè

$$n = 3 \quad \text{o} \quad n = 4.$$

Effettivamente per le cubiche gobbe e per le quartiche di prima specie (§ 18) non esistono trisecanti, mentre vi è una rigata quadrica di trisecanti per le quartiche di seconda specie. Da quanto precede si deduce che per $n > 4$ la curva C_n possiede sempre una rigata di trisecanti di grado > 0 , sicchè: $d > \frac{n(n-1)}{6}$. Questa diseuguaglianza è assai più espressiva di quella, $d > n - 2$, che abbiamo incontrata nel § 18.

Segue in particolare che *una curva piana senza punti doppi, d'ordine $m > 3$, non può essere proiezione (da un punto semplice) di una curva gobba d'ordine $n = m + 1$.*

Passiamo a determinare il numero delle quadrisecanti di C_n . A tale scopo considereremo una curva \bar{C}_n trasformata di C_n mediante una omologia infinitesima di centro A e piano α : le trisecanti di C_n che si appoggiano a \bar{C}_n forniranno:

1) quadrisecanti di C_n , da contarsi ciascuna quattro volte in rapporto alle quattro terne che si possono estrarre dalla quaterna dei punti di appoggio;

2) e le N_3 trisecanti di C_n che toccano in un punto della curva il cono proiettante $A(C_n)$.

Ora, la rigata delle trisecanti di C_n è del grado $f(n, d)$, che abbiamo imparato a valutare. Essa avrà con \bar{C}_n $nf(n, d)$ intersezioni; ma sono da togliere le intersezioni che cadono sul piano α di omologia, in numero di n , da contare ciascuna $(d - n + 2)$ volte, secondo la molteplicità della C_n per la rigata delle trisecanti. Si avrà dunque:

$$4) \quad nf(n, d) - n(d - n + 2) = 4\varphi(n, d) + N_3;$$

la quale equazione permette di ricavare $\varphi(n, d)$ quando sia noto N_3 .

Per valutare N_3 occorre considerare la rigata delle corde di C_n che toccano in un punto della curva il cono $A(C_n)$, e intersecarla con la curva infinitamente vicina \bar{C}_n . Quella rigata è di grado N_2 , sicchè le intersezioni con \bar{C}_n sono nN_2 ; ma sono da togliere le intersezioni di C_n e \bar{C}_n appartenenti al piano α di omologia, le quali stanno ferme quando \bar{C}_n tende a C_n . Qui bisogna procedere con attenzione.

Vi sono due specie di generatrici della rigata che passano per un punto P di C_n , cioè $h_1 = n - 2$ rette p_1 che toccano il cono $A(C_n)$ in P , e

$$h_2 = 2(n - 1) + 2p - 2 = n(n - 1) - 2d - 2$$

rette p_2 che toccano il cono suddetto in un punto Q diverso da P . Orbene, quando P appartiene al piano α , si direbbe a prima vista che ivi siano assorbite $h_1 + h_2$ intersezioni di \bar{C}_n con la rigata delle corde di C_n tangenti al cono $A(C_n)$, essendo $h_1 + h_2$ la molteplicità di C_n per la detta rigata. Ma occorre avvertire che le h_1 falde della superficie rigata, corrispondenti alle generatrici p_1 , toccano il cono $A(C_n)$ e quindi la \bar{C}_n ; così il numero delle intersezioni assorbite in ciascuno degli n punti comuni a C_n e ad α vale

$$5) \quad 2h_1 + h_2 = 2(n - 2) + n(n - 1) - 2d - 2.$$

Ciò posto le $nN_2 - (2h_1 + h_2)$ intersezioni residue di \bar{C}_n con la rigata delle corde tangenti al cono, ci danno:

1) Le N_3 trisecanti di C_n tangenti al cono $A(C_n)$ in uno dei punti di appoggio, da contarsi ciascuna due volte in quanto si consideri appartenente a \bar{C}_n l'uno o l'altro degli altri due punti d'appoggio della retta con la curva.

2) Le t corde di C_n bitangenti al cono $A(C_n)$ nei due punti di appoggio con la curva, da contarsi ciascuna due volte; il numero di queste corde, pari al numero dei piani bitangenti che passano per un punto, è già stato designato con t e vale (§ 18)

$$t = \frac{1}{2} n(n - 2)(n^2 - 9) - [n(n - 1) - 6] 2d + 2d(d - 1).$$

3) Le d corde di C_n appartenenti al cono $A(C_n)$, cioè

le corde di C_n per A ; le quali — al pari delle corde bitangenti — si appoggiano a C_n e \bar{C}_n in due coppie di punti infinitamente vicini, e che andranno contate 6 volte, come risulta dall'osservazione seguente. Abbiamo veduto che le corde di C_n passanti per A sono generatrici doppie per la rigata delle corde tangenti al cono $A(C_n)$; ma delle due falde della superficie rigata, che passano per la corda, una tocca la C_n in uno dei due punti d'appoggio, P e Q , della corda stessa, e l'altra nell'altro, giacchè le due generatrici della rigata infinitamente vicine alla PQ sono: la retta che da P proietta il punto di C_n infinitamente vicino a Q , e quella che da Q proietta il punto infinitamente vicino a P . Pertanto la nostra rigata delle corde tangenti al cono ha con la C_n 6 intersezioni corrispondenti alla PQ , essendovi tre intersezioni vicine a P (e così a Q), due sopra una falda e una sull'altra.

4) Le corde di C_n che giacciono in un piano osculatore per A ; essendovi $n' = 3n(n-2) - 6d$ piani osculatori a C_n per A , il numero delle rette nominate vale

$$(n-3)n' = (n-3)\{3n(n-2) - 6d\}.$$

Pertanto si giunge alla formula

$$6) \quad nN_2 - (2k_1 + k_2)n = 2N_3 + 2t + 6d + (n-3)n',$$

dalla quale si ricava:

$$7) \quad N_3 = \frac{1}{2} \left\{ -5n(n-2)(n-3) + 2n(n+5)d - 4d(d+11) \right\}.$$

Ricordando la 4) si deduce che il numero delle quadrisecanti di C_n , supposto finito, vale

$$8) \quad \varphi(n, d) = \frac{1}{2} d(d-4n+11) - \frac{1}{24} n(n-2)(n-3)(n-13).$$

Osservazione. Si avrà $\varphi(n, d) \geq 0$ nell'ipotesi, essenziale per il ragionamento precedente, che non esistano infinite quadrisecanti (cfr. § 45).

44. Nota sulla molteplicità delle soluzioni nelle determinazioni di numero. — L'applicazione del principio di continuità, e in particolare della conservazione del numero, urta

spesso nella difficoltà fondamentale di valutare la molteplicità con cui certi elementi figurano, in un dato caso particolare, fra le soluzioni del problema proposto. Questa difficoltà, giova notarlo, si riduce generalmente a valutare la molteplicità di intersezione di curve, superficie, ecc. Anche nei casi in cui si tratti di determinare elementi che non sono punti, per es. rette dello spazio ordinario, codesta deduzione si lascia effettuare sempre in modo diretto, introducendo il linguaggio della geometria degli iperspazi; e così per es. rappresentando le rette dello spazio ordinario coi punti di una quadrica dello S_3 (L. 1°, § 19), ecc.

Ora, quanto ai modi di riconoscere la molteplicità con cui una certa soluzione appartiene ad un dato problema, conviene osservare anzitutto che codesta molteplicità risulta in taluni casi semplicemente dalla legge di continuità, in quanto l'accennata soluzione si presenta come limite di due o più soluzioni semplici, pertinenti a un caso più generale. Così, per es. è evidente che una tangente doppia, a , di una curva piana, figura due volte fra le tangenti alla curva condotte da un suo punto generico, O , in quanto codesta tangente a appare come limite di due tangenti semplici passanti per un punto vicino ad O , i cui punti di contatto si avvicinano a quelli di a . Così ancora un punto r -plo, a tangenti distinte, di una curva piana, figura come $\frac{r(r-1)}{2}$ nodi nel-

l'abbassamento della classe (cfr. § 14). E in modo analogo, nella ricerca del grado della rigata delle trisecanti di una curva gobba C , tre volte era contata ognuna delle trisecanti fra le corde di C che si appoggiano alla curva infinitamente vicina \bar{C} , perchè ogni trisecante appare appunto come limite di tre corde siffatte, in rapporto alle tre coppie formate coi tre punti di appoggio, ecc. Ma, in altri casi, la valutazione della molteplicità spettante alla soluzione di un problema, riesce più difficile; e giova perciò riferirsi ad alcuni metodi particolari che permettono di superare tale difficoltà.

1) Anzitutto accade che le soluzioni del problema proposto vengano fornite da elementi uniti di una corrispondenza in una forma di prima specie; dove tuttavia sono in generale da scartare come soluzioni estranee alcuni degli elementi uniti della corrispondenza medesima. In questo caso si può invocare la *regola di ZEUTHEN*, che abbiamo spiegata nel L. 2°, § 1.

Qui giova avvertire che, senza bisogno di calcolare direttamente gli ordini di infinitesimo che entrano nella regola suddetta, questa può ricevere una applicazione indiretta nei modi che seguono.

2) Senza bisogno di valutare effettivamente gli ordini di infinitesimo che entrano in campo, può darsi che si riconosca come una data corrispondenza — considerata nell'intorno di un elemento unito, P — equivalga, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, ad un'altra corrispondenza, per la quale la molteplicità dell'elemento unito P risulti più facile a determinarsi. In questo caso la stessa molteplicità appartiene a P anche per riguardo alla prima corrispondenza. Un esempio di questo metodo si è offerto nel cenno sulla teoria delle caratteristiche contenuto nel L. 2°, § 25 (Vol. I, pag. 296).

3) Quando la molteplicità λ di un elemento unito P si riconosca uguale per due (o più) corrispondenze, ma in nessuna di queste appaia il suo valore, si ottengono in generale due (o più) equazioni, dove λ figura fra le incognite e che — in certi casi — permettono di determinare il valore suddetto. Un esempio relativo a ciò viene offerto da ZEUTHEN in ordine al problema delle trisecanti ad una curva gobba (¹).

4) Anche indipendentemente dal metodo di corrispondenza, è chiaro che la molteplicità con cui un elemento P compare fra le soluzioni di un problema, dipende dalle proprietà differenziali della figura nell'intorno di P , sicchè è lecito sostituire alla figura stessa una figura approssimante e così passare da un dato caso ad un altro ove entrano diversi valori di certi caratteri. L'applicazione esatta di questo metodo richiede di valutare l'ordine d'approssimazione di cui si è discorso; ma in molti casi una rapida intuizione ci avverte che la molteplicità da determinare riesce senz'altro indipendente da certi caratteri, il che può essere facilmente verificato nella pratica. Allora la molteplicità stessa si valuterà *sperimentalmente*, riferendosi ad uno o più esempi particolari.

Come esempio riprendiamo il problema delle quadrisecanti di una curva gobba, C_n , che abbiamo trattato facendo subire a C_n una variazione (omologica) infinitesima; la ricerca conduce a determinare le trisecanti a C_n tangenti ad un cono proiettante $A(C_n)$, e per questo occorre intersecare la rigata

(¹) Cfr. Annali di Mat., serie II, t. 3, pagg. 184, 185.

delle corde tangenti al cono $A(C_n)$ con la curva variata \bar{C}_n : si ottengono così, oltre le trisecanti tangenti al cono, anche le corde giacenti in piani bitangenti per il centro di omologia A , le corde giacenti in piani osculatori per A , e finalmente le corde di C_n passanti per A ; di queste ultime riesce più difficile valutare la molteplicità con cui figurano fra le soluzioni del problema, che pur dimostrammo essere $\lambda = 6$. Qui riprendiamo l'analisi del paragrafo precedente lasciando λ indeterminata, e mostriamo come si possa valutare λ riferendosi all'esempio della quartica razionale ($n=4$; $d=3$), per cui, evidentemente, il numero delle quadrisecanti è uguale a zero.

Or dunque scriveremo per la quartica C_4 la formula 6) del paragrafo precedente, che, essendo

$$n = 4, \quad d = 6, \quad N_2 = 18, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = 4, \quad t = 4, \quad n' = 6,$$

assume la forma

$$N_3 = 13 - \frac{3}{2}\lambda.$$

D'altra parte la formula 4), tenuto conto che il numero delle quadrisecanti vale $\varphi(4, 3) = 0$, e che il grado della rigata delle trisecanti è $f(4, 3) = 2$, diviene

$$N_3 = 4.$$

Quindi si ricava $\lambda = 6$.

c. d. d.

Se, invece di un solo coefficiente di molteplicità λ , fossero rimasti incogniti due coefficienti, sarebbe bastato aggiungere all'equazione precedente quella relativa ad un secondo caso particolare, per es. al caso della quintica razionale (non giacente sopra una quadrica) che si può trattare direttamente con altri metodi.

Giova anche avvertire che le equazioni di cui si tratta sono da risolvere in numeri interi e positivi, sicchè può accadere che anche una sola equazione basti a determinare più incognite. Così il solo esempio della quartica permetterebbe di determinare oltre la molteplicità, λ , delle corde per A , che sopra abbiamo valutata, anche la molteplicità μ con cui appartengono al problema le corde bitangenti al cono $A(C_n)$, qualora non si vedesse direttamente che è $\mu = 2$. Infatti si

è condotti all'equazione

$$3\lambda + 4\mu = 26,$$

che dà

$$\lambda = 2, \mu = 5 \quad \text{oppure} \quad \lambda = 6, \mu = 2,$$

sicchè basta riconoscere la parità di μ (che dipende dalla simmetria dei due punti d'appoggio delle corde bitangenti) per concludere

$$\lambda = 6, \mu = 2.$$

In fine chiuderemo queste osservazioni rilevando che, nei problemi della geometria numerativa, si deve dar valore a qualsiasi metodo di ricerca, per quanto imperfetto. La cosa essenziale è di regola *scoprire* la formola che risponde al problema; a posteriori si riesce sempre a darne una dimostrazione. Da questo punto di vista l'induzione da casi particolari, e quindi il metodo sperimentale, costituisce il più valido strumento di progresso della geometria numerativa. Esso è in pari tempo strumento sicuro di verifica, poichè ad anticipare la certezza logica che solo può fornire una critica approfondita e spesso delicata, vale ancora in modo eccellente la conferma di svariati esempi.

45. Caso in cui il numero delle soluzioni del problema diventa infinito: formule d'equivalenza. — Un problema relativo alle curve gobbe varrà anche ad illustrare il caso, già segnalato da DE JONQUIÈRES, in cui si ha eccezione al principio di conservazione del numero perchè il numero (generalmente finito) di cui si tratta diventa infinito.

In ordine a tale eccezione vi è da avvertire quanto segue:

1) Quando un problema generale comporta n soluzioni, e in un dato caso particolare si può accertare l'esistenza di più che n soluzioni (radici della medesima equazione algebrica di grado n), si deduce che questo caso comporta infinite soluzioni e quindi (se si tratta di punti) una curva o in generale una varietà algebrica di soluzioni.

Una prima applicazione di questa avvertenza ci dà il *principio di PLÜCKER-CLEBSCH*, criterio di compatibilità d'un sistema d'equazioni (cfr. L. 1°, § 26): se il numero delle soluzioni del problema generale è 0, questo numero non può divenire > 0 in un caso particolare, senza diventare infinito.

Una seconda applicazione viene offerta dalla proprietà caratteristica del fascio di curve piane (cfr. L. 2°, § 14): per un punto generico del piano passa una curva d'un fascio $|C|$, quindi un punto comune a due C è comune a infinite, cioè a tutte le C .

Finalmente un terzo esempio interessante ci è porto dal teorema di KUMMER sulle *congruenze del prim'ordine di raggi* (sistemi algebrici di rette, tali che per un punto generico dello spazio ne passi una) ⁽¹⁾.

La teoria generale delle congruenze di raggi stabilisce che un raggio generico della congruenza è incidente a due raggi infinitamente vicini della medesima, in due punti generalmente distinti che si chiamano *fuochi*. L'esistenza dei due fuochi si lascia riconoscere semplicemente ricorrendo alla rappresentazione degl'iperspazi. La congruenza ha per immagine una superficie appartenente alla quadrica di S_4 che rappresenta la varietà delle rette; ora le rette incidenti ad una data hanno per immagini i punti d'un iperpiano tangente alla quadrica, e questo sega la nostra superficie secondo una linea dotata di punto doppio, la quale contiene due punti infinitamente vicini al punto di contatto. Ma quando la congruenza Σ sia del prim'ordine, avremo che ogni fuoco di essa appartenendo a due, apparterrà a infiniti raggi della congruenza, i quali formeranno un cono o una stella: nel primo caso la congruenza stessa è una stella, nel secondo vi sono fuochi costituenti una linea. Allora i raggi di Σ sono corde di questa linea, che si prova poi essere una cubica gobba oppure una curva composta d'una curva d'ordine n e d'una retta $(n-1)$ -secante (non escluso il caso di due rette infinitamente vicine). Si ha così *il teorema di KUMMER*: « una congruenza di raggi del prim'ordine, che non sia una stella, è costituita dalle corde di una cubica gobba, oppure d'una curva composta d'una parte d'ordine n e d'una retta $(n-1)$ -secante ».

2) Quando un problema comporta in generale n soluzioni e, per particolari valori dei parametri, ne esistono infinite, formanti una certa curva o varietà V , la V equi-

⁽¹⁾ « Ueber die algebraische Strahlensysteme, in's besondere über die der ersten und zweiten Ordnung ». Acc. di Berlino 1886. Cfr. (anche per notizie bibliografiche) diversi studi di FAXO negli Annali di Matematica e negli atti dell'Accad. di Torino (dal 1893 in poi).

vale a un certo numero m fra le n soluzioni del caso generale, di guisa che — fuori di V — rimangono (in generale) $n - m$ soluzioni isolate. Così per esempio un'omografia piana possiede in generale 3 punti uniti; quando vi è una retta di punti uniti (caso dell'omologia) codesta retta equivale a 2 punti uniti.

Similmente tre superficie degli ordini m_1, m_2, m_3 , s'incontrano in generale in $m_1 m_2 m_3$ punti (§ 14), ma questo numero diventa infinito se le dette superficie passano per una medesima curva C ; in tal caso la C comune equivale ad un certo numero d'intersezioni, sicchè, tenuto conto della *equivalenza* di C , può dirsi ancora che il numero $m_1 m_2 m_3$ delle intersezioni viene sempre conservato. Il calcolo della accennata formula d'equivalenza costituisce un nuovo problema numerativo che esamineremo fra poco. Qui vogliamo ancora indicare la seguente avvertenza:

3) Se un problema, generalmente determinato, comporta — in un caso particolare — infinite soluzioni formanti una varietà continua V , l'equivalenza di V è sempre un numero positivo quando il caso particolare si presenti come limite del caso generale in cui si ha un numero finito di soluzioni (esistendo, fuori di V , $n - m < n$ soluzioni isolate limiti di una parte di quelle del caso generale). Ma per un problema generalmente determinato ove entrano parametri e caratteri variabili in modo discreto, può aversi in un caso particolare una infinità di soluzioni equivalente ad un *numero negativo*. Anzi, se la formula che dà il numero delle soluzioni d'un problema porge in qualche caso un numero negativo, si conclude che in codesto caso (anzichè nessuna) vi sono infinite soluzioni, la cui varietà ha appunto un'equivalenza negativa.

Questa conclusione si giustifica ogniqualevolta la formula che dà il numero cercato sia dedotta nella sola ipotesi che questo numero sia finito (o nullo). Trattandosi di un numero essenzialmente positivo, la circostanza che la formula dia un numero negativo costituisce un assurdo, che si risolve riconoscendo infondata l'ipotesi, del numero finito di soluzioni, da cui si è partiti.

Un semplice esempio di *equivalenza negativa* vien pôrto dal problema di determinare il numero delle trisecanti di una curva C dello spazio che incontrano una retta generica (grado della rigata delle trisecanti). Per una curva d'ordine n

con d punti doppi apparenti, il detto numero vale

$$N = (n - 2) \left\{ d - \frac{n(n - 1)}{6} \right\}.$$

Ora questo numero diventa negativo per $n = 3$, $d = 0$, cioè per le cubiche C prive di punti doppi apparenti, risultando allora $N = -1$. Ciò significa che per una tale C esistono infinite trisecanti incidenti ad una retta, ossia che le trisecanti di C non formano più una varietà ∞^1 ma ∞^2 ; il che porta di conseguenza che la C sia una curva piana. Infatti una cubica senza punti doppi apparenti è piana e tutte le ∞^2 rette del suo piano sono sue trisecanti.

Un secondo esempio viene offerto dalle curve gobbe in cui il genere p è abbastanza elevato rispetto all'ordine n , cioè il numero d dei punti doppi apparenti è abbastanza piccolo, così da rendere negativo il numero delle quadriseccanti:

$$\frac{1}{2} d(d - 4n + 11) - \frac{1}{24} n(n - 2)(n - 3)(n - 13);$$

allora la curva possiede una serie di infinite quadriseccanti (o una serie di rette ν -secanti con $\nu > 4$) che formano una rigata (multipla per $\nu > 4$). Per esempio si consideri la curva, C , d'ordine $n = 8$, intersezione completa d'una quadrica Q e d'una superficie, F , del 4° ordine; si ha, per la C , $d = 12$, giacchè la proiezione piana di C da un punto di Q possiede due punti quadrupli equivalenti a $6 + 6 = 12$ punti doppi; quindi la formola delle quadriseccanti dà il numero

$$\frac{1}{2} 12(12 - 4 \cdot 8 + 11) - \frac{1}{24} 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (-5) = -4.$$

A tale circostanza risponde il fatto che esistono due serie ∞^1 di quadriseccanti la C , costituenti le due schiere di generatrici della quadrica Q : ciascuna schiera ha l'equivalenza -2 .

Vediamo ora come la determinazione dell'equivalenza d'una infinità di soluzioni dia luogo ad un nuovo problema numerativo, che possiamo sciogliere nel caso — in qualche modo tipico — dove si tratta delle intersezioni di tre super-

ficie passanti per una curva C . Designando con m_1, m_2, m_3 , gli ordini di tre superficie F_1, F_2, F_3 , passanti (semplicemente) per C , e con n e d l'ordine e il numero dei punti doppi apparenti della C (supposta priva di punti doppi effettivi), il numero delle intersezioni di F_1, F_2, F_3 , fuori di C , verrà espresso da una funzione

$$f(m_1, m_2, m_3; n, d),$$

giacchè verificheremo che dipende in fatto da questi soli elementi, e l'equivalenza della curva C rispetto alle intersezioni delle tre superficie verrà data da

$$m_1, m_2, m_3 - f(m_1, m_2, m_3; n, d).$$

Per calcolare la funzione f , da cui dipende la formula d'equivalenza, conviene usare il principio della conservazione del numero, considerando il caso di una \bar{F} d'ordine $m_3 + 1$; che degeneri in un piano z , affatto generico, ed in una superficie F_3 , d'ordine m_3 , passante per C . Poichè le superficie F_1, F_2 , hanno — fuori di C — una intersezione d'ordine $m_1 m_2 - n$, che viene incontrata dal piano z in $m_1 m_2 - n$ punti, si deduce:

$$f(m_1, m_2, m_3 + 1; n, d) = f(m_1, m_2, m_3; n, d) + m_1 m_2 - n.$$

Questa relazione, in cui è lecito permutare m_1, m_2, m_3 , porge un sistema di equazioni funzionali capace di determinare f . A tale scopo, anzichè ricorrere ad una integrazione, basta esprimere $f(m_1, m_2, m_3; n, d)$ per mezzo di $f(n, n, n; n, d)$, quest'ultimo numero potendosi calcolare direttamente, come vedremo.

Infatti, applicando ripetutamente l'equazione precedente, avremo:

$$f(m_1, m_2, m_3; n, d) = f(m_1, m_2, n; n, d) + (m_3 - n)(m_1 m_2 - n);$$

e quindi

$$f(m_1, m_2, n; n, d) = f(m_1, n, n; n, d) + (m_2 - n)(m_1 n - n),$$

$$f(m_1, n, n; n, d) = f(n, n, n; n, d) + (m_1 - n)(n^2 - n),$$

sicchè

$$f(m_1, m_2, m_3; n, d) = f(n, n, n; n, d) + m_1 m_2 m_3 - n(m_1 + m_2 + m_3) + 3n^2 - n^3$$

Per determinare $f(n, n, n; n, d)$ si considereranno i coni proiettanti la curva C da tre punti generici P_1, P_2, P_3 . I coni $P_1(C)$ e $P_2(C)$ s'intersecano, fuori di C , secondo una curva K d'ordine $n(n-1)$, che ha comuni con C un certo numero x di punti; il cono $P_3(C)$ sega K in $n^2(n-1)$ punti i quali — tolte le x intersezioni di C e K — danno $n^2(n-1) - x$ punti comuni a $P_1(C), P_2(C)$ e $P_3(C)$, fuori di C . Così resta soltanto da calcolare x .

Per trovare i punti comuni a C e K si consideri un piano variabile π , passante per P_1 e P_2 , e le sue intersezioni $A_1 A_2 \dots A_n$ con la curva C ; le rette $P_1 A_i$ e $P_2 A_i$ si segano, fuori dei punti A_i in $n(n-1)$ punti $B_1 B_2 \dots B_{n(n-1)}$ appartenenti a K . Ora si vede che qualche punto A viene a coincidere con qualche punto B quando il piano π sia tangente alla curva φ oppure quando contenga una corda di C passante per P_1 o per P_2 . Precisamente, ad un piano π tangente a C risponde un punto comune (ove non si ha contatto essendo P_1 e P_2 generici), ed invece a un piano π che contenga una corda per P_1 (o per P_2) rispondono due punti comuni a C e K , cioè i due punti di appoggio della corda.

Si deduce (cfr. § 18)

$$x = 2n + 2p - 2 + 4d = n(n-1) + 2d.$$

Pertanto si conclude:

$$f(n, n, n; n, d) = n(n-1)^2 - 2d,$$

e quindi

$$f(m_1, m_2, m_3; n, d) = n(n+1) + 2d + m_1 m_2 m_3 - n(m_1 + m_2 + m_3);$$

così l'equivalenza della curva C , rispetto alle intersezioni di tre superficie d'ordini m_1, m_2, m_3 , passanti per essa, vale

$$n(m_1 + m_2 + m_3 - n - 1) + 2d.$$

46. Cenno sul problema degli spazi secanti e sul calcolo simbolico dello Schubert. — Lo sviluppo della geometria numerativa, specialmente nelle ricerche più recenti che si riatteggiano a SCHUBERT, ha messo in evidenza un problema fondamentale concernente le figure elementari degli iperspazi, a cui molte determinazioni di numero si lasciano ricondurre.

Tale è il problema degli spazi secanti, dove trova impiego un simbolismo introdotto da HALPHEN (1873) e svolto sistematicamente da SCHUBERT a partire dal 1874 ⁽¹⁾.

Sappiamo che nell'ordinaria geometria proiettiva dello spazio a tre dimensioni occorre la considerazione delle forme fondamentali di punti, piani e rette, cioè delle seguenti:

1) forme fondamentali di punti: retta punteggiata, piano punteggiato, spazio punteggiato;

2) forme fondamentali di piani; fascio di piani, stella di piani, e spazio di piani;

3) forme fondamentali di rette: fascio di rette (passanti per un punto e giacenti in un piano), stella di rette, piano rigato, complesso di rette incidenti ad una retta data, e spazio rigato (totalità delle rette).

Ora codeste forme si lasciano generalizzare come segue. Si designi in generale con $|r|$ lo spazio lineare di r dimensioni, e si consideri una serie di spazi $|a_0| |a_1| \dots |a_r|$, dove $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_r$, e tali che ciascun $|a_i|$ appartenga allo $|a_{i+1}|$ che segue; chiamasi *forma fondamentale di spazi $|r|$* , il sistema degli $|r|$ che hanno comune con $|a_0|$ un punto, con $|a_1|$ una retta,.... e che giacciono nello $|a_r|$. La *condizione* (caratteristica), imposta ad un $|r|$ di S_n , di appartenere al detto sistema verrà indicata con $(a_0 a_1 \dots a_r)$; essa è di dimensione:

$$(r+1)n - \frac{r(r+1)}{2} - \sum a_i, \quad (2)$$

cioè equivale a tante equazioni indipendenti fra le coordinate degli $|r|$. Così per esempio la condizione imposta a una retta dello spazio ordinario che debba appartenere ad un fascio si designa con (02), e la condizione perchè un punto giaccia in un piano si lascia designare col simbolo analogo (12), dove la condizione d'incidenza relativa ad una retta ($a_0=1$) giacente nel piano ($a_1=2$), è una conseguenza della condizione imposta alla retta di giacere in codesto piano, ma viene qui aggiunta per dare al simbolo la forma tipica che sopra abbiamo indicata.

(1) « Kalkül der abzählenden Geometrie ». Lipsia 1879: Mittheilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg Bd. I (1886).

(2) Cfr. per es. BERTINI « Introduzione... », pag. 40.

Il problema degli spazi secanti consiste nel contare gli $|r|$ che appartengono simultaneamente a più forme fondamentali assegnate, nell'ipotesi che le dimensioni di queste sieno tali da determinare un numero finito di soluzioni del problema. Ora, conformemente all'uso della logica matematica, s'introduurranno il prodotto e la somma di due condizioni analoghe: il *prodotto* $(a_0 a_1 \dots a_r)(b_0 b_1 \dots b_r)$ indicherà che allo $|r|$ sono imposte simultaneamente le condizioni

$$(a_0 a_1 \dots a_r) \text{ e } (b_0 b_1 \dots b_r);$$

invece la *somma*

$$(a_0 a_1 \dots a_r) + (b_0 b_1 \dots b_r)$$

indicherà che lo $|r|$ deve soddisfare all'una o all'altra delle due condizioni.

Ciò posto, la risoluzione del problema degli spazi secanti si riduce a: *esprimere un prodotto simbolico di due condizioni caratteristiche per mezzo di una somma di condizioni analoghe*. Vediamo di spiegare la possibilità e il significato di tale riduzione riferendoci a qualche esempio.

Si tratti anzitutto di contare le rette dello spazio ordinario che sono incidenti a quattro rette date. Qui occorre calcolare il prodotto di quattro condizioni uguali: $(13)^4$. A tale scopo osserveremo che, quando due delle rette direttrici diventano incidenti fra loro, la condizione $(13)^2$ si decompone nella somma di due altre, giacchè il sistema delle rette incidenti alle dette due direttrici si riduce ad una stella più un piano rigato; così scriveremo

$$(13)^2 = (03) + (12).$$

Pertanto avremo

$$(13)^4 = \{ (03) + (12) \}^2 = (03)^2 + 2(03)(12) + (12)^2;$$

ora

$$(03)^2 = (12)^2 = (01) = 1$$

$$(03)(12) = 0,$$

in quanto vi è una retta, determinata dalla condizione (01), comune a due stelle o a due piani, ed invece non vi è in generale alcuna retta comune ad una stella e ad un piano. Si deduce che il numero delle rette incidenti a quattro direttrici date vale

$$(13)^4 = 2.$$

Un altro esempio ci è offerto dal computo delle rette dello spazio a 4 dimensioni che sono incidenti a 6 piani dati. Qui si tratta di ridurre ad una somma di condizioni caratteristiche la sesta potenza

$$(24)^6.$$

Ora la condizione $(24)^2$ si risolve nella somma di due condizioni, facendo divenire i due piani incidenti, cioè aventi una retta comune:

$$(24)^2 = (14) + (23).$$

Quindi avremo

$$(24)^3 = (24)\{(14) + (23)\} = (24)(14) + (24)(23).$$

Ma la condizione perchè una retta sia incidente ad un piano e ad una retta si scinde in due altre, quando la retta e il piano divengono incidenti, così come è espresso dalla uguaglianza simbolica:

$$(24)(14) = (04) + (13).$$

Similmente si ha

$$(24)(23) = (13);$$

e perciò:

$$(24)^3 = 2(13) + (04).$$

Quindi si troverà

$$(24)^6 = 4(13)^2 + 4(13)(04) + (04)^2;$$

ma

$$(13)^2 = (01) = 1,$$

$$(13)(04) = 0$$

$$(04)^2 = (01) = 1,$$

sicchè si conclude

$$(24)^6 = 5:$$

vi sono 5 rette di S_4 incidenti a 6 piani dati e così dualmente 5 piani incidenti a 6 rette (cfr. L. 2°, § 6).

I problemi che precedono offrono esempio d'un fatto generale: qualunque condizione algebrica imposta ad un $|r|$ si riduce sempre ad una somma di condizioni caratteristiche, per il che basta risolvere in tal modo ogni prodotto di condizioni caratteristiche. La possibilità di tale risoluzione costituisce un risultato fondamentale dovuto allo SCHUBERT, che vi pervenne nella citata memoria del 1886; la effettiva trasformazione dei prodotti in somme, e quindi la risoluzione

del problema degli spazi secanti, si può ormai effettuare in tutti i casi grazie ai lavori di SCHUBERT ⁽¹⁾, CASTELNUOVO ⁽²⁾, PIERI ⁽³⁾ e GIAMBELLI ⁽⁴⁾.

Alle notizie che precedono aggiungeremo l'osservazione esplicita che le più diverse condizioni algebriche possono venire espresse mediante condizioni caratteristiche, ricorrendo al metodo di degenerazione.

Si tratti per esempio di esprimere la condizione perchè una retta dello spazio ordinario tocchi una superficie d'ordine n . Facciamo degenerare la superficie in n piani: il sistema delle rette tangenti si ridurrà all'insieme degli $\frac{n(n-1)}{2}$ complessi lineari speciali formati dalle rette incidenti alle mutue intersezioni dei nominati piani, ciascun complesso dovendosi contare due volte, come si contano le rette per un punto doppio nell'involuppo d'una curva piana.

Ciò posto, la condizione di contatto di una retta con una superficie d'ordine n potrà venire designata con

$$(x) = n(n-1)(13).$$

Pertanto si dedurrà che il numero delle rette tangenti a tre superficie degli ordini n, m, p, q vale

$$\begin{aligned} (x)^4 &= nmpq(n-1)(m-1)(p-1)(q-1)(13)^4 = \\ &= 2nmpq(n-1)(m-1)(p-1)(q-1). \end{aligned}$$

Un altro esempio viene offerto dal problema delle triseccanti e quadrisecanti delle curve gobbe: la trattazione di questo problema col metodo di degenerazione, che abbiamo spiegato nel § 43, si lascia tradurre facilmente col simbolismo di SCHUBERT. Diventa quindi possibile l'estensione al caso in cui si tratti di determinare in generale gli spazi pluriseccanti ad una curva data in un iperspazio. Questo problema

⁽¹⁾ Acta mathematica, t. 8, 1886.

⁽²⁾ Rendiconti della Acc. dei Lincei, 1889.

⁽³⁾ Tre note nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1893, 1894, 1895.

⁽⁴⁾ Memorie dell'Accademia di Torino, 1902.

generale è stato trattato da CASTELNUOVO, TANTURRI, SEVERI e GIAMBELLI ⁽¹⁾, ecc.

47. Il principio di conservazione del numero e la critica contemporanea. — Le molteplici applicazioni e conferme di diverso ordine attestano ampiamente la fecondità del principio di conservazione del numero, porgendone in qualche modo una dimostrazione sperimentale, *a posteriori*. Ma, secondo l'esigenza razionale della costruzione matematica, occorre accertare il suo valore *a priori*, che solo può garantirci contro il dubbio di possibili errori.

Ora la dimostrazione razionale del principio di conservazione del numero è fondata sulla continuità delle relazioni algebriche, in quella misura in cui si è certi che le soluzioni del problema particolare, a cui ci riferiamo per determinare il « numero » cercato, sono soltanto le soluzioni-limiti del problema generale. Il che può venire accertato nei vari casi da un'analisi appropriata, ma lascia sussistere un dubbio quanto all'applicazione generale del principio.

Del qual dubbio si fece autorevole interprete lo HILBERT in una Conferenza « sur les problèmes futurs des mathématiques » tenuta nel Congresso matematico di Parigi del 1900. E non tardarono le critiche di STUDY e di KOHN (1903) che, adducendo esempî di eccezione, sollevarono gran rumore fra i geometri, specialmente nel Congresso di Heidelberg del 1904.

Qui conviene osservare che, per diversi motivi, i nostri ambienti scientifici appaiono assai disposti ad ingrandire il peso dei dubbi o delle difficoltà che si sollevino contro qualche acquisto o metodo, allorquando una critica negativa viene presentata da qualche uomo autorevole senza approfondire i motivi che, spiegando il dubbio o l'eccezione, dovrebbero illuminare l'aspetto positivo della questione. Per fortuna in questo caso — come in altri — i dubbi non fermarono l'opera di progresso della geometria numerativa; uno dei massimi cultori di questa, lo ZEUTHEN, si limitò a rispondere che il principio di conservazione del numero va adoperato *bene*, cioè

(1) Cfr., anche per la bibliografia, la memoria di GIAMBELLI pubblicata dall'Accademia di Torino nel 1908. Tuttavia si consiglia di iniziare la lettura di queste ricerche cominciando da quelle meno generali.

colle cautele note a chi è avvezzo ad adoperarlo, le quali non consentirebbero ad alcuno di cadere — per errore — nei casi d'eccezione segnalati dalla critica.

Troviamo qui il concetto aristocratico della scienza, proprio di coloro che, fidandosi ad un'alta intuizione, aprono le vie del progresso; ma di fronte a quello la storia mostra il continuo affermarsi della tendenza democratica che, traducendo l'intuizione dello scopritore in termini logici, vuol dare a *tutti* il mezzo di riconoscere ed appurare la verità.

In questo caso bastava approfondire l'esame delle stesse eccezioni sollevate dai critici, per rispondere ad ogni dubbio e porre il principio della conservazione del numero sopra una base rigorosa. Il che è stato fatto dal SEVERI (1912) in una memoria « Sul principio della conservazione del numero » (¹), ove si trova anche un cenno dei tentativi precedenti.

Esaminiamo dunque le eccezioni addotte da KOHN e da STUDY. Fra queste troviamo anzitutto delle eccezioni irrilevanti, relative a casi in cui il problema proposto si traduce con *diseguaglianze* anzichè con *equazioni* algebriche.

Così il KOHN osserva che il numero delle rette incidenti ad una quaterna di rette in 4 punti *distinti*, si abbassa da 2 ad 1 quando due rette della quaterna s'incontrino: infatti in tal caso una delle due soluzioni del problema generale ha per limite la retta che passa per il punto d'incontro e s'appoggia alle altre due della quaterna. Però la condizione che esclude la coincidenza di due punti in un dato gruppo, non si esprime con un'equazione algebrica ma con una disequaglianza.

Similmente lo STUDY considera le intersezioni di due cubiche gobbe, C_1 e C_2 , tracciate sopra un medesimo cono quadrico il cui vertice O è comune ad esse; vi sono in generale 4 punti comuni a C_1 e C_2 fuori di O ; ebbene, quando si faccia degenerare C_1 in tre generatrici del cono per O , il numero delle intersezioni di C_1 e C_2 fuori di O si riduce a 3! Ma è facile riconoscere che ciò avviene perchè uno dei 4 punti del caso generale si avvicina indefinitamente ad O nella direzione della tangente a C_2 . E già — *a priori* — può dirsi che la condizione imposta ai 4 punti di essere fuori di O , *strettamente intesa*, si traduce con una *disequaglianza*; nel senso

(¹) Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, t. 33, (10 Marzo).

largo che le si conferisce di solito, codesta condizione viene espressa dall' *equazione* che si ottiene cercando i punti comuni a C_1 e C_2 e liberandosi (una volta) del fattore corrispondente al punto fisso comune O ; ma in tal caso non si esclude che « per certe particolarizzazioni qualcuno dei 4 punti cercati, fuori di O , venga a sovrapporsi ad O ».

Maggior valore hanno le eccezioni seguenti.

Si consideri, nello spazio ordinario, un luogo V costituito dall'insieme di una superficie f d'ordine n e di una curva C : $V = f + C$. Una retta generica ha con V n punti comuni, che sono le sue intersezioni con f ; ma, se la retta viene ad incontrare la curva C , il numero dei punti che essa ha comuni con V diviene $n + 1$.

Un'altra *eccezione* costituisce l'esempio più celebre addotto nella critica dello STUDY: il numero delle *proiettività* che lasciano invariata una *quaterna* di punti sopra la retta è in generale 4 (compresa l'identità), ma esso diventa rispettivamente 8 e 12 nei casi armonico ed equianarmonico. Ora questo caso si lascia ridurre allo stesso tipo della eccezione precedente. Per il che giova esaminare la questione in tutta la sua generalità.

Per precisare in generale le condizioni di validità del principio della conservazione del numero, giova riferirsi al significato algebrico del principio stesso, svolgendo le considerazioni che seguono.

Pongasi che per un ente Γ , dipendente da certi parametri, si abbia in generale un numero finito n di soluzioni di un dato problema algebrico. Supporremo dapprima per semplicità che gli enti Γ si possano rappresentare coi punti di uno spazio lineare ad r dimensioni $S_r = (x_1 x_2 \dots x_r)$, cioè che essi dipendano univocamente da r parametri indipendenti. La nostra ipotesi porta che, per un punto generico (x) di S_r , esista un numero finito di soluzioni di un problema algebrico in cui le x_i figurano come parametri; codeste soluzioni corrisponderanno ai valori di certe quantità $y_1 \dots y_s$, radici di un sistema di equazioni

$$1) \quad f_i(x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_s) = 0;$$

così il sistema 1) ammetterà in generale un numero finito $n > 0$ di soluzioni $(y_1 \dots y_s)$. Ove si consideri lo spazio ad $r + s$

dimensioni $S_{r+s} = (x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_s)$, si ha dentro questo una varietà V rappresentata dal sistema 1), la quale interseca in n punti lo spazio lineare generico S_s rappresentato dalle equazioni

$$x_1 = \text{cost.} \dots x_r = \text{cost.} :$$

questo è il significato della ipotesi precedente.

Ora il principio della conservazione del numero afferma che, per ogni posizione particolare di S_s , la V avrà con S_s n intersezioni, tranne il caso che abbia con essa a comune una curva o superficie ecc. Questa affermazione è stata già giustificata nel caso che la V sia una varietà irriducibile di dimensione r nello S_{r+s} (cfr. § 14, pag. 102). La stessa affermazione continua a sussistere anche nel caso che la V si spezzi in più varietà irriducibili, ugualmente di dimensione r . Ma si ha invece una *eccezione essenziale* al principio se la V sia composta di varietà di dimensione diversa, cioè contenga, insieme a parti di dimensione r , anche parti costituenti varietà con un numero minore di dimensioni, le quali non hanno in generale alcuna intersezione con un S_s .

Il ragionamento svolto si estende ora al caso che gli enti Γ non siano più suscettibili di essere rappresentati dai punti di uno spazio lineare S_r , ma costituiscano una varietà algebrica a r dimensioni, W_r , entro un $S_{r+t} = (x_1 \dots x_{r+t})$, la quale sarà rappresentata da un sistema di $p \geq t$ equazioni

$$2) \quad \varphi_h(x_1 \dots x_{r+t}) = 0.$$

Infatti questo caso si riconduce al precedente ove si consideri, nello $S_{r+s+t} = (x_1 \dots x_{r+t}, y_1 \dots y_s)$, la varietà V di dimensione r rappresentata dal sistema di equazioni

$$f_i = 0, \quad \varphi_h = 0;$$

se la W_r di S_{r+t} era di ordine m , accade ora che la nominata V sia intersecata da un S_{s+t} $x_i = \text{cost.}$ ($i = 1, 2 \dots r$) di S_{r+s+t} in nm punti, essendo n il numero delle soluzioni y fornite dal sistema 1) in corrispondenza ad ogni punto x di W_r . Questo numero d'intersezioni rimane costante al variare di S_{s+t} se la V è una varietà irriducibile di dimensione r o consta di parti della stessa dimensione; si ha un'eccezione essenziale se la V contiene una parte di dimensione inferiore.

In conclusione potremo riassumere la nostra critica dicendo: *il principio della conservazione del numero sussiste per condizioni algebriche irriducibili o per condizioni equivalenti alla somma di condizioni irriducibili della stessa dimensione; fa eccezione il caso in cui la condizione imposta si scinda nella somma di condizioni di dimensioni differenti*, nel qual caso non si può nemmeno dire che la condizione di cui si tratta abbia una dimensione (cfr. L. 1°, § 23, Vol. I, pag. 138).

Al lume del risultato generale ottenuto riprendiamo l'esempio di STUDY relativo al numero delle proiettività che lasciano invariata una quaterna di punti sopra la retta.

Accade qui che, esprimendo le condizioni perchè una proiettività, non identica, lasci ferma una quaterna di punti G_4 , si trova che questa non è irriducibile, ma si scinde nella somma delle seguenti condizioni irriducibili:

α) Condizione affinchè una proiettività sia involutoria e lasci fissa una quaterna, permutandone tutti i punti.

β) Condizione affinchè una proiettività sia involutoria e lasci fissa una quaterna permutandone due soli punti.

γ) Condizione affinchè una proiettività sia ciclica del terz'ordine e lasci invariata una quaterna.

δ) Condizione affinchè una proiettività sia ciclica del quart'ordine e lasci invariata una quaterna.

Ebbene la condizione α, equivalente a fissare che una proiettività sia involutoria e possenga due coppie di punti coniugati è di dimensione 3, sicchè data una quaterna vi è in generale un numero finito di proiettività che la soddisfano. Invece le condizioni β, γ, δ sono di dimensione 4, sicchè nella varietà ∞^3 delle proiettività sulla retta non se ne trova alcuna che soddisfi a una delle condizioni suddette rispetto ad una quaterna scelta in modo generico: la particolarizzazione proiettiva della quaterna conduce così a trovare un maggior numero di proiettività che la lasciano invariata.

Osservazione. Al termine della sua citata memoria, SEVERI fa rilevare che nel problema degli spazi secanti si tratta sempre di condizioni di ugual dimensione, e così il risultato della critica è pienamente rassicurante quanto all'uso del principio di conservazione del numero e del calcolo simbolico, in questo campo di ricerche.

LIBRO QUARTO

LE SINGOLARITÀ
DELLE CURVE ALGEBRICHE

La teoria generale delle singolarità costituisce un argomento d'importanza capitale per la scienza delle curve e delle funzioni algebriche. Un primo risultato di codesta teoria consiste nella possibilità di trasformare una curva dotata di singolarità qualunque in un'altra dotata soltanto di singolarità ordinarie o più semplicemente di nodi, riuscendo così a eliminare, in un vasto ordine di questioni, la considerazione diretta di singolarità superiori. Ma sarebbe in errore chi credesse che codesto risultato possa tener luogo, a tutti gli effetti, di uno studio diretto dei punti singolari, giacchè tale studio s'impone in numerosi problemi, dove appunto la presenza di singolarità rende ragione di paradossi e di eccezioni, ed un'analisi approfondita di quelle porge il mezzo di scoprire nuove e più riposte verità.

La trattazione contenuta in questo libro vuole mettere in luce tre aspetti essenziali della dottrina: un aspetto *aritmetico* che si manifesta nello studio dei rami fondato sopra gli sviluppi in serie di PUISEUX (Cap. I); un aspetto più propriamente *geometrico*, in rapporto colla teoria basata sulle trasformazioni quadratiche (Cap. II); e finalmente l'aspetto del *Calcolo differenziale*, a cui si riferisce il Cap. III.

Una breve Appendice tende a completare lo studio delle singolarità delle curve piane, a cui si limitano gli sviluppi dei tre capitoli anzidetti, accennando ai problemi che sorgono dalla considerazione delle curve gobbe e delle superficie.

Uno studio così approfondito da diversi punti di vista pare necessario per guadagnare quella intima conoscenza delle singolarità che, come abbiamo detto, è richiesta nelle

ricerche elevate. Ma al principiante conviene additare un programma più limitato.

A tale scopo proponiamo di seguire il seguente ordine, cui si collega una esperienza d'insegnamento:

1) teorema di PUISEUX sugli sviluppi in serie;

2) caso dei rami lineari, definizione in questo caso dei punti multipli infinitamente vicini, esempio dei punti doppi successivi;

3) decomposizione delle singolarità mediante trasformazioni quadratiche e teorema di NÖTHER.

Questo programma limitato risponde al concetto d'indicare, mediante l'esame dei casi e delle questioni più semplici, i criteri direttivi che valgono ad orientare nella dottrina, ed in special modo a illustrare in più sensi *l'effettiva esistenza dei punti infinitamente vicini*, che di essa costituisce il principale acquisto.

Per chi desideri approfondire la teoria delle singolarità, segnatamente nei riguardi del Calcolo infinitesimale, apprendendo il significato e la forma delle condizioni differenziali che caratterizzano i nominati punti infinitamente vicini, vale l'avvertenza che il terzo Capitolo di questo libro può essere riattaccato immediatamente al primo, sebbene gli sviluppi del Cap. II sulle singolarità-limiti ne costituiscano un antecedente storico atto a chiarirne il criterio direttivo.

Nella nostra esposizione concetti e risultati nuovi trovansi fusi e coordinati con ricerche classiche; per la comprensione storica dell'argomento rimandiamo alla Notizia che chiude il Cap. III.

CAPITOLO I

Le singolarità e gli sviluppi in serie di Puiseux.

1. **Sviluppi di Puiseux: separazione dei rami.** — Si consideri la funzione algebrica $y(x)$ definita dall'equazione d'ordine n in y

$$f(xy) = 0.$$

In un punto generico x_0 , del piano complesso x , si hanno n valori distinti della $y: y_1^{(0)}y_2^{(0)}\dots y_n^{(0)}$. Ciò essendo, si può anche descrivere un cerchio C , di centro x_0 , per modo che in esso non cada alcun punto critico, radice del discriminante della funzione $y(x)$. Allora ad ogni x entro C corrisponderanno n valori distinti e ben determinati della $y: y_1y_2\dots y_n$, riattaccantisi per continuità a $y_1^{(0)}y_2^{(0)}\dots y_n^{(0)}$. I suddetti valori costituiscono, entro C , n funzioni analitiche distinte, rappresentabili mediante serie di potenze di $x - x_0$.

Pongasi ora che x_0 sia un punto singolare critico per la funzione algebrica, corrispondendo ad un punto O multiplo per la curva $f(xy) = 0$, o ad un punto di contatto di una tangente $y = \text{cost}$. In questo caso alcuni fra i valori $y_1^{(0)}y_2^{(0)}\dots y_n^{(0)}$ coincidono fra loro; possiamo supporre che (il punto O essendo collocato nell'origine delle coordinate x, y) sia $x_0 = 0$, e si abbiano più valori $y_i^{(0)}$ coincidenti in $y = 0$.

Descriviamo attorno al punto 0 , nel piano della variabile complessa x , un cerchio C così piccolo da escludere qualsiasi altro punto critico della funzione $y(x)$. Allora ad un punto \bar{x} di C , fuori di 0 , corrispondono sempre n valori distinti di $y(x): \bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_n$. Facciamo muovere un tal punto x , entro C , descrivendo una linea continua l , che non passi per 0 . Per ogni punto di questa linea vengono definiti n valori $y_1^{(x)}y_2^{(x)}\dots y_n^{(x)}$, che si riattaccano senza ambiguità — come prolungamento analitico — ad $\bar{y}_1\bar{y}_2\dots\bar{y}_n$. Se in particolare

la linea l compie un giro attorno ad $x=0$, ritornando al punto di partenza, resteranno definiti in questo n valori

$$\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n,$$

che — a parte l'ordine — riprodurranno nel loro insieme il gruppo di valori

$$\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n.$$

Dunque un giro della variabile x attorno ad $x=0$ produce una sostituzione sugli n valori corrispondenti di $y(x)$: $y_1 y_2 \dots y_n$.

Questa (come ogni altra) sostituzione si decomporrà in *sostituzioni cicliche* del tipo:

$$(y_1 y_2 \dots y_\nu),$$

ed è chiaro che la natura di tali sostituzioni dipende soltanto dalla natura del punto singolare $x=0$ e non dalla scelta del punto x con cui s'inizia il giro entro C . Se il giro attorno ad $x=0$ produce h sostituzioni cicliche

$$(y_1 y_2 \dots y_\nu), (y_{\nu+1} \dots y_\nu), \dots,$$

la funzione algebrica $y(x)$, considerata nell'intorno di $x=0$, si decompone in h funzioni poldrome irriducibili che costituiscono h rami della curva. Alcuni di questi rami saranno — nelle ipotesi fatte — funzioni $y_i(x)$ che si annullano per $x=0$, cioè rami nell'intorno dell'origine O (cfr. L. 1°, § 11), altri assumeranno valori diversi.

Consideriamo un ciclo *d'ordine* ν :

$$(y_1 y_2 \dots y_\nu),$$

dove

$$y_i = 0 \quad \text{per} \quad x = 0.$$

Posto

$$x = t^\nu$$

la funzione $y_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, \nu$), definita come funzione a ν valori nell'intorno di $x=0$, diviene una funzione $y_i(t)$; dico che quest'ultima funzione è *regolare* (ad un valore) nell'intorno di $t=0$.

Infatti l'argomento di $x = t^\nu$ è ν volte l'argomento di t , sicchè se a partire da un certo valore t_1 di t , prossimo allo zero, si fa compiere a t un giro intorno a $t = 0$, x compie ν giri intorno ad $x = 0$, di guisa che ciascun y_i , subendo la sostituzione identica $(y_1 y_2 \dots y_\nu)^\nu$, ritorna in se stesso. c. d. d.

Convieni osservare che l'enunciato precedente è d'accordo col fatto che la funzione

$$t = x^\nu$$

ha ν valori

$$t_1, \quad t_2 = t_1 e^{\frac{2\pi i}{\nu}}, \dots, \quad t_\nu = t_1 e^{\frac{(\nu-1)2\pi i}{\nu}}$$

nell'intorno di $x = 0$, e questi valori si permutano per un giro attorno al detto punto secondo la sostituzione ciclica

$$(t_1 t_2 \dots t_\nu).$$

Si deduce che il ramo della funzione algebrica $y(x)$, corrispondente al ciclo $(y_1 y_2 \dots y_\nu)$, si può rappresentare sviluppando y in ν serie di potenze per $t = x^{\frac{1}{\nu}}$:

$$y = at + bt^2 + \dots;$$

le ν serie vengono dedotte l'una dall'altra cambiando t in εt , ove si designi con ε una delle radici ν -me dell'unità:

$$e^{\frac{2\pi i}{\nu}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{\nu}}, \dots;$$

ciò porta che si passi dall'una all'altra serie moltiplicando il coefficiente di t^n per ε^n . Per uno stesso valore di t le ν serie coniugate porgono i valori $y_1 y_2 \dots y_\nu$ d'un medesimo ciclo.

PUISEUX (1851), a cui appartiene l'analisi precedente, concepisce il ramo $y(x)$ come il gruppo delle anzidette ν serie coniugate, e perciò lo designa col nome di *ciclo* (usato poi anche da HALPHEN). Il concetto sintetico dei rami come *elementi* dell'ente « funzione » $y(x)$, cioè come funzioni analitiche irriducibili nell'intorno dell'origine, è di WEIERSTRASS; il nome « rami », già usato per la distinzione delle linee

elementari reali incontrantisi nel punto singolare, s' introduce qui con CAYLEY ⁽¹⁾ e NÖTHER.

Noi approfitteremo di questa varietà di denominazioni per distinguere l'ordine ν del ciclo, cioè l'ordine di ploidromia della funzione elementare $y(x)$, e l'ordine del ramo, pensato come « curva » indipendentemente dalla sua rappresentazione analitica, cioè la molteplicità per esso dell'origine O , che è anche il numero delle intersezioni del ramo con una retta generica vicina ad O .

Per un ramo riferito ad assi coordinati in posizione generica l'ordine del ramo è uguale a quello del corrispondente ciclo, avendosi lo sviluppo in serie

$$y = a_1 x + a_2 x^{\frac{1+\nu}{\nu}} + \dots$$

con $a_1 \neq 0$, che, per $y = zx + \beta$ con β piccolo, dà in generale ν valori di x prossimi allo zero. Ma il detto ramo d'ordine ν possiede una tangente, che è la retta

$$y = a_1 x,$$

e, quando si assuma questa retta come asse y , l'ordine del ciclo (corrispondente) diventa $> \nu$.

Pongasi che nell'indicato sviluppo manchino alcuni dei termini successivi al primo; ove si designino soltanto i termini non nulli, si avrà uno sviluppo del tipo

$$1) \quad y = a_1 x + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_3 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots,$$

con

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0 \dots$$

Allora la tangente $y = a_1 x$ avrà, col ramo, $\nu + \nu'$ intersezioni, ed il ramo stesso si dirà di classe ν' (HALPHEN): se si assume come asse y la tangente ad un ramo d'ordine ν e di classe ν' ,

(1) CAYLEY distingue anche i rami parziali che corrispondono ai ν fogli della superficie di RIEMANN della funzione $y(x)$: quando due punti A e B d'un ramo si muovono avvicinandosi all'origine O sopra uno stesso ramo parziale, la retta AB tende alla tangente del ramo; invece se A e B s'avvicinano ad O sopra rami parziali diversi, la retta AB tende in generale ad una retta qualunque per O .

L'ordine del ciclo diventa $\nu + \nu'$, cioè *il ramo viene rappresentato da una serie precedente per la potenza di $x^{\frac{1}{\nu+\nu'}}$* . Infatti, nell'ipotesi dell'enunciato, si ha nell'intorno del punto $x=0$ una funzione polidroma a $\nu + \nu'$ valori $y_i(x)$ che si annullano tutti per $x=0$, e si tratta di riconoscere che questi formano un ciclo irriducibile ($y_1 y_2 \dots y_{\nu+\nu'}$). L'irriducibilità si dimostra per assurdo, giacchè altrimenti cambiando gli assi — per es. permutandoli fra loro coll'inversione della serie $y_i(x)$ — si otterrebbero più rami anzichè uno solo.

Più in generale la somma degli ordini dei cicli ($y_1 y_2 \dots y_\nu$) per cui $y_i=0$, cioè $\Sigma \nu$, è l'ordine d'infinitesimo della funzione $f(y,0)$, ossia la molteplicità con cui l'origine figura nel gruppo delle intersezioni della curva f con l'asse y . Quest'ordine dipende dalla molteplicità del punto $O=(0,0)$ per la curva f e dalla posizione degli assi: se gli assi sono in posizione generale, $\Sigma \nu$ è l'ordine di molteplicità r del punto O . Invece se l'asse y ha un contatto d'ordine r' colla curva f toccando uno o più rami di essa, così da assorbire altre r' intersezioni, si ha

$$\Sigma \nu = r + r'.$$

Ricapitoleremo le cose dette enunciando il

Teorema: *Nell'intorno d'un punto r -plo qualsiasi ($r \geq 1$) (collocato nell'origine delle coordinate) una curva $f(x,y)=0$ si decompone in un certo numero $h \leq r$ di rami, degli ordini $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_h$, dove*

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_h = r;$$

i quali, rispetto ad un sistema di assi coordinati generici coll'origine nel punto, vengono rappresentati da sviluppi in serie di potenze delle variabili $x^{\frac{1}{\nu_i}}$.

I rami d'ordine $\nu_i=1$ diconsi anche *lineari*, e — per contrapposto — quando $\nu_i > 1$ *superlineari*.

Giova avvertire che per un ramo 1) d'ordine ν , e non minore, i numeri $\nu, \nu', \nu'' \dots$, cioè gli esponenti a cui viene elevata la $x^{\frac{1}{\nu}}$, non possono avere tutti un medesimo divisore comune $\rho > 1$; altrimenti lo sviluppo 1) si convertirebbe in una serie procedente per le potenze di $x^{\frac{\rho}{\nu}}$, sicchè la $y_i(x)$ ritornerebbe

in se stessa dopo $\frac{\nu}{\rho}$ giri anzichè — come si è supposto — dopo ν giri, fatti intorno all'origine sul piano della variabile complessa x .

Osservazione. La sostituzione di PUISEUX

$$x = t^\nu,$$

si può concepire come una *trasformazione razionale* della curva $f(xy) = 0$ in una curva $F(yt) = 0$, che ha nell'origine ν rami lineari, non tangenti all'asse y , in corrispondenza ad un ramo d'ordine ν della f orientato in modo generico, (o in generale ad un ciclo d'ordine ν). Se la f possiede h rami d'ordine $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_h$, colla sostituzione

$$x = t^\mu$$

ove μ è multiplo di $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_h$, si otterrà una curva trasformata $F(yt) = 0$, dotata soltanto di rami lineari, e dalla rappresentazione analitica di questi si dedurranno le serie di PUISEUX relative ai rami di f .

Questa osservazione riconduce il *calcolo effettivo degli sviluppi di PUISEUX* al calcolo delle *serie di TAYLOR* che rispondono ai rami lineari d'una curva trasformata, di cui tratteremo nel § 3 e di nuovo nel Cap. III. Infatti si può assumere *a priori*

$$\mu = r!,$$

designando r la molteplicità di O per f .

Più avanti (e segnatamente nei Cap. II e III) vedremo come si raggiunge l'economia del calcolo, determinando gli ordini dei rami $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_h$.

2. Nota sulla rappresentazione parametrica dei rami, e sulle trasformazioni puntuali. — Si consideri un ramo d'ordine ν , definito mediante la rappresentazione parametrica:

$$1) \quad \begin{cases} x = t^\nu \\ y = a_1 t^\nu + a_2 t^{\nu+\nu'} + a_3 t^{\nu+\nu'+\nu''} + \dots \\ (a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0 \dots). \end{cases}$$

Conserviamo il parametro t e facciamo compiere agli assi x, y

una rotazione attorno all'origine, ponendo

$$2) \quad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ Y = \beta_1 x + \beta_2 y. \end{cases}$$

Rispetto alle nuove coordinate, il ramo 1) verrà rappresentato dalle formule

$$3) \quad \begin{cases} X = (\alpha_1 + \alpha_2 a_1) t^\nu + \alpha_2 t^{\nu'} \{ a_2 t^{\nu'} + a_3 t^{\nu'+\nu''} + \dots \} \\ Y = (\beta_1 + \beta_2 a_1) t^\nu + \beta_2 t^{\nu'} \{ a_2 t^{\nu'} + a_3 t^{\nu'+\nu''} + \dots \}; \end{cases}$$

ed è notevole che il parametro t compare nelle serie 3) come nelle 1) cogli stessi esponenti

$$\nu, \quad \nu + \nu', \quad \nu + \nu' + \nu'', \dots$$

In luogo della sostituzione lineare 2), eseguiamo sul piano (xy) una qualsiasi trasformazione puntuale che sia *regolare* nell'origine delle coordinate $x = y = 0$, e trasformi questo punto nell'origine delle nuove coordinate $X = Y = 0$; poniamo dunque:

$$4) \quad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 + \dots \\ Y = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_{11} x^2 + 2\beta_{12} xy + \beta_{22} y^2 + \dots \end{cases}$$

Il ramo 1) verrà così trasformato in un ramo la cui rappresentazione parametrica rientra nel tipo generale seguente:

$$5) \quad \begin{cases} X = c_1 t^\nu + c_2 t^{2\nu} + c_3 t^{3\nu} + \dots \\ \quad \quad \quad + \sum_{ik} c_{ik} t^{i\nu+ky'} + \sum_{ikl} c_{ikl} t^{i\nu+ky'+ly''} + \dots, \\ Y = d_1 t^\nu + d_2 t^{2\nu} + d_3 t^{3\nu} + \dots \\ \quad \quad \quad + \sum_{ik} d_{ik} t^{i\nu+ky'} + \sum_{ikl} d_{ikl} t^{i\nu+ky'+ly''} + \dots; \end{cases}$$

in parole:

Il ramo trasformato di 1) mediante una qualsiasi trasformazione puntuale regolare nell'origine, ammette una rappresentazione parametrica mediante serie procedenti per le potenze di t , dove figurano gli esponenti

$$i\nu + ky' + ly'' + \dots \\ (i \geq 1, \quad \text{e} \quad i \geq k \geq l \geq \dots \geq 0).$$

Nota. L'ordine del ramo resta invariabilmente ν ; la classe invece può variare, per una trasformazione puntuale non proiettiva. Per valutarla si può supporre eseguita una rotazione degli assi X, Y in guisa che si abbia nell'espressione 5)

$$c_1 = 0 \quad \text{oppure} \quad d_1 = 0,$$

cioè che l'asse Y ($X=0$) o rispettivamente l'asse X risulti tangente al ramo; supposto p. es. $d_1 = 0$, la rappresentazione del ramo diverrà del tipo

$$6) \quad \begin{cases} X = ct^\nu + \dots \\ Y = dt^\mu + \dots \end{cases}$$

con $\mu > \nu$ (e nel caso concreto $\mu = 2\nu$ o $\mu = \nu + \nu'$).

Una rappresentazione parametrica del tipo 6) (ove $\mu > \nu$) corrisponde ad un ramo d'ordine ν e di classe $\mu - \nu$.

Riprendiamo a considerare il ramo 5) nelle ipotesi più generali (assi X, Y orientati in modo generico).

Codesto ramo può essere rappresentato esprimendo Y con una serie procedente per

$$\tau = X^{\frac{1}{\nu}},$$

e la nuova rappresentazione parametrica si riduce alla 5) ponendo

$$7) \quad \tau^\nu = c_1 t^\nu + c_2 t^{2\nu} + \dots + \sum_{ik} c_{ik} t^{i\nu + k\nu'} + \dots$$

$$(c_1 \neq 0, \quad i \geq 1).$$

Siccome τ e t sono funzioni algebriche a ν valori di X , e codesti ν valori subiscono la medesima sostituzione circolare per un giro attorno ad $X=0$, la 7) si lascia ridurre ad una *sostituzione regolare* su τ , cioè alla sostituzione di τ con una serie che procede per le potenze intere di t , a cominciare dalla prima.

Se scriviamo

$$8) \quad \tau = \gamma t \{ 1 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots \},$$

la potenza ν -ma della serie rappresentata nel secondo membro, dovrà identificarsi colla serie che fornisce l'espressione 7) di τ^ν . Ma se $\gamma_1 \neq 0$, nello sviluppo di $\tau^\nu = X$ viene a figurare un termine in $t^{\nu+1}$, il che è impossibile se oltre ad essere $\nu > 1$ si ha anche $\nu' > 1$. Dunque da $\nu > 1$, $\nu' > 1$, segue intanto $\gamma_1 = 0$. In modo analogo si dimostra che la sostituzione 8) è del tipo:

$$9) \quad \tau = \gamma t \left\{ 1 + \delta_1 t^\nu + \delta_2 t^{2\nu} + \dots \right. \\ \left. + \sum_{ik} \delta_{ik} t^{i\nu + k\nu'} + \dots \right\},$$

cioè: la serie che — nel secondo membro — moltiplica t , contiene soltanto esponenti

$$i\nu + k\nu' + l\nu'' + \dots,$$

dove

$$i \geq k \geq l \geq \dots \geq 0.$$

Ora lo sviluppo di γ per $\tau = X^{\frac{1}{\nu}}$ sarà una serie la quale deve ridursi alla forma 5) quando si eseguisce sul parametro la sostituzione 9). Si deduce che:

Il ramo trasformato di 1) per mezzo della trasformazione regolare 4), ammette una rappresentazione in serie di Puiseux, del tipo:

$$10) \quad \begin{cases} X = \tau^\nu \\ Y = e_1 \tau^\nu + e_2 \tau^{2\nu} + \dots \\ \quad + \sum_{ik} e_{ik} \tau^{i\nu + k\nu'} + \sum_{ikl} e_{ikl} \tau^{i\nu + k\nu' + l\nu''} + \dots, \end{cases}$$

dove il parametro τ figura elevato ad esponenti

$$i\nu + k\nu' + l\nu'' + \dots$$

$$(i \geq 1, \text{ e } i \geq k \geq l \geq \dots \geq 0).$$

Ora l'espressione

$$11) \quad Y = e_1 X + e_2 X^2 + \dots + \sum_{ik} e_{ik} X^{\frac{i\nu + k\nu'}{\nu}} + \dots \\ (i \geq 1, \text{ e } i \geq k \geq \dots \geq 0),$$

costituirà lo sviluppo di Puiseux trasformato di 1) nelle coordinate X, Y . Quindi si può dire che: *Dato uno sviluppo*

di Puiseux

$$y = a_1 x + a_2 \cdot x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_3 \cdot x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots,$$

i numeri $\nu, \nu', \nu'' \dots$, che figurano negli esponenti della serie, presi come moduli, definiscono un corpo di numeri interi e positivi

$$i\nu + k\nu' + l\nu'' + \dots,$$

che è invariante rispetto ad ogni trasformazione puntuale regolare su x, y .

Osservazione. È lecito considerare la formola 11) come espressione generalizzata del ramo 1), rispetto ad una qualsiasi trasformazione puntuale (regolare).

3. Singularità con rami lineari: punti multipli infinitamente vicini. — Il teorema a cui ci ha condotto l'analisi di PUISEUX relativa ai punti r -pli di una curva f è affatto generale. Un caso specialmente notevole è quello in cui si abbiano r rami d'ordine 1 o — come si dice — *rami lineari*: è il caso in cui i rami della funzione $y(x)$, considerati nell'intorno del punto regolare, siano funzioni ad un valore di cui la prima derivata, e quindi anche tutte le successive derivate, restino finite. Poniamo, al solito, il punto r -plo nell'origine delle coordinate, assumendo assi x, y in posizione generale; gli r rami della funzione definita da

$$f(xy) = 0$$

saranno funzioni regolari

$$y_1(x) \quad y_2(x) \quad \dots \quad y_r(x),$$

che si annullano per $x=0$, (non permutandosi fra loro per un giro attorno al punto suddetto). Perciò l'intorno della curva f può essere rappresentato mediante sviluppi in serie di potenze intere:

$$y_1(x) = ax + bx^2 + \dots$$

$$y_2(x) = cx + dx^2 + \dots$$

.....

Due rami — p. es. y_1, y_2 — potranno avere un contatto

d'un certo ordine, coincidendo i primi coefficienti dei relativi sviluppi:

$$a = c, \quad b = d, \dots;$$

in tal caso si dice che i due rami, aventi comuni le parabole osculatrici fino all'ordine i incluso, hanno in comune (oltre O) *i* punti infinitamente vicini successivi ad esso. Ma, per s assai elevato, si troveranno certo due termini in x^{s+1} con coefficienti distinti.

Determiniamo s in guisa che due qualsiasi fra i rami y_i, y_k abbiano al più s punti comuni successivi all'origine O , e che esistano effettivamente due rami aventi un contatto d'ordine s (cioè $(s+1)$ -punto); si dirà allora che il punto multiplo O è una *singolarità di specie s* per la curva f . Per un punto multiplo *ordinario*, a tangenti distinte, si ha $s=0$, non essendovi alcun contatto fra i rami lineari.

Per rappresentare convenientemente la curva f nell'intorno del punto multiplo O di specie s , conviene tener conto di un ordine d'approssimazione abbastanza elevato in cui la curva può essere sostituita da r parabole d'ordine $> s$ osculatrici ai rami di f . Tali parabole sono tutte distinte l'una dall'altra ed hanno fra loro i medesimi contatti che i rami di f .

Ora la *singolarità di specie s* si può ritenere costituita da *punti multipli infinitamente vicini ad O , succedentisi sui rami lineari per O* . Se un ramo y_1 è tangente ad altri $r_1 - 1$, il punto O_1 , infinitamente vicino ad O sulla tangente al detto ramo, si deve ritenere come multiplo d'ordine r_1 ($r_1 \leq r$); se poi lo stesso ramo ha un contatto 3-punto con altri $r_2 - 1$ rami, il punto O_2 , che succede ad O_1 su questi rami (o sulla parabola di 2° ordine osculatrice), deve ritenersi come r_2 -plo per f ($r_2 \leq r_1$), e così via.

La locuzione relativa ai punti multipli infinitamente vicini si giustifica ugualmente sotto l'aspetto geometrico ed analitico in base alle osservazioni seguenti:

1) Se la curva f possiede dei punti multipli infinitamente vicini O, O_1, O_2, \dots , d'ordine r, r_1, r_2, \dots , succedentisi sopra un ramo lineare (o sopra una parabola osculatrice) ogni curva che passi (semplicemente) per O ha ivi r intersezioni riunite con f ; ogni curva che passi per OO_1 ha ivi riunite $r + r_1$ intersezioni; ogni curva per OO_1O_2 ha riunite $r + r_1 + r_2$ intersezioni, ecc.

2) Il passaggio per i punti O, O_1, O_2, \dots si traduce in

$$\frac{r(r+1)}{2}, \quad \frac{r_1(r_1+1)}{2}, \quad \frac{r_2(r_2+1)}{2}, \dots$$

condizioni lineari per i coefficienti di f .

Anzitutto sappiamo che, per una curva f , il possesso di un punto r -plo nell'origine O si traduce in $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni, dovendo il polinomio f cominciare coi termini di grado r :

$$f = f_r(xy) + f_{r+1}(xy) + \dots$$

Ora se si vuole che ogni curva tangente a una retta per O , per esempio all'asse $y=0$, abbia $r+r_1$ intersezioni riunite con f , è necessario e sufficiente che f si riduca di grado $r+r_1$ in x quando si pone successivamente

$$y=0, \quad y=x^2, \quad y=x^3, \dots, y=x^{r_1};$$

onde si ottengono appunto altre $\frac{r_1(r_1+1)}{2}$ condizioni. Ed è chiaro come il ragionamento si prosegua.

Le suddette condizioni relative ad O_1, O_2, \dots (lineari nei coefficienti di f), si lasciano esprimere semplicemente come *condizioni differenziali* che, come vedremo più tardi, appaiono anche quali *condizioni limiti* di quelle relative alla esistenza di un punto r_1 -plo che s'avvicina ad O nella direzione OO_1 , e poi di un punto r_2 -plo che si avvicina ad O_1 sopra la parabola di second'ordine OO_1O_2 , e così di seguito.

Per scrivere le condizioni differenziali anzidette conviene muovere dall'osservazione seguente: se la curva $f(xy)=0$ possiede, riunite nell'origine, i intersezioni con una parabola $y=\varphi(x)$, si annullano insieme ad f i differenziali successivi $df, d^2f, \dots, d^{i-1}f$ calcolati sopra la curva φ . Infatti, si designi con y l'ordinata del punto di φ che ha come ascissa x , e si designino con y_k le ordinate dei punti di f che hanno la medesima ascissa; il numero delle intersezioni di f e φ è dato (L. 3°, § 12) dall'ordine di infinitesimo del prodotto

$$\Pi(y - y_k'),$$

cioè dall'ordine di infinitesimo della funzione $f(xy)$ calcolata

sopra la parabola φ . Si dovranno dunque annullare i differenziali successivi di f , calcolati nell'ipotesi che y sia funzione di x : $y = \varphi(x)$; così otteniamo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y = 0$$

dove

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(o), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(o); \dots$$

Svilupperemo più avanti il calcolo delle condizioni differenziali a cui conduce il procedimento sopra accennato. Qui occorre avvertire che codeste condizioni, come la proprietà geometrica 1) di cui sono la traduzione analitica, corrispondono non soltanto a curve f costituite di rami lineari e possedenti i punti multipli successivi O_1, O_2, \dots secondo la definizione data innanzi, bensì anche a curve f possedenti rami non lineari, sebbene il primo caso appaia da questo punto di vista il caso *generale*. Pertanto si estende qui naturalmente la definizione data dei punti multipli infinitamente vicini succedentisi su rami lineari: si dirà che la f possiede i punti successivi: O, O_1, O_2, \dots con le molteplicità r, r_1, r_2, \dots quando tutte le parabole passanti per OO_1 hanno $r + r_1$ intersezioni con f riunite in O , tutte le parabole per OO_1O_2 hanno $r + r_1 + r_2$ intersezioni, ecc.

Questa definizione più generale si accorderà anche con quella che avremo luogo di sviluppare in seguito, indipendentemente dalla restrizione che i punti O_1, O_2, \dots succedano ad O sopra un ramo lineare, basandoci sull'analisi dei rami d'ordine superiore.

Osservazione. Convieni rilevare esplicitamente che la definizione dei punti multipli successivi O_1, O_2, \dots è subordinata per ciascuno alla condizione che il precedente o i precedenti sieno già riconosciuti possedere la molteplicità assegnata. Così p. es. quando si dice che la f possiede un punto triplo ed un punto doppio infinitamente vicini O, O_1 , si pongono dapprima sei condizioni per O e poi altre tre relative ad O_1 , il cui valore è subordinato ad essere O un punto triplo per f .

Più precisamente si avverta che: Le condizioni perchè f abbia in O un *punto triplo* possono essere soddisfatte in *senso largo* e in *senso stretto*. Esse sono soddisfatte in senso largo, se ogni retta o curva per O ha ivi riunite *almeno* 3 intersezioni con f , cioè O è triplo o quadruplo ecc. per f ; sono verificate in senso stretto se le rette (o curve) passanti (semplicemente) per O hanno *in generale* con f *soltanto* 3 intersezioni ivi riunite. Ora quando si scrivono le sei condizioni espressioni che f possiede O come punto triplo, o — come si dice — quando s'impone ad f di possedere in O la *molteplicità virtuale* 3, le suddette condizioni portano che la *molteplicità effettiva* di f in O sia ≥ 3 , nulla assicurandoci che esse debbano essere verificate in senso stretto, in guisa che codesta molteplicità effettiva sia proprio 3.

Pertanto se la f a cui si è imposto in O la molteplicità (virtuale) 3, viene ancora sottoposta alla condizione di possedere in O_1 la molteplicità (virtuale) 2, accade che:

1) se la molteplicità di O per f è effettivamente 3, il punto O_1 risulterà doppio almeno per f ;

2) ma, se p. es. la f acquista in O un punto 4-plo, le nostre condizioni esprimeranno soltanto che O_1 appartiene semplicemente ad f , giacchè *la singolarità costituita da un punto 4-plo O colla tangente OO_1 è un caso particolare di quella costituita da O 3-plo seguito da O_1 2-plo.*

Quest'osservazione vale a chiarire il senso della definizione data dei punti multipli infinitamente vicini e la distinzione fra *molteplicità effettive*, alle quali ci si riferisce di regola nel discorso geometrico, e *molteplicità virtuali*, quali risultano definite per mezzo delle condizioni differenziali o algebriche, ove non si aggiunga esplicitamente l'ipotesi che tali condizioni debbano essere soddisfatte in senso stretto, cioè che alle equazioni date si accompagni una ineguaglianza escludente molteplicità superiori.

Ritornando dopo questi chiarimenti alla definizione generale data innanzi, giova distinguere *punti multipli infinitamente vicini ad un punto* (proprio) O , appartenenti ai successivi intorni d'ordine 1, 2.... s . I punti O_1, O_2, \dots dell'intorno del 1° ordine sono caratterizzati dalle rette OO_1, OO_2, \dots , tangenti principali ad f in O ; designando con r_1, r_2, \dots le molteplicità di questi punti supposte ≥ 1 (cioè includendo anche i punti

semplici di f appartenenti al detto intorno), si ha

$$r_1 + r_2 + \dots = r.$$

I punti, semplici o multipli, di f appartenenti all'intorno del 2° ordine (su rami lineari) si troveranno su parabole per OO_1 o per OO_2 ecc.; essi potranno designarsi rispettivamente con

$$O_{11}, O_{12} \dots; O_{21}, O_{22} \dots; \dots$$

e le loro molteplicità con

$$r_{11}, r_{12} \dots; r_{21}, r_{22} \dots; \dots$$

Si avrà allora

$$r_{11} + r_{12} + \dots = r_1,$$

$$r_{21} + r_{22} + \dots = r_2,$$

$$\dots$$

In generale, nel caso delle *singularità costituite di rami lineari*, la somma delle molteplicità dei punti di f che appartengono all'intorno d'ordine h , e sono infinitamente vicini ad un punto multiplo $O_{\bar{r}}$, d'ordine \bar{r} , vale \bar{r} , perchè ci sono proprio \bar{r} parabole (d'ordine $\geq h$) osculatrici ad f passanti per $O_{\bar{r}}$.

4. Punti doppi successivi: tacnodo e cuspidi di seconda specie. — Illustriamo le cose dette innanzi riferendoci ad un semplice esempio. Si tratti di determinare le condizioni perchè una curva f posseda un certo numero di punti doppi infinitamente vicini O, O_1, \dots seguentisi sopra un ramo lineare. Anzitutto, se O è un doppio per f , si deve avere nel punto:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

e quindi, se O cade nell'origine:

$$f = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots$$

Aggiungasi la condizione che f posseda un punto doppio O_1 vicino ad O nella direzione $\frac{dy}{dx} = y'$, p. es. sull'asse $x: y' = 0$.

Per esprimere tale ipotesi dovremo scrivere che le parabole tangenti alla direzione y' hanno 4, anzichè 2, intersezioni con f .

A tale scopo, indicando con y_2 la derivata seconda $\frac{d^2y}{dx^2}$ relativa a una parabola generica, dovremo porre in $f(xy)$ $y = \frac{1}{2}y_2x^2$ e annullare identicamente rispetto ad y_2 i termini di grado 2 e 3 nello sviluppo:

$$f(xy) = f\left(x, \frac{y_2}{2}x^2\right) = a_{20}x^2 + a_{11}\frac{y_2}{2}x^3 + a_{30}x^3 + a_{02}\frac{y_2^2}{4}x^4 + \dots;$$

si troverà dunque

$$a_{20} = 0, \quad a_{11} = 0,$$

$$a_{30} = 0.$$

Queste condizioni si ottengono anche annullando, per y_2 qualunque, le derivate seconde e terze di f calcolate sopra una parabola generica tangente all'asse x ; le quali — tenuto conto che $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ — si scrivono

$$f_2 = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y_2;$$

onde si trae:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0.$$

Dalle condizioni precedenti appare che: *la singolarità costituita da due punti doppi infinitamente vicini si deduce come caso particolare della cuspidè, quando s'imponga alla curva di avere un contatto quadripunto colla tangente.*

Infatti, se il punto doppio attribuito ad f in O deve essere una cuspidè tangente all'asse x , bisogna che sia:

$$a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \equiv y^2,$$

ossia

$$a_{20} = a_{11} = 0;$$

e se si vuole che codesto asse abbia con f un contatto quadri-

punto, anzichè tripunto, si deve scrivere:

$$a_{30} = 0.$$

Che cosa diremo ora dei rami della curva f nel punto O ?

In generale, quando la f possiede in O un nodo, vi sono due rami toccati da due diverse tangenti $y = y'x$: per determinare y' si pone $y = y_1x$ nel polinomio $f(xy)$ e si cercano i valori y' di y_1 per cui si annulla il coefficiente di x^2

$$\alpha) \quad a_{20} + a_{11}y_1 + a_{02}y_1^2 = 0.$$

Il trinomio che così viene annullato è — a meno di un coefficiente numerico — la derivata seconda della funzione identicamente nulla $f(x, y(x))$, che viene espressa da

$$f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y_1^2 = 0.$$

Dopo ciò si porrà

$$y = y'x + \frac{y_2}{2}x^2$$

e si determinerà il valore y'' di y_2 di guisa che la parabola così definita risulti osculatrice ad f ; a tale scopo occorrerà annullare il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $f\left(x, y'x + \frac{y_2}{2}x^2\right)$, e si troverà così l'equazione lineare in y_2

$$\beta) \quad \left(a_{02}y' + \frac{a_{11}}{2}\right)y_2 + \left(a_{30} + a_{21}y' + a_{12}y'^2 + a_{03}y'^3\right) = 0$$

che determina y'' .

La quale equazione si ottiene ugualmente annullando la derivata terza $f(x, y(x))$, cioè ponendo

$$f_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) f_2 = 0 \quad (1).$$

Supponiamo ora che il punto doppio, O , di f diventi una cuspide il che porta che y' sia radice doppia dell'equazione α);

(1) L'espressione generale delle derivate successive della funzione $f(x, y(x))$ si troverà nel Cap. III; gli sviluppi di questo paragrafo, ravvicinati a quelle formule, ne porgono una facile esemplificazione.

per semplicità di discorso pongasi $y' = 0$. Allora l'equazione β) a cui soddisfa y'' diventa impossibile (corrispondendo a $y'' = \infty$) poichè

$$a_{02}y' + \frac{a_{11}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y'} f_2 = 0,$$

almeno se non si annulla insieme il termine noto della β), che è $f_3 = a_{30}$, cioè finchè si rimane nel caso della cuspide ordinaria. Si deduce che in tal caso i due rami del nodo si confondono in un unico ramo del second'ordine, d'accordo con la circostanza già osservata nel L. 1°, § 11, chè altrimenti la f dovrebbe aver quattro intersezioni con la tangente cuspidale.

Quando sia invece $a_{30} = 0$, cioè il punto O_1 nella direzione y' diventi doppio per f , l'equazione β) svanisce identicamente: tutte le curve tangenti alla retta $y = y'x$ avranno quattro intersezioni riunite con la f e, scrivendo che la parabola

$$y = y'x + \frac{y_2}{2}x^2$$

ha cinque intersezioni con la f , si ottiene una equazione di secondo grado in y_2 che ha per radice due valori di $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, cioè i due valori di y'' corrispondenti a due rami di f tangenti alla retta $y = y'x$. Per $y' = 0$, l'anzidetta equazione a cui soddisfa y'' si scrive

$$\gamma) \quad a_{02} \left(\frac{y_2}{2} \right)^2 + a_{21} \frac{y_2}{2} + a_{40} = 0,$$

d'accordo coll'espressione della derivata quarta di $f(x, y(x))$.

Ora se la γ) possiede due radici distinte, cioè se il discriminante

$$a_{21}^2 - 4a_{40}a_{02} \neq 0,$$

la *singularità* costituita dai due punti doppi infinitamente vicini OO_1 consta di *due rami tangenti* che vengono approssimati dalle due parabole osculatrici $y = \frac{y''}{2}x^2$: una tale singularità dicesi *tacnodo*.

Per ciascun ramo si possono determinare le successive

parabole osculatrici, cioè i coefficienti dello sviluppo di Mac-Laurin che vengono portati dalle derivate successive:

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \dots$; a ciò si perviene, sia scrivendo la condizione perchè una parabola

$$y = \frac{y''}{2} x^2 + \frac{y_3}{3!} x^3$$

abbia 6 intersezioni con f , sia calcolando la derivata f_5 che contiene linearmente y''' .

Il coefficiente di y_3 nella equazione predetta vien dato dalla $\frac{\partial}{\partial y''} f_4$, e però si annulla quando la γ possessa una radice doppia: se ciò accade senza che l'equazione in y_3 svanisca identicamente ($f_5 \neq 0$), allora i due rami del tacnodo tornano a confondersi in un unico ramo del second'ordine, che costituisce la cosiddetta *cuspidè di seconda specie*. A sua volta la cuspidè di seconda specie si riduce alla singolarità, detta *tacnodo di seconda specie* o *oscunodo*, che viene costituita da due rami lineari con contatto tripunto, quando la radice doppia y'' di $f_4(y'') = 0$ annulli anche f_5 . Così seguitando si può riconoscere che:

La singolarità costituita da $s > 1$ punti doppi successivi ad O , sopra un ramo lineare, è in generale un tacnodo di specie s costituito da due rami lineari che hanno un contatto d'ordine s . Il tacnodo di specie s ha come caso particolare la cuspidè di specie s per cui i due rami lineari si confondono in un unico ramo del second'ordine; e questa a sua volta ammette come caso particolare il tacnodo di specie $s + 1$.

5. Rami di second'ordine. — Vogliamo ora estendere l'analisi delle singolarità, svolta innanzi pel caso dei rami lineari, in guisa da comprendere singolarità di qualsiasi natura. A tale scopo conviene studiare in modo approfondito i rami d'ordine > 1 o *superlineari*, e discutere il problema delle intersezioni o dei contatti che essi possono presentare.

Consideriamo dapprima un ramo del 2° ordine, che abbia la sua origine nell'origine delle coordinate, e suppongasi che sia $a_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}}$ il primo termine della serie il cui esponente è effettivamente fratto; per assi generici sarà $s \geq 1$, e la serie

assumerà in generale la forma

$$1) \quad y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_s x^s + a_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + a_{s+2} x^{s+1} + \dots,$$

dove

$$a_1 \neq 0, \quad a_{s+1} \neq 0,$$

mentre $a_2, \dots, a_s, a_{s+2}, \dots$ possono anche esser nulli.

Intersechiamo il ramo 1) col ramo lineare

$$2) \quad \bar{y} = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + b_{i+1} x^{i+1} + \dots,$$

dove i primi i coefficienti sono i medesimi che per la serie 1), mentre lo $(i+1)$ -mo coefficiente ha un valore qualunque.

Facciamo una dopo l'altra le due ipotesi seguenti:

$$1^a \text{ ipotesi: } i < s \quad (a_{i+1} \neq b_{i+1}).$$

I due valori di y essendo designati con

$$y_1 = a_1 x + \dots + a_s x^s + a_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y_2 = a_1 x + \dots + a_s x^s - a_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + \dots,$$

si debbono cercare (cfr. L. 3°, § 12) i valori di x per cui il prodotto

$$3) \quad (y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}) = 0.$$

Nell'equazione risultante 3) il primo membro è una serie procedente per le potenze intere di x , la quale si ottiene come prodotto delle due serie:

$$(a_{i+1} - b_{i+1})x^{i+1} + \dots + a_{s+1}x^{s+\frac{1}{2}} - b_{s+1}x^{s+1} + \dots,$$

$$(a_{i+1} - b_{i+1})x^{i+1} + \dots - a_{s+1}x^{s+\frac{1}{2}} - b_{s+1}x^{s+1} + \dots.$$

Perciò il termine di grado più basso che comparisca nella 3) è

$$(a_{i+1} - b_{i+1})^2 x^{2i+2};$$

si deduce che i rami 1) 2) hanno $2i+2$ intersezioni riunite (per $x=0$) essendo $2i+2$ l'ordine di infinitesimo del prodotto.

Facendo successivamente

$$i = 0, 1, 2, \dots,$$

si ha che il ramo 1) ha 2 intersezioni riunite in O con ogni ramo lineare 2) che passi solo per la sua origine O ; esso ha altre 2 intersezioni, ivi riunite, se $i=1$; ancora altre 2 se $i=2$, e così via finchè $i=s-1$. Ciò si esprime dicendo che il ramo 1) possiede $s-1$ punti doppi ($O_1 \dots O_{s-1}$) infinitamente vicini ad O e succedentisi sopra il ramo lineare

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{s-1} x^{s-1}.$$

2^a ipotesi: $i \geq s$.

Calcoliamo ancora il termine di grado più basso nella serie procedente per le potenze intere di x che risulta dal prodotto

$$3) \quad (y_1 - \bar{y})(y_2 - \bar{y}).$$

Questo termine è in ogni caso

$$- a_{s+1}^2 x^{2s+1}.$$

I rami 1) 2) hanno dunque $2s+1$ intersezioni riunite [qualunque sieno del resto i coefficienti dello sviluppo 2) dopo lo $(s+1)$ -mo]. E quindi si può dire che allo $(s-1)$ -mo punto doppio O_{s-1} , successivo ad O sopra il ramo 1), succede un s -mo punto, O_s , semplice pel ramo stesso, ciò che si esprime dicendo che il ramo 1) è di specie $s-1$.

Ma rileviamo una conseguenza che dice qualcosa di nuovo. Un ramo lineare qualsiasi che passi per tutti i punti doppi del ramo 1) infinitamente vicini ad O e per il successivo punto semplice, non può mai avere un contatto ulteriore col secondo ramo indicato, cioè non può passare per un $(s+1)$ -mo punto, O_{s+1} , successivo ad O .

Quest'ultima conclusione ha un aspetto paradossale. Infatti si affaccia naturalmente la domanda: che cosa succede di una curva cui s'imponga un contatto superiore col ramo 1), cioè che si costringa a soddisfare la condizione differenziale esprime il passaggio per un $(s+1)$ -mo punto O_{s+1} di 1), successivo ad O ?

La risposta che risolve il paradosso è la seguente: una curva la quale abbia un contatto più che $(2s+1)$ -punto col ramo 1) di specie $s-1$, possiede un punto doppio (o multiplo). Ma di una curva o di un ramo di curva siffatto non si può

ancor dire che « passa *propriamente* per un punto O_{s+1} successivo ad O_s sul ramo 1) ».

Infatti se una curva f (d'ordine assai elevato) possiede come punti doppi O, O_1, \dots, O_{i-1} ($i < s - 1$) e passa semplicemente per O_i, \dots, O_s , questa f avrà col ramo 1)

$$4i + 2(s - i) + 1$$

intersezioni e si comporrà — in generale — di due rami lineari, uno dei quali passerà per OO_1, \dots, O_s e l'altro per OO_1, \dots, O_{i-1} e non per O_i . Se ora la f suddetta viene assoggettata ulteriormente ad *una* nuova condizione, esprimente che essa abbia col ramo 1) un contatto $\} 4i + 2(s - i) + 2 \{$ -punto, tale condizione porta che le parabole d'ordine $i + 1$, osculatrici ai due rami di f , coincidano e quindi che O_{i+1} divenga doppio per f , assorbendo così 4 intersezioni col ramo 1) in luogo di 2; invero se O_{i+1} restasse semplice per f , i due rami lineari della curva si confonderebbero in un ramo di 2° ordine e questo dovrebbe passare ancora per $O_{i+2}, \dots, (i + 2 \leq s)$, mentre — per quanto abbiamo già veduto — un ramo del 2° ordine di specie i (con $i + 1$ punti doppi successivi) non può avere più che $2(i + 1) + 1$ intersezioni con un ramo lineare, come quello cui appartengono OO_1, \dots, O_{i+2} . La f acquistando dunque in O_{i+1} un punto doppio e restando composta di due rami lineari distinti, la condizione che esprimeva prima il suo passaggio per il punto O_s resta ora soddisfatta *impropriamente*; uno dei rami lineari di f passerà per OO_1, \dots, O_{i+1} , l'altro anche per O_{i+1}, \dots, O_{s-1} , ma in generale nessun ramo di f passerà propriamente per O_s [ciò che farebbe crescere di un'altra unità le intersezioni col ramo 1)].

Suppongasì invece $i = s - 1$, cioè si consideri una generica curva f assoggettata ad avere come punti doppi tutti gli s punti doppi, OO_1, \dots, O_{s-1} , del ramo 1), ed inoltre a passare semplicemente per il punto semplice O_s . In questo caso la f si comporrà — in generale — di due rami lineari, uno passante per OO_1, \dots, O_s e l'altro per OO_1, \dots, O_{s-1} e non per O_s ; essa avrà con 1) precisamente $4s + 1$ intersezioni. Se quindi s'impone alla f suddetta una nuova condizione di contatto col ramo 1), questa si esprimerà ancora facendo coincidere le parabole d'ordine s osculatrici ai due rami della f stessa; allora non accadrà — in generale — che f acquisti O_s come

punto doppio, cioè che i due rami (restando separati) vengano a passare per O_s , bensì i due rami di f si confonderanno in un ramo del 2° ordine

$$5) \quad \bar{y} = a_1 x + \dots + a_s x^s + b_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + b_{s+2} x^{s+1} + \dots$$

passante doppiamente per $OO_1 \dots O_{s-1}$ e semplicemente per O_s ; soltanto per una condizione ulteriore una curva f possedente tale singolarità acquista O_s come punto doppio, dando luogo a due rami lineari distinti (cfr. § 4).

Infatti si verifica che il ramo 5) ha con 1) appunto $4s+2$ intersezioni (e non di più se $b_{s+1}^2 \neq a_{s+1}^2$).

A tale scopo si distinguono i due valori di \bar{y} corrispondenti a un dato x :

$$\bar{y}_1 = a_1 x + \dots + a_s x^s + b_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + b_{s+2} x^{s+1} + \dots$$

$$\bar{y}_2 = a_1 x + \dots + a_s x^s - b_{s+1} x^{s+\frac{1}{2}} + b_{s+2} x^{s+1} + \dots$$

L'equazione che dà le intersezioni dei rami 1) 5) sarà

$$6) \quad (y_1 - \bar{y}_1)(y_1 - \bar{y}_2)(y_2 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2) = 0,$$

dove il primo membro risulta una serie procedente per le potenze intere di x .

In questa serie noi dobbiamo valutare il termine di grado più basso che è

$$(a_{s+1}^2 - b_{s+1}^2) x^{4s+2},$$

resta così provato che l'equazione 6) possiede la radice $x=0$ coll'ordine di molteplicità $4s+2$. c. d. d.

Soltanto nel caso particolare $a_{s+1} = \pm b_{s+1}$, l'anzidetto termine sparisce e si ha come termine di grado più basso nella 6):

$$-4a_{s+1}^2 (a_{s+2} - b_{s+2})^2 x^{4s+3},$$

sicchè i rami 1) 5) vengono ad avere (una intersezione di più cioè) $4s+3$ intersezioni, finchè

$$a_{s+2} \neq b_{s+2},$$

mentre il numero delle intersezioni cresce ancora di una unità se $a_{s+2} = b_{s+2}$, e così di seguito.

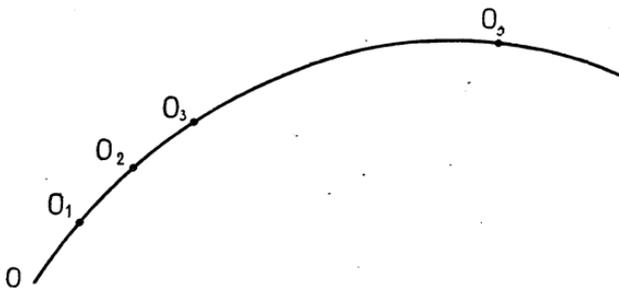
I risultati a cui siamo pervenuti si esprimono assai chiaramente col *linguaggio dei punti infinitamente vicini*, dicendo:

Sopra un ramo di second'ordine e di specie $s - 1$, si hanno $s - 1$ punti doppi O, O_1, \dots, O_{s-1} successivi all'origine O , e poi dei punti semplici $O_s, O_{s+1}, O_{s+2}, \dots$; il secondo punto semplice O_{s+1} è satellite del primo O_s , per modo che ogni ramo di 2° ordine passante propriamente per O_s (cioè per $OO_1 \dots O_s$) passa in conseguenza anche per O_{s+1} , mentre le condizioni ulteriori di passaggio per O_{s+2}, O_{s+3}, \dots sono indipendenti l'una dall'altra.

Inoltre abbiám visto che un ramo di una curva f , il quale passi propriamente per $OO_1 \dots O_s O_{s+1}$, è necessariamente di 2° ordine o d'ordine $\nu > 2$. Si verificherà poi che effettivamente anche ogni ramo d'ordine $\nu > 2$ passante semplicemente per O_s passa in conseguenza per O_{s+1} (ma non per O_{s+2}, \dots).

Intanto possiamo foggiate una rappresentazione schematica dei rami di 2° ordine, atta a porre in evidenza i risultati stabiliti. Per spiegare chiaramente la cosa, prendiamo le mosse dai rami lineari.

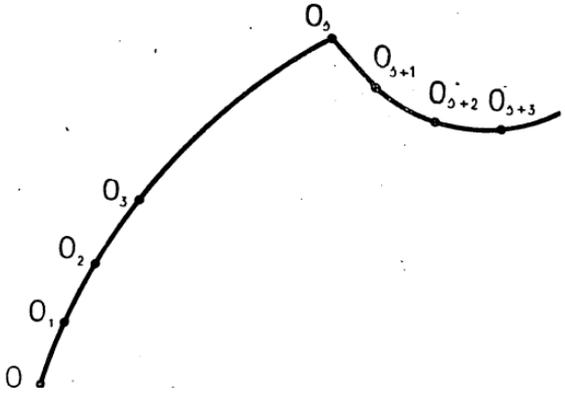
I punti successivi di un ramo lineare possono rappresentarsi (vedi figura) come estremi di archi uguali apparte-



menti ad una curva continua senza angoli, o come estremi di segmenti sufficientemente piccoli di lunghezza invariabile, costituenti una poligonale (iscritta) ad angoli ottusi; la costanza degli archi o segmenti è d'accordo con la convenzione per cui il differenziale dell'arco t si assume indipendente da t quando ci si riferisca alla rappresentazione parametrica della curva $x = x(t), y = y(t)$.

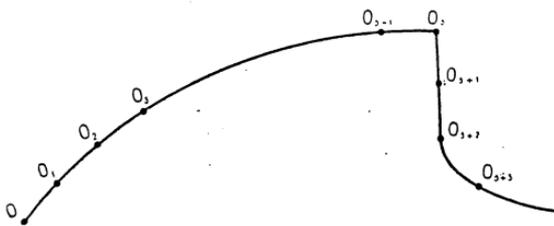
Ora per rappresentare un ramo del second'ordine con

$s - 1$ punti doppi successivi ad O potremo valerci (vedi figura) di una curva ad angolo, o di una poligonale formata di segmenti successivi uguali, in cui si trovino due segmenti $O_{s-1}O_s$, O_sO_{s+1} non più ad angolo ottuso ma ad angolo retto. Questo schema mette in evidenza che il ramo di second'ordine può avere fino ad s punti successivi ad O comuni a un ramo lineare, ma



non può averne $s + 1$. Inoltre esso lascia vederè che tutti i rami di second'ordine aventi a comune gli s punti doppi $OO_1 \dots O_{s-1}$ e il primo punto semplice O_s (che figura nel vertice dell'angolo retto), hanno necessariamente a comune anche il punto semplice successivo O_{s+1} .

Vedremo più tardi come lo schema precedente si generalizzi in guisa da fornire la rappresentazione di un ramo qualsiasi. Fin d'ora diciamo che un ramo del 3° ordine di specie $s - 1$, sarà rappresentato dalla figura qui accanto, dove



il punto O_{s+2} si trova sulla retta $O_s O_{s+1}$ perpendicolare ed $O_{s-1} O_s$. Ora lo schema suggerisce la possibilità di ulteriori complicazioni, dove s'immaginino

rami che si ripiegano successivamente più volte ad angolo retto. Vedremo difatti che la teoria dei rami superlineari è capace effettivamente di tanta ricchezza di casi, e che questi trovano nello schema accennato adeguata rappresentazione.

Il caso particolare dei rami di 2° ordine, è stato da noi trattato a parte per preparare le menti a comprendere la teoria generale dei rami superlineari, dove taluni punti (semplici o multipli) successivi all'origine vengono seguiti da gruppi di punti satelliti, con molteplicità dipendenti da quelle dei punti precedenti.

6. Rami superlineari: loro intersezioni. — Due rami d'ordine ν , μ aventi in comune l'origine O , hanno in generale $\mu\nu$ intersezioni assorbite in O ; non ve n'è di più se i due rami hanno diversa tangente (cfr. L. 3°, § 12). Supponiamo invece che i due rami abbiano anche la medesima tangente; vogliamo cercare quante sono, in generale, le loro intersezioni.

Preso O come origine delle coordinate, scriveremo le equazioni dei due rami sotto la forma seguente:

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots,$$

$$(a \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0 \dots)$$

$$2) \quad \bar{y} = bx + b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + b_2 x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}} + \dots$$

$$(b = a, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0 \dots).$$

Per un dato valore della x , nell'intorno di $x=0$, si avranno ν valori di y :

$$1') \quad y_r = ax + e^{2\pi i \frac{\nu'}{\nu} r} a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + e^{2\pi i \frac{\nu'+\nu''}{\nu} r} a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots$$

$$(r = 0, 1, \dots, \nu - 1),$$

e μ valori di \bar{y} :

$$2') \quad \bar{y}_m = ax + e^{2\pi i \frac{\mu'}{\mu} m} b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + e^{2\pi i \frac{\mu'+\mu''}{\mu} m} b_2 x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}} + \dots$$

$$(m = 0, 1, \dots, \mu - 1).$$

L'equazione risultante che fornisce le intersezioni dei due rami 1) 2) è:

$$3) \quad \prod_{r,m} (y_r - \bar{y}_m) = (y_0 - \bar{y}_0) \dots (y_0 - \bar{y}_{\mu-1}) \dots (y_{\nu-1} - \bar{y}_0) \dots (y_{\nu-1} - \bar{y}_{\mu-1}) = 0.$$

Il primo membro di questa, $\Pi(y_r - \bar{y}_m)$, è una funzione simmetrica delle $y_0, y_1, \dots, y_{\nu-1}$, e delle $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{\mu-1}$, e perciò riesce una funzione regolare di x , sviluppabile in una serie precedente per le potenze intere della x stessa. Si può calcolare codesta serie facendo il prodotto delle $\mu\nu$ serie ottenute sottraendo la 2') dalla 1').

Si tratta per noi di calcolare il termine di grado più basso in x , che c' indica la molteplicità della radice $x = 0$ per l'equazione risultante 3).

Ora, se $\mu\nu' \neq \mu'\nu$, codesto termine sarà

$$e^{\frac{2\pi i}{\nu} \mu(0+1+\dots+\nu-1)} a_1^{\mu\nu} x^{(\nu+\nu')\mu} = e^{\frac{\pi i \mu \nu' (\nu-1)}{a_1} \frac{\mu\nu}{x^{(\nu+\nu')\mu}},$$

oppure

$$e^{\frac{\pi i \nu \mu' (\mu-1)}{b_1} \frac{\mu\nu}{x^{(\mu+\mu')\nu}},$$

secondochè

$$\mu\nu' < \mu'\nu, \quad \text{ossia} \quad \frac{\nu'}{\nu} < \frac{\mu'}{\mu},$$

o

$$\mu\nu' > \mu'\nu, \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu'}{\nu} > \frac{\mu'}{\mu};$$

esso sarà invece

$$\begin{aligned} & \prod_{r,m} \left(a_1 e^{\frac{2\pi i}{\nu} r} - b_1 e^{\frac{2\pi i}{\mu} m} \right) \cdot x^{\mu(\nu+\nu')} = \\ & = \prod_{r,m} \left(a_1 e^{\frac{2\pi i}{\nu} r} - b_1 e^{\frac{2\pi i}{\mu} m} \right) \cdot x^{\nu(\mu+\mu')} \end{aligned}$$

qualora

$$\mu\nu' = \mu'\nu, \quad \text{ossia} \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Concludiamo pertanto che:

I due rami 1) 2), aventi la medesima tangente, posseggono in generale, oltre le $\mu\nu$ intersezioni assorbite dall'origine comune O , ancora un contatto equivalente a tante intersezioni quante sono le unità contenute nel più piccolo fra i due numeri $\mu\nu'$ e $\mu'\nu$; nel caso particolare

$$\mu\nu' = \mu'\nu \qquad \left(\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu} \right),$$

si ha un contatto superiore a $\mu\nu'$ soltanto se $a_1^\rho = b_1^\rho$, designando ρ il minimo denominatore delle frazioni $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'}{\rho}$.

Infatti vi sono allora dei valori di r, m per cui

$$a_1 e^{\frac{2\pi i}{\nu} r} = b_1 e^{\frac{2\pi i}{\mu} m},$$

ossia

$$a_1 = b_1 e^{\frac{2\pi i \rho'}{\rho} (m-r)};$$

in questo caso, dopo un certo numero di giri della variabile complessa x intorno a $x=0$, la

$$y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}}$$

si cambia nella

$$y = bx + b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} \quad (b=a)$$

sicchè i primi termini dei due rami 1) e 2) danno una medesima funzione polidroma a ρ valori; potremo esprimere ciò dicendo che i gruppi di coefficienti (aa_1) e (bb_1) sono equivalenti, e scriveremo $(aa_1) \equiv (bb_1)$.

Supponiamo dunque

$$\mu\nu' = \mu'\nu, \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu} \left(= \frac{\rho'}{\rho} \right)$$

e contemporaneamente

$$a_1 \rho = b_1 \rho \quad \text{cioè} \quad a_1 = b_1 e^{\frac{2\pi i \rho'}{\rho} p},$$

e cerchiamo, in questo caso, il numero delle intersezioni dei rami 1) 2).

Riprendiamo a considerare il prodotto

$$\prod_{r,m} (y_r - \bar{y}_m);$$

per ottenere il termine di grado più basso in x , bisognerà moltiplicare i termini di grado più basso (non nulli) che compariscono effettivamente negli sviluppi delle differenze

$$y_r - \bar{y}_m.$$

Ora, tenendo conto che

$$1 + \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\nu + \nu'}{\nu} = \frac{\mu + \mu'}{\mu},$$

il termine più basso nello sviluppo di $y_r - \bar{y}_m$ è

$$\left(e^{\frac{2\pi i \rho'}{\rho} r} a_1 - e^{\frac{2\pi i \rho'}{\rho} m} b_1 \right) x^{1+\frac{\rho'}{\rho}}$$

se

$$e^{\frac{2\pi i}{\rho} r} a_1 - e^{\frac{2\pi i}{\rho} m} b_1 \neq 0;$$

essendo

$$a_1 = b_1 e^{\frac{2\pi i}{\rho} p_1}$$

ciò accade se

$$r \equiv m + p_1 \pmod{\rho}.$$

Le differenze $y_r - \bar{y}_m$ per cui si ha invece

$$r \equiv m + p_1 \pmod{\rho}$$

contengono come termine di grado più basso

$$a_2 e^{\frac{2\pi i}{\nu} r} x^{\frac{\nu'+\nu''}{\nu}},$$

oppure

$$b_2 e^{\frac{2\pi i}{\mu} m} x^{\frac{\mu'+\mu''}{\mu}},$$

secondochè

$$\frac{\nu' + \nu''}{\nu} < \frac{\mu' + \mu''}{\mu}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu''}{\nu} < \frac{\mu''}{\mu},$$

o all'opposto

$$\frac{\nu' + \nu''}{\nu} > \frac{\mu' + \mu''}{\mu}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\nu''}{\nu} > \frac{\mu''}{\mu};$$

i due termini hanno invece lo stesso grado se

$$\frac{\nu''}{\nu} = \frac{\mu''}{\mu}.$$

Il numero delle differenze suddette $y_r - \bar{y}_m$ per cui

è precisamente $r \equiv m + p_1 \pmod{\rho}$

$$\frac{\nu\mu}{\rho} = \rho \frac{\nu}{\rho} \frac{\mu}{\rho},$$

$\frac{\nu}{\rho}$ e $\frac{\mu}{\rho}$ essendo rispettivamente i massimi comuni divisori di ν , ν' e di μ , μ' .

Infatti la congruenza

$$r \equiv m + p_1 \pmod{\rho},$$

dove

$$r = 0, 1, \dots, \nu - 1; \quad m = 0, 1, \dots, \mu - 1,$$

ammette $\frac{\nu}{\rho}$ soluzioni in corrispondenza a ciascuno dei μ valori di m .

Pertanto il termine di grado più basso nel prodotto $\prod_{r,m} (y_r - \bar{y}_m)$ sarà in generale di grado

$$\begin{aligned} \left(\mu\nu - \frac{\mu\nu}{\rho} \right) \frac{\nu + \nu'}{\nu} + \frac{\mu\nu}{\rho} \frac{\nu + \nu' + \nu''}{\nu} = \\ = \mu\nu + \mu\nu' + \frac{\mu\nu''}{\rho} \end{aligned}$$

oppure di grado

$$\mu\nu + \mu'\nu + \frac{\nu\mu''}{\rho},$$

secondochè

$$\frac{\nu''}{\nu} < \frac{\mu''}{\mu}$$

oppure

$$\frac{\nu''}{\nu} > \frac{\mu''}{\mu}.$$

Ma la diseuguaglianza

$$\frac{\nu''}{\nu} < \frac{\mu''}{\mu}$$

equivale a

$$\nu'' \frac{\mu}{\rho} < \mu'' \frac{\nu}{\rho},$$

sicchè, ricordando che per ipotesi $\mu\nu + \mu\nu' = \mu\nu + \mu'\nu$, si può dire che:

Nel caso $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu}$, $(aa_1) \equiv (bb_1)$, il numero delle intersezioni dei due rami 1) 2) supera in generale $\mu\nu + \mu\nu' = \mu\nu + \mu'\nu$, del più piccolo fra i due numeri

$$\frac{\mu\nu''}{\rho} \text{ e } \frac{\nu\mu''}{\rho},$$

$\frac{\mu}{\rho}$ e $\frac{\nu}{\rho}$ designando — come si è detto — i massimi comuni divisori rispettivamente di μ , μ' e di ν , ν' .

Si ha fra i due rami un *contatto ulteriore soltanto se*

$$\frac{\mu\nu''}{\rho} = \frac{\nu\mu''}{\rho},$$

e contemporaneamente

$$(aa_1 a_2) \equiv (bb_1 b_2),$$

cioè se i due rami

$$ax + a_1 x^{\frac{v+v'}{v}} + a_2 x^{\frac{v+v'+v''}{v}} \quad \text{e} \quad bx + b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + b_2 x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}}$$

costituiscono una medesima funzione polidroma a $\rho\rho_1$ valori, dove si designi con ρ_1 il minimo denominatore delle frazioni

$$\frac{v''}{\left(\frac{v}{\rho}\right)} = \frac{\mu''}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)} = \frac{\rho''}{\rho_1}$$

$$\left(\frac{v''}{v} = \frac{\mu''}{\mu} = \frac{\rho''}{\rho\rho_1}\right).$$

Infatti l'equivalenza dei rami anzidetti porta l'annullamento di qualcuno dei fattori

$$a_2 e^{2\pi i \frac{v'+v''}{v} r} - b_2 e^{2\pi i \frac{\mu'+\mu''}{\mu} m}$$

che entrano nel coefficiente di

$$x^{\frac{\mu v + \mu v' + \mu v''}{\rho}} = x^{\frac{v\mu + v\mu' + v\mu''}{\rho}}$$

per

$$r \equiv m + p_1 \quad (\text{mod. } \rho).$$

Per valutare quante intersezioni aumentino in questo caso scriviamo

$$\frac{v'}{v} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \frac{v''}{v} = \frac{\mu''}{\mu} = \frac{\rho''}{\rho\rho_1},$$

$$\frac{v' + v''}{v} = \frac{\mu' + \mu''}{\mu} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho\rho_1};$$

si avrà

$$a_2 e^{2\pi i \frac{\nu'+\nu''}{\nu} r} - b_2 e^{2\pi i \frac{\mu'+\mu''}{\mu} m} =$$

$$= e^{2\pi i \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho\rho_1} \right) r} \left\{ a_2 - b_2 e^{2\pi i \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho\rho_1} \right) (m-r)} \right\}.$$

Ora, posto

$$m - r = p_1 + q\rho,$$

se

$$a_2 - b_2 e^{2\pi i \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho\rho_1} \right) (m-r)}$$

si annulla per un certo valore di

$$m - r = p_1 + \bar{q}\rho,$$

dove

$$\bar{q} = p_2 + \bar{q}_1\rho_1,$$

la differenza stessa si annulla sempre e soltanto ove sia

$$m - r = p_1 + (p_2 + q_1\rho_1)\rho$$

indicando q_1 un qualsiasi numero intero. Poichè

$$m = 0, 1, \dots, \mu - 1$$

$$r = 0, 1, \dots, \nu - 1,$$

si hanno $\frac{\mu\nu}{\rho_1}$ valori di $m - r$ per cui, oltre a essere

$$a_1 = b_1 e^{2\pi i \frac{\rho'}{\rho} (m-r)}$$

è anche

$$a_2 = b_2 e^{2\pi i \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{\rho''}{\rho\rho_1} \right) (m-r)};$$

risulta così che nel prodotto

$$\prod_{r, m} (y_r - \bar{y}_m)$$

entrano $\frac{\mu\nu}{\rho\rho_1}$ fattori per cui è nullo il termine in $x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}}$, che sarà rimpiazzato generalmente dal termine in $x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''+\nu'''}{\nu}}$ op-

pure da quello in $x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''+\mu'''}{\mu}}$, secondochè

$$\frac{v'''}{v} < \frac{\mu'''}{\mu} \quad \text{oppure} \quad \frac{v'''}{v} > \frac{\mu'''}{\mu};$$

dunque — nelle ipotesi precedenti — se

$$\frac{v'''}{v} \equiv \frac{\mu'''}{\mu}$$

i due rami 1) 2) avranno un numero d'intersezioni eguale al più piccolo fra i due numeri

$$\begin{aligned} \mu v + \mu v' + \frac{\mu v''}{\rho} + \frac{\mu v'''}{\rho \rho_1}, \\ v \mu + v \mu' + \frac{v \mu''}{\rho} + \frac{v \mu'''}{\rho \rho_1}, \end{aligned}$$

dove $\frac{\mu}{\rho \rho_1}$, $\frac{v}{\rho \rho_1}$ sono rispettivamente i massimi comuni divisori di μ'' , $\frac{\mu}{\rho}$ (cioè di μ , μ' , μ'') e di v'' , $\frac{v}{\rho}$ (cioè di v , v' , v''). Un contatto più elevato si avrà soltanto se

$$\frac{v'''}{v} = \frac{\mu'''}{\mu} \quad \text{e quindi} \quad \frac{v \mu'''}{\rho \rho_1} = \frac{v \mu'''}{\rho \rho_1},$$

e contemporaneamente

$$(aa_1 a_2 a_3) \equiv (bb_1 b_2 b_3)$$

e in tali ipotesi si avranno, in generale, $\frac{\mu v}{\rho \rho_1 \rho_2}$ intersezioni in più, designando con ρ_2 il minimo denominatore delle frazioni

$$\begin{aligned} \frac{v'''}{\left(\frac{v}{\rho \rho_1}\right)} &= \frac{\mu'''}{\left(\frac{\mu}{\rho \rho_1}\right)} = \frac{\rho'''}{\rho_2} \\ \left(\frac{v'''}{v} = \frac{\mu'''}{\mu} = \frac{\rho'''}{\rho \rho_1 \rho_2}\right). \end{aligned}$$

È ormai evidente come si prosegua l'esame nel caso che dà luogo a un contatto più elevato fra i due rami 1) e 2). Enun-

ceremo pertanto il risultato generale a cui si perviene, ricapitolando le conclusioni ottenute col seguente

TEOREMA FONDAMENTALE SULLE INTERSEZIONI DI DUE RAMI:

Si abbiano due rami di ordine ν , μ , aventi in comune l'origine O :

$$y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots + a_s x^{\frac{\nu+\nu'+\dots+\nu^{(s)}}{\nu}} + a_{s+1} x^{\frac{\nu+\nu'+\dots+\nu^{(s+1)}}{\nu}} + \dots,$$

$$\bar{y} = bx + b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + b_2 x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}} + \dots + b_s x^{\frac{\mu+\mu'+\dots+\mu^{(s)}}{\mu}} + b_{s+1} x^{\frac{\mu+\mu'+\dots+\mu^{(s+1)}}{\mu}} + \dots,$$

dove $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ per $i = 1, 2, \dots, s$,

e suppongasi che sussistano le relazioni seguenti:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \frac{\nu''}{\nu} = \frac{\mu''}{\mu} = \frac{\rho''}{\rho\rho_1}, \quad \frac{\nu'''}{\nu} = \frac{\mu'''}{\mu} = \frac{\rho'''}{\rho\rho_1\rho_2},$$

$$\dots \frac{\nu^{(s)}}{\nu} = \frac{\mu^{(s)}}{\mu} = \frac{\rho^{(s)}}{\rho\rho_1 \dots \rho_{s-1}}, \quad \frac{\nu^{(s+1)}}{\nu} \neq \frac{\mu^{(s+1)}}{\mu},$$

dove $\frac{\rho'}{\rho}$, $\frac{\rho''}{\rho_1}$, $\frac{\rho'''}{\rho_2}$ designano frazioni ridotte ai minimi termini, e contemporaneamente

$$a = b, \quad (aa_1) \equiv (bb_1), \quad (aa_1 a_2) \equiv (bb_1 b_2) \dots (aa_1 \dots a_s) \equiv (bb_1 \dots b_s).$$

In questo caso i due rami hanno un numero d'intersezioni uguale al più piccolo fra i due numeri

$$\lambda = \mu\nu + \mu\nu' + \frac{\mu\nu''}{\rho} + \frac{\mu\nu'''}{\rho\rho_1} + \dots + \frac{\mu\nu^{(s+1)}}{\rho\rho_1 \dots \rho_{s-1}}$$

$$\lambda' = \nu\mu + \nu\mu' + \frac{\nu\mu''}{\rho} + \frac{\nu\mu'''}{\rho\rho_1} = \dots + \frac{\nu\mu^{(s+1)}}{\rho\rho_1 \dots \rho_{s-1}},$$

dove

$$\frac{\mu}{\rho}, \quad \frac{\mu}{\rho\rho_1}, \dots, \quad \frac{\mu}{\rho\rho_1 \dots \rho_{s-1}},$$

e similmente

$$\frac{\nu}{\rho}, \quad \frac{\nu}{\rho\rho_1}, \dots, \quad \frac{\nu}{\rho\rho_1 \dots \rho_{s-1}},$$

sono i massimi comuni divisori rispettivamente di

e di

$$\mu\mu', \quad \mu\mu'\mu'', \dots \quad \mu\mu'\mu'' \dots \mu^{(s)}$$

$$v v', \quad v v' v'', \dots \quad v v' v'' \dots v^{(s)}.$$

Se anche

$$\frac{v^{(s+1)}}{v} = \frac{\mu^{(s+1)}}{\mu} = \frac{\rho^{(s+1)}}{\rho\rho_1 \dots \rho_s},$$

ciascuno dei due numeri λ , e λ' , che risultano uguali, designa ancora il numero delle intersezioni fra i due rami, purchè non sia

$$(aa_1 \dots a_{s+1}) \equiv (bb_1 \dots b_{s+1})$$

7. Punti multipli successivi appartenenti ad un ramo superlineare. — Si abbia un ramo d'ordine $v (> 1)$, e di origine O :

$$1) \quad y = ax + a_1 x \frac{v+v'}{v} + a_2 x \frac{v+v'+v''}{v} + \dots \quad (a \neq 0, a_1 \neq 0, \dots);$$

cerchiamo il massimo comun divisore di v, v' , eseguendo le divisioni successive di cui le formule seguenti indicano i quozienti ed i resti:

$$v' = h v + v_1$$

$$v = h_1 v_1 + v_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_{\sigma-1} = h_{\sigma} v_{\sigma}.$$

Si otterrà così lo sviluppo di $\frac{v'}{v}$ in frazione continua limitata:

$$\frac{v'}{v} = h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \dots + \frac{1}{h_{\sigma}}}}$$

Intersechiamo il ramo 1) con un altro ramo qualsiasi, d'un certo ordine μ avente la medesima origine e la medesima tangente:

$$2) \quad y = ax + b_1 x \frac{\mu+\mu'}{\mu} + \dots \quad (b_1 \neq 0).$$

Supponiamo

$$\frac{\mu'}{\mu} \neq \frac{\nu'}{\nu},$$

e si abbia:

$$\mu' = h\mu + \mu_1$$

$$\mu = h_1\mu_1 + \mu_2$$

.....

$$\mu_{i-1} = h_i\mu_i + \mu_{i+1}$$

$$\mu_i = h_{i+1}\mu_{i+1} + \mu_{i+2}$$

.....

dove

$$i < \sigma, \quad h_{i+1} \neq h_{i+1};$$

per conseguenza

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \frac{1}{h_1} + \dots + \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} + \dots$$

Distinguiamo due ipotesi:

I) *i pari* e quindi, supposto per fissare le idee $k_{i+1} < h_{i+1}$,

$$\frac{\mu'}{\mu} > \frac{\nu'}{\nu} \quad \text{ossia} \quad \nu\mu' > \mu\nu',$$

II) *i dispari* e quindi, supposto sempre $k_{i+1} < h_{i+1}$,

$$\frac{\mu'}{\mu} < \frac{\nu'}{\nu} \quad \text{ossia} \quad \nu\mu' < \mu\nu'.$$

Designando con λ il numero delle intersezioni fra i due rami 1) e 2) si avrà, nelle due ipotesi rispettivamente:

$$I) \quad \lambda = \mu\nu + \mu\nu',$$

$$\mu\nu' = \mu(h\nu + \nu_1) = h_1\mu\nu + \mu\nu_1,$$

$$\mu\nu_1 = (h_1\mu_1 + \mu_2)\nu_1 = h_1\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_1,$$

$$\mu_2\nu_1 = \mu_2(h_2\nu_2 + \nu_3) = h_2\mu_2\nu_2 + \mu_2\nu_3,$$

.....

$$\mu_i\nu_{i-1} = \mu_i(h_i\nu_i + \nu_{i+1}) = h_i\mu_i\nu_i + \mu_i\nu_{i+1},$$

$$\mu_i\nu_{i+1} = (h_{i+1}\mu_{i+1} + \mu_{i+2})\nu_{i+1} = h_{i+1}\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+2}\nu_{i+1},$$

e quindi

$$\lambda = (h+1)\mu\nu + h_1\mu_1\nu_1 + \dots + h_i\mu_i\nu_i + k_{i+1}\mu_{i+1}\nu_{i+1} + \mu_{i+2}\nu_{i+1}.$$

$$\text{II)} \quad \lambda = \nu\mu + \nu\mu',$$

$$\nu\mu' = \nu(h\mu + \mu_1) = h\nu\mu + \nu\mu_1,$$

$$\nu\mu_1 = (h_1\nu_1 + \nu_2)\mu_1 = h_1\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_1,$$

.....

$$\nu_{i-1}\mu_i = (h_i\nu_i + \nu_{i+1})\mu_i = h_i\nu_i\mu_i + \nu_{i+1}\mu_i,$$

$$\nu_{i+1}\mu_i = \nu_{i+1}(k_{i+1}\mu_{i+1} + \mu_{i+2}) = k_{i+1}\nu_{i+1}\mu_{i+1} + \nu_{i+1}\mu_{i+2},$$

e quindi ancora

$$\lambda = (h+1)\nu\mu + h_1\nu_1\mu_1 + \dots + h_i\nu_i\mu_i + k_{i+1}\nu_{i+1}\mu_{i+1} + \nu_{i+1}\mu_{i+2}.$$

Questo risultato si può esprimere semplicemente dicendo che: *i due rami 1) 2) hanno comuni $h + h_1 + \dots + h_i + k_{i+1} + 1$ punti infinitamente vicini successivi all'origine O , e precisamente: h punti di molteplicità rispettiva ν, μ ; h_1 punti di molteplicità ν_1, μ_1 ; h_i punti di molteplicità ν_i, μ_i ; quindi k_{i+1} punti di molteplicità ν_{i+1}, μ_{i+1} , ed un ultimo punto di molteplicità ν_{i+1} per il primo ramo ($h_{i+1} > k_{i+1}$) e di molteplicità μ_{i+2} (≥ 0) per il secondo.*

S'intersechi il ramo 1) col ramo 2) lasciando b_1 arbitrario ($\neq 0$) e facendo successivamente

$$\frac{\mu'}{\mu} = 2, 3, \dots, h+1,$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \frac{1}{2}, h + \frac{1}{3}, \dots, h + \frac{1}{h_1+1}$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{2}}, h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{3}}, \dots, h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2+1}}$$

.....

$$\frac{\mu'}{\mu} = h + \frac{1}{h_1 + \dots + \frac{1}{h_{\sigma-1} + \frac{1}{2}}}, \dots, h + \frac{1}{h_1 + \dots + \frac{1}{h_{\sigma-1} + \frac{1}{h_\sigma}}};$$

si dovrà dire che:

Il ramo

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots,$$

dove

$$\frac{\nu'}{\nu} = h + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_\sigma},$$

$$\nu' = h\nu + \nu_1$$

$$\nu = h_1\nu_1 + \nu_2$$

.....

$$\nu_{\sigma-1} = h_\sigma\nu_\sigma \quad (\nu = \nu_0)$$

possiede infinitamente vicini all'origine O

h punti ν -pli, $O_1 O_2 \dots O_h$,

h_1 punti ν_1 -pli, $O_{h+1} O_{h+2} \dots O_{h+h_1}$,

.....
 h_σ punti ν_σ -pli, $O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma-1}+1} \dots O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}$;

i quali punti possono essere definiti come *punti succedentisi* sopra rami, nel modo che segue:

1) I punti $O_1 O_2 \dots O_h O_{h+1}$ si succedono sopra la tangente al ramo di classe ν' , cioè sui rami lineari:

$$y = ax + b_1 x^2, \quad y = ax + b_1 x^3 + \dots,$$

tangenti alla retta suddetta.

2) La posizione degli $h_1 - 1$ punti ν_1 -pli successivi ad O_{h+1} e del primo punto ν_2 -plo, O_{h+h_1+1} , risulta fissata dall'appartenenza ai rami d'ordine $t = 2, 3, \dots, h_1 + 1$:

$$y = ax + b_1 x^{h+\frac{1}{2}}, \quad y = ax + b_1 x^{h+\frac{1}{3}}, \dots$$

$$\dots y = ax + b_1 x^{h+\frac{1}{h_1+1}},$$

i quali rami passano per $OO_1 \dots O_h$ colla molteplicità t mentre

passano semplicemente per O_{h+1} e per $t - 1$ punti successivi come viene indicato dai simboli

$$\begin{aligned}
 &(O^2 O_1^2 \dots O_n^2 O_{n+1}^1 O_{n+2}^1) \\
 &(O^3 O_1^3 \dots O_n^3 O_{n+1}^1 O_{n+2}^1 O_{n+3}^1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &(O^{h_1+1} O_1^{h_1+1} \dots O_n^{h_1+1} O_{n+1}^1 O_{n+2}^1 \dots O_{n+h_1+1}^1).
 \end{aligned}$$

3) La posizione degli $h_2 - 1$ punti v_2 -pli, $O_{n+h_1+2} \dots O_{n+h_1+h_2}$, e del primo punto v_3 -plo $O_{n+h_1+h_2+1}$ è pienamente definita dall'appartenenza a rami per cui

$$\frac{v + v'}{v} = h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{2}}, \quad h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{3}} \dots h + \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + 1}},$$

la cui molteplicità nei punti suddetti viene posta in evidenza dai simboli

$$\begin{aligned}
 &(O^{2h_1} O_1^{2h_1} \dots O_n^{2h_1} O_{n+1}^2 \dots O_{n+h_1}^2 O_{n+h_1+1}^1 O_{n+h_1+2}^1) \\
 &(O^{3h_1} O_1^{3h_1} \dots O_n^{3h_1} O_{n+1}^3 \dots O_{n+h_1}^3 O_{n+h_1+1}^1 O_{n+h_1+2}^1 O_{n+h_1+3}^1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 &(O^{h_1(h_2+1)} O_1^{h_1(h_2+1)} \dots O_n^{h_1(h_2+1)} O_{n+1}^{h_2+1} \dots O_{n+h_1}^{h_2+1} O_{n+h_1+1}^1 \dots O_{n+h_1+h_2+1}^1).
 \end{aligned}$$

I punti v -pli, $O_1 O_2 \dots O_n$, e il primo punto v_1 -plo, O_{n+1} , seguentisi sopra una retta, sono *punti liberi*, suscettibili di variare con continuità ove questa retta si deformi in un ramo lineare qualsiasi; in questo senso il ramo 1) appare caso particolare di un ramo

$$1') \quad y = (a + a_{00})x + a_{01}x^2 + \dots + a_{0h}x^{h+1} + a_1x^{h+1+\frac{v_1}{v}} + \dots,$$

del quale si dimostra (e risulterà dallo sviluppo dell'analisi seguente) che possiede h punti v -pli ed un punto v_1 -plo succedenti all'origine O sopra un ramo lineare (e possiede di seguito a questi altri punti multipli, come il ramo 1).

Il ramo 1) si deduce da 1') facendo

$$a_{00} = 0, \quad a_{01} = 0 \dots \quad a_{0h} = 0,$$

e perciò si può dire che i punti liberi del ramo 1) sono determinati, l'uno dopo l'altro, in rapporto ai valori particolari $a, 0, 0, \dots, 0$ dei coefficienti dello sviluppo 1').

Invece i *successivi punti multipli* (o *semplici*) ν_1 -pli ν_2 -pli.... ν_σ -pli, che seguono ad O sopra il ramo 1), dipendono

dall'esistenza d'un termine $a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} = a_1 x^{h+1+\frac{\nu_1}{\nu}}$ nello sviluppo suddetto, ma non dal coefficiente $a_1 (\neq 0)$ di questo termine, poichè sono comuni a tutti i rami:

$$y = ax + b_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots$$

Perciò *codesti punti* devono ritenersi *satelliti* dei precedenti $O_1 O_2 \dots O_{h+1}$ o, si può dire, *del primo punto* ν_1 -plo O_{h+1} ($\nu_1 < \nu$), la cui esistenza — sul ramo d'ordine ν — dipende proprio

da quella di un termine non nullo in $x^{h+1+\frac{\nu_1}{\nu}}$.

La posizione e le molteplicità dei punti satelliti di O_{h+1} sono definiti — come si è detto — dalla posizione e dalla molteplicità ν_1 del punto O_{h+1} su un ramo qualsiasi d'ordine ν , e perciò dai *valori aritmetici* di ν_1, ν ($\nu_1 < \nu$).

Ma i suddetti punti satelliti risultano ugualmente definiti — per quanto concerne la loro posizione — come punti multipli successivi appartenenti a tutti i rami di ordine arbitrario μ che posseggono $O_h^\mu, O_{h+1}^{\mu_1}$ dove $\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\nu_1}{\nu}$; le molteplicità dei punti suddetti per questi rami stanno a $\nu \nu_1 \nu_2 \dots \nu_\sigma$ nella stessa proporzione che μ a ν . In particolare il ramo d'ordine minimo che passa (propriamente) per l'ultimo di quei punti, $O_{h+h_1+\dots+h_\sigma}$, ha l'ordine ρ uguale al minimo denominatore della frazione $\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\nu' - h\nu}{\nu} = \frac{\rho'}{\rho} - h$.

Procediamo a determinare i punti multipli successivi appartenenti al ramo

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots$$

$$(a \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0 \dots),$$

e più precisamente di quelli che dipendono dal terzo termine della serie.

Perciò intersechiamo il ramo 1) col ramo

$$2) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + b_2 x^{\frac{\mu+\mu'+\mu''}{\mu}} + \dots,$$

dove $b_2 \neq 0$ ha un valore arbitrario, e dove

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\nu'}{\nu}.$$

Il numero delle intersezioni dei due rami sarà uguale a

$$\nu\mu + \nu\mu' + \lambda = \mu\nu + \mu\nu' + \lambda,$$

dove λ designa il più piccolo fra i due numeri

$$\begin{aligned} \nu_\sigma \mu'' & \text{ e } \mu_\sigma \nu'', \\ \nu_\sigma = \frac{\nu}{\rho} & \text{ e } \mu_\sigma = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned}$$

essendo rispettivamente i massimi divisori comuni a ν , ν' e μ , μ' (cfr. § 6).

Sviluppiamo $\frac{\nu''}{\nu_\sigma}$ e $\frac{\mu''}{\mu_\sigma}$ in frazione continua e si abbia

$$\frac{\nu''}{\nu_\sigma} = k + \frac{1}{k_1 + \dots + \frac{1}{k_i + \frac{1}{k_{i+1} + \dots + \frac{1}{k_{\sigma'}}}}},$$

$$\frac{\mu''}{\mu_\sigma} = k + \frac{1}{k_1 + \dots + \frac{1}{k_i + \frac{1}{k_{i+1} + \dots + \dots}}},$$

supponendo

$$k_{i+1} < k_{i+1};$$

sarà

$$v'' = k v_{\sigma} + v_{\sigma+1}$$

$$v_{\sigma} = k_1 v_{\sigma+1} + v_{\sigma+2}$$

.....

$$v_{\sigma+i} = k_{i+1} v_{\sigma+i+1} + v_{\sigma+i+2}$$

.....

$$v_{\sigma+\sigma'-1} = k_{\sigma'} v_{\sigma+\sigma'} \quad (v_{\sigma+\sigma'} = v_{\sigma_1})$$

e

$$\mu'' = k \mu_{\sigma} + \mu_{\sigma+1}$$

$$\mu_{\sigma} = k_1 \mu_{\sigma+1} + \mu_{\sigma+2}$$

.....

$$\mu_{\sigma+i} = l_{i+1} \mu_{\sigma+i+1} + \mu_{\sigma+i+2}$$

.....

Procedendo come innanzi si trova che

$$= k v_{\sigma} \mu_{\sigma} + k_1 v_{\sigma+1} \mu_{\sigma+1} + \dots + k_i v_{\sigma+i} \mu_{\sigma+i} + l_{i+1} v_{\sigma+i+1} \mu_{\sigma+i+1} + v_{\sigma+i+1} \mu_{\sigma+i+2}$$

E analogamente questo risultato s'interpreta dicendo che « i due rami hanno comuni dopo $O_{h+h_1+\dots+h_{\sigma}}$ ancora $k + k_1 \dots k_i + l_{i+1}$ punti successivi di molteplicità rispettiva $v_{\sigma}, v_{\sigma+1}, \dots, v_{\sigma+i+1}$ e $\mu_{\sigma}, \mu_{\sigma+1}, \dots, \mu_{\sigma+i+1}$ ed un ultimo punto di molteplicità $v_{\sigma+i+1}$ per il primo ramo e di molteplicità $\mu_{\sigma+i+2}$ per il secondo ».

Nel caso $v_{\sigma} = 1$, basta prendere $\mu = v$ (e quindi $\mu_{\sigma} = 1$), $\mu'' = 1, 2, \dots$ per avere rami 2) il cui numero d'intersezioni con 1) cresce, sopra $v_{\mu} + v_{\mu'}$, di una unità per volta; così i punti di 1) successivi al punto semplice $O_{h+\dots+h_{\sigma}}$ appaiono come *punti semplici*.

Nel caso $v_{\sigma} > 1$ si avranno in generale — dopo $O_{h+\dots+h_{\sigma}}$ — altri k punti successivi di molteplicità v_{σ} e poi k_1 punti $v_{\sigma+1}$ -pli, ..., $k_{\sigma'}$ punti $v_{\sigma+\sigma'}$ -pli (o v_{σ_1} -pli), essendo $v_{\sigma+\sigma'} = v_{\sigma_1}$ il massimo comune divisore di v, v', v'' .

I punti v_{σ} -pli ed il primo punto $v_{\sigma+1}$ -plo, successivi ad $O_{h_1+\dots+h_{\sigma}}$, dovranno ritenersi come *punti liberi*, la posizione di $O_{h_1+\dots+h_{\sigma+1}}$ dipendendo dal valore del coefficiente a_2 nello sviluppo 1) e la posizione di $O_{h_1+\dots+h_{\sigma+2}}$ potendosi ritenere data in rapporto con un coefficiente nullo dello sviluppo medesimo; ed invece i punti del ramo 1) successivi al primo

punto $v_{\sigma+1}$ -plo, $O_{h+\dots+h_{\sigma+h+1}}$, debbono ritenersi come satelliti di questo punto ecc. ecc. Ciò spiegheremo più diffusamente fra poco in rapporto al caso generale.

Frattanto senza indugiare in ripetizioni inutili, poichè si mantiene qui piena analogia cogli sviluppi precedenti, possiamo enunciare il risultato generale a cui conduce il proseguimento della discussione, ricapitolando così tutti i risultati ottenuti nella seguente:

Proposizione fondamentale. Si abbia un ramo d'ordine v

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{v+v'}{v}} + \dots + a_{m+1} x^{\frac{v+v'+\dots+v^{(m+1)}}{v}} + \dots$$

$(a_1 \neq 0, \dots, a_{m+1} \neq 0, \dots)$

e scriviamo

$$\frac{v'}{v} = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \frac{v''}{v} = \frac{\rho''}{\rho\rho_1}, \dots, \quad \frac{v^{(m+1)}}{v} = \frac{\rho^{(m+1)}}{\rho\rho_1 \dots \rho_m}$$

$(\rho \geq 1, \rho_1 \geq 1, \dots)$

dove le funzioni $\frac{\rho^{(i+1)}}{\rho_i}$ sono irriducibili. Supponiamo che m sia il più piccolo indice per cui

$$v = \rho\rho_1 \dots \rho_m,$$

sicchè

$$\rho_m > 1.$$

La posizione dei punti multipli successivi del ramo 1) dipende dai coefficienti a, a_1, a_2, \dots, a_m e dai numeri interi, essenzialmente positivi, $v (> 1), v', v'' \dots v^{(m+1)}$; gli ordini di molteplicità dei punti suddetti sono i resti delle divisioni successive: $v' : v, v : v_1, \dots, v_{\sigma-2} : v_{\sigma-1}, v'' : v_{\sigma}, \dots, v''' : v_{\sigma+\sigma'} \dots$, che conducono alla determinazione del massimo comun divisore di

$$vv', \quad vv'v'', \dots, \quad \overline{vv'v''} \dots v^{(m+1)}.$$

Nelle ipotesi fatte si ha:

$$m. c. d. (vv') = v_{\sigma} = \frac{v}{\rho} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m,$$

$$m. c. d. (vv'v'') = v_{\sigma+\sigma'} = \frac{v}{\rho\rho_1} = \rho_2 \dots \rho_m$$

.....

$$m. c. d. (vv'v'' \dots v^{(m)}) = \rho_m \quad (> 1),$$

$$m. c. d. (vv'v'' \dots v^{(m+1)}) = 1$$

(se v, v' sono primi fra loro si porrà $\rho_m = v = \rho$).

In particolare se nella serie 1) s'incontrano più termini successivi contenenti le potenze con esponenti interi,

$$x = x^{\frac{\nu}{\nu}}, \quad x^2 = x^{\frac{2\nu}{\nu}}, \dots, \quad x^h = x^{\frac{h\nu}{\nu}},$$

si avranno $h - 1$ punti successivi ad O di molteplicità ν , aventi come coordinate i coefficienti degli $h - 1$ termini suddetti. E parimente se accade che nella successione dei numeri $\nu, \nu', \nu'' \dots$ s'incontri un $\nu^{(i+1)}$ uguale al massimo comun divisore di $\nu, \nu', \dots, \nu^{(i)}$: $\nu^{(i+1)} = m. c. d. (\nu, \nu', \dots, \nu^{(i)})$, si troverà un punto di molteplicità $\nu^{(i+1)}$ avente come coordinata a_{i+1} e succedente all'ultimo punto di uguale molteplicità che appartiene al gruppo determinato dal coefficiente a_i del termine $(i + 1)$ -mo della serie: $a_i x^{\frac{\nu + \nu' + \dots + \nu^{(i)}}{\nu}}$.

Ora, presa una serie 1) qualsiasi, distinguiamo il *caso tipico* in cui per ogni valore di i :

$$\nu^{(i+1)} \leq m. c. d. (\nu, \nu', \dots, \nu^{(i)}).$$

In tal caso al coefficiente a_i , che figura nel $(i + 1)$ -mo termine della serie, corrisponderà uno o più punti multipli secondo la natura dell'esponente del termine successivo, cioè secondochè

$$\nu^{(i+1)} = m. c. d. (\nu, \dots, \nu^{(i)})$$

oppure

$$\nu^{(i+1)} < m. c. d. (\nu, \dots, \nu^{(i)}).$$

Pertanto il primo punto multiplo che corrisponde a ciascun coefficiente a_i della serie 1), nel caso tipico, appare come *punto libero* dipendente dalla *coordinata* a_i (la cui conoscenza si presume aggiunta a quella di a, a_1, \dots, a_{i-1}). Non così i punti multipli successivi che appartengono al gruppo corrispondente ad a_i , giacchè il valore del parametro a_i resta determinato dal primo punto multiplo del gruppo suddetto, mentre i punti successivi dipendono soltanto dalla natura aritmetica di $\nu^{(i+1)}$, cioè dall'algoritmo euclideo delle divisioni successive fra $\nu^{(i+1)}$ e il massimo comun divisore dei precedenti ν . Più precisamente la *posizione* dei punti multipli successivi corrispondenti al coefficiente a_i resta determinata, rispetto al

primo, dalla frazione continua:

$$v^{(i+1)} : m. c. d. (v \dots v^{(i)}) = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots}}$$

che pone in evidenza i quozienti di quelle divisioni successive, e indica così il numero dei punti del gruppo; mentre le molteplicità di tali punti risultano dai resti delle divisioni medesime.

Le cose dette per il caso tipico si estendono ad ogni caso, riducendo formalmente la serie 1) al caso tipico, mercè l'aggiunta di termini (*inessenziali*) con coefficienti nulli.

Si abbia dunque nella serie 1)

$$v^{(i+1)} > m. c. d. (v \dots v^{(i)})$$

e quindi

$$v^{(i+1)} : m. c. d. (v \dots v^{(i)}) = k + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots}}$$

con $k \geq 1$. Al coefficiente a_i corrisponderà ora una successione di punti multipli formanti un gruppo $G_i = (P_1 P_2 \dots P_k P_{k+1} \dots)$ che s' inizia con un gruppo di k punti la cui molteplicità è uguale a $m. c. d. (v \dots v^{(i)})$, cioè uguale alla molteplicità dell'ultimo punto multiplo appartenente al gruppo G_{i-1} , punto la cui posizione dipende dalla coordinata a_{i-1} .

Ora soltanto la posizione di P_1 si deve ritenere determinata dalla coordinata a_i , mentre i k punti $P_2 \dots P_k$ e P_{k+1} debbono ritenersi corrispondenti a coordinate nulle, che vengono a figurare come coefficienti della serie 1) completata coll'aggiunta dei termini nulli che la riducono al caso tipico. Quanto ai punti $P_{k+2} \dots$, la loro posizione resta fissata, in rapporto a quella dell'ultimo punto libero P_{k+1} del gruppo G_i , dipendentemente dagli *elementi aritmetici* della frazione continua

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

Il gruppo G_i dei punti multipli del ramo 1), che corrisponde

al coefficiente a_i della serie di Puiseux, comprende in generale $k+1$ punti liberi, di coordinate $a_i, 0, \dots, 0$, e $k_1 + k_2 + \dots$ punti satelliti dell'ultimo punto libero, dove i numeri k_1, k_2, \dots vengono forniti dallo sviluppo in frazione continua di

$$v^{(i+1)} : m. c. d. (v, v', \dots, v^{(i)}) = k + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

La posizione dei punti satelliti è determinata, in rapporto al punto libero da cui dipendono, dagli elementi aritmetici di questo sviluppo.

Le molteplicità dei primi k punti liberi del gruppo G_i sono date dal quoziente intero per difetto $|v^{(i+1)} : m. c. d. (v, \dots, v^{(i)})|$, mentre il $(k+1)$ -mo punto libero ha una molteplicità uguale al resto della divisione qui accennata; a questo seguono $k_1 - 1$ punti satelliti di uguale molteplicità, poi k_2 punti di molteplicità inferiore ecc.; gli ordini di molteplicità sono dati, come si è detto, dai resti delle divisioni successive per la ricerca del *m. c. d.* $(v, v', \dots, v^{(i+1)})$; questo massimo comun divisore designa precisamente la molteplicità (più bassa) appartenente agli ultimi punti del G_i .

Fra i caratteri che mettono in evidenza la natura del ramo 1), conviene in particolare considerare i tre seguenti:

1) la *specie del ramo*; cioè il numero s che designa quanti sono i punti multipli di esso successivi all'origine O ;

2) il *rango del ramo*, cioè la molteplicità $r (= \rho_m) (> 1)$ che appartiene all'ultimo punto multiplo di esso;

3) il *genere del ramo*, cioè il numero g che designa quanti sono i gruppi di punti satelliti che figurano nella successione degli $s+r$ punti seguenti all'origine.

Osservazione. Si consideri la serie

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{v+v'}{v}} + \dots + a_{m+1} x^{\frac{v+v'+\dots+v^{(m+1)}}{v}} + \dots$$

rappresentante un ramo di specie s e di rango r , e sia, come innanzi, $v^{(m+1)}$ il primo fra i numeri $v^{(i)}$ che non ha divisore comune coi precedenti; designamo inoltre con $OO_1 \dots O_s O_{s+1} \dots O_{s+r}$ i punti successivi del ramo stesso.

Si dovrà dire che un altro ramo

$$2) \quad y = bx + b_1 x^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + \dots + b_{m+1} x^{\frac{\mu+\mu'+\dots+\mu^{(m+1)}}{\mu}} + \dots$$

ha comune col primo il punto O_{s+r} se la serie 2) ha $m+1$ coefficienti ed $m+2$ esponenti uguali a quelli della serie 1) cioè se:

$$a = b, \quad a_1 = b_1, \dots, \quad a_m = b_m,$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\mu'}{\mu}; \quad \frac{v''}{v} = \frac{\mu''}{\mu}, \dots, \quad \frac{v^{(m+1)}}{v} = \frac{\mu^{(m+1)}}{\mu}.$$

Più precisamente il punto O_{s+r} che è semplice per il ramo 1) sarà di molteplicità λ (≥ 1) per il ramo 2) ove sia $\mu = \lambda v$, e quindi ciascuno dei punti O_i ($i \leq r+s$) abbia per il ramo 2) una molteplicità uguale a quella per il ramo 1) moltiplicata per λ .

Se poi si considera il punto semplice O_{s+r+1} che succede ad O_{s+r} sul ramo 1), questo punto verrà individuato dalla coordinata a_{m+1} , sicchè il ramo 2) avrà in comune col ramo 1) il detto punto O_{s+r+1} qualora sia anche $b_{m+1} = a_{m+1}$. Nel caso che la serie 1) sia ridotta (formalmente) al caso tipico, i coefficienti successivi a_{m+2}, a_{m+3}, \dots (di cui qualuno può esser nullo) individuano rispettivamente i punti $O_{r+s+2}, O_{r+s+3}, \dots$; e quindi, in particolare, per $\mu = v$, un ramo 2) parimente rappresentato da una serie tipica, avrà in comune col primo i successivi punti O_{r+s+1}, O_{r+s+2} , assorbenti via via una intersezione di più quando sia $b_{m+1} = a_{m+1}, b_{m+2} = a_{m+2}, \dots$.

I risultati ottenuti permettono anche di caratterizzare i punti successivi, O, O_1, \dots, O_{s+r} , del ramo 1) mediante le curve razionali del tipo:

$$\begin{cases} x = t^v \\ y = at^v + a_1 t^{v+v'} + \dots + a_m t^{v+\dots+v^{(m)}} + b_{m+1} t^{v+\dots+v^{(m+1)}}, \end{cases}$$

dove è variabile b_{m+1} ; queste curve d'ordine $v+v'+\dots+v^{(m+1)}$, per estensione di quelle considerate nel § 12 del L. 3°, potranno designarsi come *iperparabole osculatrici* di grado $r+s$; per $b_{m+1} = a_{m+1}$ si avrà l'iperparabola osculatrice dello stesso ordine $v+v'+\dots+v^{(m+1)}$ e di grado $r+s-1$, avente un'ulteriore intersezione col ramo (e non di più se si suppone $a_{m+2} \neq 0$).

Avvertiamo in fine come da quanto precede risulti che: *la singolarità di un ramo di genere g si può definire mediante le intersezioni del ramo con rami di genere $g - 1$, assoggettati a possedere come punti semplici i due punti liberi che precedono immediatamente l'ultimo gruppo di punti satelliti del primo ramo; imperocchè si possono definire in tal modo la molteplicità di questi due punti da cui dipendono i successivi.*

NOTA SULLA DEFINIZIONE DEI PUNTI INFINITAMENTE VICINI. L'esistenza dei punti successivi infinitamente vicini, sopra a rami per una data origine, riesce definita nel modo che i logici designano come *definizione per astrazione*.

La successione di punti $OO_1 \dots O_i$ corrisponde a tutte le coppie di rami aventi quei punti (e non altri punti) a comune, la quali coppie vengono concepite come coppie *equivalenti*. L'equivalenza che serve a definire il concetto astratto dei punti infinitamente vicini, si traduce, come si è visto, nell'uguaglianza di un certo numero di coordinate, coefficienti delle serie di PUISEUX, e di taluni elementi aritmetici (esponenti, termini di uno sviluppo in frazione continua e unità comuni al primo termine diseguale). In particolare (cfr. pag. 363) si possono sempre considerare rami passanti per i punti $O \dots O_{i-1} O_i$, per cui O_{i-1} e O_i siano punti semplici (O_{i-1} è certo semplice quando è semplice O_i , se a questo non succedono altri punti satelliti); tutti questi rami vengono caratterizzati dal fatto di avere a comune un certo numero t di termini della serie e l'esponente del $(t + 1)$ -mo termine. Così può anche dirsi che una successione di punti $OO_1 \dots O_i$ viene sempre definita mediante un fascio di iperparabole osculatrici di grado i .

Veramente resta così definito un gruppo di punti $G_i = OO_1 \dots O_i$, piuttosto che singolarmente i punti che lo costituiscono. Ma l'individualità di questi punti risulta definita induttivamente per differenza quando si paragonino i gruppi G_{i-1} e G_i .

8. Caratteristica di un ramo: schema grafico. — Risulta dal paragrafo precedente che le molteplicità dei punti di un ramo

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{v+v'}{v}} + \dots + a_i x^{\frac{v+v'+\dots+v^{(i)}}{v}} + \dots$$

dipendono essenzialmente da quei termini in cui $v^{(i)}$ non è divisibile per il massimo comun divisore dei v precedenti. L'importanza speciale di questi termini nel problema d'intersezione di due rami è stata segnalata da SMITH ⁽¹⁾ (1873) e HALPHEN ⁽²⁾ (1874), i quali hanno designato i termini stessi come *termini caratteristici* dello sviluppo di PUISEUX, ed hanno introdotto dei *numeri caratteristici* a definire la natura aritmetica dei loro esponenti ⁽³⁾.

In qualunque maniera questi numeri vengano introdotti, la loro conoscenza contiene potenzialmente la conoscenza, sia degli ordini di molteplicità dei punti successivi del ramo, sia delle relazioni fra i punti satelliti e i punti liberi da cui dipendono. Ma, affinchè codesti ordini e codeste relazioni appaiano esplicitamente in evidenza, conviene assumere come numeri caratteristici gli ordini di molteplicità che, in ciascun gruppo di punti liberi, appartengono ai due ultimi punti del gruppo, limitandosi a considerare le coppie in cui il primo dei due numeri sia maggiore di uno. Ciò significa che nella serie 1), i cui primi $m + 1$ termini definiscono la singolarità del ramo,

$$\frac{v + v' + \dots + v^{(i)}}{v}$$

si considereranno i termini caratteristici $a_i x^{\frac{v}{v}}$ e si assumeranno come *coppie caratteristiche* le coppie di numeri

$$m. e. d. (v v' \dots v^{(i-1)}) = \rho_{i-1} \dots \rho_m$$

e

$$v^{(i)} - \rho_{i-1} \dots \rho_m \left| \frac{v^{(i)}}{\rho_i \dots \rho_m} \right|,$$

⁽¹⁾ Proceedings of the London. Math. Soc. Vol. VI.

⁽²⁾ Journal de Math., 3^a serie, t. 2; oppure Appendice alla trad. franc. del trattato di SALMON sulle curve piane.

⁽³⁾ Precisamente HALPHEN considera gli *esponenti* dei termini caratteristici e le *frazioni caratteristiche* $\frac{v^{(i)}}{\rho_i \dots \rho_m}$ che — ridotte ai minimi termini — indica con $\frac{s_i}{q_i}$; SMITH invece considera i numeri

$$\Delta_i = \rho_i \dots \rho_m, \quad e \quad \gamma_i = v + v' + \dots + v^{(i)}.$$

Più tardi (1890) NÖTHER, in una Nota del Circolo Mat. di Palermo (t. IV), dove in sostanza vengono valutate le molteplicità successive dei punti di un ramo per mezzo di trasformazioni quadratiche, ha considerato come *combinazioni caratteristiche* le coppie di numeri

$$\Delta_i = \rho_i \dots \rho_m \quad e \quad \alpha_i = v^{(i)}.$$

dove il secondo numero rappresenta il resto della divisione di $v^{(i)}$ per $\rho_{i-1} \dots \rho_m$. Così, richiamando altre notazioni del precedente paragrafo, *al ramo 1) corrisponderanno le coppie caratteristiche:*

$$v, v_1; v_\sigma, v_{\sigma+1}; \dots,$$

essendo

$$v_1 = v' - v \left| \frac{v'}{v} \right|,$$

$$v_\sigma = m. c. d. (v v') = \rho_1 \dots \rho_m$$

$$v_{\sigma+1} = v'' - v_\sigma \left| \frac{v''}{v_\sigma} \right|, \text{ ecc.}$$

Il numero g delle coppie caratteristiche, pari al numero dei termini caratteristici della serie 1), costituisce quel carattere che abbiamo designato come *genere del ramo*.

Ora, per indicare esplicitamente le molteplicità dei punti successivi appartenenti al ramo 1) d'ordine v e la relazione dei gruppi satelliti ai punti che da essi dipendono, ci varremo del simbolo:

$$\left(O^v O_{1 \dots h}^v O_{h+1}^{v_1} \left[O_{h+2 \dots H}^{v_1} O_H^{v_\sigma} \right] O_{H+1 \dots H+k}^{v_\sigma} O_{H+k+1}^{v_{\sigma+1}} \left[O_{H+k+2 \dots}^{v_{\sigma+1}} \right] \dots \right)$$

$$(H = h + h_1 + \dots + h_\sigma)$$

che si designerà come *simbolo caratteristico o caratteristica del ramo*.

Qui ogni gruppo di punti satelliti appare racchiuso entro una parentesi quadra, e gli esponenti dei due punti liberi che precedono una tale parentesi costituiscono una coppia caratteristica: vi sono g parentesi quadre per un ramo di genere g .

Aggiungasi che nel simbolo caratteristico di un ramo di specie s e di rango r figurano $s+r+1$ punti; l'ultima parentesi quadra comprende almeno $r-1$ punti coll'esponente 1, e soltanto questi nel caso in cui O_{s+1} (seguito ad O_s^r) sia punto libero.

Un ramo lineare

$$y = ax + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

resta semplicemente designato da (O^1) .

Un ramo ordinario d'ordine ν corrisponde all'equazione più generale

$$y = \alpha x + \alpha_1 x^{1+\frac{1}{\nu}} + \alpha_2 x^{1+\frac{2}{\nu}} + \dots$$

dove

$$\alpha_1 \neq 0;$$

un ramo siffatto è di classe 1, specie 0, rango ν , e genere 1, (per $\nu > 1$) e non contiene punti multipli successivi all'origine; la sua caratteristica è

$$(O^\nu O_1^1 [O_2^1 \dots O_\nu^1]).$$

Osservazione. Il ramo ordinario risulta così caratterizzato, giacchè — per quanto precede — ogni ramo d'ordine $\nu > 1$ e di classe $\nu' > 1$, ossia ogni ramo per cui $\alpha_2 = 0$, possiede punti multipli (almeno un punto ν -plo o ν_1 -plo, successivi all'origine.

Sussiste ora l'importante

Teorema. *La caratteristica d'un ramo è invariante per trasformazioni puntuali, regolari nell'origine.*

Infatti per una trasformazione puntuale regolare nell'origine, lo sviluppo

$$1) \quad y = \alpha x + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots,$$

dove

$$\nu' = h\nu + \nu_1, \text{ ecc.}$$

verrà trasformato in una forma generalizzata (§ 2) che, ordinata per le potenze crescenti della x , non differisce dalla forma della serie 1), ove questa venga ridotta al caso tipico con l'aggiunta di termini nulli inessenziali. Pertanto, a norma della proposizione fondamentale, il ramo trasformato possiederà come il primo la caratteristica

$$(O^\nu O_1^\nu \dots O_h^\nu O_{h+1}^{\nu_1} [O_{h+2}^{\nu_1} \dots O_H^{\nu_\sigma}] \dots).$$

I due rami avranno quindi uguali l'ordine, il rango e il genere, ma non, in generale, la classe, che costituisce un

carattere proiettivo non invariante per trasformazioni regolari puntuali d'ordine > 1 .

Aggiungasi che: anche l'ordine di contatto di due rami è invariante per una trasformazione regolare.

Infatti se la resultante $R(x) = 0$ delle equazioni dei due rami possiede il fattore x^m (avendosi dunque m intersezioni riunite per $x = 0$), sostituendo ad x uno sviluppo in serie di potenze intere di X e Y , che può supporre cominciare dai termini di primo grado, si ottiene una equazione $R(XY) = 0$, la quale s'inizia coi termini di grado m in X, Y ; associando questa equazione alla trasformata dell'equazione di un ramo si ottengono (almeno) m intersezioni dei due rami corrispondenti ad $X = Y = 0$; se ne ottengono precisamente m data l'invertibilità della trasformazione regolare.

L'invarianza della molteplicità d'intersezione di due rami, o curve algebriche, può anche essere dimostrata geometricamente mediante la regola di HALPHEN (L. 3°, § 12), e si può dedurne una dimostrazione geometrica dell'invarianza della caratteristica di un ramo.

Se $f = 0$ e $\varphi = 0$ sono due curve aventi in O m intersezioni riunite, la regola di HALPHEN dice che m è uguale alla somma degli ordini di infinitesimo dei segmenti compresi fra i punti segati da f e φ sopra una retta generica vicina ad O . Questa regola vale anche se alla retta si sostituisce un ramo lineare tangente, il che ha per effetto di cambiare gli infinitesimi di cui si discorre soltanto di infinitesimi d'ordine superiore; ciò posto emerge senz'altro l'invarianza della molteplicità d'intersezione di f e φ , giacchè una trasformazione puntuale regolare:

1) muta un ramo lineare vicino ad O in un ramo lineare vicino al punto omologo,

2) conserva gli ordini di infinitesimo nell'intorno di O .

Ciò posto si dimostrerà geometricamente l'invarianza della caratteristica di un ramo per trasformazioni regolari, procedendo in modo induttivo dai rami di genere $g - 1$ ai rami di genere g , ove si richiami l'osservazione del precedente paragrafo che la singolarità di un ramo di genere g può essere definita per mezzo delle sue intersezioni con rami di genere $g - 1$. Basterà quindi adoperare la proprietà che una trasformazione regolare puntuale muta un ramo lineare ($g = 0$) in un ramo lineare, facendo corrispondere ordinatamente i punti successivi all'origine del primo a quelli del secondo.

Ora il teorema d'invarianza vale a chiarire la distinzione fatta innanzi fra punti liberi e punti satelliti di un ramo. Infatti una trasformazione puntuale ha per effetto di *deformare* il ramo, mutando in generale la posizione dei suoi punti liberi, mentre rimane invariato il rapporto dei punti satelliti al punto libero cui succedono.

Il ramo d'ordine $\nu > 1$ di caratteristica

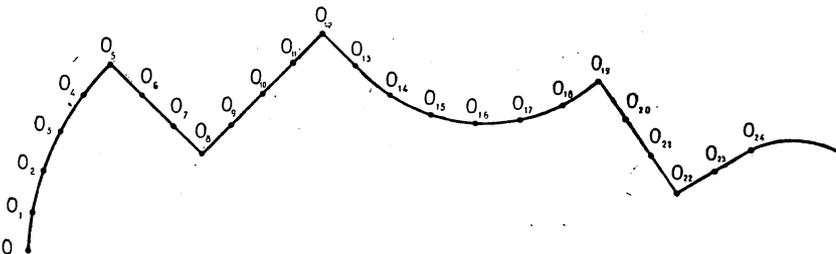
$$(O^\nu \dots O_h^\nu O_{h+1}^{\nu_1} [O_{h+2}^{\nu_1} \dots O_{II}^{\nu_\sigma}] O_{H+1}^{\nu_\sigma} \dots O_{H+k}^{\nu_\sigma} O_{H+k+1}^{\nu_{\sigma+1}} [O_{H+k+2}^{\nu_{\sigma+1}} \dots] \dots)$$

può essere adeguatamente rappresentato da uno schema grafico che già si è presentato, per $\nu = 2$, nel § 5.

Si descriva un primo arco di linea, o una poligonale con lati uguali assegnati, ad angoli ottusi, $OO_1 \dots O_n O_{n+1}$, quindi si volti bruscamente (p. es. a destra) ad angolo retto, segnando su una retta (a uguale distanza) gli h_1 punti ν_1 -pli $O_{n+2} \dots O_{n+h_1}$ e il primo punto ν_2 -plo O_{n+h_1+1} ; nuova voltata ad angolo retto a sinistra, cioè dalla banda di piano opposto a quella che contiene O_n , e così di seguito. La regola stabilita determina la descrizione della curva fino all'ultimo punto $O_{II} = O_{n+h_1+\dots+h_\sigma}$ satellite di O_{n+1} ; poi si ha ancora un tratto libero di curva (poligonale ad angoli ottusi) che comprende i punti $O_{II+1} \dots O_{II+k+1}$, al quale ultimo segue il gruppo dei punti satelliti di O_{II+k+1} , e così via. La curva prende un andamento libero e senza angoli retti dopo l'ultimo punto semplice O_{s+r} che figura nel simbolo caratteristico.

A chiarimento della costruzione indicata diamo qui lo schema corrispondente al ramo di ordine 420 e di caratteristica

$$O_1^{120} O_2^{420} \dots O_5^{130} [O_6^{130} O_7^{130} O_8^{30} \dots O_{12}^{10} O_{13}^{10} O_{14}^{10}] O_{15}^{10} \dots O_{18}^{10} O_{19}^3 [O_{20}^3 O_{21}^3 O_{22}^1 O_{23}^1 O_{24}^1]] : \\ \nu = 420, \quad s = 21, \quad r = 3, \quad g = 2.$$



In questo schema non importa segnare le molteplicità dei punti O_i ; questa risulta determinata quando si conosca l'ultimo punto semplice O_{24} che figura entro il simbolo caratteristico. Così il punto O_{21} che precede il vertice dell'angolo retto e *fronteggia* i punti $O_{22}^4 O_{23}^4 O_{24}^4$ appartenenti all'altro lato, avrà la molteplicità

$$3 = 1 + 1 + 1;$$

saranno quindi tripli anche i punti $O_{20} O_{19}$, e perciò il punto O_{18} che precede il vertice dell'angolo retto O_{19} e fronteggia i punti $O_{19}^3 O_{20}^3 O_{21}^3 O_{22}^3$, avrà la molteplicità

$$10 = 3 + 3 + 3 + 1.$$

Similmente si trova che sono 10-pi i punti $O_{14} O_{13} O_{12}$ e quindi la molteplicità di O_{11} (e perciò anche di O_{10}, O_9, O_8) vale

$$30 = 10 + 10 + 10;$$

perciò la molteplicità di O_7 (e quindi anche di O_6, O_5) varrà

$$130 = 30 + 30 + 30 + 30 + 10,$$

e infine la molteplicità di O_4 , che fronteggia $O_5^{130} O_6^{130} O_7^{130} O_8^{30}$, sarà

$$420 = 130 + 130 + 130 + 30;$$

tale sarà dunque la molteplicità di O_3, O_2, O_1, O , cioè l'ordine del ramo.

D'altra parte quando si fissino le molteplicità (decrementi) dei due punti terminali sopra un tratto libero della linea-schema, p. es. le molteplicità 420 di O_4 e 130 di O_5 , resta determinata la costruzione della linea per tutta quella parte — costituita da una poligonale ad angoli retti — che ne figura i punti satelliti.

Riferendoci al nostro caso vediamo che codesta parte della linea non muta ove si cambino le molteplicità di $O_4 O_5$ proporzionalmente a 420, 130; muterà solo — in proporzione — la molteplicità dell'ultimo punto O_{14} a cui si riattacca un nuovo tratto libero della linea.

Prendiamo p. es. O_4, O_5 colle molteplicità (minime) 42, 13; si avrà

$$42 = 13 \cdot 3 + 3$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1;$$

si deduce che il tratto $O_4 O_5$ seguono tre tratti ortogonali, e precisamente che O_4 fronteggia 3 punti 13-plici e un punto 3-plo O_8 , che O_7 fronteggia 4 punti 3-plici e un punto semplice O_{12} , che O_{11} fronteggia 3 punti semplici $O_{12} O_{13} O_{14}$, essendo O_{14} l'ultimo punto che figura nella caratteristica del ramo.

Nell'esame dello schema grafico che precede si è presentata incidentalmente una nozione, a cui conviene dare esplicito rilievo.

Se ad un punto i -plo, O_p , succede sul ramo un punto, O_{p+1} , di molteplicità $i_1 < i$, e se precisamente

$$1) \quad i = i_1 q + i_2 \quad (i_2 < i_1),$$

il $q + 1$ punti: $O_{p+1}^{i_1} \dots O_{p+q}^{i_1} O_{p+q+1}^{i_2}$, che nello schema appaiono sul lato di un angolo retto di vertice O_{p+1} , si dicono *fronteggiati* da O_p . In luogo della locuzione che precede, direttamente suggerita dallo schema grafico, si userà anche nel seguito una locuzione equivalente, dicendo che $O_{p+1} \dots O_{p+q+1}$ sono *punti prossimi* ad O_p ; e per generalità, nel caso che ad O_p succeda un punto O_{p+1} di uguale molteplicità, diremo ancora che O_{p+1} è prossimo ad O_p .

Ora l'uguaglianza 1) si potrà tradurre in parole dicendo: *la molteplicità di un punto O_p del ramo è uguale alla somma delle molteplicità dei punti prossimi che gli succedono.*

9. Analisi di una singolarità qualunque: punti multipli infinitamente vicini su rami non lineari. — I risultati dei paragrafi precedenti, intorno ai punti multipli successivi dei rami superlineari, ci consentono di estendere l'analisi del § 3 e così di *distinguere in una singolarità qualunque un aggruppamento di punti multipli infinitamente vicini*, i quali si succedano sopra rami d'ordine ≥ 1 .

Infatti se la curva f possiede in O un punto multiplo d'un certo ordine r , la f stessa si decomporrà in generale in un certo numero ($\leq r$) di rami d'ordine $\nu, \mu, \dots (\nu + \mu + \dots = r)$, e questi possederanno dei punti (semplici o) multipli successivi d'ordine

$$\nu_1 \nu_2 \dots, \quad \mu_1 \mu_2 \dots, \dots$$

Un punto O_i , infinitamente vicino ad O sopra un ramo (ed occupante il posto i -mo dopo O) si dirà *multiplo per f secondo r_i*

se appartiene ai rami di f con molteplicità rispettive

$$\nu_i (\geq 0), \quad \mu_i (\geq 0), \dots,$$

dove

$$r_i = \nu_i + \mu_i + \dots;$$

ciò suppone in ogni caso che già il punto precedente O_{i-1} sia multiplo per f secondo

$$r_{i-1} \geq r_i.$$

I punti, semplici o multipli, di f che si trovano al i -mo posto sopra uno qualunque dei rami per O , si diranno appartenere all'intorno di ordine i di O .

Risulta dall'analisi del § 6 che due rami qualsiasi di f posseggono un contatto d'ordine finito, cioè hanno comuni un numero finito di punti successivi, multipli o semplici. Esiste perciò un numero s che designa un intorno di O cui appartengono punti multipli infinitamente vicini ad O e tale che i punti dell'intorno $(s+1)$ -mo, appartenenti ai diversi rami di f , sono semplici e distinti fra loro; il numero s designa la specie della singolarità.

Ora la natura della singolarità di una curva f , nell'intorno di un punto r -plo O , verrà pienamente definita rappresentando approssimativamente la f con un sistema di h ($\leq r$) iperparabole osculatrici ai suoi h rami, del tipo

$$y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots + a_t x^{\frac{\nu+\dots+\nu^{(t)}}{\nu}},$$

dove ogni iperparabola abbia col rispettivo ramo un tale contatto che il primo punto del ramo che non gli appartiene sia un punto libero e semplice per f (cioè non appartenente ad alcuna delle altre iperparabole). Nel caso dei rami lineari le iperparabole si riducono a parabole.

In tal guisa si mette in evidenza che una singolarità qualsiasi viene pienamente definita come aggruppamento di punti infinitamente vicini, dei quali si assegnino la molteplicità e la posizione (in ispecie le relazioni di satellitismo) con la condizione che a ciascuno dei detti punti, costituenti gli elementi della singolarità, seguano nell'intorno successivo punti semplici e liberi.

Avvertenza sulle singolarità ordinarie. Le singolarità di specie θ , cioè i punti multipli a cui non sono infinitamente

vicini altri punti multipli, costituiscono singolarità (puntuali) *ordinarie*.

Questa definizione concorda con quella del L. 1°, § 12.

Infatti una singolarità O di specie 0 viene caratterizzata dalle proprietà seguenti:

1) possiede soltanto rami di classe 1

2) due rami qualsiasi per O hanno tangenti diverse.

Perciò un punto r -plo O di specie 0 è tale che ogni tangente in O , la quale figuri per $i > 1$ volte fra le r tangenti nel punto, tocca semplicemente *un* ramo della curva e la curva stessa.

Viceversa questa condizione porta che sieno soddisfatte le 1) 2), e quindi che O sia di specie 0.

Per rappresentare graficamente una singolarità occorre sovrapporre gli schemi grafici dei rami che la costituiscono, come si vede p. es. nella figura *a*). Ma la semplice sovrappo-

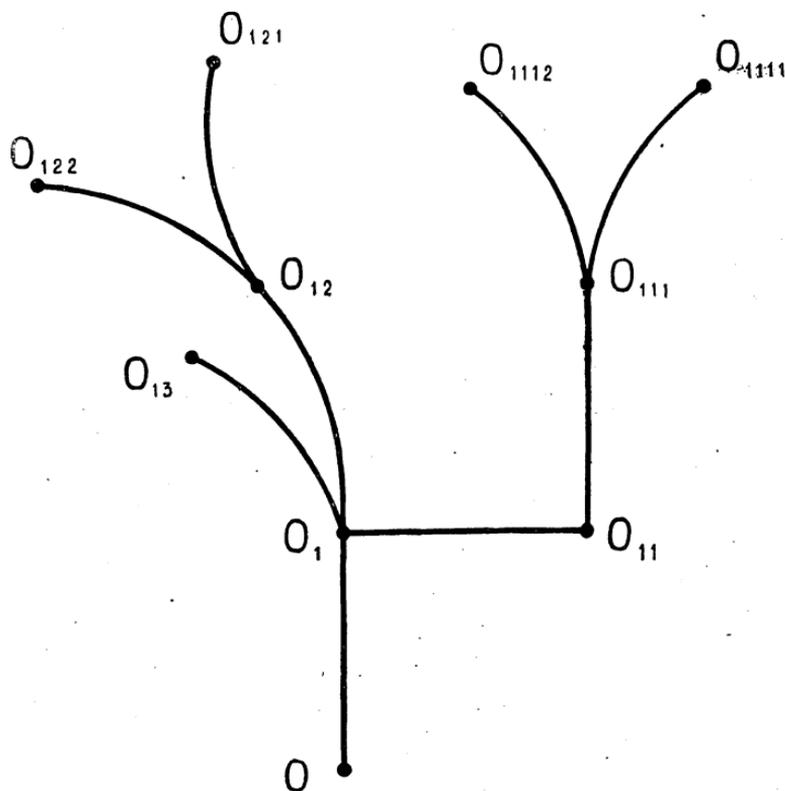
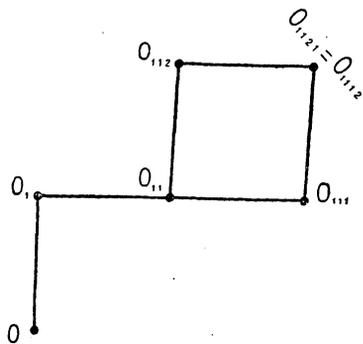


Fig. a)

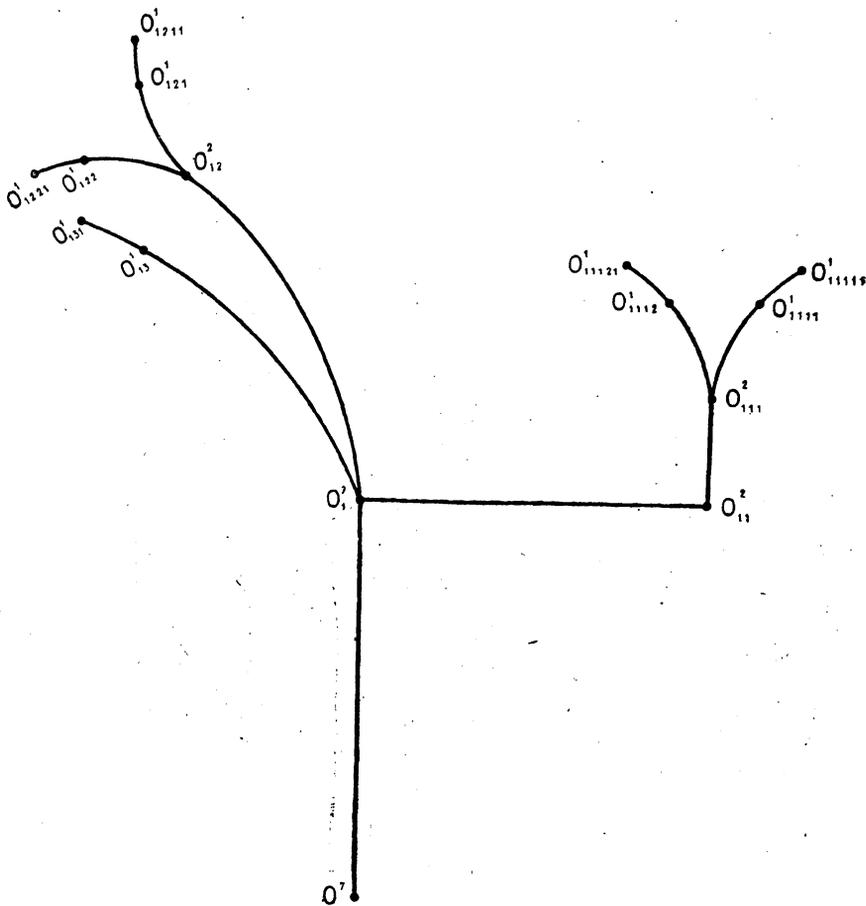
posizione dà origine ad un inconveniente, che l'annessa

figura *b*) pone in evidenza: accade, specialmente in rapporto alla rappresentazione fissata nei punti satelliti, che punti diversi vengano figurati nello schema con punti sovrapposti.

Fig. *b*)

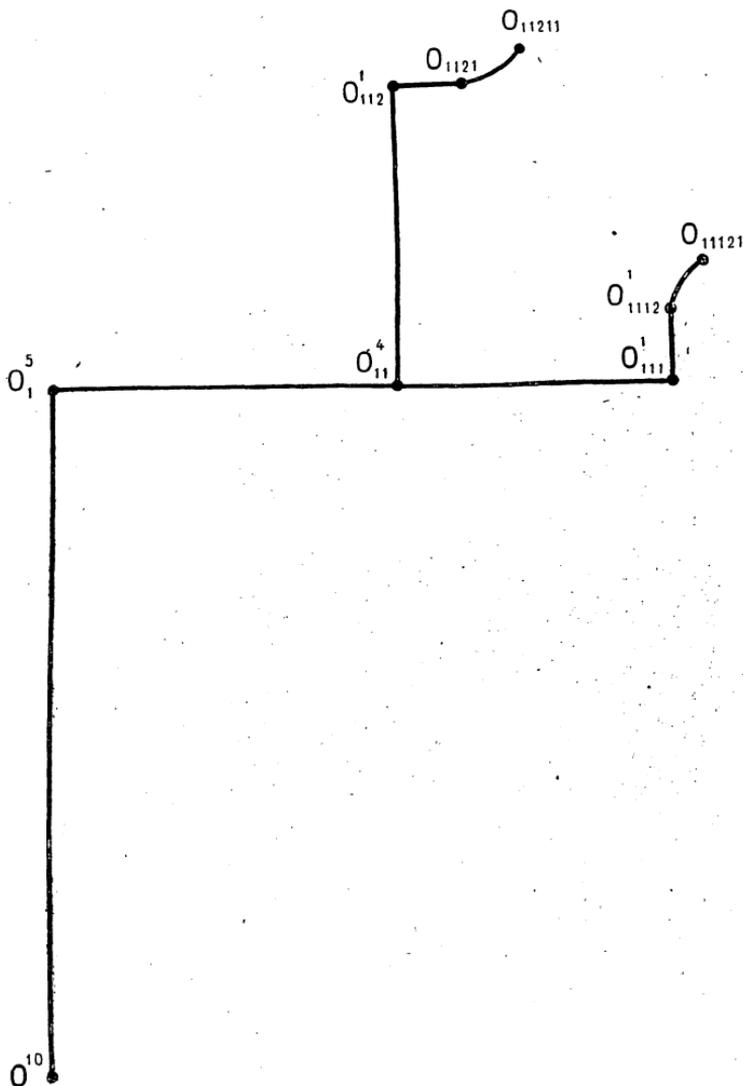
Per ovviare a tale inconveniente, si può variare la lunghezza dei tratti compresi fra due punti successivi, e conviene ingrandire i tratti in proporzione alla molteplicità per *f* dei punti iniziali, per modo che — tenuto conto delle relazioni di prossimità — si eviti ogni sovrapposizione dei punti successivi.

Per esempio la figura *a*), posto che $O_{1111}, O_{1112}, O_{121}, O_{122}, O_{13}$ siano punti semplici, diviene



dove, per mettere in rilievo la lunghezza dei tratti unitari, sono stati aggiunti i punti successivi O_{11111} , O_{11121} , O_{11211} , O_{1211} , O_{131} .

Parimente la figura *b*), assume l'aspetto seguente:



Il diagramma in cui si rappresentano graficamente i rami di f per O , variando la lunghezza dei tratti successivi in proporzione alla molteplicità dei punti iniziali, prenderà il nome di albero della singolarità.

L'albero della singolarità si deve ritenere interamente descritto quando si sia giunti a figurare su ogni ramo il primo punto libero che sia semplice per la curva.

Nota sui punti satelliti. L'albero delle singolarità mette in luce la proprietà del gruppo G , comprendente tutti i punti satelliti di un punto O_1 , che si trovano sui possibili rami per O_1 : *ad ogni punto O_i satellite di O_1 , che appartenga all'intorno $(i-1)$ -mo di questo, succedono, nel gruppo G , due punti satelliti dell'intorno i -mo; uno dei quali, O_{i+1} , si trova nello schema grafico allineato col punto precedente O_{i-1} , mentre l'altro, O_{i+2} , si trova sopra la perpendicolare in O_i alla retta $O_{i-1}O_i$.*

Vogliamo caratterizzare aritmeticamente i due punti satelliti succedenti ad O_i , e — per semplicità di discorso — supporremo che il punto O_1 , ultimo punto libero che precede i punti del nostro gruppo G , sia vicino al punto proprio O , nell'intorno del prim'ordine, corrispondendo alla direzione y' .

Il punto O_i potrà essere individuato come ultimo punto satellite di O_1 sopra un ramo $R(\nu, \nu_1)$ dato dall'equazione

$$y = y'x + ax^{\nu} + \dots \quad (\nu_1 < \nu).$$

Sviluppando $\frac{\nu_1}{\nu}$ in frazione continua si avrà

$$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \dots + h_{\sigma-1} + \frac{1}{h_{\sigma}}}},$$

dove

$$h_{\sigma} \geq 2,$$

e

$$i = h_1 + h_2 + \dots + h_{\sigma};$$

appare quindi che il punto O_{i-1} , precedente ad O_i sul detto ramo, si ottiene cambiando h_{σ} in $h_{\sigma} - 1$; con ciò se $h_{\sigma} > 2$ il punto O_{i-1} figura come ultimo punto satellite su un ramo $R(\mu, \mu_1)$ dove

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{h'_{\sigma}}}}$$

con

$$h'_{\sigma} = h_{\sigma} - 1,$$

ed invece, se $h_\sigma = 2$, O_{i-1} appare come ultimo punto satellite di O_i sopra un ramo $R(\mu, \mu_1)$ per cui

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 \dots h_{\sigma-2} + \frac{1}{h'_{\sigma-1}}}},$$

dove

$$h'_{\sigma-1} = h'_{\sigma-1} + 1.$$

Ora risulta di qui che i due punti successivi ad O_i , entro il gruppo G , sono i punti satelliti estremi sopra rami $R(\pi, \pi_1)$ dove: per O_{i_1}

$$\frac{\pi_1}{\pi} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{h_\sigma + 1}}},$$

mentre per O_{i_2}

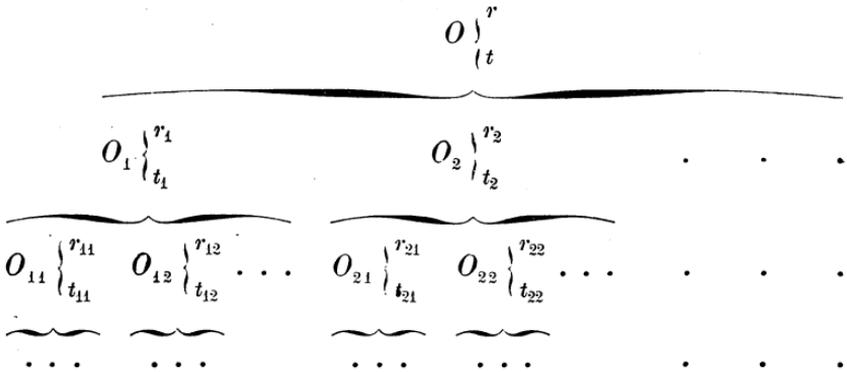
$$\frac{\pi_1}{\pi} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{(h_\sigma - 1) + \frac{1}{2}}}}.$$

Le note formule ricorrenti, che servono per il calcolo delle ridotte di una frazione continua, permetterebbero di esprimere $\frac{\pi_1}{\pi}$ per mezzo di $\frac{\mu_1}{\mu}$ e $\frac{\nu_1}{\nu}$; ma su ciò non vale la pena indugiarsi.

Alle cose dette fa riscontro il fatto che al punto O_i succede un solo punto di G , cioè il punto O_{i1} , satellite di O_i sui rami del second'ordine che passano per esso. Ad O_{i1} invece succedono, come si è detto, due punti di G cioè i satelliti O_{i11} e O_{i12} di O_{i1} sui rami di terz'ordine $R(3, 1)$ e $R(3, 2)$ che passano per esso, e così di seguito. In generale i punti di G successivi ad un punto O_i restano dunque divisi in due gruppi, che diremo *annessi* ai due punti O_{i1} e O_{i2} succedenti ad O_i .

10. **Intersezioni di due curve.** — La definizione dei punti (semplici o multipli) infinitamente vicini permette di valutare, in una forma espressiva, quante sono le intersezioni di due curve, f e φ , che vengono assorbite in un punto multiplo comune, O , ove si tocchino alcuni dei loro rami. Sussiste il seguente:

Teorema fondamentale. Due curve f e φ abbiano in comune il punto O e alcuni punti infinitamente vicini ad esso nei successivi intorno d'ordine 1, 2, ..., colle molteplicità che vengono designate dal seguente quadro:



le intersezioni delle due curve che vengono assorbite in O sono:

$$rt + \sum r_i t_i + \sum r_{ik} t_{ik} + \dots$$

Infatti la dimostrazione del teorema risulta subito dalla definizione di punti multipli infinitamente vicini e dal teorema del L. 3°, § 12, per cui le intersezioni di due curve si ottengono intersecando i rami dell'una coi rami dell'altra, associati in tutti i modi possibili.

La determinazione effettiva delle molteplicità $r, r_i, r_{ik}, \dots, t, t_i, t_{ik}, \dots$, relative alle curve f e φ , esige il calcolo diretto degli sviluppi di PUISEUX e può compiersi (anche indipendentemente da codesto calcolo) mediante il procedimento di riduzione offerto dalla trasformazione quadratica, che prenderemo in esame nel seguente capitolo.

Qui ci limiteremo ad osservare che nella determinazione delle intersezioni delle due curve

$$\begin{aligned}
 f &= u_r + \dots + u_{r+h} + \dots + u_n = 0 \\
 \varphi &= v_t + \dots + v_{t+h} + \dots + v_m = 0,
 \end{aligned}$$

è lecito surrogare f e φ con curve approssimanti

$$f_{r+h} = u_r + \dots + u_{r+h} = 0$$

$$\varphi_{t+k} = v_t + \dots + v_{t+k} = 0$$

d'ordine abbastanza elevato.

Precisamente: il numero N delle intersezioni delle nominate curve approssimanti d'ordine $r+h$ e $t+k$ uguaglia il numero delle intersezioni di f e φ se sono soddisfatte le disuguaglianze:

$$N < r(t+k+1), \quad N < t(r+h+1).$$

Infatti, adoperando la solita designazione del resultante (L. 3°, § 12) dove si ponga $\bar{f} = f - f_{r+h}$, $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_{t+k}$, avremo

$$R(f\varphi) = R(f_{r+h}\varphi_{t+k}) + R(f_{r+h}\bar{\varphi}) + R(\varphi_{t+k}\bar{f}) + R(\bar{f}\bar{\varphi}),$$

dal che segue l'enunciato. (Cfr. gli esempi relativi all'intersezioni di una curva con l'hessiana nel L. 3°, § 16).

Ora, chi scruti l'intima ragione del teorema precedente, riconoscerà facilmente che esso dipende da ciò che: se la curva approssimante

$$f_{r+h} = u_r + \dots + u_{r+h} = 0$$

possiede, sopra un ramo per l'origine, s punti successivi di molteplicità r_1, r_2, \dots, r_s , con

$$r_1 + r_2 + \dots + r_s \leq h,$$

anche la curva f possiede nei detti punti le medesime molteplicità.

11. Punti prossimi: condizioni di esistenza d'una curva con date molteplicità effettive. — Se O_i è un punto multiplo della curva f , appartenente all'intorno d'ordine i di un punto proprio O , si diranno *prossimi* ad O_i i punti, appartenenti agli intorni d'ordine $i+1, \dots$, che sono prossimi ad O_i sui vari rami di f passanti per esso.

Pertanto (pag. 381) avremo che: *la molteplicità del punto O_i è uguale alla somma delle molteplicità dei suoi punti prossimi.*

L'importanza della relazione stabilita si manifesta subito nel problema seguente.

Si voglia costruire una curva f la quale possedga un punto O di molteplicità r e — negli intorno successivi di esso — altri punti multipli infinitamente vicini, con date molteplicità. Per l'esistenza di una curva siffatta si manifesta necessaria la condizione che ciascuno dei punti multipli assegnati abbia un ordine di molteplicità minore od uguale alla somma degli ordini di molteplicità dei punti prossimi; imperocchè fra i punti di una tale curva f , che sono prossimi ad un punto O_i , si trovano, per ipotesi, i punti dati con le molteplicità ad essi attribuite (ed eventualmente altri punti non assegnati).

Ora vogliamo dimostrare che le relazioni di disuguaglianza, riconosciute come condizione necessaria, porgono anche la condizione sufficiente per l'esistenza di una curva f che possedga i punti multipli assegnati, almeno considerando curve f di un ordine abbastanza elevato.

Cominciamo dal *caso elementare* in cui s'imponga ad f una successione di punti multipli O, O_1, O_2, \dots, O_i , seguentisi sopra un ramo. E supponiamo dapprima che si tratti di un ramo lineare, i punti successivi del quale dovranno avere per f molteplicità decrescenti o almeno non crescenti:

$$r \geq r_1 \geq r_2 \dots \geq r_i.$$

In questo caso si costruisce una curva f , possedente le molteplicità assegnate, sommando un certo numero di parabole tangenti al ramo dato, e precisamente:

r_i parabole d'ordine $i+1$ passanti per $OO_1 \dots O_i$ (cioè aventi a comune la parabola osculatrice d'ordine i);

$r_{i-1} - r_i$ parabole d'ordine i passanti per $OO_1 \dots O_{i-1}$, e non per O_i ;...

e finalmente

$r - r_1$ rette per O diverse dalla tangente OO_1 .

Questa costruzione si estende al caso in cui i punti successivi $OO_1 \dots O_i$ vengano dati sopra un ramo non lineare, salvo che le disuguaglianze relative alla molteplicità dei punti prossimi porgono diverse relazioni di disuguaglianza fra i numeri r, r_1, \dots, r_i . Per precisare la cosa, conviene osservare che i punti $OO_1 \dots O_i$ appartengono sempre ad un ramo di ordine

minimo per cui O_i è semplice, sicchè questo appare come ultimo punto del simbolo caratteristico o viene dopo di questo (cfr. § 8). Supponendo la successione dei punti $OO_1 \dots O_i$ definita sopra un ramo d'ordine minimo che la contiene, le nostre disequaglianze si esprimono come segue: se il punto O_h fronteggia sul ramo i punti (prossimi) $O_{h+1} \dots O_{h+k}$, dove $h+k \leq i$, avremo

$$r_h \geq r_{h+1} + \dots + r_{h+k}.$$

Allora si otterrà una curva f , avente le molteplicità assegnate, sommando più gruppi di iperparabole tangenti le quali abbiano a comune col ramo dato l'iperparabola osculatrice di un certo grado.

Abbiamo così dimostrato che le disequaglianze relative alle molteplicità dei punti prossimi esprimono la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una curva f , d'ordine abbastanza elevato, che debba contenere effettivamente punti multipli assegnati, e ciò nel caso in cui questi punti si succedano sopra un ramo. Per passare al caso generale converrà ora considerare più successioni di punti con la stessa origine, date sopra più rami. Ma è chiaro che questo problema non offre nuove difficoltà in confronto al caso precedente, a cui si lascia ridurre sommando curve che posseggano certe successioni di punti multipli sui singoli rami; occorre solo avvertire che la distribuzione delle molteplicità di un punto O_h fra i rami che le contengono può dar luogo ad una limitata arbitrarietà, ove la molteplicità r_h che si assegna alla curva f in O_h sia maggiore (e non uguale) alla somma delle molteplicità nei punti prossimi.

Designamo con $\nu, \nu_1 \dots \nu_i = 1$ le molteplicità per il nostro ramo dei punti successivi $OO_1 \dots O_i$ (questa designazione che qui conviene provvisoriamente adottare, non deve essere confusa con quella del § 8 dove si segnavano con indici diversi le molteplicità essenzialmente decrescenti). Prendiamo un primo gruppo di r_i iperparabole aventi a comune l'iperparabola osculatrice di grado i ; rimane allora da costruire una curva f' passante per i punti $OO_1 \dots$ fino ad O_{i-1} al più, ed avente nel punto O_h la molteplicità

$$r_h - r_i \nu_h;$$

in forza delle condizioni poste, le differenze $r_h - r_i v_h$ (per $h = 0, 1, \dots$) sono ≥ 0 e soddisfano ancora alle disequaglianze dei punti prossimi, come si deduce ricordando che, per il nostro ramo,

$$v_h = v_{h+1} + \dots + v_{h+k}.$$

Così il problema può risolversi applicando al più altre i volte il procedimento indicato.

Concludiamo enunciando il

Teorema: *la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di curve, d'ordine abbastanza elevato, che posseggano date molteplicità in un gruppo di punti infinitamente vicini ad un'origine, è che la molteplicità assegnata in un punto del gruppo non sia inferiore alla somma delle molteplicità assegnate nei punti prossimi.*

12. Costruzione di una curva con punti multipli assegnati: molteplicità virtuali. — Giova prender le mosse dall'osservazione seguente:

Siano O, O_1, \dots, O_i punti successivi sopra un ramo, e si considerino i rami d'ordine minimo $(O^1), (O^1 O_1^1), \dots, (O^{v_{i_0}} O_1^{v_{i_1}} \dots O_i^1)$, che valgono a definire i singoli punti. Se una curva f possiede rispettivamente in O, O_1, \dots, O_i le molteplicità r, r_1, \dots, r_i :

- 1) i rami (O) hanno con f (esattamente) r intersezioni,
- 2) i rami (OO_1) ne hanno $r + r_1$,

.....

$i + 1$) i rami $(O^{v_{i_0}} O_1^{v_{i_1}} \dots O_i^1)$ ne hanno $r v_{i_0} + r_1 v_{i_1} + \dots + r_i$.

Viceversa, se sono soddisfatte le condizioni 1), 2), ..., $i + 1$), la curva f possiede i punti $O^r, O_1^{r_1}, \dots, O_i^{r_i}$.

La prima parte dell'enunciato riesce evidente decomponendo la f nei suoi rami, in base alla definizione dei punti multipli successivi comuni a due rami; e parimente resta stabilita la proposizione inversa.

La precedente osservazione dà luogo ad una *definizione geometrica dei punti multipli infinitamente vicini della curva f* in base alle condizioni 1) 2) ... $i + 1$), la quale pone in evidenza che: se due curve f e φ posseggono, in un gruppo — G — di punti infinitamente vicini, le medesime molteplicità, anche le curve del fascio $\lambda f + \mu \varphi = 0$ posseggono in quei punti le stesse molteplicità.

Si deduce, (L. 1°, § 14), che tutte le curve f possedenti date molteplicità nei punti di G formano un sistema lineare, ossia: *le condizioni di passaggio di una curva f per punti multipli infinitamente vicini sono lineari*, come per punti multipli distinti (cfr. per i punti seguentisi su rami lineari il § 3)

Per vedere come effettivamente si scrivano le condizioni anzidette, nel caso di punti su rami superlineari, riferiamoci ad un semplice esempio: ad una curva f , che passi r volte per O e s volte per il punto infinitamente vicino O_1 , per es. nella direzione dell'asse x , s'imponga di passare ulteriormente con una certa molteplicità u per il punto O_{11} , primo satellite di O_1 , che appartiene a tutti i rami di second'ordine, ($O^2 O_1^1 [O_{11}^1]$), rappresentati da

$$1) \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = a_1 t^3 + bt^4 + \dots \end{cases}$$

Riconosciamo anzitutto che, in forza del passaggio per $O^r O_1^s$, la f possiede $2r + s$ intersezioni coi rami 1), cioè eseguendo la sostituzione 1) nell'equazione $f(xy) = 0$ si trova un'equazione risultante $F(t) = 0$ che contiene t al grado minimo $2r + s$. Trovandosi O_1 sull'asse x , si verifica che spariscono in F tutti i termini di grado minore di $2r + s$, come segue: scrivendo

$$f = \Sigma a_{ik} x^i y^k,$$

il passaggio di f per O^r si traduce nelle condizioni

$$a_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i + k < r,$$

e il passaggio per O_1^s nelle

$$a_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i + 2k < r + s;$$

da ciò si deduce:

$$a_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad 2i + 3k < 2r + s.$$

Ora se la f deve passare per il punto O_{11} con la molteplicità $u = 1$, bisogna che manchi in F il termine che contiene t al grado $2r + s$: questo termine contiene i coefficienti a_{ik} per cui

$$i + k \geq r, \quad i + 2k \geq r + s, \quad 2i + 3k = 2r + s,$$

e quindi

$$i + k = r, \quad i + 2k = r + s$$

$$i = r - s, \quad k = s;$$

la condizione è dunque unica, essendo data da

$$a_{r-s, s} = 0.$$

Se invece si vuole che f passi per O_{11} con la molteplicità $u=2$, si troveranno nello stesso modo altre due condizioni, che corrispondono all'annullamento dei coefficienti per cui

$$\begin{cases} i + k = r + 1, \\ i + 2k = r + s \end{cases} \quad \begin{cases} i + k = r \\ i + 2k = r + s + 1, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} i = r - s + 2 \\ k = s - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} i = r - s - 1 \\ k = s + 1. \end{cases}$$

È ormai chiaro come si prosegua la determinazione delle condizioni acciocchè f passi per O_{11} con la molteplicità $u=3, 4, \dots$, e che in generale si trovano $1 + 2 + \dots + u = \frac{u(u+1)}{2}$ condizioni.

Lo stesso numero di condizioni si trova sempre rispondere all'imposizione di un punto multiplo, definito in un certo intorno di f sopra un ramo superlineare; ma il riconoscimento di ciò esige un'analisi approfondita che rimandiamo al Cap. III, dove le condizioni su esposte vengono studiate con le formule del calcolo differenziale; qui si è voluto accennare al modo come esse si ottengano con considerazioni puramente algebriche.

La possibilità di tradurre in *forma differenziale* le condizioni di passaggio di f per punti appartenenti a rami superlineari, si lascia riconoscere in modo analogo a ciò che avviene nel caso di punti succedentisi sopra rami lineari.

A tale scopo occorre considerare la funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

dove

$$1) \quad x = t^{\nu}, \quad y = at^{\nu} + bt^{\nu+\nu'} + \dots:$$

se la curva f deve possedere r intersezioni col ramo 1) per $t=0$, si debbono annullare, insieme ad F , anche le derivate successive di F fino all'ordine $r - 1$ incluso. Infatti codeste derivate porgono i coefficienti delle successive potenze di t nello sviluppo di MAC-LAURIN di $F(t)$.

Ora osserviamo che l'insieme delle equazioni lineari nei coefficienti di f , che valgono ad esprimere la definizione geometrica dei punti multipli infinitamente vicini, traduce quella definizione soltanto in *sensu largo*, in quanto permette di affermare che un ramo (O) ha con la curva f almeno r intersezioni ma non esattamente r , e così di seguito. La definizione intesa in *sensu stretto* esigerebbe di aggiungere alle predette equazioni lineari di condizione anche certe *diseguaglianze*. Questa circostanza si rende anche manifesta attraverso la definizione aritmetica dei punti multipli in rapporto agli sviluppi di PUISEUX, giacchè ivi occorre escludere l'annullamento dei coefficienti dei termini essenziali negli sviluppi predetti.

Or dunque accade che entro il sistema lineare di tutte le curve f possedenti certe molteplicità nei punti del gruppo G , esistono curve particolari aventi effettivamente molteplicità diverse da quelle della curva generica. Per esempio se OO_1O_2 sono punti successivi di un ramo di second' ordine, nel sistema lineare delle curve f (di dato ordine) possedenti i punti $O^2O_1^1O_2^1$, cioè aventi a comune una cuspide con la relativa tangente, sono contenute le curve che posseggono i punti doppi $O^2O_1^2$, cioè hanno in O un tacnodo con la tangente OO_1 . (Cfr. § 4).

Conformemente alla *locuzione* già introdotta nel § 3, diremo che la curva f possiede nei punti di un gruppo G certe *molteplicità virtuali* r, r_1, r_2, \dots quando i suoi coefficienti soddisfano alle condizioni lineari (di uguaglianza) che traducono in senso lato la definizione geometrica (o aritmetica) delle *molteplicità effettive*.

Qui occorre avvertire che la definizione delle molteplicità virtuali si applica non soltanto ad una f che appaia come caso particolare di curve dotate di molteplicità effettive r, r_1, r_2, \dots , ma anche quando tali curve non esistano, come avviene se i numeri r, r_1, r_2, \dots non soddisfano alle disequaglianze fondamentali di prossimità.

Osservazione. Il problema di determinare le molteplicità effettive che spettano ad una curva d'ordine abbastanza elevato cui vengano assegnate certe molteplicità virtuali, in modo affatto arbitrario, verrà da noi trattato nei prossimi capitoli, sia con l'ausilio della trasformazione quadratica sia con quello dell'analisi infinitesimale. Qui ci limitiamo ad una semplice avvertenza relativa all'ordine con cui debbono prendersi le condizioni imposte da certe molteplicità virtuali. Se si impone ad una curva f di possedere come punti di molteplicità r, r_1, r_2, \dots, r_i , i punti successivi di un ramo ($O^1 O_1^{r_1} O_2^{r_2} \dots O_i^{r_i}$), bisognerà anzitutto che la molteplicità effettiva di f in O risulti $r' \geq r$, e se $r' = r$ anche $r_1' \geq r_1$. Ma se invece $r' > r$, la curva f per questo solo fatto possiede già con tutti i rami (OO_1) r' anzichè r intersezioni, sicchè le condizioni 2) relative al punto $O_1^{r_1}$ vengono già in parte soddisfatte: la molteplicità effettiva di O_1 potrà dunque risultare $< r_1$, avendosi soltanto la certezza che

$$r_1' \geq r_1 - (r' - r).$$

Proseguendo questo ordine di considerazioni, si riconosce che in ogni caso: per il primo punto O_h della successione $OO_1 \dots O_i$, la cui molteplicità effettiva r_h' risulti diversa dalla virtuale, si ha

$$r_h' > r_h;$$

invece per l'ultimo punto O_k , la cui molteplicità effettiva sia diversa dalla virtuale, si avrà

$$r_k' < r_k,$$

almeno per la curva f più generale, di un ordine abbastanza elevato.

Aggiungasi la spiegazione dei motivi per cui, in tutto ciò che precede, si prendono a considerare curve di un ordine abbastanza elevato. Si esige in primo luogo che il numero dei coefficienti di f sia tale da poter soddisfare tutte le condizioni relative ai punti multipli successivi assegnati. Ma soprattutto si vuole ancora che queste *condizioni* siano *indipendenti*, almeno nel senso che l'imposizione di dati punti multipli, soddisfacenti alle disuguaglianze di prossimità, non

porti di conseguenza molteplicità superiori a quelle assegnate o passaggio per altri punti infinitamente vicini. Ciò accade certo per curve d'un ordine assai alto, come risulta dalla costruzione data nel § 11, la quale ci porge una curva avente una data successione di punti multipli sommando parabole ed iperparabole osculatrici.

Per curve d'ordine basso può invece avvenire che il passaggio per alcuni punti infinitamente vicini porti di conseguenza il passaggio per un punto successivo: così la tangente ad una curva in un flesso contiene un terzo punto della curva, e la conica osculatrice in un punto sestatico di una cubica (L. 1°, § 22), (o in generale di una curva qualunque), ha un sesto punto a comune con la curva oltre i cinque che valgono a determinarla. Invero legami di dipendenza di tal genere sono in tutto analoghi a quelli che vengono presentati da certi gruppi di punti distinti in relazione alle curve di un certo ordine che debbano passare per esse (L. 2°, §§ 15, 16).

Nota sulla separazione dei rami. Ad una curva f (d'ordine abbastanza elevato) s'imponga di passare per i punti infinitamente vicini di un gruppo G con certe molteplicità, assegnate in guisa da soddisfare alle disuguaglianze fra gli ordini di molteplicità dei punti prossimi. Allora esiste un sistema lineare di curve f che passano (propriamente) per i punti dati con molteplicità effettive uguali alle molteplicità assegnate. Sorge quindi la questione di determinare in quanti rami si scinda la curva f . Alla quale domanda si può dare una risposta semplice e precisa per la f più generale fra quelle che posseggono i dati punti multipli.

Se il gruppo G fosse così esteso da comprendere i primi punti liberi che siano semplici per f , verrebbe senz'altro determinata la separazione dei rami di f e se ne otterrebbe la rappresentazione grafica conforme al § 9. Ma, ove G non sia in questo senso completo, si può tuttavia dare una risposta semplice e precisa alla domanda, sempre per la curva f più generale fra quelle che posseggono i dati punti multipli; invece per curve f particolari la domanda non ammette *a priori* una risposta determinata.

Per semplicità ci riferiremo al caso in cui il gruppo G sia una successione di punti $OO_1 \dots O_i$ seguentisi sopra un unico ramo ($O^v O_1^{v_1} \dots O_i^i$) e supporremo dapprima che le molteplicità assegnate nei punti O_h siano multiple dei numeri v_h secondo uno stesso numero:

$$r = \lambda v, \quad r_1 = \lambda v_1 \dots r_i = \lambda.$$

In tal caso si riconosce che: « la curva f più generale passante per $O^r O_1^{r_1} \dots O_i^{r_i}$ consta di λ rami passanti semplicemente (e propriamente) per O_i ».

Nella costruzione del § 11 si è mostrato infatti l'esistenza di una curva f_1 che passa per $O^r O_1^{r_1} \dots O_i^{r_i}$ e possiede λ rami distinti; anzi per una tale f_1 si possono assumere ad arbitrio λ punti semplici $O_{i+1,1} O_{i+1,2} \dots O_{i+1,\lambda}$, successivi ad O_i (nell'intorno $(i+1)$ -mo di O), punti liberi in posizione affatto arbitraria.

Ora nel sistema lineare $|f|$ delle curve che passano per $O^r O_1^{r_1} \dots O_i^{r_i}$, una curva generale f , avendo nei punti dati molteplicità effettive uguali alle virtuali, dovrà contenere rami passanti propriamente per O_i ; si concluderà dunque che essa consta di λ rami distinti, ove si faccia vedere che non può contenere un ramo d'ordine $v\rho$ avente in O_i la molteplicità ρ ($\rho > 1$). Infatti se questo accade per una \bar{f} di $|f|$, i punti di \bar{f} prossimi ad O_i , non saranno più λ punti liberi distinti di coordinate arbitrarie, ma alcuni di essi, $O_{i+2} \dots O_{i+\rho}$, saranno satelliti di un punto O_{i+1} , salvo il caso che O_{i+1} abbia una molteplicità > 1 . È manifesto che le condizioni perchè i punti $O_{i+2} \dots O_{i+\rho}$ divengano satelliti di O_{i+1} oppure perchè O_{i+1} acquisti una molteplicità > 1 , si traducono in relazioni fra i coefficienti della \bar{f} scelta in $|f|$, non essendo tali condizioni soddisfatte per la curva generica $\lambda f_1 + \mu \bar{f}$. Dunque la \bar{f} è una curva particolare del nostro sistema lineare.

Tenendo poi presente la costruzione delle curve con dati punti multipli svolta nel § 11, si deduce in generale il

Principio della massima separazione dei rami: la curva più generale fra quelle che posseggono dati punti multipli si scinde nel massimo numero di rami compatibile col possesso delle date molteplicità effettive.

Questo risultato fu già stabilito nel § 5 per il caso particolare delle successioni di punti doppi. Anche la proprietà ivi riconosciuta che il ramo di second'ordine di specie s possiede come caso particolare la curva composta di due rami con contatto d'ordine $s+1$, può essere facilmente estesa. Una curva, φ , composta di un ramo d'ordine $\nu\rho$ passante per O_i^ρ ($\rho > 1$), per valori particolari dei parametri da cui dipende può spezzarsi in ρ rami d'ordine ν , aventi a comune oltre O_i^1 anche O_{i+1}^ρ ; ciò accade quando si imponga alla φ di avere in O_{i+1} la molteplicità ρ .

CAPITOLO II

Le singularità rispetto alle trasformazioni quadratiche.

13. Riduzione delle singularità mediante trasformazioni quadratiche. — Richiamiamo le nozioni fondamentali sulle trasformazioni quadratiche del piano, rinviando per maggiori schiarimenti al L. 1°, § 17.

Si ottiene una trasformazione quadratica (generale) fissando che alla rete $|\varphi|$ delle coniche per tre punti base A, B, C (non in linea retta) corrisponda proiettivamente la rete delle rette del piano, in guisa che ad ogni fascio di φ corrisponda un fascio di rette. Designando con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ tre coniche linearmente indipendenti della rete, le formule della trasformazione sono:

$$y_1 = \varphi_1(x_1 x_2 x_3)$$

$$y_2 = \varphi_2(x_1 x_2 x_3)$$

$$y_3 = \varphi_3(x_1 x_2 x_3),$$

o — in coordinate non omogenee —

$$X = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_3(xy)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_3(xy)}.$$

Queste formule determinano un punto (y) corrispondente ad un punto qualsiasi (x) , fatta eccezione per i punti fondamentali A, B, C , per cui riesce $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, ossia X e Y assumono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Allora, avvicinandosi (x)

ad A in una certa direzione, il punto omologo (y) tende ad un punto che deve ritenersi corrispondere a un punto infinitamente vicino ad A . Il luogo dei punti che corrispondono

ai punti infinitamente vicini ad A è una *retta fondamentale*, \bar{a} ; perciò alle rette per A corrisponderanno coniche degeneri aventi come parte fissa la \bar{a} , cioè, a prescindere da questa parte fissa, corrisponderanno le rette di un fascio \bar{A} (proiettivo al primo). Similmente ai punti B, C corrisponderanno altre due rette fondamentali \bar{b}, \bar{c} , e alle rette per B, C , rette per \bar{B}, \bar{C} .

Ora la trasformazione quadratica è univocamente invertibile: alle rette del piano (x) corrispondono nel piano (y) (delle linee intersecanti in due punti le rette cioè) coniche che passano per i tre punti $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ intersezioni di $\bar{b}\bar{c}, \bar{c}\bar{a}, \bar{a}\bar{b}$: si vede infatti che il punto \bar{A} corrisponde alla retta $a = BC$, ecc.

Le equazioni di una trasformazione quadratica a punti fondamentali distinti si possono ridurre alla forma canonica, già incontrata nel L. 1°, § 17, come segue.

Si assumano nel piano (x) i punti fondamentali della trasformazione come punti (100), (010), (001), e analogamente nel piano (y) i punti fondamentali omologhi; le equazioni della trasformazione si ridurranno a

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_2 = \frac{1}{y_2}, \quad x_3 = \frac{1}{y_3},$$

o, sotto forma intera (disponendo di un fattore di proporzione $y_1 y_2 y_3$):

$$x_1 = y_2 y_3, \quad x_2 = y_3 y_1, \quad x_3 = y_1 y_2;$$

la sostituzione inversa è data qui dalle formule

$$y_1 = \frac{x_2 x_3}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, \quad y_2 = \frac{x_3 x_1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, \quad y_3 = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}},$$

che — tenuto conto del fattore arbitrario nelle coordinate omogenee — divengono

$$y_1 = x_2 x_3, \quad y_2 = x_3 x_1, \quad y_3 = x_1 x_2.$$

Ora, data una curva d'ordine n ,

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

la sua trasformata è, in generale, la curva d'ordine $2n$:

$$\bar{f}(y_1 y_2 y_3) = f(y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2) = 0,$$

che passa con la molteplicità n per i punti fondamentali del piano (y). Ma se la f possiede come punto multiplo d'ordine r un punto fondamentale del piano (x), p. es. (100), la trasformata di f si ottiene staccando il fattore y_1^r :

$$f(x_1 x_2 x_3) = y_1^r f(y_1 y_2 y_3).$$

Così appare come dalla $\bar{f}(y_1 y_2 y_3) = 0$, trasformata di una f generale, si ritorni alla $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ colla sostituzione

$$x_1 = y_2 y_3, \quad x_2 = y_3 y_1, \quad x_3 = y_1 y_2;$$

infatti, la $\bar{f}(y_1 y_2 y_3) = 0$ passando per i punti (100), (010), (001), colla molteplicità n , dalla $\bar{f}(x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2)$ si stacca il fattore $x_1^n x_2^n x_3^n$.

Richiamate queste nozioni, ci proponiamo di studiare l'effetto delle trasformazioni quadratiche sopra le singolarità di una curva f . E conviene prender le mosse da un caso elementare che già incontrammo per incidenza nel § 23 del L. 2°, ma che qui vogliamo riassumere come base di ulteriori sviluppi.

Sia f una curva qualunque d'ordine n , e si eseguisca nel piano di f una trasformazione quadratica supponendo che i punti fondamentali A, B, C , siano fuori di f , oppure che appartengano ad essa con certe molteplicità r, s, t , ma in tal caso le rette fondamentali a, b, c non siano tangenti principali; si supponga ancora che le rette fondamentali a, b, c non tocchino f e non passino per alcun punto multiplo di essa.

La curva f viene trasformata in una curva \bar{f} d'ordine

$$2n - (r + s + t) \quad (r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0),$$

giacchè alle intersezioni di \bar{f} con una retta corrispondono le intersezioni di f con una conica per A, B, C . La \bar{f} passerà per i punti fondamentali $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, con le molteplicità

$$\bar{r} = n - (s + t),$$

$$\bar{s} = n - (t + r),$$

$$\bar{t} = n - (r + s),$$

giacchè alle intersezioni di f con una retta fondamentale,

per es. a , fuori di B e C , corrispondono punti di \bar{f} infinitamente vicini ad \bar{A} , cioè tangenti di \bar{f} in \bar{A} (invece al punto B , non essendo a una tangente principale, corrisponderà il gruppo delle intersezioni di \bar{f} con \bar{b} , fuori di \bar{A} , C ; e analogamente si dica per C). Dall'ipotesi che le \bar{r} intersezioni di f con a (fuori di B , C) sono punti distinti, segue che il punto \bar{A} è per \bar{f} un punto \bar{r} -plo a tangenti distinte.

Ricordato questo caso elementare, esaminiamo che cosa accada per posizioni particolari della retta fondamentale a .

Pongasi anzitutto che a divenga tangente ad f in un punto A_1 , diverso da B , C , e con un contatto ν -punto ($\nu > 1$). Allora la curva \bar{f} possiederà in \bar{A} un punto di molteplicità \bar{r} per cui ν tangenti principali coincidono in una tangente, $\bar{a}_1 = \bar{A}\bar{A}_1$, che ha $r + 1$ (e non più) intersezioni con la curva; infatti alla \bar{a}_1 corrisponde la retta AA_1 la quale ha in A_1 solo una intersezione con la f . Il ramo di \bar{f} tangente ad \bar{a}_1 , riesce dunque un ramo ordinario d'ordine ν (cuspidale per $\nu = 2$).

Pongasi invece che la retta a contenga un punto A_1 di molteplicità r_1 (> 1). In questo caso ad A_1 corrisponderà un punto \bar{A}_1 infinitamente vicino ad \bar{A} , e si verifica che tutte le linee passanti semplicemente per $\bar{A}\bar{A}_1$ hanno con \bar{f} $r + r_1$ intersezioni, cioè r_1 in più che le intersezioni di una linea generica passante soltanto per \bar{A} . Infatti alle linee per $\bar{A}\bar{A}_1$ corrispondono linee per A_1 che hanno ivi r_1 intersezioni riunite con f .

La proprietà che abbiamo messo in rilievo per il punto \bar{A} di \bar{f} , costituisce la definizione geometrica dei punti multipli infinitamente vicini ad un punto proprio nell'intorno del prim'ordine (cfr. § 3), a tenore della quale si deve dire che \bar{A}_1 è r -plo per f .

Viceversa avremo: *i punti multipli di una curva, infinitamente vicini ad un punto proprio O , nell'intorno del prim'ordine, si possono definire come trasformati di punti propri dotati di uguale molteplicità, per mezzo di una trasformazione quadratica; dove la definizione soddisfa al requisito fondamentale che « due curve, f e φ , aventi a comune oltre ad O un punto O_1 , infinitamente vicino ad esso, di molteplicità rispettiva r_1 e s_1 , hanno ivi riunite (almeno) $r_1 s_1$ intersezioni oltre quelle dovute alle molteplicità di O ». Infatti basta porre in O un punto fondamentale della trasformazione, escludendo che qualche tangente principale sia una*

retta fondamentale per O : collo stesso ragionamento precedente si vede che ad un punto O_1 , vicino ad O ed r_1 -plo per la curva, corrisponderà un punto proprio \bar{O}_1 , ancora r_1 -plo per \bar{f} , appartenente alla retta fondamentale \bar{o} che corrisponde ad O . E si fa vedere che un punto O_1 , r_1 -plo per f ed s_1 -plo per φ , assorbe (almeno) $r_1 s_1$ intersezioni delle due curve (oltre quelle dovute alle molteplicità di O), riguardando, per esempio, φ come limite di una curva ruotata φ_1 , e contando di quanto diminuisce il numero delle intersezioni di f e φ_1 , fuori di O : la diminuzione appare dal fatto che le curve trasformate \bar{f} e $\bar{\varphi}_1$ vengono ad avere a comune un punto proprio di molteplicità r_1 e s_1 quando $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}$.

È chiaro che la trasformazione adoperata per ridurre la singolarità straordinaria O , si può considerare come l'inversa della trasformazione usata innanzi per costruirla.

Si noti che la definizione dei punti multipli infinitamente vicini ad O , posta per mezzo di una trasformazione quadratica, riesce indipendente dalla arbitrarietà che rimane nel costruire la trasformazione con un punto fondamentale O e altri due punti fondamentali generici; ciò si può riconoscere anche senza usare dell'osservazione fatta circa le intersezioni di f con rami o curve tangenti ad OO_1 , rilevando che i numeri interi, i quali designano le molteplicità di f prossime ad O , non possono variare con continuità al variare dei parametri della trasformazione suddetta.

Riprendiamo la trasformazione in cui si corrispondono f e \bar{f} per esaminare cosa corrisponda su f a un punto \bar{O}_2 , infinitamente vicino ad \bar{O}_1 , della curva \bar{f} . A tale scopo si distinguono due casi:

- 1) la tangente $\bar{O}_1 \bar{O}_2$ è diversa dalla retta fondamentale \bar{o} ;
- 2) la tangente $\bar{O}_1 \bar{O}_2$ coincide con \bar{o} .

Nel caso 1) si vede che al punto \bar{O}_2 corrisponde un punto O_2 di f , successivo ad O_1 sopra un ramo lineare $OO_1 O_2$ ed avente la medesima molteplicità che \bar{O}_2 per \bar{f} ; ciò segue dall'osservare che a un ramo lineare per $\bar{O}_1 \bar{O}_2$ corrisponde, nel piano di f , un ramo lineare per $OO_1 O_2$ (in corrispondenza biunivoca col primo).

Invece per il caso 2) occorre ricordare che a un ramo lineare tangente ad \bar{o} corrisponde un ramo cuspidale ordinario con la tangente OO_1 : perciò al punto \bar{O}_2 , avente per \bar{f} una certa molteplicità r_2 , corrisponderà su f un punto O_2 , appar-

tenente all'intorno di second'ordine di O , ma situato sopra un ramo di second'ordine ($O^2 O_1^1 O_2^1$).

Generalizzando le cose dette, si ottiene senza difficoltà il risultato seguente:

se la curva f possiede infinitamente vicini ad O più punti multipli $O_1 O_2 \dots O_i$, seguentisi sopra un ramo lineare, la curva trasformata di f , ove sia stato assunto O come punto fondamentale, possiede punti multipli successivi $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \dots \bar{O}_i$, dotati delle stesse molteplicità, che si seguono sopra un ramo lineare non tangente alla retta fondamentale \bar{o} . Se invece la curva f possiede infinitamente vicini ad O più punti multipli $O_1 O_2 \dots O_i$, seguentisi sopra un ramo ordinario d'un certo ordine ν , la curva trasformata di f possiede punti multipli successivi $O_1 \bar{O}_2 \dots \bar{O}_i$, seguentisi ugualmente sopra un ramo lineare, il quale però ha un contatto ν -punto con la retta fondamentale \bar{o} .

Così la trasformazione quadratica permette di definire i punti multipli di f infinitamente vicini ad un punto proprio O , e prossimi ad esso, i quali divengono punti della retta \bar{o} , e precisamente punti propri di essa oppure punti successivi a questi sulla stessa \bar{o} .

In generale, essendo O punto r -plo per f , si avranno nell'intorno di prim'ordine dei punti O_1, O_2, \dots di molteplicità r_1, r_2, \dots ($r_h \geq 1$), e negl'intorni d'ordine > 1 potranno ancora trovarsi dei punti prossimi ad O , per es. i punti O_{11}, O_{111}, \dots di molteplicità r_{11}, r_{111}, \dots successivi ad O_1 , e così i punti O_{21}, O_{211}, \dots di molteplicità r_{21}, r_{211}, \dots successivi ad O_2 , ecc., si avrà allora la *relazione fondamentale di prossimità*:

$$r = r_1 + r_{11} + r_{111} + \dots + r_2 + r_{21} + r_{211} + \dots + \dots$$

Questa relazione, che già incontrammo nel § 11, risulta qui dimostrata in modo semplicissimo: infatti la curva trasformata f incontra la retta fondamentale \bar{o} in r punti che si riducono ai punti $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \dots$ di molteplicità r_1, r_2, \dots ed ai punti infinitamente vicini a questi, contati pure secondo le loro molteplicità $r_{11} r_{111}, \dots, r_{21} r_{211}, \dots, \dots$ ecc.

Osserviamo per incidenza che la locuzione « punti prossimi » appare qui giustificata in rapporto alla circostanza, bene lmeggiata dalla trasformazione quadratica, che i punti prossimi ad O , non appartenenti all'intorno del

prim'ordine, si possono ritenere come limiti di punti di questo intorno.

Noteremo in fine che la definizione dei punti prossimi per mezzo della trasformazione quadratica permette immediatamente di comprendere da questo punto di vista la caratteristica e lo schema grafico di un ramo superlineare, che abbiamo spiegato nel § 8; la nozione di quello schema risulterà così indipendente dall'analisi diretta delle singolarità, che precede, nella nostra trattazione, il nominato paragrafo.

Nota. Le cose dette si lasciano estendere al caso in cui s'adoperi invece della trasformazione quadratica una trasformazione birazionale (cremoniana) del piano, d'ordine > 2 .

Pongasi che le X e Y vengano espresse come funzioni razionali di x, y :

$$X = \frac{\varphi_1(xy)}{\varphi_3(xy)}, \quad Y = \frac{\varphi_2(xy)}{\varphi_3(xy)},$$

con l'ipotesi che queste formule siano univocamente, cioè razionalmente, invertibili. In una siffatta trasformazione si presentano come punti eccezionali, o fondamentali, i punti fissi comuni alle curve $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, e quindi base per la rete $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$. Precisamente ad un punto base semplice della rete (con tangente variabile) corrisponde una *retta fondamentale*, e così a un punto doppio (a tangenti variabili) una conica fondamentale, ecc.

Ora, essendo data una curva f che possenga in O una singolarità straordinaria, la stessa riduzione della singolarità che abbiamo ottenuta mediante trasformazioni quadratiche, si ottiene anche con una qualsiasi trasformazione birazionale che abbia in O un punto fondamentale, base per la rete $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 = 0$, a tangenti variabili. Accade cioè che ai punti semplici o multipli di f infinitamente vicini ad O nell'intorno del prim'ordine, corrispondono punti propri della curva fondamentale \bar{o} , omologa ad O ; ed invece ai punti di f che cadano in un intorno d'ordine superiore al primo, ma siano prossimi ad O , corrispondono punti impropri di \bar{o} , infinitamente vicini a qualcuno dei punti propri nominati.

In ciò che precede abbiamo escluso che si abbiano punti fondamentali infinitamente vicini ad O , cioè che O sia punto base della rete trasformante con tangente lissa; analoga esclusione si era fatta anche per le trasformazioni quadratiche.

Ora, senza approfondire il soggetto, vogliamo qui osservare che: se si hanno due punti fondamentali semplici O, O_1 , infinitamente vicini fra loro, la trasformazione mette in evidenza come punti propri i trasformati dei punti dell'intorno di second'ordine di O , cioè i punti successivi ad O_1 sopra un ramo per OO_1 .

14. Decomposizione di una singolarità. — Il procedimento di riduzione, spiegato nel precedente paragrafo, permette di sciogliere qualsiasi singolarità, O , di una curva f , mediante una successione di trasformazioni quadratiche, ponendo in evidenza i punti multipli di f , che cadono infinitamente vicini ad O , come punti multipli propri di curve trasformate. Anzi questa decomposizione può assumersi come *definizione dei punti multipli infinitamente vicini*, indipendentemente dall'analisi diretta che conduce a definirli mediante le intersezioni di rami lineari (§ 3) e superlineari (§ 7).

Data la singolarità, O , porremo anzitutto in evidenza i punti (semplici e) multipli O_1, O_2, \dots , vicini ad O nell'intorno del prim'ordine, operando una trasformazione quadratica con un punto fondamentale in O ; successivamente prenderemo un punto, O_1 , della curva trasformata come punto fondamentale della nuova trasformazione quadratica, e così porremo in evidenza i punti O_{11}, O_{12}, \dots vicini ad O_1 nell'intorno del prim'ordine, e quindi vicini ad O nell'intorno del second'ordine.

Frattanto la singolarità appartenente al punto O_2 , che può lasciarsi fuori del triangolo fondamentale della nuova trasformazione, si riproduce invariata, come faremo vedere precisamente più avanti, per non interrompere il filo del nostro discorso. (Cfr. l'osservazione che chiude questo paragrafo).

Il procedimento indicato si può ripetere a partire da O_{11}, \dots , fino a porre in evidenza un qualsiasi punto (semplice o multiplo) di f che si trovi successivo ad O sopra un qualunque ramo e nell'intorno d' un ordine $s+1$ comunque elevato. Ed è chiaro *a priori* che la serie dei punti multipli successivi $O_1, O_{11}, O_{111}, \dots$, appartenenti ad un ramo di f , riesce così definita mercè successive trasformazioni quadratiche, indipendentemente dall'arbitrarietà dei parametri (variabili in modo continuo) che figurano in queste, così come si è già notato, per i punti dell'intorno del prim'ordine, nel precedente paragrafo.

Ora, dopo aver decomposto in tal modo una successione di punti multipli $O_1 O_{11} O_{111} \dots$ fino allo s -mo, si può ripetere lo stesso procedimento per le analoghe successioni $O_2 O_{21} O_{211} \dots$ e così anche $O_{12} O_{121} \dots$, ecc.; si perviene in tal guisa ad una curva trasformata di f , sulla quale si trovano come punti propri i punti semplici o multipli che corrispondono ai punti di f vicini ad O nell'intorno d'ordine s . Se la singolarità O è di specie s , cioè se non vi sono punti multipli di f vicini ad O al di là dell'intorno s -mo, la trasformazione detta innanzi *scioglie completamente la singolarità* di f , nel senso che ai punti vicini ad O nell'intorno $(s + 1)$ -mo corrispondono punti semplici della curva trasformata; e così i punti multipli provenienti dalle diverse successioni che appartengono ai rami per O , appaiono come punti multipli propri sopra un numero finito di curve trasformate, e si distribuiscono in un certo numero di *serie di composizione della singolarità*.

Se la singolarità O si suppone direttamente definita in base alle intersezioni dei rami lineari e superlineari, si sa già che oltre un certo intorno s -mo i punti vicini ad O sono semplici, poichè ogni ramo possiede un numero finito di punti multipli e due rami non possono avere che un contatto d'ordine finito; così ad ogni singolarità corrisponde un numero finito che ne designa la specie: pertanto si deduce immediatamente che *qualunque singolarità di una curva algebrica piana si può sciogliere con un numero finito di trasformazioni quadratiche*, cioè possiede un numero finito di serie di composizione ugualmente finite.

Ma vogliamo qui supporre che il lettore ignori l'analisi diretta delle singolarità contenuta nel precedente capitolo; occorre allora dimostrare che ogni singolarità ha una composizione finita, cioè che « il procedimento di riduzione spiegato innanzi ha termine dopo un numero finito di trasformazioni quadratiche », sicchè « per ogni singolarità esiste un numero che ne designa la specie ».

La dimostrazione richiesta si può fornire (con NÖTHER) osservando che ogni punto i -plo ($i > 1$) di f vicino ad O , che appartenga ad un intorno di qualsiasi ordine, è $(i - 1)$ -plo almeno per le curve polari; segue da ciò che la specie s di una singolarità pertinente ad una curva d'ordine n e di classe m non può superare $\frac{n(n-1)}{2} - m$: questo limite può

essere raggiunto soltanto ove si abbia una sola singolarità, costituita di $s+1$ punti doppi.

La proprietà che ogni punto i -plo (anche improprio) è virtualmente $(i-1)$ -plo (almeno) per le polari, si può dedurre dalla proprietà analoga stabilita per i punti multipli propri (L. 3°, § 4), dove si faccia vedere che una singolarità costituita di punti multipli infinitamente vicini nasce come limite dall'avvicinarsi di più punti multipli ordinari, dotati di uguale molteplicità; la trasformazione quadratica giustifica questa considerazione come vedremo in modo preciso nel § 19.

Ma si può evitare tali considerazioni di limite, come segue:

1) con una verifica analitica diretta, mercè cui si riconosce il comportamento delle polari nei punti multipli infinitamente vicini;

2) considerando, in luogo delle molteplicità delle polari, l'abbassamento del genere dovuto alla presenza di punti multipli successivi di f ; ragionamento dovuto a BERTINI.

Esponiamo per comodità dello studioso ambedue le dimostrazioni.

1) *Verifica analitica del comportamento delle polari.* Consideriamo nel piano della curva f (d'ordine n) la polare di un punto qualsiasi B , che assumiamo come punto (100). Preso il punto (010) nel punto r -plo O , e il punto (001) in un altro punto generico, eseguiamo la sostituzione quadratica

$$x_1 = y_2 y_3, \quad x_2 = y_3 y_1, \quad x_3 = y_1 y_2,$$

esattamente invertita da

$$y_1 = \frac{x_2 x_3}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, \quad y_2 = \frac{x_3 x_1}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, \quad y_3 = \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}.$$

Avremo

$$f(x_1 x_2 x_3) = y_2^r \bar{f}(y_1 y_2 y_3),$$

e la polare del punto B sarà

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{r}{2} y_2^{r-1} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} \bar{f} + \\ &+ y_2^r \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} x_1^{-\frac{3}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_3} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{r}{2} y_2^{r-1} y_3^{-1} \bar{f} + \frac{1}{2} y_2^r \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} y_2^{-1} y_3^{-1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_2} y_3^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_3} y_2^{-1} \right), \end{aligned}$$

sicchè, moltiplicando per $x_1 = y_2 y_3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 = y_2^r \left(\frac{r}{2} \bar{f} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_2} y_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_3} y_3 \right),$$

da cui, per il teorema di EULERO:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_2} y_2 + \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_3} y_3 = (2n - r) \bar{f},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 = y_2^r \left(n \bar{f} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} y_1 \right);$$

onde appare che la trasformata della curva $\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 = 0$, avente come punto r -plo $O = (010)$, è la curva

$$n \bar{f} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} y_1 = 0.$$

Ora, ogni polare di \bar{f} , e in particolare la polare $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} = 0$, passerà per i punti

$$\bar{O}_1^{r_1}, \quad \bar{O}_2^{r_2} \dots$$

di f appartenenti alla retta $y_2 = 0$, con molteplicità rispettive

$$\geq r_1 - 1, \quad \geq r_2 - 1 \dots;$$

e altrettanto accadrà per una combinazione lineare di quella polare con la \bar{f} .

Si deduce che la curva $\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 = 0$ passa per $O, O_1, O_2 \dots$ con molteplicità

$$r, \quad \geq r - 1, \quad \geq r_2 - 1 \dots;$$

ma, poichè la retta $x_1 = 0$ passa per O ma non per $O_1, O_2 \dots$, segue che la polare di B (che è un punto generico del piano di f) passa per O^{r-1} (come si sapeva) e possiede in $O_1, O_2 \dots$ molteplicità (virtuali)

$$\geq r_1 - 1, \quad \geq r_2 - 1 \dots.$$

La nostra verifica è compiuta in tal modo per i punti multipli appartenenti ad intorno del 1° ordine.

Si passerà quindi all'intorno del 2° ordine applicando il risultato alla curva \bar{f} (anzichè alla f cui si riferivano i precedenti ragionamenti). Un punto $\bar{O}_{11}^{r_{11}}$ ($r_{11} > 1$), appartenente all'intorno del 1° ordine di \bar{O}_1 , avrà una molteplicità

$$\geq r_{11} - 1$$

per le polari di \bar{f} e in particolare per la $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_1} = 0$; si dedurrà quindi che il punto $O_{11}^{r_{11}}$ di f , appartenente all'intorno di 2° ordine di O , avrà una molteplicità

$$\geq r_{11} - 1$$

per la polare di B :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

E così la verifica procede seguitando induttivamente, giacchè, compiuta per intorni d'ordine $s - 1$, si passa al caso di intorni d'ordine s .

Aggiungeremo che la trasformazione eseguita innanzi permetterebbe di investigare più profondamente il comportamento delle polari di f , e quindi l'abbassamento della classe dovuto a una singolarità straordinaria; ma di ciò tratteremo più avanti.

2) *Abbassamento del genere in rapporto alla composizione di una singolarità.* Richiamiamo la dimostrazione dell'invarianza del genere per trasformazioni quadratiche, che abbiamo incontrato nel I. 2°, § 23.

Sia la curva f , d'ordine n , la quale passi per i punti fondamentali O, B, C , con le molteplicità r, s, t , e non contenga altri punti multipli appartenenti alle rette fondamentali; la trasformata \bar{f} sarà d'ordine $2n - r - s - t$, e avrà le molteplicità $n - s - t, n - t - r, n - r - s$, nei punti fondamentali del secondo piano, mentre conserverà le altre molteplicità di f ; allora si verifica che il genere di f

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{i(i-1)}{2}$$

è uguale al genere di \bar{f} .

Ora pongasi che la f possieda nell'intorno del punto r -plo, O , dei punti multipli infinitamente vicini $O_1^{r_1}, \dots$, e

d'altra parte che le rette fondamentali sian prese in modo generico, sicchè non contengano altri punti multipli di f ; il calcolo precedente conduce al seguente risultato: si designi come pseudo-genere, p , l'espressione

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{i(i-1)}{2}$$

dove la sommatoria viene estesa ai punti i -pli propri di f ; e sia p_1 l'analogha espressione, cioè lo pseudo-genere di \bar{f} : si troverà

$$p_1 = p - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2},$$

dove la sommatoria è estesa ai punti multipli appartenenti alla retta fondamentale trasformata di O . Ciò posto si vede che quando nell'intorno di O cadono punti multipli di f , lo pseudo-genere di f può essere abbassato con una trasformazione quadratica ($p_1 < p$).

Ma, operando successive trasformazioni quadratiche, l'abbassamento di p non può proseguire indefinitamente, giacchè lo pseudo-genere non può diventare negativo per una curva irriducibile: si è dimostrato infatti (L. 2°, § 23) che una curva d'ordine n non può possedere tanti punti di molteplicità i_1, i_2, \dots per cui sia

$$\sum \frac{(i-1)(i-2)}{2} > \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Si conclude che ogni singolarità può essere decomposta con un numero finito di trasformazioni quadratiche, e più precisamente che l'ordine del massimo intorno di un punto singolare O in cui cadono punti multipli di f , cioè « la specie di O , è minore od uguale allo pseudo-genere ».

L'analisi che precede mette in evidenza che nella valutazione del *genere*, affinchè questo risulti un carattere invariante per trasformazioni quadratiche (e così risponda al noto carattere topologico della superficie di RIEMANN), si deve tener conto dell'abbassamento prodotto dai punti multipli infinitamente vicini che vengono a complicare la singolarità dei punti multipli propri; insomma il *genere* p deve ritenersi definito da

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{i(i-1)}{2},$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i punti multipli, sia propri che infinitamente vicini.

Osservazione. Rimane da giustificare più precisamente l'affermazione di cui innanzi facemmo uso, che per una singolarità di f , la quale non cada in un punto fondamentale o sopra una retta fondamentale della trasformazione quadratica, rimane invariata la serie dei punti multipli successivi sopra ciascun ramo, sicchè le diverse serie di composizione riescono definite indipendentemente dall'ordine con cui si procede a sciogliere la singolarità.

Notiamo anzitutto che « la trasformazione quadratica è regolare nell'intorno di ogni punto del piano fuori del trilatero fondamentale ». Infatti, se i punti fondamentali si fanno cadere nei punti (00) , (0∞) , $(\infty 0)$, le equazioni in coordinate cartesiane della trasformazione quadratica assumono la forma canonica

$$X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{1}{y};$$

ed allora nell'intorno di un qualsiasi punto (ab) , con $a \neq 0$, $b \neq 0$, X e Y sono simultaneamente sviluppabili in serie di potenze di $x - a$ e $y - b$, mediante la nota formola binomiale:

$$X = \frac{1}{a + (x - a)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a^3}(x - a)^2 - \frac{1}{a^4}(x - a)^3 + \dots$$

$$Y = \frac{1}{b + (y - b)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}(y - b) + \frac{1}{b^3}(y - b)^2 - \frac{1}{b^4}(y - b)^3 + \dots$$

Ciò posto possiamo richiamare la duplice dimostrazione svolta nel § 8 del precedente capitolo: ivi si è posta in primo luogo la verifica analitica che la serie dei punti multipli successivi di un ramo e la molteplicità d'intersezione di due rami rimane invariata per trasformazioni puntuali regolari; in secondo luogo si è pure stabilita questa invarianza in base alla definizione geometrica induttiva di codesti punti multipli, mercè le intersezioni con rami di specie inferiore.

Quest'ultima dimostrazione geometrica potrebbe essere ripresa qui, dove s'introducano le molteplicità successive di un ramo in base alla trasformazione quadratica. Ma, ad uno studio delle singolarità basato sulle trasformazioni quadra-

tiche, conviene meglio la dimostrazione che segue, ove si tien conto soltanto degli intorni del prim'ordine della curva f e delle sue trasformate.

Prendiamo le mosse dall'osservazione che: una *trasformazione* quadratica considerata nell'intorno (del prim'ordine) di un punto (ab) , fuori degli elementi fondamentali, viene rappresentata *approssimativamente* da una *omografia*

$$\left(X' = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x - a), \quad Y' = \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}(y - b) \right).$$

Segue di qui che se la f possiede un punto r -plo O e vicino ad esso, nell'intorno del prim'ordine, un punto r_1 -plo O_1 , messo in evidenza da una trasformazione quadratica π_1 , anche la trasformata \bar{f} (corrispondente ad f per una trasformazione T regolare in O), possiede un punto r -plo \bar{O} e vicino a questo un punto r_1 -plo \bar{O}_1 ; giacchè la trasformazione quadratica $\bar{\pi}_1$, atta a separare \bar{O}_1 da \bar{O} , si ottiene semplicemente trasformando la π_1 con l'omografia τ che rappresenta approssimativamente T : $\bar{\pi}_1 = \tau \pi_1 \tau^{-1}$.

Ora si designi con f_1 la curva corrispondente ad f in π_1 , la quale possiede il punto r_1 -plo O_1 , e si designi invece con \bar{f}_1 la curva corrispondente ad \bar{f} in $\bar{\pi}_1$, la quale possiede parimente il punto r_1 -plo \bar{O}_1 . Fra f_1 e \bar{f}_1 intercede una trasformazione birazionale, T' , che si ottiene come prodotto di tre trasformazioni quadratiche: $T' = \bar{\pi}_1 T \pi_1^{-1}$. Vogliamo dimostrare che la T' è regolare in O_1 (e così nel punto omologo \bar{O}_1), sicchè essa viene rappresentata approssimativamente da una omografia τ' ; allora quel che si è detto per f e \bar{f} si estenderà ad f_1 e \bar{f}_1 : se esiste una trasformazione quadratica π_2 che mette in evidenza un punto, O_{11} , di f_1 nell'intorno di O_1 , si costruirà una trasformazione $\bar{\pi}_2$, capace di mettere in evidenza un punto multiplo di \bar{f}_1 , \bar{O}_{11} , nell'intorno di \bar{O}_1 , trasformando la π_2 con l'omografia τ' ; così risulterà dimostrato che anche ai punti di f nell'intorno di second'ordine di O corrispondono punti multipli di \bar{f} nell'intorno di second'ordine di \bar{O} . Ed è chiaro come la dimostrazione si proseguirà per gli intorni successivi.

Dunque, per dimostrare che T' è regolare, osserviamo che nella T' al punto O_1 di f_1 viene a corrispondere senza ambiguità il punto \bar{O}_1 di \bar{f}_1 e reciprocamente, in modo che i

due punti omologhi non sono fondamentali per T' . Quest'osservazione geometrica basta a mostrare la regolarità di T' in O_1 (e in \bar{O}_1); ma si può dare una precisa verifica analitica.

A tal fine scriviamo

$$T' = \bar{\pi}_1 T \pi_1^{-1} = \tau \pi_1 \tau^{-1} T \pi_1^{-1} = \tau [\pi_1 (\tau^{-1} T) \pi_1^{-1}];$$

basterà dimostrare che l'operazione che figura fra le parentesi quadre, cioè la trasformata di $\tau^{-1} T$ mediante la π_1 , è regolare nel punto O_1 . Perciò si noti che, τ differendo da T per infinitesimi del second'ordine, la $\tau^{-1} T$ differisce dall'identità per infinitesimi di questo stesso ordine e quindi è del tipo

$$\omega = \tau^{-1} T = \begin{cases} x' = x + \alpha x^2 + \dots \\ y' = y + \beta y^2 + \dots \end{cases}$$

(non figura in x' la y , nè in y' la x perchè questa proprietà vale per T e τ). Operiamo nelle formule ω la sostituzione quadratica π_1 , avente come punto fondamentale il punto $O=(00)$ e come retta fondamentale omologa la retta $x=1$; le equazioni di π_1 si deducono dalla forma canonica

$$x = \frac{1}{X'}, \quad y = \frac{1}{Y'},$$

eseguendo su X', Y' una omografia che porti la retta all'infinito in $X=1$, onde si avrà

$$\pi_1 = \begin{cases} x = \frac{X-1}{X} \\ y = \frac{X-1}{Y}. \end{cases}$$

Trasformando ω con π_1 si avrà ora

$$\pi_1 \omega \pi_1^{-1} = \begin{cases} \frac{X'-1}{X'} = \frac{X-1}{X} + \alpha \left(\frac{X-1}{X} \right)^2 + \dots \\ \frac{X'-1}{Y'} = \frac{X-1}{Y} + \beta \left(\frac{X-1}{Y} \right)^2 + \dots \end{cases}$$

Di qui appare che $\frac{X'-1}{X'} = 1 - \frac{1}{X'}$, e quindi anche $\frac{1}{X'}$, è regolare nel punto (11) della retta fondamentale $X=1$, che

si può assumere come punto O_1 ; inoltre $\frac{1}{X'}$ è ivi $\neq 0$ e perciò X' è pure regolare. D'altra parte, dividendo le due serie e togliendo il fattore $X - 1$, che figura insieme nel numeratore e denominatore, si riconosce che è anche regolare $\frac{Y'}{X'}$ e quindi Y' .

15. Teorema di Nöther: trasformazione di una curva in un'altra con punti multipli a tangenti distinte. — Sia $f(xy) = 0$ una curva dotata di singolarità qualunque, ed eseguiamo nel suo piano una trasformazione quadratica π . Abbiamo osservato che:

1) un punto multiplo di f , che non appartenga agli elementi fondamentali di π , viene trasformato in una singolarità della stessa specie per la curva corrispondente ad f ;

2) invece un punto singolare di specie s , che sia fondamentale per π , si cambia in una singolarità di specie $s - 1$.

Aggiungiamo che:

3) i nuovi punti multipli della curva trasformata di f corrispondono alle rette fondamentali di π , e sono punti multipli a tangenti distinte se queste rette incontrano f in punti distinti, fuori dei punti fondamentali.

Segue di qui che si possono sciogliere le singolarità di f mediante successive trasformazioni quadratiche, in modo che le nuove singolarità create da queste trasformazioni siano punti multipli a tangenti distinte. E quindi si perverrà a una curva \bar{f} , trasformata di f , e dotata soltanto di singolarità ordinarie.

Ora, se la curva \bar{f} possiede un punto, A , multiplo a tangenti non distinte, cioè origine di rami non lineari, si potrà fare scomparire questa singolarità assumendo A come punto fondamentale di una nuova trasformazione quadratica. Pertanto possiamo enunciare il

Teorema di NÖTHER. *Mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche, ogni curva f , dotata di singolarità qualunque, si può trasformare in un'altra curva dotata di punti multipli a tangenti distinte.*

Consideriamo la corrispondenza che intercede fra la curva data f e la trasformata \bar{f} , dotata di punti multipli a tangenti distinte. Avremo che:

1) ad un punto semplice di f corrisponde un punto semplice o multiplo di \bar{f} ;

2) ad un punto multiplo di f corrisponde su \bar{f} un gruppo di punti, semplici o multipli a tangenti distinte; in particolare ad un punto multiplo di f , a tangenti distinte, corrisponde per la nostra costruzione un punto di uguale molteplicità, pure a tangenti distinte per la \bar{f} .

Ma è lecito fare scomparire ogni punto multiplo della \bar{f} che provenga da un punto multiplo di f , prendendolo come punto fondamentale di una nuova trasformazione quadratica. Pertanto ogni curva f può venire trasformata mediante successive trasformazioni quadratiche in una curva \bar{f} , per modo che ad ogni punto multiplo di f corrisponda su \bar{f} un gruppo di punti semplici; precisamente se O è un punto r -plo di f , origine di i rami d'ordine $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i$, con $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i = r$, al punto O corrisponderanno su \bar{f} i punti semplici distinti, (da contarsi rispettivamente $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i$ volte).

Il teorema di NÖTHER si applica non soltanto ad una curva isolata, ma anche ad un sistema lineare di curve $|f|$. È chiaro anzitutto che una trasformazione quadratica (o anche birazionale) del piano trasforma un sistema lineare di curve algebriche

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + \dots = 0$$

in un sistema lineare

$$\lambda_1 \bar{f}_1(y_1, y_2, y_3) + \lambda_2 \bar{f}_2(y_1, y_2, y_3) + \dots = 0,$$

le cui curve — concepite come punti di uno spazio lineare — si corrispondono proiettivamente.

Ora ricordiamo che per il teorema di BERTINI (L. 2°, § 5, o L. 3°, § 20) una curva f , generica nel sistema, non possiede punti multipli (propri) fuori dei punti base, comuni a tutte le f . Ciò posto, quando si prende un punto base di $|f|$ come punto fondamentale di una trasformazione quadratica, si riduce contemporaneamente la singolarità di tutte le curve generiche del sistema. Così proseguendo, si arriverà ad un sistema lineare $|f|$ trasformato di $|f|$, in cui la curva generica avrà soltanto punti multipli a tangenti distinte, cadenti nei punti base.

Aggiungeremo che le trasformazioni quadratiche per cui si passa da $|f|$ a $|\bar{f}|$, possono supporre scelte in guisa che le rette fondamentali via via assunte non passino per alcun

punto base del sistema trasformando, ed allora i nuovi punti base multipli creati dalle nostre trasformazioni avranno tangenti variabili per le curve del sistema.

Potrà darsi tuttavia che $|\bar{f}|$ possenga un punto base, O , con una tangente fissa, dove i rami (lineari) di due \bar{f} qualunque abbiano un certo contatto ($s+1$)-punto ($s \geq 1$); allora prendendo O come punto fondamentale per una nuova trasformazione si ottiene un nuovo sistema lineare con un punto base semplice ove le curve hanno un contatto s -punto, sicchè proseguendo si arriva a togliere ogni contatto. In conclusione possiamo enunciare che:

Mediante un numero finito di trasformazioni quadratiche, ogni sistema lineare di curve piane può essere trasformato in un sistema lineare con punti base, semplici o multipli, a tangenti variabili. Le trasformazioni che occorrono a tale scopo sono quelle stesse che valgono a ridurre a punti multipli con tangenti distinte la curva composta di due curve generiche del sistema.

Osservazione. Il procedimento spiegato innanzi mette in evidenza che il teorema di BERTINI sulla fissità dei punti multipli di un sistema lineare, si estende anche ai punti multipli infinitamente vicini.

Infatti se la curva generica del sistema $|f|$ potesse avere un punto multiplo variabile O_1 , nell'intorno di un punto base O , mediante una trasformazione quadratica col punto fondamentale O si otterrebbe un nuovo sistema lineare le cui curve avrebbero un punto multiplo variabile sopra una retta; e, quando si è riconosciuto che il punto O_1 deve restare fisso, si riconosce parimente che debbono restare fissi i punti multipli successivi ad O_1 , e così di seguito.

16. Il genere e l'estensione delle formole di Plücker. — Riprendiamo l'osservazione fatta nel § 14 in ordine alla definizione del genere d'una curva dotata di singolarità qualunque. Data una curva f , d'ordine n , con punti multipli, distinti o infinitamente vicini, di molteplicità r_i ($i=1, 2, \dots$), l'espressione

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2},$$

è invariante per trasformazioni quadratiche. Ricordando il

teorema del L. 3°, § 17, si deduce che p è pure invariante per trasformazioni birazionali qualsiasi della curva f .

Infatti se due curve f e F si trovano in corrispondenza birazionale, saranno pure in corrispondenza birazionale le curve \bar{f} e \bar{F} , dotate di singolarità ordinarie, che si ottengono da f e F mediante trasformazioni quadratiche, e perciò l'espressione p avrà anche per f e F lo stesso valore. Così il teorema d'invarianza del genere p viene liberato dalle restrizioni che si erano dovute ammettere nella dimostrazione del L. 3°, § 17.

Ciò posto si consideri accanto ad una curva-luogo f , l'involuppo delle sue tangenti F : fra f e F intercede una corrispondenza biunivoca dove ad ogni punto di f risponde la relativa tangente; dunque f e F hanno lo stesso genere. Vale quindi per una curva f , dotata di singolarità qualunque, l'equazione del genere:

$$1) \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum \frac{s_i(s_i-1)}{2},$$

dove n designa l'ordine, m la classe, r_i ($i=1, 2, \dots$) la molteplicità d'un punto multiplo di f e s_i ($i=1, 2, \dots$) la molteplicità d'una sua tangente multipla. La detta equazione, già da noi dimostrata pel caso di punti multipli e tangenti multiple distinte, viene ora estesa al caso di elementi multipli infinitamente vicini.

Accanto all'equazione del genere, abbiamo anche l'estensione a curve dotate di singolarità straordinarie delle altre formule di PLÜCKER, e precisamente della formula che vale ad esprimere la classe in funzione dei caratteri della curva-luogo, nonchè della formula duale. Questa estensione si giustifica anzitutto nel modo più rapido, ricorrendo alla rappresentazione reale della variabile complessa e al significato topologico del genere (L. 2°, § 36, vol. I, pag. 373); ma ne daremo poi una seconda dimostrazione indipendente da quei concetti.

Sia $f(xy) = 0$ una curva d'ordine n e di classe m riferita ad assi coordinati generici; per il punto all'infinito dell'asse y passeranno precisamente m tangenti ad f . Ora nel piano della variabile complessa x si avranno: m punti di diramazione semplici, corrispondenti alle nominate tangenti, ed altri punti di diramazione corrispondenti ai punti multipli di f con rami superlineari. Si designi, come sopra, con v la molteplicità d'un ramo di f uscente da un suo punto singolare;

avremo (cfr. L. 2°, § 36):

$$2) \quad 2n + 2p - 2 = m + \Sigma(\nu - 1)$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i rami e a tutti i punti singolari, ossia

$$2') \quad 2n + 2p - 2 = m + \Sigma(r - h),$$

designando h il numero dei rami che passano per ciascun punto r -plo di f .

La formula 2), o 2'), si lascia anche dimostrare indipendentemente dalla espressione del genere data per mezzo dei punti di diramazione della funzione algebrica $y(x)$, che abbiamo assunto dalla teoria riemanniana (e che potrebbe anche riattecarsi agli sviluppi del L. 5°). Si tratta per ciò di valutare l'*abbassamento della classe* dovuto ad una singolarità O , sostituendo ai rami di f le iperparabole osculatrici d'ordine abbastanza elevato.

Si osservi dapprima che l'abbassamento anzidetto, è uguale al numero delle intersezioni di f colle sue polari che vengono assorbite in O ; codesto abbassamento *dipende soltanto dalla natura della singolarità O e non dall'ordine della curva f* , che può suppersi elevato quanto si vuole. Infatti, se si aggiunge alla f una curva arbitraria φ , non passante per O , si ottiene una curva composta, d'ordine elevato quanto si vuole, che possiede in O la medesima singolarità; e l'abbassamento della classe prodotto da O nei riguardi della curva composta $f\varphi$ equivale a quello relativo alla curva f .

Vi è di più: quando si procede a determinare l'abbassamento della classe dovuto a una singolarità O , ricercando le intersezioni di f con una sua polare, è lecito sostituire alle due curve altre curve abbastanza prossime, in modo che rimangano inalterati gli ordini di infinitesimo che compaiono nella regola di HALPHEN (L. 3°, § 12).

Ora è chiaro che se una curva φ è abbastanza prossima ad f , altrettanto avviene per le rispettive polari di un medesimo punto; emerge di qui che l'abbassamento della classe dovuto a una singolarità O è un *carattere differenziale* della curva f in O , sicchè nella sua determinazione è lecito sostituire ad f una qualsiasi altra curva che abbia contatti abbastanza elevati coi rami di f ; in particolare una curva spez-

zata in più curve φ, ψ, \dots , quali sono le iperparabole osculatrici ai suoi rami.

Ciò posto, vediamo come si valuti l'abbassamento della classe dovuto ad O , prendendo le mosse dal caso elementare di una curva composta d'un solo ramo, a cui si sostituirà un'iperparabola osculatrice φ , rappresentata parametricamente da:

$$\varphi) \quad \begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^\nu + a_1 t^{\nu+\nu'} + \dots + a_r t^n. \end{cases}$$

La curva φ si può ritenere come limite d'una curva razionale Φ dello stesso ordine n :

$$\Phi) \quad \begin{cases} x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)} \\ y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}, \end{cases}$$

la quale possiederà $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi (L. 2°, § 23); fra questi punti ve ne saranno precisamente

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \sum \frac{\nu_i(\nu_i-1)}{2},$$

che al limite vengono a riunirsi nel punto ν -plo O di φ e nei punti ν_i -pli infinitamente vicini, giacchè — per quanto abbiam visto — la singolarità O di φ conta proprio per

$$\nu(\nu-1) + \sum \nu_i(\nu_i-1)$$

punti doppi nella determinazione del genere ($p=0$) della curva.

Ciò posto, il numero che indica l'abbassamento della classe di φ dovuto alla singolarità O , si valuterà in rapporto alla curva razionale Φ , e verrà dato da

$$A = \nu(\nu-1) + \sum \nu_i(\nu_i-1) + \mu,$$

dove si designa con μ il numero delle coincidenze delle g_n^1

$$\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)} = \text{cost.},$$

che si trovano prossime a $t=0$, cioè il numero delle tangenti

a Φ parallele all'asse y e prossime ad esso. Ma al limite la g_n^1 suddetta diviene:

$$at^\nu + a_1 t^{\nu+\nu'} + \dots + a_n t^n = \text{cost.},$$

e quindi possiede un gruppo dotato di punto ν -plo in $t=0$, che equivale a $\nu-1$ coincidenze (cfr. L. 2°, § 5). Si deduce

$$\mu = \nu - 1.$$

Passiamo al caso di una curva f composta di più rami, supponendo per semplicità di discorso che questi sieno in numero di due. Per quanto sopra è detto è lecito sostituire ad f una curva spezzata in due iperparabole osculatrici: $f = \varphi\psi$.

Movendo le due curve φ e ψ si ottiene una curva composta che possiede, oltre alle singolarità proprie dei due rami, $(\varphi\psi)$ punti doppi vicini ad O , dove si designa con $(\varphi\psi)$ il numero delle intersezioni delle due curve che cadono in quell'intorno. Allora l'abbassamento della classe di f dovuto ad O , verrà dato da

$$A_f = A_\varphi + A_\psi + 2(\varphi\psi).$$

Indichiamo con ν e μ le molteplicità di φ e ψ nel punto O , e con ν_i e μ_i le molteplicità di φ e ψ in un punto di O_i , multiplo per f , e successivo ad O sopra uno dei due rami (dove — per generalità — bisogna supporre che uno dei due numeri ν_i e μ_i sia nullo quando il relativo ramo non passi per O_i). Le molteplicità della curva f nei punti O e O_i verranno date da

$$r = \nu + \mu, \quad r_i = \nu_i + \mu_i.$$

Si avrà quindi

$$A_\varphi = \nu(\nu - 1) + \sum \nu_i(\nu_i - 1) + \nu - 1$$

$$A_\psi = \mu(\mu - 1) + \sum \mu_i(\mu_i - 1) + \mu - 1$$

$$(\varphi\psi) = \mu\nu + \sum \mu_i \nu_i,$$

e perciò

$$A_f = r(r - 1) + \sum r_i(r_i - 1) + r - 2 \quad (r - 2 = \nu - 1 + \mu - 1).$$

Se, in luogo di due, si hanno h rami, il procedimento prece-

dente mostra che l'abbassamento della classe dovuto al punto O vale

$$A_f = r(r-1) + \sum r_i(r_i-1) + r - h;$$

e, sommando gli abbassamenti analoghi relativi a tutti i punti singolari, si trova la classe medesima espressa da

$$m = n(n-1) - \sum r_i(r_i-1) - \sum (\nu-1), \quad (r_0 = r),$$

dove la prima sommatoria si riferisce ai punti multipli distinti e infinitamente vicini di f , e la seconda agli ordini dei loro rami. Ponendo

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum r_i(r_i-1),$$

se ne deduce la formula 2).

c. d. d.

Singolarità tangenziali. Alla formula 2), trovata innanzi, se ne accompagna un'altra che si deduce per dualità.

Osserviamo anzitutto che: *ad un ramo della curva luogo f , d'ordine ν e di classe ν' , corrisponde in una trasformazione per dualità di f , un ramo d'ordine ν' e di classe ν .*

Per dimostrarlo conviene riferirsi ad una iperparabola osculatrice ad f d'un ordine elevato:

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^\nu + a_1 t^{\nu+1} + \dots; \end{cases}$$

cambiando y in $y - ax$ si riconosce che la tangente al ramo conta ν' volte fra le tangenti condotte da un suo punto generico ($y = \infty$) giacchè per $t = 0$ si ottiene ora una coincidenza $(\nu + \nu')$ -punta, invece che ν -punta, dell'involuzione che rappresenta (sulla retta ove è disteso il parametro t) la serie dei gruppi di punti segata sopra la curva dalle parallele all'asse y . Così la nominata tangente al ramo costituisce una tangente multipla d'ordine ν' per l'involuzione del ramo.

La formula duale di 2), estesa ai rami della curva-involuzione relativi alle tangenti s -ple, si scriverà dunque:

$$3) \quad 2m + 2p - 2 = n + \sum (\nu' - 1).$$

Confrontando le 2) e 3) si ottiene la relazione

$$3(n - m) = \sum (\nu - \nu'),$$

dove la sommatoria del secondo membro va estesa anche ai rami per cui uno solo dei due numeri ν, ν' è > 1 (rami ordinari della curva-luogo, e punti semplici di flesso corrispondenti a rami ordinari della curva inviluppo).

Osservazione. Le formole 1), 2), 3) si riducono formalmente alle formole di PLÜCKER relative al caso di singolarità elementari quando si contino i punti multipli r_i -pli ($i \geq 0$), distinti od infinitamente vicini, come equivalenti a $\sum \frac{r_i(r_i - 1)}{2}$ punti doppi, fra i quali si dovrà ritenere che vi siano $r - h = \Sigma(\nu - 1)$ cuspidi in corrispondenza ad ogni singolarità costituita di h rami d'ordine $\nu_1 \nu_2 \dots$ con $\nu_1 + \nu_2 + \dots = r$.

Più avanti (§ 19) vedremo come gli *equivalenti plueckeriani* qui introdotti rispondano a una definizione della singolarità come singolarità limite, estendendo così il risultato già stabilito per i punti multipli ordinari (cfr. L. 3°, § 15).

17. Curve passanti per punti infinitamente vicini: molteplicità virtuali e molteplicità effettive. — La trasformazione quadratica offre il modo più semplice di studiare geometricamente le condizioni di passaggio d'una curva f per punti, semplici o multipli, infinitamente vicini ad un punto proprio O ⁽¹⁾, le quali si traducono in analoghe condizioni di passaggio per punti propri di curve trasformate. Precisamente, se il punto O è r -plo per f , l'imposizione d'un punto r_1 -plo, $O_1^{r_1}$ ($r_1 \geq r$), nell'intorno di 1° ordine di f , si traduce nella imposizione d'un punto proprio $\bar{O}_1^{r_1}$ per la curva \bar{f} , punto appartenente alla retta fondamentale $\bar{A}\bar{B}$ che corrisponde ad O . Perciò le condizioni richieste danno $\frac{r_1(r_1 - 1)}{2}$ equazioni lineari nei coefficienti di \bar{f} , che si traducono in altrettante equazioni lineari fra i coefficienti di f , giacchè la trasformazione opera linearmente sui coefficienti delle due forme.

Ora il risultato si estende al caso in cui s'impongano successivamente ad f dei punti multipli (o semplici)

$$O_1^{r_1} O_2^{r_2} \dots O_i^{r_i},$$

(1) Il metodo diretto per lo studio della questione fu indicato nel precedente Capitolo, e nel seguente se ne vedrà lo sviluppo dal punto di vista del Calcolo differenziale.

succedentisi sopra un ramo lineare o superlineare (od anche più serie di punti multipli sopra più rami): *le condizioni perchè f possenga queste molteplicità si traducono in*

$$\sum_n \frac{r_n(r_n + 1)}{2} \quad (r = r_0)$$

equazioni lineari nei coefficienti di f , e queste sono indipendenti per curve d'ordine abbastanza elevato.

Infatti, supposto dimostrato il teorema per la curva \bar{f} e per punti multipli appartenenti a intorni successivi fino all'ordine s , segue la dimostrazione per la curva f e per intorni fino all'ordine $s + 1$.

Quando n è abbastanza elevato:

$$\frac{n(n+3)}{2} \geq \sum \frac{r_n(r_n+1)}{2},$$

esistono certo curve f d'ordine n soddisfacenti alle condizioni date. Ma queste curve f non avranno necessariamente in O molteplicità effettive uguali ai numeri r assegnati. In primo luogo ciò appare chiaro se s'imponga alla f di possedere un punto r_{n+1} -plo successivo ad un punto r_n -plo ove sia $r_{n+1} > r_n$. Ma se i punti multipli assegnati $OO_1O_2\dots$, sono presi sopra un ramo superlineare, o su più rami lineari, occorre anche che sia soddisfatta la diseuguaglianza più espressiva che risulta dalla relazione fondamentale fra le molteplicità dei punti prossimi (§ 13, cfr. la fine del § 8): la molteplicità assegnata in un punto deve essere minore o uguale alla somma delle molteplicità nei punti prossimi fissati (¹).

Questa condizione è anche sufficiente per l'esistenza di una curva f , d'ordine abbastanza elevato, che possenga in più punti infinitamente vicini (dati sopra uno o più rami qualunque) molteplicità effettive uguali a certe molteplicità assegnate. L'esistenza di una tal curva f , già dimostrata nel § 11, si può qui stabilire induttivamente come segue. Si suppose stabilito il risultato pel caso in cui i punti dati appartengano ad intorni d'ordine 1, 2.... di punti propri, fino ad un certo ordine s , e se ne deduce il teorema pel caso in cui si giunga a punti di un intorno d'ordine $s + 1$.

(¹) Questa osservazione occorre in una nota critica di SEGRE (Atti della R. Accad. di Torino, 36, 1901).

A tale scopo si trasformi la curva f in una \bar{f} , mutando il punto r -plo, O , in una retta $\bar{A}\bar{B}$; la \bar{f} dovrà possedere sulla retta $\bar{A}\bar{B}$ dei punti multipli propri $\bar{O}_1^{r_1} \dots \bar{O}_l^{r_l}$, e dei punti multipli impropri infinitamente vicini ai precedenti:

$$\bar{O}_{11}^{r_{11}} \bar{O}_{111}^{r_{111}} \dots, \dots \bar{O}_{l1}^{r_{l1}} \bar{O}_{l11}^{r_{l11}} \dots$$

Secondo le nostre ipotesi una \bar{f} con molteplicità effettive uguali ai numeri assegnati esisterà certo, se le condizioni relative alle singolarità $\bar{O}_1 \dots \bar{O}_l$ non si estendono oltre l'intorno s -mo.

Inoltre la più generale \bar{f} siffatta, d'ordine $2n - r$ abbastanza elevato, passante ancora per i punti

$$\bar{O}^n, \bar{A}^{n-r}, \bar{B}^{n-r},$$

sarà irriducibile, restando escluso lo staccamento della retta $\bar{A}\bar{B}$, se

$$r \geq r_1 + r_{11} + \dots + r_l + r_{l1} + r_{l11} + \dots$$

Quindi la f corrispondente possiederà nei punti dati, compreso il punto O , molteplicità effettive uguali alle molteplicità virtuali assegnate.

Concludiamo enunciando il

Teorema: *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una curva f , d'un ordine abbastanza elevato, la quale passi per dati punti infinitamente vicini ad un punto proprio O con molteplicità effettive uguali a certi numeri assegnati, è che gli ordini di molteplicità, attribuiti ad O e a ciascuno dei nominati punti, non siano inferiori alla somma degli ordini attribuiti ai punti prossimi.*

Vediamo ora che cosa accade quando s'imponga ad una curva f di passare per dati punti infinitamente vicini con molteplicità assegnate che non soddisfino alle disuguaglianze di prossimità. Perciò riferiamoci al caso elementare in cui la somma delle molteplicità assegnate ad f nei punti prossimi ad O superi la molteplicità assegnata in O :

$$r < r_1 + r_{11} + \dots + r_l + r_{l1} + \dots$$

In questo caso, quando si impone ad \bar{f} di avere in O_1, O_{11}, \dots , le molteplicità r_1, r_{11}, \dots , accade che la retta fonda-

tale $\bar{A}\bar{B}$ si stacchi un certo numero $h (\geq 1)$ di volte dalla \bar{f} . Pertanto la curva \bar{f} , spogliata dalla retta $\bar{A}\bar{B}$, si riduce d'ordine $2n - r - h$, mentre le sue molteplicità in \bar{A}, \bar{B} diminuiscono ciascuna di h e quindi le sue intersezioni con la $\bar{A}\bar{B}$, fuori di \bar{A} e \bar{B} , divengono $r + h$. Ciò significa che la curva f possiede effettivamente in O una molteplicità $r + h$ superiore alla molteplicità assegnata r ; invece le molteplicità di f nei punti prossimi ad O diminuiscono ciascuna di h in confronto all'ordine assegnato.

La curva f così costruita, soddisfa *in senso lato* alle condizioni di passaggio per i punti dati con le molteplicità assegnate, cioè soddisfa alle equazioni che esprimono in generale tale passaggio. Per ciò di essa dovrà dirsi che possiede nei dati punti *molteplicità virtuali* uguali ai numeri assegnati, mentre ha *molteplicità effettive diverse dalle molteplicità virtuali*.

Ora le considerazioni precedenti permettono di risolvere il

PROBLEMA DELLA DETERMINAZIONE DELLE SINGOLARITÀ EFFETTIVE: Ad una curva f (d'un ordine abbastanza elevato) *s'impone* di passare per dati punti infinitamente vicini con certe *molteplicità virtuali*; si vuole:

1) *determinare le molteplicità effettive* che spettano alla curva f più generale;

2) e *separare i rami* che costituiscono l'intorno del punto singolare.

In ordine al problema 1) si osserverà quanto segue.

Se gli ordini di molteplicità assegnati soddisfano alle disequaglianze di prossimità, si hanno — come è detto innanzi — molteplicità effettive uguali alle molteplicità virtuali. Il caso in cui tali disuguaglianze non vengano soddisfatte si lascia trattare in base alla considerazione precedente che, per semplicità, tradurremo con due principi relativi a casi elementari e in qualche modo tipici.

I) *Principio di scorrimento.* S'impone ad una curva f di possedere come r -plo O , ed infinitamente vicini ad esso i punti $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots, O_i$, susseguentisi sopra un ramo lineare, cui si assegnino le molteplicità virtuali

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, r_i;$$

sia

$$r \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{i-1}, \quad r_i > r_{i-1},$$

ed h il più piccolo indice per cui risulti r_h inferiore alla media delle molteplicità virtuali che lo seguono nella nostra serie:

$$r_h < \frac{r_{h+1} + \dots + r_i}{i - h}.$$

Allora la f più generale, avente le molteplicità virtuali assegnate, possiederà in $OO_1O_2\dots O_{h-1}$ le molteplicità effettive $rr_1r_2\dots r_{h-1}$ ed avrà in $O_hO_{h+1}\dots O_i$ molteplicità effettive uguali alla media $\frac{r_h + r_{h+1} + \dots + r_i}{i - h + 1}$ o agli $i - h + 1$ numeri interi più vicini a questa, presi in ordine decrescente.

Per giustificare l'asserto prendiamo le mosse dal caso in cui accanto ad un punto r -plo, O , si imponga ad f un punto infinitamente vicino O_1 , di molteplicità $r_1 > r$. In questo caso, quando si trasformi f in una \bar{f} in guisa che O_1 diventi un punto multiplo \bar{O}_1 sopra la retta fondamentale $\bar{A}\bar{B}$, si riconosce che la retta $\bar{A}\bar{B}$ si stacca da \bar{f} precisamente $h = \left\lfloor \frac{r_1 - r + 1}{2} \right\rfloor$ volte, cioè un numero di volte designato dal primo numero intero $\geq \frac{r_1 - r}{2}$. Pertanto le molteplicità di O, O_1 vengono date da $\frac{r + r_1}{2}$, o dai numeri interi prossimi a questa media presi in ordine decrescente, cioè in ogni caso dai numeri $\left\lfloor \frac{r + r_1 + 1}{2} \right\rfloor$ e $\left\lfloor \frac{r + r_1}{2} \right\rfloor$, designando, come innanzi, il massimo intero contenuto in una frazione col solito simbolo usato nella teoria dei numeri.

L'analisi fatta dà immediatamente il primo caso della nostra regola ($h = 0, i = 1$), dove si applichi una successione di trasformazioni quadratiche in guisa che il punto O_h divenga un punto proprio; imperocchè non si dà luogo a staccamento della retta fondamentale, cui viene ad appartenere O_h , se la molteplicità acquisita da O_h non supera quella spettante ad O_{h-1} .

Abbiansi ora sopra un ramo lineare tre punti successivi O, O_1, O_2 e s'imponga ad una f di passare per essi con le molteplicità r, r_1, r_2 , dove

$$r \geq r_1, \quad r_1 < r_2, \quad \text{e} \quad r < \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

La curva \bar{f} , che si ottiene da f con una trasformazione dotata del punto fondamentale O , acquisterà in O_1 e O_2 le molteplicità effettive $r'_1 = \left[\frac{r_1 + r_2 + 1}{2} \right]$ e $r'_2 = \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \right]$. Ma poichè $r < \frac{r_1 + r_2}{2}$, e quindi $r < r'_1$, si stacca da \bar{f} la retta $\bar{A}\bar{B}$ un certo numero di volte. In primo luogo la nominata retta si stacca da \bar{f} $\left[\frac{r'_1 - r + 1}{2} \right]$ volte per il fatto che la molteplicità di f in O_1 supera r ; ma dopo questo staccamento rimane una curva $\bar{\varphi}$ per cui la molteplicità data in O_2 supera in generale quella data in O_1 , onde si accresce la molteplicità di $\bar{\varphi}$ in O_1 e diminuisce quella in O_2 , e per conseguenza si dà luogo ad un nuovo staccamento di $\bar{A}\bar{B}$ ecc. È chiaro che in ultima analisi le molteplicità di OO_1O_2 tendono a divenire uguali, il procedimento di riduzione terminando ove sia raggiunta l'eguaglianza oppure quando le molteplicità di due punti successivi differiscano fra di loro di una unità. Ciò significa che le molteplicità divengono uguali alla media $\frac{r + r_1 + r_2}{3}$, o ai tre numeri interi più prossimi a questa che danno la medesima somma, presi in ordine decrescente.

L'analisi che precede dà un secondo caso della nostra regola ($h=0$, $i=2$), la quale si estende senza difficoltà ai casi successivi per $i=3, 4, \dots$ ed $h=0$; è poi ovvio come una serie di trasformazioni quadratiche permetta di ridurre sempre all'ipotesi $h=0$.

Osservazione. Si può dimostrare la regola contenuta nel principio di scorrimento anche in base alla definizione diretta dei punti infinitamente vicini. Infatti esiste certo una curva φ passante per i punti $OO_1 \dots O_i$ con le molteplicità assegnate dalla regola; questa curva possiede in $OO_1 \dots O_i$ le molteplicità virtuali $r_1 \dots r_i$. Questa curva, considerata nella famiglia delle curve con le molteplicità virtuali $O^r O_1^{r_1} \dots O_i^{r_i}$, dà luogo ai minimi valori di r' , $(r' + r_1')$, \dots , $(r' + r_1' + \dots + r_i')$, designandosi in generale con r'_h la molteplicità effettiva del punto O_h . Segue di qui che ogni altra curva f , cui s'impongano le molteplicità virtuali $O^r O_1^{r_1} \dots O_i^{r_i}$, rientra come caso particolare nella φ .

Estensione del principio di scorrimento. Il principio enunciato si estende al caso in cui si abbiano più punti $O_h O_{h+1} \dots O_i$

sussequentisi sopra un tratto lineare di un ramo superlineare, cioè tali che diano luogo a punti successivi su un ramo lineare per una trasformata di f nella quale O_n venga sostituito da un punto proprio. Ma le molteplicità che così vengono dedotte per $O_n O_{n+1} \dots O_i$ non saranno effettive, dando luogo ad ulteriori riduzioni, se non si verificano le condizioni fondamentali di disequaglianza enunciate innanzi.

II) *Principio di scaricamento dei punti prossimi*. S'imponga ad una curva f di possedere un punto multiplo proprio O , ed infinitamente vicini ad esso dei punti prossimi

$$\begin{aligned} & O_1 O_2 \dots O_i && (i > 1), \\ \text{colle molteplicità virtuali} & && \\ & r_1 r_2 \dots r_i. \end{aligned}$$

Questi numeri designano possibili molteplicità effettive per una curva cui si assegni in O una molteplicità abbastanza elevata

$$\begin{aligned} & r \geq r_1 + \dots + r_i; \\ \text{ma si abbia invece} & && \\ & r < r_1 + \dots + r_i. \end{aligned}$$

Allora la f più generale colle molteplicità virtuali assegnate, passerà per $O_1 \dots O_i$ con molteplicità effettive

$$r_1 - x, \dots, r_i - x,$$

e per O colla molteplicità

$$r + x,$$

essendo x il minimo numero positivo per cui

$$r + x(i + 1) \geq r_1 + \dots + r_i.$$

Infatti, per mezzo di una trasformazione quadratica col punto fondamentale O , la f (d'ordine n) si muta in una \bar{f} d'ordine $2n - r$ con tre punti multipli \bar{O}^n , \bar{A}^{n-r} , \bar{B}^{n-r} , la quale deve possedere sulla retta $\bar{A}\bar{B}$, e fuori di \bar{A} , \bar{B} , i punti

$$\bar{O}_1^{r_1} \dots \bar{O}_i^{r_i}.$$

Secondo l'ipotesi fatta:

$$r < r_1 + \dots + r_i,$$

perciò la retta $\bar{A}\bar{B}$ si staccherà da \bar{f} un certo numero $x (> 0)$

di volte, e corrispondentemente la f avrà in O la molteplicità effettiva $r + x$. Ma, tolta la retta $\bar{A}\bar{B}$ contata x volte, la parte residua (della curva \bar{f}) è una curva d'ordine $2n - r - x$ passante per \bar{A}^{n-r-x} e \bar{B}^{n-r-x} e per

$$\bar{O}_1^{r_1-x}, \quad \bar{O}_2^{r_2-x} \dots \quad \bar{O}_h^{r_h-x};$$

si avrà dunque

$$r + x \geq r_1 + \dots + r_i - ix,$$

cioè

$$r + x(i + 1) > r_1 + \dots + r_i.$$

Fra i valori di x che soddisfano a questa diseuguaglianza il minimo corrisponde alla minima molteplicità di O , e perciò alla f più generale.

Estensione del principio di scaricamento. Il principio di scaricamento suddetto si applica non solo al caso di un punto proprio O , ma anche al caso di un punto improprio, P , appartenente ad un certo intorno di O , quando non sia verificata la relazione fondamentale di prossimità fra la sua molteplicità e quelle assegnate nei punti prossimi; ma la molteplicità che così risulta per P sarà in questo caso suscettibile di una riduzione per l'applicazione ripetuta dei principii I, II, come mostreremo fra poco su qualche esempio.

L'estensione del principio si giustifica osservando che P diviene un punto proprio per una conveniente trasformazione di f .

Ai principii I e II si aggiunge un terzo principio, che permette di rispondere alla seconda parte del nostro problema fondamentale di determinazione delle singolarità effettive.

III) *Principio della massima separazione dei rami:* la curva f più generale, fra quelle che posseggono dati punti multipli, si scinde nel massimo numero di rami compatibile col possesso delle date molteplicità effettive.

Questo principio già incontrato nel § 12, si lascia giustificare qui in modo più semplice partendo dalla formola relativa all'abbassamento della classe, che si è riconosciuta nel precedente § 16.

Se è data una singolarità composta di un punto r -plo, O , a cui sono infinitamente vicini punti di molteplicità r_i , e costituita di h rami, abbiam visto che l'abbassamento della classe ad essa dovuto vale

$$A_f = r(r - 1) + \sum r_i(r_i - 1) + r - h.$$

Ora consideriamo il sistema lineare di tutte le curve di

un ordine abbastanza alto che posseggono gli stessi punti r_i -pli infinitamente vicini ad O' : passando dalla curva generica ad una curva particolare del sistema la classe può diminuire ma non aumentare, e quindi A_f può aumentare ma non diminuire; segue che il numero h dei rami costituenti la singolarità è per la curva generica del nostro sistema lineare il massimo possibile, in confronto alle altre curve dotate delle stesse molteplicità effettive r, r_i .

Il ragionamento precedente prova d'altra parte che lo spezzamento di qualche ramo della nostra curva generica potrà aversi soltanto quando questa acquisti nuovi punti multipli vicini ai dati, ovvero una molteplicità effettiva maggiore di quella assegnata in qualcuno di questi.

Il problema della determinazione delle singolarità effettive può essere risoluto in base ai principî I, II, III, come appare dai seguenti

Esempî. Sieno dati i punti successivi: $OO_1O_2O_3O_4O_5$ appartenenti al ramo d'ordine 7 e di caratteristica

$$(O^7 O_1^3 [O_2^3 O_3^4 O_4^1 O_5^4]),$$

il cui schema grafico viene porto dall'annessa figura.

Una curva f , d'ordine assai elevato, cui s'imponga di passare per

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2,$$

avrà in quei punti molteplicità effettive uguali alle virtuali, essendo verificate le condizioni fondamentali di prossimità:

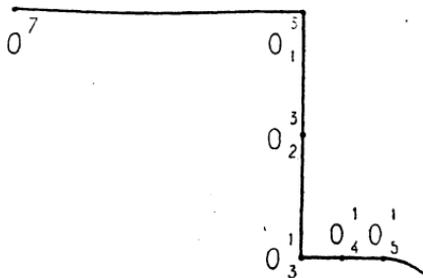
$$14 \geq 6 + 6 + 2,$$

$$6 \geq 2 + 2 + 2.$$

Secondo il principio III la f più generale conterà di due rami distinti

$$(O^7 O_1^3 [O_2^3 O_3^4 O_4^1 O_5^4]).$$

Se ora alla f s'impone ulteriormente di passare per un punto O_6 che succeda ad O_5 come punto libero (su un ramo colla medesima caratteristica, uno dei due rami di f verrà a



passare propriamente per O_6 , in cui f avrà dunque la molteplicità effettiva e virtuale 1.

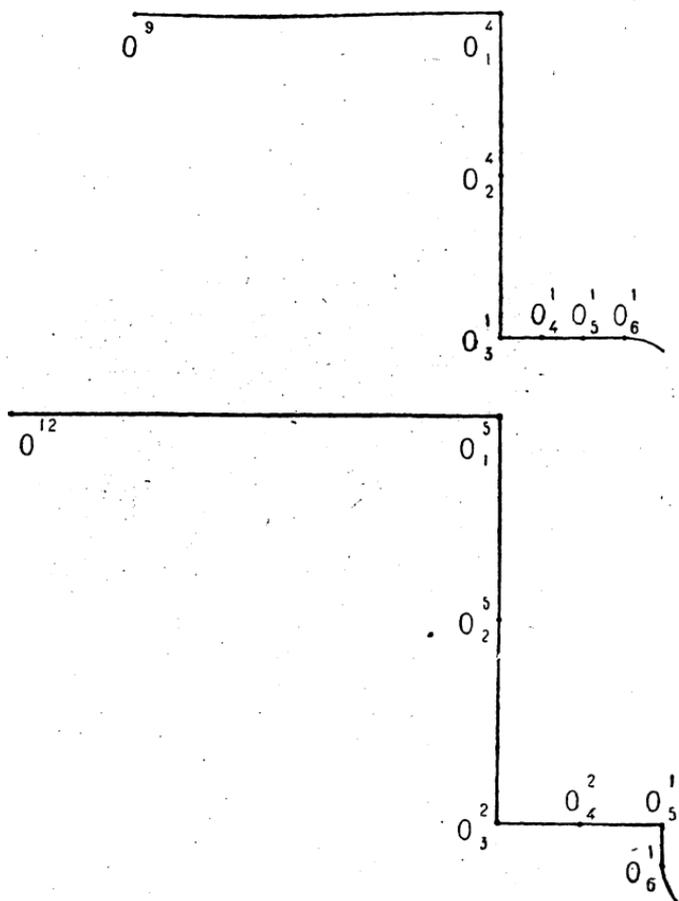
Ma suppongasi invece che O_6 occupi una posizione particolare come nuovo punto satellite di O_1 ; il ramo che lo contiene avrà la caratteristica

$$(O^9 O_1^4 [O_2^4 O_3^1 O_4^1 O_5^1 O_6^1])$$

oppure

$$(O^{12} O_1^5 [O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1]);$$

i rispettivi schemi sono rappresentati nelle seguenti figure:



Vediamo quale effetto portano le condizioni (ulteriori) di passaggio della f per i punti O_6^1 o O_6^2 (molteplicità virtuale assegnata $\rho = r_6 = 1, 2$), distinguendo i due casi sopra nominati.

1° caso. Si ha

$$6 < 2 + 2 + 2 + \rho \quad (\rho = 1, 2)$$

e perciò si dà luogo allo scaricamento delle molteplicità di $O_3 O_4 O_5 O_6$ sopra O_2 ; le prime molteplicità si abbassano di 1 e quella di O_2 cresce parimente di 1, essendo $x = 1$ il minimo intero per cui

$$6 + 5x \geq 2 + 2 + 2 + \rho.$$

Ma la molteplicità 7, che risulta per O_2 , non può succedere alla molteplicità 6 di O_1 ; si dà luogo allo scorrimento (principio I) per cui la molteplicità di O_1 diviene 7 e quella di O_2 si riduce a 6.

Ora le molteplicità 7, 6, 1 dedotte per $O_1 O_2 O_3$ soddisfano alla condizione

$$14 \geq 7 + 6 + 1$$

e perciò sono effettive, non dandosi luogo ad ulteriore scaricamento.

Dunque, facendo successivamente $\rho = 1, 2$ si ha:

a) $\rho = 1$.

La f più generale soggetta a passare per i punti

$$O_1^4 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^4,$$

non passa propriamente per O_6 e passa semplicemente, anziché doppiamente, per $O_3 O_4 O_5$, acquistando in O_1 la molteplicità effettiva 7 anziché 6.

Un ramo della f passante (propriamente) per $O_3^4 O_4^4 O_5^4$ avrà la caratteristica

$$(O^7 O_1^3 [O_2^3 O_3^4 O_4^4 O_5^4])$$

e perciò l'ordine 7; tolto questo ramo, l'insieme dei rimanenti appartiene ad una curva algebrica che passa (virtualmente ed effettivamente) per i punti

$$O^7 O_1^4 O_2^3,$$

la quale si può di fatto comporre mediante 3 rami del 2° ordine

$$(O^2 O_1^4 [O_2^4])$$

ed un ramo lineare per

$$O^1 O_1^4.$$

Qualunque altra distribuzione di rami corrisponderebbe alla fusione di due rami del 2° ordine ($O^2 O_1^4 [O_1^4]$), o di tutti e tre,

in un ramo d'ordine più elevato, e — in base al principio III — si può affermare che tale fusione non ha luogo per la curva f più generale.

In conclusione *la f più generale cui s'impongano le molteplicità virtuali*

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^1$$

nei punti del ramo

$$(O^9 O_1^4 [O_2^4 O_3^4 O_4^4 O_5^4 O_6^1]),$$

possiede le molteplicità effettive

$$O^{14} O_1^7 O_2^6 O_3^4 O_4^4 O_5^1$$

e consta dei 5 rami:

$$(O^7 O_1^3 [O_2^3 O_3^4 O_4^4 O_5^4]) + 3(O^2 O_1^4 [O_2^4]) + (O^1 O_1^4).$$

b) $\rho = 2$.

La f più generale a cui s'impongano, nei medesimi punti, le molteplicità virtuali

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^2,$$

avrà le molteplicità effettive

$$O^{14} O_1^7 O_2^6 O_3^4 O_4^4 O_5^1 O_6^1,$$

e conterà dei 4 rami:

$$(O^9 O_1^4 [O_2^4 O_3^4 O_4^4 O_5^4 O_6^1]) + 2(O^2 O_1^4 [O_2^4]) + (O^1 O_1^4).$$

2° caso. Consideriamo ora una curva f (d'un ordine assai elevato) cui s'impongano le molteplicità virtuali

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^\rho, \quad (\rho = 1, 2)$$

nei punti successivi del ramo

$$(O^{12} O_1^5 [O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^4 O_6^1]).$$

Si ha anzitutto

$$2 < 2 + \rho$$

e perciò si dà luogo allo scaricamento delle molteplicità di O_5 e O_6 sopra O_4 . Il minimo numero x per cui

$$2 + 3x \geq 2 + \rho$$

vale

$$x = 1,$$

quindi la f passerà per $O_5 O_6$ colle molteplicità 1, $\rho - 1$ ($= 0, 1$), e la sua molteplicità virtuale in O_4 verrà elevata a 3. Ma quest'ultima dà luogo a scorrimento nel tratto del ramo $O_4 O_3$; in O_4 resta la molteplicità 2, in O_3 essa diviene 3.

Ora si confronti la molteplicità di O_2^5 con quelle trovate nei punti prossimi:

$$6 = 3 + 2 + 1,$$

sicchè non si ha scaricamento delle molteplicità di $O_3 O_4 O_5$ sopra O_6 .

Paragonando invece la molteplicità, 14, assegnata nel punto O con quelle dei punti prossimi $O_1 O_2 O_3$, si ha:

$$14 < 6 + 6 + 3.$$

Ha luogo perciò scaricamento sopra O , che acquista la molteplicità effettiva 15; le molteplicità di $O_1 O_2 O_3$ si riducono alle molteplicità effettive

$$5, 5, 2,$$

quella di O_4 resta 1, quella di O_5 resta pure 1, mentre quella di O_6 vale 1 nell'ipotesi $\rho = 2$, e 0 nell'ipotesi $\rho = 1$.

Si conclude che:

$$a) \rho = 1.$$

La f più generale cui s'impongano le molteplicità virtuali

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^1$$

nei punti successivi del ramo

$$(O^{12} O_1^5 [O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1]),$$

possiederà le molteplicità effettive

$$O^{15} O_1^5 O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1,$$

e quindi non passerà propriamente per O_6 ed avrà in $O_1 O_2$ molteplicità inferiori alle virtuali, in compenso della molteplicità cresciuta nell'origine O . Quindi, in base al principio III, si riconosce che la f più generale suddetta consterà di 3 rami:

$$(O^7 O_1^3 [O_2^3 O_3^1 O_4^1 O_5^1]), \quad (O^5 O_1^2 [O_1^2 O_2^1 O_3^1]), \quad 3(O)$$

gli ultimi tre dei quali sono rami lineari per O e non per O_1 .

b) $\rho = 2$.

La f più generale cui s'impongano le molteplicità virtuali

$$O^{14} O_1^6 O_2^6 O_3^2 O_4^2 O_5^2 O_6^2$$

nei punti successivi del ramo

$$(O^{12} O_1^5 [O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1]),$$

avrà in questi punti le molteplicità effettive

$$O^{15} O_1^5 O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1$$

e conterà di 4 rami:

$$(O^{12} O_1^5 [O_2^5 O_3^2 O_4^2 O_5^1 O_6^1]) + 3(O)$$

(gli ultimi tre dei quali sono, anche in questo secondo caso, rami lineari per O e non per O_1).

Osservazione. Per semplicità, negli esempi precedenti ci siamo sempre riferiti al caso in cui si abbia una successione di punti infinitamente vicini sopra un solo ramo. Se invece vengono date, per esempio, due successioni di punti sopra due rami, aventi a comune i punti successivi $OO_1 \dots O_s$, ma non i seguenti O'_{s+1} e O''_{s+1} , l'analisi sopra indicata potrà ancora applicarsi ove si tenga conto che le molteplicità assegnate in O'_{s+1} e O''_{s+1} (nonchè negli eventuali altri punti che sopra i due rami sono fronteggiati da O_s) si scaricano sopra O_s , ai sensi del principio II, quando la loro somma superi la molteplicità attribuita ad O_s .

18. Nota sul comportamento effettivo delle curve polari. — Vogliamo indicare una elegante applicazione dei principii del paragrafo precedente al problema di determinare il comportamento effettivo delle polari in rapporto ad una singolarità straordinaria, O , di una curva f .

Riferiamoci al caso elementare in cui la f è costituita d'un solo ramo d'origine O , a cui appartiene una successione di:

- h punti multipli d'ordine ν ,
- h_1 punti multipli d'ordine $\nu_1 < \nu$,
-
- h_r punti multipli d'ordine $\nu_r < \nu_{r-1}$,

a cui succedono punti semplici.

Supporremo dapprima che quei punti multipli formino un solo gruppo di punti satelliti dello h -mo punto ν -plo, cioè che il ramo sia di genere $g=1$; si avrà pertanto (§ 7):

$$\begin{aligned} \nu &= h_1 \nu_1 + \nu_2 \\ \nu_1 &= h_2 \nu_2 + \nu_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \nu_{r-1} &= h_r \nu_r + 1. \end{aligned}$$

Sappiamo già dal § 14 che le polari di f posseggono almeno la molteplicità (virtuale) $\nu_i - 1$ in ogni punto ν_i -plo di f ($i=0, 1, \dots, r$), e sappiamo dal § 16 che esse hanno con f precisamente $\Sigma \nu_i (\nu_i - 1) + \nu - 1$ intersezioni riunite nell'origine O , giacchè l'abbassamento della classe dovuto alla singolarità O vale appunto $\Sigma \nu_i (\nu_i - 1) + \nu - 1$.

Risulta di qui che le polari di f si trovano fra le curve φ soddisfacenti alle condizioni di possedere:

1) la molteplicità virtuale $\nu_i - 1$ in ciascun punto ν_i -plo di f ,

2) e di avere con f un contatto $(\nu - 1)$ -punto, cioè di passare ancora virtualmente per $\nu - 1$ punti semplici di f successivi all'ultimo punto multiplo.

Aggiungasi che

3) una polare generica di f è una curva φ avente in O la molteplicità effettiva $\nu - 1$ e non ν (cfr. L. 3°, § 4).

Ciò posto si cerchi di determinare quali sono le molteplicità effettive di una φ generica. A tale scopo vediamo di costruire una curva φ , imponendole anzitutto le indicate molteplicità virtuali $\nu_i - 1$ nei punti ν_i -pli di f , ed aggiungendo la condizione di avere con f un contatto s -punto, dove si daranno a s valori crescenti fino a $\nu - 1$.

Tenendo presenti le relazioni di prossimità (che si rendono visibili nello schema grafico del ramo), avremo che:

Il valore $s = \nu_r - 1$ è il massimo valore di s che non dà luogo a scaricamento di molteplicità virtuali dai punti semplici di f all'ultimo punto multiplo; ma, per $s = \nu_r$, la condizione di contatto imposta alla φ si traduce, non più con un effettivo passaggio di essa per punti semplici del ramo, ma coll'acquisto della molteplicità effettiva ν_r (anzichè $\nu_r - 1$) nel primo punto di f di molteplicità ν_r .

Quando s varia fra i valori ν_r , e $h_r \nu_r = \nu_{r-1} - 1$, la condizione di contatto imposta a φ ha per effetto di aumentare (di una unità per ciascuno) le molteplicità dei punti ν_r -pli del ramo f ; invece per $s = \nu_{r-1}$, le molteplicità che dovrebbero essere assunte dagli h_r punti suddetti si scaricano sul precedente punto ν_{r-1} -plo, e da questo sul primo punto della stessa molteplicità. Quando s varia fra ν_{r-1} e $h_{r-1} \nu_{r-1} + \nu_r - 1 = \nu_{r-2} - 1$, torna a crescere, di una unità per ciascuno, la molteplicità dei punti ν_{r-1} -pli di f , finchè — per $s = \nu_{r-2}$ — si dà luogo a scaricamento di molteplicità dai punti ν_{r-1} -pli al punto ν_{r-2} -plo che li fronteggia, e così di seguito.

Proseguiamo a far crescere s , fino a che esso assuma il valore

$$s = \nu - 1 = h_1 \nu_1 + \nu_2 - 1 = \dots,$$

troveremo allora che:

il detto valore, $s = \nu - 1$, esprime il massimo contatto che una curva φ , passante pei punti ν_i -pli di f colle molteplicità virtuali $\nu_i - 1$, possa avere con f , senza possedere in O una molteplicità superiore a $\nu - 1$. Inoltre le molteplicità effettive assunte da φ nei punti multipli successivi del ramo f , verranno espresse da una *legge d'alternanza*: i punti ν -pli di f sono $(\nu - 1)$ -pli per φ , i punti ν_1 -pli che seguono sono di molteplicità ν_1 , i punti ν_2 -pli seguenti di molteplicità $\nu_2 - 1$ e così di seguito.

Questa legge d'alternanza vale ad esprimere le molteplicità effettive delle curve polari di f , anche quando il ramo di f sia di genere $g > 1$, purchè — dove si trovi $\nu_{\sigma-1}$ divisibile per ν_σ (e quindi tutti i punti successivi ad un punto $\nu_{\sigma-1}$ -plo, e fronteggiati da esso, sieno di eguale molteplicità) — *si ponga formalmente*, per σ dispari e $\nu_\sigma < \nu_{\sigma-1}$:

$$\nu_{\sigma-1} = h_\sigma \nu_\sigma + \nu_{\sigma+1} \quad \text{con} \quad \nu_{\sigma+1} = \nu_\sigma.$$

A conferma dell'induzione che vale a stabilire la legge d'alternanza per le molteplicità delle polari nei punti successivi d'un ramo f , valuteremo il contatto che la curva φ (dotata di molteplicità virtuali $\nu_i - 1$ nei punti ν_i -pli) acquista con f . Tale contatto viene dato dal numero s , e si ha:

1) per il fatto che la φ possiede negli h_1 punti ν_1 -pli

di f la molteplicità ν_1 (anzichè $\nu_1 - 1$)

$$\begin{aligned} & \text{cioè} \\ & s \geq h_1 \nu_1, \\ & s \geq \nu - \nu_2; \end{aligned}$$

2) e per il fatto che la φ possiede ancora la molteplicità ν_3 , anzichè $\nu_3 - 1$, negli h_3 punti ν_3 -pli di f :

$$\begin{aligned} & \text{cioè} \\ & s \geq \nu - \nu_2 + h_3 \nu_3, \\ & s \geq \nu - \nu_2 + \nu_2 - \nu_3, \\ & s \geq \nu - \nu_3; \end{aligned}$$

e così di seguito:

$$s \geq \nu - \nu_4, \dots$$

La condizione relativa all'ultimo gruppo di punti, cioè agli h_r punti ν_r -pli se r è dispari o — in caso contrario — ai $\nu_r - 1$ punti semplici seguenti, porta

$$s = \nu - 1$$

almeno, e — come già abbiamo avvertito — non si potrebbe superare con s questo limite, dato che il punto O , ν -plo per f , deve avere per una φ generica la molteplicità $\nu - 1$ e non ν .

Concludiamo pertanto enunciando il:

Teorema: *Si abbia una curva f , dotata di un punto ν -plo O , e costituita di un solo ramo; il comportamento effettivo di una polare generica φ , rispetto alla singolarità O , viene determinato dalle condizioni:*

- 1) di possedere in ciascun punto ν_i -plo, infinitamente vicino ad O , la molteplicità virtuale $\nu_i - 1$;
- 2) di avere col ramo di f un contatto $\nu - 1$ punto;
- 3) di avere in O la molteplicità effettiva $\nu - 1$ e non una molteplicità superiore.

Le molteplicità effettive di φ , che si ottengono in forza di codeste condizioni nei punti successivi di f d'ordine ν_i , sono espresse dalla legge di alternanza:

la φ possiede la molteplicità ν_{2i+1} in ciascuno dei punti ν_{2i+1} -pli e la molteplicità $\nu_{2i} - 1$ nei punti ν_{2i} -pli. Qui si deve intendere che gli indici i , dei numeri ν_i , siano definiti in modo che: i numeri ν_i costituiscono una successione di numeri essenzialmente positivi e generalmente decrescenti, ma dove si trovi

un v_{i-1} con i dispari multiplo del successivo v_i ($< v_{i-1}$), si ponga $v_{i-1} = h_i v_i + v_{i+1}$ con $v_{i+1} = v_i$.

Chi voglia rendersi conto del *significato* di questa *convenzione formale*, si riferisca allo schema grafico del ramo, il quale può venire diviso in tratti successivi mediante i punti che cadono nei vertici dei suoi angoli, il vertice suddetto essendo attribuito al tratto che con esso s'inizia. La nostra convenzione ha per effetto di considerare come origine di un tratto (al pari dei vertici) anche l'ultimo punto satellite di un gruppo che dia luogo a un numero pari di tratti.

Si può passare dal caso elementare trattato innanzi al caso di una *curva costituita di più rami*, sostituendo a questa una curva spezzata, le cui componenti oscolino i detti rami, ed applicando il principio di formazione della polare rispetto a una curva composta: così per la curva

$$f = \psi^2,$$

il comportamento effettivo della polare di un punto generico, quale può suppersi il punto all'infinito dell'asse y , si ottiene scrivendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} \psi.$$

19. Le singolarità straordinarie come singolarità-limiti. —

Le condizioni che esprimono il passaggio di una curva f per certi punti infinitamente vicini ad un punto proprio O , ove si assumano come molteplicità virtuali le molteplicità effettive r_i ($r_0 = r$), si possono interpretare come limiti delle condizioni di passaggio di f per altrettanti punti propri ordinari a tangenti distinte, dotati di uguali molteplicità, che si avvicinano indefinitamente ad O .

A tale scopo giova supporre la f di un ordine n così alto che le condizioni suddette (in numero di $\sum \frac{r_i(r_i+1)}{2}$) sieno meno di $\frac{n(n+3)}{2}$ e indipendenti fra loro; il che può sempre suppersi aggiungendo eventualmente ad f una curva arbitraria non passante per O .

Ciò posto si potrà fornire una dimostrazione induttiva del teorema che abbiamo in vista supponendo che esso sia stabilito per le singolarità di specie s , ed estendendolo alle

singularità di specie $s+1$. A tale scopo, avendosi in O una singularità di specie $s+1$, si eseguisca una trasformazione quadratica che muti O in una retta o , sulla quale verranno posti in evidenza, come punti multipli propri della curva trasformata \bar{f} , i punti O_1, O_2, \dots che appartengono all'intorno del prim'ordine di O . Ora è lecito costruire una curva \bar{F} , vicina alla \bar{f} , che possieda le medesime molteplicità nei punti fondamentali della trasformazione, e che abbia delle singularità di specie $< s$ vicine ai punti O_1, O_2, \dots fuori della retta fondamentale o , queste singularità riproducendo identicamente quelle di O_1, O_2, \dots salvo la loro posizione nel piano. Alla curva \bar{F} corrisponde nel piano di f una curva F che ha per limite f e che possiede vicino ad O singularità di specie $< s+1$.

Così resta dimostrato che:

Ogni singularità di una curva f , la quale consti di più punti multipli infinitamente vicini ad un punto proprio r -plo O , si può riguardare effettivamente come singularità-limite dedotta dall'avvicinamento di punti multipli propri a tangenti distinte, dotati di uguali molteplicità, che tendano al punto r -plo O .

Il risultato ottenuto viene completato dal teorema seguente:

Ogni singularità di f , che consti di un certo numero, s , di punti multipli infinitamente vicini ad un punto proprio O , si può ottenere come limite di una singularità che consti del punto O e di s punti multipli infinitamente vicini dotati delle stesse molteplicità, e sia costituita da rami lineari.

A tale scopo si sottometta f ad una trasformazione quadratica col punto fondamentale O ; la f si muta in una \bar{f} , dotata in generale di punti multipli infinitamente vicini appartenenti alla retta fondamentale $o = \bar{A}\bar{B}$. Ma, poichè l'ordine di \bar{f} si può supporre abbastanza grande, esiste una curva \bar{F} vicina alla \bar{f} , alla quale si assegnino uguali singularità nei punti propri di $\bar{A}\bar{B}$ (oltrechè in $\bar{A}, \bar{B}, \bar{O}$), in guisa però che le relative tangenti ai rami sieno ruotate d'un piccolo angolo rispetto alla retta $\bar{A}\bar{B}$. Questa operazione si può immaginare ripetuta per tutte le curve trasformate successive di f , nel procedimento che porta a sciogliere le singularità di f .

Se ne deduce una curva F vicina ad f , che ha lo stesso numero di punti multipli condensati in O , ma possiede soltanto rami lineari.

c. d. d.

Convieni aggiungere che mentre la curva F tende ad f , un certo numero h di tangenti condotte ad F da un punto generico P , per esempio dal punto all'infinito dell'asse y , tendono alla retta PO , i loro punti di contatto venendo a cadere in O . A questa circostanza è dovuto il saldarsi degli r rami lineari in uno o più rami superlineari; più precisamente mostreremo che si ottengono in tal guisa $\Sigma(\nu - 1) = r - h$ rami di f per O .

L'analisi a cui qui accenniamo si può svolgere come segue:

Quando la curva $f(xy) = 0$ possiede nel punto r -plo, O , dei rami superlineari, gli r valori y_1, y_2, \dots, y_r , della funzione algebrica $y(x)$ nell'intorno di O , si lasciano dividere in più cicli $(y_1, y_2, \dots, y_\nu), \dots$, per modo che un giro della x attorno ad $x = 0$ produce sulle y_i le sostituzioni circolari indicate dai detti cicli (cfr. § 1).

Ora si consideri la funzione algebrica $Y(x)$, prossima alla $y(x)$, definita dalla curva $F(xY) = 0$; per la quale si deve supporre che $x = 0$ non sia più punto di diramazione; la $Y(x)$ avrà in generale prossimi ad $x = 0$ $\Sigma(\nu - 1)$ punti di diramazione semplici, giacchè — designando con n il numero delle determinazioni e con p il genere — si hanno, tanto per la $y(x)$ che per la $Y(x)$, $2n + 2p - 2$ (cfr. L. 2^a, § 36) punti di diramazione in tutto, di cui $\Sigma(\nu - 1)$ cadono in $x = 0$ per la $y(x)$. Ora un giro avvolgente tutti i punti di diramazione della $Y(x)$ prossimi ad $x = 0$, produrrà sui valori Y_1, Y_2, \dots, Y_r una sostituzione prodotto dei cicli $(Y_1, Y_2, \dots, Y_\nu), \dots$, la quale si riduce alla sostituzione $(y_1, y_2, \dots, y_\nu), \dots$ quando la F tende ad f . Risulta quindi che esistono precisamente $\nu - 1$ punti di diramazione della $Y(x)$ prossimi ad $x = 0$ che operano sui valori Y_1, Y_2, \dots, Y_ν ; giacchè se ve ne fossero di più si dedurrebbe che la funzione algebrica $Y(x)$ possiede più che $\Sigma(\nu - 1)$ punti di diramazione nell'intorno di $x = 0$. Un giro formato dai cappi che avvolgono gli anzidetti $\nu - 1$ punti di diramazione, dà luogo al ciclo (Y_1, Y_2, \dots, Y_ν) .

Pertanto resta provato che:

La curva variabile F , costituita di rami lineari e dotata degli stessi punti multipli della f , che ha per limite f , possiede, per un punto generico ($y = \infty$) $\nu - 1$ tangenti, coi punti di contatto prossimi ad O , in corrispondenza ad ogni ramo d'ordine ν di f ; nei punti di contatto vengono collegati, in un

certo ordine, i ν rami lineari di F che vanno a saldarsi nel ramo d'ordine ν di f .

Aggiungasi che, se in luogo di un punto generico si consideri un punto P preso sopra una tangente ad f in O , la quale tocchi un ramo di classe ν' , la retta PO appare come limite, non più di $\Sigma(\nu - 1)$, ma di $\Sigma(\nu - 1) + \nu'$ tangenti alla F , giacchè — posto P nel punto all'infinito dell'asse y — si avrà ora un ciclo $(y_1 y_2 \dots y_\nu y_{\nu+1} \dots y_{\nu+\nu'})$ della funzione algebrica $y(x)$ al posto del ciclo $(y_1 y_2 \dots y_\nu)$.

Ora osserviamo che, quando si raggiunge la curva f come limite della curva variabile F , è lecito ritenere che per la F stessa coincidano in una tangente ν -punta le $\nu - 1$ tangenti uscenti da un punto generico P , e prossime a PO , che colleghino i ν rami lineari di F saldantisi in un ramo d'ordine ν di f ; ciò si ottiene facendo coincidere i relativi punti di diramazione. Se poi P viene preso sopra la tangente al suddetto ramo (di classe ν'), è lecito ritenere che le $\nu + \nu' - 1$ tangenti per P ad F coincidano in una sola tangente $(\nu + \nu')$ -punta vicina all'asse y .

L'osservazione che precede permette di stabilire il teorema:

Ogni singolarità di una curva f , si può ritenere come limite di una singolarità ordinaria costituita da rami di ugual ordine, alla quale si avvicinano punti multipli distinti aventi la stessa molteplicità che appartiene ai punti infinitamente vicini di f .

Per semplicità di discorso supporremo che f possenga un solo ramo d'ordine $\nu > 1$. Si operi una trasformazione quadratica ponendo in O un punto fondamentale; si otterrà una curva trasformata \bar{f} la quale avrà ν intersezioni, riunite in un punto P , con la retta fondamentale o corrispondente ad O . Ora il ramo di \bar{f} passante per P avrà in generale un ordine ν_1 , e — se $\nu_1 < \nu$ — sarà di classe $\nu - \nu_1$, avendo come tangente la o . In ogni caso la \bar{f} sarà limite di una curva \bar{F} avente nel punto P una singolarità costituita di rami lineari, ma composta di punti con uguale molteplicità, e avente un contatto ν -punto con una retta o' prossima ad o . È poi lecito ritenere a sua volta la curva \bar{F} come limite di una \bar{F}' dotata di punti multipli a tangenti distinte, ed avente ancora la o' come tangente ν -punta. Ciò posto si ritorni al piano della curva f con una trasformazione quadratica, dove si assume come retta fondamentale corri-

spondente ad O la retta o' anzichè la o ; otterremo così una curva F corrispondente ad F' , che ha per limite la f , e possiede in O un ramo ordinario d'ordine ν , soddisfacendo anche alle altre condizioni richieste.

Dal precedente teorema segue che:

Ogni singolarità straordinaria composta di punti di molteplicità r_i ($i=0, 1, \dots$) e costituita di h ($< r$) rami, si può ritenere come limite di $\sum \frac{r_i(r_i-1)}{2}$ punti doppi, fra cui $r-h$ cuspidi.

Secondo il teorema precedente si ritenga f come limite di una curva variabile F la quale possieda nel punto O una singolarità ordinaria costituita di h rami dello stesso ordine che quelli di f , e possieda inoltre, nell'intorno di O , tanti punti multipli distinti; è lecito ora ritenere a sua volta la F come limite di una curva dotata di $\sum \frac{r_i(r_i-1)}{2}$ punti doppi ($i=0, 1, \dots$) fra cui $r-h$ cuspidi, giacchè il punto r -plo O si ottiene come limite di $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi fra cui $r-h$ cuspidi (cfr. L. 3°, § 15), mentre gli altri punti r_i -pli ($i > 0$) a tangenti distinte si ottengono ciascuno come limite di $\frac{r_i(r_i-1)}{2}$ nodi. Con ciò viene dimostrato l'asserto.

Il risultato ottenuto illumina l'osservazione fatta alla fine del § 16, che: nei riguardi delle formule di PLÜCKER, qualsiasi singolarità di una curva può ritenersi equivalente a un certo numero di nodi e di cuspidi. *Gli equivalenti plueckeriani, anche nel caso di singolarità straordinarie, stanno a indicare la possibilità di definire la singolarità stessa come condensazione di nodi e cuspidi.*

20. Complementi alla teoria delle singolarità basata sulle trasformazioni quadratiche: sviluppi di Puiseux e punti multipli successivi di un ramo. — Vogliamo completare la trattazione delle singolarità, svolta in questo capitolo sulla base delle trasformazioni quadratiche, stabilendo per questa via una nuova dimostrazione del teorema di PUISEUX sugli sviluppi delle funzioni algebriche in serie di potenze fratte (§ 1). Qui si riattacca il *metodo di HAMBURGER* (1871) per il calcolo effettivo dei nominati sviluppi, e l'inversione di questo procedimento conduce quindi a ritrovare il risultato fonamen-

tale del § 7 concernente i punti multipli successivi di un ramo. Anzi tale risultato fu ottenuto la prima volta con questo metodo, in una nota di NÖRHER del 1890.

Cerchiamo dunque di dedurre la separazione dei rami di una curva f , in un punto singolare O , e la rappresentazione di questi mediante sviluppi di PUISEUX, ponendo a fondamento la decomposizione della singolarità.

A tale scopo supponiamo di avere eseguito successivamente tutte le trasformazioni quadratiche che permettono di sciogliere la singolarità, O , di f . Il prodotto di codeste trasformazioni quadratiche sarà una trasformazione birazionale del piano, di un certo ordine m :

$$1) \quad \begin{cases} x_1 \equiv \varphi_1(X_1 X_2 X_3) \\ x_2 \equiv \varphi_2(X_1 X_2 X_3) \\ x_3 \equiv \varphi_3(X_1 X_2 X_3), \end{cases}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ designando tre polinomi d'ordine m ; e le equazioni 1) saranno invertibili razionalmente dando luogo a formule del tipo

$$2) \quad \begin{cases} X_1 \equiv \psi_1(x_1 x_2 x_3) \\ X_2 \equiv \psi_2(x_1 x_2 x_3) \\ X_3 \equiv \psi_3(x_1 x_2 x_3) \end{cases}$$

(si può vedere che l'ordine dei polinomi ψ vale ancora m , ma qui non occorre utilizzare tale osservazione).

Per mezzo delle 1) la curva

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

viene trasformata in un'altra:

$$F(X_1 X_2 X_3) = 0.$$

Il punto

$$O \equiv (001)$$

di f è *fondamentale* per la trasformazione, se — come è lecito supporre — non accade mai di prendere una retta trasformata di O come retta fondamentale per una delle successive trasformazioni quadratiche. Perciò sarà identicamente

$$\psi_1(001) = \psi_2(001) = \psi_3(001) = 0.$$

Alle rette del primo piano

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0,$$

corrispondono nel secondo piano, in forza della trasformazione 1), le curve d'ordine m

$$3) \quad \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0,$$

formanti una rete, e secanti la F in n punti variabili, dove n designa l'ordine di f .

Alle rette per O corrispondono curve 3) formanti un fascio e aventi con F $n - r$ intersezioni variabili, e quindi r intersezioni fisse fuori dei punti comuni a tutte le curve 3). Codeste r intersezioni fisse formano un *gruppo di punti semplici corrispondenti ad O* ; tali punti non saranno in generale tutti distinti, ma si ridurranno ad h ($\leq r$) punti $P, P' \dots$ da contarsi rispettivamente secondo certi numeri

$$\nu, \nu', \dots: \quad (\nu + \nu' + \dots = r).$$

Agli intorni dei punti $P, P' \dots$ sopra la curva F , corrispondono h rami distinti della curva f aventi l'origine in O ; gli ordini di questi rami sono dati dai numeri

$$\nu, \nu', \dots$$

Infatti, all'intorno del punto P in F corrisponde un ramo di f che viene intersecato da una retta vicina ad O in ν punti, poichè la curva corrispondente — essendo vicina ad una curva che ha in P un contatto ν -punto con F — incontra la F precisamente in ν punti vicini a P .

Cambiamo le coordinate omogenee in coordinate cartesiane, ponendo

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1,$$

$$X_1 = X, \quad X_2 = Y, \quad X_3 = 1;$$

allora le 1) diverranno

$$4) \quad x = \frac{\varphi_1(XY)}{\varphi_3(XY)}, \quad y = \frac{\varphi_2(XY)}{\varphi_3(XY)}$$

Per la curva $F(XY) = 0$ avremo, nell'intorno dell'origine

$P = (00)$, e supposto che gli assi siano orientati in modo generico:

$$5) \quad Y = a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

dove

$$a_1 \neq 0.$$

Sostituendo nelle formule 4) si otterrà x e y funzioni analitiche di X , che saranno regolari per $X = 0$, e quindi svilup-pabili in serie di potenze di X , qualora sia (nel punto P) $\varphi_3(00) \neq 0$. Ma questa ipotesi si può sempre ritenere soddi-sfatta giacchè si può escludere che P cada in un punto fon-damentale della trasformazione 4) (prodotto delle nostre trasformazioni quadratiche), e d'altra parte al punto P cor-risponde nel piano (xy) il punto O che non è all'infinito.

Abbiam detto che il ramo di f corrispondente all'intorno di P viene rappresentato da serie procedenti per le potenze di X ; si può aggiungere che, il ramo essendo d'ordine ν , gli sviluppi dovranno cominciare con la potenza X^ν (come appare cercando le intersezioni con una retta $ax + by = 0$).

Avremo dunque

$$6) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 X^\nu + \alpha_2 X^{\nu+1} + \dots \\ y = \beta_1 X^\nu + \beta_2 X^{\nu+1} + \dots, \end{cases}$$

dove uno almeno dei numeri α_1 e β_1 è $\neq 0$ (per assi generici lo sono entrambi).

Negli sviluppi 6) figura come parametro X ; si può intro-durre al suo posto un altro parametro t , funzione regolare di X nell'intorno di $X = 0$, per modo che l'anzidetto ramo d'ordine ν venga rappresentato da:

$$7) \quad \begin{cases} x = t^\nu \\ y = b_1 t^\nu + b_2 t^{\nu+1} + \dots \end{cases}$$

cioè

$$y = b_1 x + b_2 x^{\frac{\nu+1}{\nu}} + \dots$$

A tale scopo poniamo

$$8) \quad x = t^\nu, \quad y = \vartheta(ut)$$

designando ϑ una funzione razionale generica.

La curva

$$f(xy) = 0$$

verrà trasformata dalla sostituzione 8) in un'altra curva

$$\bar{f}(ut) = 0,$$

e le tre equazioni simultanee

$$\bar{f}(ut) = 0, \quad x = t^y, \quad y = \theta(ut)$$

permetteranno di ricavare inversamente u , t come funzioni razionali di x , y e quindi — per le 4) — di X , Y ; in particolare, tenuto conto della 5), si dedurrà per t uno sviluppo della forma

$$9) \quad t = c_1 X + c_2 X^2 + \dots$$

D'altra parte — essendo per le 6) e 8) —

$$t^y = \alpha_1 X^y + \alpha_2 X^{y+1} + \dots,$$

con

$$\alpha_1 \neq 0,$$

si deduce che t diventa infinitesima del 1° ordine per $X = 0$ e quindi si ha in 9):

$$c_1 \neq 0.$$

Allora la serie 9) si lascia invertire ponendo

$$X = d_1 t + d_2 t^2 + \dots,$$

con

$$d_1 \neq 0.$$

Segue di qui e dalla 6) che y si può rappresentare mediante una serie di potenze procedenti per il parametro $t = x^{\frac{1}{y}}$.

Si ottiene dunque lo sviluppo rappresentato dalle formole 7), conforme al teorema di PUISEUX del § 1.

Il ramo

$$7) \quad y = b_1 x + b_2 x^{\frac{y+1}{y}} + \dots$$

ha come tangente la retta $y = b_1 x$, che può sempre ridursi all'asse x , colla sostituzione

$$x' = x, \quad y' = y - b_1 x;$$

allora l'equazione del ramo si ridurrà alla forma

$$y = bx^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots$$

dove b è uguale al primo coefficiente b_i ($i \geq 2$) diverso da zero, e ν' (≥ 1) designa la classe del ramo.

Se si assume la medesima tangente al ramo come asse y , lo sviluppo per le potenze di $x^{\frac{1}{\nu}}$ cessa di sussistere, perchè il coefficiente del primo termine diventerebbe infinito; ma si trova invece uno sviluppo di y per potenze di $x^{\frac{1}{\nu+\nu'}}$.

Questo risultato a cui pervenimmo col metodo di PUISEUX si può stabilire nell'attuale ordine di idee come segue.

Partiamo dallo sviluppo di x per $y^{\frac{1}{\nu}}$, che — per quanto è detto sopra — è della forma

$$x = ay^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots;$$

si tratta di invertire questa serie esprimendo y per le potenze fratte di x . A tale scopo eleviamo anzitutto i due numeri alla potenza ν ; verrà x^ν espresso mediante una serie procedente per le potenze intere di y :

$$x^\nu = a^\nu y^{\nu+\nu'} + \dots;$$

ora pongasi

$$x^\nu = t^{\nu+\nu'}$$

avremo

$$t^{\nu+\nu'} = a^\nu y^{\nu+\nu'} + \dots;$$

e la curva luogo dei punti (yt) avrà nell'origine un punto di molteplicità $\nu + \nu'$ a tangenti distinte, corrispondenti ai valori

di $a^{\frac{\nu}{\nu+\nu'}}$. Mediante una trasformazione quadratica, col centro in codesto punto, i detti rami si trasformano negli intorno di $\nu + \nu'$ punti semplici distinti, e quindi per ciascun ramo si ottiene uno sviluppo in serie del tipo

$$y = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots \quad \left(\alpha_1 = \frac{\nu}{a^{\nu+\nu'}} \right),$$

cioè che fa apparire la sua linearità.

Ora, sostituendo per t il suo valore, si trova lo sviluppo richiesto

$$y = \frac{y}{a^{v+v'}} x^{\frac{v}{v+v'}} + \dots$$

Il calcolo della serie si fa col metodo dei coefficienti indeterminati, sostituendo lo sviluppo di y entro l'equazione $x^v = a^v y^{v+v'} + \dots$, che così deve ridursi a una identità.

Per calcolare effettivamente gli sviluppi in serie che pongono la rappresentazione dei singoli rami di f nell'intorno del punto singolare O , conviene seguire il

Metodo di HAMBURGER-WEIERSTRASS. Questo metodo consiste nell'eseguire successivamente le trasformazioni quadratiche che conducono dalla curva F alla f , e dall'intorno lineare del punto P al ramo corrispondente di origine O .

Per semplificare il calcolo si suppone che le trasformazioni quadratiche con cui viene sciolta la singolarità O siano trasformazioni quadratiche speciali con due punti fondamentali infinitamente vicini nel punto all'infinito dell'asse y , del tipo

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{y}{x},$$

$$x = x_1, \quad y = x_1 y_1$$

cioè, in forma omogenea (sostituendo x, y, x_1, y_1 con $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}$):

$$x_1 = x^2, \quad y_1 = yz, \quad z_1 = xz,$$

$$x = x_1 z_1, \quad y = x_1 y_1, \quad z = z_1^2,$$

(di qui appare che sono fondamentali per la trasformazione il punto $x=y=0$, cui risponde la retta $x_1=0$, e il punto $x=z=0$, nel quale le coniche della rete trasformante $ax^2 + byz + cz = 0$ toccano la retta all'infinito $z=0$).

Ciò posto si tratta di *comporre* la singolarità di un ramo, movendo inizialmente da un ramo lineare, mediante una successione di trasformazioni quadratiche del tipo indicato.

In uno stadio qualunque della nostra operazione, avremo un ramo d'ordine μ e di classe μ' con l'origine nel punto $x_1 = y_1 = 0$, e dovremo considerare tre casi, in rapporto alle diverse posizioni che codesto ramo può assumere riguardo agli elementi fondamentali della trasformazione quadratica

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{y}{x},$$

cioè agli assi x_1, y_1 :

1) Se la tangente al ramo è orientata in modo generico, la serie rappresentativa del ramo sarà del tipo

$$y_1 = ax_1 + a_1 x_1^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + \dots,$$

ed eseguendo la sostituzione si trova

$$y = ax^2 + a_1 x^{\frac{2\mu+\mu'}{\mu}} + \dots;$$

questo ramo è d'ordine μ e di classe μ ($2 = \frac{\mu+\mu'}{\mu}$).

2) Se la tangente al ramo è la retta $y_1 = 0$, che congiunge il punto fondamentale ($y_1 = 0, x_1 = \infty$), la serie rappresentativa assume la forma:

$$y_1 = a_1 x_1^{\frac{\mu+\mu'}{\mu}} + \dots,$$

e quindi il ramo trasformato

$$y = a_1 x^{\frac{2\mu+\mu'}{\mu}} + \dots$$

è d'ordine μ e di classe $\mu + \mu'$, d'accordo con la circostanza che la tangente ad esso ($y = 0$) corrisponde alla tangente del primo ($y_1 = 0$).

3) Infine se il ramo tocca l'asse y_1 , lo sviluppo in serie procede per potenze di $x_1^{\frac{1}{\mu+\mu'}}$:

$$y_1 = a_1 x_1^{\frac{\mu}{\mu+\mu'}} + \dots;$$

allora il ramo trasformato

$$y = a_1 x_1^{\frac{2\mu+\mu'}{\mu+\mu'}} + \dots$$

è d'ordine $\mu + \mu'$ e di classe μ .

Ciò posto è chiaro come si componga la singolarità di un ramo della curva f , a partire dall'intorno di un punto semplice, P , della curva trasformata F .

In primo luogo si assumerà come asse y_1 la tangente in P ad F , che avrà un certo contatto r -punto, ponendo in P l'origine delle coordinate. La nostra trasformazione conduce allora a un ramo ordinario (di classe 1) d'ordine r :

$$y = a_1 x^{\frac{r+1}{r}} + \dots;$$

e se si eseguisce invece di una h volte la trasformazione indicata, *senza cambiare gli assi*, si ottiene, conformemente al caso 2) un ramo d'ordine r e di classe $r_1 = (h-1)r + 1$

$$y = a_1 x^{\frac{r+r_1}{r}} + \dots$$

Ora, se trasformiamo proiettivamente la curva ottenuta, lasciando fermo x e sostituendo y con $y - \alpha x$, ci troveremo così nel caso 1), ed eseguendo la sostituzione quadratica sorgerà il ramo

$$y = \alpha x^2 + a_1 x^{\frac{2r_1+r}{r}} + \dots$$

Se invece trasformiamo proiettivamente la curva

$$y = a_1 x^{\frac{r+r_1}{r}} + \dots,$$

scambiando x con y , veniamo a trovarci nel caso 3), e così eseguendo la trasformazione quadratica sorge il ramo

$$y = b_1 x^{\frac{2r+r_1}{r+r_1}} + \dots,$$

dove $b_1 = \frac{r}{a_1^{r+r_1}}$, il quale è d'ordine $r' = r + r_1$ e di classe r ;

e se si eseguisce h_1 volte la sostituzione quadratica si arriva al ramo d'ordine r' e di classe $r_2 = (h_1 - 1)r' + r$

$$y = b_1 x^{\frac{r'+r_2}{r'}} + \dots,$$

da cui — cambiando nuovamente x con y , e ripetendo la sostituzione quadratica — nasce un ramo d'ordine $r'' = r' + r_2$ e di classe r' , e così di seguito.

Il procedimento di calcolo riesce in tal modo abbastanza spiegato, e si vede in particolare come i coefficienti dello sviluppo in serie a cui in fine si perviene, dipendono da a_1 e dai coefficienti angolari delle rette che nei successivi cambiamenti proiettivi abbiamo assunte come tangenti del ramo.

Aggiungasi che l'analisi precedente riproduce in una forma semplificata il concetto geometrico qualitativo del metodo di HAMBURGER (che WEIERSTRASS ebbe a modificare mercè un più ampio uso di trasformazioni lineari). Ma si riesce con HAMBURGER ad abbreviare i calcoli effettivi, introducendo per il caso dei punti multipli succedentisi sopra rami lineari lo sviluppo abbreviato di TAYLOR, (cfr. Cap. III).

Il procedimento di calcolo spiegato innanzi, conduce a costruire lo sviluppo di PUISEUX rappresentante un ramo, e mette in evidenza come gli esponenti che figurano in questo sviluppo vengano composti coi numeri che designano gli ordini di molteplicità dei punti successivi del ramo. Perciò, invertendo quel procedimento, si ottiene una nuova dimostrazione del teorema fondamentale del § 7. Per questo scopo è lecito riferirsi — ove occorra — alla rappresentazione più generale del ramo mediante serie procedenti per un parametro t ; così potremo dispensarci dall'inversione delle serie che abbiamo innanzi incontrato.

Per *determinare i punti multipli successivi del ramo*

$$1) \quad y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots$$

procederemo come segue.

Assumasi dapprima la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^\nu + a_1 t^{\nu+\nu'} + a_2 t^{\nu+\nu'+\nu''} + \dots, \end{cases}$$

dove

$$a \neq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0 \dots$$

Cambiando y in $y - ax$ e lasciando fermo x , si porta la curva ad avere come tangente l'asse x , avendosi ora

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = a_1 t^{\nu+\nu'} + a_2 t^{\nu+\nu'+\nu''} + \dots \end{cases}$$

Dopo ciò eseguiamo la trasformazione quadratica che consiste nel sostituire y con $\frac{y}{x}$, lasciando sempre fermo x ; viene

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = a_1 t^{\nu'} + a_2 t^{\nu'+\nu''} + \dots, \end{cases}$$

che è la rappresentazione di un ramo d'ordine uguale al minore dei due numeri ν e ν' e — se questi sono disuguali — di classe uguale alla loro differenza.

Pongasi che sia

$$\nu' = h\nu + \nu_1 \quad \text{con } \nu_1 \neq 0;$$

Allora, eseguendo h volte la sostituzione di y con $\frac{y}{x}$, si trova

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = a_1 t^{\nu_1} + a_2 t^{\nu_1+\nu''} + \dots \end{cases}$$

che è la rappresentazione di un ramo d'ordine $\nu_1 < \nu$ e di classe $\nu - \nu_1$.

Per ridurre ulteriormente questo ramo, conviene anzitutto scambiare fra loro le x , y passando alla rappresentazione

$$\begin{cases} x = a_1 t^{\nu_1} + a_2 t^{\nu_1+\nu''} + \dots \\ y = t^\nu. \end{cases}$$

Ora dividiamo y per x ; si ha

$$\frac{y}{x} = \frac{t^{v-v_1}}{a_1 + a_2 t^{v''} + \dots},$$

dove il denominatore è diverso da 0 per $t=0$; pertanto il quoziente viene espresso da una serie precedente per le potenze di t , la quale si lascia calcolare o con l'algoritmo della divisione o con l'ausilio della formula binomiale

$$\{ a_1 + \omega(t) \}^{-1} = a_1^{-1} \left\{ 1 + \frac{\omega}{a_1} \right\}^{-1} = \frac{1}{a_1} - \frac{\omega}{a_1^2} + \frac{\omega^2}{a_1^3} - \dots$$

Si avrà quindi il ramo trasformato

$$\begin{cases} x = a_1 t^{v_1} + a_2 t^{v_1+v''} + \dots \\ y = \frac{1}{a_1} t^{v-v_1} - \frac{a_2}{a_1^2} t^{v-v_1+v''} + \dots, \end{cases}$$

d'ordine uguale al minore dei due numeri v_1 e $v-v_1$ e — se questi sono disuguali — di classe uguale alla loro differenza.

È chiaro come il procedimento indicato si prosegua. Pongasi in generale

$$\begin{aligned} v' &= h v + v_1 \\ v &= h_1 v_1 + v_2 \\ &\dots \dots \dots \\ v_{\sigma-1} &= h_{\sigma} v_{\sigma}, \end{aligned}$$

dove v_{σ} designa il massimo comun divisore di v e v' . La successione dei rami trasformati pone in evidenza che il ramo 1) possiede di seguito all'origine:

- h punti di molteplicità v ,
- h_1 punti di molteplicità v_1 ,
-
- h_{σ} punti di molteplicità v_{σ} ,

tutti dipendenti dal termine dello sviluppo che ha come coefficiente a_1 . L'ultimo punto v_{σ} -plo di questa successione viene posto in evidenza come origine di un ramo trasformato, che

l'esame del procedimento di calcolo mostra essere del tipo

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t^{\nu_\sigma} + \alpha_2 t^{\nu_\sigma + \nu''} + \dots \\ y = \beta_1 t^{\nu_\sigma} + \beta_2 t^{\nu_\sigma + \nu''} + \dots, \end{cases}$$

e quindi d'ordine ν_σ e di classe ν'' .

Pertanto si troveranno i punti multipli successivi del ramo mediante l'algoritmo del massimo comun divisore applicato alla coppia ν_σ e ν'' , e così di seguito.

In ultima analisi *i punti multipli successivi del ramo 1) vengono determinati ricercando il massimo comun divisore di $\nu\nu'$ e poi di $\nu\nu''$, ..., conforme al risultato già stabilito direttamente nel § 7.*

CAPITOLO III

Le singularità rispetto al Calcolo differenziale.

21. **Formule generali per le derivate successive delle funzioni composte $f(x, y(x))$.** — Abbiamo detto (§ 3) che le condizioni affinchè una curva f possedga dati punti multipli infinitamente vicini O, O_1, O_2, \dots , succedentisi sopra un ramo lineare, si possono tradurre mediante condizioni differenziali, relative ai valori delle derivate di f nel punto O .

Per determinare precisamente queste condizioni, conviene anzitutto *esprimere in una forma adatta le successive derivate della $f(xy)$ considerata come funzione composta: $f = f(x, y(x))$* . Porremo

$$\frac{d^m f}{dx^m} = f_m,$$

$$\frac{d^i y}{dx^i} = y_i.$$

Avremo in generale

$$f_{m+1} = \frac{\partial}{\partial x} f_m + \frac{\partial}{\partial y} f_m \cdot y_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_m} f_m \cdot y_{m+1},$$

ossia, introducendo il simbolo operatorio

$$\Delta_{m+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right),$$

$$f_{m+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right) f_m = \Delta_{m+1} f_m.$$

Perciò

$$f_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \Delta_1 f,$$

$$f_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) f_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} f_1 \cdot y_2 = \Delta_2 f_1,$$

.....

Ora nella prima parte dell'espressione di f_2 appare il quadrato del simbolo operatorio $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y_1\right)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) f_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y_1^2;$$

di più l'intera f_2 si può ottenere eseguendo sopra f l'operazione che viene indicata dal quadrato simbolico del trinomio $\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)$, facendo attenzione che non vale per i prodotti di operazioni la legge di permutabilità. Infatti si ha:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) + \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2,$$

e

$$\left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial}{\partial y_1} f_1 \cdot y_2,$$

mentre, essendo $f(xy)$ indipendente da y_1 , cioè identicamente

$$\frac{\partial}{\partial y_1} f = 0,$$

segue

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) 0 = 0,$$

$$\left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 f = \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \left(y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) 0 = 0;$$

pertanto

$$f_2 = \Delta_2^2 f.$$

In generale la derivata d'ordine m , f_m , si potrà ottenere eseguendo su f un'operazione rappresentata dalla potenza m -esima di un polinomio:

$$I) \quad f_m = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial y_{m-1}}\right)^m f = \Delta_m^m f.$$

Per chi abbia inteso il significato del simbolo operatorio, a spiegare il quale ci siamo indugiati sul caso $m=2$, la dimostrazione della formula è immediata: basta osservare

che, per $i < m$, si può scrivere

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) f_i = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + y_{i+2} \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial y_{m-1}} \right) f_i = \Delta_m f_i, \end{aligned}$$

giacchè f_i non contiene le variabili $y_{i+1} \dots y_{m-1}$, e quindi identicamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} f_i &= 0, \dots, \quad \frac{\partial}{\partial y_{m-1}} f_i = 0, \\ \left(y_{i+2} \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} + y_{i+3} \frac{\partial}{\partial y_{i+2}} + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial y_{m-1}} \right) f_i &= 0. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque giustificato la formula I) mettendo in rilievo che:

$$\Delta_m \Delta_{m-1} \dots \Delta_2 \Delta_1 f = \Delta_m^m f,$$

e quindi anche

$$\text{II) } \Delta_m^i f(xy) = \Delta_i^i f(xy), \quad \text{per } i < m,$$

formula che permetterà di supporre,

$$m \geq n,$$

nel calcolo delle espressioni $\Delta_m^n f$, di cui passiamo ad occuparci.

Per il calcolo effettivo di f_m , e per la deduzione che ci proponiamo di trarne, occorre sviluppare la potenza n -ma del polinomio Δ_m^n in rapporto alla f su cui opera; e riesce in questo sviluppo di raccogliere i termini simili con la semplice modificazione degli ordinari coefficienti numerici polinomiali, grazie ad una *quasi-permutabilità* delle operazioni che entrano in gioco.

Le osservazioni che qui occorrono hanno un interesse per il Calcolo differenziale; ma per la trattazione dell'argomento che ci occupa basta la conoscenza della formula finale VI) di pag. 468 che dà lo sviluppo di $\Delta_m^n f$, la quale potrà essere assunta come presupposto della trattazione da un lettore frettoloso.

Osserviamo che lo sviluppo della potenza di un polinomio viene giustificato in base alle tre proprietà fondamentali della

moltiplicazione dei numeri: proprietà associativa, distributiva e commutativa. Ora la proprietà associativa del prodotto permane, come è noto, nella teoria generale delle operazioni, e per le operazioni che qui ci occorre considerare, sussiste ancora la proprietà distributiva che ci fornisce

$$\Delta_m^n = \Delta_m^{n-1} \Delta_i + \Delta_m^{n-1} \left(y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial y_{m-1}} \right).$$

Ma non vale, come si è osservato, la proprietà commutativa delle operazioni $y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i}$, $y_{r+1} \frac{\partial}{\partial y_r}$ (almeno quando $r = i+1$); e nemmeno la permutabilità delle operazioni $\frac{\partial}{\partial y_i}$ con le operazioni Δ_m .

Tuttavia queste operazioni sono permutabili a meno di un coefficiente numerico, come risulterà dalla seguente formula fondamentale:

$$\text{III) } \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_m^n f = \binom{n}{i} \Delta_m^{n-i} \frac{\partial}{\partial y_i} f \quad (m \geq i),$$

dove per $n < i$ si ha $\binom{n}{i} = 0$.

Questa formula vale per $i = 0$, in quantochè $\frac{\partial}{\partial y}$ è permutabile con Δ_m ; dimostriamo che essa è vera per $i+1$ quando sia supposta vera per i , e così ne avremo fornita la dimostrazione induttiva.

Or dunque scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \Delta_m^n &= \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \dots + y_m \frac{\partial}{\partial y_{m-1}} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_{i+1}} + y_1 \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_{i+1}} + \dots + y_{i+1} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_{i+1}} + \dots + y_m \frac{\partial^2}{\partial y_{m-1} \partial y_{i+1}} + \frac{\partial}{\partial y_i} = \\ &= \Delta_m \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} + \frac{\partial}{\partial y_i}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \Delta_m^n f = \Delta_m \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \Delta_m^{n-1} f + \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_m^{n-1} f,$$

il quoziente dei numeri binomiali:

$$\binom{n}{i} : \binom{n-1}{i} = \frac{n}{n-i}$$

e quindi

$$\binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{i} : \binom{n-1}{i} \cdot \binom{n-i-1}{i} = \frac{n}{n-i} \frac{n-i}{n-2i} = \frac{n}{n-2i},$$

.....;

la formola precedente si riduce a

$$\text{IV) } (n-hi) \frac{\partial^h}{\partial y_i^h} \Delta_m^n f = n \Delta_m \frac{\partial^h}{\partial y_i^h} \Delta_m^{n-1} f.$$

Ciò posto, proponiamoci di calcolare l'espressione

$$\Delta_{m+1}^n f = \left(\Delta_m + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^n f;$$

potremo sviluppare la potenza n -ma del binomio simbolico che ivi compare, e — in base alla legge di quasi permutabilità — raccogliere i termini simili come nel noto sviluppo newtoniano, salvo la modificazione dei coefficienti binomiali che vogliamo investigare più da vicino.

Ordiniamo il nostro sviluppo scrivendo

$$\Delta_{m+1}^n f = \sum A(m, n, h) \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} \Delta_m^{n-h} f \cdot y_{m+1}^h \quad (h = 0, 1, \dots).$$

Per

$$n = m + 1,$$

tenuto conto che

$$\Delta_{m+1}^{m+1} f = \Delta_{m+1} \Delta_m^m f,$$

si ha

$$\Delta_{m+1}^{m+1} f = \left(\Delta_m + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right) \Delta_m^m f = \Delta_m^{m+1} f + \frac{\partial}{\partial y_m} \Delta_m^m f \cdot y_{m+1},$$

e quindi

$$A(m, m+1, 0) = 1$$

$$A(m, m+1, 1) = 1 = \frac{m+1}{m+1},$$

mentre i coefficienti successivi nello sviluppo del nostro

binomio simbolico possono ricevere qualsiasi valore, perchè — tenuta presente la II) — le derivate rispetto ad y_m di $\Delta_m^i f$ con $i < m$ sono tutte nulle.

Proseguendo poi a calcolare i coefficienti $\mathcal{A}(m, n, h)$ per $n = m + 2, m + 3, \dots$, con l'applicazione della legge di quasi permutabilità, si troverebbe che codesti coefficienti sono i numeri binomiali $\binom{n}{h}$ divisi per $(m + 1)^h$. Questo risultato essendo già stabilito per $n = m + 1$, ne otterremo la giustificazione induttiva dimostrando che, se esso è vero per n , è vero anche per $n + 1$.

Supponiamo dunque che sia, per un certo valore di n ,

$$V) \quad \Delta_{m+1}^n f = \sum \binom{n}{h} \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} \Delta_m^{n-h} f \cdot \left(\frac{y_{m+1}}{m+1} \right)^h,$$

e calcoliamo il coefficiente di

$$\frac{\partial^h}{\partial y_m^h} \Delta_m^{n-h+1} f \cdot y_{m+1}^h$$

nello sviluppo di

$$\Delta_{m+1}^{n+1} f = \left(\Delta_m + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right) \Delta_{m+1}^n f.$$

Avremo

$$\mathcal{A}(m, n+1, h) \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} \Delta_m^{n-h+1} f \cdot y_{m+1}^h =$$

$$= \frac{1}{(m+1)^{h-1}} \binom{n}{h-1} \Delta_m^{n-h+1} f \cdot y_{m+1}^h + \frac{1}{(m+1)^h} \binom{n}{h} \Delta_m \frac{\partial^h}{\partial y_m^h} \Delta_m^{n-h} f \cdot y_{m+1}^h$$

(dove si è usato della proprietà che la moltiplicazione per y_{m+1} è permutabile con l'operazione Δ_m che non contiene tale variabile).

Applicando la formula IV) si trova

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m, n+1, h) &= \frac{1}{(m+1)^{h-1}} \binom{n}{h-1} \left\{ 1 + \frac{n-h+1}{h(m+1)} \cdot \frac{n-h+1-hm}{n-h+1} \right\} \\ &= \frac{1}{(m+1)^h} \binom{n+1}{h}. \end{aligned}$$

Così resta dimostrato lo sviluppo della potenza n -ma del

binomio simbolico

$$\Delta_{m+1}^n = \left(\Delta_m + \frac{\partial}{\partial y_m} y_{m+1} \right)^n f$$

espresso dalla formula V); appare qui che i coefficienti si ottengono semplicemente dividendo i soliti coefficienti binomiali $\binom{n}{h}$ per le potenze $(m+1)^h$, ciò che equivale a conservare formalmente lo sviluppo newtoniano, sostituendo y_{m+1} con $\frac{y_{m+1}}{m+1}$ e mantenendo gli operatori $\left(\frac{y_{m+1}}{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)$ alla sinistra dei Δ_m :

$$V') \quad \Delta_{m+1}^n f = \sum \binom{n}{h} \left(\frac{y_{m+1}}{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^h \Delta_m^{n-h} f.$$

Ora si può applicare la formula V) allo sviluppo dei $\Delta_m^{n-h} f$ per le potenze di $\Delta_{m-1} f$, e così di seguito; otterremo in tal guisa uno sviluppo

$$\Delta_{m+1}^n = \left(\Delta_i + y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \dots + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^n f$$

in tutto analogo allo sviluppo della potenza n -ma di un polinomio di $m-i+2$ termini; i coefficienti del nostro sviluppo coincideranno coi coefficienti polinomiali quando si sostituiscia ciascuna delle y_r ($r = i+1 \dots m+1$) con $\frac{y_r}{r}$.

La validità di questo sviluppo resta pienamente dimostrata osservando che lo sviluppo della potenza del polinomio si può dedurre con applicazione ripetuta dallo sviluppo della potenza del binomio.

Dunque otterremo la seguente formula, estensione della V'), la quale vale ad esprimere $\Delta_{m+1}^n f$ per le potenze di una qualsiasi $\Delta_i f$ ($i = n-1, n-2, \dots$):

$$\Delta_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! h_i! h_{i+1}! \dots h_m!} \left(\frac{y_{m+1}}{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^{h_m} \dots \left(\frac{y_{i+2}}{i+2} \frac{\partial}{\partial y_{i+1}} \right)^{h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1}}{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{h_i} \Delta_i f$$

dove

$$h + h_i + \dots + h_m = n,$$

e dove riescono nulli, e quindi spariscono per $i > 0$ e $f = f(xy)$,

i termini per cui non sia contemporaneamente

$$h \geq h_i \geq h_{i+1} \dots \geq h_m.$$

L'espressione precedente si riduce, eseguendo le derivazioni rispetto a $y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_m$ che figurano nel termine generale della sommatoria; invero la derivazione $\left(\frac{\partial}{\partial y_{r+1}}\right)^{h_{r+1}}$ ($r \geq i$) ha per effetto di abbassare l'esponente di y_{r+1} da h_r a $h_r - h_{r+1}$, moltiplicando contemporaneamente per il coefficiente numerico

$$\frac{h_r!}{(h_r - h_{r+1})!} = \frac{h_r!}{k_{r+1}!},$$

dove si è posto:

$$k_{i+1} = h_i - h_{i+1}, \quad k_{i+2} = h_{i+1} - h_{i+2}, \dots, \quad k_{m+1} = h_m - h_{m+1} = h_m.$$

Ora la nostra formula vale ad esprimere $\Delta_{m+1}^n f$ come un polinomio ordinato per le $y_{i+1} \dots y_{m+1}$, elevate agli esponenti $k_{i+1}, k_{i+2} \dots k_{m+1}$, e moltiplicate per la derivata h_i -ma di Δ_i^h rispetto a y_i , dove

$$h_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1}.$$

Il coefficiente numerico di cui è affetto codesto termine generale sarà

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{h_m} \dots \left(\frac{1}{i+2}\right)^{h_{i+1}} \left(\frac{1}{i+1}\right)^{h_i} \frac{n!}{h! k_i! h_{i+1}! \dots h_m!} \frac{h_i! k_{i+1}! \dots h_m!}{k_{i+1}! k_{i+2}! \dots k_{m+1}!}.$$

Qui appare evidente che spariscono i fattoriali $h_i! h_{i+1}! \dots h_m!$, e così la seconda parte del coefficiente numerico si riduce semplicemente al coefficiente polinomiale

$$\frac{n!}{h! k_{i+1}! \dots k_{m+1}!}.$$

I fattori che figurano nella prima parte si possono opportunamente congiungere alle $y_{i+1}, y_{i+2} \dots y_{m+1}$; essendo

$$h_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1},$$

potremo distribuire i fattori del divisore $(i+1)^{h_i}$ attribuendo

$(i+1)^{k_{i+1}}$ come divisore di y_{i+1} , $(i+1)^{k_{i+2}}$ come divisore di y_{i+2} , ecc.; analogamente potremo distribuire i divisori $(i+2)$ fra le variabili $y_{i+2} \dots y_{m+1}$, in base all'uguaglianza

$$h_{i+1} = k_{i+2} + k_{i+3} + \dots + k_{m+1},$$

e così di seguito. Per tal modo la y_{i+1} figurerà nel polinomio divisa per $i+1$, y_{i+2} divisa per $(i+1)(i+2) \dots$ ed y_{m+1} divisa per $(i+1)(i+2) \dots (m+1)$.

Facciamo un altro passaggio tirando fuori da

$$\left(\frac{y_{i+r}}{(i+1) \dots (i+r)} \right)^{k_{i+r}} = \left(\frac{i! y_{i+r}}{(i+r)!} \right)^{k_{i+r}}$$

il fattore $(i!)^{k_{i+r}}$; ricordando che $h_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1}$, avremo la formola finale

$$\text{VI) } \Delta_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! k_{i+1}! \dots k_{m+1}!} (i!)^{h_i} \frac{\partial^{h_i}}{\partial y_i^{h_i}} \Delta_i^h f \cdot \left(\frac{y_{i+1}}{(i+1)!} \right)^{k_{i+1}} \left(\frac{y_{i+2}}{(i+2)!} \right)^{k_{i+2}} \dots \left(\frac{y_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}},$$

dove

$$h_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1},$$

$$h = n - k_{i+1} - 2k_{i+2} - \dots - (m-i+1)k_{m+1};$$

in questa formola gli indici che vi figurano sono tutti ≥ 0 , e non importa indicarne esplicitamente i limiti di variabilità, poichè al disopra di questi i termini corrispondenti spariscono diventando nulli (così, per es., per $h < i$)⁽¹⁾.

La formola VI) porge l'espressione generale di $\Delta_{m+1}^n f$ come polinomio ordinato per le potenze di $y_{i+1} \dots y_{m+1}$, figurando come coefficienti di queste le derivate di $\Delta_i^h f$ rispetto ad y_i . Essa vale per qualsiasi valore di $i \leq m$ (per $i = m+1$ si riduce a

(1) A questa formola si può dare maggior simmetria surrogando la variabile di derivazione y_i con $\frac{y_i}{i!}$, il che ha per effetto di far scomparire il fattore $i!$, riducendo il coefficiente numerico a un puro coefficiente polinomiale.

un'identità); in particolare per $i=0$ si ottiene l'espressione effettiva di $\Delta_{m+1}^n f$ per le derivate di f rispetto ad x, y , cioè (scrivendo $h_0 = k$):

$$\text{VII) } \Delta_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! k_1! \dots k_{m+1}!} \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} f \cdot \left(\frac{y_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{y_2}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{y_{m+1}}{m+1!}\right)^{k_{m+1}}$$

Per $n = m + 1$ le formule VI) e VII) rispondono alla questione del calcolo delle derivate f_{m+1} ; l'espressione di queste, corrispondente alla posizione $i = 1$ ed $n = m + 1$ nelle formule VI), s'incontra in STOLZ ⁽¹⁾ che perviene a questo risultato direttamente, senza far uso di simboli e di concetti della teoria generale delle operazioni.

22. Condizioni differenziali che caratterizzano le molteplicità dei punti succedentisi sopra rami lineari. — Le formule stabilite nel precedente paragrafo, (a cui si riferiranno le citazioni coi numeri romani I) II)....), permettono di riconoscere facilmente le condizioni perchè la f possenga una successione di punti multipli $O^r O_1^s O_2^u \dots$ ($r \geq s \geq u \dots$) sopra una parabola per l'origine O :

$$y = y'x + \frac{y''}{2} x^2 + \dots$$

Anzitutto le condizioni perchè la f passi r volte per il punto O si esprimono annullando insieme ad f i differenziali successivi $df, d^2f, \dots, d^{r-1}f$ sopra una qualsiasi retta o curva $y = \varphi(x)$ condotta per O (cfr. § 3), ossia annullando le derivate totali f_i della funzione composta $f(xy(x))$, che porgono i coefficienti dello sviluppo di questa funzione per le potenze di x .

Ora, tenute presenti le formule VI) per $i = 1$, si otterranno le condizioni richieste annullando identicamente rispetto a y_1 le $\Delta_1^h f$, per $h < r$, di guisa che si annullino insieme a $\Delta_1^h f$ anche le sue derivate successive rispetto ad y_1 . Pertanto, in base alla VII) ove si faccia $m = 0$, si avranno le $\frac{r(r+1)}{2}$ condizioni note, che trascriveremo nel seguente

⁽¹⁾ Math. Annalen, Bd. 8, pag. 415, (1874). TARDY « Giornale di Mat. » (1864), ebbe già a dare una formula pel calcolo delle derivate suddette.

equazioni nei coefficienti di f . Il sistema i) esprime che (per $x = y = 0, y_1 = y', \dots, y_{i-1} = y^{(i-1)}$) la $y^{(i)} = y_i$ è:

1°) radice multipla d'ordine r_i per la derivata

$$f_h = \Delta_i^h f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} y_i \right)^h f,$$

dove

$$h = r + r_1 + \dots + r_{i-1};$$

2°) radice multipla d'ordine $r_i - 1$ per la

$$f_{h+1} = \Delta_i^{h+1} f;$$

.....

r_i °) e radice semplice (almeno) per la

$$f_k = \Delta_i^k f,$$

$$k = r + r_1 + \dots + r_i - 1.$$

È appena necessario avvertire che la espressione qui scritta per la derivata f_h vale in quanto sono soddisfatti i sistemi di equazioni 1), 2), ..., $i - 1$), similmente l'espressione di f_{h+1} quando si aggiungano le equazioni della prima linea appartenenti al sistema i), e così di seguito.

Quanto all'indipendenza delle condizioni che caratterizzano i punti (semplici o) multipli successivi di una curva f , è manifesto che si hanno condizioni indipendenti per una curva f d'ordine abbastanza elevato, giacchè ogni nuova condizione viene a contenere qualche coefficiente di f che non figura nelle precedenti.

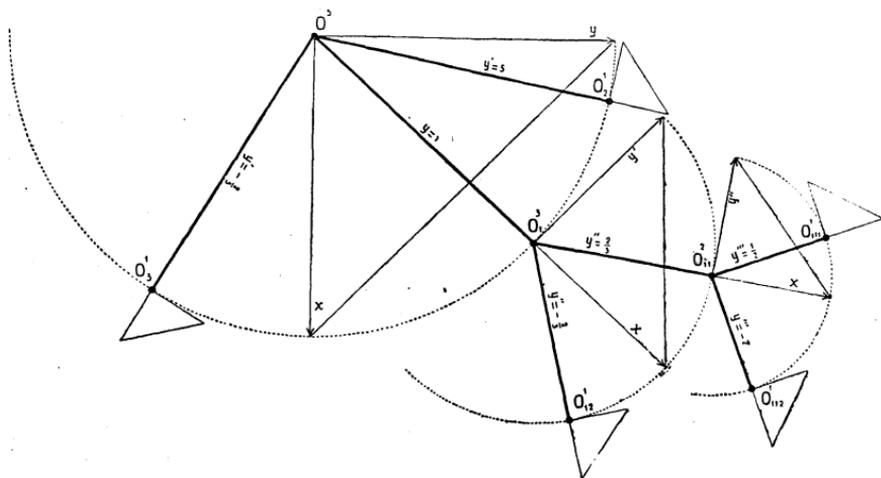
Osservazione. Le condizioni 1), 2), 3), ..., che caratterizzano i punti successivi O'' , O_1'' , O_2'' , ecc., sono state da noi scritte in quadri triangolari, e perciò ciascun gruppo di esse può dirsi un « triangolo di condizioni ». Pongasi che ciascuna condizione venga figurata da un segmento di lunghezza unitaria, di guisa che la prima linea orizzontale del gruppo corrispondente ad un punto di molteplicità p risulti di lunghezza p ; pongasi ancora che le nostre successive orizzontali distino fra loro di una lunghezza unitaria, allora l'intero gruppo di condizioni di cui si tratta verrà contenuto in un triangolo rettangolo isoscele di cateti p .

Vale la pena di osservare (specialmente in vista della estensione interessante che si avrà nel caso di punti succe-

dentisi sopra rami non lineari) che, *una disposizione opportuna dei triangoli di condizione* relativi ai punti semplici o multipli di f dà origine all'*albero delle singolarità* definito nel § 9, che in questo caso corrisponde soltanto a un gruppo di rami lineari.

Il diagramma ha il suo massimo valore espressivo nel caso, a cui vogliamo riferirci, in cui i rami costituenti la singolarità di f siano tutti reali; si ottiene allora, per così dire, una visione microscopica della curva, dove i punti infinitamente vicini appaiono come punti propri distinti: nel caso di rami immaginari si può usare ancora la stessa rappresentazione come schema, lasciando cadere il rapporto di posizione dei punti successivi segnati nel diagramma coi valori della y' , y'', ma segnando tuttavia punti distinti in corrispondenza a rami distinti.

Si segni nel piano il triangolo relativo al punto r -plo O , designando appunto con O il vertice di questo. Si figurino poi i punti O_1, O_2, vicini ad O nell'intorno del prim'ordine, segnandoli sopra il semicerchio, di centro O e di raggio r , che si trova al disotto della linea formante il cateto orizzontale del detto triangolo: la posizione di OO_1, OO_2 può determinarsi dal valore della rispettiva derivata y' . Ora, prendendo come vertice O_1 , si costruirà il corrispondente triangolo di condizioni assumendo il suo cateto-colonna nel prolungamento di OO_1 , e l'altro cateto orientato come per il primo triangolo di vertice O (sicchè la rotazione del cateto-colonna al cateto-linea valga 90 gradi e non 270). Analogamente si procederà per O_2, e così per i punti successivi a questi. La costruzione viene illustrata dall'annessa figura, e qui appare



l'albero della singolarità formato dalle poligonali che sono definite dai vertici degli angoli retti dei nostri triangoli; l'ipotesi che i rami della curva f siano lineari porta che tutte queste poligonali siano ad angoli ottusi e non retti.

Importa osservare che:

Le condizioni 2), 3), si possono interpretare come condizioni limiti relative al passaggio di f per punti multipli propri, O_1^s, O_2^u, \dots che si avvicinano al punto r -plo O ($r \geq s \geq u, \dots$), quando il punto O_1 si avvicini ad O nella direzione y' , e poi O_2 si avvicini pure ad O sopra la parabola $y = y'x + \frac{y''}{2}x^2$, e così di seguito.

Seriviamo le condizioni 1) in relazione al punto $(h, y'h)$; lo sviluppo della funzione $f(h, y'h)$ per le potenze di h è

$$f = \sum \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{dx^i} h^i,$$

e, poichè O è r -plo,

$$f = \frac{1}{r!} f_r h^r + \frac{1}{(r+1)!} f_{r+1} h^{r+1} + \dots$$

Ora la condizione $f(h, y'h) = 0$ equivale, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, alla $f_r(00y') = 0$, e così la condizione

$\frac{\partial}{\partial y} f(h, y'h) = 0$ equivale a $\left(\frac{\partial f_r}{\partial y_1} \right)_{y_1=y'}$ = 0 perchè

$$\frac{\partial f(h, y_1 h)}{\partial y_1} = h \frac{\partial f}{\partial y},$$

e così di seguito. Si vede pertanto che le condizioni scritte nella prima linea del quadro 1), quando siano applicate al punto $(h, y'h)$ divengono — a meno di infinitesimi d'ordine superiore — le condizioni scritte nella prima linea del quadro 2). Si può procedere oltre nella identificazione dei due quadri, osservando che

$$f_1(h, y'h) = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=h} = \frac{1}{(r-1)!} f_r h^{r-1} + \left(\frac{1}{r!} \right) f_{r+1} h^r + \dots,$$

sicchè, tenuto conto della $f_r = 0$, la condizione $f_1(h, y'h) = 0$ si traduce al limite nella $f_{r+1} = 0$; e lo stesso si dica per le derivate di f_1 rispetto ad y , onde la seconda linea del

quadro 1), riferita al punto $(h, y'h)$, fornisce al limite la seconda linea del quadro 2). E così di seguito.

In modo analogo, ove si suppongano verificate le equazioni 1) e 2), si trova che le 3) provengono dalle condizioni 1) relative ad un punto $(h, y'h + \frac{y''}{2} h^2)$ che si avvicini ad O secondo la parabola $y = y'x + \frac{y''}{2} x^2$, tangente alla retta OO_1 , deducendosi come limite da queste per $h = 0$. Infatti — tenuto conto che O_1 è s-plo per f , (in forza delle condizioni 2) — lo sviluppo della funzione $f = f(h, y'h + \frac{y''}{2} h^2)$, comincia col termine in h^{r+s} :

$$f = \frac{1}{(r+s)!} f_{r+s} h^{r+s} + \frac{1}{(r+s+1)!} f_{r+s+1} h^{r+s+1} + \dots$$

Ora la condizione $f(h, y'h + \frac{y''}{2} h^2) = 0$, equivale, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, alla $f_{r+s}(00y'y'') = 0$, e così la condizione $\frac{\partial}{\partial y} f(h, y'h + \frac{y''}{2} h^2) = 0$ equivale alla $(\frac{\partial}{\partial y_2} f_{r+s})_{y_2=y''} = 0$, perchè

$$\frac{\partial}{\partial y_2} f(h, y'h + \frac{y_2}{2} h^2) = \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} f.$$

E dopo ciò è chiaro come si prosegua la dimostrazione del teorema.

Osservazione. È interessante notare che il teorema dimostrato porge una nuova via per dedurre le condizioni differenziali che caratterizzano i punti multipli infinitamente vicini su rami lineari, giacchè la definizione geometrica di codesti punti si può dedurre come limite dalla condizione imposta ad f di possedere dei punti multipli propri, che si avvicinano successivamente sopra parabole per OO_1O_2, \dots .

23. Derivate delle funzioni $f\{x(t), y(t)\}$: formule fondamentali per le condizioni differenziali che caratterizzano le molteplicità dei punti appartenenti a rami superlineari. — Abbiamo detto che, anche nel caso di punti succedentisi su rami non lineari, le condizioni perchè una curva f possegga dati punti multipli infinitamente vicini, si lasciano esprimere

come condizioni differenziali. Per riconoscere la forma di tali condizioni, occorre riprendere e proseguire gli sviluppi fatti nel caso dei rami lineari.

Importa anzitutto scrivere le espressioni generali delle derivate della funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t));$$

dove — in relazione al teorema di PUISEUX — converrà poi prendere

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\nu!} t^\nu \\ y = at^\nu + bt^{\nu+\nu'} + \dots \end{cases}$$

Porremo

$$\frac{d^m F}{dt^m} = F_m,$$

$$\frac{d^i x}{dt^i} = X_i, \quad \frac{d^i y}{dt^i} = Y_i$$

$$(X_0 = x, \quad Y_0 = y);$$

il carattere adottato per la designazione delle derivate di x e y rispetto a t , vale ad evitare confusioni, quando si debbano poi confrontare le Y_i con le y_i , derivate rispetto ad x .

Procederemo parallelamente a quanto si è fatto nel § 21, introducendo un simbolo operatorio che è l'estensione del Δ_{m+1} ivi considerato:

$$D_{m+1} = \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial}{\partial y} + X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial Y_1} + \dots + X_{m+1} \frac{\partial}{\partial X_m} + Y_{m+1} \frac{\partial}{\partial Y_m} \right);$$

avremo quindi

$$I) \quad \begin{cases} F_m = D_m^m f \\ D_m^i f(xy) = D_i^i f(xy) \quad \text{per } i < m. \end{cases}$$

Per il calcolo effettivo delle F_m , e per le deduzioni che si hanno in vista, occorre sviluppare la potenza n -ma della operazione D_m applicata ad f ($n \geq m$).

A tale scopo, come nel § 21, confronteremo il nostro sviluppo con quello della potenza di un polinomio, tenendo conto che i simboli operatori, figuranti qui come addendi, danno luogo a prodotti per cui non vale la legge commutativa, ma pure dotati di una *quasi-permutabilità*.

La formula fondamentale III (pag. 462) da cui nel § 21 veniva dedotta la permutabilità degli operatori Δ e ∂ a meno di un coefficiente numerico, si estende qui, dove si ponga

$$\delta_i = \left(X_{i+1} \frac{\partial}{\partial X_i} + Y_{i+1} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right),$$

e quindi

$$D_{m+1} = (\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_m).$$

Avremo:

$$\text{II) } \delta_i D_m^n f = \binom{n}{i} D_m^{n-i} \left(X_{i+1} \frac{\partial}{\partial x} + Y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \binom{n}{i} D_m^{n-i} \frac{\partial}{\partial x} f \cdot X_{i+1} + \binom{n}{i} D_m^{n-i} \frac{\partial}{\partial y} f \cdot Y_{i+1};$$

bastando applicare la formula III) del detto paragrafo ai due addendi dell'operatore δ_i .

Ciò posto possiamo scrivere lo sviluppo polinomiale di $D_{m+1}^n f$ per le potenze di D_i ($i > 0$) nella forma analoga a quella del $\Delta_{m+1}^n f$ che s'incontra a pag. 466, giacchè l'analogia si traduce qui in un vero principio di trasporto logico; si avrà:

$$D_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! h_i! h_{i+1}! \dots h_m!} \left(\frac{\delta_m}{m+1} \right)^{h_m} \dots \left(\frac{\delta_{i+1}}{i+2} \right)^{h_{i+1}} \left(\frac{\delta_i}{i+1} \right)^{h_i} D_i f,$$

dove

$$h + h_i + \dots + h_m = n,$$

e dove riescono nulli, e quindi spariscono, i termini per cui non sia

$$h \geq h_i \geq h_{i+1} \dots \geq h_m.$$

Dalla formula scritta sopra si dedurrà lo sviluppo del $D_{m+1}^n f$, eseguendo la moltiplicazione del δ_i per δ_{i+1} , e quindi per il δ_{i+2} , ecc.; perciò osserviamo che

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} \delta_i^{h_i} &= \left(X_{i+2} \frac{\partial}{\partial X_{i+1}} + Y_{i+2} \frac{\partial}{\partial Y_{i+1}} \right)^{h_{i+1}} \left(X_{i+1} \frac{\partial}{\partial X_i} + Y_{i+1} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{h_i} = \\ &= \frac{h_i!}{(h_i - h_{i+1})!} \left(X_{i+2} \frac{\partial}{\partial X_i} + Y_{i+2} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{h_{i+1}} \left(X_{i+1} \frac{\partial}{\partial X_i} + Y_{i+1} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{h_i - h_{i+1}}, \end{aligned}$$

come si verifica eseguendo successivamente h_{i+1} volte l'operazione δ_{i+1} .

Or dunque, posto

$$k_{i+1} = h_i - h_{i+1}, \quad k_{i+2} = h_{i+1} - h_{i+2}, \dots, \quad k_{m+1} = h_m,$$

dedurremo:

$$\text{III) } D_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! k_{i+1}! \dots k_{m+1}!} (i!)^{h_i} \left(\frac{X_{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{Y_{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{k_{m+1}} \dots$$

$$\dots \left(\frac{X_{i+2}}{(i+2)!} \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{Y_{i+1}}{(i+2)!} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{k_{i+2}} \left(\frac{X_{i+1}}{(i+1)!} \frac{\partial}{\partial X_i} + \frac{Y_{i+1}}{(i+1)!} \frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^{k_{i+1}} D_i^h f,$$

dove

$$h_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1},$$

e gli esponenti soddisfano alla relazione fondamentale:

$$h + k_{i+1} + 2k_{i+2} + \dots + (m+1-i)k_{m+1} = n.$$

La formula III) vale ad esprimere il $D_{m+1}^n f$ come un polinomio ordinato rispetto alle variabili X_{i+1}, \dots, X_{m+1} e Y_{i+1}, \dots, Y_{m+1} , dove figurano come coefficienti le derivate, pure e miste, dei $D_i^h f$ rispetto ad X_i e Y_i : per $x = t$ essa si riduce alla VI) del § 21.

La formula indicata vale per

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

mentre per $i = m+1$ si riduce ad una identità; in particolare per $n = m+1$ essa porge le derivate F_{m+1} , di cui appunto veniva richiesto il calcolo.

Nelle applicazioni che abbiamo in vista la funzione $x(t)$ avrà la forma particolare

$$x = \frac{1}{\nu!} t^\nu,$$

mentre y sarà una serie generale che s'inizia col termine in t^ν :

$$y = \frac{Y_\nu}{\nu!} t^\nu + \frac{Y_{\nu+1}}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} + \dots$$

In questo caso l'espressione del $D_{m+1}^n f$ si semplifica.

Infatti abbiamo

$$X_{\nu+1} = X_{\nu+2} = \dots = 0,$$

quindi, per $i \geq \nu$:

$$\text{IV) } D_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! k_{i+1}! \dots k_{m+1}!} (i!)^k \left(\frac{\partial}{\partial Y_i} \right)^k D_i^h f \cdot \left(\frac{Y_{i+1}}{(i+1)!} \right)^{k_{i+1}} \dots \left(\frac{Y_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}},$$

dove

$$k = k_{i+1} + k_{i+2} + \dots + k_{m+1},$$

$$n = h + k_{i+1} + 2k_{i+2} + \dots + (m + 1 - i) k_{m+1}.$$

La IV) esprime il $D_{m+1}^n f$ calcolato sopra il ramo d'ordine ν ($\nu \leq i$)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\nu!} t^\nu \\ y = \frac{Y_\nu}{\nu!} t^\nu + \frac{Y_{\nu+1}}{(\nu+1)!} t^{\nu+1} + \dots \end{array} \right.$$

Aggiungasi che, per $t=0$, l'espressione delle $D_\nu^n f$, si semplifica avendosi

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{\nu-1} = Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{\nu-1} = 0.$$

Infatti, sviluppando $D_\nu^n f$ per $D_1 f$ con la formula III) ove $i=1$, $m+1=\nu$, viene

$$D_\nu^n f = \sum \frac{n!}{h! k_\nu!} \left(\frac{X_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{Y_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^{k_\nu} D_1^h f,$$

dove

$$h + (\nu - 1)k_\nu = n.$$

Ma (oltrechè per $k_\nu > h$) i termini dello sviluppo precedente spariscono per $k_\nu < h$, essendo $X_1 = Y_1 = 0$, giacchè

$$D_1^h f = \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^h f$$

è una forma di grado h nelle X_1, Y_1 . Invece per $k_\nu = h$ si ottiene

$$\left(\frac{X_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{Y_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^h \left(X_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^h f = h! \left(\frac{X_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{Y_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial y} \right)^h f.$$

In conclusione avremo *sul nostro ramo d'ordine ν e nell'origine $t=0$* , $D_\nu^n f = 0$ se n non è multiplo di ν , e altrimenti

V)
$$D_\nu^n f = \frac{n!}{h!} \left(\frac{X_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{Y_\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial y} \right)^h f$$

con

$$h = \frac{n}{\nu}.$$

Tenuto conto che, nel punto $t = 0$,

$$X_v = 1, \quad Y_v = \frac{dy}{dx} = y_1,$$

e, richiamando la notazione del § 21:

$$\Delta_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y},$$

la formula V) si può anche scrivere

$$D_v^{ky} f = \frac{h^v!}{h!} \left(\frac{\Delta_1}{v!} \right)^h f \quad (t = 0).$$

Più in generale avremo che:

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y_v} \right)^k D_v^{ky} f = \frac{h^v!}{h!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \left(\frac{\Delta_1}{v!} \right)^h f \quad (t = 0),$$

formula che per $k = 0$ si riduce alla precedente. La giustificazione di questa si ha osservando che nel calcolo di $D_v^{ky} f$ i parametri che si sono particolarizzati per $t = 0$, sono diversi dalla variabile di derivazione.

Ponendo l'espressione di queste derivate nello sviluppo IV), ove si faccia $i = v$, si trova sul nostro ramo per $t = 0$:

$$\text{VII) } D_{m+1}^n f = \sum \frac{n!(v!)^{k-h}}{h! k_{v+1}! \dots k_{m+1}!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \Delta_1^h f \cdot \left(\frac{Y_{v+1}}{(v+1)!} \right)^{k_{v+1}} \dots \left(\frac{Y_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}}$$

dove

$$k = k_{v+1} + k_{v+2} + \dots + k_{m+1}$$

e

$$n = v h + k_{v+1} + 2k_{v+2} + \dots + (m+1-v)k_{m+1}.$$

La formula VII) per $v = 1$ si riduce ad un caso particolare ($i = 1$) di una formula già incontrata nel § 21 che qui riproduciamo, con lo stesso numero, per comodità di citazione:

$$\text{VI) } \Delta_{m+1}^n f = \sum \frac{n!}{h! k_2! \dots k_{m+1}!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \Delta_1^h f \cdot \left(\frac{y_2}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{y_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}}.$$

24. **Passaggio di una curva per punti satelliti e diagramma delle partizioni triangolari.** — Le formule stabilite nel precedente paragrafo, a cui in questo e nei successivi ci riferiremo colle citazioni in numeri romani I), II)...., permettono di determinare le condizioni differenziali che definiscono i punti multipli di f appartenenti a rami superlineari. Il caso propriamente elementare e caratteristico, in rapporto alle difficoltà che qui occorre superare, è il caso in cui si tratta di definire il passaggio di f per i *punti satelliti di un punto*, O_1 , appartenente all'intorno del prim'ordine del punto proprio O .

Pongasi dapprima, per semplicità, che si voglia determinare le condizioni di passaggio di f per il primo punto O_2 , satellite di O_1 , cioè per il punto successivo ad O_1 sopra il ramo di second'ordine $O^2 O_1^1 [O_2^4] O_3^4 \dots$; sia già noto che $O = (00)$ ha per f la molteplicità r , $O_1 = (00y')$ ha per f la molteplicità $s < r$, (in guisa che debbono supporsi già soddisfatte le condizioni 1) e 2) del § 22), e si designi con u la molteplicità di f in O_2 , che si tratta di caratterizzare ($1 \leq u \leq s$, $r \geq s + u$).

Per il fatto che il punto O è r -plo per f , ogni ramo del second'ordine di origine O

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} t^2 \\ y = \frac{Y_2}{2} t^2 + \frac{Y_3}{3!} t^3 + \dots, \end{array} \right.$$

deve avere con f $2r$ intersezioni riunite in O . Secondo il § 3, pag. 338, questa condizione si traduce coll'annullamento di tutte le F_m , fino all'ordine $2r$ escluso, e identicamente rispetto alle $Y_2, Y_3 \dots$; in base alla formula VII) (del precedente paragrafo) si è condotti così ad annullare identicamente i Δ_1^h fino all'ordine r , rispetto ad $y_1 (= Y_2)$ e quindi siamo riportati alle condizioni 1) del § 22, che qui giova ripetere:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} f = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f = 0 \dots \frac{\partial^{r-1}}{\partial y^{r-1}} f = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} f = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 0 \dots \frac{\partial^{r-1}}{\partial x \partial y^{r-2}} f = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} f = 0. \end{array} \right.$$

Ciò posto, se, come vogliamo ammettere, la f (che ha in O un punto r -plo) passa per i punti O_1^s e O_2^u , dovranno annullarsi sopra un qualsiasi ramo di second'ordine per OO_1O_2 , non soltanto le derivate F_m con $m < 2r$ (che sono già nulle perchè O è r -plo), bensì anche tutte le F_m fino all'ordine $2r + n$ (escluso), ove

$$n = s + u \quad (u \leq r).$$

Ma, quando tali condizioni si suppongano soddisfatte, non sarà lecito affermare che la f abbia in O_1 e O_2 rispettivamente le molteplicità s ed u , bensì soltanto che essa avrà ivi due molteplicità non crescenti la cui somma vale n , e perciò, nel caso generale, due molteplicità uguali al quoziente $\frac{n}{2}$, preso la prima volta per eccesso e la seconda per difetto.

D'altra parte, la molteplicità s che compete ad O_1 viene determinata esattamente dalle condizioni 2) del § 22, ottenute intersecando con rami lineari per OO_1 ; sottraendo dal nuovo gruppo di equazioni quelle che sono comuni alle 2) si riuscirà quindi a caratterizzare il passaggio di f per O_2^u .

Ordunque cerchiamo intanto le condizioni perchè si annullino le F_m ($m < 2r + n$) su tutti i rami di second'ordine per OO_1O_2 . Scriveremo l'equazione di un ramo siffatto ponendo $X_2 = 1$, $Y_2 = y'$, ove y' designa la coordinata della direzione O_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} t^2 \\ y = \frac{y'}{2} t^2 + \frac{Y_3}{6} t^3 + \dots; \end{array} \right.$$

così si tratterà di annullare identicamente, rispetto a Y_3, Y_4, \dots , le $F_m = D_m^m f$. Ma, tenuta presente la formula IV) per $i = 3$, basterà annullare identicamente rispetto a Y_3 i D_3^m , ancora per $m < 2r + n$. Perciò ricorriamo allo sviluppo del D_3^m dato dalla formula VII), ove $\nu = 2$.

Osserviamo che in questo caso si ha:

$$k = k_3$$

$$m = 2h + k_3,$$

e quindi:

1°) il massimo esponente h a cui viene elevato il Δ_1 (per $m < 2r + n$) è

$$h < \frac{2r + n}{2};$$

ma non si ha da tener conto dei valori $h < r$ che corrispondono a $\Delta_1^h f$ identicamente nulli, in base alle condizioni 1) imposte dal punto r -plo O ;

2°) per ogni dato h

$$k < 2r + n - 2h.$$

Risulta di qui che le condizioni richieste portano:

la $y_1 = y'$ deve essere radice multipla di $\Delta_1^r f = 0$ secondo l'ordine $n - 1$;

la y' deve essere ancora radice di $\Delta_1^{r+1} f = 0$, secondo l'ordine di molteplicità $n - 3$,

e ancora di $\Delta_1^{r+2} f = 0$ secondo l'ordine $n - 5$, e così di seguito.

Si ottiene così un quadro di equazioni ordinato a triangolo, come il quadro delle condizioni che caratterizzano il punto multiplo O , o il punto vicino O_1 , ma dove il numero delle condizioni cala di 2 alla volta anzichè di 1.

Ora il nostro quadro conterrà tante linee quante ne designa il quoziente intero per difetto $\frac{n+1}{2}$, ossia il quoziente

per eccesso $\frac{n}{2}$; da ciò si desume che O_1 avrà (almeno) la mol-

teplicità $\left[\frac{n+1}{2} \right]$. Ma se invece la molteplicità che abbiamo

attribuita ad O_1 vale $s > \left[\frac{n+1}{2} \right]$, alle condizioni per il punto s -plo O_1 , che già figurano nel quadro anzidetto, si aggiungeranno altre condizioni complementari in forza delle quali y' risulterà radice di $\Delta_1^h f$ (per $h < r + s$) con l'ordine di molteplicità $r + s - h$. Completato con tali condizioni, il nostro quadro si lascerà ora decomporre in due quadri triangolari, il primo dei quali riproduce il quadro 2) del § 22, e l'altro porge $\frac{u(u+1)}{2}$ condizioni che caratterizzano il punto u -plo O_2

identicamente, rispetto a $Y_{\nu+1}$, i $D_{\nu+1}^m f$ per $m < \nu r + n$; ma — tenuto conto dello sviluppo VII) di $D_{\nu+1}^m f$ — si deduce che le condizioni richieste portano:

la $y_1 = y'$ è radice multipla di $\Delta_1^r f = 0$ secondo l'ordine $n - 1$;

è ancora radice di $\Delta_1^{r+1} f = 0$ secondo l'ordine di molteplicità $n - 1 - \nu$,

e di $\Delta_1^{r+2} f = 0$ secondo l'ordine $n - 1 - 2\nu$, e così di seguito.

Il quadro delle condizioni ottenuto in tal guisa, permette di caratterizzare il passaggio di f per il punto multiplo O_ν^p , quando si sottraggano le condizioni esprimenti che i rami d'ordine $\nu - 1$ hanno con f $n - p$ intersezioni, supponendosi $\nu p \leq n$.

In conclusione: le condizioni relative al punto p -plo, O_ν , risultano in numero di $\frac{p(p+1)}{2}$ e, usando della precedente notazione abbreviata si scrivono:

$$\left. \begin{array}{l}
 (n-p, 0) \quad (n-p+1, 0) \dots\dots (n-2, 0) \quad (n-1, 0) \\
 (n-p-\nu+1, 1) \quad (n-p-\nu+2, 1) \dots\dots (n-1-\nu, 1) \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 (n-p\nu+2\nu-2, p-2) \quad (n-p\nu+2\nu-1, p-2) \\
 (n-p\nu+\nu-1, p-1) \quad \quad \quad (x=y=0, y_1=y')
 \end{array} \right\} \nu+1$$

Le condizioni perchè la f passi, con date molteplicità, per i punti $O_1 O_2 \dots O_\nu$, del ramo ordinario

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x = \frac{1}{\nu!} t^\nu \\
 y = \frac{y'}{\nu!} t^\nu + \frac{Y_{\nu+1}}{(\nu+1)!} t^{\nu+1}
 \end{array} \right.$$

possono essere graficamente rappresentate mediante un *diagramma*.

Segnamo sopra un foglio di carta quadrellata due assi cartesiani ortogonali: sull'asse orizzontale distendiamo il parametro k , e sull'asse verticale il parametro l , assumendo come senso positivo di l il senso dall'alto al basso. Ciò posto cia-

scema delle condizioni

$$(k, l) = \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^{r+l} f = 0$$

verrà rappresentata dal punto di coordinate k e l , punto che cadrà nel vertice di uno dei quadrelli della nostra carta quadrellata.

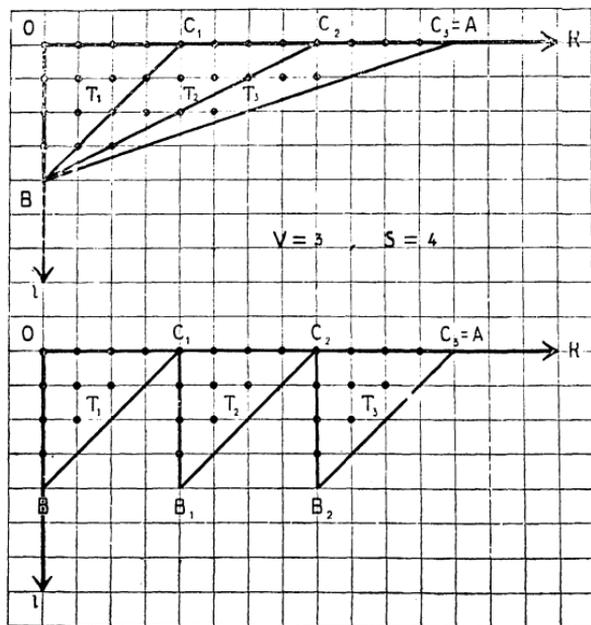
Ora le condizioni (k, l) che esprimono l'annullamento identico, rispetto a Y_{v+1} , dei $D_{v+1}^m f$ per $vr \leq m < vr + n$, dipendono dalla disuguaglianza

$$vr + n > vh + k$$

(cfr. formula VII)), la quale — posto $h = r + l$ ($k \geq 0, l \geq 0$) — porta

$$k < n - lv;$$

pertanto le suddette condizioni sono rappresentate dai punti — vertici dei quadrelli — che cadono nel triangolo rettangolo T costituito dai due assi k e l e dalla retta $k = n - lv$, esclusi i punti appartenenti all'*ipotenusa*, e compresi invece quelli appartenenti ai cateti, purchè fuori dei vertici degli angoli acuti.



Vogliamo ora vedere come la nostra rappresentazione grafica metta in luce le condizioni relative al passaggio di f per i punti successivi O_1, O_2, \dots, O_v ; cominciamo pertanto col supporre n multiplo di v , caso questo che designeremo come *caso normale*. Sia dunque $n = \rho v$; dividiamo il cateto OA del triangolo $T = OAB$ in v parti, ciascuna di

lunghezza ρ , (vedi figura in cui $v = 3, \rho = 4$) e uniamo i punti di divisione C_1, C_2, \dots al punto B . Il triangolo T resta così diviso in v triangoli: T_1, T_2, T_3, \dots ; considerando i punti di BC_1

come appartenenti a T_2 , i punti di BC_2 come appartenenti a T_3 ,...., i triangoli T_1, T_2, T_3 ,.... vengono a contenere ciascuno $\frac{\rho(\rho+1)}{2}$ punti (kl) , e precisamente i punti rappresentativi delle condizioni che esprimono essere O_1, O_2, \dots, O_v multipli secondo ρ per la curva f .

Se vogliamo che le condizioni relative ai punti O_2, O_3, \dots figurino in modo simile a quelle relative ad O_1 , converrà *rettificare* i triangoli ottusangoli $T_2 = C_1C_2B, T_3 = C_2C_3B$,...., conservandone le basi C_1C_2, C_2C_3, \dots , e le relative altezze come è indicato nella figura; con ciò ogni triangolo mantiene fisso il numero dei suoi punti, restando ferma la convenzione che i punti della ipotenusa devon esser considerati come non appartenenti al triangolo.

Esaurito così l'esame del caso normale, passiamo al caso più generale in cui si tratta di rappresentare le condizioni affinchè la curva f passi per i punti O_1, O_2, \dots, O_v , con date molteplicità

$$u, v, \dots, p, \quad \text{dove} \quad u \geq v \geq \dots \geq p.$$

(Cfr. la fig.^a della pag. seguente in cui $v=3, u=11, v=8, p=6$).

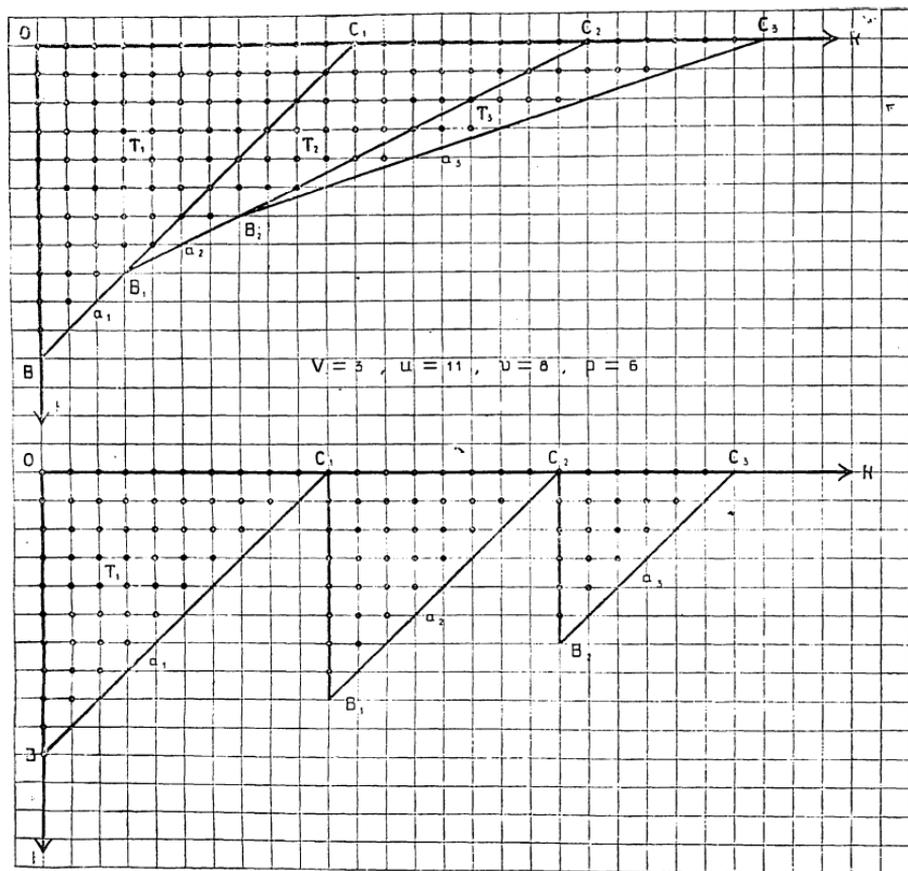
Le condizioni (k, l) relative al punto u -plo O_1 appaiono date dai punti (vertici di quadrelli) interni al triangolo rettangolo T_1 determinati dagli assi k e l , e dalla retta $a_1 = \frac{k}{u} + \frac{l}{v} - 1 = 0$, che stacca sugli assi due segmenti di lunghezza u ; le condizioni relative al punto v -plo O_2 vengono invece espresse dai punti interni al triangolo ottusangolo T_2 determinato dall'asse k , dalla retta a_1 , e dalla retta $a_2 = \frac{k}{u+v} + \frac{l}{\frac{1}{2}(u+v)} - 1 = 0$,

che stacca sull'asse k un segmento di lunghezza $u+v$, ecc.; infine le condizioni relative al punto p -plo, O_v , vengono espresse dai punti interni al triangolo ottusangolo T_v determinato dall'asse k , dalla retta a_{v-1} e dalla retta

$$a_v = \frac{k}{u+v+\dots+p} + \frac{l}{\frac{1}{v}(u+v+\dots+p)} - 1 = 0,$$

che stacca sull'asse k un segmento di lunghezza $u+v+\dots+p$: i punti appartenenti alle rette a_i devon essere considerati

non appartenenti al triangolo T_i , ma solo al triangolo T_{i+1} . Si osservi che le *rette separatrici* a_i risultano parallele alle rette BC_i che figurano nel diagramma del caso normale.



Adunque le condizioni di passaggio di una curva f , con date molteplicità, per i punti $O_1 O_2 \dots O_v$, appaiono rappresentate dai punti interni a un *quasi-triangolo* rettangolo, cioè a un poligono concavo delimitato da due lati ad angolo retto e da una poligonale concava i cui punti sono considerati non appartenenti al poligono; i singoli lati della poligonale fanno parte di rette separatrici a_i , di inclinazione $\frac{dk}{dl} = i$, che spezzano il poligono in v triangoli T_1, T_2, \dots, T_v ; il triangolo T_1 contiene gli $\frac{u(u+1)}{2}$ punti che esprimono che O_1 è u -plo; il triangolo T_2 contiene gli analoghi $\frac{v(v+1)}{2}$ punti, ecc.

Anche qui, come per il caso normale, è utile far subire al diagramma il processo di rettificazione indicato dalla figura, sicchè appaiano in modo simile le condizioni relative ai successivi punti multipli: si ottengono in tal guisa ν triangoli rettangoli, aventi ciascuno i cateti di lunghezza uguale alla molteplicità del punto corrispondente.

Il procedimento svolto innanzi si estende al caso dei punti successivi appartenenti a un ramo superlineare straordinario

$$R(\nu, \nu_1) = \begin{cases} x = \frac{1}{\nu!} t^\nu \\ y = \frac{y'}{\nu!} t^\nu + \frac{Y_{\nu+\nu_1}}{(\nu+\nu_1)!} t^{\nu+\nu_1} + \dots, \end{cases}$$

dove (volendo considerare punti satelliti di O_1) $\nu_1 < \nu$, ed è lecito supporre ν e ν_1 primi fra loro.

Per esprimere che questo ramo ha n intersezioni con f , oltre le νr che cadono nel punto proprio O , saremo condotti ad annullare identicamente rispetto ad $Y_{\nu+\nu_1}$ e $D_{\nu+\nu_1}^m$, con $m < \nu r + n$, avendosi per $t = 0$:

$$Y_{\nu+1} = Y_{\nu+2} = \dots = Y_{\nu+\nu_1-1} = 0.$$

Sviluppando $D_{\nu+\nu_1}^m$ con la formula VII), ove si suppone fatto $y_1 = y'$, vengono condizioni differenziali del solito tipo

$$(k, l) = \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^{r+l} f = 0 \quad (y_1 = y').$$

Queste condizioni si distribuiranno in linee per $l = 0, 1, 2, \dots$, ed il numero delle equazioni che figurano in ciascuna di esse verranno forniti in rapporto ai limiti di variabilità per k e l .

Tolti dalla VII) i termini che spariscono per l'annullamento di $Y_{\nu+1} \dots Y_{\nu+\nu_1-1}$, avremo

$$k_{\nu+1} = k_{\nu+2} = \dots = k_{\nu+\nu_1-1} = 0,$$

$$k = k_{\nu+\nu_1},$$

$$\nu r + n > \nu k + \nu_1 k,$$

sicchè, posto

$$k = r + l, \quad (k \geq 0, \quad l \geq 0),$$

sarà

$$k < \frac{n - lv}{\nu_1}$$

e

$$l < \frac{n}{\nu}.$$

La disuguaglianza

$$k < \frac{n - lv}{\nu_1}$$

permette di riconoscere facilmente la distribuzione delle condizioni (k, l) del nostro quadro. Ricorrendo al diagramma che abbiamo illustrato precedentemente nel caso dei rami ordinari, e che il lettore potrà facilmente ricostruirsi per questo caso, si vede che le nostre condizioni (k, l) sono date dai punti (vertici di quadrelli) del triangolo rettangolo di cateti $l=0$, $k=0$ e di ipotenusa

$$k = \frac{n - lv}{\nu_1};$$

come nel caso precedente vanno esclusi i punti appartenenti all'ipotenusa (e compresi quelli dei cateti, purchè fuori dell'ipotenusa stessa).

Vogliamo ora — con l'aiuto del nostro diagramma — riconoscere partitamente le condizioni (k, l) relative ai singoli punti del ramo $R(\nu, \nu_1)$.

Anche qui cominceremo col supporre di avere le sole condizioni (k, l) esprimenti l'annullamento identico della F_m per $r \leq m < n$, e più particolarmente supporremo il caso normale in cui n sia contemporaneamente multiplo di ν e di ν_1 (per i rami ordinari in cui $\nu_1 = 1$ il caso normale era caratterizzato dall'essere n multiplo di ν).

Consideriamo adunque il triangolo rettangolo $T = OAB$ determinato dagli assi e dalla retta

$$k = \frac{n - lv}{\nu_1};$$

di questa retta scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\nu_1}{n} k + \frac{\nu}{n} l - 1 = 0,$$

che mette in evidenza i segmenti tagliati sugli assi, la cui lunghezza è

$$\frac{n}{v_1} = \rho v, \quad \frac{n}{v} = \rho v_1;$$

ρ designa un coefficiente di proporzionalità intero essendo, per ipotesi, v e v_1 primi fra loro.

Poichè $v > v_1$, dividiamo il cateto orizzontale $OA = \rho v$, per il cateto verticale $OB = \rho v_1$; essendo

$$v = h_1 v_1 + v_2,$$

segnamo sul cateto OA il punto C tale che $OC = \rho h_1 v_1$. La retta BC spezza il triangolo T in due triangoli $T_1 = OCB$ e $T_2' = CAB$.

Rettifichiamo quest'ultimo triangolo, portando B in B_1 sulla perpendicolare a CA e lasciando fissa l'altezza del triangolo relativa a CA ; e continuiamo a chiamare con $T_2' = CB_1A$ il triangolo così rettificato; i cateti di T_2' sono $CA = \rho v_2$ e $CB_1 = \rho v_1$. Poichè $v_1 > v_2$, dividiamo il cateto B_1C per il cateto CA ; essendo

$$v_1 = h_2 v_2 + v_3$$

determineremo sul cateto CB_1 un punto D tale che $CD = \rho h_2 v_2$.

La retta AD spezza il triangolo T_2' in due triangoli $T_2 = CAD$ e $T_3' = DAB_1$. Come sopra, rettifichiamo quest'ultimo triangolo portando A in A_1 sulla perpendicolare alla DB_1 , ferma restando l'altezza relativa a DB_1 , e continuiamo a chiamare con T_3' il triangolo DA_1B_1 così ottenuto. I cateti di T_3' sono $DA_1 = \rho v_2$, $DB_1 = \rho v_3$. Poichè $v_3 < v_2$, dividiamo il cateto DA_1 per il cateto DB_1 ; essendo

$$v_2 = h_3 v_3 + v_4,$$

segnamo sul cateto DA_1 il punto E tale che $DE = \rho h_3 v_3$.

La retta B_1E spezza il triangolo T_3' in due: $T_3 = DEB_1$ e $T_4' = EA_1B_1$; quest'ultimo rettificato dà un triangolo EA_1B_2 , che indicheremo ancora con T_4' , i cui cateti sono $EA_1 = \rho v_4$, $EB_2 = \rho v_3$.

Operiamo su T_4' come si era fatto su T_3' , e così via, finchè, essendo $v_5 = 1$ il massimo comun divisore dei due numeri v e v_1 primi fra loro, arriveremo a un triangolo T_5 i

cui cateti, uno multiplo dell'altro, sono di lunghezza ρh_3 e ρ . Si riconosce facilmente che il triangolo T_1 (cioè l'insieme delle condizioni (k, l) che sono figurate dai punti di tale triangolo fuori dell'ipotenusa) esprime che la f passa, con la molteplicità ρv_1 , per i primi h_1 punti del ramo $R(v, v_1)$, che sono multipli secondo v_1 per il ramo stesso; analogamente il triangolo T_2 esprime che la curva f passa, con la molteplicità ρv_2 , per i successivi h_2 punti di molteplicità v_2 del ramo, e così via.

Ora, se nel triangolo T_1 (e analogamente in T_2, \dots) vogliamo separare le condizioni relative ai singoli punti, basterà dividere il cateto maggiore in h_1 parti (uguali al cateto minore) e congiungere i punti di divisione col vertice opposto: T_1 resta diviso in h_1 triangoli che converrà rettificare (lasciando fermi i cateti posti lungo il cateto maggiore di T_1). In tal modo le nostre condizioni (k, l) vengono divise in tanti triangoli T_i di cateti ρv_i , ciascuno dei quali contiene precisamente $\frac{\rho v_i(\rho v_i + 1)}{2}$ condizioni.

Osserviamo che la rettificazione fatta dei triangoli successivamente considerati non è necessaria, e che le condizioni (k, l) possono ugualmente esser separate in triangoli (ciascuno relativo a un punto del ramo) lasciando fermi i punti (k, l) ; ed è inutile dire come si possa passare dal diagramma a triangoli rettangoli a un diagramma non rettificato, in cui vi è luogo a considerare soltanto delle rette separatrici, rette che con la rettificazione dei triangoli divengono le ipotenuse dei triangoli medesimi.

La considerazione del diagramma non rettificato, quantunque meno espressiva all'occhio, permette di passare con la massima facilità, e in modo perfettamente analogo a quello tenuto per il ramo ordinario, dal caso normale al caso generale in cui la f abbia molteplicità arbitrarie (purchè decrescenti) nei successivi punti del ramo $R(v, v_1)$.

Il diagramma relativo a questo caso si comporrà di tanti triangoli, simili rispettivamente ai corrispondenti triangoli del diagramma relativo al caso normale, le rette separatrici risultando fra loro parallele; per ciascuna coppia di triangoli il rapporto dei lati omologhi dà il rapporto delle molteplicità del punto corrispondente, e per ogni punto p -plo le condizioni appaion sempre in numero di $\frac{p(p+1)}{2}$.

Riassumendo i risultati della nostra analisi enunceremo il Teorema. *La curva f abbia in O la molteplicità r e nel punto vicino O_1 , di coordinata $y_1 = y'$, la molteplicità $s < r$, di guisa che siano soddisfatte le condizioni differenziali 1) e 2); le condizioni di passaggio della f per punti satelliti di O_1 portano che $y_1 = y'$ sia radice di $\Delta_1^r f = 0$ con un ordine di molteplicità maggiore del numero s che corrisponde alle equazioni 2), e in generale che y' sia radice di $\Delta_1^{r+l} f = 0$, per $l = 0, 1, \dots$, con un ordine di molteplicità maggiore di $s - l$. Il quadro delle condizioni relative, mediante il diagramma delle partizioni triangolari, mette in evidenza i gruppi di $\frac{p(p+1)}{2}$ condizioni che rispondono ai singoli punti p -pli.*

Quando sia data la curva f , passante per O^r , O_1^s , e si voglia riconoscere quali sono i punti satelliti di O_1 che appartengono ad f , e quale sia la relativa molteplicità, si formeranno (per $y_1 = y'$) le condizioni (k, l) che esprimono l'ordine di molteplicità della radice y' per le equazioni $\Delta_1^{r+l} f = 0$, e codeste condizioni si figureranno coi punti (kl) di un gruppo G , in una serie di linee orizzontali; si tratta di « dividere i punti (kl) nei triangoli che rispondono al passaggio di f per i diversi punti satelliti di O_1 ».

La risposta esauriente a questo problema si ottiene mediante una semplice regola di costruzione, che qui esponiamo rapidamente senza soffermarci a giustificarla. D'altronde la giustificazione scaturisce facilmente dagli sviluppi che precedono; il punto che può apparire più nuovo è uno scarto di certe condizioni non significative; il lettore potrà riconoscerne il fondamento nelle due osservazioni seguenti:

1° nel diagramma non rettificato le rette separatrici segano sugli assi segmenti positivi;

2° in questo stesso diagramma una separatrice la quale venga avvicinata all'origine con traslazione parallela, in guisa che passi per un punto di coordinate intere, non contiene alcun punto lacunare (punto di coordinate intere non appartenente a G).

Regola di costruzione. Cominciamo a determinare la molteplicità del punto O_1 : il triangolo T_1 delle relative condizioni sarà determinato quando si costruisca la retta separatrice a_1 che ne costituisce l'ipotenusa; a tale scopo basterà osservare che la separatrice a_1 è ugualmente inclinata sugli

assi k ed l , contiene almeno un *punto lacunare* (cioè un punto (kl) ($h \geq 0$, $l \geq 0$) non appartenente al gruppo G), e fra le rette siffatte è la più vicina all'origine.

Ciò posto potremo liberare il gruppo G di quei punti che appartengano eventualmente alla linea orizzontale passante per il vertice inferiore del triangolo rettangolo T_1 o a linee orizzontali più basse; imperocchè a tali punti non rispondono condizioni relative al passaggio di f per punti satelliti di O_1 .

Ora, l'insieme dei punti di G fuori di T_1 (o appartenenti all'ipotenusa di T_1) formerà un gruppo G_1 , contenuto in un quasi-triangolo ottusangolo, che rettificheremo tenendo fermo il lato dell'angolo ottuso in cui si prolunga il cateto orizzontale di T_1 ; dal gruppo G_1 , così rettificato, staccheremo il triangolo T_{11} che risponde al punto O_{11} primo punto satellite di O_1 (cioè satellite di O_1 sopra i rami del second'ordine), segnandone l'ipotenusa a_{11} : questa retta separatrice, in seguito alla rettificazione di G_1 , è divenuta ugualmente inclinata sugli assi e si costruisce come a_1 .

Sopra la a_{11} si troveranno certo dei punti lacunari non appartenenti a G_1 ; designamo con L_1 il punto lacunare più prossimo all'asse orizzontale k , e con L_2 il punto lacunare più basso, cioè più prossimo all'asse l (i due punti L_1 e L_2 potranno eventualmente coincidere). Mandiamo per L_1 una orizzontale e per L_2 una verticale; i punti fuori di T_{11} che si trovano al disotto della prima e contemporaneamente a destra della seconda (oppure sopra una di queste due rette) non rispondono a possibili condizioni di passaggio di f per punti satelliti di O_1 , ed è lecito quindi liberarne il gruppo G_1 . Allora i punti di G_1 , fuori di T_1 , resteranno distribuiti in due gruppi G_{11} e G_{12} , il primo dei quali si trova al disopra della orizzontale condotta per L_1 , e il secondo alla sinistra della verticale per L_2 .

Ricordiamo che al punto O_{11} , satellite di O_1 nell'intorno del second'ordine, succedono due punti satelliti appartenenti all'intorno del terz'ordine, cioè: il punto O_{111} successivo ad O_{11} sopra i rami del terz'ordine ordinarii, e il punto O_{112} successivo ad O_{11} sopra i rami del terz'ordine passanti doppiamente per O_1 ; tutti i punti della f satelliti di O_1 , succedenti ad O_{11} , verranno distribuiti in due gruppi, Γ_{11} e Γ_{12} , secondochè sono annessi ad O_{111} o ad O_{112} (cfr. § 9); le condi-

zioni relative alle molteplicità di f nei punti di Γ_{11} corrisponderanno a triangoli formati con elementi di G_{11} , mentre le condizioni relative al Γ_{12} corrisponderanno a triangoli contenuti nel G_{12} .

Noi rettificheremo il quasi-triangolo ottusangolo G_{11} conservandone il lato orizzontale, ed invece rettificheremo G_{12} conservando il lato verticale; da ciascuno di questi staccheremo quindi un triangolo che corrisponderà rispettivamente al passaggio di f per O_{111} e per O_{112} : i triangoli così ottenuti potranno designarsi rispettivamente con T_{11} e T_{12} .

È chiaro ormai come sia da proseguire il nostro procedimento, e cioè come possano determinarsi i due triangoli T_{111} e T_{112} che eventualmente rappresentano le condizioni di passaggio di f per i due punti satelliti successivi a O_{111} , e similment i triangoli T_{121} e T_{122} che corrispondono all'eventuale passaggio di f per i due punti satelliti successivi ad O_{112} , ecc.

Vale la pena di osservare che, designando con O_1 il vertice dell'angolo retto del triangolo T , con O_{11} quello di T_{11} , con O_{111} quello di T_{111} con O_{112} quello di T_{112} , e così di seguito, la poligonale determinata dai vertici successivi vale a figurare lo schema grafico dei rami, o dei gruppi di rami, di f , ed anche a mostrarne la separazione, quando questa abbia luogo entro il gruppo satellite di O_1 . Di più la lunghezza dei tratti successivi di codesta poligonale risponde precisamente alla convenzione adottata nel § 9, onde si può enunciare la conclusione che: *costruendo il diagramma delle partizioni triangolari, che rappresenta le condizioni di passaggio di f per i punti satelliti di O_1 , si vede nascere l'albero della singolarità.*

Giova avvertire che non tutti i rami di f passeranno per i punti satelliti estremi delle linee poligonali ad angoli retti che si ricavano dal nostro diagramma; vi sono punti liberi, successivi sopra rami di f ad un punto O_i , non solo quando al triangolo rettangolo T_i , di vertice O_i , non fanno seguito altri triangoli a destra od in basso, ma anche quando la somma dei cateti dei due eventuali triangoli T_{i1} e T_{i2} , succedenti a T_i , resti inferiore al cateto di T , poichè allora la somma delle molteplicità di O_{i1} e O_{i2} è inferiore a quella di O_i .

Nella trattazione che precede ci siamo limitati al caso in cui occorre determinare le molteplicità di passaggio della

curva f per i punti satelliti del punto O_1 , vicino al punto multiplo O ; ma questo caso abbiám detto di voler considerare come caso elementare e caratteristico. Che questo valore effettivamente spetti al caso esaminato, risulta da semplici considerazioni, a cui rapidamente accenniamo.

Anzitutto l'analisi fatta si estende subito al caso in cui si tratti del passaggio di f per punti satelliti d'un punto O_i , appartenente all'intorno i -mo di O sopra un ramo lineare, dove sia $i > 1$ anzichè, come innanzi, $i = 1$. In questo caso, al posto delle potenze del $\Delta_1 f$, si avranno a considerare quelle del $\Delta_i f$, per quei valori $y_1 = y', \dots, y_i = y^{(i)}$ che costituiscono le coordinate di O_i ; e pel resto tutta la discussione procede in modo perfettamente analogo. Si noterà in particolare il caso in cui $y'' = \dots, y^{(i)} = 0$, che corrisponde ai rami

$$y = y'x + ax^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}}$$

con

$$\nu' > \nu, \quad \nu' = i\nu + \nu_1, \quad \nu_1 < \nu.$$

In questo caso si ha

$$\Delta_i^n f = \Delta_1^n f,$$

e perciò si ricade esattamente nel quadro-diagramma delle condizioni precedenti, relative ai punti satelliti di $O_1 = y'$, colla sola differenza che si hanno ora a considerare le partizioni triangolari al di sotto del triangolo corrispondente ad O_1 , e — soltanto dopo esser giunti al triangolo relativo ad $O_i (\equiv y^{(i)} = 0)$ — partizioni, corrispondenti a punti satelliti di O_i , che si proseguono da sinistra a destra.

Ora occorre accennare in breve alle condizioni di passaggio di f per punti successivi di un qualunque ramo $R(\nu, \nu')$; e — per semplicità di discorso — ci riferiremo ad un ramo $R(\nu, \nu_1)$ in cui $\nu_1 < \nu$. Basterà osservare quanto segue.

Per effetto del passaggio di f per O^r, O_1^s e per i punti satelliti di O_1 , risultano, come abbiám visto, identicamente nulli rispetto a $Y_{\nu+\nu_1} \dots$ (e per $Y_\nu = y'$) i $D_m^n f$ per $m < n$, designando n la molteplicità d'intersezione di f col ramo $R(\nu, \nu_1)$. Se la f deve passare, con una certa molteplicità $\nu \geq 1$, per il primo punto libero, O_p , che s'incontra sopra un

particolare ramo

$$R(\nu, \nu_1) = \begin{cases} x = \frac{t^\nu}{\nu!} \\ y = \frac{y'}{\nu!} t^\nu + \frac{Y^{(\nu+\nu_1)}}{(\nu+\nu_1)!} t^{\nu+\nu_1} + \frac{Y_{\nu+\nu_1+1}}{(\nu+\nu_1+1)!} t^{\nu+\nu_1+1} \dots, \end{cases}$$

le condizioni di passaggio importano l'annullamento identico dei $D_m^n f$ rispetto ad $Y_{\nu+\nu_1+1} \dots$ e per $Y_{\nu+\nu_1} = Y^{(\nu+\nu_1)}$, quando $m < n + \nu$. Le nuove condizioni si ottengono (per $m \geq n$) sviluppando i D_m^n mediante la formula IV) ove si ponga $i = \nu + \nu_1 + 1$, e annullando quindi identicamente rispetto alla $Y_{\nu+\nu_1+1}$ i $D_{\nu+\nu_1+1}^m f$; ma, sviluppando di nuovo i $D_{\nu+\nu_1+1}^m f$ mediante la formula IV) per $i = \nu + \nu_1$, saremo tratti ad annullare semplicemente i coefficienti di questo sviluppo, e così a scrivere le *condizioni di passaggio di f per il punto O_p* sotto la forma seguente:

$$p) \left\{ \begin{aligned} D_{\nu+\nu_1}^n f = 0, & \quad \frac{\partial}{\partial Y_{\nu+\nu_1}} D_{\nu+\nu_1}^n f = 0 \dots \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial Y_{\nu+\nu_1}^{\nu-1}} D_{\nu+\nu_1}^n = 0 \\ D_{\nu+\nu_1}^{n+1} f = 0 & \dots \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial Y_{\nu+\nu_1}^{\nu-2}} D_{\nu+\nu_1}^{n+1} \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ D_{\nu+\nu_1}^{n+\nu-1} f & = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(x = y = 0, Y_\nu = y', Y_{\nu+\nu_1} = Y^{(\nu+\nu_1)}).$$

La forma di queste condizioni è perfettamente analoga a quella delle condizioni corrispondenti al passaggio di f per i punti successivi di un ramo lineare. Lo stesso si può dire in rapporto alle condizioni di passaggio di f per i punti che succedono ad O_p ; se, come si è supposto, ν e ν_1 sono primi fra loro, sicchè il ramo R diventi lineare dopo O_p , non vi è da dire nulla di nuovo.

Infatti le anzidette condizioni relative al punto O_p , e ai punti seguenti di f , si traducono nelle condizioni di passaggio per punti succedentisi su rami lineari, ove — eseguendo la sostituzione $x = t^\nu$ — si passi dalla curva $f(xy) = 0$ alla curva

$f(t'y) = \varphi(ty) = 0$; allora i D relativi ad f diventano i Δ relativi a φ .

Occorrono invece brevi parole per il caso in cui f possenga un ramo di genere $g > 1$, sul quale s'incontrino punti satelliti di O_p , o di qualcuno dei punti che gli succedono. Pongasi, per semplicità, che si abbia un ramo di genere $g = 2$, $R(\nu, \nu_1, \nu_2)$, dove ν_2 sia minore del massimo comun divisore, ϱ , di ν e ν_1 , sicchè si tratti di determinare le condizioni di passaggio di f per punti satelliti di O_p . Posto

$$\nu = \varrho^u, \quad \nu_1 = \varrho^{u_1}, \quad n = \varrho^m,$$

il punto O_p potrà definirsi come punto di coordinata $Y^{(\mu+\mu_1)}$ appartenente al ramo di genere $g = 1$, $R(\mu, \mu_1)$, e la condizione di passaggio di f per O_p^v anzichè esprimersi in rapporto al ramo $R(\nu, \nu_1, \dots)$ ove viene assunto come parametro $x = t^{\frac{1}{\nu}}$, si potrà esprimere in rapporto al ramo $R(\mu, \mu_1)$ ove viene assunto come parametro $\tau^{\frac{1}{\mu}}$; precisamente si avrà che la

$$Y_{\mu+\mu_1} = \frac{t^{\mu+\mu_1} y}{t^{\frac{\mu+\mu_1}{\mu}}} \equiv Y^{(\mu+\mu_1)}$$

sarà radice multipla di $D_{\mu+\mu_1}^m f = 0$ con un ordine di molteplicità v (almeno), e parimente sarà radice multipla di $D_{\mu+\mu_1}^{m+l} f = 0$ per $l = 0, 1, \dots, v-1$ con un ordine di molteplicità $v-l$ (almeno).

Ma, se la f deve passare per qualcuno dei punti satelliti di O_p che vengono definiti sul ramo $R(\nu, \nu_1, \nu_2)$, la discussione della formula IV), tenute presenti le relazioni aritmetiche che l'accompagnano, mostra che la $Y_{\mu+\mu_1} = Y^{(\mu+\mu_1)}$ sia radice delle $D_{\mu+\mu_1}^{m+l} f = 0$ con un ordine di molteplicità maggiore di $v-l$, e ciò per $l = 0, 1, \dots$ fino ad un numero $\leq v-1$. Tuttociò porta a ripetere esattamente la discussione fatta quando è occorso stabilire le condizioni di passaggio di f per i punti satelliti di un punto O_i appartenente a un ramo lineare o, in particolare, di O_1 . La cosa appare *a priori* evidente ove si rifletta che, passando dalla curva f alla curva φ con la sostituzione $x = \tau^{\frac{1}{\mu}}$, il ramo di genere $g = 2$ si trasforma in un ramo di genere $g' = g - 1 = 1$. L'accenno qui fatto basta a mostrare in qual senso la discussione fatta per i punti satelliti di O_1 abbia veramente un significato caratte-

ristico, potendosi ritenere equivalente a quella del caso generale: è appena necessario rilevare che, come si passa dai rami di genere 1 a quelli di genere 2, si passa anche dai rami di genere $g - 1$ a quelli di genere g .

Osservazione. Tenendo presente la costruzione dell'albero della singolarità relativa al caso di rami lineari (§ 9) e ciò che prima si è detto nei riguardi dei punti satelliti, appare ora in generale una *disposizione dei triangoli di condizioni caratterizzanti le molteplicità dei punti successivi di f che dà origine all'albero della singolarità nella sua interezza*, ove sia prolungato fino ai punti liberi e semplici della curva. Gli angoli retti che figurano nelle poligonalie rappresentative di rami superlineari, suggeriscono l'idea che un ramo superlineare tragga origine come particolarizzazione di un ramo lineare, ove qualcuna delle derivate successive $y', y'' \dots$ divenga infinita. Che questa idea trovi riscontro nella realtà, viene dimostrato dal paragrafo seguente.

25. Le condizioni di passaggio d'una curva per punti di un ramo superlineare come condizioni limiti. — Le condizioni differenziali che caratterizzano il passaggio della curva f per punti semplici o multipli di un ramo superlineare, si possono interpretare come condizioni limiti.

Consideriamo dapprima il caso in cui la f possenga punti multipli successivi, d'ordine $r, s, u, v \dots$, succedentisi sopra un ramo ordinario del second'ordine; facciamo vedere che la curva f si può considerare come limite di un'altra curva dotata di punti di uguale molteplicità, seguentisi sopra un ramo lineare. A tale scopo riprendiamo le condizioni 1), 2) e 3).... del § 22, che caratterizzano il passaggio di una curva per punti multipli $O', O_1^s, O_2^u \dots$ seguentisi sopra un ramo lineare:

$$y = y'x + \frac{y''}{2}x^2 + \dots;$$

facciamo vedere che se le equazioni 3) sono soddisfatte per $y'' = \infty$, esse si riducono alle condizioni di passaggio di f per il punto $O_2 = O_{11}$ primo satellite di O_1 , e precisamente con la stessa molteplicità u .

Ricordiamo che le dette formule 3) esprimono che $y_2 = y''$ è radice u -pla per $\Delta_2^{r+s} f = 0$, $(u - 1)$ -pla per $\Delta_2^{r+s+1} f = 0$, ecc.

Ora, sviluppando i $\Delta_2^n f$ per

$$n = r + s, \quad r + s + 1 \dots \quad r + s + u - 1,$$

mediante la formola VI) del § 22 ove $i = 1$, avremo

$$\Delta_2^n f = \Sigma C_{nk} \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^h f \cdot y_2^k;$$

C_{nk} designa qui un coefficiente numerico e $h + k = n$. Per esprimere che $y_2 = y'' = \infty$ è radice di $\Delta_2^n f = 0$, con la molteplicità l , occorre annullare i coefficienti delle l più alte potenze di y_2 che figurano effettivamente nell'equazione precedente. Ma, essendo verificate per $x = y = 0$ e $y_1 = y'$ le formole 1) e 2), a cui le 3) s'intendono subordinate, sono identicamente nulli (insieme alle loro derivate) rispetto a y_1 i $\Delta_1^n f$ per $n < r$, ed ancora sono nulli per $y_1 = y'$, il $\Delta_1^r f$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $s - 1$, e in generale $\Delta_1^{r+l} f$ insieme alle sue derivate fino all'ordine $s - l - 1$, per $l < s$. Pertanto la potenza più alta di y_2 che figura effettivamente nell'equazione $\Delta_2^{r+s} f = 0$, è y_2^s . Così annullando i coefficienti di $y_2^s, y_2^{s-1} \dots y_2^{s-u+1}$, si hanno le equazioni

$$\frac{\partial^s}{\partial y_1^s} \Delta_1^r f = 0, \quad \frac{\partial^{s-1}}{\partial y_1^{s-1}} \Delta_1^{r+1} f = 0 \dots \quad \frac{\partial^{s-u+1}}{\partial y_1^{s-u+1}} \Delta_1^{r+u-1} f = 0.$$

Analoghe relazioni si ottengono annullando i coefficienti delle più alte potenze di y_2 che compaiono effettivamente in $\Delta_2^{r+s+1} f = 0$, ecc.; si ritrovano in tal guisa le relazioni figuranti nelle colonne del quadro triangolare che caratterizza il punto $O_2^u = O_{11}^u$, satellite di O_1 .

In conclusione: le condizioni di passaggio di f per il punto O_{11} , satellite di O_1 , con una certa molteplicità u , si possono ritenere come condizioni limiti di quelle che esprimono il passaggio di f per un punto O_2 , successivo ad O_1 sopra un ramo lineare, quando la curva f vari in modo che la coordinata y'' di codesto punto divenga $y'' = \infty$.

In conseguenza di tali condizioni la f conterrà in generale u rami del second'ordine passanti propriamente per O_{11} , e, quando ci si avvicina ad $x = 0$ sopra uno di questi, la $y''(x)$ diverrà infinita d'ordine $\frac{1}{2}$; infatti per uno di codesti rami

si avrà la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} t^2 \\ y = \frac{y'}{2} t^2 + \frac{Y'''}{3!} t^3 + \dots, \end{cases}$$

ossia

$$y = y'x + \frac{1}{3} Y''' x^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

sicchè, derivando,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = y_{(0)}' + 2^{-\frac{1}{2}} Y''' \cdot x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2^{-\frac{3}{2}} Y''' \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = -2^{-\frac{5}{2}} Y''' \cdot x^{-\frac{3}{2}} + \dots$$

Si può aggiungere che

$$2^{-\frac{3}{2}} Y''' = \lim_{x=0} \left(y_{(x)}'' \cdot x^{\frac{1}{2}} \right);$$

in parole: lo Y''' , a meno del coefficiente numerico $2^{-\frac{3}{2}}$, esprime il coefficiente asintotico della derivata infinita y'' .

Così questo coefficiente asintotico si può assumere come coordinata del primo punto libero \bar{O}_3 che succede sul ramo anzidetto di f al punto O_{11} , satellite di O_1 : le condizioni perchè la f passi per \bar{O}_3 con una certa molteplicità v , sono condizioni relative a codesto coefficiente asintotico.

Giova anzi riconoscere che tali condizioni si ottengono come condizioni limiti di quelle relative al passaggio di f per il punto O_3 , successivo ad O_2 sopra un ramo lineare OO_1O_2 : il che appare chiaro sotto l'aspetto geometrico ove si tenga presente che la molteplicità di O_3 può essere definita come molteplicità di intersezione di f con curve passanti doppiamente per O e tangenti al ramo $OO_1O_2O_3$.

Si può dare una verifica analitica diretta della proprietà sopra accennata, facendo variare la curva f in dipendenza di un parametro λ in modo che, per $\lambda = 0$, il valore $y'' = \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=0}$

tenda all'infinito: le condizioni di passaggio per il punto O_3^v , le quali si esprimono dicendo che $y_3 = y'''$ è radice con un certo ordine di molteplicità per certe $\Delta_3^{v+s+u+p} = (p=0, 1 \dots v-1)$, dovranno tradursi, passando al limite per $\lambda=0$ ($y'' = \infty$), nelle analoghe condizioni caratterizzanti il passaggio di f per \bar{O}_3^v , le quali vengono espresse in rapporto alle equazioni $D_3^{2v+s+u+p} = 0$.

Per semplicità ci limiteremo a compiere l'accennata verifica trattando di una curva f che passi doppiamente per O e semplicemente per $O_1 O_2 O_3$, e — al limite — per $O_1 O_{11} \bar{O}_3$.

Or dunque scriviamo la condizione di passaggio di f per il punto O_3 : essa dice che, per $y_1 = y'$, $y_2 = y''$ e $y_3 = y'''$, viene soddisfatta l'equazione

$$\Delta_3^4 f = \sum \frac{4!}{h! k_2! k_3!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{h_1} \Delta_1^h f \left(\frac{y_2}{2!} \right)^{k_2} \left(\frac{y_3}{3!} \right)^{k_3} = 0,$$

$$h_1 = k_2 + k_3, \quad h + k_2 + 2k_3 = 4, \quad h \geq 2,$$

ossia

$$\Delta_3^4 f = 2 \frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^2 f \cdot y_3 + \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \Delta_1^2 f \cdot y_2^2 + 2 \frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^3 f \cdot y_2 + \Delta_1^4 f = 0.$$

In questa equazione il coefficiente di y_3 va a zero per $\lambda=0$, diventando il ramo superlineare; invece il coefficiente di y_2^2 si mantiene finito e diverso da zero finchè O resta doppio per f ; finalmente il coefficiente di y_2 e il termine $\Delta_1^4 f$, restano in ogni caso finiti.

Da tali osservazioni segue che y_3 diviene infinito d'ordine superiore a y_2^2 , e quindi — moltiplicando per y_2 e dividendo per y_3 — l'equazione limite in cui y_2 e y_3 si cambiano in y'' e y''' assume la forma:

$$2 \lim \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^2 f \cdot y'' \right) + \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \Delta_1^2 f \cdot \lim \frac{(y'')^3}{y'''} = 0.$$

Per calcolare il $\lim \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^2 f \cdot y'' \right)$ bisogna tener presente l'equazione a cui soddisfa $y_2 = y''$:

$$\Delta_2^3 f = \sum \frac{3!}{h! k!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^h \Delta_1^h f \cdot \left(\frac{y_2}{2} \right)^k = 0,$$

cioè

$$\Delta_2^3 f = \Delta_1^3 f + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^2 f \cdot y_2 = 0;$$

per $y'' = \infty$ si trova

$$\lim \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^2 f \cdot y'' \right) = -\frac{2}{3} \Delta_1^3 f.$$

Pertanto l'equazione limite di $\Delta_3^4 f = 0$, quando y'' diventa infinito, sarà

$$-\frac{4}{3} \Delta_1^3 f + \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \Delta_1^2 f \cdot \lim \frac{(y'')^3}{y'''} = 0.$$

Quest'equazione si riduce a quella che viene soddisfatta da $Y_3 = Y'''$:

$$D_3^6 f = \sum \frac{6! (2!)^{k-h}}{h! k!} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)^k \Delta_1^h f \cdot \left(\frac{Y_3}{6} \right)^k = 0$$

ove

$$6 = 2h + k, \quad h \geq 2,$$

cioè alla

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \Delta_1^2 f (Y''')^2 + 3 \Delta_1^3 f = 0,$$

quando si assuma

$$\lim \frac{(y'')^3}{y'''} = -\left(\frac{2}{3} \right)^3 (Y''')^2.$$

Avvertenza. Il limite di cui si tratta nella relazione precedente è

$$\lim_{\lambda=0} \frac{(y''(0, \lambda))^3}{y'''(0, \lambda)};$$

il parametro λ è un parametro contenuto comunque nei coefficienti della f , tale che per $\lambda = 0$, $y''(0, 0) = \infty$; è lecito assumere per es.

$$\lambda = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \Delta_1^2 f \quad (x = y = 0, y_1 = y').$$

Ora è interessante osservare che anche il

$$\lim_{x=0} \frac{(y''(x, 0))^3}{y'''(x, 0)},$$

calcolato sopra la curva f in cui si è già fatto $\lambda = 0$ (cioè

sul ramo del second'ordine), risulta, a meno di un fattore numerico, uguale a Y_3^2 . Si ha infatti

$$y''(x, 0) = 2^{-\frac{3}{2}} Y''' x^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y'''(x, 0) = -2^{-\frac{5}{2}} Y''' x^{-\frac{3}{2}} + \dots,$$

sicchè

$$\lim_{x=0} \frac{(y''(x, 0))^3}{y'''(x, 0)} = -\frac{1}{4} (Y''')^2.$$

Qui appare che la funzione di due variabili $\frac{(y''(x, \lambda))^3}{y'''(x, \lambda)}$ ha in (00) un punto di indeterminazione, avvicinandosi al quale, sugli assi $\lambda=0$ e $x=0$, si tende a due limiti che differiscono fra loro per il coefficiente numerico $\frac{27}{32}$.

Abbiamo dimostrato che le condizioni di passaggio di f per il punto O_{11} , satellite di O_1 , si possono ritenere come condizioni limiti di quelle relative al passaggio di f per un punto O_2 , successivo ad O_1 , quando la curva f vari in dipendenza di un parametro λ tendente a zero, per modo che la $y''(0, \lambda)$ divenga infinita; accade allora che la curva $f(xy, \lambda) = 0$ si trasformi in una $f(xy, 0) = 0$, che possiede punti semplici o multipli successivi su un ramo del second'ordine: e, come si è fatto per i primi punti O_2 e O_3 , così anche per i punti successivi si potrebbe verificare che la serie di questi si trasporta nel passaggio al limite, conservandosi invariate le rispettive molteplicità.

Affinchè i rami lineari della f passanti per i punti $OO_1O_2\dots$ si trasformino effettivamente in rami del second'ordine per $OO_1O_{11}\dots$, occorre che la $y''(x, 0)$ divenga infinita d'ordine $\frac{1}{2}$ per $x=0$, sicchè il relativo coefficiente asintotico $2^{-\frac{3}{2}} Y'''$ sia finito e diverso da zero.

Ora, facendo uguale a zero o a infinito il detto coefficiente asintotico, si otterranno le condizioni perchè la f passi (con una certa molteplicità v) per uno dei punti satelliti O_{111}, O_{112} , successivi ad O_{11} ; in tal caso la derivata $y''(x)$ diventa infinita per $x=0$ d'ordine $\frac{1}{3}$ o $\frac{2}{3}$, e il suo coefficiente asintotico porge la coordinata del primo punto libero, O_3 , che appartiene rispet-

tivamente ad un ramo di terzo ordine

$$O^3 O_1^{-1} [O_{11}^{-1} O_{111}^{-1}] O_4^{-1},$$

$$O^3 O_1^{-2} [O_{11}^{-1} O_{112}^{-1}] O_4^{-1}.$$

Per dimostrare l'asserto riprendiamo le condizioni che esprimono il passaggio di f per O_3^v : occorre che $Y_3 = Y'''$ sia radice d'ordine v per $D_3^n f = 0$, dove $n = 2r + s + u$, e contemporaneamente radice d'ordine $v - 1$ per $D_3^{n+1} f = 0$, ecc.

Sviluppiamo il $D_3^n f$ mediante la formula VII):

$$D_3^n f = \sum C_{nk} \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^n f \cdot Y_3^k$$

dove

$$n = 2h + k.$$

Qui importa fare due osservazioni fondamentali.

Anzitutto nella formula precedente bisogna prendere $h \geq r$ perchè altrimenti i $\Delta_1^n f$ sono identicamente nulli, (passaggio di f per O''); tenuto conto di ciò appare come termine di grado più alto in Y_3 quello per cui $h = r$, $k = s + u$; e importa avvertire che il coefficiente di questo termine, $\frac{\partial^{s+u}}{\partial y_1^{s+u}} \Delta_1^r f$, è la prima derivata del $\Delta_1^r f$ che non sia già nulla in forza delle condizioni di passaggio di f per O_1^s , O_{11}^u . Invece, come termine di grado più basso in Y_3 si trova quello per cui $h = r + u$ e $k = s - u$, giacchè il termine di grado inferiore ha come coefficiente la derivata d'ordine $s - u - 2$ di $\Delta_1^{r+u+1} f$, che è nulla in forza del passaggio di f per O_1^s , essendo

$$s - u - 2 + (u + 1) < s.$$

La seconda osservazione è che lo sviluppo di $D_3^n f$ (in cui $k = n - 2h$) contiene soltanto termini in Y_3 di grado pari o dispari secondo la parità di n . Pertanto, ove si divida l'equazione $D_3^n f = 0$ per Y_3^{s-u} , si trova un'equazione di grado $2u$ che contiene soltanto i termini di grado pari, cioè un'equazione di grado u in Y_3^2 .

La stessa analisi si estende all'equazioni $D_3^{n+l} f = 0$, per $l = 1, 2, \dots, v - 1$: l'equazione si riduce ad un'equazione in Y_3^2 di grado $u + l$.

Ciò posto, se si suppone che le equazioni $D_3^{n+l} f = 0$

(per $l \geq 0$) ammettano la radice $Y_3^2 = 0$, con la molteplicità $v - l$, si deducono le condizioni di passaggio di f per il punto O_{111}^v , successivo di O_{11} sopra i rami ordinari del terz'ordine

$$y = y'x + \frac{6^{\frac{1}{3}}}{4} Y_4 x^{\frac{4}{3}} + \dots$$

Similmente, ove si supponga che le equazioni precedenti ammettano la radice $Y_3^2 = \infty$, si trovano le condizioni perchè f passi con la molteplicità v per il punto O_{112} , successivo ad O_{11} sui rami del terz'ordine

$$y = y'x + \frac{6^{\frac{2}{3}}}{4 \cdot 5} Y_5 x^{\frac{5}{3}} + \dots$$

L'enunciato precedente riceve così piena giustificazione; e si vede in pari tempo come il risultato possa estendersi. Accenneremo rapidamente a questa estensione tralasciandone le giustificazioni, poichè il concetto direttivo dell'analisi appare sufficientemente chiarito dagli sviluppi precedenti.

In generale suppongasi che la f passi con una certa molteplicità per un punto O_i , satellite di O_1 , nell'intorno i -mo di O , e che passi ancora per un punto libero O_{i+1} successivo ad O_i ; il punto O_i sarà definito come ultimo punto satellite di O_1 sopra i rami $R(v, v_1)$ per esso, dove

$$\frac{v_1}{v} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2} \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{h_\sigma}}$$

$$(i = h_1 + h_2 + \dots + h_\sigma);$$

quindi al passaggio di f per O_i corrisponderà l'esistenza di uno o più rami della curva sopra cui la $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ diventa infinita d'ordine $\frac{v_1}{v}$, mentre la posizione di O_{i+1} corrisponderà al coefficiente asintotico $Y_{v_1-v_i}$ di codesta derivata infinita. Ora il passaggio di f per uno dei due punti satelliti successivi ad O_i , corrisponderà ai due valori 0 e ∞ di codesto coefficiente asintotico, l'ordine di infinito della y'' diventando

allora :

$$\frac{\pi_1}{\pi} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2} \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{h_{\sigma} + 1}},$$

oppure

$$\frac{\pi_1}{\pi} = \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2} \dots h_{\sigma-1} + \frac{1}{(h_{\sigma} - 1) + \frac{1}{2}}}.$$

Più precisamente è facile vedere che l'annullamento del coefficiente asintotico corrisponde al primo o al secondo valore di $\frac{\pi_1}{\pi}$, secondo che σ è dispari o pari.

In conclusione: *il caso in cui la curva f possenga certe molteplicità in punti satelliti del punto O_1 , si può ritenere come caso limite di quello in cui la f possiede punti successivi su rami lineari con le stesse molteplicità.* Occorrono precisamente i passaggi al limite, uno dopo l'altro, se la f possiede i punti (semplici o multipli) satelliti di O_1 ; col primo passaggio al limite si rende infinita dell'ordine $\frac{1}{2}$ la derivata $y''(x)$ per $x=0$; ulteriormente si viene a modificare questo ordine di infinito facendo, ad ogni passo, 0 o ∞ il coefficiente asintotico dell'anzidetta derivata.

Il teorema induttivamente stabilito si può anche enunciare nella forma seguente: *le singolarità con rami superlineari sono limiti di singolarità con rami lineari composte di punti con uguali molteplicità.* Una semplice dimostrazione geometrica di questo teorema si è incontrata nel § 19.

26. Osservazioni sul problema delle molteplicità effettive.

— La conoscenza delle condizioni differenziali caratterizzanti il passaggio (e le molteplicità) di f per punti infinitamente vicini ad O , illumina la distinzione fatta tra *molteplicità virtuali* e *molteplicità effettive*. Per avere le molteplicità effettive bisogna tener presente l'intero gruppo delle condizioni di passaggio imposte alla curva, così da riconoscere che il triangolo delle condizioni, che si è fatto corrispondere ad un punto $O_i^{r_i}$, non può essere ampliato in guisa che resulti la molteplicità di O_i maggiore di r_i .

Ora, quando si consideri il sistema di tutte le curve, d'un ordine abbastanza elevato, cui s'impongano certe molteplicità in un gruppo di punti infinitamente vicini, si potrà affermare che le molteplicità virtuali assegnate sono anche le molteplicità effettive per le curve generiche del sistema, ove si accerti che i vari gruppi triangolari di condizioni corrispondenti agli elementi della singolarità sono indipendenti, di guisa che nessuno di essi porti di conseguenza l'ampliamento di qualcuno degli altri. Abbiamo già dimostrato geometricamente che tale indipendenza, cioè la condizione per l'esistenza di curve con date molteplicità effettive, si esprime mediante le relazioni di prossimità; ma qui il risultato viene messo nuovamente in luce dall'analisi fatta.

Anzitutto, sia O_i un punto di molteplicità r_i appartenente ad un ramo lineare, e succedente a punti di molteplicità r, r_1, \dots, r_{i-1} ; allora $\Delta_{i+1}^n f$, per $n = r + r_1 + \dots + r_i$, contiene y_{i+1} al grado r_i , sicchè la somma delle molteplicità delle radici di $\Delta_{i+1}^n f = 0$ sarà $\leq r_i$, e precisamente r_i quando si tenga conto di una eventuale radice infinita corrispondente al passaggio di f per il primo punto satellite di O_i : questa osservazione esprime appunto la relazione di prossimità che avevamo in vista, e ne risulta la conseguenza che, per una f d'ordine abbastanza elevato, possono darsi ad arbitrio i punti multipli prossimi ad O_i , purchè le molteplicità assegnate diano una somma non superiore ad r_i .

Ciò che si è detto si estende senz'altro al caso di un punto O_i che appartenga come punto libero ad un ramo superlineare. Invece il caso dei punti satelliti esige qualche maggiore spiegazione.

Pongasi, per semplicità di discorso, che O_i appartenga al gruppo satellite di O_1 , vicino ad O nell'intorno del prim'ordine, e sia definito come ultimo punto satellite sopra un ramo $R(\nu, \nu_1)$. Le condizioni di passaggio di f per punti successivi ad O_i importano l'annullamento delle $\Delta_{\nu+\nu_1}^n f$, designando n la molteplicità di intersezione di f col ramo $R(\nu, \nu_1)$ che proviene dal passaggio per i punti successivi fino ad O_i . Ora, analogamente a quanto si è fatto nel § 25, pag. 507, per i rami del second'ordine, si riconosce che l'equazione così ottenuta, liberata da una potenza di $Y_{\nu+\nu_1}$ che vi figura come fattore, riesce un'equazione di grado p in $Y_{\nu+\nu_1}^\nu$, designando p la molteplicità del punto O_i : si deduce di qui che la somma delle

molteplicità di f nei punti prossimi ad O_i non può superare p , tenuto anche conto delle radici della anzidetta equazione che risultino zero o infinito in corrispondenza al passaggio di f per nuovi punti satelliti.

Le osservazioni fatte indicano come si ottenga una nuova dimostrazione analitica delle relazioni di prossimità; dalle quali abbiamo dedotto i principi che valgono a risolvere il problema « date in un gruppo di punti infinitamente vicini certe molteplicità virtuali, determinare le molteplicità effettive che appartengono ad una curva d'ordine abbastanza elevato ».

Codesti principi sono il principio di scorrimento e il principio di scaricamento di cui si discorre nel § 17.

Ora è importante notare che il problema può trattarsi direttamente con l'uso del diagramma delle partizioni triangolari, ricevendo così una luminosa soluzione geometrica. Ci riferiremo per semplicità al caso più interessante in cui si abbiano punti infinitamente vicini satelliti di un dato punto libero.

Pongasi, per es., che vengano assegnate le molteplicità virtuali della curva f nel gruppo dei punti satelliti di O_1 , punto infinitamente vicino al punto r -plo O , nella direzione y' . Queste molteplicità permetteranno subito di trovare gli ordini di molteplicità della radice y' per le equazioni $\Delta_1^r f = 0$, $\Delta_1^{r+1} f = 0, \dots$; i quali ordini determinano i punti elementi del nostro diagramma. Quindi, decomponendo i punti stessi in gruppi triangolari secondo la regola svolta nel § 24, si determineranno le molteplicità effettive di f .

Come chiarimento valgano i seguenti esempi.

Esempio I. Si assegni ad f una molteplicità $r \geq 12$ nel punto O e le seguenti molteplicità virtuali nel punto O_1 e nei suoi punti satelliti:

$$O_1^7, \quad O_{11}^3, \quad O_{111}^2, \quad O_{112}^4;$$

ciò significa che la f deve avere come punti di molteplicità 3, 2 i punti che succedono ad O_1 sopra un ramo ordinario del terz'ordine

$$(O^3 O_1^4 [O_{11}^1 O_{111}^1])$$

di equazione

$$y = y'x + ax^{\frac{4}{3}},$$

e come punto di molteplicità 4 il punto successivo ad O_{11} sopra

un ramo del terz'ordine

$$(O^3 O_1^2 [O_{11}^4 O_{112}^4])$$

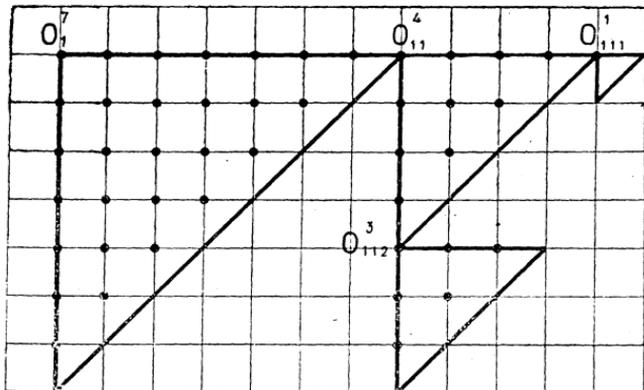
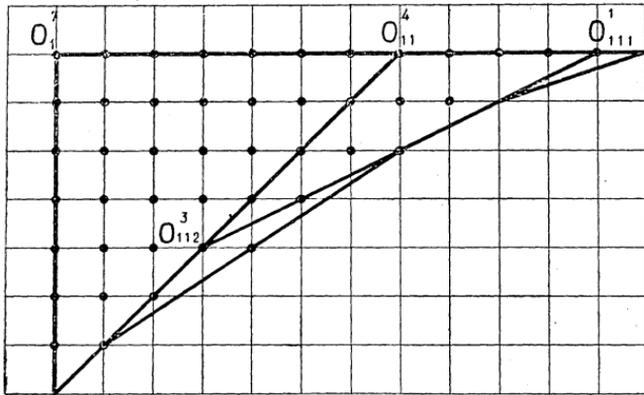
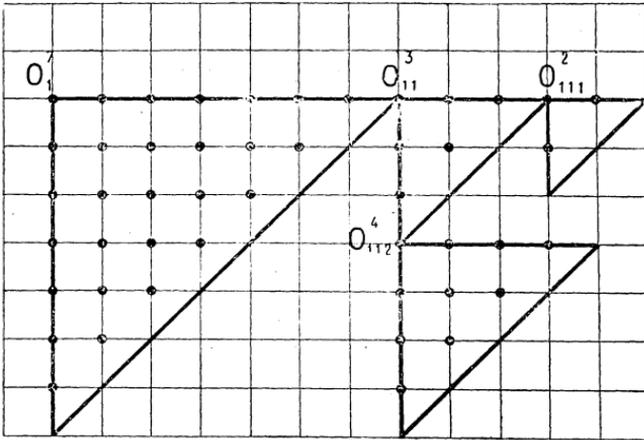
di equazione

$$y = y'x + bx^{\frac{5}{3}}.$$

Le molteplicità virtuali assegnate non sono effettivamente possibili perchè si è attribuito ad O_{112} una molteplicità superiore a quella del punto O_{11} che lo precede, ed *a fortiori* volendosi ancora attribuire la molteplicità 2 ad un altro punto, O_{111} , prossimo ad O_{11} . Per valutare le molteplicità effettive che la f avrà nei punti sopra designati, descriviamo il diagramma rettificato corrispondente alle ipotesi delle molteplicità virtuali, e da queste risaliamo al diagramma non rettificato. A tale scopo si dovrà deformare il triangolo relativo al punto O_{111} , conservandone l'area che corrisponde al numero dei punti figurativi di condizioni (k, l) in esso contenuti; precisamente si terrà fermo il cateto orizzontale, mentre il cateto verticale, moltiplicato per $\sqrt{2}$, verrà adagiato lungo l'ipotenusa del triangolo a sinistra, relativo al punto precedente O_{11} . Analoga deformazione subirà il triangolo relativo al punto O_{112} , salvochè ora resterà fermo il cateto verticale, mentre l'altro (moltiplicato per $\sqrt{2}$) andrà ad adagiarsi lungo l'ipotenusa del triangolo superiore relativo al punto precedente O_{11} ; così facendo accade che i due ultimi punti (k, l) , appartenenti al cateto orizzontale del triangolo O_{112} , vanno a sovrapporsi con due punti provenienti dal cateto verticale del triangolo O_{111} , sicchè appare che vi è parziale coincidenza per le condizioni imposte ad f in ordine ai punti O_{111} e O_{112} . Ora le due deformazioni dei triangoli O_{111} e O_{112} hanno per effetto di unire i relativi punti (k, l) a quelli che erano dati nel triangolo O_{11} , l'insieme totale dei punti venendo compreso in un quasi-triangolo rettangolo di vertice O_{11} ; a questo quasi-triangolo faremo subire ancora una deformazione, conservandone la base orizzontale, per modo che il cateto verticale (moltiplicato per $\sqrt{2}$) andrà ad adagiarsi lungo l'ipotenusa del triangolo a sinistra relativo al punto precedente O_1 , sicchè in fine si otterrà un quasi-triangolo rettangolo di vertice O_1 in cui vengono figurate tutte le condizioni imposte ad f relativamente ai punti satelliti di O . Dividiamo il quasi-triangolo secondo la nostra regola delle partizioni triangolari, come viene indicato nella seconda figura qui annessa, e quindi rettifichiamo il diagramma come

si vede nella terza figura: questa appunto pone in evidenza le molteplicità effettive della f , che risultano

$$O_1^7, O_{11}^4, O_{111}^1, O_{112}^3.$$



Esempio II. Si assegnino alla curva f una molteplicità virtuale $r \geq 13$ nell'origine O , e le seguenti molteplicità nel punto O_1 , vicino ad O , e nei suoi punti satelliti:

$$O_1^5, O_{11}^3, O_{111}^3, O_{1111}^2, O_{1112}^2;$$

ciò significa che la f deve avere come punti di molteplicità 3, 3, 2 i punti che succedono ad O_1 sopra un ramo ordinario del quarto ordine

$$(O^4 O_1^4 [O_{11}^4 O_{111}^4 O_{1111}^4])$$

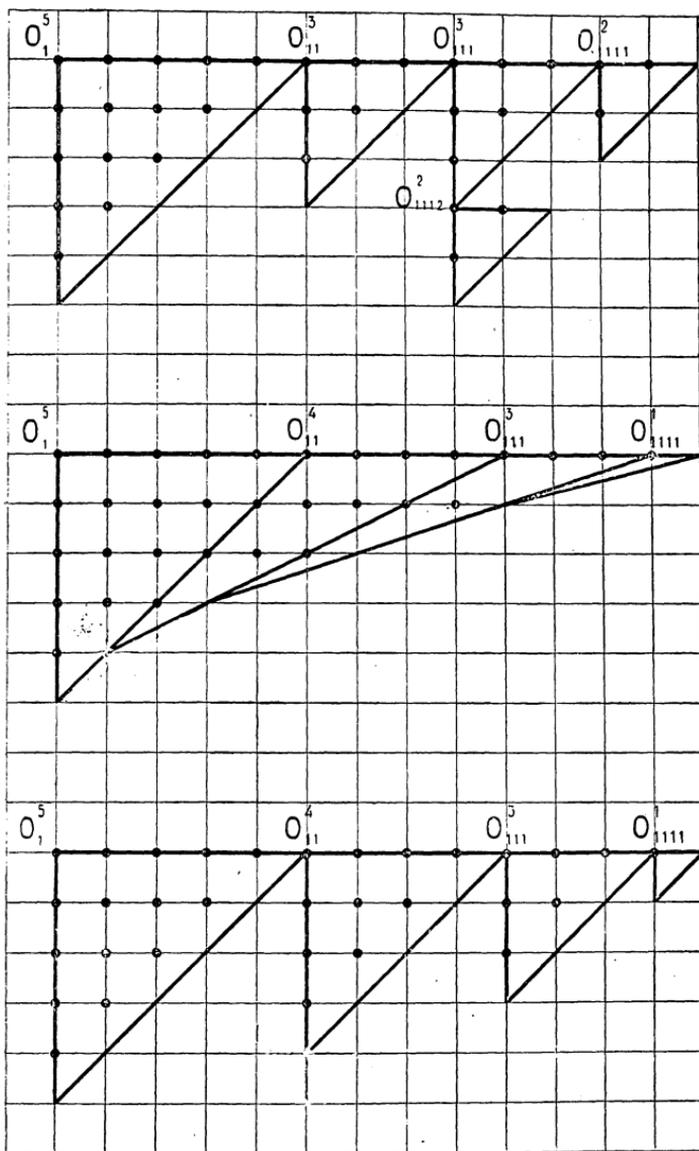
di equazione $y = y'x + ax^{\frac{5}{4}}$, e ancora come punto di molteplicità 2 il punto successivo ad O_{111} sul ramo del quint'ordine

$$(O^5 O_1^2 [O_{11}^2 O_{111}^4 O_{1112}^4])$$

di equazione $y = y'x + bx^{\frac{7}{5}}$.

La disuguaglianza di prossimità non essendo soddisfatta nei riguardi del punto O_{111} , le condizioni poste porteranno come conseguenza delle molteplicità effettive diverse dalle virtuali. Per valutarle descriviamo il diagramma rettificato corrispondente alle ipotesi delle molteplicità virtuali e da questo risaliamo al diagramma non rettificato i cui punti figurano le solite condizioni (k, l) ; operiamo su questo, secondo le regole indicate, la partizione triangolare e quindi — rettificando di nuovo — mettiamo in luce le molteplicità effettive. I passaggi della nostra analisi appaiono dalle figure annesse. Nell'eseguire le operazioni indicate, occorre soltanto un'avvertenza relativa al passaggio che porta a deformare il quasi-triangolo rettangolo O_{111} , (costruito mediante le prime deformazioni dei triangoli O_{1111} e O_{1112}). Accade che il punto (kl) più basso appartenente al cateto verticale del triangolo O_{1112} vada a finire sul prolungamento dell'ipotenusa del triangolo O_{11} , cioè a sinistra del cateto verticale di questo triangolo, di guisa che il punto (kl) suddetto apparirà fuori del quasi-triangolo rettangolo costruito con vertice O_{11} ; tale circostanza si deve interpretare nel senso che il punto suddetto può togliersi, rispondendo ad una condizione non significativa: invero proseguendo l'operazione quel punto va a sovrapporsi al punto $(0, 5)$ che figura come il più basso sul cateto verticale del triangolo O_1 .

A complemento dell'avvertenza precedente giova osservare che la rappresentazione grafica di condizioni virtuali imposte ad f nei punti satelliti di O_1 , può condurre anche al



caso di punti (kl) i quali, quando si risale dal diagramma virtuale al diagramma non rettificato, vadano a cadere fuori del quasi-triangolo rettangolo di vertice O_1 , cioè a sinistra del cateto verticale o al disopra del cateto orizzontale: ciò significa che uno dei due numeri k e l riesce negativo, e quindi

la condizione

$$(k\ l) = \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^{r+l} f = 0$$

perde significato ($k < 0$), o ricade in una condizione relativa al punto r -plo O ($l < 0$).

Per chiarire la cosa basta considerare il caso in cui s'imponega ad f di avere in O un punto quadruplo e di passare per i punti O_1 e O_{11} con le molteplicità virtuali 1 e 3; è chiaro che le molteplicità effettive di f risultano

$$O^4 O_1^2 O_{11}^2.$$

Il nostro metodo grafico dà qui il punto non significativo $(-1, 2)$ che, nel diagramma virtuale, viene figurato come il punto più basso sul cateto verticale del triangolo O_{11} .

Finalmente noteremo che una facile *estensione del nostro diagramma* permette anche di mettere in luce quali molteplicità si scaricano eventualmente dai punti satelliti di O_1 sopra il punto O : basta aggiungere ai triangoli figurativi delle condizioni inerenti ai punti O_1, O_{11}, \dots , anche un triangolo di condizioni relative al punto O ; il quale triangolo si porrà al disopra dello schema precedente, con un cateto orizzontale, e con l'altro cateto verticale terminante in O_1 . Ma su ciò non vogliamo trattenerci più lungamente.

27. Calcolo effettivo degli sviluppi di Puiseux: confronto col metodo di Newton-Cramer. — Lo studio delle condizioni differenziali che caratterizzano i punti multipli infinitamente vicini di una curva $f(xy) = 0$, offre la soluzione più diretta del problema che consiste nel separare i rami costituenti una singolarità di f , calcolando effettivamente i relativi sviluppi di PUISEUX. A questa soluzione si può anche riattaccare il principio della massima separazione dei rami che abbiamo illustrato geometricamente nel § 12.

Sia data una curva $f(xy) = 0$ passante per l'origine O ; la mancanza dei coefficienti dei termini di più basso grado pone subito in evidenza quale sia la molteplicità r di O ; invero l'annullamento di quei coefficienti s'identifica con le note condizioni 1), le quali danno l'annullamento delle derivate pure e miste fino all'ordine $r - 1$. Ora, se al posto di y si pone $y = \varphi(x)$, e si calcolano nell'origine le derivate totali f_i della funzione

composta $f(x, \varphi(x))$, si trova che la f_r è la prima che contenga effettivamente la derivata $y_1 = \frac{dy}{dx}$:

$$f_r = \Delta_1^r f = \left[\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right]^r f.$$

Se si vuole che la $\varphi(x)$ sia un ramo della funzione implicita $y(x)$ definita dalla $f(x, y) = 0$, la f_r deve annullarsi, e l'equazione $f_r(y_1) = 0$ porge in generale r valori diversi per y_1 , i quali danno i coefficienti angolari $\frac{dy}{dx}$ delle tangenti ad r rami di f per O . Per uno di questi rami, corrispondente a un certo $\frac{dy}{dx} = y'$, si ottengono le derivate successive di y : $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ mediante le equazioni

$$f_{r+1}(y_2) = \Delta_2^{r+1} f = \Delta_1^{r+1} f + (r+1) \frac{\partial}{\partial y_1} \Delta_1^r f \frac{y_2}{2!},$$

$$f_{r+2}(y_3) = \Delta_3^{r+2} f = \Delta_2^{r+2} f + (r+2) \frac{\partial}{\partial y_2} \Delta_2^{r+1} f \frac{y_3}{3!}$$

.....;

qui gli sviluppi di f_{r+1}, f_{r+2}, \dots non si prolungano, tenuto conto che $\Delta_1^r f$ è identicamente nullo rispetto a y_1 , invero $\Delta_2^{r+1} f$ contiene al primo grado y_2 sicchè la sua derivata seconda rispetto a y_2 è nulla, e così di seguito.

La prima equazione, in cui si suppone $x = y = 0, y_1 = y'$, è lineare in y_2 ed ha come radice $y_2 = y''$; la seconda equazione, dove si ponga inoltre $y_2 = y''$, è lineare in y_3 ed ha come radice $y_3 = y'''$, ecc. Si ottiene quindi lo sviluppo in serie del ramo $y(x)$ che ha per tangente la retta $y = y'x$:

$$y = y'x + \frac{y''}{2} x^2 + \frac{y'''}{3!} x^3 + \dots$$

Ma questo procedimento cade in difetto quando $y_1 = y'$ sia radice doppia (o multipla) dell'equazione $f_r(y_1) = 0$; in questo caso il calcolo precedente si applica ancora in corrispondenza alle altre eventuali radici semplici della nostra equazione ma non per la suddetta radice doppia, giacchè nell'equazione $f_{r+1}(y_2) = 0$ sparisce il coefficiente di y_2 .

Qui accadrà in generale che il coefficiente costante dell'equazione $f_{r+1}(y_2) = 0$, cioè $\Delta_1^{r+1}f$, sia diverso da zero e quindi l'equazione stessa dia $y_2 = y'' = \infty$; così sorge per f un ramo di second'ordine, o d'ordine superiore. Se invece, essendo y' radice doppia di $f_r = 0$, si annulla anche $\Delta_1^{r+1}f = 0$, il punto O_1 di coordinata y' risulta doppio per f , e la y'' si determina in base all'equazione di secondo grado $f_{r+2} = 0$ che ora non contiene più y_3 , riducendosi alla $\Delta_2^{r+2}f = 0$.

Ciò che abbiám detto per il caso in cui y' sia radice doppia di $\Delta_1^r f = 0$, si estende al caso di una radice multipla d'ordine $s > 2$. Per determinare un valore y'' di y_2 dovremo scrivere un'equazione $\Delta_2^{r+l}f = 0$ ($l \geq 0$), e precisamente quella che corrisponde al più piccolo valore di l per cui l'equazione stessa non svanisce identicamente: ora se $l < s$ codesta equazione dal grado l si abbassa in generale al grado $l-1$ perchè si annulla il coefficiente di y_2^l (essendo $\frac{\partial^l}{\partial y_1^l} \Delta_1^r = 0$), quindi essa ammette una radice infinita (semplice o multipla) cui corrisponde un ramo o un gruppo di rami superlineari della f ; invece se $l = s$ vengono soddisfatte le condizioni 2) caratterizzanti il passaggio di f per O_1^s e si ottengono s valori finiti y'' , in generale distinti, come radici dell'equazione

$$\Delta_2^{r+s}f = \frac{(r+s)!}{s! r!} \frac{\partial^s}{\partial y_1^s} \Delta_1^r f \left(\frac{y_2}{2}\right)^s + \frac{(r+s)!}{(s-1)! (r+1)!} \frac{\partial^{s-1}}{\partial y_1^{s-1}} \Delta_1^{r+1} f \left(\frac{y_2}{2}\right)^{s-1} + \dots$$

$$+ \Delta_1^{r+s}f = 0 \quad (y_1 = y').$$

È ormai chiaro come si prosegua l'analisi precedente, e in specie appare come questa si esaurisca nel caso delle *singolarità costituite di rami lineari*: ciascun ramo

$$y = y'x + \frac{y''}{2} x^2 + \frac{y'''}{3!} x^3 + \dots$$

dipende dalla determinazione dei suoi punti successivi all'origine: O_1, O_2, O_3, \dots di coordinate y', y'', y''', \dots ; e le y', y'', y''' si determinano successivamente mediante equazioni del tipo $\Delta_i^m f = 0$. Precisamente: se O è r -plo per f , gli r valori di y' si ottengono risolvendo l'equazione $\Delta_1^r f = 0$ in cui $x = y = 0$; ad una radice y' d'ordine $r_1 = s$ ($\leq r$) corrispondono s rami passanti per il punto O_1 , che risulta s -plo per f , e le rela-

tive y'' si ottengono risolvendo l'equazione del grado s in y_2 : $\Delta_2^{r'+s}f=0$, in cui si pone $x=y=0$ e $y_1=y'$; ancora se l'equazione anzidetta ammette una radice y'' multipla dell'ordine $r_2 = u$ ($\leq s$), a questa corrispondono u rami passanti per un medesimo punto O_2 che risulta u -plo per f , e in tal caso le relative y_3 si ottengono risolvendo le equazioni di grado u , $\Delta_3^{r'+s+u}f=0$, in cui si pone $x=y=0$, $y_1=y'$, $y_2=y''$; ecc. Proseguendo in tal guisa si arriverà dopo un numero finito di operazioni a un'equazione $\Delta_i^m f=0$, avente in y_i un certo grado $r_i > 1$ e dotata di r_i radici distinte; allora avremo separato un gruppo di r_i rami lineari della f , e per ciascuno di questi si otterranno le coordinate dei punti successivi $y^{(i+1)}$, $y^{(i+2)}$ risolvendo le equazioni di primo grado

$$\Delta_{i+1}^{m+1}f=0, \quad \Delta_{i+2}^{m+2}f=0, \dots$$

In ciò che abbiamo detto, l'ipotesi dei rami lineari si traduce nella proprietà che ove nasce una radice $y^{(i)}$ r_i -pla per una equazione $\Delta_i^m f=0$ (per $i=1, 2, \dots$) questa risulti anche radice d'ordine $r_i - l$ per $\Delta_i^{m+l}f=0$.

Aggiungiamo l'osservazione che per una curva irriducibile f , d'ordine n , designando $r=r_0, r_1, r_2, \dots$ le successive molteplicità dei punti O, O_1, O_2, \dots sussiste la diseuguaglianza

$$\alpha) \quad \sum \frac{r_i(r_i - 1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

la quale porge un limite pratico alla serie delle operazioni precedenti: infatti una curva d'ordine $n-1$, φ_{n-1} , passante $r_i - 1$ volte per ciascun punto O_i e per altri

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i - 1)}{2}$$

punti semplici di f , non può avere con f più che $n(n-1)$ intersezioni. (Una curva soddisfacente alle condizioni anzidette esiste certo purchè sia

$$\beta) \quad (n-1)(n+2) > \sum r_i(r_i - 1);$$

nel caso opposto basta osservare che si ottiene una serie di punti multipli soddisfacente ancora alla disuguaglianza α), riguardando l'ultimo punto r_p -plo della serie come di molteplicità $r_p - 1$).

Il procedimento per la separazione dei rami deve essere modificato nel caso in cui f contenga un ramo *superlineare*: questo caso è contrassegnato dalla circostanza che una delle precedenti equazioni $\Delta_i^m f = 0$ possiede una radice multipla di un certo ordine r_i che riesce multipla d'ordine inferiore a $r_i - l$ per $\Delta_i^{m+l} f = 0$ ($r_i > l$). In conseguenza di ciò l'equazione successiva che vale a determinare $y^{(i+1)}$, cioè la prima $\Delta_i^{m+l} f = 0$ che contiene effettivamente y_{i+1} ($l < r_i$), possiede una radice infinita, riuscendo di grado $< l$. Ora il diagramma delle partizioni triangolari permette di determinare le molteplicità di f nel punto O_i e nei suoi punti satelliti, separando così i rami che passano per punti satelliti diversi: di più quel diagramma porge lo schema grafico dei detti rami di f , e così — per ciascuno di essi — mette in evidenza i caratteri ν, ν_1 del ramo $R(\nu, \nu_1)$, d'ordine minimo, su cui vengono definiti i punti satelliti che gli appartengono; in corrispondenza a ciò si avrà una derivata $y^{(i+1)}(x)$, che per $x=0$ diviene infinita d'ordine $\frac{\nu_1}{\nu}$, e la f possiederà un ramo d'ordine ν o multiplo di ν . Per semplicità di discorso supporremo che la f contenga un solo gruppo di rami superlineari, aventi a comune gli stessi punti satelliti di O_i , e ammetteremo provvisoriamente che questi siano proprio d'ordine ν . Ponendo $x = t^\nu$ la curva $f(xy) = 0$ si trasforma in una curva $\varphi(ty) = 0$ che possiede in O una singolarità costituita di rami lineari (almeno nell'ipotesi che f non possieda altri rami superlineari all'infuori di quelli del gruppo nominato); si applicherà quindi a φ l'analisi precedente e se ne dedurrà la rappresentazione analitica dei suoi rami mediante gli sviluppi di y per le potenze di $t = x^{\frac{1}{\nu}}$.

La separazione dei rami di f dipende dalla risoluzione delle equazioni che s'incontrano nello studio dei punti multipli succedentisi sopra rami superlineari, e che possiamo scrivere valendoci del simbolo operativo D . Convienne aggiungere che se i rami anzidetti di f sono d'ordine multiplo di ν , e quindi di genere $g > 1$, la φ possiederà un gruppo di rami di genere $g - 1$; e perciò l'applicazione reiterata della trasformazione precedente permette di condurre a termine l'analisi, e calcolare in ogni caso lo sviluppo di PUISEUX per ciascun ramo di f .

Abbiamo detto come il nostro diagramma delle partizioni triangolari permetta in particolare di riconoscere l'ordine dei rami superlineari che costituiscono una data singolarità di f . Il metodo che occorre a tale scopo deve essere riavvicinato ad un metodo classico introdotto da NEWTON, ripreso e svolto da CRAMER e da PUISEUX (cfr. per le notizie storiche il paragrafo seguente). E per semplicità di discorso conviene considerare rami di genere $g=1$, anzi conviene addirittura riferirsi al caso elementare caratteristico in cui si tratti della

separazione di rami $y = y'x + ax^{\frac{\nu+\nu'}{2}} + \dots, \dots$ tangenti ad una medesima retta $y = y'x$, che può assumersi come asse delle x ($y' = 0$). È appena necessario rilevare che, ove si trattasse di rami apparentemente più generali

$$y = y'x + \frac{y''}{2} x^2 + \dots + \frac{y^{(i)}}{i!} x^i + ax^{\frac{i\nu+\nu'}{2}},$$

ci si ridurrebbe al caso precedente passando dalla curva $f(xy) = 0$, alla $f(x\bar{y}) = 0$ con la sostituzione

$$\bar{y} = y - \left(y'x + \frac{y''}{2} x^2 + \dots + \frac{y^{(i)}}{i!} x^i \right).$$

Or dunque scriviamo l'equazione

$$f(xy) = \Sigma a_{mn} x^m y^n = 0,$$

dove — l'origine O avendo la molteplicità r — sarà

$$a_{mn} = 0 \quad \text{per} \quad m + n < r.$$

Per separare i rami di f $y = ax^{\frac{\nu+\nu'}{2}}$ che toccano l'asse x , bisogna formare le condizioni di passaggio della f per i punti satelliti del punto O_1 , successivo ad O sul detto asse (o, nell'ipotesi $\nu' > \nu$, per i punti satelliti ad un punto O_i successivo ad O_1 sull'asse stesso); queste condizioni sono del tipo

$$(k, l) \equiv \frac{\partial^k}{\partial y_1^k} \Delta_1^{r+l} f = 0 \quad (x = y = y_1 = y' = 0).$$

Ma, tenuto conto che $y' = 0$, la condizione (k, l) si riduce a

$$a_{\nu'+l-k, k} = 0.$$

Riprendiamo il nostro diagramma in cui vengono figurati i punti (kl) , ed osserviamo che l'insieme G dei punti di questo diagramma che rispondono effettivamente a condizioni di passaggio di f per punti satelliti di O_1 (o di O_i) viene limitato da un quasi-triangolo rettangolo, cioè da un poligono concavo, P , che è il più ampio poligono concavo nel cui interno non cadono punti lacunari, diciamo punti (kl) che corrispondano a coefficienti

$$a_{r+l-k, k} \neq 0.$$

Segue da ciò che le rette separatrici costituenti la poligonale concava b che forma la base di P , debbono contenere ciascuna almeno due punti lacunari.

Sia una di queste rette separatrici, lati di b , di equazione

$$\frac{k}{v} + \frac{l}{v'} - 1 = 0,$$

e poniamo, per semplicità di discorso,

$$v' < v;$$

a codesta separatrice corrisponde uno o più rami della curva f . Precisamente, se v e v' ammettono come massimo comun divisore λ :

$$v = \lambda \varrho, \quad v' = \lambda \varrho',$$

si avrà un gruppo di λ rami del tipo

$$y = a_i x^{\frac{\varrho + \varrho'}{\varrho}} \quad (i = 1, 2, \dots, \lambda).$$

Così, in corrispondenza ad una separatrice di inclinazione $\frac{v'}{v} = \frac{\varrho'}{\varrho}$ si ha un gruppo di λ rami di f su cui x e y divengono infinitesimi d'ordine proporzionale a ϱ e $\varrho + \varrho'$.

Ora la regola che così si ottiene per la determinazione di codesti ordini di infinitesimo deve essere confrontata con quella che viene posta da un classico *diagramma* di NEWTON, svolto poi da CRAMER e da PUISEUX (cfr. § 29), mediante il quale viene risolto il problema della approssimazione delle curve, approssimazione asintotica o approssimazione in un punto singolare (cfr. L. 1°, §§ 11, 12).

Per illustrare il trapasso dal nostro diagramma a quello di NEWTON figuriamo nel piano i punti (kl) che rispondono a coefficienti $a_{r+l-k, k} \neq 0$, cioè effettivamente esistenti nella equazione f ; questi punti che, in senso esteso, costituiscono i punti lacunari del diagramma precedente, formeranno un gruppo G' . Ebbene la poligonale concava b , che ha i suoi estremi sugli assi k e l , fa parte del contorno del minimo poligono convesso P' che contiene nel suo interno il gruppo G' ; anzi questa proprietà caratterizza la poligonale b .

Nel diagramma di NEWTON si tratta appunto della costruzione delle rette separatrici limiti del gruppo G' , che costituiscono i lati di b e che valgono a porre in evidenza i gruppi di termini dell'equazione f a cui la f stessa si riduce in prima approssimazione ⁽¹⁾; vi è soltanto un cambiamento di orientazione della figura che proviene dal rappresentare il coefficiente a_{mn} addirittura nel punto (mn) anzichè nel punto $k = n$, $l = m - r + k$, onde il nostro asse orizzontale k si cambia nella retta $m + n = r$.

Con ciò l'inclinazione di una retta separatrice, limite di G' , risulta non più $\frac{y_1}{y}$ ma $\frac{y + y_1}{y}$, cioè corrisponde direttamente al rapporto degli ordini di infinitesimo di y e x .

Vale la pena di riportare la giustificazione diretta della regola per il calcolo delle approssimazioni (ordini e coefficienti delle parabole e iperparabole osculatrici) che è fornita dal diagramma di NEWTON.

Figuriamo dunque nel piano i punti (mn) che rispondono ai coefficienti a_{mn} di f effettivamente esistenti, e costruiamo una retta separatrice del gruppo G' così formato: una tale separatrice lascia tutto da una banda il gruppo G' (precisamente dalla banda opposta a quella ove si trova l'origine) e contiene almeno due punti di G' . Designando

$$\nu m + \mu n = c$$

l'equazione di una tale separatrice, (μ , ν , c primi fra loro) si vede che — dove si pongano x e y proporzionali a t^ν e t^μ , cioè $y = ax^\nu$ — i termini di f corrispondenti a punti della

(1) Queste rette figurano nella trattazione di CRAMER col nome di « rette determinatrici ».

separatrice riescono infinitesimi d'ordine c rispetto a t , mentre quelli che corrispondono agli altri punti del gruppo G' riescono infinitesimi d'ordine $> c$. Pertanto l'equazione $f(xy) = 0$, trascurando i termini d'ordine superiore, si riduce a quella che si ottiene annullando il complesso dei termini dati dalla separatrice; e questà, divisa per $t^c = x^{\frac{c}{\nu}}$, porge un'equazione capace di determinare il coefficiente a . Se ne deduce l'equazione dei rami o gruppi di rami $y = ax^{\frac{\mu}{\nu}}$ che approssimano la curva f . In particolare si otterranno i rami tangenti all'asse x quando si scelgano le separatrici per cui $\mu > \nu$, sicchè possa farsi $\mu = \nu + \nu'$.

Per maggiormente chiarire come il nostro metodo per la separazione dei rami si riattacchi a quello che viene fornito dal diagramma di NEWTON, addurremo un semplice esempio.

Sia la curva

$$f = \Sigma a_{mn} x^m y^n = 0,$$

avente nell'origine, O , la molteplicità 11, sicchè

$$a_{mn} = 0 \quad \text{per} \quad m + n < 11,$$

e suppongasi che si abbia inoltre

$$[11] \quad a_{11,0} = a_{10,1} = a_{9,2} = \dots = a_{1,10} = 0, \quad a_{0,11} \neq 0,$$

$$[8] \quad a_{12,0} = a_{11,1} = a_{10,2} = \dots = a_{5,7} = 0, \quad a_{4,8} \neq 0,$$

$$[5] \quad a_{13,0} = \dots = a_{9,4} = 0, \quad a_{8,5} \neq 0$$

$$[4] \quad a_{14,0} = \dots = a_{11,3} = 0, \quad a_{10,4} \neq 0$$

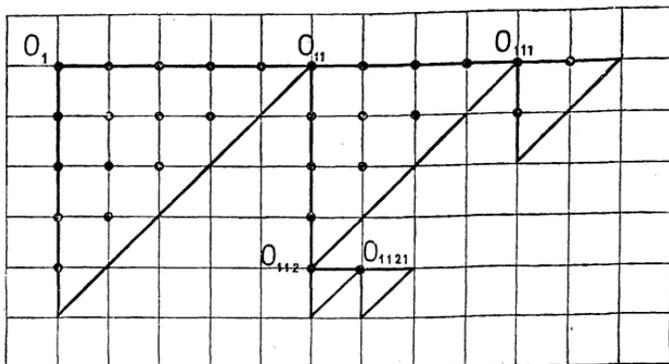
$$[2] \quad a_{15,0} = a_{14,1} = 0, \quad a_{13,2} \neq 0$$

$$a_{16,0} \neq 0,$$

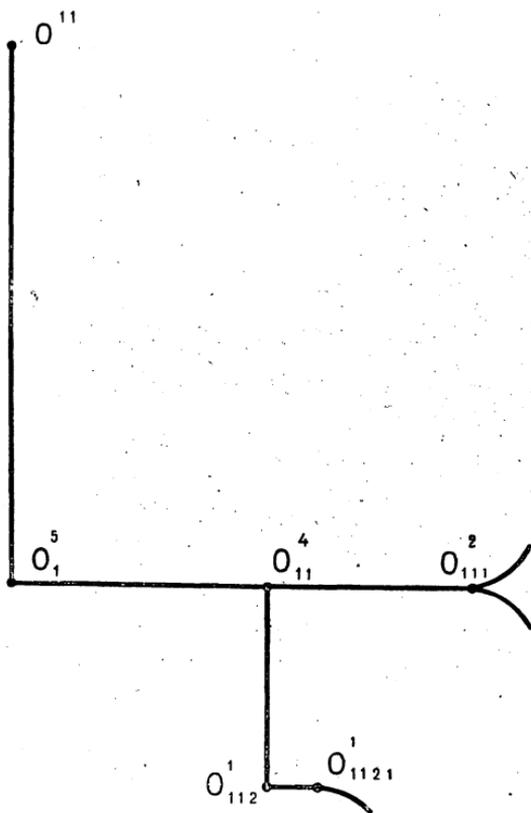
onde la f sarà almeno di ordine 16.

Le condizioni sopra scritte (e per ciascuna linea basta ricordarne il numero, indicato a sinistra in parentesi quadre) porgono il nostro diagramma delle partizioni triangolari, che — in seguito alla rettificazione — viene rappresentato dalla

figura seguente:



Emerge di qui l'albero della singolarità dove viene figurata anche la molteplicità di O :



Appare così che la f passa per i punti infinitamente vicini O'' , O_1^5 , O_{11}^4 , O_{111}^2 , O_{112}^1 , O_{1121}^1 e — tenuto conto delle

relazioni di prossimità — si vede che essa si compone di:
un ramo

$$O^5 O_1^3 [O_{11}^2 O_{112}^1 O_{1121}^1]$$

e di due rami

$$O^3 O_1^1 [O_{11}^1 O_{111}^1];$$

questi ultimi due rami risulteranno in generale distinti: salvo che sia soddisfatta la particolare condizione per la coincidenza dei due punti di f successivi ad O_{111} , condizione che incontreremo in appresso.

Per i rami anzidetti si ha rispettivamente:

$$\nu = 5, \quad \nu' = 3 \quad \text{e} \quad \nu = 3, \quad \nu' = 1,$$

e quindi i rami stessi sono rispettivamente del tipo

$$y = ax^{\frac{8}{5}} + \dots, \quad y = ax^{\frac{4}{3}} + \dots;$$

si dovrà poi determinare a , nei due casi, ponendo

$$x = t^\nu, \quad y = at^{\nu+\nu'} + \dots$$

e scrivendo l'equazione in $Y_{\nu+\nu'}$

$$D_{\nu+\nu'}^p f = 0, \quad (x = y = y' = 0),$$

dove,

$$\text{nel primo caso } p = 11 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 + 1 = 80,$$

$$\text{e nel secondo } p = 11 \cdot 3 + 5 + 4 + 2 = 44:$$

$$a = \frac{1}{(\nu+\nu')!} \frac{\nu!^\nu}{Y_{\nu+\nu'}}.$$

Ora, sviluppando il $D_{\nu+\nu'}^p f$ mediante la formola VII del § 23, ove si avverta che $Y_i = 0$ per $i = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \nu + \nu' - 1$, troveremo una sommatoria di termini del tipo

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^k \Delta_1^h f \cdot (Y_{\nu+\nu'})^k \quad (k_{\nu+\nu'} = k),$$

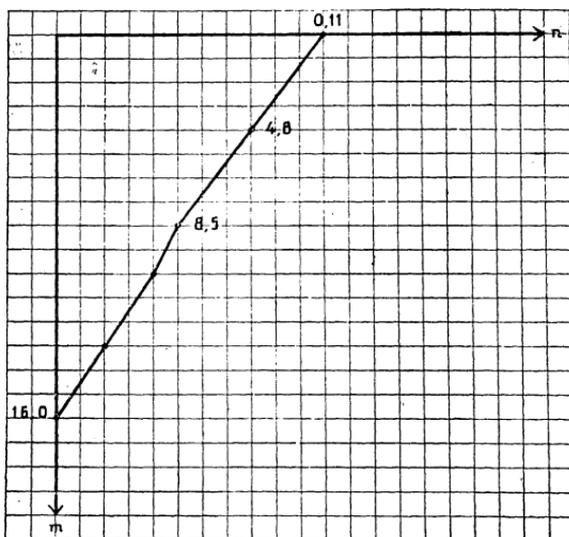
dove

$$\nu h + \nu' k = p,$$

cioè

$$\nu(11 + l) + \nu' k = p.$$

Quest'equazione in rapporto al nostro diagramma non rettificato, rappresenta la retta separatrice, relativa al ramo $R(v, v')$, e — tenuto conto dei coefficienti numerici — si trova in fine che l'equazione per determinare a viene portata semplicemente dall'annullare il gruppo dei termini di f che corrispondono ai punti figurati sull'anzidetta separatrice, posto ivi $y = ax^{\frac{v+v'}{v}}$.



Con ciò il riscontro col metodo di separazione dei rami, fondato sul diagramma di NEWTON, appare perfetto.

Infatti, figuriamo nel piano i punti (m, n) corrispondenti ai coefficienti non nulli della nostra equazione

$$f = \Sigma a_{mn} x^m y^n = 0.$$

Ricordando le ipotesi fatte, si troveranno due rette separatrici, passanti la prima per i punti $(8, 5)$ e $(16, 0)$ e la seconda per $(0, 11)$ e $(8, 5)$ (vedi fig.), che corrispondono alle equazioni

$$vm + (v + v')n = c$$

dove

$$c = 80, 44.$$

È ovvio che l'equazione precedente, essendo $c = p$, si riduce alla

$$v(11 + l) + v'k = p$$

incontrata innanzi, quando si ponga

$$k = n$$

$$l = m - 11 + n.$$

Ordunque si otterranno i valori del coefficiente a per i due tipi di rami

$$y = ax^{\frac{8}{5}} + \dots, \quad y = ax^{\frac{4}{3}} + \dots,$$

annullando rispettivamente i due gruppi di termini di f che figurano sulle separatrici predette, cioè scrivendo le equazioni:

$$a_{8,5}x^8y^5 + a_{16,0}x^{16} = 0,$$

ossia

$$a_{8,5}y^5 + a_{16,0}x^8 = 0,$$

e

$$a_{0,11}y^{11} + a_{4,8}x^4y^8 + a_{8,5}x^8y^5 = 0,$$

ossia

$$a_{0,11}y^c + a_{4,8}x^4y^3 + a_{8,5}x^8 = 0.$$

La prima, ponendo $y = ax^{\frac{8}{5}}$ e dividendo per x^8 , dà

$$a_{8,5}a^5 + a_{16,0} = 0,$$

equazione lineare in a^5 che determina (un punto libero successivo a O_{1421} e quindi) *un* ramo del 5° ordine di f . Invece

la seconda equazione, posto $y = ax^{\frac{4}{3}}$ e diviso per $x^{\frac{24}{3}}$, dà

$$a_{0,11}a^6 + a_{4,8}a^3 + a_{8,5} = 0,$$

cioè un'equazione di secondo grado in a^3 che determina in generale due punti liberi successivi a O_{111} e quindi *due* rami del terz'ordine di f ; soltanto nel caso

$$a_{4,8}^2 - 4a_{0,11}a_{8,5} = 0,$$

i due valori di a^3 vengono a coincidere e, in generale almeno, i due rami di terz'ordine si fondono in un solo ramo del sesto ordine e di genere 2: per riconoscere la irriducibilità di questo occorre una ulteriore approssimazione che si otterrà come è detto innanzi, passando dalla curva f a una curva φ

con la sostituzione

$$X = x, \quad Y = y - ax^{\frac{4}{3}}.$$

In conclusione abbiamo visto che l'analisi delle condizioni differenziali caratterizzanti il passaggio di f per punti infinitamente vicini porge una regola per il calcolo degli sviluppi di PUISEUX, la quale si identifica con quella che viene fornita dal diagramma di NEWTON; il nostro metodo vi aggiunge la discriminazione dei vari gruppi di condizioni che rispondono ai singoli punti multipli costituenti la singolarità.

Dal punto di vista pratico l'uso del nostro diagramma rettificato presenta un vantaggio su quello di NEWTON nei casi in cui le condizioni della figura rendono difficile di riconoscere graficamente quali punti del diagramma appartengano alle separatrici e come queste si distinguano fra loro.

28. Nota sulle questioni di realtà. — Lo studio delle singolarità contenuto in questo libro è concepito dal punto di vista delle funzioni di variabile complessa; qui vogliamo aggiungere brevissime note sulla forma dei rami reali delle curve algebriche, nell'intorno di un punto singolare.

Anzitutto per i rami di second'ordine, conviene notare che la *cuspidè di seconda specie*, scoperta da DE L'HÔPITAL, è costituita in generale da due archi che, a differenza di ciò che accade per la *cuspidè di prima specie*, giacciono da una medesima banda della tangente, costituendo così la figura di un *becco* (denominazione usata da CRAMER). Anzi, dal punto di vista reale, questa proprietà viene assunta talvolta come definizione delle cuspidi di seconda specie in contrapposto a quelle di prima. Ma, tenendo ferma la nostra definizione delle « specie di un ramo del second'ordine », come numero dei punti doppi successivi che sopra di esso s'incontrano, si ha precisamente:

I due archi di una cuspidè di specie $s > 1$ sono separati o no dalla tangente secondo che la classe è dispari o pari: così per es. la cuspidè di seconda specie di classe 2:

$$y = ax^2 + bx^{\frac{5}{3}},$$

con $a \neq 0$, dà luogo a due archi giacenti da una medesima

parte della tangente, mentre quelli vengono separati da questa per $a = 0$.

Lo studio più generale delle proprietà di forma che spettano ai rami reali d'ordine superiore risale a CRAMER (Cap. XII del suo trattato) e fu poi ripreso da PLÜCKER ⁽¹⁾; più recentemente si è occupato della questione SMITH nella citata memoria del 1876 e, dal punto di vista delle trasformazioni, CH. ANGAS SCOTT (1892, 93) ⁽²⁾.

Ora osserviamo che quando si muova la variabile complessa x nell'intorno di $x = 0$, aumentandone l'argomento di $h\pi$, il coefficiente a_i dello sviluppo di

$$y = ax + a_1 x^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + a_2 x^{\frac{\nu+\nu'+\nu''}{\nu}} + \dots + a_i x^{\frac{\nu+\nu'+\dots+\nu^{(i)}}{\nu}} + \dots$$

viene moltiplicato per $e^{\frac{h\pi i}{\nu}(\nu'+\nu''+\dots+\nu^{(i)})}$, sicchè, quando non sia h multiplo di ν , qualche coefficiente diviene immaginario; lo sviluppo di y resta invece invariato per h multiplo di 2ν .

Richiamando il concetto dei rami parziali nel senso di CAYLEY, cui si è accennato nella nota a piè di pag. 330, diremo che si passa da un ramo parziale reale a un secondo ugualmente reale solo quando l'argomento di x aumenta di $\nu\pi$: e in tal caso per ν pari x ritorna al valore primitivo, per ν dispari cambia di segno. Pertanto vi è luogo anzitutto a distinguere i rami d'ordine ν pari e quelli d'ordine dispari.

I rami d'ordine pari, come quelli di second'ordine, presentano la forma di una cuspide ⁽³⁾, e precisamente della cuspide ordinaria o di prima specie (attraversata dalla tangente), oppure del becco, cioè della generale cuspide di seconda specie che giace tutta da una medesima banda della tangente, secondo la disparità o parità della classe ν' .

Invece i rami d'ordine dispari possiedono due archi che si prolungano l'uno nell'altro, attraverso l'origine, senza inversione della tangente, così come avviene in un punto regolare; il ramo traverserà la tangente o starà tutto da una parte di esso, secondo che le classe è pari o dispari.

(1) PLÜCKER. « Theorie der algebraischen Curven », pag. 200 e seg.

(2) American Journal, t. XIV e XV.

(3) Cfr. anche LAGRANGE « Fonctions analytiques », § 27; Oeuvres, t. IX, pag. 62.

Aggiungiamo che nel caso della cuspide i due archi terminati dal punto singolare formano diversi rami parziali, ed invece nel caso del flesso formano un unico ramo parziale; si sottintende qui che la considerazione dei detti rami viene limitata a ciò che cade nel campo reale.

Un elemento essenziale nello studio della forma di un ramo, d'ordine pari o dispari, viene offerto dalla curvatura di esso nell'origine, o meglio dal modo di variare della curvatura quando ci si avvicina all'origine. Prendendo la tangente come asse x , e però facendo $y'(0) = 0$, la curvatura

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

si riduce, nell'origine, ad y'' .

Ora per il ramo $y = ax^{\frac{\nu+\nu'}{\nu}} + \dots$ si ha:

$$y''(x) = \frac{\nu'(\nu + \nu')}{\nu^2} ax^{\frac{\nu'-\nu}{\nu}} + \dots;$$

si vede dunque che per $x=0$ la curvatura diventa infinita quando $\nu' < \nu$ ed invece infinitesima quando $\nu' > \nu$ ⁽¹⁾; nel caso $\nu = \nu'$ la curvatura viene uguale a $2a$, il nostro ramo non distinguendosi in prima approssimazione dalla parabola $y = ax^2$.

Questi risultati esigono qualche chiarimento specialmente in rapporto ai casi che esorbitano dalle ipotesi più restrittive, usualmente adottate nelle trattazioni scolastiche del Calcolo infinitesimale.

Anzitutto l'ordine di contatto del ramo reale con la tangente, cioè l'ordine di infinitesimo della distanza $y(x)$ diminuito di un'unità, è dato dalla frazione $\frac{\nu'}{\nu}$ che, secondo SMITH, prende il nome di *curvatura logaritmica*; così tale ordine di contatto non riesce generalmente intero come accade invece per le curve rappresentate da funzioni $y = f(x)$ regolari, per

⁽¹⁾ La nozione a cui si perviene in tal guisa di *flessi con curvatura infinita e cuspidi affilate con curvatura nulla*, risale a CRAMER, (op. cit., cap. XII, § 217).

le quali si ha, in $x=0$, una prima derivata finita e non nulla.

Ciò posto distinguiamo i seguenti casi:

1) ν dispari e ν' dispari; la curva, non traversa la tangente.

a) Quando $\nu' < \nu$, $y'' = \infty$, si ha una forma *ogivale*, non esistendo alcun cerchio interno alla curva che la tocchi nel vertice;

b) invece per $\nu' > \nu$, $y'' = 0$, si ha una curva che si avvicina alla tangente più di qualunque cerchio, quantunque per $\nu' < 2\nu$ si avvicini a questa meno di una curva regolare (y''' finita) che la possiede come tangente di flesso.

2) ν dispari e ν' pari; la curva attraversa la tangente, cioè presenta un *flesso*, passando attraverso il quale la curvatura, che ivi diventa 0 o ∞ , cambia di segno.

a) Per $\nu' < \nu$, $y'' = \infty$, a differenza del flesso ordinario ciascuno dei due archi della curva si accosta alla tangente meno di qualsiasi cerchio (presentando la forma di una mezza ogiva);

b) invece per $\nu' > \nu$ e quindi $y'' = 0$, la curva si accosta alla tangente più di qualsiasi cerchio, e tuttavia per $\nu' < 2\nu$ meno di una curva regolare che possessa quella come tangente di flesso.

3) ν pari e ν' dispari; la curva presenta la forma della cuspide propriamente detta, e attraversando la tangente la sua curvatura cambia segno passando per 0 o ∞ .

a) Quando $\nu' < \nu$, $y'' = \infty$, i due archi della cuspide si accostano alla tangente meno di qualunque cerchio;

b) all'opposto si accostano di più per $\nu' > \nu$, $y'' = 0$.

4) ν pari e ν' pari; se il termine successivo dello sviluppo $y(x)$ non si annulla, la curva presenta la forma del becco.

a) Per $\nu' < \nu$, $y'' = \infty$ i due archi che formano il becco si accostano alla tangente meno che qualunque cerchio;

b) viceversa si accostano di più per $\nu' > \nu$, $y'' = 0$.

Tutti questi 8 tipi si ottengono raccordando, nei vari modi compatibili coll'unicità della tangente, due archi aventi ambedue la curvatura 0 o ∞ nell'estremo comune.

Le presenti figure porgono la *rappresentazione delle varie specie di flessi e cuspidi* pertinenti alle curve

$$x = t^m, \quad y = t^n + at^{n+1}$$

dove

$$n > m, \quad a = [1 - (-1)^{n+1}][1 - (-1)^{m+1}].$$

m dispari, n pari:



$n < 2m$



$n > 2m$

m dispari, n dispari:



$n < 2m$

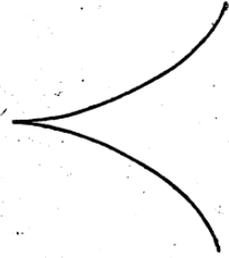


$n > 2m$

m pari, n dispari:

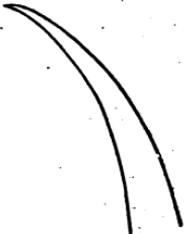


$n < 2m$



$n > 2m$

m pari, n pari:



$n < 2m$



$n > 2m$

29. Notizia storica sullo svolgimento della teoria delle singolarità ⁽¹⁾. — La teoria delle singolarità delle curve o funzioni algebriche trae le sue origini dallo studio delle approssimazioni successive, e per questo lato si collega all'opera di NEWTON.

Veramente NEWTON non si occupò in modo speciale dei punti singolari, ma in poche pagine della sua memoria « *Methodus functionum et serierum infinitarum* » pubblicata a Londra nel 1736 ⁽²⁾, e col conforto di esempi, ha trattato il problema delle approssimazioni successive della funzione implicita definita dall'equazione $f(xy) = 0$, da cui sorge lo sviluppo di y mediante potenze della x . NEWTON considera questo problema come prolungamento di quello che ha per oggetto la ricerca delle successive cifre decimali della radice di una equazione $f(x) = 0$. Passando alla $f(xy) = 0$, considerata nell'intorno del punto-radice $(0, a)$, pone, entro f , $y = a + z$ e scrive l'equazione in z che ne risulta; questa viene soddisfatta ponendo $z = bx + z_1$ e dà luogo a una nuova equazione in z_1 , che si risolve ponendo $z_1 = cx^2 + z_2$; e così di seguito.

Per scrivere effettivamente l'equazione che determina z (e analogamente per le successive equazioni) NEWTON dispone i termini di $f(x, a + z)$ per linee e colonne, in guisa che i termini di ciascuna linea o colonna abbiano lo stesso grado rispetto a una delle variabili: così ha origine il diagramma che porta il nome di *parallelogramma di Newton*.

DE-GUA, nel suo trattato del 1741 ⁽³⁾, svolge l'applicazione di questo diagramma al problema di separare i rami della funzione algebrica $y(x)$ in un punto singolare; a tal uopo egli pone il punto singolare nell'origine, e determina in tal guisa i gruppi di termini caratteristici a cui l'equazione si riduce, a meno di infinitesimi d'ordine superiore.

In DE-GUA il diagramma di NEWTON, limitato ai termini di f che non superano un certo grado complessivo anzichè un certo grado separato rispetto alle due variabili, assume

⁽¹⁾ Cfr. per maggiori notizie e per la letteratura il citato rapporto di BRILL e NÖTHER nello « *Jahresbericht der Deut. Mat. Vereinigung (1892-93)* » e la bibliografia che chiude l'appendice di HALPHEN alla trad. franc. del trattato sulle curve piane di SALMON.

⁽²⁾ « *Opuscola* » ediz. Castillion, Losanna e Ginevra, 1744. Vol. I, pag. 37.

⁽³⁾ « *Usage de l'Analyse de Descartes* ».

l'aspetto di un triangolo, donde il nome di « triangolo algebrico », che da CRAMER fu mutato poi in « triangolo analitico ».

Ora, quanto alla conoscenza delle singolarità, DE-GUA ritenne che l'andamento della curva nell'intorno di un punto singolare fosse sufficientemente caratterizzata fermandosi a una prima approssimazione mediante curve del tipo $y^2 = ax^2$. Quest'errore fu corretto da EULERO (1749), il quale osservò che un ramo può essere immaginario, per x negativo, pur dando luogo ad una prima approssimazione reale, e addusse come esempio la cuspidè di seconda specie

$$y = ax^2 + bx^{\frac{5}{2}},$$

già innanzi scoperta da DE L'HÔPITAL.

La completa separazione dei rami in un punto singolare, mercè il calcolo delle approssimazioni successive ricondotte alla prima con una sostituzione di variabili, si trova in CRAMER e precisamente nel capitolo X della sua « Introduction à l'Analyse des lignes courbes » (1850). (Lo stesso metodo viene applicato nel Cap. VII della medesima opera per la approssimazione asintotica dei rami infiniti). La perfezione del metodo, svolto accuratamente e con numerosi esempi da CRAMER, appare ancor oggi insuperata dal punto di vista dello scopo pratico, sebbene altri metodi si siano aggiunti per la separazione dei rami delle funzioni algebriche.

Per CRAMER lo scopo segnato a queste ricerche era raggiunto quando si era riusciti a separare i rami costituenti la singolarità, per quanto il procedimento potesse proseguirsi fino ad ottenere una approssimazione di ordine comunque elevato: egli non prende in esame la *serie infinita* di potenze che così trae origine, e la possibilità di dedurne una rappresentazione analitica per i rami della funzione implicita $y(x)$.

Tuttavia tale questione era posta dalla scuola di NEWTON, e già il maestro aveva accennato come si otterrebbe il valore esatto della radice di un'equazione mediante uno sviluppo infinito; TAYLOR ⁽¹⁾ prosegue il cammino di NEWTON, e il maggior frutto dell'assetto da lui dato alla teoria della derivazione delle funzioni implicite appare il teorema sugli svi-

(1) « Methodus incrementorum... » Londra 1717.

luppi in serie di potenze che porta il suo nome e che figura, nella sua trattazione, nella forma modesta di un semplice corollario (corol. 2° della prop. VII), senza che se ne tragga alcuna applicazione. MAC LAURIN nel « Treatise of fluxions » del 1742 ⁽¹⁾, fondandosi sul metodo dei coefficienti indeterminati, ritrova il caso particolare di questo teorema che porta il suo nome (sviluppo per potenze di x nell'intorno di $x=0$) ⁽²⁾, e avverte che vi sono alcune eccezioni, potendo accadere che qualcuna delle derivate successive divenga infinita per $x=0$.

Ma che cosa si deve dire circa la validità dello sviluppo d'una funzione in serie di Taylor?

La storia di tale questione comincia colla « Théorie des fonctions analytiques » di LAGRANGE (1798) ⁽³⁾. Qui si affaccia la veduta che una funzione arbitraria $f(x)$ d'una variabile, cioè — secondo la definizione di LAGRANGE — « un'espressione di calcolo in cui la variabile entri in modo qualunque », dà luogo ad uno sviluppo di $f(x+i)$ in serie di potenze intere di i , fatta eccezione al più per valori particolari della x (op. c. § 2); lo sviluppo anzidetto non potrà divenire illusorio tranne nel caso che le derivate successive di f nel punto x , risultino — da un certo ordine in poi — infinite, ed allora $f(x+i)$ ammetterà uno sviluppo per potenze fratte di i (§ 30), dove s'incontreranno anche potenze negative se è pure $f(x) = \infty$.

Queste conclusioni (illustrate con un esempio) suppongono una forma particolare di funzione, costruita con un piccolo numero di simboli di calcolo; una giustificazione generale di esse è venuta soltanto nella teoria delle funzioni di variabilità complessa per opera di CAUCHY, LAURENT e PUISEUX. A LAGRANGE rimane tuttavia il merito di avere assegnate una prima forma pel « resto della serie di Taylor ⁽⁴⁾ », dove — come è noto — figura la derivata n -ma in un punto intermedio; ed invero la formula di Lagrange permette di

(1) Book II, Ch. II, Art. 751.

(2) MAC LAURIN avverte del resto (p. 611) che il teorema fu dato da TAYLOR, e (p. 612) che esso non differisce sostanzialmente da uno sviluppo di GIOV. BERNOULLI, che concerne $\int x dz$ e risale al 1694.

(3) Cfr. Oeuvres, t. IX, Parigi 1881.

(4) Op. c., § 40, pag. 83.

trattare facilmente la questione della validità della serie per le usuali funzioni esplicite, se non anche per le implicite.

La risposta precisa al problema della convergenza delle serie di Taylor e della possibilità di rappresentare la funzione con esse sviluppata, appartiene a CAUCHY. Già nel 1826 ⁽¹⁾ CAUCHY dava al resto della serie la forma che porta il suo nome, ma soltanto alcuni anni più tardi ⁽²⁾ perveniva al teorema fondamentale sullo sviluppo in serie delle funzioni di variabile complessa nell'intorno di un punto regolare (cfr. L. 2°, § 30). Egli in particolare determinava rigorosamente lo sviluppo per potenze intere delle funzioni implicite, sempre sotto le condizioni di regolarità che escludono i punti singolari.

Restando nel campo algebrico, il caso dei poli dà luogo a potenze negative (teorema di LAURENT 1843); invece il caso dei punti di diramazione dà luogo all'essenziale complemento portato dal teorema di PUISEUX (1850) ⁽³⁾ per cui i rami di una funzione algebrica nell'intorno di un punto singolare si possono sviluppare mediante serie di potenze fratte della variabile indipendente: PUISEUX dà anche il calcolo effettivo, riprendendo il metodo di NEWTON-CRAMER. Con ciò si chiude il *primo periodo della teoria delle singolarità*, rispetto a cui possiamo indicare come trattato rappresentativo: BRIOT et BOUQUET « *Théorie des fonctions elliptiques* » II ed., Parigi 1875.

Il *secondo periodo*, o periodo moderno nella teoria delle singolarità delle curve algebriche può essere caratterizzato dal problema delle intersezioni; al quale si è in definitiva condotti anche dalle ricerche che hanno per oggetto la formulazione assolutamente generale delle relazioni plueckeriane. Dapprima CAYLEY, nel 1865, ebbe a ricercare la molteplicità d'intersezione di due curve in un punto singolare, partendo dalla definizione del resultante come prodotto delle differenze delle radici. Questa molteplicità è la somma di quelle relative alle coppie di rami e — riferendosi all'origine e introducendo gli sviluppi di x e y per le potenze intere di un

(1) « Exercices de Math. » I, pag. 25.

(2) « Sur le calcul des résidus e le calcul des limites ». Torino 1831-32. Cfr. « Exercices d'Analyse et de Physique math. », t. II, pagg. 41, 109 (1841).

(3) Journal de Math., t. XV (1850).

parametro t — si riduce quindi alla valutazione del grado minimo a cui t figura nella resultante (WEIERSTRASS (1)).

La questione di valutare le intersezioni di due rami tangenti, quando si conoscano i rispettivi sviluppi di PUISEUX, è stata approfondita nei lavori proseguiti parallelamente da SMITH e HALPHEN durante gli anni 1873-76 (2). Queste ricerche pongono in evidenza l'ufficio che hanno nelle serie di PUISEUX certi « termini caratteristici » e gli esponenti della variabile che vi figurano. Sostanzialmente l'analisi di HALPHEN (liberata dal concetto che ivi compare dei « rami parziali » e dei loro contatti) è stata da noi riprodotta nel nostro § 6.

Un punto di vista più originale e largamente fecondo si trova enunciato da NÖTHER fino dal maggio 1871; e consiste nell'uso di trasformazioni quadratiche, che NÖTHER avverte poter servire ugualmente al calcolo analitico degli sviluppi di PUISEUX e allo studio geometrico della natura delle singolarità.

Per quanto concerne il primo scopo, l'idea trovasi svolta da HAMBURGER nell'autunno del 1871, e poi nelle « Lezioni sulle funzioni abeliane » di WEIERSTRASS (dopo il 1873) (3); un ampio svolgimento in rapporto al secondo scopo trovasi in una memoria fondamentale di NÖTHER del 1875 (4).

La possibilità di trasformare una curva dotata di singolarità qualunque in una curva con punti multipli a tangenti distinte risale a KRONECKER, che questo teorema comunicò verbalmente a RIEMANN e WEIERSTRASS fino dal 1858. KRONECKER si basa sugli sviluppi di PUISEUX ed opera una sostituzione razionale sopra una sola variabile x , che riesce razionalmente invertibile per i punti della curva $f(xy) = 0$; ciò che gioca nelle sue ricerche è il discriminante della funzione algebrica (cfr. L. 2°, § 24) in cui egli distingue un fat-

(1) « Vorlesungen über Abel'sche Functionen. 1869 », 1873.

(2) Cfr. SMITH « London. Math. Soc. t. 6 », 1876 (memoria letta in parte nel 1873-74).

HALPHEN: Note e memorie inserite nel Bulletin de la Soc. Math. de France (1873-76), nei Comptes rendus de l'Ac. de Paris (1874) e nel Journal de Math. ser. 3, t. 2. *Appendice* alla trad. franc. del trattato sulle curve di SALMON. (Parigi, Gauthier-Villars, 1884).

(3) Cfr. pure KÖNIGSBERGER « Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen ». Lipsia, Teubner 1874. Parte I, lezione 9.

(4) Math. Annalen. Bd. 9, pag. 166.

tore essenziale e un fattore inessenziale: il primo, che corrisponde ai punti di diramazione della funzione, riesce invariante per trasformazioni razionali della curva (¹).

A differenza di KRONECKER, NÖTHER usa trasformazioni razionali invertibili in tutto il piano, cioè trasformazioni cremoniane, in particolare trasformazioni quadratiche, mediante le quali egli ha insegnato a comporre le generali trasformazioni cremoniane (cfr. *Math. Annalen* Bd. 5). Ora, quando si passi successivamente da una curva data a una serie di trasformate con trasformazioni quadratiche, si guadagna il concetto della composizione della singolarità mediante punti multipli infinitamente vicini, che può ritenersi come l'acquisto più importante nella teoria delle singolarità. NÖTHER viene a concepire una qualsiasi singolarità straordinaria come singolarità limite, dovuta alla riunione di più punti multipli che si avvicinano indefinitamente e di punti di diramazione semplici (cfr. § 19).

Ma ciò che nella teoria di NÖTHER conferisce una effettiva realtà ai punti multipli infinitamente vicini, è che essi si comportano come i punti propri sia nel computo delle intersezioni di due curve, sia in quello delle condizioni perchè una curva passi per un punto dato con una molteplicità assegnata; ed ambedue queste proprietà fondamentali vengono poste in evidenza dalla trasformazione.

La teoria di NÖTHER sopra disegnata ha ricevuto uno sviluppo geometrico più semplice per opera di BERTINI in alcune note pubblicate fra il 1888 e 1891 e nell'esposizione

(¹) Operando con trasformazioni birazionali sopra una curva si riesce anche ad un risultato più espressivo, cioè a ridurre una curva qualunque ad altra dotata soltanto di punti doppi (cf. § 30). KLEIN, in una lettera del 1859, sembra per primo avere avvertito questa maggiore determinazione che si può dare al teorema di KRONECKER, richiamando l'osservazione fatta da CLEBSCH che le curve con punti multipli a tangenti distinte si possono ridurre a curve con soli punti doppi, passando attraverso curve gobbe (e ciò in rapporto alla rappresentazione piana della superficie cubica).

Più precisamente HALPHEN, nella sua citata appendice al trattato di SALMON del 1884, avvertiva che una curva con singolarità qualunque può essere trasformata in una curva gobba senza punti singolari da cui, per proiezioni, si ottiene una curva dotata soltanto di nodi.

Una semplice dimostrazione geometrica del teorema vien porta dal BERTINI nel 1891 (cfr. *Math. Annalen*, Bd. 44, pag. 158); altre dimostrazioni appartengono a SIMART e POINCARÉ (1893).

sistemática che costituisce l'appendice alla sua « Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi » (1).

Convieni infine ricordare varie osservazioni di SEGRE, in rapporto alle sue ricerche sulle singolarità delle superficie, e il corso di lezioni sulle singolarità che egli tenne all'Università di Torino durante l'anno 1894-95.

La riduzione delle singolarità con trasformazioni permette anche di estendere algebricamente alle curve dotate di singolarità qualunque il concetto di quel carattere invariante che costituisce il genere, il quale d'altra parte appare definito con uguale generalità dall'ordine di connessione della superficie di RIEMMAN (cfr. L. 2°, § 36).

Dalla relazione di invarianza del genere, applicata alla corrispondenza fra la curva luogo e la curva involuppo, NÖTHER (1875) deduce l'estensione al caso di singolarità qualunque di una delle formule di Plücker; e d'altra parte, calcolando le intersezioni della curva con una polare, egli determina l'abbassamento della classe dovuto a una singolarità qualunque, che in altro modo, viene valutato da HALPHEN.

L'estensione completa delle formule di Plücker esige ancora di passare dai caratteri della singolarità di una curva luogo a quelli della curva duale, e ciò si ottiene mediante l'osservazione, abbozzata da CAYLEY nel 1865 e svolta da HALPHEN nel 1874, che — in una trasformazione per dualità — l'ordine e la classe di un ramo vengono scambiati fra loro.

Qui convieni menzionare, in aggiunta alle accennate formule che abbiamo svolto nel § 16 come estensione delle formule di Plücker, altre relazioni fra i caratteri della curva che possono riuscire di utile applicazione e che appartengono a SMITH (1876) e a ZEUTHEN (1882) (2).

All'estensione delle formule di Plücker si collega anche la questione degli equivalenti plueckeriani (cfr. L. 3°, §§ 15, 16): CAYLEY (1865) è giunto induttivamente al concetto che ogni singolarità possa surrogarsi agli effetti delle formule di Plücker con un certo numero di punti doppi e cuspidi, tangenti doppie e flessi. Una giustificazione, del resto puramente aritmetica,

(1) Pisa, Spoerri, 1907.

(2) Cfr. ZEUTHEN. Math. Annalen, Bd. 10 e Acta mathematica, t. 1.

si trova in SMITH (1876). Rimane tuttavia la questione essenziale di riconoscere negli equivalenti plueckeriani la traccia di un passaggio al limite, per cui ogni singolarità risulti dalla sovrapposizione di singolarità elementari; e tale questione può essere illuminata così col metodo degli sviluppi in serie come col metodo delle trasformazioni quadratiche.

Il primo metodo viene adoperato da BRILL (1879-1892), il quale sostituisce ad un ramo della curva la curva razionale che noi abbiamo denominato iperparabola osculatrice, e fa poi variare questa conservandone la razionalità. Il secondo metodo è implicitamente contenuto nella definizione noetheriana di una singolarità come limite di punti multipli ordinari che si avvicinano (¹).

Il rapporto fra la teoria delle singolarità di NÖTHER e quella di SMITH-HALPHEN, basata sugli sviluppi di PUISEUX, viene in luce quando si proponga il calcolo effettivo di codesti sviluppi mediante trasformazioni quadratiche, col citato metodo di HAMBURGER (1871). Tuttavia la determinazione esplicita dei punti multipli successivi d'un ramo in funzione degli esponenti dello sviluppo in serie, che scaturisce dall'inversione del procedimento precedente, si trova soltanto in una memoria di NÖTHER del 1890 (²) ove viene guadagnata con l'uso di trasformazioni quadratiche, come sostanzialmente abbiamo veduto nel § 20.

Da quanto si è detto emerge il posto che spetta alla nostra trattazione della teoria (³): nel Cap. I i punti infinitamente vicini vengono introdotti in modo diretto a partire dagli sviluppi di PUISEUX, integrando così la teoria delle intersezioni dei rami di SMITH e HALPHEN. Questo metodo illumina aritmeticamente il concetto di quei punti che abbiamo considerati come « satelliti » in contrapposto ai punti di un ramo che abbiamo chiamati « liberi », in quanto dipendono da una coordinata. E l'importanza del nuovo concetto consiste nel *complemento* che viene recato all'*analisi di NÖTHER*: per NÖTHER la singolarità è definita semplicemente come riunione di punti multipli infinitamente vicini; per noi si aggiunge la veduta

(1) Cfr. C. A. SCOTT. American Journal of Math., t. 14, (1892).

(2) Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. IV.

(3) Cfr. F. ENRIQUES. Rendic. Accad. dei Lincei 7 maggio 1916.

della *posizione* di codesti punti (relazioni di satellitismo), da cui dipende l'esistenza dei rami superlineari.

Un altro carattere nuovo della nostra trattazione è lo studio delle condizioni differenziali che caratterizzano il passaggio di una curva per punti infinitamente vicini e le relative molteplicità. Si ottiene così una più precisa determinazione del concetto delle singolarità straordinarie come singolarità limiti, e ne conseguono interessanti applicazioni.

L'importanza di questi sviluppi può essere messa in luce dicendo che essi mirano a fondare una completa *teoria delle singolarità algebriche dal punto di vista dell'analisi infinitesimale*. Sotto questo aspetto conviene ricordare alcuni antecedenti storici delle nostre ricerche.

Già in LAGRANGE ⁽¹⁾ trovasi un cenno del calcolo delle derivate successive delle funzioni implicite in un punto singolare. Se il punto O è multiplo (d'ordine $r > 1$) per la curva $f(x) = 0$, accade che si annullano ivi tutte le derivate parziali di f rispetto ad x e y fino all'ordine r (osservazione che risale al DE GUA); così in particolare svanisce l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

che vale in generale a determinare la derivata prima $\frac{dy}{dx} = y'$.

Allora, mediante derivazioni successive, si trova un'equazione di grado r che riesce indipendente da y'', e permette di definire y' . Per tal modo LAGRANGE accenna in sostanza alla separazione dei rami d'una funzione algebrica in un punto singolare; problema che già con altro procedimento era stato risoluto più profondamente da CRAMER.

L'analisi differenziale delle singolarità viene quindi ripresa e svolta da PLÜCKER (1839) ⁽²⁾, che nello studio geometrico si vale delle « equazioni differenziali » della curva $f(xy) = 0$, ottenute derivando la funzione identicamente nulla $f(x, y(x))$.

Più recentemente HAMBURGER (1871) calcola gli sviluppi di Puiseux, nel caso dei rami lineari, determinando i coeffi-

(1) « Théorie des fonctions analytiques », § 25.

(2) « Theorie der algebraischen Curven ».

cienti come derivate successive della funzione algebrica $y(x)$; e STOLZ (1874), riprendendo e proseguendo l'analisi di PLÜCKER, scrive le formule generali di questa derivazione nella forma che noi abbiamo qui generalizzata (¹). STOLZ, come HAMBURGER, tratta così il problema della separazione dei rami, e — come lui — riduce con opportune trasformazioni il caso dei rami superlineari a quello dei rami lineari.

Il nostro studio comincia colla dimostrazione e l'estensione delle formule di Stolz per le derivate successive delle funzioni implicite e delle funzioni composte. Il simbolismo da noi introdotto permette di trattare l'argomento in base ai concetti generali della teoria delle operazioni, parallelamente allo sviluppo della potenza d'un polinomio. E l'applicazione delle formule di Calcolo così ottenute, conduce semplicemente al risultato richiesto di caratterizzare con condizioni differenziali i punti infinitamente vicini che costituiscono gli elementi d'una singolarità.

Il risultato sembra particolarmente importante per quanto si riferisce al caso dei punti satelliti e quindi dei rami superlineari, dei quali si mette in luce la genesi. Tacendo dei problemi nuovi cui si offre in tal guisa una risposta, diremo che il metodo classico di NEWTON-CRAMER per il calcolo dei coefficienti delle serie di PUISEUX, appare qui in una luce nuova e in un significato più profondo. Anche il rapporto col punto di vista aritmetico della teoria viene espresso mediante il diagramma con cui abbiamo figurato le nostre condizioni differenziali; dove ci si muove in un ordine d'idee note ai cultori di alcune recenti teorie aritmetiche (cfr. p. es. la « Geometrie der Zahlen » di MINKOWSKY).

(¹) Convieni ricordare che TARDY, nel Giornale di Matematiche di Napoli, fino dal 1864 aveva scritto formule generali per la derivazione delle funzioni implicite, le quali non sembra fossero note a Stolz. MOSSA (nello stesso Giornale e nell'anno 1875) ha generalizzato le formule di Tardy.

CAPITOLO IV

Appendice: singolarità delle curve gobbe e delle superficie.

30. Genesi della singolarità delle curve per proiezione: trasformazione di una curva piana in un'altra con soli nodi. — È noto che proiettando su un piano, da un punto generico dello spazio, una curva gobba C , pur priva di punti doppi, si ottiene una curva piana dotata di nodi (cfr. L. 3°, § 18).

Quando il centro di proiezione, O , assuma posizioni particolari, potranno nascere nella proiezione punti di molteplicità superiore o anche punti doppi o multipli con rami cuspidali. Così, per esempio, si ottiene un punto r -plo della proiezione C' se il nominato centro O cade sopra una retta secante la curva gobba in r punti, e si dà luogo per C' ad un ramo cuspidale se tale retta riesce tangente alla C .

Si può anche ottenere, come proiezione della stessa C , una curva piana dotata di qualche singolarità straordinaria: ad es. se la C è una quartica di prima specie (cioè con due punti doppi apparenti, cfr. L. 3°, § 18) si può proiettarla in una quartica piana dotata di tacnodo o di cuspidale di 2ª specie. Si raggiunge il primo scopo scegliendo il centro di proiezione, in modo generico, sopra una certa rigata luogo dei punti per cui passano due corde infinitamente vicine di C ⁽¹⁾; e

(1) La suddetta rigata, R , si lascia definire come luogo delle corde di C tali che le tangenti nei punti di appoggio di esse sono incidenti. Si vede effettivamente che per ogni punto di C passano 4 generatrici di R , avendosi 4 piani per una tangente a C che toccano altrove la curva. Di qui risulta anche che il grado di R vale 8, tenuto conto che una corda generica di C non incontra R fuori della curva quadrupla C .

(Lo studioso potrà verificare questa deduzione mediante il principio di continuità, considerando il caso in cui la C acquisti un punto doppio

si raggiunge il secondo scopo scegliendo O sopra la curva intersezione della suddetta rigata con la rigata sviluppabile circoscritta a C (fuori della C stessa).

In ciò che precede si discorre delle curve gobbe dello spazio ordinario S_3 , ma il discorso si estende alle curve gobbe iperspaziali. In generale si abbia una curva C , pur priva di punti doppi, appartenente ad uno spazio S_r , con $r \geq 3$; proiettando la C sopra un piano, da uno spazio S_{r-3} , si ottiene una curva dotata di punti doppi o multipli, ordinari o straordinari: tale curva proiezione possiederà un punto s -plo con h rami d'ordine $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ ($\Sigma \nu_i = r$) in corrispondenza ad uno S_{r-2} che passi per lo S_{r-3} centrale di proiezione e tocchi la C in h punti, con contatti d'ordine $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \dots, \nu_h - 1$.

Ora ogni singolarità d'una curva piana f si può far sorgere in tal guisa, avendosi il

Teorema: una qualsiasi curva piana dotata di singolarità qualunque può riguardarsi come proiezione d'una curva gobba iperspaziale priva di punti doppi ⁽¹⁾.

Sia f una curva piana dotata di singolarità qualunque; diremo (con NÖTHER) curve *aggiunte* ad f le curve φ assoggettate alla condizione di passare colla molteplicità $i - 1$ per ogni punto i -plo di f , sia che si tratti di punti multipli propri o di punti multipli infinitamente vicini.

Le condizioni che s'impongono alle curve aggiunte sono lineari e soddisfano alle disequaglianze di prossimità (cfr. §§ 13 e 17). Infatti se per la f si hanno dei punti di molteplicità j_1, j_2, \dots prossimi a un punto i -plo, sussiste la uguaglianza

$$i = \Sigma j$$

oppure due punti doppi, e quindi degeneri in una coppia di coniche. Nel primo caso il grado di R si calcola immediatamente ricorrendo ad una corrispondenza [6, 6] costruita sopra la quartica razionale C : vi sono 12 coincidenze che danno 6 generatrici di R ; il punto doppio ha diminuito di 2 il grado di R , ed è facile vederne la ragione. Il secondo caso in cui C degeneri in una coppia di coniche con due punti comuni — doppi per C — porta una corrispondenza [2, 2] sopra una conica: si hanno 4 coincidenze, e 4 è il grado di R .

⁽¹⁾ Il concetto generale dei punti doppi o multipli per una curva iperspaziale di S_r , che qui viene sottinteso, si definisce come segue: un punto i -plo O assorbe i intersezioni della curva con un iperpiano generico passante per esso.

da cui si trae

$$i - 1 \geq \Sigma(j - 1).$$

In base a ciò vediamo che, per un ordine m abbastanza elevato, possono ritenersi soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Le curve φ , d'ordine m , aggiunte ad f , formano un sistema lineare che possiede effettivamente come punto base $(i - 1)$ -plo ogni punto i -plo (proprio o no) di f ; ciò vale in particolare anche per $i = 1$, ossia i punti semplici di f non sono base per il sistema lineare delle φ .

2) Le φ costrette a passare per un qualsiasi punto semplice di f (sia per un punto proprio, sia per un punto infinitamente vicino ad un punto multiplo sopra uno dei rami per esso) non passano di conseguenza per nessun altro punto semplice di f (proprio o no).

Per dimostrare la 1) suppongasi in primo luogo che la f possieda una sola singolarità costituita da un punto proprio i -plo, O , a cui sieno infinitamente vicini i punti O_1, O_2, \dots di molteplicità i_1, i_2, \dots . Abbiamo allora che le φ di un ordine m abbastanza elevato, soggette alla condizione di passare per O, O_1, O_2, \dots con le molteplicità $i - 1, i_1 - 1, i_2 - 1, \dots$, soddisfano a $\sum \frac{(i-1)(i-2)}{2}$ condizioni lineari indipendenti (cfr. §§ 11, 12) e perciò posseggono in O e nei punti infinitamente vicini molteplicità effettive uguali alle virtuali. Ora si vede che codeste φ non passeranno di conseguenza per alcun punto semplice di f , infinitamente vicino ad O , perchè anche le condizioni di passaggio per questo punto, prese insieme con le precedenti, debbono riuscire indipendenti. Di più si può anche riconoscere che le nostre φ non passano di conseguenza nemmeno per un punto proprio P che sia dato comunque nel piano (fuori di O): infatti, se la singolarità O è di specie s , un gruppo di $(s + 1)(i - 1)$ rette passanti per O , costituisce una φ particolare avente nei punti infinitamente vicini ad O le molteplicità virtuali assegnate, la quale può d'altra parte suppersi non passare per P .

Per completare la dimostrazione della 1), nel caso in cui la f possieda diversi punti multipli propri O, P, \dots , basta osservare che si ottiene una φ aggiunta ad f , sommando ad una curva che si comporti come aggiunta rispetto all'intorno

di O , una curva che si comporti medesimamente rispetto all'intorno di P , e così via.

La proposizione 2) è un semplice complemento della 1). Infatti se, per ogni ordine m , comunque elevato, il sistema lineare delle curve aggiunte φ possedesse una *coppia neutra* di punti A e A' semplici per f (cioè se tutte le φ per A passassero di conseguenza per A'), aggiungendo i punti A e A' ai punti base delle φ che sono stati assegnati nei punti multipli di f , si otterrebbe un gruppo di punti (con date molteplicità) che non offrirebbero più condizioni indipendenti alle curve φ : il che, come nella proposizione 1), si dimostra falso per m abbastanza elevato.

Stabilite così le osservazioni 1) e 2), siano

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1},$$

$r+1$ curve aggiunte alla $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, di un ordine m abbastanza elevato; le φ anzidette si supporranno curve generali entro il sistema lineare delle aggiunte, e si assumerà $r > 2$. Costruiamo nello spazio $S_r = (y_1 y_2 \dots y_{r+1})$ la curva

$$F = \left\{ \begin{array}{l} y_1 \equiv \varphi_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 \equiv \varphi_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \dots \dots \\ y_{r+1} \equiv \varphi_{r+1}(x_1, x_2, x_3). \end{array} \right.$$

Fra i punti di F e quelli di f intercede una corrispondenza biunivoca, e precisamente: ad *ogni* punto semplice di f (proprio o infinitamente vicino ad un punto multiplo) corrisponde un punto di F ; viceversa ad *ogni* punto (proprio) di F corrisponde un punto di f , proprio o infinitamente vicino ad un punto multiplo: non può accadere che ad un punto di F corrispondano due punti di f perchè questi costituirebbero una coppia neutra per il sistema lineare delle φ . Segue di qui che la F non possiede alcun punto doppio (o multiplo), giacchè ad un punto doppio, che assorbe due intersezioni di F con gli iperpiani per esso, dovrebbe corrispondere una coppia di punti di f anzichè un sol punto.

Siamo riusciti in tal modo a trasformare birazionalmente la curva piana f in una curva gobba F , appartenente ad uno

spazio con $r \geq 3$ dimensioni, priva di punti multipli. Ove si assuma $r > 3$ si può anche supporre che la curva f sia una proiezione di F ; per es., per $r=4$, proiezione di una curva gobba di S_4 fatta da una retta. Infatti basta assumere due curve aggiunte φ_4 e φ_5 affatto generali e tre curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ per cui sia

$$\varphi_1 = \psi x_1, \quad \varphi_2 = \psi x_2, \quad \varphi_3 = \psi x_3,$$

essendo ψ una curva aggiunta (d'ordine $m-1$). In tal caso il sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 + \lambda_5 \varphi_5 = 0$, conterrà entro di sé la rete delle curve composte della parte fissa ψ e delle rette $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$; queste curve corrisponderanno agli iperpiani di $S_4 \equiv (y)$ passanti per la retta $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, così proiettando la F da questa retta sopra il piano $y_4 = y_5 = 0$ si ottiene precisamente la curva f . Ora si vede che F non possiede in generale punti multipli, la nominata retta $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, asse della nostra proiezione, incontrando la curva F in tanti punti semplici e distinti quante sono le intersezioni semplici e distinte di ψ con f .

(Se invece di $r=4$ si prende $r=3$, si ottiene ancora la costruzione di una F che da un suo punto viene proiettata in f , ma questo punto — corrispondente alla curva ψ che è fondamentale per il sistema $|\varphi|$ — riesce in generale multiplo per F). Si ha dunque il

Teorema: Ogni curva piana, con singolarità qualsiasi, si può ottenere come proiezione di una curva gobba priva di singolarità appartenente ad uno spazio con quattro (o più) dimensioni.

Le corde di una curva gobba di S_4 formano una varietà a 3 dimensioni, quindi proiettando la F da un punto generico del suo S_4 sopra un S_3 , si ottiene una *curva gobba dello spazio ordinario priva di singolarità, in corrispondenza birazionale con la curva piana f* : una tale curva si costruisce direttamente a partire da F , prendendo 4 curve aggiunte generali di un ordine abbastanza elevato, come si è visto innanzi.

Notizia storica. La possibilità di considerare una curva qualsiasi come proiezione di una curva gobba iperspaziale priva di punti singolari, costituisce un teorema di VERONESE (Math. Annalen, Bd. 19, 1881); il quale si può anche ritrovare come implicitamente contenuto nella teoria di BRILL

e NÖTHER delle serie lineari di gruppi di punti appartenenti ad una curva (Cfr. SEGRE, Annali di Matematica, serie 2, t. 25, n. 32).

Il teorema che concerne la trasformazione birazionale di una curva gobba in un'altra, dello stesso spazio S_3 , priva di punti multipli, trovasi esplicitamente dimostrato in una nota di POINCARÈ pubblicata nei Comptes rendus del 3 luglio 1893 (Cfr. anche PIERI, Rivista di Matematica, 1894). Allo stesso risultato si perviene pure con trasformazioni birazionali dello spazio contenente la curva, come vedremo in appresso.

Data una curva piana f , con singolarità qualsiasi, abbiamo veduto come si costruisca nello spazio (S_3) una curva F priva di singolarità in corrispondenza birazionale con f . Ora sappiamo che una curva gobba possiede una rigata di ∞^1 (e non ∞^2) trisecanti (cfr. L. 3°, § 43). Scegliendo un centro di proiezione fuori di questa rigata e fuori della sviluppabile circoscritta ad F , si proietterà la F in una nuova curva piana f' , dotata soltanto di nodi, la quale risulterà in corrispondenza biunivoca con f . Così viene dimostrato il fondamentale

Teorema. *Una curva piana con singolarità qualsiasi si può trasformare birazionalmente in un'altra curva dotata soltanto di nodi.* (Cfr. § 29 nota a piè di pag. 540).

Osservazione. Per ottenere la trasformazione anzidetta di f non importa passare attraverso una curva spaziale priva di singolarità: vi si perviene direttamente considerando tre curve aggiunte generali $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, di un ordine m abbastanza elevato, ove si ponga.

$$x_1' = \varphi_1(x_1 x_2 x_3)$$

$$x_2' = \varphi_2(x_1 x_2 x_3)$$

$$x_3' = \varphi_3(x_1 x_2 x_3);$$

eliminando $x_1 x_2 x_3$ fra le equazioni predette e la $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, si ha l'equazione trasformata

$$f'(x_1' x_2' x_3') = 0;$$

i punti doppi di f' corrispondono alle coppie di punti di f per cui passano ∞^1 curve della rete $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$.

31. **Le singolarità delle curve gobbe e la trasformazione quadratica spaziale.** — Nella teoria delle singolarità delle curve gobbe, appartenenti ad uno spazio di tre o più dimensioni, vi è luogo anzitutto ad estendere i risultati fondamentali ottenuti per le curve piane, mediante il metodo delle proiezioni. Ci riferiremo sempre, per semplicità di discorso, ad una curva gobba dello spazio ordinario, C . Si proietti C da un punto generico, O , sopra un piano generico, in una curva C' , e si consideri il punto A' , di C' , proiezione d'un punto singolare, A , di C : la molteplicità di A per C (numero delle intersezioni della curva con un piano o con una superficie passante semplicemente per A , assorbite in A) uguaglia la molteplicità di A' per C' . Ora:

1) I punti della curva gobba C infinitamente vicini ad A , si possono definire come quelli che corrispondono ai punti di C' infinitamente vicini ad A' , loro proiezioni; gli ordini di molteplicità dei primi sono gli ordini dei secondi.

2) La separazione della curva C' in rami per A' , dà luogo ad una separazione in rami della curva gobba C , nell'intorno di A : ogni ramo verrà rappresentato da uno sviluppo delle coordinate x, y, z , procedente per le potenze intere e positive d'un parametro t .

È anche lecito assumere il parametro t uguale alla potenza $x^{\frac{1}{\nu}}$ dove si designi con ν l'ordine del ramo (uguale all'ordine del ramo proiezione). Così viene esteso alle curve gobbe il teorema di PUISEUX.

La definizione dei punti multipli successivi d'una curva gobba che abbiamo introdotti con riferimento ad una proiezione piana generica, si può dare anche per mezzo di successive trasformazioni quadratiche (o birazionali) dello spazio.

Definiamo anzitutto la *trasformazione quadratica (ordinaria o di prima specie)* ⁽¹⁾ dello spazio, nel modo seguente.

(1) La trasformazione quadratica dello spazio che qui viene considerata si lascia caratterizzare come quella trasformazione di second'ordine la cui inversa è ancora di second'ordine; il suo studio risale a SCHIAPPARELLI (Memorie dell'Accademia di Torino, 1862) e ad altri. Ma esistono anche, nello spazio, delle *trasformazioni* birazionali di ordine 2, la cui trasformazione *inversa* è di ordine 3 o 4: la prima trasformazione (CAYLEY), si ottiene facendo corrispondere ai piani le quadriche passanti

Assumansi quattro quadriche linearmente indipendenti $\varphi_i(x_1x_2x_3x_4) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), che abbiano a comune una conica K ed un punto O ; scrivendo le equazioni

$$y_i = \varphi_i(x_1x_2x_3x_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

si pone una trasformazione univoca dello spazio (x) nello spazio (y) ; ai piani $\Sigma \lambda_i y_i = 0$ dello spazio (y) corrispondono le quadriche $\Sigma \lambda_i \varphi_i(x_1x_2x_3x_4) = 0$, e si ha proiettività (cioè corrispondenza di fascio a fascio e di rete a rete) fra il sistema lineare di quadriche e lo spazio di piani omologo; a una retta, considerata come asse di un fascio di piani nello spazio (y) , corrisponde, nello spazio (x) , una conica passante per O e bisecante K , e a un punto (y) , considerato come centro di una stella (rete di piani) corrisponde, nello spazio (x) , un punto comune alle ∞^2 quadriche di una rete che ha già come elementi base la conica K e il punto O . Così la trasformazione univoca fra lo spazio (x) e lo spazio (y) riesce univocamente invertibile, ed appare che ai piani dello spazio (x) corrispondono pure in (y) quadriche φ' , poichè la superficie che qui corrisponde ad un piano deve intersecare in due punti le rette, come il piano omologo incontra in due punti variabili le coniche per O bisecanti K :

$$x_i = \varphi'_i(y_1y_2y_3y_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Aggiungasi che, in questa trasformazione quadratica inversa, il sistema delle quadriche trasformanti φ' (che corrispondono ai piani dello spazio (x)), ammette pure una conica base, K' , e un punto base, O' . Infatti alla retta intersezione di due piani di (x) corrisponde una conica variabile comune a due quadriche φ' , sicchè queste devono avere a comune una linea del second'ordine, la quale non potrà essere costituita da due rette sghembe, altrimenti le due φ' avrebbero a comune, fuori di queste, altre due rette sghembe e non una conica.

per una *retta* e per *tre* punti base (cfr. pag. 560), mentre la seconda trasformazione nasce dal far corrispondere ai piani di uno spazio le quadriche dell'altro che passano per *quattro* punti base, vertici d'un tetraedro, e posseggono un *piano tangente* fisso in uno dei detti punti. Là classificazione e la teoria delle trasformazioni quadratiche dello spazio trovansi in diversi lavori del CREMONA, 1871, (cfr. Opere vol. 3°, pagg. 241, 260, 277, 298).

Si prova poi che le φ' , aventi a comune la conica K' , passano per un punto fisso O' , considerando che tre φ' devono avere una sola intersezione variabile.

Le cose dette ricevono una semplice illustrazione nel caso notissimo della inversione rispetto a una sfera che, moltiplicata per un'omografia, dà la più generale trasformazione biunivoca in cui ai piani corrispondono sfere: qui tutte le sfere omologhe ai piani di uno spazio passano per un punto fisso (che per l'inversione è il centro) e per un cerchio immaginario fisso, sezione col piano all'infinito.

Ora conviene esaminare particolarmente gli elementi eccezionali della trasformazione quadratica.

1) Ad ogni punto X dello spazio (x) corrisponde sempre un punto; fanno eccezione il punto fondamentale O , che chiameremo anche centro della trasformazione, e i punti della conica fondamentale K , per cui si annullano contemporaneamente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. In modo analogo nello spazio (y) si ha il punto fondamentale O' e la conica fondamentale K' .

2) A un piano α dello spazio (x) corrisponde generalmente una quadrica (φ') dello spazio (y); ma se il piano α viene a passare per il centro O , la quadrica omologa si spezza in un piano per O' , luogo dei punti omologhi ai punti generici di α , e in un piano fisso ω' corrispondente al punto fondamentale O : infatti, essendo α incontrato in un sol punto variabile dalle coniche per O , il luogo dei punti omologhi ai punti generici di α avrà una sola intersezione variabile con le rette dello spazio (y) e però sarà un piano; entra dunque nella quadrica corrispondente ad α un piano fisso ω' , che non deve avere intersezioni variabili con le coniche per O' bisecanti K' , e perciò sega le quadriche φ' secondo la conica K' . Appare così che le due stelle di piani per O e O' si corrispondono, e quindi che ai punti generici di ω' corrisponde sempre il punto O ; similmente al punto O' dello spazio (y) corrisponde nello spazio (x) il piano ω contenente la conica K . Perciò i piani ω e ω' si chiameranno *piani fondamentali* per la trasformazione.

3) A una retta dello spazio (x) corrisponde generalmente nello spazio (y) una conica passante per O' e bisecante la conica fondamentale K' ; ma se la retta data diviene una retta a passante per O (e non incidente a K) le corrisponderà, come luogo dei punti omologhi dei suoi punti generici, una retta a' passante per O' , essendovi omografia fra le due

stelle di piani O e O' : se si considera a come intersezione di due piani α e β , a questi corrispondono due quadriche spezzate nel piano fisso ω' (corrispondente a O) e in due piani α' e β' che si segano in a' .

La conclusione ottenuta innanzi è d'accordo con la circostanza che le rette per O hanno una sola intersezione variabile con le quadriche φ . Ora, per la stessa ragione, anche a una retta b dello spazio (x) incidente alla conica fondamentale K (e non passante per O) corrisponderà nello spazio (y) una retta b' , luogo dei punti omologhi ai punti generici di b : la conica corrispondente alla retta b degenera nella retta b' e in una retta corrispondente al punto fondamentale comune a b e K : infatti ai piani per b (che sono piani generici dello spazio) corrispondono quadriche φ' irriducibili, cioè senza parti comuni, la cui intersezione fuori di K' resta sempre una conica. Aggiungasi che la retta corrispondente al punto (bK) dovrà passare per O' e essere incidente a K' , perchè insieme a b' forma una conica passante per O' e bisecante K' .

Emerge di qui che a una retta c , passante per O e incidente a K , corrisponderà nello spazio (y) un punto fondamentale della conica K' , omologo di un punto generico di c ; per questo motivo le generatrici c del cono $O(K)$, e similmente quelle del cono $O'(K')$ nell'altro spazio, si diranno *rette fondamentali* della trasformazione; i due coni che corrispondono alle coniche fondamentali si diranno *coni fondamentali*.

In ciò che precede ci siamo tacitamente riferiti alla *trasformazione quadratica generale* in cui

- α) il centro O è fuori dal piano ω ;
- β) la conica fondamentale K è irriducibile.

In tal caso anche O' sarà fuori di ω' e la conica K' sarà irriducibile. La prima affermazione segue subito dall'osservare che fra due rette generiche a e a' per O e O' intercede una proiezione non degenera dove, al punto O' corrisponde il punto ($a\omega$) e al punto ($a'\omega'$) corrisponde il punto O . La seconda osservazione segue da ciò che alla conica K corrisponde nella trasformazione il cono $O'(K')$.

Per quanto concerne le possibili *specializzazioni della trasformazione quadratica*, basterà notare quanto segue:

1) Se il centro O va a cadere sul piano ω , fuori della conica K , il piano ω si stacca da tutte le quadriche φ , e perciò la trasformazione si riduce a una omografia.

2) Se il punto O si avvicina indefinitamente alla conica K , secondo una linea che non sia tangente al piano ω , si ottiene una trasformazione quadratica speciale dove il sistema trasformante $|\varphi|$ è costituito dalle quadriche passanti per K e tangenti in un punto di questa ad un piano che tocchi la conica.

3) Se (restando in generale O fuori del piano ω) si fa degenerare la conica K in due rette distinte r e s , si ottiene una seconda specializzazione della trasformazione quadratica, dove anche la conica fondamentale K' del secondo spazio degenera in due rette r' e s' . Ad un piano per la retta r , unisecante le coniche sezioni variabili di due φ , corrisponde nel secondo spazio un piano; questo passa per una retta r' parte di K' , perchè le sue rette riescono incidenti a K' . Ora nella nostra trasformazione quadratica speciale si corrispondono proiettivamente i fasci di piani r, r' e s, s' , quindi alle rette della stella che ha per centro il punto $Q = (rs)$ corrispondono le rette della stella $Q' = (r's')$; fra le due stelle si ha una trasformazione quadratica con le rette fondamentali $p = QO, r, s$, e $p' = Q'O', r', s'$.

4) Una particolarizzazione ulteriore del caso 3) si ha quando la conica K degenera in una retta r contata due volte, e quindi anche la K' degenera analogamente in una r' doppia. In questo caso le quadriche φ si riducono a coni sottoposti alla condizione di toccare lungo la r un piano fisso e di passare per il punto O ; la quale condizione definisce appunto un sistema lineare ∞^3 di coni, col vertice variabile sopra r .

Ritorniamo alla considerazione generale delle trasformazioni quadratiche. Si possono scrivere le equazioni della trasformazione quadratica fra due spazi distinti, in una forma (comprendente tutte le particolarizzazioni accennate innanzi) che mostri come qui venga generalizzata la trasformazione quadratica fra due piani. Convienne perciò scrivere le formule di quest'ultima ponendo in evidenza che vi sono sempre nei due piani due fasci di raggi corrispondenti, che possono rappresentarsi rispettivamente con $x = \text{cost.}$, $x' = \text{cost.}$

La corrispondenza proiettiva fra i due fasci può sempre suppersi data da

$$x' = x,$$

mentre fra due rette omologhe dei nominati fasci verrà

subordinata una proiettività:

$$y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}.$$

Ma in generale i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, che qui figurano, dipenderanno razionalmente da x ed anzi potranno supporre polinomi in x ; affinchè la sostituzione indicata ponga una trasformazione di second'ordine dovrà essere in generale

$$\alpha = \psi_1(x), \quad \beta = \psi_2(x), \quad \gamma = \theta_0, \quad \delta = \theta_1(x),$$

dove gli indici indicano i gradi dei polinomi: i tre punti fondamentali sono:

$$y = \infty, \quad \frac{x}{y} = 0;$$

e la coppia

$$\begin{cases} \psi_1(x)y + \psi_2(x) = 0, \\ \theta_0 y + \theta_1(x) = 0. \end{cases}$$

Le equazioni della trasformazione quadratica fra due piani, poste nella forma precedente, si generalizzano immediatamente passando allo spazio; ove si assumano le stelle proiettive corrispondenti coi centri nei punti all'infinito degli assi z e z' , si potrà scrivere:

$$\begin{array}{l|l} x' = x & x = x' \\ y' = y & y = y' \\ z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} & z = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha} \end{array}$$

con

$$\alpha = \psi_1(xy), \quad \beta = \psi_2(z y), \quad \gamma = \theta_0, \quad \delta = \theta_1(xy).$$

In questa forma le quadriche del sistema trasformante sono

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x(\theta_0 z + \theta_1) \\ \varphi_2 &= y(\theta_0 z + \theta_1) \\ \varphi_3 &= \psi_1 z + \psi_2 \\ \varphi_4 &= \theta_0 z + \theta_1. \end{aligned}$$

Infine si trova come punto fondamentale isolato il punto $z = \infty, \frac{y}{z} = \frac{x}{z} = 0$, e come conica fondamentale

$$\begin{cases} \psi_1(xy)z + \psi_2(xy) = 0 \\ \theta_0 z + \theta_1(xy) = 0, \end{cases}$$

da cui — eliminando z — segue l'equazione del cono fondamentale

$$\psi_1 \theta_1 - \psi_2 \theta_0 = 0$$

che, intersecato col piano fondamentale

$$\theta_0 z + \theta_1 = 0,$$

dà appunto la conica K .

Tutte le deduzioni precedenti ricevono quindi una facile verifica analitica.

Non ci soffermeremo su questi sviluppi, e neppure sulla determinazione dei vari casi particolari che la trasformazione quadratica può presentare. Vogliamo soltanto accennare alle formule relative alla particolarizzazione 4) che avremo occasione di usare in seguito sotto la forma

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Queste formule si lasciano ricondurre al tipo precedente, ove si assumano come punti fondamentali isolati O e O' , non già i punti all'infinito degli assi z e z' , ma l'origine delle coordinate ($x=0, y=0, z=0$) e il punto all'infinito dell'asse x'

$$\left(x' = \infty, \quad \frac{y'}{x'} = 0, \quad \frac{z'}{x'} = 0 \right):$$

il sistema trasformante $|\varphi|$ è costituito dalle quadriche

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y + \lambda_2 z + \lambda_3 x = 0$$

che sono cilindri parabolici passanti per l'origine e tangenti al piano all'infinito lungo la retta segata dal piano $x=0$ ⁽¹⁾.

(1) L'inversione rispetto ad una sfera

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

si riattacca pure al tipo generale precedente, tenuto conto che il punto fondamentale isolato così del primo come del secondo spazio cade nell'origine, mentre la conica fondamentale è (per ambedue gli spazi) il cerchio all'infinito delle sfere.

La trasformazione quadratica offre il mezzo di analizzare le molteplicità dei punti successivi di una curva gobba. A fondamento di quest'analisi stà l'osservazione seguente:

Nella trasformazione quadratica che ha come centro il punto O e come piano fondamentale omologo il piano ω' , ai punti infinitamente vicini a O , nell'intorno di prim'ordine, corrispondono i punti propri di ω' , avendosi omografia fra la stella delle direzioni uscenti da O e il piano ω' . (Cfr. L. 1°, § 17).

Si può aggiungere che, se si considera un punto fondamentale, A , della conica K , ai punti infinitamente vicini ad A , nell'intorno del prim'ordine, corrispondono i punti della retta omologa a' : qui accade che ai punti dell'intorno di A giacenti in un piano tangente a K corrisponde il medesimo punto di a' , e vi è proiettività fra i piani del fascio che ha per asse la tangente a K e i punti omologhi di a' .

Ora, essendo data una curva gobba C , ed un suo punto singolare P , si operi una trasformazione quadratica generale assumendo nel punto P il centro O della trasformazione; sopra la curva trasformata C' e nel piano ω' , corrispondente a O , otterremo dei punti (semplici o multipli) propri, in corrispondenza ai punti vicini a P appartenenti all'intorno del prim'ordine. Si applichi di nuovo a C' una trasformazione quadratica a partire da un punto multiplo corrispondente ad un punto infinitamente vicino a P , assunto come centro, e così di seguito. Si ottiene in tal guisa una serie di curve trasformate di C , e sopra queste dei punti multipli propri che definiscono una *serie di composizione della singolarità P* (cfr. § 14).

La decomposizione così ottenuta della singolarità P di C , vale a mettere in evidenza come punti propri, multipli o semplici, di curve trasformate, i punti infinitamente vicini che costituiscono gli elementi della singolarità, P , di C . Si dimostra infatti che la *definizione dei punti infinitamente vicini a P , data per mezzo di successive trasformazioni quadratiche spaziali, equivale alla definizione attraverso una proiezione piana generica*, che abbiamo incontrato nel paragrafo precedente. Per quanto questa asserzione sia di carattere intuitivo essa non costituisce meno un punto delicato della teoria: se ne può dare una semplice giustificazione come segue.

Anzitutto osserviamo che la decomposizione della singolarità P , a partire da una trasformazione quadratica che abbia

in P il centro O , non viene modificata se si fa variare con continuità la conica fondamentale K , purchè il piano ω non venga a passare per O ⁽¹⁾. È dunque lecito — in particolare — di far degenerare la conica K in due rette distinte r e s incrociantisi in un punto Q , cioè si può procedere nell'analisi della singolarità di C operando con successive trasformazioni quadratiche speciali, quelle considerate innanzi come particolarizzazione 3) della trasformazione generale.

Ciò posto si proietti la curva C dal punto Q (che è generico rispetto ad essa) sopra un piano generico, per esempio per il punto $P = O$, ottenendo così una curva piana C_1 con un punto singolare in O . La nostra trasformazione quadratica spaziale trasforma la stella di rette Q in una stella di rette Q' , subordinando fra le due stelle una trasformazione quadratica. Pertanto se si proietta la curva C' , trasformata di C , dal punto Q' in una curva piana C'_1 , situata sopra un piano generico, avremo fra i piani di C_1 e C'_1 una trasformazione quadratica con punto fondamentale O , sicchè la stessa riduzione che la trasformazione quadratica spaziale offre per la singolarità P della curva gobba C , si ottiene per la singolarità $O = P$ della proiezione C_1 colla trasformazione quadratica piana che muta C_1 in C'_1 : ciò vale a mostrare che « se sopra la curva C viene definita mediante la proiezione piana C_1 una serie di punti successivi a P : P_1, P_2, P_3, \dots , la curva gobba C' , trasformata di C , conterrà una serie di punti successivi aventi le stesse molteplicità di P_1, P_2, P_3, \dots » (Se bastasse considerare punti vicini a P nell'intorno del prim'ordine, si vedrebbe subito che le molteplicità di questi definite attraverso la proiezione o con la trasformazione quadratica spaziale sono identiche, giacchè si riducono ambedue al computo delle intersezioni della curva con un piano passante per una sua tangente).

Infine vogliamo osservare che, quando si opera una trasformazione quadratica a ridurre una singolarità della curva gobba C , si produce nella trasformata C' un nuovo punto multiplo, che è in generale a tangenti distinte: questo punto nasce dal gruppo delle intersezioni di C col piano fonda-

(1) Anzi, qualsiasi trasformazione birazionale dello spazio, T , in cui O figuri come punto base isolato per il sistema delle superficie trasformanti che corrispondono ai piani, porge la stessa decomposizione della singolarità. Imperocchè due trasformazioni siffatte differiscono fra loro per una trasformazione regolare nell'intorno di O .

mentale ω , fuori della conica K , e così la sua produzione si presenta necessariamente (salvo casi particolarissimi) tanto se si pone in P il punto fondamentale isolato O , come se si fa passare per P la conica fondamentale K . Pertanto potremo concludere che: *mediante successive trasformazioni quadratiche, di prima specie, una curva gobba dello spazio si può sempre trasformare in un'altra dotata di punti multipli a tangenti distinte, ma non in una curva priva di punti multipli.*

Invece si possono mandar via i punti multipli usando di trasformazioni quadratiche di seconda specie; come passiamo a indicare.

Designamo col nome di *trasformazione quadratica di seconda specie* la trasformazione che si ottiene riferendo proiettivamente il sistema dei piani dello spazio $(x'y'z')$ al sistema lineare $\infty^3|\varphi|$ costituito dalle quadriche che passano per una retta (fondamentale) d e per tre punti A, B, C ; due φ si segano secondo una cubica gobba variabile, tre φ hanno comune un punto variabile ⁽¹⁾ e quindi la trasformazione è univocamente invertibile, e ai piani dello spazio (xyz) (secanti in tre punti le intersezioni variabili di due φ) corrispondono nello spazio $(x'y'z')$ superficie cubiche ψ .

Si può vedere più precisamente che le ψ sono superficie cubiche rigate passanti doppiamente per una retta d' e semplicemente per tre generatrici a', b', c' : queste generatrici semplici corrispondono ai piani dA, dB, dC , giacchè ogni retta del fascio Ad offre una condizione alle quadriche φ che debbono contenerla ed è intersecata in un punto dai piani, sicchè si trasforma in un punto semplice per le superficie ψ ; invece la retta doppia d' nasce dal piano ABC che è segato dalle φ (per d, A, B, C) secondo le coniche di un fascio, a ciascuna delle quali (per il fatto di offrire una sola condizione alle φ e di essere intersecata in 2 punti da un piano) corrisponde un punto doppio dellè ψ .

Aggiungasi che ai piani per d (secanti in un punto variabile la intersezione di due φ) corrispondono nel secondo spazio piani per la retta d' : vi è omografia fra due piani omologhi per d e d' ,

(1) Questa proprietà risulta da ciò che l'intersezione di due quadriche aventi una generatrice in comune è una cubica gobba di cui questa generatrice è corda (cfr. § 45).

poichè alle rette del primo — sezioni delle φ — corrispondono le rette del secondo segate dai piani omologhi.

Ora la retta omologa della d , considerata in un piano per d , varierà con questo, descrivendo una superficie rigata Δ' a cui appartengono $a'b'c'$ e — siccome le cubiche intersezioni di due φ si appoggiano a d in due punti — le rette del secondo spazio incontreranno Δ' in due punti, cioè Δ' sarà una quadrica passante per d' . L'altro sistema di generatrici della Δ' è formato da rette che corrispondono ai punti di d : invero ad un punto P di d , e al suo intorno sopra un piano per d , risponde un punto, variabile con questo piano, che descrive una retta p' appartenente a Δ' ; la corrispondenza fra l'intorno di P e i punti di p' riproduce le circostanze che già abbiamo osservato nei riguardi dei punti della conica fondamentale K per una trasformazione quadratica di prima specie.

A riprova di quanto sopra abbiám trovato si noterà che: imponendo alle superficie cubiche dello spazio ($x'y'z'$) di passare doppiamente per una retta d' e semplicemente per tre rette a', b', c' incidenti a d' , si ottiene un sistema $\infty^3 |\psi|$ di superficie cubiche rigate, secantisi a due a due in una conica e a tre a tre in un punto variabile; questo sistema costituisce il sistema trasformante di una trasformazione cubica la cui inversa è di second'ordine; alle rette incidenti alle a', b', c' (le quali formano una rigata quadrica Δ') corrispondono i punti di una retta d comune alle quadriche trasformanti φ ; invece ai tre piani fondamentali $d'a', d'b', d'c'$, corrispondono tre punti semplici comuni alle φ . La corrispondenza che intercede fra un punto P della retta fondamentale d e la generatrice omologa p' della quadrica Δ' , trasforma l'intorno di P sopra un piano per d in un punto della p' , allo stesso modo come abbiám visto accadere per riguardo ai punti della conica fondamentale K , in una trasformazione quadratica di prima specie.

Ciò posto possiamo applicare la trasformazione quadratica di seconda specie, in luogo di quella di prima specie, per la riduzione di una singolarità di una curva gobba (cfr. la nota di pag. 559): basta porre il punto singolare P in uno dei tre punti fondamentali isolato, p. es. in A (o anche sopra la retta fondamentale d). Ma la trasformazione di seconda specie, a differenza di quella di prima, non possiede — nello spazio (xyz) — alcuna superficie fondamentale a cui corrisponda un punto; se

si opera con una trasformazione generica, la riduzione della singolarità P ha luogo senza creare nuovi punti multipli della curva trasformata. Quindi si conclude:

Mediante trasformazioni quadratiche di seconda specie, una curva gobba, dotata di singolarità qualsiasi, si può trasformare in un'altra priva di punti multipli.

32. Varie specie di punti satelliti che figurano nella singolarità di una curva gobba: analisi mediante la rappresentazione parametrica. — Analogamente a ciò che abbiamo veduto nello studio delle singolarità delle curve piane, accade anche qui che i punti infinitamente vicini ad un punto proprio, costituenti la singolarità di una curva gobba, occupino posizioni notevoli, le quali valgono a caratterizzare i vari tipi di rami d'ordine superiore. Già quando si consideri la successione di tre punti infinitamente vicini OO_1O_2 , può darsi che O_2 giaccia sopra la retta OO_1 , o stia entro un determinato piano OO_1O_2 sopra un ramo lineare, o invece sia satellite di O_1 , *in questo piano*, trovandosi dunque sopra un ramo del second'ordine ($O^2O_1^1[O_2^1]$). Ma vi è luogo a considerare diverse posizioni notevoli per i punti O_3, O_4, \dots successivi di O_2 . Supporremo O_2 satellite di O_1 nel piano OO_1O_2 , caso che merita di essere approfondito conducendo a relazioni essenzialmente nuove.

1) Il punto O_3 può appartenere al piano (OO_1O_2) ed occupare la posizione del primo punto libero sopra un ramo del second'ordine; in tal caso esso non possiede due gradi di libertà come un punto *libero* di una curva gobba generale per OO_1O_2 , ma soltanto *un* grado di libertà, e perciò potrà dirsi *semilibero*, o *semisatellite* di O_2 . I punti così definiti si diranno più precisamente *semisatelliti (piani) di prima specie*. Ancora semisatelliti di prima specie di O_2 dovranno considerarsi i punti successivi O_4, O_5, \dots ove appartengano sempre al piano (OO_1O_2) .

2) Ora se il punto O_3 , nel piano (OO_1O_2) , è uno dei due punti successivi ad O_2 e appartenenti al gruppo satellite di O_2 (cfr. § 9, pag. 386), le due posizioni di O_3 , riescono determinate rispetto ad O_2 , e perciò dovrà ritenersi O_3 come *satellite* di O_2 nei riguardi delle curve gobbe che lo contengano; diremo più precisamente che i due punti O_3 nominati sono *satelliti piani* di O_2 .

3) Se si trasforma l'intorno del punto O in un piano ω ,

mediante una trasformazione quadratica dello spazio, accade che i punti (trasformati di) O_1 e O_2 si trovino nel piano ω ; allora può darsi che anche il punto (trasformato di) O_3 appartenga ad ω , trovandosi sopra un ramo lineare $(O_1O_2O_3)$: in questo caso il punto O_3 possiede un grado, di libertà, e perciò dovrà ritenersi come *semisatellite di O_2* ; più precisamente punti siffatti si diranno *semisatelliti gobbi di prima specie*. (Se l'anzidetto ramo lineare $O_1O_2O_3$ diventa rettilineo, O_3 ricade nel piano OO_1O_2 e si riduce a uno dei satelliti di O_2 considerati innanzi). Ancora semisatelliti di prima specie di O_2 saranno i punti successivi O_4, O_5, \dots , ove — dopo la trasformazione — appartengano sempre al piano ω .

4) Se, come nel caso precedente, il punto O_3 (trasformato) appartiene al piano ω , ma è ivi satellite di O_2 , dovrà ritenersi O_3 come *satellite di O_2* . Qui O_3 occupa una posizione determinata fuori del piano (OO_1O_2) e può designarsi come *satellite gobbo di O_2* .

5) Finalmente può darsi che O_3 sia satellite di O_2 sopra un piano per O_1O_2 diverso da (OO_1O_2) ; in questo caso — eseguita la nostra trasformazione — il punto O_3 succederà ad O_2 sopra un ramo di second'ordine di origine O_1 , tangente al piano ω ma non giacente in questo. La nostra ipotesi porta che O_3 abbia un solo grado di libertà, e però ancora O_3 dovrà ritenersi *semisatellite di O_2* (semisatellite di *seconda specie*). Ancora semisatelliti di seconda specie di O_2 saranno i punti successivi di O_4, O_5, \dots , ove siano satelliti di O_2 sopra il piano $(O_1O_2O_3)$.

Aggiungasi che un punto O_4 , il quale appaia satellite di O_3 (piano o gobbo) sopra una curva trasformata di C per cui O_1 sia diventato un punto proprio, dovrà ritenersi anche come satellite di O_2 su C , e così via per O_5, \dots .

Ora è chiaro che se è data una successione di punti satelliti di $O_2 : O_3O_4 \dots O_i$, sopra una curva C , è sempre possibile immaginare una nuova curva la quale passi per un ulteriore punto satellite succedente ad O_i . L'estensione del gruppo di punti satelliti $G = O_3 \dots O_i$ può farsi precisamente in tre modi, avendosi — nello spazio — tre punti successivi ad O_i e satelliti di O_i .

Intorno al gruppo dei punti satelliti che può riattaccarsi ad O_2 , valgono anche le seguenti osservazioni:

se il punto O_3 dipende da O_2 come semisatellite di

prima specie, esso può definirsi come appartenente a un ramo del second'ordine di origine O ;

invece se O_3 dipende da O_2 come semisatellite di seconda specie, esso viene definito come appartenente a un ramo di terz'ordine.

I tre punti satelliti di O_2 sono definiti come successivi ad OO_1O_2 sopra tre tipi di rami del terz'ordine:

$$(O^3O_1^2O_2^1O_3^1) \quad (O^3O_1^2O_2^1O_3^1) \quad (O^3O_1^1O_2^1O_3^1),$$

il primo dei quali è gobbo e gli altri due piani; i punti O_3 definiti sui due primi rami possono ritenersi contemporaneamente come semisatelliti di prima e seconda specie.

Ciò che precede contiene virtualmente l'analisi di tutti i possibili casi di satellitismo o di libertà limitata a cui possono dar luogo i punti successivi d'un ramo gobbo, imperocchè al ramo $OO_1O_2O_3O_4\dots$ si può sostituire — con una trasformazione quadratica — un ramo $O_1O_2O_3O_4\dots$.

Tuttavia si ottengono relazioni più complicate di quelle elementari definite innanzi, considerando punti (satelliti) che dipendono per la posizione loro da semisatelliti, ovvero semisatelliti di satelliti o di semisatelliti: in tutti questi casi si può parlare — in un senso più generale — di semisatellitismo.

Senza entrare in troppe minute distinzioni basterà accennare a tali possibilità, mettendo in vista che sopra un ramo di curva gobba ad un gruppo di punti, G , contenente tutti i satelliti di O_2 (o di un primo punto non libero O_{i+1}), succederà in generale un secondo gruppo, G_1 , iniziantesi con un punto libero o semilibero a cui si riattaccherà un certo numero (≥ 0) di punti satelliti, e poi un analogo gruppo G_2 , e così di seguito: infine si perverrà a gruppi costituiti di un unico punto libero e semplice.

Ad illustrare le cose precedenti diremo ancora che la struttura di un qualsiasi ramo di curva gobba si può rappresentare mediante uno schema perfettamente analogo allo schema grafico incontrato nello studio dei rami piani. Avremo precisamente una linea la quale si ripiega ad angolo retto nel vertice O_i quando O_{i+1} è satellite di O_i nel piano ($O_{i-1}O_iO_{i+1}$); inoltre il piano ($O_iO_{i+1}O_{i+2}$) coinciderà con ($O_{i-1}O_iO_{i+1}$) se O_{i+2} è semisatellite di prima specie di O_{i+1} ; invece O_{i+2} sarà semisatellite di seconda specie di O_{i+1} ove sia il segmento $O_{i+2}O_{i+1}$ perpendicolare al segmento O_iO_{i+1} , in un piano qualsiasi

Infine il nostro schema metterà in evidenza il punto O_{i+2} come satellite di O_{i+1} nello spazio quando accada che i punti $O_i O_{i+1} O_{i+2}$ siano per diritto, oppure che il segmento $O_{i+1} O_{i+2}$ sia perpendicolare ad $O_i O_{i+1}$, nel piano $O_{i-1} O_i O_{i+1}$ ovvero in un piano perpendicolare a questo.

Lo schema $(OO_1 \dots O_i O_{i+1} \dots)$ di un ramo di curva gobba pone in evidenza un gruppo di punti $O_{i+1} \dots$ che trovansi in un piano perpendicolare al segmento $O_{i-1} O_i$; questi punti si diranno *punti prossimi* ad O_i . La definizione generale dei punti prossimi ad un punto qualunque O_i , si lascia ridurre al caso in cui si tratti dei punti prossimi ad un punto proprio O ; i punti prossimi ad O sono quelli i cui trasformati appartengono al piano fondamentale ω . Appare di qui che: *la molteplicità di un ramo, o di una curva gobba, in un punto è uguale alla somma delle molteplicità nei punti prossimi.*

Pertanto, ove si consideri la linea schema di un ramo di curva gobba, partendo da un punto semplice e libero, e percorrendo la linea verso l'origine, si determina l'ordine di molteplicità del ramo tenendo conto nei passaggi successivi della relazione di prossimità.

Vogliamo anche aggiungere in qual modo lo schema di un ramo di curva gobba si colleghi allo schema grafico di una sua proiezione piana generica. Il fatto fondamentale è il seguente: *nel passaggio da una curva gobba ad una proiezione piana generica si conserva il rapporto di prossimità.* Infatti per proiezione si conservano gli ordini di molteplicità di O e dei suoi punti successivi.

Segue dal principio enunciato che, se sopra un ramo di curva gobba O_3 è semisatellite gobbo di O_2 , di prima o di seconda specie, in una proiezione piana O_3 diventa satellite di O_1 ; invece se O_3 è semisatellite piano (di prima specie) di O_2 esso si proietta in un punto libero, almeno finchè O_3 non divenga satellite di O_2 (e perciò appartenga anche alla categoria dei semisatelliti di seconda specie). Così appare come *lo schema di un ramo di curva gobba non può dedursi senz'altro dallo schema grafico di una sua proiezione piana generica.*

È un problema essenziale quello di determinare i punti successivi di un ramo di curva gobba dato per mezzo della sua rappresentazione parametrica, indicando in particolare le

relazioni di satellitismo fra questi punti, relazioni che permettono di costruire lo schema del ramo.

Assumasi un ramo di curva d'ordine ν per mezzo di una rappresentazione parametrica del tipo

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^\nu + \dots \\ z = bt^\nu + \dots; \end{cases}$$

l'origine del ramo cade nell'origine O delle coordinate; la tangente al ramo è la retta

$$y = ax \quad z = bx,$$

sicchè il punto O_1 , successivo ad O sul ramo, ha per coordinate a e b . Assumasi la detta tangente come asse x ($y = z = 0$), avremo allora $a = b = 0$, e quindi la rappresentazione parametrica del nostro ramo sarà del tipo:

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+\mu} + \dots \\ z = bt^{\nu+\mu} + \dots; \end{cases}$$

il ramo avrà colla tangente (cioè con un piano generico per essa) $\nu + \mu$ intersezioni.

Ora il piano osculatore al ramo (avente con esso più intersezioni che la tangente) sarà dato da

$$by - az = 0.$$

Prendendo questo piano osculatore come piano $z = 0$ diventa $b = 0$, e quindi la rappresentazione parametrica del ramo assume la forma canonica

$$1) \quad \begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+\mu} + \dots \\ z = bt^{\nu+\mu+\lambda} + \dots \end{cases}$$

dove

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad \mu \geq 1, \quad \lambda \geq 1;$$

il piano osculatore avrà col ramo $\nu + \mu + \lambda$ intersezioni.

I due caratteri μ e λ , che così si presentano accanto all'ordine ν di un ramo, possono designarsi come prima e seconda classe del ramo (1).

Data la rappresentazione parametrica di un ramo 1) sotto la forma canonica, possiamo determinare i punti multipli successivi all'origine O , procedendo in modo affatto analogo al caso piano (§ 20, pag. 455), con l'applicazione reiterata di trasformazioni quadratiche speciali del tipo:

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Anzitutto se

$$\mu = h\nu + \mu_1, \quad (0 < \mu_1 \leq \nu),$$

si trovano sopra la tangente h punti ν -pli ed un punto μ_1 -plo successivi ad O . Il punto che segue, O_{h+2} , sarà libero se $\mu_1 = \nu$, ed invece sarà satellite di O_{h+1} se $\mu_1 < \nu$. Come caso elementare tipico possiamo assumere l'ipotesi

$$h = 0, \quad \mu = \mu_1 < \nu,$$

dignisachè la tangente al ramo contiene un solo punto O_1 successivo ad O , ed il piano osculatore contiene (almeno) un altro punto O_2 , satellite di O_1 (entro questo piano).

Importa determinare i punti satelliti di O_2 che appartengono al nostro ramo, i quali non possono dipendere affatto dai coefficienti che figurano nelle formule 1), e dipenderanno invece dai numeri ν , μ e λ che figurano negli esponenti dei primi termini.

Eseguiamo sopra il ramo 1) la trasformazione che lascia fermo x e sostituisce y e z con $\frac{y}{x}$ e $\frac{z}{x}$; scambiando poi le coordinate x e y avremo il ramo trasformato

$$2) \quad \begin{cases} x = at^\mu + \dots \\ y = t^\nu \\ z = bt^{\mu+\lambda} + \dots \end{cases} \quad (\mu < \nu)$$

(1) Rango e classe secondo HALPHEN, primo e secondo rango secondo BERTINI; ma noi avemmo già ad usare il nome rango nella teoria delle singolarità delle curve piane in un senso affatto diverso, che trova pure la sua immediata estensione alle curve gobbe.

che è di ordine μ , e la cui prima classe (contatto con la tangente) uguaglia il più piccolo dei due numeri $\nu - \mu$ e λ .

La rappresentazione 2) pone in evidenza come punto proprio (origine) il punto O_1 , successivo ad O sul ramo 1). Ripetiamo la trasformazione eseguendo le divisioni come nel § 20, (pag. 455); avremo il ramo

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = at^\mu + \dots \\ y = \frac{1}{a} t^{\nu-\mu} + \dots \\ z = \frac{b}{a} t^\lambda + \dots \end{array} \right.$$

L'origine di questo ramo è il punto (trasformato di) O_2 : la sua molteplicità uguaglia il più piccolo dei tre numeri $\mu, \nu - \mu, \lambda$. Se questo più piccolo numero è ancora μ si ripeterà la trasformazione che consiste nel dividere y e z per x . Altrimenti si scambieranno fra loro gli assi x e y o x e z scrivendo la rappresentazione del ramo in guisa che l'asse x ne sia la tangente. Ciò suppone tuttavia che il minore dei tre numeri $\mu, \nu - \mu, \lambda$ sia determinato: altrimenti occorre un cambiamento d'assi che introduce uno o due parametri dipendenti dai coefficienti a e b . Escluso che s'incontri questo caso di indeterminazione procederemo via via a nuove trasformazioni del ramo, che metteranno in evidenza punti successivi non dipendenti affatto dai coefficienti a, b, \dots ma determinati in funzione dei numeri interi ν, μ, λ , e perciò satelliti del punto O_2 . Le terne di esponenti che figurano nei primi termini dei successivi rami trasformati si deducono *a priori* operando sui numeri $\nu, \nu + \mu, \nu + \mu + \lambda$ con un algoritmo che vogliamo designare col nome di *procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*: ad ogni passaggio si sottrae il più piccolo dei due numeri dagli altri due ⁽¹⁾. Ma l'anzidetto procedimento ternario non dovrà esser proseguito fino a quello che sarebbe il suo termine naturale, cioè fino

(1) Secondo il modo comune per procedere alla ricerca del massimo comun divisore di tre numeri si assumono questi in un certo ordine α, β, γ , e si applica l'algoritmo euclideo, interpretato come un procedimento binario, ricercando prima il m. c. d. $(\alpha\beta)$, poi quello dei due numeri m. c. d. $(\alpha\beta)$ e γ .

a che si trovino tre resti uguali (designanti il massimo comun divisore di ν , $\nu + \mu$, $\nu + \mu + \lambda$); converrà arrestarci quando accada di trovare due numeri uguali minori del terzo.

Ora, dovendo esaminare le circostanze a cui dà luogo l'arresto del nostro procedimento, supporremo addirittura — per semplicità di discorso — che manchi l'unicità del minimo fra i tre numeri μ , $\nu - \mu$, λ .

Anzitutto se questi tre numeri sono uguali fra loro, la tangente al ramo 3), e quindi il punto (O_3) successivo all'origine su questa, non dipende più dal valore dei suddetti esponenti ma dalle coordinate a e b , ossia è un punto libero.

Invece se due soltanto fra i numeri μ , $\nu - \mu$, λ , e precisamente i più piccoli, sono fra loro uguali, la tangente al ramo resterà vincolata a giacere in uno dei piani coordinati, sicchè O_3 apparirà come un punto semisatellite di O_2 . Per determinare precisamente la natura di questo semisatellitismo, conviene distinguere i casi seguenti.

$$\alpha) \mu = \nu - \mu < \lambda.$$

La tangente al ramo 3) è

$$a^2 y - x = 0, \quad z = 0,$$

e, cambiando $a^2 y - x$ in y si ottiene una rappresentazione del tipo

$$3') \quad \begin{cases} x = at^\mu + \dots \\ y = a_1 t^{\mu+\mu'} + \dots \\ z = \frac{b}{a} t^\lambda + \dots; \end{cases}$$

pertanto la posizione del punto O_3 (semisatellite di O_2) appare dipendere dalla coordinata a^2 (che figura come parametro nell'eseguito cambiamento di assi), mentre la sua molteplicità è data dal più piccolo fra i due numeri μ , $\lambda - \mu$, μ' .

In modo diretto si vede che O_3 è sul ramo 1) semisatellite piano di prima specie di O_2 , giacchè O_1 e O_2 sono μ -pli e il piano osculatore (OO_1O_2) possiede $\nu + \mu + \lambda > \nu + 2\mu$ intersezioni con la curva: il fatto che O_3 sia semisatellite e non satellite di O_2 , risulta geometricamente da ciò che la molteplicità di O uguaglia la somma delle molteplicità di O_1 e O_2 ,

e che queste ultime due sono uguali, quindi O_3 non può essere prossimo nè ad O nè ad O_1 .

$$\beta) \mu = \lambda < \nu - \mu.$$

Ancora O_3 viene a dipendere da un solo parametro, cioè risulta semisatellite di O_2 . In modo geometrico ciò si riconosce osservando che la molteplicità, ν , di O supera la somma delle molteplicità μ e λ di O_1 e O_2 , quindi O_3 è prossimo ad O : così appare che O_3 è semitellite gobbo di prima specie di O_2 ; si esclude che O_3 sia satellite perchè non può trovarsi sul piano osculatore che ha

$$\nu + \mu + \lambda = \nu + 2\mu$$

intersezioni con la curva, e nemmeno può essere prossimo ad O_1 avendo O_1 e O_2 la stessa molteplicità.

$$\gamma) \nu - \mu = \lambda < \mu.$$

Qui medesimamente si trova che O_3 dipende da un solo parametro; ma si tratta ora di un semisatellite di seconda specie. Infatti O_3 appare prossimo ad O_1 ma non ad O , e fuori del piano osculatore (OO_1O_2).

Ciò che abbiamo detto vale a spiegare in generale come si possano determinare i punti successivi di un ramo

$$1) \begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+\mu} + a_1 t^{\nu+\mu+\mu'} + \dots \\ z = bt^{\nu+\mu+\lambda} + b_1 t^{\nu+\mu+\lambda+\lambda'} + \dots; \end{cases}$$

le molteplicità di questi punti vengono fornite secondo un certo procedimento per la ricerca del massimo comun divisore fra gli esponenti che figurano negli sviluppi di x , y e z : il procedimento prenderà in considerazione terne successive di numeri secondo il metodo ternario. Ciascuna terna caratteristica (formata di tre numeri diseguali) darà luogo ad una serie di terne che si arresta quando si pervenga a tre numeri uguali (coincidenti col massimo comun divisore della terna caratteristica), ovvero a due numeri uguali minori del terzo. La prima terna caratteristica ($\nu, \nu + \mu, \nu + \mu + \lambda$) determina un gruppo G , formato da un certo numero i di punti successivi all'origine O , il qual G (supposto ν non divisibile per μ) comprende tutti i satelliti del primo punto appartenente al piano

osculatore e non alla tangente ⁽¹⁾. La seconda terna caratteristica determina un successivo gruppo di punti, G_1 , la cui posizione è pienamente determinata da quella del suo primo punto O_{i+1} : questo O_{i+1} , dipendente dai primi coefficienti degli sviluppi 1), sarà un punto libero o semilibero (e quindi da riattaccarsi come semisatellite al punto da cui dipendono i satelliti precedenti) secondochè la terna caratteristica su cui si opera contiene due nuovi numeri formati cogli esponenti successivi, oltre al massimo comun divisore di ν , $\nu + \mu$, $\nu + \mu + \lambda$, oppure un solo nuovo numero oltre a due numeri diseguali provenienti dall'algoritmo messo in opera sulla prima terna, ecc.

In ultima analisi il procedimento del massimo comun divisore condurrà all'unità, giacchè gli esponenti che figurano negli sviluppi 1) non possono avere altro divisore comune: allora si troveranno punti semplici del nostro ramo, ed anche — da un certo punto in poi — punti liberi.

A maggior chiarimento delle cose dette varranno alcuni semplicissimi

Esempi.

1) Il ramo *generale* d'ordine ν

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+1} + a_1 t^{\nu+2} + \dots \\ z = bt^{\nu+2} + b_1 t^{\nu+3} + \dots \end{array} \right.$$

è un ramo gobbo ordinario, di classi 1 e 1, su cui esistono ν punti semplici $O_1 O_2 \dots O_\nu$, prossimi all'origine O : i punti $O_3 \dots O_\nu$ sono semisatelliti di prima specie di O_2 ; dopo di essi si hanno solo punti liberi. Ciò che si è affermato viene messo in evidenza dal nostro procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore, che si può disporre

(1) Essendo μ non divisibile per ν il nominato punto è satellite del precedente entro il piano osculatore. Nel caso in cui fosse μ divisibile per ν , il G si ridurrebbe interamente ad un gruppo di i punti appartenenti alla tangente; dopo questi verrebbe un punto libero (determinante il piano osculatore) con una molteplicità dipendente, non più dalla prima terna caratteristica (ν , $\nu + \mu$, $\nu + \mu + \lambda$), ma dalla seconda terna caratteristica, che comprende il secondo esponente della serie y .

come segue:

prima terna caratteristica	ν	$\nu + 1$	$\nu + 2$	O^ν
	ν	1	2	O_1^4
	$\nu - 1$	1	1	O_2^4
cambiamento d'assi				
seconda terna caratteristica	$\nu - 1$	1	2	O_3^4
	$\nu - 2$	1	1	
.....				
$(\nu - 1)^{ma}$ terna caratteristica	2	1	2	$O_{\nu-1}^4$
	1	1	1	O_ν^4

2) Il ramo più generale del tipo

$$\begin{cases} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+1} + a_1 t^{\nu+2} + \dots \\ z = bt^{2\nu} + b_1 t^{2\nu+1} + \dots \end{cases}$$

è un ramo ordinario d'ordine ν e di classi $\nu, \nu - 1$: è a comportamento piano in quanto contiene un gruppo, G , di ν punti prossimi all'origine e giacenti nel piano osculatore. Infatti il nostro procedimento dà:

prima terna caratteristica	ν	$\nu + 1$	2ν	O^ν
	ν	1	ν	O_1^4
	$\nu - 1$	1	$\nu - 1$	O_2^4
			
	1	1	1	O_{ν}^4 ;

succedono punti liberi: $O_{\nu+1} \dots$

3) Il ramo

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 \\ z = t^6 + t^7 \end{cases}$$

è un ramo del terz'ordine e di classi 2 e 1, che contiene i punti O^3, O_1^2, O_2^4, O_3^4 , l'ultimo dei quali è semisatellite di seconda specie di O_2 ; i punti successivi sono liberi. S'incontra

infatti il seguente schema di operazioni:

prima terna caratteristica	3	5	6	O^3
	3	2	3	O_1^2
	1	2	1	}
cambiamento d'assi				
seconda terna caratteristica	1	2	2	}
	1	1	1	

seguono punti liberi: O_4^4

4) Il ramo più generale

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + \dots \\ z = t^7 + \dots \end{cases}$$

è un ramo del quart'ordine e di classi 2 e 1, che contiene i punti O^4 , O_1^2 , O_2^4 , O_3^4 ; O_3 è satellite gobbo di O_2 ed ha per successivi punti liberi. S'incontra infatti il seguente schema di operazioni:

prima terna caratteristica	4	6	7	O^4
	4	2	3	O_1^2
	2	2	1	O_2^4
	1	1	1	O_3^4 ;

seguono punti liberi: O_4^4

Si osservi: la proiezione ortogonale del ramo 4) sul piano $z=0$ è il ramo

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + \dots \end{cases}$$

di caratteristica ($O^4 O_1^2 [O_2^2 \bar{O}_3^4 \bar{O}_4^4]$), dove O_2 si presenta come proiezione dei due punti semplici O_2 e O_3 ; la corda impropria del ramo, $O_2 O_3$, riesce perpendicolare al piano $z=0$, in accordo colla posizione occupata da O_3 sullo schema rappresentativo del ramo 4).

5) Il ramo

$$\begin{cases} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = abt^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2 t^{32} + b^2 t^{35} \end{cases}$$

dà luogo alla seguente analisi:

$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = abt^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2t^{32} + b^2t^{35} \end{array} \right.$	prima terna caratteristica	18 28 32		O_1^{18}
$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{14} \end{array} \right.$		18 10 14		O_1^{10}
$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^8 + bt^{11} \\ y = t^{10} \\ z = bt^4 \end{array} \right.$		8 10 4		O_2^4
$\left\{ \begin{array}{l} x = at^4 + t^7 \\ y = \frac{1}{b}t^6 \\ z = bt^4 \end{array} \right.$		4 6 4		O_3^4
cambiamento d'assi				O_3^4
$\left\{ \begin{array}{l} x = t^7 \\ y = \frac{1}{b}t^6 \\ z = bt^4 \end{array} \right.$	seconda terna caratteristica	7 6 4		
$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{b}t^3 \\ y = \frac{1}{b^2}t^2 \\ z = bt^4 \end{array} \right.$		3 2 4		O_4^2
$\left\{ \begin{array}{l} x = bt \\ y = \frac{1}{b^2}t^2 \\ z = b^3t^2 \end{array} \right.$		1 2 2		O_5^4
$\left\{ \begin{array}{l} x = bt \\ y = \frac{1}{b^3}t \\ z = b^2t \end{array} \right.$		1 1 1		$O_6^4,$

segono punti liberi e semplici.

Fra i punti successivi $OO_1O_2\dots O_6$ appaiono così in luce le seguenti relazioni:

- O_2 è satellite di O_1 nel piano osculatore OO_1O_2 ;
- O_3 è satellite gobbo di O_2 ;
- O_4 è semisatellite gobbo di prima specie di O_2 ;
- O_5 è satellite di O_4 , essendo — nello schema rappresentativo — il tratto O_4O_5 perpendicolare al piano $O_2O_3O_4$;
- O_6 è parimente satellite di O_4 , riuscendo il tratto O_5O_6 perpendicolare al piano $O_3O_4O_5$.

Termineremo questo paragrafo avvertendo che *tutta la teoria delle singolarità delle curve gobbe si estende al caso di curve iperspaziali*, dove non occorrono nuovi concetti o difficoltà sostanziali. Un ramo di curva, appartenente ad un iperspazio S_r , ammetterà una rappresentazione canonica del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = t^\nu \\ x_2 = a_1 t^{\nu+\nu_1} + \dots \\ x_3 = a_2 t^{\nu+\nu_1+\nu_2} + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_r = a_{r-1} t^{\nu+\nu_1+\dots+\nu_{r-1}} + \dots; \end{array} \right.$$

si avranno per esso $r - 1$ classi, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{r-1}$, diversi gradi di libertà o di semisatellitismo, ecc. ecc.

33. Notizia storica sulla teoria della singolarità delle curve gobbe. — Un primo studio particolare sulle singolarità delle curve gobbe trovasi in una memoria di HALPHEN pubblicata nel « Bulletin de la Société Mathématique de France » (seduta del 7 nov. 1877; t. 6, pag. 10). HALPHEN introduce qui gli sviluppi in serie corrispondenti ai cicli (rami) della curva, e definisce accanto all'ordine quei caratteri che noi abbiamo designato come prima e seconda classe, e che egli denomina rango e classe, i quali stanno a indicare il numero delle intersezioni del ramo con la tangente e col piano osculatore ⁽¹⁾.

(1) Per l'estensione di questi caratteri alle curve iperspaziali, cfr. per es. BERTINI « Introduzione... », pag. 367.

HALPHEN pone in luce il rapporto della singolarità della curva gobba con quello della sua proiezione piana generica. Inoltre egli si vale degli sviluppi in serie per valutare l'influenza che una singolarità di una curva gobba ha sugli altri caratteri della curva (p. es. sul numero dei piani osculatori per un punto, ecc.), recando così un complemento alle ricerche numerative di CAYLEY e di ZEUTHEN.

Il concetto, introdotto da NÖTHER, dei punti multipli successivi costituenti la singolarità di una curva, sembra venire esteso dapprima alle curve gobbe mediante la considerazione di una proiezione piana generica; così appunto DEL PEZZO, in una memoria pubblicata dal « Circolo matematico di Palermo » nel 1892 (t. VI, pag. 139), osserva che si può sciogliere, con una trasformazione birazionale dello spazio, qualsiasi singolarità di una curva gobba C , giacchè si può costruire prima una trasformazione che muti C in una sua proiezione piana, e poi sciogliere (con NÖTHER) la singolarità di questa.

In modo più esplicito la considerazione dei punti multipli infinitamente vicini di una curva gobba compare in una nota di PANNELLI, pubblicata nei « Rendiconti dell'Istituto Lombardo » (t. 2, pag. 216); il quale adopera il procedimento riduttore offerto dalla trasformazione cubica $y_i = \frac{1}{x_i}$, giungendo così a sciogliere una singolarità data. (La medesima riduzione si ottiene naturalmente operando con altre trasformazioni birazionali dello spazio che abbiano quel punto come punto fondamentale isolato). Più tardi B. LEVI, nel § 2 di una sua memoria « Sulle singolarità delle superficie » (Annali di Matematica, 1897), riducendo le singolarità delle curve gobbe mediante trasformazioni quadratiche speciali, mette in evidenza che la definizione dei punti multipli successivi con trasformazioni spaziali, coincide con la definizione desunta dall'esame di una proiezione piana.

Le trasformazioni sopra indicate, mentre valgono a sciogliere una singolarità qualsiasi di una curva gobba, creano nuove singolarità della trasformata in corrispondenza alle superficie fondamentali della trasformazione che si mutano in punti. Perciò, allo scopo di eliminare completamente i punti multipli delle curve gobbe, B. LEVI (Rendiconti Acc. Lincei, 6 marzo 1898) ha proposto di adoperare una trasfor-

mazione priva di superficie fondamentali, quale è la trasformazione di terz'ordine in cui ai piani dello spazio corrispondono le superficie cubiche passanti per una sestica di genere 3: la riduzione si ottiene ponendo il punto singolare sulla sestica. Lo stesso scopo può esser raggiunto, come noi abbiamo fatto, mediante trasformazioni quadratiche di seconda specie.

Nuovo è lo studio sui punti satelliti: cfr. ENRIQUES, Rendic. Accad. Lincei, 15 Aprile 1917.

34. Singolarità delle superficie: punti multipli isolati e curve multiple; definizioni. — Un punto O , si dice *multiplo secondo* r per una superficie $f(xyz) = 0$, quando è tale per la sezione fatta con un piano generico passante per esso, ossia quando le rette per O hanno ivi r intersezioni riunite con f . Già ad un primo esame si rivela la differenza che passa fra il caso di *punti multipli isolati* e quello di *curve multiple*, luogo di punti multipli. Se s'impone alla superficie f di possedere un punto doppio nell'origine, O , si trova la condizione che manchino in f i termini di grado 0 e 1:

$$\begin{aligned} f(xyz) &= f_2(xyz) + f_3(xyz) + \dots = \\ &= a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{101}xz + a_{011}yz + \dots; \end{aligned}$$

l'equazione

$$f_2(xyz) = 0$$

rappresenta un cono quadrico — generalmente irriducibile — costituito di rette osculatrici ad f (con contatto tripunto): esso dicesi *cono osculatore* in O .

Invece, ove s'imponga alla superficie f , d'ordine n , di contenere come retta doppia l'asse x , si ottiene per f la forma

$$f(xyz) = y^2\varphi(xyz) + yz\psi(xyz) + z^2\theta(xyz),$$

dove φ , ψ , θ sono in generale d'ordine $n - 2$: qui si hanno in ogni punto doppio $(x00)$ due piani osculatori passanti per la retta doppia, che sono rappresentati complessivamente da

$$y^2\varphi(x00) + yz\psi(x00) + z^2\theta(x00) = 0;$$

ciò si vede cercando le tangenti principali a una sezione piana.

L'osservazione precedente si accorda con la differenza che la visione immaginativa ci indica sussistere in generale

fra le *curve doppie* e i *punti conici* di una superficie. Infatti considerando un tratto della curva doppia, C , che contenga un punto O (con piani osculatori distinti) vediamo che la superficie attraversa se stessa lungo C , e — per un intorno conveniente di O — si può ritenere riducibile in *due falde* distinte, cioè in due superficie passanti per C . Invece nell'intorno di un punto conico, O , la superficie appare costituita da *una sola falda* essenzialmente irriducibile, riducendosi in prima approssimazione ad un cono. Nel caso in cui questo cono degeneri in due piani (*punto biplanare*) la questione della riducibilità della superficie nell'intorno del punto, e quindi della definizione delle falde, dà luogo ad un esame più delicato, che rimandiamo al § 39.

Qui vogliamo avvertire che la distinzione di due falde di una superficie nell'intorno di un punto doppio di una curva doppia cade quando manca la distinzione dei due piani osculatori; e ciò può avvenire sia per tutti i punti della curva doppia (che sarà allora *cuspidale* anzichè *nodale*), sia per particolari punti *uniplanari* della curva stessa, ai quali si dà il nome di *punti cuspidali* (*pinch-points*, *points-pince*). Così, ritornando al caso di una superficie d'ordine n , dotata di *retta doppia*, a , si può vedere che questa *contiene in generale* $2(n-2)$ *punti cuspidali*: infatti un piano per a sega f secondo una residua curva d'ordine $n-2$ che incontra a in $n-2$ punti, quindi fra i due piani passanti per a che osculano f in un medesimo punto variabile di a , intercede una corrispondenza $[n-2, n-2]$, che ha appunto $2(n-2)$ punti uniti.

Ciò che abbiám detto dei punti e delle curve doppie si estende al caso di punti multipli d'ordine qualunque. Per un punto *r-plo isolato* si ha in generale un *cono osculatore irriducibile* d'ordine r , le cui generatrici hanno un contatto $(r+1)$ -punto con la superficie; la quale appare nell'intorno del punto come *una sola falda*. Invece per una *curva r-pla* della superficie f si avranno, in un suo punto P , r *piani osculatori*. Per *costruire i piani osculatori* alla superficie f nel punto P , si consideri in P la tangente p alla curva r -pla; la sezione di f con un piano per p avrà due punti r -pli infinitamente vicini sopra p , e quindi P diventerà $(r+1)$ -plo per una sezione particolare che contenga un'altra retta osculatrice per P , fuori di p : vi sono precisamente r piani per

cui ciò accade, ossia i piani determinati da p con le r tangenti principali ad una sezione piana generica per P .

Aggiungasi che sopra una curva r -pla di f si troverà in generale un numero finito di *punti cuspidali*, per cui due o più piani osculatori coincidono. In un punto di una curva r -pla che non sia cuspidale si distingueranno, in rapporto agli r piani tangenti, r falde della superficie; ma in un punto cuspidale — ove coincidano i piani tangenti — le i falde corrispondenti vengono generalmente a saldarsi in un'unica, le cui sezioni per il punto sono rami cuspidali d'ordine i .

Volendo costruire effettivamente esempi di superficie possedenti una curva multipla C , basterà considerare superficie composte di r parti che passino per C : combinando linearmente due di esse si ottiene una superficie irriducibile avente la C come curva r -pla. Così, combinando coppie di quadriche che abbiano comune una conica o una cubica gobba, si otterranno *superficie del quart'ordine* aventi una *conica doppia* o una *cubica gobba doppia*; per le quali sarebbe facile determinare il numero dei punti cuspidali.

Modi più istruttivi di costruire esempi di superficie dotate di singolarità, e in particolare di curve multiple, vengono offerti da alcuni procedimenti generatori, la cui importanza risiede in ciò che — opportunamente invertiti — permettono di sciogliere le singolarità superficiali (cfr. § 40).

Questi modi sono:

1) Le trasformazioni birazionali dello spazio, fra le quali considereremo le trasformazioni quadratiche, e le *trasformazioni monoidali* che di queste offrono la più semplice generalizzazione.

2) La proiezione di una superficie iperspaziale (da $r - 3$ punti dello S_r , che la contiene sopra uno S_3).

A queste generazioni delle singolarità superficiali aggiungeremo:

3) la trasformazione per dualità, la quale invero non conduce a singolarità qualunque, ma a tipi di singolarità cui spetta in qualche modo un significato generale perchè si trovano appartenere alle superficie definite dalle più generali equazioni tangenziali.

Vediamo dapprima quali *singolarità* di una superficie

vengono generate mediante trasformazioni quadratiche e monoidali.

Si applichi una trasformazione quadratica affatto generica (di centro O e conica fondamentale K) ad una superficie f d'ordine n , che possiamo supporre non passare per K nè contenere O : la superficie trasformata di f è una superficie f' d'ordine $2n$, avente un punto n -plo nel punto, O' , fondamentale nel secondo spazio, e possedente altresì come curva n -pla la conica fondamentale, K' , di questo. La conica multipla K' risponde alla curva semplice segata su f dal cono $O(K)$; ad ogni punto (n -plo), A' , di K' corrispondono gli n punti di questa curva semplice che si trovano sulla generatrice omologa, a , del cono $O(K)$, e gli intorni di questi punti rappresentano gli intorni di A' sopra le diverse falde della superficie f' di cui così viene messa in luce la distinzione; pertanto si ottengono i punti cuspidali della conica multipla K' in corrispondenza delle rette del cono $O(K)$ che toccano la superficie f , il che si vede anche considerando la trasformazione quadratica che viene subordinata fra un piano per a e il piano omologo per $O'A'$. Qualora si abbia una generatrice del cono $O(K)$ avente un contatto i -punto con f ($i > 2$) si otterrà su K' un punto cuspidale d'ordine i , cioè un punto uniplanare tale che le sezioni piane per esso posseggono un ramo d'ordine i , ossia un punto dove si confondono e saldano i fra le n falde della superficie f' che sono distinte per un punto generico di K' .

In particolare si avrà una superficie con conica multipla dotata di falde cuspidali d'ordine i , qualora f tocchi i volte il cono $O(K)$ secondo una linea; p. es. se f è una quadrica per cui $O(K)$ è il cono circoscritto (lungo la conica K), si ottiene una superficie trasformata con conica doppia cuspidale.

L'esempio precedente ci ha mostrato come la trasformazione quadratica valga a costruire superficie dotate di conica multipla; ora applicando a queste nuove trasformazioni quadratiche si ottengono più generalmente superficie dotate di curve multiple (razionali) d'ordine superiore. Ma si possono anche costruire superficie aventi come curva multipla una curva affatto arbitraria, applicando in luogo della trasformazione quadratica una trasformazione d'ordine superiore che ne costituisce una immediata generalizzazione, cioè la trasformazione monoidale, di cui diamo qui un rapido cenno.

Prendiamo le mosse dalle formule date nel § 31 per rappresentare la trasformazione quadratica (di prima specie) dello spazio:

$$1) \quad \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}; \end{array} \right.$$

queste formule danno una trasformazione quadratica quando si ponga

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi_1(xy) \\ \beta &= \psi_2(xy) \\ \gamma &= \theta_0 \\ \delta &= \theta_1(xy), \end{aligned}$$

ove gli indici designano l'ordine dei polinomi ψ e θ . Le formule precedenti si lasciano generalizzare porgendo una *trasformazione birazionale d'ordine n* quando si ponga

$$\begin{aligned} \alpha &= \psi_{n-1}(xy) \\ \beta &= \psi_n(xy) \\ \gamma &= \theta_{n-2}(xy) \\ \delta &= \theta_{n-1}(xy). \end{aligned}$$

Allora si riconosce che ai piani dello spazio $(x' y' z')$ corrispondono le superficie d'ordine n

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda_1 x [\theta_{n-2}(xy) \cdot z + \theta_{n-1}(xy)] + \\ &+ \lambda_2 y [\theta_{n-2}(xy) \cdot z + \theta_{n-1}(xy)] + \\ &+ \lambda_3 [\psi_{n-1}(xy) \cdot z + \psi_n(xy)] + \\ &+ \lambda_4 [\theta_{n-2}(xy) \cdot z + \theta_{n-1}(xy)] = 0, \end{aligned}$$

le quali formano un sistema lineare ∞^3 , proiettivo al sistema dei piani omologhi

$$\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' + \lambda_4 = 0.$$

Le anzidette superficie φ d'ordine n sono *monoidi*, cioè posseggono un punto $(n-1)$ -plo, O , che cade nel punto all'infinito dell'asse z ; inoltre esse passano per una curva base, definita dalle equazioni:

$$2) \quad \begin{cases} \psi_{n-1}(xy) \cdot z + \psi_n(xy) = 0 \\ \theta_{n-2}(xy) \cdot z + \theta_{n-1}(xy) = 0, \end{cases}$$

che è una curva d'ordine $n(n-1)$ intersezione completa di un qualsiasi monoide φ con un monoide ω d'ordine $n-1$:

$$\omega = \theta_{n-2}(xy) \cdot z + \theta_{n-1}(xy) = 0;$$

fuori della curva base tre φ generiche hanno a comune un punto, e così esse costituiscono un sistema *omaloidico*, d'accordo con la invertibilità univoca della trasformazione.

La simmetria delle formole 1) mostra anche che ai piani dello spazio (xyz) corrispondono nello spazio $(x'y'z')$ ∞^3 monoidi, φ' , d'ordine n , passanti per un punto $(n-1)$ -plo O' , e aventi a comune una curva base K' d'ordine $n(n-1)$, intersezione completa di un φ' con un monoide ω' , d'ordine $n-1$.

Le particolarità della trasformazione monoidale che abbiamo definito si deducono immediatamente dalle nostre formole, e generalizzano quelle della trasformazione quadratica dove la conica fondamentale viene sostituita dalla nostra curva K e il piano fondamentale dal monoide ω . Queste proprietà si possono in breve riassumere come segue.

a) Mentre a un piano generico dello spazio $(x'y'z')$ corrisponde, come abbiám detto, un monoide φ d'ordine n , a un piano per O' corrisponde un piano per O , staccandosi il monoide fisso ω : fra due piani omologhi delle stelle O' e O (che sono proiettive) intercede una trasformazione birazionale d'ordine n (detta di JONQUIÈRES) nella quale alle rette del primo piano, α' , corrispondono, nel secondo piano α , curve d'ordine n passanti $n-1$ volte per O e aventi a comune $2n-2$ punti semplici, intersezioni di α con la curva K fuori di O .

b) A una retta generica dello spazio $(x'y'z')$ corrisponde una curva piana d'ordine n passante $n-1$ volte per O , ma ad una retta per O' corrisponde in generale una retta per O , e fra le due rette omologhe intercede la proiettività desi-

gnata dalla terza delle formole 1), nella quale al punto O' corrisponde l'intersezione della retta omologa con ω .

c) Il punto O' è *fondamentale* per la trasformazione; ai punti infinitamente vicini ad esso nelle diverse direzioni corrispondono punti propri del monoide ω .

La curva base del sistema $|\varphi'|$ è *fondamentale* per la trasformazione: a un suo punto P' corrisponde una retta p per O , generatrice del cono $O(K)$, rappresentato da

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0;$$

così fra le rette p e $p' = O'P'$ intercede ora una proiettività degenera.

Reciprocamente al punto O dello spazio (x, y, z) corrisponde il monoide ω' , e alla curva K corrisponde il cono $O'(K')$, ecc.

Infine diremo, senza fermarsi a dimostrarlo, che si può costruire una trasformazione monoidale, T , in cui la curva K sia spezzata e comprenda come parte una qualsiasi curva C ; se la C è priva di singolarità, la curva K comprenderà oltre la C un certo numero di rette, cioè le corde della C uscenti dal punto fondamentale O (che può assegnarsi ad arbitrio), ed inoltre una curva residua avente in O una certa molteplicità.

Premesse queste nozioni intorno alla trasformazione monoidale, si applichi una siffatta trasformazione T ad una superficie $f(xyz) = 0$, d'ordine m : la trasformata f' di f passerà in generale per la curva K' con la molteplicità m ; inoltre, designando con n l'ordine di T , la f' sarà d'ordine nm , e passerà per O' con la molteplicità $(n-1)m$, venendo segata in n punti variabili dalle rette per O' .

Ora, se accada che la f passi per O con la molteplicità i e contenga la curva K come multipla d'ordine r , dalla sua trasformata si staccherà i volte il monoide ω' e r volte il cono $O'(K')$, così la f' , luogo dei punti omologhi dei punti generici di f , risulterà una superficie d'ordine

$$nm - (n-1)i - n(n-1)r$$

la quale passerà

$$(n-1)m - n(n-1)r - (n-1)i$$

volte per O' e possiederà la K' con la molteplicità $m - r - i$,

corrispondente al numero delle intersezioni variabili che la f ha con le generatrici del cono $O(K)$.

Passiamo ad esaminare le *singolarità che si creano mediante proiezioni* di superficie iperspaziali.

La proiezione di una superficie appartenente ad un iperspazio, sopra lo spazio ordinario S_3 , conduce in generale a superficie dotate di una curva doppia nodale, (ed in particolare anche a superficie dotate di curve e punti multipli con qualsivoglia complicazione). Assumasi per semplicità una superficie f , affatto priva di punti multipli, in uno spazio S_r , con r abbastanza grande (un punto è i -plo per una superficie di S_r se assorbe i intersezioni di f con un S_{r-2} generico passante per esso). Si proietti la f da un punto generico, O , dello S_r in un S_{r-1} ; la proiezione f' potrà acquistare un punto doppio soltanto in corrispondenza di una retta per O che si appoggi ad f in due o più punti; ma, se $r > 5$, le ∞^4 corde di f generano una varietà a cinque dimensioni, che non contiene il punto generico O , quindi f' riesce priva di punti multipli, come f . Pertanto potremo assumere nelle nostre considerazioni $r = 5$.

Ora, proiettando da un punto O una superficie f , priva di singolarità in S_5 , si ottiene in generale nello S_4 una superficie f'' dotata di un numero finito di punti doppi, in corrispondenza alle corde di f passanti per O (le corde sono ∞^4 e il passaggio per un punto porta 4 condizioni). Si proietti ulteriormente f'' da un punto generico O_1 di S_4 , nello S_3 ; la proiezione f''' possiederà una curva nodale corrispondente al cono delle corde di f'' uscenti da O_1 (vi è un numero finito di queste corde in ogni S_3 per O_1); la f''' si può far nascere direttamente proiettando f dalla retta $o = OO_1$, ed allora appare che la sua curva nodale corrisponde alla serie degli ∞^4 piani per o che incontrano f in due punti. Le due falde di f''' in un punto della curva nodale corrispondono agli intorni dei due punti semplici di f le cui proiezioni si sovrappongono in quel punto doppio. Si avverta che le proiezioni dei punti doppi di f'' , fatte da O_1 , vanno a cadere in punti della curva nodale di f''' ove si distinguono generalmente due falde come in un altro punto generico.

A quanto si è detto conviene aggiungere che la f''' possiederà in generale dei punti tripli, che saranno tripli anche

per la curva nodale C : questi punti prendono origine dai piani di S_5 passanti per la retta o e contenenti una terna, e quindi tre coppie, di punti di f ; i quali sono in numero finito (il sistema dei piani trisecanti è ∞^0 , e le condizioni perchè un piano di S_5 contenga una retta sono in numero di $3 + 3 = 6$).

In casi particolari potrà accadere che vi sia un piano per l'asse o il quale incontri la f in 4 punti (anzichè in 3); allora nasce su f'' un punto quadruplo per cui la curva doppia C passa con 6 rami, corrispondenti alle 6 coppie formate coi quattro punti di f sopra nominati. Ma un siffatto caso corrisponde necessariamente ad una scelta particolare dell'asse di proiezione, sicchè sussiste il

Teorema: proiettando da un asse generico di S_5 sopra lo spazio ordinario S_3 una superficie f irriducibile e priva di singularità (che appartenga allo S_5 , e non a un S_4), si ottiene una superficie dotata di curva nodale e punti tripli, che sono tripli anche per la curva; in ciascun punto triplo si ha un cono osculatore costituito dalle tre facce (distinte) di un triedro i cui spigoli sono tangenti alla curva doppia. Sopra questa curva si ha un numero finito di punti cuspidali corrispondenti ai piani per l'asse di proiezione che contengono una tangente di f .

La dimostrazione del teorema si ha in ciò che precede dopo avere esaminati alcuni dubbi critici, cui diamo qui conveniente risposta.

1) I piani per o bisecanti f non possono riuscire in generale trisecanti. Altrimenti proiettando f da un punto di O sopra un S_4 , si avrebbe in questo una superficie (non giacente in un S_3) di cui tutte le corde sarebbero trisecanti; ma allora ciò dovrebbe valere anche per una curva gobba sezione della superficie con un S_3 , il che contraddice il teorema stabilito nel L. 3°, § 43, (pag. 289).

2) I piani per o trisecanti f non possono riuscire quadrisecanti. Infatti, se si neghi l'asserto, tutti gli ∞^6 piani trisecanti f i quali formano (come f) una varietà irriducibile, riuscirebbero quadrisecanti: allora, se si proietta f da un suo punto generico, si otterrà in S_4 una superficie di cui tutte le corde devono essere trisecanti; la qual conclusione contraddice al citato teorema sulle curve gobbe del L. 3°, § 43.

3) Vi è soltanto un numero finito di piani per o che

contengono una tangente di f , e questi non sono trisecanti (essendo o una retta generica). Infatti i piani contenenti una tangente di f sono ∞^6 e formano una varietà irriducibile (data l'irriducibilità di f), al pari degli ∞^6 piani trisecanti f ; e le due varietà evidentemente non coincidono.

La *trasformazione per dualità* nello spazio ordinario S_3 (a cui torniamo a riferirci nel seguito) applicata ad una superficie generale, d'ordine $n > 2$, conduce ad una nuova superficie dotata di curva nodale e di curva cuspidale.

Sia f la superficie data, generale nel proprio ordine, e perciò priva di punti multipli (essendo il suo discriminante diverso da zero). Sappiamo (L. 3°, § 19) che vi è una *svilupabile di piani bitangenti* ad f , e similmente una *svilupabile di piani stazionari* che toccano la superficie nei punti della linea parabolica: trasformando per dualità si deduce da f una superficie f' che possiede una *curva nodale*, C , in corrispondenza alla prima svilupabile, ed una *curva cuspidale*, K , in corrispondenza alla seconda. Alla C apparterrà un certo numero di *punti tripli*, che saranno tripli insieme per la superficie f' e per la curva, i quali corrispondono ai *piani tritangenti* ad f .

Inoltre sopra f' si avranno dei punti d'incrocio della curva nodale C con la curva cuspidale K , corrispondenti ai piani stazionari di f che toccano altrove la f stessa: considerazioni di continuità permettono di riconoscere che una sezione di f' fatta con un piano generico per un punto d'incrocio (CK) contiene una cuspidale di seconda specie, e questa proprietà vale a caratterizzare la natura del punto singolare di cui si discorre.

La superficie f' correlativa di una f generale, non conterrà altre singolarità, e quindi in particolare non possiederà punti doppi (o multipli) conici, a cui vedremo corrispondere per dualità piani tangenti lungo una curva (cfr. § 38).

In ordine alla dualità meritano particolare menzione le superficie rigate, che costituiscono una famiglia di superficie duali di se stesse. Una *rigata gobba* di grado n possiede in generale, come sappiamo, una *curva doppia nodale* $(n - 2)$ -secante le generatrici (cfr. L. 3°, § 18), ma non possiede curve cuspidali (può acquistarne soltanto se diventa svilupabile o se nasce una generatrice cuspidale): correlativamente vi è una

svilupppabile di piani (bitangenti) contenenti le coppie di generatrici incidenti, ma vi è soltanto un numero finito di piani tangenti lungo una generatrice, i quali corrispondono ai punti cuspidali della curva nodale.

In fine la *rigata svilupppabile* circoscritta a una curva gobba C di rango r , possiede questa come *curva cuspidale* e inoltre, per $r > 4$, anche una *curva nodale* d'ordine $\frac{r(r-4)}{2}$

(cfr. L. 3°, § 18); dualmente i piani della svilupppabile — osculatori alla curva C , spigolo di regresso — sono piani stazionari che toccano la superficie lungo una generatrice, e le coppie di generatrici complanari danno luogo a una svilupppabile di piani impropriamente bitangenti, cioè appartenenti due volte all'inviluppo degli ∞^2 piani che toccano la curva C .

Le formule di CAYLEY del L. 3°, § 18, legano fra loro i caratteri di una curva gobba e della superficie rigata ad essa circoscritta.

35. Punti multipli singolari appartenenti alle curve multiple. — Fin qui abbiamo discorso di punti multipli isolati e di curve multiple delle superficie, ora vogliamo esaminare i punti multipli notevoli che possono trovarsi sopra le curve multiple.

Anzitutto se P è un *punto semplice per la curva multipla* C di f , ogni sua singolarità ⁽¹⁾ porta prima di tutto l'abbassamento della classe per le sezioni piane di f che vengano a passare per esso. Ora si possono considerare vari casi che ci limitiamo ad illustrare per mezzo di esempi:

1) La classe delle sezioni piane di f si abbassa senza che si abbassi il genere, per semplice riunione di due falde della superficie, come ha luogo nel caso elementare del punto cuspidale incontrato innanzi.

2) Insieme alla classe *si abbassa* anche *il genere* delle sezioni piane di f passanti per P : ciò accade in primo luogo se P è *ipermultiplo*, cioè se possiede, per f , una molteplicità maggiore del punto generico di C , ma anche in altri casi dove non si ha ipermolteplicità del punto, come diremo più avanti.

(1) Si può ritenere come singolarità di un punto semplice di C quella per cui viene meno la rappresentazione analitica delle falde secondo il teorema di HALPHEN (cfr. § 39).

Intanto un semplice esempio di punto ipermultiplo si ha imponendo ad una superficie f , che contenga doppiamente l'asse delle x , di possedere un punto triplo nell'origine: basterà scrivere l'equazione

$$f = y^2 \varphi(xyz) + yz\psi(xyz) + z^2\theta(xyz) = 0,$$

dove φ , ψ , θ non contengano termini di grado zero.

Anche la trasformazione quadratica permette di costruire semplicemente punti ipermultipli sopra curve multiple. Si operi per es. una trasformazione quadratica di centro O sopra una superficie cubica, la quale contenga una retta p passante per O e incidente alla conica fondamentale K : la trasformata di f è una superficie f' del quint'ordine, avente un punto triplo in O' e una conica doppia in K' ; ma a K' appartiene un punto P' , omologo alla retta p , che è pure triplo per la superficie; ciò si riconosce facilmente considerando che le sezioni variabili di f' coi piani per $O'P'$ sono quartiche con tre punti doppi. Questo metodo generalizzandosi permette di costruire punti di ipermolteplicità qualsiasi: per es. se si assume una f del quart'ordine passante doppiamente per la retta p , nasce su f' una conica doppia contenente il punto quadruplo P' .

La trasformazione quadratica ci procura anche esempio di una singolarità appartenente al secondo tipo nominato (punto non ipermultiplo che abbassa il genere delle sezioni piane). Si assuma una superficie cubica f passante per il centro della trasformazione O , la quale contenga altresì un punto doppio conico P , giacente sul cono fondamentale $O(K)$; allora si ottiene una superficie f' con conica doppia K' , sulla quale si trova un particolare punto P' , omologo della retta OP ; le sezioni piane per P' hanno genere inferiore alle sezioni generiche di f' , corrispondendo a sezioni di f con quadriche che contengono la retta OP e quindi passano per il punto doppio P . Il punto P' prende il nome di *tacnodo* di f' , avendosi in ogni piano per P' un tacnodo della curva sezione.

Passiamo a considerare la singolarità di una superficie, che può aversi in un *punto multiplo della curva multipla*.

3) Anzitutto si hanno punti multipli della curva multipla di f che *non abbassano nè il genere nè la classe* delle

sezioni piane. Il caso più semplice viene offerto dal punto d'incrocio ordinario di due curve doppie o di due rami di curva doppia.

Un primo esempio, che si può ritenere tipico, si ottiene prendendo la superficie $f = \varphi \cdot \psi = 0$ dove φ e ψ sono due superficie tangenti in un punto P ; P riesce qui punto d'incrocio per due rami della curva doppia di f , comune a φ e ψ ; una sezione piana di f per P possiede un tacnodo, e così il suo genere e la sua classe appaiono uguali a quelli di una sezione di f fatta con un piano che seghi i due rami della curva doppia in due punti vicini a P .

La trasformazione quadratica conduce pure a costruire incroci ordinari di curve doppie e multiple, sia quando si operi una trasformazione generale sopra una superficie già dotata di curva doppia, sia quando si operi sopra una superficie f , priva di singolarità, una trasformazione quadratica speciale (con conica fondamentale spezzata). Illustriamo questo secondo modo di costruzione partendo da una superficie generica del second'ordine, f : otterremo una f' del quart'ordine possedente una conica doppia costituita da due rette a' e b' , incrociantisi in un punto P' . Si riconosce che le sezioni piane per $P'O'$ (e quindi tutte le sezioni piane per P') hanno in P' un tacnodo, e non in generale una singolarità superiore, essendosi assunta una quadrica f in posizione affatto generale rispetto alla trasformazione.

La stessa superficie f'_4 con conica doppia riducibile $K' = a'b'$, si ottiene anche come proiezione di una superficie f del quart'ordine appartenente ad un S_4 . Invero si consideri in S_4 la superficie f intersezione di due varietà quadriche (superficie studiata da SEGRE, le cui sezioni iperpiane sono quartiche di prima specie): la proiezione di f fatta da un punto generico sopra S_3 dà una superficie f' del quart'ordine con conica doppia; e viceversa ogni f' siffatta si potrebbe dedurre in tal guisa. La conica doppia di f' degenera in due rette quando il centro di proiezione, O , cada sopra uno dei cinque coni quadrici appartenenti al fascio che ha per base la f_4 ; allora per O passano due fasci di rette corde di f , le quali hanno una corda a comune avente come traccia P' .

Un caso ulteriore che rientra ancora nel tipo di singolarità di cui stiamo trattando, viene offerto dai punti tripli della curva doppia che riescono anche tripli per la superficie,

i tre rami della curva non essendo tangenti ad un piano: il cono osculatore si riduce qui al triedro determinato dalle tangenti alla curva doppia. Abbiamo già veduto che punti tripli siffatti nascono mediante la proiezione di una superficie iperspaziale priva di singolarità. Un esempio concreto viene offerto dalla *superficie romana di STEINER*, superficie del quart'ordine che passa doppiamente per gli spigoli di un triedro ⁽¹⁾, della quale si può provare che nasce come proiezione da una superficie del quart'ordine priva di singolarità in S_5 , detta *superficie di VERONESE* ⁽²⁾.

I punti multipli di cui si discorre innanzi, debbono ritenersi come *punti inessenziali*, la cui singolarità per la superficie risulta interamente dalla singolarità che essi presentano per la curva multipla; ma vi sono anche punti multipli che si trovano in questo caso e che abbassano il genere o la classe delle sezioni piane.

4) *Esistono punti multipli inessenziali della curva multipla di f che abbassano il genere senza abbassare la classe delle sezioni piane.*

Il caso più semplice viene offerto dall'incrocio ordinario di due curve cuspidali, quale si ha per es. nella superficie

$$z^2 = x^3 y^3 \varphi(xyz):$$

qui sono rette cuspidali gli assi x e y che s'incrociano nell'origine O ; un piano per O sega la superficie secondo una curva dotata di 3 punti doppi infinitamente vicini, per cui la curva passa — in generale — con due rami lineari (oscnodo); così il genere delle sezioni piane per O diminuisce di un'unità di fronte al genere di una sezione piana generica che ha due cuspidi, ma la fusione delle due cuspidi in un oscnodo non diminuisce la classe.

La genesi del punto d'incrocio ordinario di due curve cuspidali può venire illustrata col metodo delle proiezioni.

A tal uopo riprendiamo la superficie di *SEGRE*, intersezione di due varietà quadriche in S_4 , e riferiamoci ad un caso particolare di questa superficie, che si costruisce come segue: assumansi in S_4 due piani α e β aventi a comune una

⁽¹⁾ Cfr. per es. ENRIQUES « Geometria Descrittiva » parte II. Cap. IX, § 69.

⁽²⁾ Cfr. per es. BERTINI « Introduzione.... » cap. 15.

retta p , ed in α e β due rette a e b secantisi in un punto P di p ; quindi si considerino due quadriche di S_4 toccanti α e β lungo le rette a e b ; l'intersezione di queste quadriche è una superficie f che possiede P come doppio e che viene proiettata sopra un S_3 da un punto generico — O — di p , secondo una superficie del quart'ordine, f' , dotata di due rette cuspidali a' e b' , incrociantisi nel punto P' , proiezione di P : questo punto P' è un incrocio ordinario abbassante il genere, ma non la classe, di una sezione piana per esso.

L'esempio precedente ha un valore generale in ordine agli incroci di curve cuspidali di una superficie f' , che si generino col metodo delle proiezioni da un iperspazio. Se la superficie f' di S_3 , dotata di una curva cuspidale con punto doppio, P' , si ottiene proiettando da un punto O una superficie f di S_4 , esiste una semplice infinità di rette tangenti ad f per O . Designando con C la curva dei contatti, può accadere che questa abbia un punto doppio P che si proietta in P' ; allora in generale il piano tangente in P ai due rami di C non passerà per O , e quindi P risulterà doppio per f , così il punto P' costituirà un incrocio di due rami cuspidali abbassante il genere (e non la classe) delle sezioni piane di f' . Ma può invece accadere che P' sia un punto doppio apparente in relazione alla curva C , cioè che la retta $p = OP'$ sia corda della C . Quando la p si appoggi a C in due punti distinti, in ciascuno dei quali tocca f , si vede che P' non abbassa nè il genere nè la classe delle sezioni piane di f' ; inoltre un'analisi approfondita mostrerebbe che esso riesce quadruplo per f' ed appartiene oltrechè a due rami lineari di curva cuspidale, anche ad una curva nodale che vi passa quattro volte (con due rami cuspidali).

5) Si incontrano ancora *punti multipli inessenziali* della curva multipla di f che *abbassano la classe* ma non il genere delle sezioni piane.

L'esempio più semplice si ottiene proiettando sullo spazio S_3 una superficie f di S_4 che abbia una trisecante, p , per il centro di proiezione O , quando questa trisecante (1, 2, 3) diventi tangente in un punto ($2 = 3$). La proiezione f' , avrà un punto triplo P' la cui singolarità risulta dal fatto che per P' passano un ramo lineare e un ramo cuspidale della curva doppia (nodale) di f' ; l'asserto si può verificare sia osservando come il ramo cuspidale corrisponda alla coinci-

denza delle due coppie di punti (1 2 e 1 3) allineati con O , sia considerando il punto P' come limite di un punto triplo della curva doppia dove due piani del triedro osculatore vengono a confondersi, il che porta appunto che due rami lineari della curva doppia si confondano in un ramo cuspidale.

Giova avvertire esplicitamente che P' abbassa la classe delle sezioni piane di f' , figurando come un punto cuspidale sul ramo lineare della curva doppia (2 3) che passa per esso, ma invece — come diciamo — non abbassa il genere (finchè il punto di contatto $2=3$ della p con f non è un punto doppio per f).

6) Un punto *inessenziale* della curva multipla può abbassare contemporaneamente genere e classe delle sezioni piane della superficie; infatti si possono sovrapporre le singolarità considerate nei numeri 4) e 5), bastando a tal uopo riunire due superficie che le presentino in un medesimo punto.

Ma più interessante è il caso di punti la cui singolarità per la superficie f dipende sempre dalla singolarità che essi hanno per la curva multipla, e che pure posseggono un *cono osculatore non composto di piani*; se P è un punto siffatto e ci si avvicina ad esso sopra un ramo della curva multipla C , accade in generale che i piani osculatori ad f in quel punto diventino indeterminati. L'esempio più semplice è offerto da una f costretta a contenere quattro rette doppie aventi a comune un punto P e di cui tre non giacciono in un piano: il punto P diventa quadruplo per f , ed il suo cono osculatore — che deve contenere doppiamente le anzidette rette — risulta costituito da due coni quadrici passanti per esse.

7) *Punti multipli essenziali* della curva multipla, ed in particolare punti ipermultipli, aventi una ipermolteplicità grande quanto si vuole per la superficie, si ottengono con la trasformazione quadratica: infatti trasformando una superficie f d'ordine n dotata di una curva doppia, C , d'ordine m , si ottiene in generale una superficie f' che ha un punto O' di molteplicità n per cui passa la curva doppia C' (trasformata di C) con m rami. Il cono osculatore ad f' in O' possiede come generatrici doppie le tangenti a C' , ed è generalmente irreducibile, corrispondendo alla sezione di f col piano fondamentale ω .

Nota. A complemento delle cose dette innanzi vogliamo mettere in evidenza *due tipi elementari di punti multipli ines-*

senziali che possono appartenere alla curva doppia (nodale), C , di una superficie f , *i quali non abbassano nè il genere nè la classe delle sezioni piane.*

Un primo tipo, generalizzazione dell'incrocio ordinario, viene offerto da un punto, O , che sia doppio per f ed appartenga ad i ($i > 2$) rami di C tangenti ad un piano α : il cono osculatore in O è costituito dal piano α contato due volte. Per $i=3$ una sezione piana di f possiede 3 punti doppi successivi, quindi vicino ad O si hanno due rette doppie infinitesime, la prima nell'intorno del prim'ordine sul piano α , la seconda vicina a questa nell'intorno di second'ordine di O . Analogamente si dica per $i > 3$.

L'esistenza effettiva delle superficie f qui considerate per $i=3$, si prova costruendo superficie formate di due falde lineari

$$\begin{aligned}\varphi(xyz) &= \varphi_1(xyz) + \varphi_2(xyz) + \varphi_3(xyz) + \dots = 0 \\ \psi(xyz) &= \varphi_1(xyz) + \varphi_2(xyz) + \psi_3(xyz) + \dots = 0,\end{aligned}$$

aventi in comune la quadrica approssimante in O ; analogamente per $i=4$ prendendo uguali le cubiche approssimanti, ecc.

Un secondo tipo viene offerto da un punto O che sia i -plo per f appartenendo a $\frac{i(i-1)}{2}$ rami della curva doppia C ; è la generalizzazione del punto triplo della curva doppia, e si ottiene proiettando una superficie di S_4 da un punto per cui passi una retta i -secante; le $\frac{i(i-1)}{2}$ coppie di punti della superficie appartenenti a questa retta corrispondono appunto ai rami di C per O . Il cono osculatore in O appare formato di i piani, il cui angoloide completo ha per spigoli le tangenti ai suddetti $\frac{i(i-1)}{2}$ rami di C .

Si possono combinare le circostanze relative ai tipi precedenti; basta per esempio sommare due superficie φ e ψ , una delle quali (φ) possiede in O un incrocio di due rami della curva doppia, e l'altra una curva doppia passante semplicemente per O . Si ottiene così una superficie f la cui curva doppia ha in O un punto 7-plo il quale è quadruplo per f : il cono osculatore in O consta di 3 piani uno dei quali, cioè il piano tangente a φ , va contato due volte.

Negli esempi che precedono il cono osculatore in O viene sempre costituito da piani, che sono limiti di quelli osculatori ad f nei punti di C . Questa proprietà può mantenersi anche quando il punto O abbassi il genere o la classe delle sezioni piane di f , come risulta dagli esempi già addotti in proposito. Ma è interessante notare che: *se un punto multiplo O della curva multipla è tale che il cono osculatore ad f non sia riducibile a un gruppo di piani (contenendo una parte essenzialmente conica) esso abbassa contemporaneamente il genere e la classe delle sezioni piane.*

Per semplicità di discorso supporremo che la C sia doppia per f , e che sia costituita di m rami lineari, passanti per O e non tangenti fra loro. Si consideri un piano variabile α che si avvicini a passare per O e la sua posizione limite α_0 , che sarà un piano generico per O ; il piano α sega la curva C in m punti doppi che tendono a riunirsi in O . Ora la retta che congiunge due fra i nominati punti doppi tende, come posizione limite, ad una determinata retta per O ; quindi la curva K_0 , sezione di f con α_0 — in quanto è limite della K , sezione di α — possiede una singolarità che si può caratterizzare come singolarità limite, assegnando i punti doppi che sono venuti vicino ad O : nelle ipotesi fatte la singolarità di K_0 si potrà definire, entro il piano α_0 , assegnando i punti doppi virtuali che K_0 deve possedere vicini ad O secondo certe direzioni determinate, a_1, a_2, \dots, a_h e sopra rami lineari tangenti a queste; precisamente si avranno i punti doppi infinitamente vicini sopra un ramo che tocca a_1 , quando a_1 sia l'intersezione di α_0 con un piano tangente a i rami di C , ecc.

Ora se $h > 1$, la molteplicità effettiva di O per K_0 risulterà maggiore di due; ma se la K_0 possiede in O una tangente principale b , diversa dalle a_1, a_2, \dots, a_h , la singolarità di O si può caratterizzare come singolarità limite aggiungendo alle condizioni virtuali precedenti quella di contenere due punti doppi infinitamente vicini sopra la retta b , uno dei quali costituisce una condizione essenzialmente nuova per la singolarità stessa: in tal caso dunque il genere di K_0 risulta inferiore al genere di K . Lo stesso si può dire per la classe. Pertanto nella ipotesi fatta, se O non abbassa il genere (o la classe) delle sezioni piane di f , il cono osculatore in O si decompone nei piani che toccano due o più rami di C per O , contati convenientemente.

La conclusione si estende al caso $h=1$ in cui tutti i rami di C toccano un medesimo piano: se O è inessenziale esso è doppio per f e il cono osculatore in O si riduce al piano suddetto contato due volte.

Ma il ragionamento svolto suppone due restrizioni:

- 1) che la curva multipla di f abbia la molteplicità *due*;
- 2) che la suddetta curva multipla sia formata di parti passanti per O con rami lineari, non tangenti fra loro.

Ora è facile liberarsi dalla prima restrizione, che può ritenersi adottata soltanto per semplicità di discorso, ma non così per la seconda restrizione: a tale scopo occorre almeno un esame assai delicato. Ce ne dispenseremo ricorrendo ad un'altra dimostrazione, che, sebbene riesca forse meno espressiva, conduce rapidamente al fine proposto, in modo assolutamente generale.

Pongasi che nel punto multiplo, O , della superficie f si abbia un cono osculatore non formato di piani, per esempio contenente come parte un cono quadrico Q ; facciamo vedere che, in forza di tale ipotesi, il punto O abbassa il genere e la classe delle sezioni piane passanti per esso. Per ciò si assuma un piano α vicino ad O , e si consideri la curva variabile K da esso segata su f ; si vede che al limite, quando α viene a passare per O , la K acquista un nuovo punto doppio che va a fondersi nella singolarità O , imperocchè spariscono due tangenti di K condotte per un punto generico di α .

Così è dimostrato il teorema (4).

36. Punti multipli infinitamente vicini. — Una analisi più precisa delle singolarità delle superficie si ha considerando accanto ai punti propri, i punti multipli infinitamente vicini.

I punti infinitamente vicini ad un punto proprio, O , dello spazio sono già definiti sopra le possibili curve (piane e gobbe) che passano per O . La molteplicità di O per una superficie f si potrà definire in base alle intersezioni della superficie colle curve per O , procedendo induttivamente come segue.

Si osservi anzitutto che se O è un punto r -plo per la superficie f , le curve C possedenti in O un punto s -plo hanno ivi rs intersezioni riunite con f (in generale e almeno): ciò è chiaro per una curva C composta di s rami lineari, e quindi

(4) Cfr. CHISINI. Rendic. Accad. Lincei, Luglio 1917.

anche se ν fra questi rami si riuniscono in un'unico ramo d'ordine ν (cfr. §§ 12, 17). Ciò posto si consideri un punto O_1 , infinitamente vicino ad O , e tutte le curve C passanti per $O^s O_1^t$: si dovrà dire che O_1 è r_1 -plo per f se queste C hanno, con f , $rs + r_1$ intersezioni riunite anzichè rs . Segue, come sopra, che le curve passanti per $O^s O_1^{s_1}$ hanno ivi (in generale e almeno) $rs + r_1 s_1$ intersezioni con f .

Non vi è difficoltà a passare al caso di punti successivi: si può quindi ritenere definita la molteplicità per f di un punto O_2 e così via. In generale, se si considerano i punti $OO_1 O_2 \dots O_i$ infinitamente vicini ad O sopra un ramo qualsiasi, sussiste la

Proprietà fondamentale. Una superficie f passante per $OO_1 O_2 \dots O_i$ con le molteplicità $rr_1 r_2 \dots r_i$, e una curva C passante per i medesimi punti con le molteplicità $ss_1 s_2 \dots s_i$, hanno assorbite nell'intorno di O

$$rs + r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_i s_i$$

intersezioni almeno; le intersezioni assorbite sono precisamente uguali al detto numero qualora non vi siano punti successivi ad O sulla curva appartenenti alla superficie (¹).

Come semplice corollario della definizione data mediante la proprietà fondamentale precedente si ha: date due superficie $f=0$ e $\varphi=0$ possedenti $OO_1 O_2 \dots$ le molteplicità $rr_1 r_2 \dots$, anche la superficie generica del fascio $\lambda f + \mu \varphi$ possiede in quei punti le stesse molteplicità (²).

La nostra proprietà fondamentale si può stabilire ugualmente definendo le molteplicità di f nei punti infinitamente

(¹) In particolare risulta di qui che: tre superficie aventi a comune un punto O di molteplicità rispettive r, s, t , tali che i relativi coni osculatori non contengano una medesima generatrice, posseggono in O rst intersezioni riunite e non più. Una dimostrazione algebrica rigorosa di ciò trovasi in BERZOLARI: « Annali di Matematica » t. 21 (1896).

(²) Qui si adopera la proprietà quasi evidente che: le intersezioni della superficie generica $\lambda f + \mu \varphi = 0$ con una curva C , assorbite in un punto P , sono in numero uguale alle intersezioni di f e φ (o al più piccolo dei due numeri se questi sono disuguali). Chi voglia dimostrare questa proprietà, senza ricorrere ai principi di continuità, decomponga C nei suoi rami e rappresenti uno di questi mediante i noti sviluppi precedenti per un parametro t : sostituendo questi sviluppi di x, y e z entro i polinomi f, φ e $\lambda f + \mu \varphi$, si trova il grado minimo in t che dà il numero delle intersezioni cercate.

vicini ad O , per mezzo di una trasformazione quadratica che abbia in O un punto fondamentale. Una siffatta trasformazione fa *corrispondere al punto O una curva* (semplice o multipla) intersezione del piano fondamentale ω' con la superficie trasformata f' (fuori della conica fondamentale K'); un punto O_1 , vicino ad O ed r_1 -plo per f , si cambia in un punto r_1 -plo proprio. E la riduzione può proseguirsi successivamente.

Ora conviene osservare diversi casi possibili, studiando in particolare alcuni esempi istruttivi che valgono ad illustrarli:

1) si può avere un punto multiplo isolato vicino ad un punto multiplo proprio, parimente isolato;

oppure

2) un punto multiplo isolato vicino ad una curva multipla;

3) una curva multipla infinitesima vicina ad un punto multiplo;

4) una curva multipla infinitamente vicina ad una curva multipla propria.

1° caso: punti multipli isolati infinitamente vicini (in particolare punti uniplanari).

Il più semplice esempio relativo a questo caso si ha considerando una superficie $f(xyz) = f_2(xyz) + \dots$ che passa doppiamente per l'origine e assoggettandola a possedere come punto doppio il punto O_1 , infinitamente vicino ad O sull'asse x , cioè scrivendo che le sezioni per quest'asse hanno ivi un tacnodo la cui tangente tacnodale è l'asse stesso: è facile vedere che il cono osculatore in O si spezza allora in due piani per OO_1 . Anzi la singolarità costituita da due punti infinitamente vicini si lascia definire come un punto biplanare soddisfacente alla condizione aggiuntiva che la retta comune ai due piani osculatori abbia un contatto quadripunto con la superficie (cfr. § 4).

Pongasi ora che la superficie f abbia O come punto uniplanare; il piano osculatore ω taglia f in una curva con punto triplo e quindi vi sono in esso tre rette per O aventi un contatto quadripunto con f ; un piano per una tale retta sega f secondo una curva dotata di cuspide che ha contatto quadripunto con la tangente e perciò (§ 4) di tacnodo. Dunque nell'intorno del prim'ordine di un *punto uniplanare* di una superficie vi sono in generale *tre punti doppi infinitamente vicini*.

2° caso: punti multipli isolati vicini ad una curva multipla (in particolare punti cuspidali sopra una curva doppia).

Il più semplice esempio relativo a questo caso si ottiene in relazione ai punti cuspidali di una curva doppia (nodale). Un punto, P , cuspidale per una curva nodale C è, come sappiamo, un punto uniplanare della curva; secondo l'analisi precedente si avrebbero dunque tre punti doppi infinitamente vicini a P , ma qui due di questi coincidono nel punto successivo a P sulla C , sicchè vicino a un punto cuspidale di una curva nodale esiste in generale un unico punto doppio fuori della curva, in una direzione diversa dalla tangente.

Per verificare l'asserto si considererà una superficie avente nell'origine delle coordinate, O , un punto doppio uniplanare, il cui piano osculatore sia $x = 0$ e che abbia un punto doppio O_1 , infinitamente vicino ad O sopra l'asse z : si avrà

$$f = f_2 + f_3 + f_4 + \dots = x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \\ + z(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + z^2(c_{10}x + c_{01}y) \\ + f_4 + \dots$$

Ora si possono scrivere le condizioni perchè la f possedga, nel piano $y = 0$, un ulteriore punto doppio, O_2 , successivo ad O_1 sopra un ramo lineare per OO_1

$$\begin{cases} x = \alpha z^2 + h z^3 + \dots \\ y = k z^3 + \dots \end{cases}$$

(il quale sia osculatore ad una curva doppia di f per OO_1O_2).

A tal fine occorrerà sostituire le espressioni di x e y in f ed annullare identicamente rispetto h, k, \dots tutti i termini di grado inferiore al sesto.

Fra le condizioni che così si ottengono si trova che deve esser nullo il coefficiente di kz^5 , cioè

$$c_{01} = 0;$$

questa condizione esprime che il piano $x = 0$ sega la superficie cubica approssimamente

$$f_2 + f_3 = 0$$

secondo tre rette, due delle quali coincidono con l'asse z ;

sono queste le rette per O aventi con f un contatto quadri-punto e quindi contenenti i punti doppi di f infinitamente vicini ad O .

Abbiamo provato che vicino a un punto cuspidale della curva nodale, esiste in generale un punto doppio fuori della curva ⁽¹⁾. Questa conclusione si estende ai punti cuspidali di una curva multipla a falde distinte.

Pongasi invero che la superficie f possenga una curva r -pla C ($r > 2$), a falde distinte, e che per un punto, P , di C coincidano due fra gli r piani tangenti alla superficie (ciò che porta, in generale, il saldarsi di due falde nell'intorno del punto); è facile vedere che l'insieme delle due falde della superficie f saldantisi in P , considerato per un tratto della curva C , può essere approssimato da una superficie φ , passante doppiamente per C e avente ugualmente in P un punto cuspidale. Si costruisce la superficie φ considerando un fascio generico di sezioni piane di f , e in ciascun piano costruendo una cubica (o altra curva d'ordine superiore) avente un punto doppio su C e osculante i due rami appartenenti alle due falde considerate di f ; la nominata cubica approssimante descrive la superficie φ .

Notisi ancora che la stessa conclusione vale in generale per i punti cuspidali d'ordine $i \geq 2$ per una curva multipla d'ordine $r \geq i$ a falde distinte: anche qui vi è in generale — nell'intorno del prim'ordine — un punto doppio fuori della curva multipla vicino al punto cuspidale. Infatti la dimostrazione usata innanzi si estende. In primo luogo basta riferirsi

(1) Il ragionamento precedente mostra anche l'esistenza di un altro punto doppio infinitamente vicino alla curva doppia sopra un ramo tangente ad essa: designando O_1 il punto successivo ad O sulla curva doppia, trovasi precisamente che è doppio per f il punto O_{11} , satellite di O_1 nel piano tangente ad f in O . Questa circostanza è d'accordo col fatto che una trasformazione quadratica di centro O deve mutare f in una superficie la cui curva doppia (trasformata di quella di f) possiede un punto cuspidale nel punto (proprio) O_1 ; qui O_{11} figura come punto infinitamente vicino ad O_1 fuori della curva doppia.

Ora la trasformazione anzidetta (successivamente iterata) pone in evidenza un fatto nuovo, che sarebbe anche suscettibile di verifica analitica diretta: nell'intorno del punto cuspidale O esiste un'infinità discreta di punti doppi infinitamente vicini alla curva doppia di f ; precisamente vi è uno di questi punti doppi satellite dello i -mo punto successivo ad O sulla curva doppia ($i = 1, 2, \dots$).

ad una superficie con curva i -pla. In secondo luogo, per trattare questo caso si considererà anzitutto un punto uniplanare i -plo, O , cui sia vicino un altro punto i -plo O_1 , e poi si imporrà vicino ad O_1 (e successivo ad esso sopra un ramo lineare) un terzo punto i -plo O_2 ; l'esistenza del punto i -plo O_1 porta che il piano tangente in O seghi la superficie secondo una curva passante per $O^{i+1}O_1^{i-1}$, e quindi avente due tangenti per O in generale diverse da OO_1 , cui corrispondono due punti doppi della superficie vicini ad O ; ora — tenendo conto dell'esistenza del terzo punto i -plo, O_2 , — si concluderà che una delle suddette tangenti si confonde con OO_1 : a tal fine basterà ripetere in questo caso più generale il calcolo svolto prima per $i=2$ (la condizione che a noi interessa si ottiene annullando il coefficiente di $k^{i-1}z^{3i-1}$ al posto di quello di kz^3 che quivi occorre).

Osservazione. Un esame approfondito mostra che per $i=4$ si ha anche un secondo punto doppio vicino al punto cuspidale e prossimo ad esso (cioè satellite del primo) (cfr. § 38); in generale per i pari si hanno $\frac{i}{2}$ punti doppi.

3° caso: curva multipla infinitesima vicina ad un punto multiplo (in particolare taenodo).

L'esempio più semplice relativo a questo caso si presenta nella singolarità che già abbiamo incontrata sotto il nome di *taenodo* (§ 35). Un punto doppio, P , della superficie f costituisce un taenodo quando ogni sezione piana per P possiede, vicino a P , un altro punto doppio: il luogo di questo punto doppio variabile, infinitamente vicino a P , si può ritenere come una *retta doppia infinitesima*, giacchè si cambia in una retta doppia mediante una trasformazione quadratica che abbia in P un punto fondamentale isolato.

Per avere un taenodo basta considerare due superficie tangenti in un punto semplice P ; combinando linearmente due coppie siffatte di superficie, con lo stesso piano-tangente, si potrà anche ottenere un taenodo isolato appartenente ad una superficie irriducibile.

Si possono esprimere facilmente le condizioni algebriche perchè una superficie f possieda un taenodo, O , con dato piano tangente: perciò scriveremo che O è un punto doppio uniplanare per cui le rette appartenenti al piano tangente

hanno quattro anzichè tre intersezioni con f riunite in O , cioè tale che la sezione col piano tangente ha un punto quadruplo. Posto O nell'origine delle coordinate, e assunto il piano tangente come piano $z=0$, avremo:

$$f = \alpha z^2 + \varphi_2(xyz) \cdot z + f_4(xyz) + \dots;$$

ove (escludendo che O sia un punto triplo) può assumersi $\alpha=1$; le condizioni che si aggiungono, per il tacnodo, alla superficie con punto doppio uniplanare $f = \alpha z^2 + f_3(xyz) + \dots = 0$ portano l'annullamento dei quattro termini di terzo grado in x, y che figurano in generale in f_3 .

La proprietà che serve di definizione al tacnodo O , è che i piani per O segano la superficie secondo curve dotate di tacnodo, le quali — nell'intorno di O — vengono costituite da due rami lineari tangenti (il confondersi dei due rami nella sezione piana generica per O , costituisce una particolarizzazione del punto singolare della superficie che qui escludiamo). Ma esistono quattro direzioni particolari uscenti da O , tali che i piani per esse segano la superficie secondo cuspidi di seconda specie. La cosa si verifica nel modo seguente.

Si consideri la superficie f avente un tacnodo nell'origine delle coordinate con piano tangente $z=0$:

$$f = z^2 + \varphi_2(xyz) \cdot z + f_4(xyz) + \dots;$$

intersecando f con un piano generico per O , si ottiene una curva dotata di tacnodo che, soltanto per piani particolari, si riduce a una cuspidi di seconda specie: ciò accade quando le parabole osculatrici ai due rami del tacnodo vengono a confondersi.

Or dunque scriviamo le equazioni di una parabola giacente nel piano sopra nominato, e tangente alla intersezione di questo col piano $z=0$:

$$1) \quad \begin{cases} x = t \\ y = at + bt^2 \\ z = ct^2, \end{cases} \quad (cax - cy + bz = 0);$$

se la nostra parabola, che contiene già due punti doppi infinitamente vicini della sezione piana di f , deve osculare un

ramo di questa sezione, occorre che sostituendo in f per x, y, z le espressioni 1), sparisca il termine di quarto grado in t , ossia che il coefficiente di t^4 :

$$c^2 + \varphi_2(1 a 0)c + f_4(1 a 0) = 0.$$

Quest'equazione dà in generale due radici per c , ma tali radici coincidono quando

$$2) \quad \varphi_2^2(1 a 0) - 4f_4(1 a 0) = 0,$$

condizione che riesce indipendente da b .

La 2) determina quattro direzioni $y = ax$ nel piano $z = 0$, cioè *quattro tangenti per il tacnodo O che sono assi di sezioni cuspidate* (di seconda specie). Queste *quattro tangenti singolari non debbono esser confuse con le quattro tangenti quintipunte* che sono le tangenti principali della sezione di f col piano $z = 0$:

$$f_4(xy0) = 0.$$

Le quattro tangenti singolari corrispondono anche a quattro punti doppi vicini al tacnodo O che appartengono all'intorno del second'ordine, cioè sono successivi alla retta doppia infinitesima che costituisce la singolarità. Si può risparmiare la verifica analitica dell'enunciato ricorrendo ad una trasformazione quadratica con punto fondamentale O : il tacnodo si muta in una retta doppia che contiene quattro punti cuspidali corrispondenti alle nominate tangenti singolari: ora sappiamo che vicino ad un punto cuspidale c'è in generale un punto doppio, fuori della curva doppia.

Per il tacnodo più generale le quattro tangenti singolari sono distinte, ma possono coincidere fra loro in vari modi per tacnodi particolari: così nel tacnodo, O , costituito dal contatto di due superficie (o falde lineari di una medesima), le quattro tangenti singolari si riducono a due doppie, che sono le tangenti principali alla curva intersezione delle due superficie. Infatti le sezioni cuspidate nei piani per O si riducono a quelle che passano per le tangenti principali della curva comune alle due superficie, le quali sezioni piane presentano un oscnodo.

Infine possono anche le tangenti singolari di un tacnodo

diventare indeterminate; ciò accade quando la sezione piana generica per O ha una cuspidale di seconda specie ⁽¹⁾.

Giova esplicitamente avvertire che può aversi un *taenodo* il quale cada sopra una curva doppia della superficie f anzichè in un punto isolato. Anzi si dà origine ad un *taenodo* di f e non a un punto cuspidale ordinario, quando si fa avvicinare un punto doppio isolato P ad una curva doppia C : infatti, se la C è d'ordine r una sezione piana per P possiede $r+1$ punti doppi (anzichè r come una sezione generica); al limite — quando P cade su C — questa proprietà deve permanere, quindi la sezione piana per P avrà ora due punti doppi infinitamente vicini riuniti in P , oltre gli $r-1$ punti doppi in cui il piano sega ulteriormente C . Così il punto P si mantiene anche sulla C un punto doppio abbassante il genere delle sezioni piane.

È interessante dimostrare che: per un *taenodo*, O , appartenente ad una curva doppia nodale C , in generale due fra le quattro tangenti singolari coincidono con la tangente alla C e quindi, nell'intorno di second'ordine di O , vi sono soltanto due punti doppi fuori di C .

Verifichiamo dapprima l'asserto nel caso in cui la C sia una retta doppia che assumeremo come asse x . Allora (cfr. pagg. 577 e 601) l'equazione della superficie f avente nell'origine un *taenodo* con piano tangente $z=0$, sarà del tipo

$$f = z^2 + \theta_1(xyz)yz + \theta_2(xyz)y^2 + \psi_2(xyz)yz + \chi_2(xyz)z^2 + \dots;$$

quindi l'equazione che dà le direzioni singolari per O si riduce a

$$[\theta_1^2(1a0) - 4\theta_2(1a0)]a^2 = 0$$

e però ammette come doppia la radice $a=0$ corrispondente all'asse x .

Essendo così verificato l'asserto per le superficie possedenti un *taenodo* sopra una retta doppia, la dimostrazione si estende al caso di una curva doppia qualunque, giacchè con una trasformazione puntuale dello spazio che sia biunivoca e regolare nell'intorno di O questa può ridursi a coincidere con una retta: di fatto la proprietà della retta doppia figura nella

(1) Per la composizione di questa singolarità cfr. SEGRE « Annali di Mat. », n.° 18.

verifica precedente soltanto come un carattere differenziale relativo al punto O , dove si tien conto di 3 punti doppi successivi ad esso.

Risulta dal teorema stabilito che in un incrocio ordinario di due rami di una curva nodale si ha un tacnodo, per cui le quattro tangenti singolari si riducono alle due tangenti ai due rami. Ciò è d'accordo con la circostanza che — in questo caso — il tacnodo si può riguardare come punto di contatto di due falde (lineari), nelle quali si decompone la superficie considerata nell'intorno del punto (cfr. § 39).

In ciò che precede si è parlato di curve doppie nodali. Anche sopra una curva cuspidale può aversi un tacnodo, e questa singolarità assume il nome di *punto chiuso* (*close-point* secondo CAYLEY).

Per un punto chiuso si ha in generale una sola direzione singolare diversa dalla tangente alla curva cuspidale, e quindi *nell'intorno del second' ordine vi è un solo punto doppio fuori della curva cuspidale*. Basta verificare l'asserto nel caso di una retta cuspidale assunta come asse x .

A tale scopo si riprenda l'equazione della superficie f che passa doppiamente per il detto asse e possiede nell'origine O un tacnodo con piano tangente $z=0$:

$$f = z^2 + \theta_1(xyz) \cdot yz + \theta_2(xyz) \cdot y^2 + \psi_2(xyz) \cdot yz + \chi_2(xyz) \cdot z^2 + \dots = \\ = z^2[1 + \chi_2(xyz)] + yz[\theta_1(xyz) + \psi_2(xyz)] + y^2\theta_2(xyz) + \dots = 0;$$

i due piani osculatori ad f in un punto $(x00)$ sono dati da

$$z^2[1 + \chi_2(x00) + \dots] + yx[\theta_1(x00) + \psi_2(x00) + \dots] + y^2[\theta_2(x00) + \dots] = 0,$$

dove i puntini stanno a designare termini di grado superiore al secondo in x . Scriveremo che l'asse delle x è retta cuspidale annullando identicamente rispetto ad x il discriminante:

$$[\theta_1(x00) + \psi_2(x00) + \dots]^2 - 4[1 + \chi_2(x00) + \dots][\theta_2(x00) + \dots];$$

in particolare annullando il coefficiente di x^2 si ha

$$\theta_1^2(100)^2 - 4\theta_2(100) = 0;$$

dunque $a=0$ è radice dell'equazione

$$\theta_1^2(1a0) - 4\theta_2(1a0) = 0$$

che porge in generale le due direzioni singolari del tacnodo, fuori della retta doppia corrispondente ad $\alpha = 0$.

4° caso: curve multiple infinitamente vicine.

Si può avere una curva multipla infinitamente vicina ad un'altra curva multipla C : ciò accade quando sopra una sezione piana generica si abbia un punto multiplo vicino a ciascun punto di C .

L'esempio più semplice si ottiene considerando due superficie che si toccano lungo la curva C ; combinando linearmente due tali coppie di superficie (aventi in ciascun punto di C il medesimo piano tangente) si costruisce in generale una superficie irriducibile dotata di due curve doppie infinitamente vicine.

Anche la trasformazione quadratica conduce ad esempi di superficie dotate di curve multiple infinitamente vicine; per esempio ad una superficie con *conica tacnodale*, cioè con due coniche doppie infinitamente vicine: infatti con una prima trasformazione quadratica una quadrica generale viene mutata in una superficie del quart'ordine, f , dotata di conica doppia, C , e di punto doppio isolato, O ; si operi ora una seconda trasformazione assumendo come punto fondamentale O e come conica fondamentale K una sezione generica del cono $O(C)$; allora f si muta in una superficie del sest'ordine che avrà un punto quadruplo e una conica tacnodale K' .

In ciò che precede sono esaminati i vari casi di punti e curve multipli infinitamente vicini a punti o curve propri, nell'intorno del prim'ordine; ma già nel caso del tacnodo siamo stati condotti a considerare punti doppi appartenenti all'intorno di second'ordine, ed è chiaro in generale come si definiscano punti e curve multipli appartenenti ad intorni successivi. Qui occorre osservare che le curve multiple infinitamente vicine ad un punto proprio, P , nell'intorno del second'ordine possono dar luogo a due casi, secondochè si tratti di una curva infinitamente vicina ad un punto P_1 , appartenente all'intorno di prim'ordine di P , oppure di una curva vicina ad una *curva* infinitesima appartenente al primo intorno di P . E analogamente si dica per curve cadenti in intorni d'ordine superiore.

Il passaggio di una superficie f di un certo ordine n per

un gruppo di punti e curve, propri o no, con date molteplicità. si traduce sempre mediante equazioni lineari cui soddisfano i coefficienti di f . Infatti se $f=0$ e $\varphi=0$ sono due superficie soddisfacenti alle condizioni poste, anche $\lambda f + \mu \varphi = 0$ vi soddisfa (cfr. § 36, pag. 596); da ciò segue l'enunciato (L. 1°, § 14, vol. I, pag. 93).

37. Comportamento delle polari e abbassamento della classe dovuto alle singolarità delle superficie. — Per approfondire lo studio dei punti e delle curve multiple di una superficie f , conviene esaminare il comportamento delle superficie polari in relazione a una singolarità qualunque.

Ricordiamo anzitutto che: un punto proprio r -plo (sia isolato, sia appartenente ad una curva r -pla) appartiene alle prime polari della superficie data f , con la molteplicità $r - 1$; infatti la superficie polare di un punto O si costruisce come luogo delle curve polari di O rispetto alle sezioni di f con piani passanti per O .

Ora si tratta di esaminare il comportamento delle polari nei punti multipli infinitamente vicini.

Pongasi che nell'intorno del prim'ordine di un punto O , r -plo per f , esista un punto r_1 -plo, O_1 : mostriamo che le polari di f , oltre a passare per O^{r-1} passano per O_1 con una molteplicità maggiore od uguale ad $r_1 - 1$. A tale scopo trasformeremo la superficie f con una trasformazione quadratica speciale, avente la conica fondamentale K spezzata in due rette a e b , di cui il punto fondamentale isolato cada in O ; faremo vedere come la polare di un punto B preso su b (ed un tale B è punto generico rispetto ad f) si muti sostanzialmente in una polare rispetto alla superficie trasformata f' , la quale passerà con la molteplicità $r_1 - 1$ per il punto r_1 -plo trasformato di O_1 .

Ordunque designamo con O' il punto fondamentale della trasformazione nel secondo spazio, e con a' e b' le rette componenti la conica fondamentale K' : i fasci di piani a e a' , e così b e b' , si corrispondono proiettivamente. Inoltre si corrispondono omograficamente le due stelle O e O' , onde in particolare ad un fascio di piani della prima passanti per un punto, B , di b corrisponderà nella seconda un fascio di piani passanti tutti per un certo punto, B' , di b' , che in questo senso si riterrà omologo a B ; analogamente ad un punto generico A

di a sarà omologo un punto A' di a' (¹). Infine vi è trasformazione quadratica fra due piani corrispondenti OAB e $O'A'B'$: ad O, A, B , corrispondono le rette $A'B', B'O', O'A'$.

Ciò posto si consideri una curva φ costituita dalla polare del punto B , rispetto alla sezione di f col piano AOB , presa insieme con la retta OA ; e nel piano $O'A'B'$ si consideri la curva ψ costituita dalla polare di B' rispetto alla sezione di f' presa insieme alla retta $O'A'$. Sappiamo (§ 14, pag. 410) che la curva φ si trasforma in una curva φ' combinazione lineare di ψ con la sezione di f' . Facciamo variare il piano OAB variando A su a , allora appare che la superficie Φ , costituita dalla polare di B rispetto ad f presa insieme col piano (Oa) , si trasforma in una combinazione lineare della f' con la superficie Ψ costituita dalla polare di B' presa insieme al piano $O'a'$. La molteplicità di Φ in O_1 è uguale a quella di Ψ ; ma poichè O_1 può suppersi fuori del piano (Oa) , si deduce che la polare di B ha in O_1 la molteplicità $r_1 - 1$. c. d. d.

Il ragionamento fatto si estende induttivamente come per le curve piane (§ 14) onde si conclude che

le polari di una superficie f passano (virtualmente) con la molteplicità $r_i - 1$ almeno per ogni punto r_i -plo della superficie che si trovi infinitamente vicino ad un punto proprio in un intorno d'ordine i ; per $i=0$ si ricade nella proprietà già enunciata pel caso dei punti propri.

Alle cose dette aggiungiamo che: ogni punto multiplo della superficie f , il quale — pur appartenendo alla curva multipla — abbassi la classe delle sezioni piane per esso, è un punto comune a tutte le curve intersezioni di f con le superficie polari, fuori della curva multipla. Infatti se O è il punto di cui si discorre, ed α un piano generico per O , l'influenza del punto singolare O sulla classe della sezione piana, si valuterà cercando le intersezioni assorbite in O di tre superficie: la f , il piano α , e la polare φ_A di un punto generico A appartenente ad α . A tale scopo sarà lecito determinare anzitutto l'intersezione $(f \varphi_A)$ che si compone all'insieme C delle curve multiple (debitamente contate) e di una

(¹) Questo modo di stabilire la corrispondenza fra i punti delle due coniche fondamentali $K = a + b$ e $K' = a' + b'$, non deve essere confuso con quello (già incontrato innanzi) dove si fa corrispondere ad un punto di a l'intersezione con b' della retta fondamentale omologa.

curva L fuori di C , quindi si avranno a determinare le intersezioni del piano α con la curva $C + L = (f \varphi_A)$.

Emerge di qui che l'abbassamento della classe prodotto da O sulla sezione del piano α , in confronto alla classe di una sezione con un piano vicino ad α che non passi per O , è uguale precisamente al numero delle intersezioni di L con α che cadono in O , ossia alla molteplicità di L in O .

Lo studio del comportamento delle polari in ordine alle singolarità di una superficie f , conduce a riconoscere quale sia l'abbassamento della classe di f che queste producono.

Trattiamo prima il caso dei punti multipli isolati, limitandoci alle singolarità più semplici. Pongasi dunque che la superficie $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ abbia un punto r -plo isolato, O , ($r > 1$). Allora la stella di centro O si stacca un certo numero, A , di volte dell'involuppo $F(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$ dei piani tangenti ad f , dove F venga determinato col procedimento di eliminazione che conduce in generale da una superficie d'ordine n a una F , il cui grado $n(n-1)^2$ è la classe di f : il numero A costituisce l'abbassamento della classe di f dovuto alla singolarità O .

Per valutare A si osservi che le superficie polari passano per O con la molteplicità $r-1$ e quindi nel punto O vengono assorbite in generale $r(r-1)^2$ intersezioni di due polari con f , dunque: *l'abbassamento della classe di una superficie f , dovuto ad un punto r -plo isolato, vale*

$$A = r(r-1)^2;$$

si ha esattamente per A questo valore e non un valore superiore *quando il cono osculatore nel punto r -plo non abbia generatrici doppie*. Infatti, se vi è una retta o che appartenga insieme al cono osculatore ad f in O , e ai coni osculatori delle sue polari, questa o conta due volte fra le r tangenti in O ad una sezione piana di f , passante per o , e quindi risulta generatrice doppia del cono osculatore in O .

Per $r=2$ abbiamo che *un punto doppio conico abbassa di 2 la classe di una superficie; ma per un punto biplanare, O , l'abbassamento diviene almeno 3; esattamente vale 3 quando non vi sono punti doppi infinitamente vicini ad O* . Infatti si consideri la retta o comune ai due piani osculatori in O ; per l'ipotesi fatta o ha un contatto tripunto e non quadripunto con la superficie f , costituendo una tangente cuspidale ordi-

narìa per la sezione di f con un piano per o ; segue che in questo piano la polare di un punto qualunque tocca o in O e quindi tutte le superficie polari di f toccano ugualmente o , sicchè due di esse hanno con f almeno 3 intersezioni assorbite in O ; ma si verifica analiticamente che il numero delle intersezioni assorbite è proprio 3, facendo vedere che le curve segate dalle polari hanno piano osculatore variabile per o .

Anche la nostra consueta trasformazione quadratica permette di mostrare che il punto biplanare ordinario O (non avente punti doppi infinitamente vicini) abbassa di 3 la classe di f . Invero la f (d'ordine n) si trasforma in una superficie f' (d'ordine $2n - 2$ passante $n - 2$ volte per la conica fondamentale riducibile K') che contiene nel piano fondamentale ω' due rette semplici, incrociantisi in un punto semplice O_1 , trasformato del punto infinitamente vicino ad O sopra o ; queste rette corrispondono ai due intorni di prim'ordine di O sui due piani osculatori. Ora si vede che la polare di un punto della K' sega il piano ω' secondo una conica passante per O_1 , la cui tangente in O_1 è variabile; ritornando ad f si deduce che la polare di un punto generico passa semplicemente per O , tocca o , e dà luogo ad una sezione con piano osculatore variabile.

Il metodo qui adoperato permette anche di riconoscere l'abbassamento della classe dovuto a un punto biplanare straordinario, cioè ad un punto biplanare, O , che sia seguito da altri punti doppi infinitamente vicini.

Se vicino al punto biplanare O vi è un punto doppio, O_1 , la trasformazione quadratica applicata ad O conduce ad una superficie f' che contiene due rette semplici incrociantisi in un punto doppio (trasformato di) O_1 ; ora se vicino ad O_1 vi è un altro punto doppio, O_2 , questo starà fuori del piano delle due rette nominate e perciò il punto O_1 di f' diverrà biplanare, ma non mai uniplanare. Così seguitando si conclude che: qualora *la singolarità di un punto biplanare isolato sia composta di più punti doppi infinitamente vicini*, questi si succedono sopra un ramo lineare; il loro numero è finito giacchè tali punti sono comuni a tutte le curve sezioni di f con le polari fuori della curva doppia; l'ultimo punto doppio O_s , successivo ad un punto biplanare O di specie s , può essere conico o biplanare (sopra la superficie trasformata su

cui diviene proprio); nel primo caso la singolarità si dice di *tipo pari* e nel secondo di *tipo dispari*.

Ora è chiaro che la curva K , intersezione di due polari φ , passerà semplicemente per i punti doppi O, O_1, \dots, O_s , e passerà ancora per un punto semplice di f successivo ad O_s quando O_s sia biplanare: il che si verifica induttivamente con la trasformazione quadratica. Pertanto si conclude: *l'abbassamento della classe dovuto a un punto biplanare isolato O di specie s vale $2s + 2$ oppure $2s + 3$ secondochè il punto biplanare è di tipo pari o di tipo dispari* ⁽¹⁾.

Vogliamo aggiungere che, dato un punto biplanare di specie $s > 0$, si può riconoscere se esso sia di tipo pari o dispari anche in modo diretto, senza far uso di trasformazioni quadratiche: si tratta di esprimere la riducibilità o irriducibilità dell'intorno del punto O_s . Sia per es. un punto biplanare O di specie $s = 1$, e pongasi O nell'origine delle coordinate ed O_1 nella direzione dell'asse z ; si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} f &= f_2 + f_3 + f_4 + \dots, \\ f_2 &= x(x + \lambda y), \\ f_3 &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \\ &\quad + z(b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + z^2(c_{10}x + c_{01}y) \dots \\ f_4 &= dz^4 + \dots \end{aligned}$$

Ora le parabole per OO_1 vengono rappresentate da

$$\begin{cases} x = kz^2 \\ y = \alpha z^2; \end{cases}$$

se una di queste parabole deve osculare la superficie f , cioè avere con essa un contatto quintipunto, si deve annullare in $f(kz^2, \alpha z^2, z)$ il coefficiente di z^4 :

$$\lambda k\alpha + k^2 + c_{01}\alpha + c_{10}k + d = 0.$$

Tale equazione di secondo grado in k e α rappresenta l'intorno del punto O_1 sopra f ; questo sarà riducibile quando si

(1) ROHN. Math. Annalen. Bd. 22, pag. 128, (1883). Cfr. SEGRE, l. c. n.° 24.

annuli il discriminante:

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & e_{10} \\ \lambda & 0 & e_{01} \\ e_{10} & e_{01} & 2d \end{vmatrix} = 0.$$

Passiamo a riconoscere l'abbassamento della classe prodotto sopra una superficie f da un punto isolato uniplanare: indicheremo sempre questo punto con O , e con τ il relativo piano tangente.

Per un punto uniplanare ordinario una sezione piana generica possiede una cuspid ordinaria e le sezioni per una delle tre tangenti singolari posseggono un tacnodo; quindi le curve polari di una sezione piana toccano la tangente in O : segue che le superficie polari toccano τ in O e però le loro sezioni con f hanno in O un punto triplo, e — come si vede facilmente — con tangenti fisse nelle direzioni singolari; quindi, segnando una di queste curve con un'altra polare: *un punto uniplanare ordinario abbassa la classe di f di 6 unità.*

L'abbassamento della classe dovuto ad O può crescere se le sezioni delle polari tangenti ad una direzione singolare t vengono ad oscularsi. Ma allora il punto O_1 , successivo ad O su t , è un punto doppio biplanare; quindi si può vedere che nella t si uniscono due fra le tre tangenti singolari per O . Infatti si ponga O nell'origine delle coordinate, e si assuma la t come asse z e il piano τ come piano $x=0$; la condizione che O_1 sia biplanare viene espressa, come abbiamo veduto sopra nello studio dei punti biplanari di specie 1 e di tipo pari, annullando il discriminante di un'equazione di 2° grado in due variabili, che — posto nella formola ivi incontrata $\lambda=0$ — si riduce a

$$-2e_{01}^2 = 0;$$

ma già nel paragrafo precedente (a pag. 598) abbiamo veduto che questa condizione porta la coincidenza di due tangenti singolari per O : Dunque:

Se un punto uniplanare isolato O abbassa la classe di 7 unità, anzichè di 6, due fra i punti doppi vicini ad O coincidono; questa condizione equivale all'altra che uno dei punti

suddetti sia *biplanare*. Aggiungasi che l'abbassamento della classe dovuto ad O diviene 8 quando coincidono tutti e tre i punti doppi vicini ad O , cioè coincidono le tre tangenti singolari, senza diventare indeterminate; in questo caso si prova infatti che le sezioni delle polari col piano τ posseggono una cuspide con tangente fissa.

Finalmente supponiamo che le tangenti singolari in O diventino indeterminate: O è allora un tacnodo. Le superficie polari toccano il piano tangente τ e segano f secondo linee aventi in O un punto quadruplo; le tangenti a queste linee sono le quattro direzioni singolari del tacnodo (tali che le sezioni piane per esse posseggono cuspidi di 2^a specie), quindi sono fisse; si deduce che: un tacnodo isolato ordinario abbassa la classe di f di 12 unità. Non procederemo oltre ad esaminare ulteriori particolarizzazioni del punto O (cfr. BRILL, l. c.).

Proponiamoci ora di calcolare la classe di una superficie f , che possenga una curva doppia, C : occorre cercare quante sono le intersezioni, fuori di C , della f con due polari generiche, φ_1 e φ_2 . Vediamo come si determini questo numero, e quindi l'abbassamento della classe di una superficie che acquisti una curva doppia C ; poi riconosceremo in questo due parti corrispondenti all'abbassamento della classe propriamente dovuti a C e all'abbassamento dovuto ai punti cuspidali di C .

Or dunque sia n l'ordine della superficie f , m l'ordine di C , che supporremo priva di singolarità, d il numero dei suoi punti doppi apparenti. Le φ_1 e φ_2 hanno, oltre C , una intersezione K d'ordine $(n-1)^2 - m$; e la K si appoggia a C in un certo numero x di punti che si lascia facilmente determinare.

Infatti conoscendo l'equivalenza della curva C in ordine a tre superficie d'ordine $n-1$ che passino semplicemente per essa (cfr. pag. 312), ne deduciamo il numero x ; si avrà (badando alla differenza fra le notazioni attuali a quelle del loco citato):

$$m(n-1) + x = m\} 3(n-1) - m - 1 \{ + 2d,$$

da cui

$$x = 2m(n-1) - m(m+1) + 2d.$$

Ora, fra gli x punti comuni a K e a C , alcuni cadono nei

punti di contatto della curva C coi piani tangenti ad essa condotti per la retta o che congiunge i poli $O_1 O_2$ di φ_1 e φ_2 , altri cadono nei punti cuspidali di C . Invero se P è un punto comune a C e K , le superficie φ_1 e φ_2 riescono tangenti in P ; ma il piano tangente a φ_1 in P è il piano polare di O_1 rispetto ai due piani α e β tangenti alle due falde di f in P stesso, sicchè in P si deve avere lo stesso piano polare di O_1 e O_2 rispetto alla coppia $\alpha\beta$; da ciò segue appunto che il piano $PO_1 O_2$ passa per la retta comune ad α e β , riuscendo tangente a C , oppure che α e β coincidono.

Così su C troveremo $m(m-1) - 2d$ punti (CK) della prima specie, e quindi

$$i = x - [m(m-1) - 2d] = 2m(n-m-1) + 4d$$

punti (CK) che cadono nei punti cuspidali.

Esaminando più da vicino le due specie di punti comuni a C e K appare evidente che nei primi la K non riesce tangente ad f , mentre in un punto cuspidale (tutte le φ toccando f) K riesce tangente alla f . Si può anche riconoscere più precisamente che la K , passante per un punto cuspidale P con un ramo lineare, ha ivi 3 intersezioni riunite con la f , e non in generale di più. A tal uopo basta mostrare che la tangente a K in P è distinta dalla tangente singolare $p = PP_1$ e dalla tangente t a C in P , giacchè allora basterà confrontare la curva K con la sezione di f sopra un cilindro condotto per K , la quale sezione presenta una cuspide. Per trovare la tangente a K in P , prendiamo il polo O_1 nel punto d'intersezione di o col piano π tangente ad f in P ; si verifica (cfr. L. 3°, § 4, pag. 23) che la polare φ_1 ha in P un punto doppio, e sega π secondo una curva ($\pi\varphi_1$) le cui tangenti sono fornite dalla coppia polare di PO_1 rispetto alla terna t^2p formata dalle tangenti alla sezione di f con π : essendo φ_2 tangente a π , si deduce che la tangente a K coincide con la tangente a ($\pi\varphi_1$) diversa da t . (Soltanto nel caso $p = t$ le due tangenti a ($\pi\varphi_1$) coincidono in t ; per questa particolarizzazione del punto cuspidale accade veramente che K osculi f).

Ciò posto le intersezioni di φ_1 e φ_2 con f , fuori di C , saranno

$$n\}(n-1)^2 - m\{-2x - i.$$

Di qui si conclude il teorema:

la classe di una superficie f d'ordine n , che possenga una curva nodale d'ordine m priva di singolarità e dotata di d punti doppi apparenti, vale in generale

$$n(n-1)^2 - [m(5n-2m-6) + 4d + i];$$

dove l'espressione

$$i = 2m(n-m-1) + 4d$$

designa il numero dei punti cuspidali appartenenti alla curva doppia.

Il calcolo della classe della superficie f , dotata di curva doppia C , si può anche ottenere considerando la curva L_1 , intersezione di f con una polare φ_1 fuori della curva C_1 , e cercando quanti sono i punti comuni a L_1 e a φ_2 , ancora fuori della C stessa.

L'ordine della L_1 vale

$$n(n-1) - 2m,$$

e il numero dei punti di appoggio ($L_1 C$) si calcola in base alle formule di equivalenza generalizzate, che danno le intersezioni — fuori di C — di tre superficie passanti per C di cui una contenga la C doppiamente. La generalizzazione che qui occorre si ottiene fingendo che f degeneri in due parti f' e f'' passanti semplicemente per C : così l'equivalenza di C rispetto ad f , φ_1 e φ_2 è uguale alla somma delle equivalenze di C rispetto alle terne di superficie

$$f', \varphi_1, \varphi_2; f'', \varphi_1, \varphi_2.$$

In tal modo si trova che il numero dei punti comuni a C e L_1 è

$$y = m(3n - 2m - 4) + 4d.$$

Ora i punti comuni a L_1 e C si dividono in due gruppi:

1) gli

$$m(n-2)$$

punti comuni a C e alla seconda polare del polo O_1 di φ_1 , (cioè punti P per cui la retta $O_1 P$ ha un contatto tripunto

con f), nei quali non vi è contatto fra L_1 e la polare generica φ_2 ;

2) gli

$$i = y - m(n - 2)$$

punti cuspidali di f sulla curva doppia C .

Se P è uno di questi punti, accade che la L_1 passi sempre per il punto doppio P_1 , vicino a P nella direzione singolare (il quale è doppio per f); vi è quindi contatto fra φ_2 e L_1 . Di qui si trae che la classe di f vale in generale

$$\begin{aligned} & (n - 1) \{ n(n - 1) - 2m \} - y - i = \\ & = n(n - 1)^2 - [m(5n - 2m - 6) + 4d] \{ + i \} \end{aligned}$$

come si è veduto innanzi, e si ritrova pure per il numero dei punti cuspidali il valore

$$i = 2m(n - m - 1) + 4d.$$

Come verifica si può applicare la formola che dà il numero dei punti cuspidali, al caso di una superficie d'ordine n dotata di retta doppia; allora risulterà

$$m = 1, \quad d = 0; \quad i = 2(n - 2),$$

d'accordo col risultato stabilito nel § 34.

Nota. Le formole precedenti si estendono al caso di una superficie f , proiezione da punti generici di una superficie iperspaziale priva di singolarità, in cui la curva doppia C possessa t punti tripli che siano tripli anche per la superficie f ; lasciando al lettore di ripetere il procedimento con le modificazioni che esso comporta, ci limitiamo a scrivere qui la formola che dà la classe di f :

$$n(n - 1)^2 - [m(5n - 2m - 6) + 4d + 3t] \{ + i \},$$

dove i vale ora:

$$i = 2m(n - m - 1) + 4d + 6t.$$

Abbiamo valutato l'abbassamento della classe di una superficie f d'ordine n dotata di curva doppia C d'ordine m

con d punti doppi apparenti; nel caso più semplice in cui la C non abbia singolarità, codesto abbassamento è dato in totale da

$$A = \}m(5n - 2m - 6) + 4d\{ + i.$$

Ora questa formula mette in evidenza due parti di

$$A = e + i;$$

la prima parte, e , è l'equivalenza della curva C rispetto a tre superficie d'ordine n , $n - 1$, $n - 1$, di cui una passi doppiamente e le altre semplicemente per C ; la seconda parte è dovuta alla circostanza che le polari hanno un rapporto particolare con f , per cui accade che alcune fra le intersezioni delle tre superficie vengano infinitamente vicine alla curva C , in punti di contatto di esse, e precisamente negli i punti cuspidali (contatti di K con f , o di L_1 con φ_2).

Potremo definire e come *abbassamento della classe della superficie propriamente relativo alla curva doppia C* , ed i come *abbassamento relativo ai punti cuspidali*: qui si finge di separare due elementi da cui risulta l'abbassamento della classe di f , come se fosse lecito aggiungere alla curva doppia un punto cuspidale, mentre in realtà il numero di questi punti dipende, come abbiám visto, dai caratteri della curva (supposta nodale). Pertanto la nostra convenzione risulta conforme al principio di continuità ove si tratti — come abbiám fatto — il problema dell'abbassamento della classe di f come un particolare problema di equivalenza.

Soltanto nel caso particolare in cui una nuova singolarità venga a sovrapporsi alla singolarità della curva C in un punto, P , di questa (sia che si tratti di un punto ipermultiplo o di un tacnodo, ecc.), l'abbassamento della classe relativo al punto P si aggiunge in parte all'abbassamento totale dovuto alla curva C , mentre una parte di questo si riferisce sempre ad un certo numero di punti cuspidali che vengono assorbiti in P . In ogni caso giova rilevare esplicitamente che « punti singolari della superficie f appartenenti semplicemente alla curva doppia e abbassanti la classe di f , abbassano anche la classe delle sezioni piane » (i due abbassamenti sono in generale diversi).

Nota critica. Invece che in rapporto alle formule di equivalenza, si possono distinguere diverse parti nell'abbassamento della classe di una superficie f_c , dotata di una curva doppia C , anche da un altro punto di vista, che si basa ugualmente sulla continuità, cioè quando si riguardi la f_c come limite di una superficie generale d'ordine n

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

la cui equazione tangenziale viene a svanire identicamente.

Or dunque scriviamo l'equazione tangenziale della f , ottenuta eliminando le x_i e il fattore di proporzionalità ρ fra le

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

$$\rho u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

questa sarà un'equazione omogenea

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$$

di grado $n(n-1)^2$.

Ma se la f acquista una curva doppia C , tutte le sezioni piane di f posseggono dei punti doppi, e possono quindi ritenersi impropriamente come tangenti, perciò F risulta identicamente nulla: ciò è d'accordo col fatto algebrico che $F=0$ esprime la compatibilità delle

$$f = 0, \quad \rho u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

venendo queste soddisfatte per il valore $\rho=0$ del fattore di proporzionalità.

Ma importa investigare più profondamente come avvenga lo svanimento di F ⁽¹⁾.

Anzitutto osserviamo che un'equazione contenente parametri arbitrari può svanire in modi radicalmente diversi:

1) L'equazione della retta

$$ax + ay + a^2 = 0,$$

svanisce per $a=0$, ma tuttavia — divisa per a — si riduce

(1) Cfr. CHISINI « Rendic. Accad. Lincei » 20 maggio 1917.

alla forma limite determinata

$$x + y = 0;$$

analogamente si dica per l'equazione

$$ax + aby + ac = 0,$$

che tende alla forma limite $x = 0$ in qualunque modo vengano ad annullarsi i parametri a , b , c .

2) Invece l'equazione della retta

$$ax + by = 0,$$

svanisce essenzialmente quando a e b tendono a zero in modo indipendente, perchè la retta non tende a una posizione limite determinata.

3) Ora l'equazione della conica

$$\psi = cx + ax^2 + (a + b)xy + by^2 = cx + (x + y)(ax + by) = 0,$$

svanisce per $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, dando luogo, in qualche modo, a un caso misto dei due precedenti: al limite la conica si riduce indeterminata, risultando tuttavia di una retta determinata e di una retta indeterminata. Possiamo caratterizzare questo caso dicendo che c'è uno *svanimento essenziale parziale* della conica ψ ; diremo anche che lo svanimento di ψ proviene da un *fattore identicamente nullo della equazione limite* $(ax + by)$, tolto il quale rimane un'equazione determinata $(x + y = 0)$.

Al lume dei concetti sopra spiegati è facile vedere che quando una superficie f_c , dotata di curva doppia C , venga considerata come limite di tutte le possibili f dello stesso ordine, si ha uno svanimento essenziale parziale della relativa equazione tangenziale $F_c = 0$.

In primo luogo si riconosce che un piano qualunque α fa parte dell'inviluppo limite $F_c = 0$, perchè si può ritenere f_c come limite per $\lambda = 0$ di

$$f_c + \lambda f = 0,$$

dove f sia tangente ad α in un punto di C ; con ciò si pone

in evidenza l'indeterminazione del

$$\lim F = F_c.$$

Ma d'altra parte si vede che in F_c compare certo un fattore determinato, che uguagliato a zero rappresenta una superficie involuppo di cui fa parte l'insieme dei piani propriamente tangenti ad f ; giacchè, in *qualunque modo* f tenda a f_c (in dipendenza di un parametro), un piano propriamente tangente a f_c appare come limite di un piano tangente ad f .

Ora riconosceremo che « tolto il fattore identicamente nullo, l'equazione determinata a cui si riduce $F_c = 0$, rappresenta — oltre l'involuppo dei piani propriamente tangenti ad f_c — l'involuppo dei piani tangenti alla curva C contato due volte, ed inoltre un certo numero di stelle coi centri in punti singolari della curva C ».

Per dimostrare il teorema conviene osservare che il cono circoscritto ad f da un punto O dello spazio (involuppato dai piani tangenti ad f per O), degenera nel nostro passaggio al limite riducendosi al cono circoscritto ad f_c e al cono $O(C)$ contato due volte, sicchè il suo involuppo risulta indeterminato. Per mezzo di questa considerazione il nostro problema si riconduce a quello delle forme limiti dell'involuppo di una curva variabile la quale degeneri come luogo venendo a contenere una parte contata due volte: vedemmo già nel caso delle coniche (L. 3°, § 40, pag. 280) che questo involuppo risulta indeterminato, finchè non si fissi un modo di passare al limite in dipendenza di un parametro.

Consideriamo ora in generale la degenerazione di una curva piana d'ordine n , $k(xy) = 0$, che — in dipendenza da un certo numero di parametri — si riduca ad una curva d'ordine n contata due volte, $c^2(xy) = 0$: accade in tal caso che l'involuppo di k venga a contenere come parte fissa l'involuppo di c contato due volte ⁽¹⁾; la rimanente parte consta di $2n^2$

(1) Si faccia variare k entro il fascio

$$k = c^2 + \lambda h,$$

e si considerino le tangenti per il punto all'infinito dell'asse y , di cui

fasci i cui centri (*punti di diramazione della curva doppia* φ) sono punti di c dipendenti dal modo con cui ci si avvicina alla curva limite. (Se c ha un punto doppio il fascio relativo figura quattro volte nella parte fissa dell'inviluppo limite).

Più in generale se una curva $k=0$ d'ordine $2n+m$, dipendente da un certo numero di parametri, tende a una forma limite $c^2l=0$, che contiene una componente d'ordine n contata due volte, l'inviluppo di f si riduce all'inviluppo di l , più l'inviluppo di c contato due volte, più i fasci che han per centri i punti comuni a c e l contati ciascun tre volte, più infine $n(2n+m)$ fasci, i cui centri cadono in punti della

i punti di contatto sono dati dalle intersezioni di k con la sua polare:

$$c^2 + \lambda h = 0, \quad c \frac{\partial c}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0;$$

appare che, per $\lambda=0$, $2n(n-1)$ fra i detti punti tendono alle intersezioni di $c=0$ e della polare $\frac{\partial c}{\partial y}=0$, c. d. d.

Le rimanenti $2n^2$ intersezioni di k con la sua polare vanno a cadere nei punti comuni a c e h . Si mandi per uno di questi punti, P , la parallela all'asse y ; su questa le curve del fascio $c^2 + \lambda h$ segano una g_{2n}^1 che ha P come punto fisso: si deduce che P è punto doppio non solo per il gruppo segato dalla curva $\lambda=0$ ma anche per quello segato dalla curva infinitamente vicina (Cfr. L. 2°, § 5, Vol. I, pagg. 179-80). Variando h variano di conseguenza su c i nominati punti P , e quindi i relativi fasci che entrano nell'inviluppo limite di k .

Le cose dette ricevono una illustrazione dal punto di vista topologico, quando si consideri la superficie riemanniana di k , la quale — passando al limite per $\lambda=0$ — si riduce ad una superficie doppia costituita dalle due riemanniane di c sovrapposte che vengono collegate attraverso i punti di diramazione corrispondenti agli anzidetti $2n^2$ punti P (punti di diramazione della funzione algebrica che corrisponde alla curva infinitamente vicina a $c^2=0$). Basta invero riferirsi alla costruzione di RIEMANN di superficie costituite di fogli sovrapposti (cfr. L. 2°, § 34), ricordando che i punti di diramazione ove si saldano i fogli corrispondono alle tracce delle tangenti alla curva parallele all'asse y .

Qui appare che la *curva doppia coi* $2n^2$ *punti di diramazione* P , cioè la $c^2=0$ concepita come limite nel fascio $c^2 + \lambda h=0$, dà luogo a una riemanniana *irriducibile*, finchè i nominati $2n^2$ punti comuni c e h non vengano a coincidere a coppie, in guisa che un giro intorno ai due punti di diramazione, divenuti infinitamente vicini, non dia più luogo a passaggio da un foglio all'altro. Così la nostra curva doppia c^2 non può ritenersi in generale come limite di una curva cl per $l=c$.

curva c dipendenti dal modo con cui ci si avvicina alla curva limite ⁽¹⁾.

Andiamo ad applicare queste considerazioni al problema che concerne la degenerazione dell'involuppo della superficie f che acquisti una curva doppia C . Qui la curva k , proiezione piana del contorno apparente di f , fatta dal vertice O del cono circoscritto, si riduce ad una curva c^2l , costituita dalla proiezione della curva doppia C e da quella della L sezione di f_c con la polare di O , fuori della curva doppia. Tuttavia la curva variabile k non è una curva generale del proprio ordine, possedendo un certo numero di nodi e di cuspidi (cfr. L. 3°, § 19), e — per questo motivo — si vede che essa varia in un sistema continuo non lineare, sia in rapporto alla variazione di f , sia in rapporto alla possibile variazione di O . Ma la definizione della forma limite avviene come se la k variasse in un sistema lineare, perchè due curve infinitamente vicine definiscono sempre un fascio (*tangente* alla serie continua cui appartiene la curva variabile); soltanto i nodi e le cuspidi di k potranno dar luogo a punti limiti di c , centri di fasci che non debbano più figurare nell'involuppo limite. In ogni caso questo involuppo limite conterrà sempre l'involuppo di c contato due volte, e del resto un certo numero di fasci di rette; alcuni dei quali saranno variabili in rapporto alla via secondo cui ci si avvicina alla curva limite (costituendo così la parte dell'involuppo che svanisce in modo essenziale), ed altri potranno esser fissi, entrando nel fattore determinato dell'involuppo medesimo.

Dalle cose dette, ritornando alla superficie, emerge che

(1) Si ripete qui il ragionamento della nota precedente: l'involuppo della $c^2l=0$ ritenuto come limite di $c^2l + \lambda h = 0$, per $\lambda = 0$, viene a contenere gli involuppi delle due curve c e l e i fasci che hanno per centro i punti comuni a c e h . Inoltre si prova che all'involuppo limite appartiene anche il fascio che ha per centro un punto Q comune a c e l e, in generale, con la molteplicità 3; e basterà verificarlo nel caso del fascio di cubiche $x^2(x+y) + \lambda(y^2 - \varphi_3(x)) = 0$, dove si considerino le tangenti parallele all'asse y . Con ciò, sommando le varie parti secondo le relative molteplicità, si ritrova la classe $(2n+m)(2n+m-1)$ dell'involuppo di f .

Aggiungeremo che la $c^2l=0$ concepita come limite nel fascio $c^2l + \lambda h = 0$, definisce sopra φ una *curva doppia con $2n(n+m)$ punti di diramazione*; fra questi figurano, accanto alle intersezioni di c e h , anche i punti comuni a c e l , d'accordo con la circostanza che il relativo fascio figura un numero dispari di volte (tre volte) nell'involuppo limite.

« quando la superficie f viene ad acquistare una curva doppia C , l'*inviluppo* di f dà luogo ad una *degenerazione essenziale parziale*; il *fattore determinato* risulta costituito dall'*inviluppo proprio*, cioè dall'insieme dei piani propriamente tangenti ad f_c , e dall'*inviluppo dei piani tangenti a C contato due volte*, inoltre anche da un certo numero di *stelle coi centri su C* ».

Ora conviene riconoscere che i centri delle stelle fisse figuranti nell'*inviluppo limite di f_c* sono punti abbassanti la classe della superficie in ordine alle formule di equivalenza, cioè punti cuspidali in cui si ha contatto della superficie f con le sue polari, dignisachè la curva K — sezione di due polari — tocca f , e così la L — sezione di una polare con f — tocca un'altra polare.

Per dimostrare l'asserto occorre verificare che « avvicinandosi convenientemente con una f al limite f_c , si può supporre che un qualunque punto biplanare, P , di C , non sia limite di punti comuni ad f e a due sue polari φ_1 e φ_2 ».

Posto P in un punto a distanza finita, facciamo variare la superficie f nel fascio

$$f_c(xyz) + \lambda = 0,$$

e consideriamo come polari φ_1 e φ_2 le polari dei punti all'infinito degli assi x e y : al variare di λ queste polari non variano restando sempre

$$\varphi_1 = \frac{\partial f_c}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial f_c}{\partial y},$$

sicchè i punti comuni a f , φ_1 , φ_2 sono le intersezioni di f con C più quelle di f con K . Ora i punti comuni a f e C sono, per qualunque λ , i punti comuni a C e al piano all'infinito, sicchè se P è un punto biplanare per cui non passa la K esso non può essere limite di una intersezione di f , φ_1 , φ_2 .

Per collegare più intimamente il problema dell'abbassamento della classe della superficie f_c al problema generale dell'equivalenza di una curva C , rispetto a tre superficie qualunque f_c , φ_c , ψ_c , passanti per essa (in modo semplice o multiplo), basterà osservare che anche quest'ultimo problema si può trattare come caso limite delle intersezioni di tre superficie, f , φ , ψ , aventi a comune un numero finito di punti.

Quando le tre superficie vengono a passare per C , alcune di quelle intersezioni cadono su C , e, generalmente, in punti della curva che sono suscettibili di variare secondo la via del passaggio al limite: solamente nel caso che f_c, φ_c, ψ_c si tocchino in un punto P di C , questo punto figurerà come punto limite fisso delle intersezioni (f, φ, ψ) , e in generale come limite di *due* intersezioni, delle quali una si può supporre avvicinarsi a P sopra C , ed *una* fuori di C . Però nel caso che φ e ψ siano le due polari φ_1 e φ_2 di f , P riesce limite di *tre* intersezioni, e così la stella che ha per centro un punto cuspidale P viene a figurare tre volte nel fattore determinato dell'involuppo limite di f_c (¹).

Da questo punto di vista si sarebbe tratti a definire come 3 l'abbassamento della classe relativo al punto P (diminuendo allora di due unità in confronto all'equivalenza quello che si considera relativo alla curva C). Ma crediamo più conveniente mantenere la prima definizione che implica sostanzialmente un'applicazione più larga del principio di continuità: secondo la quale l'abbassamento della classe relativo a un punto cuspidale vale 1.

38. Complementi: punti cuspidali particolari, singolarità duali di punti multipli isolati. — Abbiamo veduto che un punto cuspidale di second'ordine, appartenente alla curva nodale C di una superficie f , abbassa in generale di un'unità la classe di f ; un abbassamento ulteriore potrà aversi soltanto per punti cuspidali particolari che qui ci proponiamo di analizzare.

Diciamo *ordinario un punto cuspidale d'ordine 2 di una curva multipla, quando la tangente singolare in esso, rimanendo determinata, è diversa dalla tangente alla curva doppia*. Allora l'analisi fatta nel precedente paragrafo, intersecando la curva K , intersezione di due polari φ_1 e φ_2 con la f , prova che: *l'abbassamento della classe relativo a un punto cuspidale ordinario del second'ordine vale esattamente 1*.

(¹) Perciò, riattaccandoci alla precedente nota di pag. 621 basterà osservare che a un punto cuspidale P risponde un punto di c^2l comune a c e l , il quale è centro di un fascio che figura 3 volte nell'involuppo limite di c^2l ; occorre soltanto notare che codesto punto non è limite di un punto doppio o di una cuspidale della curva variabile h , proiezione del contorno apparente.

In vista delle modificazioni inerenti a punti cuspidali straordinari, forniremo una nuova prova della proposizione precedente, considerando la curva L intersezione di f con una polare φ , fuori di C , ed esaminando le intersezioni di questa con un'altra polare.

Osserviamo dunque che la detta L passa semplicemente per il punto cuspidale P , (altrimenti tutte le sezioni diventerebbero tacnodi) e passa pure per il punto doppio infinitamente vicino, P_1 , appartenente alla tangente singolare. Non può accadere che le φ abbiano a comune un punto successivo a P_1 sopra il ramo lineare della L , altrimenti si troverebbe che il punto P_1 (che può concepirsi come punto proprio sopra una trasformata di f) è biplanare anzichè conico; ma è facile riconoscere (cfr. pagg. 598-611) che in tal caso la PP_1 dovrebbe contare per due tangenti singolari, sicchè la tangente singolare in P riuscirebbe indeterminata, diventando un tacnodo.

Ora si avranno particolarizzazioni del punto cuspidale P quando:

1) la tangente singolare viene a coincidere colla tangente a C ;

2) la tangente singolare diventa indeterminata, e quindi P diventa un tacnodo;

oppure

3) quando una terza falda di f venga a coincidere con le prime due, cioè P diventi un punto cuspidale del terz'ordine.

1) Volendo investigare più da vicino il primo caso, supporremo che la curva C sia una conica. Questa ipotesi apparentemente particolare ha un valore generale. Infatti la questione che stiamo trattando ha un carattere differenziale, per modo che è lecito sostituire alla curva data C una sua trasformata per mezzo di una trasformazione puntuale, biunivoca e regolare nell'intorno di P ; con che una C qualsiasi può ridursi ad una conica. Del resto chi non voglia far uso di siffatte considerazioni, potrà agevolmente estendere il procedimento che qui adoperiamo pel caso di una conica, introducendo — in luogo delle trasformazioni quadratiche — le trasformazioni monoidali.

Ordunque si abbia una superficie f , di un certo ordine n , possedente una conica r -pla a falde distinte, C , e sia P un punto cuspidale di questa. Opereremo su f una trasforma-

zione quadratica assumendo la C come conica fondamentale ed un punto fondamentale O , fuori di C , in un punto generico dello spazio. La f si muta così in una superficie f' d'ordine $2n - 2r$, avente un punto O' di molteplicità $n - 2r$ (ed anche una conica K' di molteplicità $n - r$). Alla conica r -pla C di f corrisponde su f' una curva semplice C' (da non confondere colla conica fondamentale del secondo spazio) che è sezione di f' col cono fondamentale O' (fuori della conica fondamentale) e quindi è una curva (d'ordine $2(n - r)$) secante le generatrici del detto cono in r punti. Al punto P corrisponde una generatrice p' del cono O' , tangente alla curva C' , ossia alla superficie f' , in un punto P' .

Ora per la C' , P' sarà in generale un punto semplice, essendo il piano tangente al cono quadrico O' diverso dal piano tangente ad f' : in questo caso P è un punto cuspidale ordinario di f . Infatti nella trasformazione, al piano per OP che contiene la direzione singolare in P , e quindi sega f secondo un tacnodo, corrisponde il piano per p' tangente ad f' , mentre il piano per p' tangente al cono quadrico O' corrisponde al piano per OP tangente alla C : così la direzione singolare per P è diversa dalla tangente a C .

Il punto cuspidale P , dato sopra la C di f , si particularizza se la C' ha un punto doppio in P' (oppure se la retta p' ha con C' , cioè con f' , un contatto tripunto). Allora il piano tangente ad f' in P' , ove non sia indeterminato, coincide col piano tangente al cono quadrico O' , quindi — ritornando ad f — la direzione singolare in P va a coincidere con la tangente a C : è chiaro che in questo caso la singolarità di P per f (punto cuspidale del 2° ordine *doppio*) si può far nascere da due punti cuspidali ordinari che vengono a coincidere, giacchè il piano tangente al cono in P' contiene due generatrici tangenti a f' .

Qui si può aggiungere che il passaggio al limite per cui due punti cuspidali ordinari vengono a confondersi in un punto cuspidale doppio, P , non abbassa ulteriormente la classe della superficie f ; a tal uopo basta considerare i piani tangenti condotti per una retta o della stella O , a cui risponde nello spazio trasformato una retta o' per il punto O' : nel passaggio al limite non vi è alcun piano tangente ad f' per o' che venga a contenere P' , e quindi non vi è alcun piano tangente ad f per o che venga a contenere P .

Concludiamo intanto che « un punto cuspidale del second'ordine per cui la tangente singolare venga a coincidere con la tangente alla curva doppia, è un punto cuspidale doppio, nascente dall'avvicinamento di due punti cuspidali ordinari, che abbassa in generale di 2 la classe della superficie: l'abbassamento diventa 3 se un terzo punto cuspidale si avvicina al punto cuspidale doppio, cioè nel caso del punto cuspidale triplo, ecc. ».

Aggiungasi che in rapporto a un punto cuspidale doppio di f deve ancora sussistere la proprietà che per i piani contenenti la tangente singolare si abbassa il genere della curva sezione; e segue da ciò che *nell'intorno di second'ordine di P si ha una retta infinitesima doppia*, sicchè se si opera una trasformazione quadratica assumendo P come punto fondamentale, la singolarità si muta in un tacnodo.

Un semplice *esempio concreto* di una linea nodale dotata di un punto cuspidale doppio, viene offerto dalla *rigata cubica di CAYLEY*, che è il caso limite della rigata cubica definita da due direttrici rettilinee a , b e da una conica C che si appoggia ad una di queste (a), quando le due direttrici a e b sono infinitamente vicine ⁽¹⁾.

Per una rigata cubica generale, f , accade che per ciascun punto della retta doppia a escono due generatrici, le quali coincidono per i due punti cuspidali determinati dai due piani per b tangenti a C ; quando b diventa infinitamente vicina ad a , i detti piani coincidono dando origine a un punto cuspidale doppio nel punto comune a C e a . (Questa deduzione è d'accordo con la circostanza che l'involuzione delle coppie di generatrici di f uscenti dai punti di a degenera, figurando nella serie delle generatrici la stessa direttrice a).

Il modello della rigata di CAYLEY confrontato a quello della rigata cubica generale, pone in evidenza la differenza fra i punti cuspidali semplici e il punto cuspidale doppio secondo la visione reale: per la rigata generale i punti cuspidali sono estremi di un segmento (finito o infinito) che costituisce una effettiva linea nodale della superficie, mentre il segmento complementare appartiene alla superficie come una linea di punti isolati; invece per la rigata di CAYLEY tutta la retta a costituisce una linea nodale.

(1) Cfr. per es. ENRIQUES « G. Descrittiva ». Parte II, § 58.

2) Il caso in cui il punto cuspidale di second'ordine si particolarizza diventando indeterminata la tangente singolare, dà luogo al tacnodo, il quale costituisce altresì una particolarizzazione del punto cuspidale doppio; la trasformata f' presenta in questo caso un punto doppio in P' che è naturalmente doppio per la C' .

L'abbassamento della classe di f dovuto a un tacnodo appartenente alla curva nodale C , si può valutare direttamente come segue. Avuto riguardo all'abbassamento della classe delle sezioni piane, P risulta doppio per le curve L , intersezioni di f con una polare φ fuori di C ; inoltre le L toccano le due direzioni singolari del tacnodo (cfr. § 36) e passano per i successivi punti doppi di f relativi a queste; ciò si vede subito per una L il cui polo appartenga al piano dei tre punti doppi successivi, e — segnando questa L con una φ generica (la quale contiene tutti i punti doppi infinitamente vicini di f) si trovano per una qualunque L le intersezioni (φL) infinitamente vicine a P . Ciò permette di concludere che il numero di queste intersezioni, assorbite in P , vale

$$2 + 2 + 2 = 6,$$

e — detraendo le due intersezioni che cadono proprio in P — avremo: *l'abbassamento della classe di f relativo a un tacnodo appartenente alla curva doppia è in generale 4.*

Che in realtà il detto tacnodo P abbassi la classe di f di 4 e non di più unità (salvo particolarizzazioni), risulta da ciò che nella genesi del tacnodo questo si vede nascere dall'avvicinamento alla curva doppia di un punto conico isolato, tenuto conto che questo avvicinamento porta che ivi confluiscono di conseguenza due punti cuspidali ordinari, ma non in generale punti di contatto di piani tangenti ad f condotti per una retta generica: tuttocì viene messo in luce dalla nostra trasformazione quadratica, analogamente a quel che si è veduto per il caso di un punto cuspidale doppio.

Riassumendo: se una superficie f , dotata di curva doppia C , viene ad acquistare su questa un tacnodo, la sua classe diminuisce di due unità, perdendosi inoltre due punti cuspidali.

3) Passiamo ed esaminare il punto cuspidale del terzo ordine P , appartenente a una conica o curva tripla, C , di f ; il quale corrisponde — nella nostra trasformazione quadra-

tica — ad una retta per O' avente con f' un contatto tripunto in P' .

Questa genesi mostra che il punto P risulta dall'avvicinamento di due punti cuspidali ordinari del second'ordine di C , dove si saldano coppie di falde distinte (1, 2 e 2, 3), dal che emerge che *l'abbassamento della classe di f dovuto a un punto cuspidale del terz'ordine vale in generale 2*.

Questa deduzione è in rapporto col comportamento delle L nel punto P , che qui rapidamente acceniamo; il lettore verificherà le nostre affermazioni tenendo sempre presente la trasformazione, e considerando in particolare la L relativa al polo O (punto generico rispetto ad f) la quale si muta nella curva L' intersezione di f' con la polare di O' .

Or dunque avremo che:

le L posseggono in P un punto doppio, e precisamente una cuspidale;

la tangente cuspidale è la tangente singolare che congiunge P al punto doppio P_1 , infinitamente vicino a P fuori di C ; il punto P_{11} , satellite di P_1 che appartiene ad L , varia col polo O , giacendo nel piano OPP_1 , ma appartiene a tutte le polari φ , poichè queste hanno in P un punto cuspidale del second'ordine con lo stesso piano tangente di f . Così appunto si trova che le intersezioni di una φ con L , vicine a P , sono 2 (P_1 e P_{11}).

Aggiungasi che *il punto doppio P_1 , infinitamente vicino a P , è un punto biplanare ordinario*, essendovi una sola curva cuspidale fra le sezioni piane di f per PP_1 ; ciò risulta dalla genesi del punto cuspidale con la trasformazione quadratica: ivi si ha un fascio di quadriche tangenti che segano sulla superficie curve dotate di un punto doppio con una tangente principale fissa, a contatto tripunto, fra le quali una risulta dotata di cuspidale (¹).

(¹) Il ragionamento si estende al caso del punto cuspidale d'ordine $i > 3$ sopra una curva i -pla (o di molteplicità maggiore di i). Si vede così che: *vicino a un punto cuspidale d'ordine i , e fuori della curva multipla, vi è in generale un punto doppio di specie $\left[\frac{i}{2} \right] - 1$, e di tipo pari o dispari secondo la parità di i ; precisamente si hanno vicini al punto dato $\left[\frac{i}{2} \right]$ punti doppi (l'ultimo dei quali è biplanare quando i è dispari) che sono i punti successivi di un ramo piano.*

Osserviamo infine che il *punto cuspidale del terz'ordine ordinario* viene caratterizzato dalla circostanza che la *direzione singolare non coincide con la tangente a C* : la coincidenza a cui può dar luogo un particolare punto P , corrisponde all'ipotesi che un altro punto cuspidale (in generale del second'ordine) si sia avvicinato a P .

Il comportamento delle polari in un punto singolare, O , della superficie f , permette di riconoscere la *singularità duale di O* . Convien osservare che in questo problema non si tratta di una semplice applicazione del principio di dualità, ma in primo luogo di trovare i caratteri tangenziali (relativi all'involuppo F) della singularità puntuale O .

Ci limiteremo ai più semplici punti multipli isolati.

Sia dapprima O un punto doppio conico, che sappiamo abbassare di 2 la classe di f . Cerchiamo anzitutto di quanto diminuisce il numero dei piani tangenti ad f , fuori di O , per una retta o quando questa viene a passare per O . A tal uopo occorre intersecare la curva L_A comune ad f e alla polare φ_A di un punto generico di o , con la polare φ_O del punto O , detraendo poi 2 in rapporto all'abbassamento della classe di f dovuto ad O . Ora la L_A passa doppiamente per O e tocca con ambedue i suoi rami il cono osculatore in O , mentre la φ_O passa doppiamente per O e tocca il medesimo cono; si deduce

$$(L_A \varphi_O) = 2 \cdot 2 + 2 = 6;$$

per conseguenza « vi sono 4 piani tangenti ad f che vengono a toccare f in O quando o si faccia passare per O ». Questi piani evidentemente sono rappresentati dai due piani tangenti al cono osculatore in O , ciascuno contato due volte. Traducendo per dualità si ha:

La singularità duale di un punto doppio conico è costituita da un piano tangente lungo una conica (SALMON).

Lo stesso ragionamento vale anche a dimostrare in generale che:

Ad un punto O r -plo per la superficie f , con cono osculatore privo di generatrici multiple, corrisponde per dualità un piano ω tangente lungo una curva di classe r , priva di tangenti doppie, cioè d'ordine $r(r - 1)$.

Ora si ha una modificazione essenziale del risultato precedente nel caso in cui il cono osculatore nel punto r -plo O

acquisti una generatrice doppia a , i piani per a segando f secondo curve con un ramo cuspidale. Infatti questa circostanza porta un nuovo abbassamento della classe di f , dovuto allo staccarsi della stella O dal suo involuppo, e quindi produce lo staccamento del piano ω dalla superficie duale.

Convieni esaminare dapprima il caso $r=2$, avvertendo la circostanza particolare che qui si presenta, cioè lo spezzamento del cono in piani osculatori; daremo poi un cenno del caso generale $r > 2$.

Vediamo dunque come si modifichi la singolarità duale di un punto doppio quando questo diventa biplanare. In questo caso l'abbassamento della classe dovuto ad O vale 3; la curva L_A , sezione di f con una polare generica, passa doppiamente per O con un ramo cuspidale su cui si trova un punto fisso O_1 e il suo satellite O_{11} ; d'altra parte la φ_O , polare di O , passa doppiamente per O , semplicemente per O_1 e per tutti i punti satelliti di questo nei vari piani per OO_1 ; si deduce che fra i piani tangenti ad f che passano per una retta o ve n'è

$$(L_A \varphi_O) - 3 = 2 \cdot 2 + 1 + 1 - 3 = 3,$$

i cui punti di contatto vengono a cadere in O . Così:

Ad un punto biplanare ordinario corrisponde per dualità un piano ω che ha un contatto tripunto lungo una retta e due contatti particolari in due punti di questa: tali punti sono tripli per la sezione della superficie col piano, fuori della linea di contatto, e tripli pure per la superficie; il cono osculatore in essi si riduce al piano ω contato tre volte.

Ciò che nell'enunciato si aggiunge al risultato conseguito innanzi si prova con ragionamento analogo valutando quanti sono i piani tangenti ad f passanti per una retta o che giaccia in uno dei due piani osculatori in O ; se la o non passa per O il numero in questione, ottenuto prendendo due poli A e B su questa retta, vale

$$(L_A \varphi_B) - 3 = 3 + 3 - 3 = 3$$

che è la molteplicità dei punti di contatto di ω per la superficie duale di f ; invece se o passa per O , codesto numero diventa

$$(L_A \varphi_O) - 3 = 3 \cdot 2 + 3 - 3 = 6,$$

che è la molteplicità dei nominati punti di contatto per la sezione della superficie con ω .

Ora il risultato precedente subisce una modificazione quando il punto biplanare O diventi di specie 1 e di tipo pari (caso generale della riunione di due punti doppi infinitamente vicini O e O_1). In questo caso sappiamo che l'abbassamento della classe dovuto ad O vale 4, e — per una L_A relativa a un polo generico la quale passa per O^2 e O_1^2 — si trova

$$(L_A \varphi_O) - 4 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 4 = 4,$$

tenuto conto che la φ_O passa parimente per O^2 e O_1^2 .

Inoltre se A e B sono punti appartenenti ad un piano osculatore in O , un esame più delicato, che ci dispensiamo dallo svolgere, mostra che le polari dei punti, A , B passano per uno stesso punto di f successivo ad O_1 e quindi

$$(L_A \varphi_B) - 4 = 3 + (1 + 1 + 1) + 1 - 4 = 3,$$

$$(L_A \varphi_O) - 4 = 2 \cdot 3 + 2 + 1 + 1 - 4 = 6.$$

Da ciò si trae che il piano ω ha con la superficie duale di f un contatto quadripunto lungo una retta, alla quale appartengono due punti di contatto particolari tripli per la superficie e doppi per la curva semplice segata dal piano ω (fuori della retta di contatto). Ma un esame approfondito mostra che la retta di contatto quadripunto di ω si riduce in realtà a due rette doppie infinitamente vicine: il modo più semplice di vederlo consiste nel riguardare la singolarità O di f come limite di due punti doppi O , O_1 , divenuti infinitamente vicini.

Pertanto concludiamo che: *la singolarità duale di un punto biplanare composto di due punti doppi infinitamente vicini (tipo pari) è costituita da un piano ω contenente due rette doppie infinitamente vicine e due punti tripli della superficie che sono doppi per la sezione di ω fuori della retta doppia di contatto (a cui essi appartengono).*

Questo risultato si lascia mettere in relazione con quello che « la singolarità duale di un punto biplanare di una linea doppia è un piano tangente in due punti semplici ».

A tal uopo conviene ricordare che quando una superficie f acquista una curva doppia C , la parte determinata

del suo involuppo (a prescindere da un certo numero di stelle) contiene, accanto all'involuppo proprio, anche l'involuppo dei piani tangenti a C contato due volte. Quindi, trasformando per dualità, dalla superficie F reciproca di f si stacca due volte una rigata sviluppabile R , che è evidentemente costituita da bitangenti ad F . Appare così che ad un punto biplanare di f appartenente a C (e avente quindi un punto doppio infinitamente vicino) risponde per dualità un piano che tocca $F + 2R$ secondo due rette di R infinitamente vicine, da contarsi due volte, e che contiene due punti tripli di $F + 2R$, cioè i punti di contatto con F .

Passiamo a indicare rapidamente come si presenti la singolarità duale di un punto uniplanare O , per il quale sappiamo che l'abbassamento della classe vale 6, le polari φ passando per il punto O , e per i tre punti doppi infinitamente vicini, O_1, O_2, O_3 .

Perciò occorre considerare anzitutto una retta generica o passante per O , determinando quanti siano i piani tangenti ad f per o i cui punti di contatto vengono a cadere in O : questo numero è dato da

$$(L_A \varphi_O) - 6 = 6;$$

infatti la L_A (sezione con la polare di un punto generico) passa per O^3, O_1^4, O_2^4, O_3^4 , e la φ_O (polare del punto O) passa per O^2, O_1^2, O_2^2, O_3^2 .

Il procedimento usato mette in evidenza che i piani per o tangenti f , i cui punti di contatto vengono a cadere in O quando o passa per O , sono quelli tangenti ai tre rami di L_A , cioè appartenenti ai tre fasci OO_1, OO_2, OO_3 ; si deduce:

La singolarità duale di un punto uniplanare è costituita da un piano ω che tocca una superficie lungo tre rette passanti per un punto O' ; aggiungasi che queste rette sono bitangenti alla curva residua intersezione di ω (così come le rette OO_1, OO_2, OO_3 riescono generatrici doppie per il cono circoscritto ad f per O), inoltre il punto O' è doppio per la superficie e costituisce precisamente un oscnodo per le sezioni fatte con piani generici per esso (d'accordo con la proprietà che O' è sestuplo per la sezione del piano ω).

La verifica che O' è doppio per la superficie duale di f si ha considerando le polari di due punti A e B presi nel piano tangente in O : φ_A passa per O^2 e non per O_1, O_2, O_3 ,

quindi L_A passa per O^4 , e segnando con φ_B risulta

$$L_A \varphi_B - 6 = 8 - 6 = 2.$$

Non diremo altro intorno alle singolarità duali dei punti doppi isolati delle superficie, lasciando al lettore di studiare le particolarizzazioni ulteriori ed in ispecie quelle dei punti uniplanari che permettono il confronto col caso di un punto uniplanare appartenente a una curva cuspidale. Passeremo invece ad esaminare, nel caso più semplice, la particolarizzazione che si ottiene nella singolarità duale di un punto *r*-plo isolato O , con $r > 2$, quando il cono osculatore acquista una generatrice doppia, d , le sezioni piane di f per d venendo a contenere un ramo cuspidale del second'ordine.

In primo luogo si vede che la singolarità duale di O è costituita da un piano ω tangente semplicemente lungo una curva di classe r e d'ordine $r(r-1) - 2$ ed avente un contatto tripunto lungo la bitangente di questa. Si ha in ciò l'immediata estensione di quanto accade nel caso del punto doppio biplanare. Senza ripetere il procedimento basato sulla considerazione delle polari che porge la dimostrazione dell'enunciato, ci limiteremo ad osservare come avviene il passaggio dal caso del punto *r*-plo generale al caso in cui il cono osculatore acquisti una generatrice doppia: quando la linea di contatto del piano ω , che è di classe r , viene a possedere una tangente doppia, questa si stacca due volte dalla linea luogo; appunto due volte figura nella linea di contatto del piano ω una retta lungo cui ω abbia un contatto tripunto con la superficie. E si noti che — contando secondo le rispettive molteplicità le parti della linea di contatto del piano ω — l'ordine di codesta linea appare diminuito di un'unità, in forza della particolarizzazione del punto *r*-plo, O ; ciò è d'accordo con la circostanza che tale particolarizzazione porta da $r(r-1)^2$ a $r(r-1)^2 + 1$ l'abbassamento della classe di f dovuto al punto *r*-plo O .

Ma il caso di un punto *r*-plo, O , ove il cono osculatore acquista una generatrice doppia d , presenta per $r > 2$, una differenza essenziale in confronto al caso del punto biplanare ($r=2$); la quale dipende dalla circostanza che i piani osculatori al cono lungo la d , non si staccano più da questo cono, segnando f già secondo una curva dotata di punto *r*-plo che contiene un ramo del terz'ordine. In con-

seguenza di ciò *i due punti di contatto particolari del piano ω* , che — nella trasformazione per dualità — rispondono agli anzidetti piani osculatori, *risultano semplici anzichè tripli per la superficie*, e — per la sezione del piano ω — sono soltanto quintupli, non appartenendo alla parte residua di questa intersezione fuori della curva di contatto. Lasciamo al lettore di giustificare queste conclusioni valutando, come innanzi, le intersezioni assorbite in O di una L_A , relativa ad un polo posto in un piano osculatore per d , con una φ_B , relativa a un altro polo appartenente allo stesso piano, e quindi di L_A con la φ_O .

39. Nota sulle falde di una superficie nell'intorno d'un punto singolare. — Qui vogliamo esaminare più precisamente la definizione delle falde di una superficie nell'intorno di un punto singolare; questo esame condurrà ad osservazioni nuove per riguardo alle questioni analoghe concernenti i rami nella teoria delle curve. Si vedrà quindi come si pongono i problemi concernenti la rappresentazione analitica delle falde; ai quali abbiamo creduto opportuno dedicare un rapido cenno, se pure — nello stato attuale della scienza — non accada di dar loro una risposta adeguata.

1) La distinzione dei rami di una curva algebrica $f(xy) = 0$ nell'intorno di un punto singolare, corrisponde alla riducibilità della funzione algebrica $y(x)$ nell'intorno del punto: ciascun ramo corrisponde a una funzione irriducibile in quell'intorno che — per assi generici — risulta ad un valore nel caso dei rami lineari.

2) La stessa distinzione in rami si ottiene mediante curve approssimanti, parabole o iperparabole, aventi con f un'osculazione d'ordine abbastanza elevato (superiore alla specie della singolarità): l'esistenza di curve approssimanti diverse permette di separare rami diversi che verranno ulteriormente approssimati da parabole o iperparabole osculatrici d'ordine superiore.

Ora — passando ad una superficie $f(xyz) = 0$ — considerata nell'intorno di un suo punto singolare O , potremo definire le falde di essa estendendo la definizione 1) o la 2) data per i rami di una curva. Ci atterremo alla definizione 1) e mostreremo poi che l'estensione della proprietà 2) ha un significato essenzialmente differente.

Daremo dunque la seguente:

Definizione: la superficie f nell'intorno di un punto r -plo, O , è costituita da una sola *falda* (d'ordine r) se gli r valori della funzione algebrica $z(xy)$ vicini ad O , costituiscono una medesima *funzione analitica irriducibile nell'intorno del punto*, prolungandosi per continuità l'uno nell'altro. (Si parla di r valori di z supponendosi sempre gli assi orientati in modo generico). Quando la funzione $z(xy)$ non sia irriducibile nell'intorno del punto, la superficie f si decomporrà in un certo numero di falde aventi certi ordini ν_1, ν_2, \dots , dove

$$r = \Sigma \nu.$$

Giova chiarire la definizione precedente, richiamando gli elementi della teoria delle funzioni di due variabili a cui implicitamente si fa appello.

Pongasi che il punto singolare O cada nell'origine (000) , e quindi si descrivano due piccoli cerchi C_x e C_y di centro O nei due piani rappresentativi delle variabili complesse x e y : la totalità delle coppie di valori x e y , interni ai due cerchi, e corrispondentemente la totalità dei punti (xy) del piano $z=0$, definisce un intorno del punto O ($x=0, y=0$) entro il detto piano. La funzione algebrica $z(xy)$, definita dall'equazione $f(xy, z) = 0$ ammette r valori z_1, z_2, \dots, z_r , prossimi a zero per ogni punto (xy) dell'intorno anzidetto; la irriducibilità di codesta funzione z significa che si passa da z_i a z_k quando il punto (xy) descrive un opportuno cammino chiuso contenuto in un intorno sufficientemente piccolo di O ; questo cammino chiuso corrisponde a due linee chiuse biunivocamente riferite fra loro sui piani delle due variabili x e y , ossia ad una linea chiusa appartenente allo spazio a quattro dimensioni definito dalle parti reali e immaginarie delle x e y .

La definizione data si applica immediatamente, come già accennammo, al caso dei punti doppi conici e dei punti biplanari delle curve nodali.

In un punto doppio conico $O = (000)$ la superficie f è costituita da una sola falda. Infatti siano z_1 e z_2 i valori di z relativi a due punti della superficie prossimi ad O aventi la stessa proiezione (xy) , e si mandi per i due punti un piano generico che risulti vicino al punto singolare: la curva sezione avrà due tangenti parallele all'asse z , il cui punto di contatto è vicino quanto si vuole ad O : perciò entro il detto piano si

possono scambiare z_1 e z_2 facendo percorrere alla variabile x (o alla y) un cammino chiuso avvolgente uno dei due punti di diramazione, tracce delle nominate tangenti, il quale cammino resta compreso nell'intorno di O .

Invece l'intorno di un punto biplanare di una curva nodale C si scinde in due falde lineari (cioè del prim'ordine). Ciò si verifica anzitutto, nel caso in cui C sia una conica, operando una trasformazione quadratica per cui C sia curva fondamentale: l'intorno di un punto O di C (che non sia cuspidale) dà origine a due segmenti di linee semplici, C_1 e C_2 , per la superficie trasformata e senza punti comuni sopra di essa: le due striscie che costituiscono gli intorni di C_1 e C_2 corrispondono alle due falde della superficie data relative ad O . Questa dimostrazione, a cui già accennammo, vale a stabilire la distinzione di due falde anche per i punti biplanari di una curva nodale C che non sia una conica: basta a tal uopo fare uso di una trasformazione puntuale regolare all'intorno di O che muti C in una conica, oppure considerare in luogo di una trasformazione quadratica la trasformazione monoidale (cfr. § 34).

Ora possiamo dare una verifica diretta del teorema che « l'intorno di un punto biplanare sopra una curva nodale si scinde in due falde ». Sia $f(xyz) = 0$ la superficie passante doppiamente per la curva C ; la funzione algebrica $z = z(xy)$, considerata nell'intorno di un punto $O = (000)$ di C , ha due valori z_1 e z_2 vicini ad o , due valori soltanto nell'ipotesi — qui adottanda — che l'asse z non appartenga al cono osculatore della superficie in O .

Per rappresentare l'intorno di O sopra f occorre costruire un'equazione di secondo grado cui soddisfano z_1 e z_2 :

$$z^2 + 2\alpha(xy)z + \beta(xy).$$

I coefficienti α e β risultano qui funzioni analitiche regolari di x e y ; infatti $\alpha = z_1 + z_2$ soddisfa a un'equazione algebrica risolvente della $f(z) = 0$, la quale può supporre possedere una radice semplice $\alpha = 0$ per $x = y = 0$, e similmente si dica per $\beta = z_1 z_2$.

Ciò posto si osservi che il discriminante dell'anzidetta equazione di secondo grado

$$\alpha^2(xy) - \beta(xy),$$

viene posto dal resultante $R(xy)$ delle equazioni

$$f(z) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

a prescindere da un fattore che non si annulla nel punto (00) :

$$R \equiv \Pi(z_h - z_k)^2 \equiv (z_1 - z_2)^2 \Pi_1(z_1 - z_i)^2 \Pi_2(z_2 - z_i)^2 \Pi_3(z_h - z_k)$$

(con $i > 2$, $h > 2$, $k > 2$),

$$\alpha^2 - \beta \equiv (z_1 - z_2)^2,$$

$$\alpha^2 - \beta \equiv \frac{R}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3},$$

ove

$$\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 = \theta(xy)$$

è una funzione analitica regolare che non si annulla per $x = y = 0$.

Designamo con $C(xy) = 0$ l'equazione della proiezione ortogonale della curva C sul piano $z = 0$, e con $L(xy) = 0$ l'analogha proiezione della curva segata su f dalla polare del punto all'infinito dell'asse z , fuori di C ; avremo

$$R(xy) \equiv C^2(xy) \cdot L(xy),$$

e quindi

$$\alpha^2(xy) - \beta(xy) \equiv \frac{C^2(xy) \cdot L(xy)}{\theta(xy)},$$

dove $L(00) \neq 0$ e però anche $\frac{L(00)}{\theta(00)} \neq 0$, finchè O è un punto biplanare di C : e questa relazione si converte in una uguaglianza, disponendo del fattore numerico incluso in $C(xy)$.

Si deduce che

$$z_1 = \alpha(xy) + C(xy) \sqrt{\frac{L}{\theta}}, \quad z_2 = \alpha(xy) - C(xy) \sqrt{\frac{L}{\theta}},$$

sono due funzioni analitiche distinte e regolari nell'intorno di O , essendo $\sqrt{\frac{L}{\theta}}$ regolare nell'ipotesi fatta: $L(00) \neq 0$.

Lo stesso ragionamento mostra perchè le due falde di f vengano a confondersi — in generale saldandosi — in un punto cuspidale di C ; il che del resto appare evidente poichè qui non si distinguono più i due rami di una sezione piana per O .

A tale circostanza si riattacca l'osservazione che « la possibilità di distinguere due falde di f in un punto O di C non implica che l'intorno di C — considerato nella sua totalità — sia riducibile », la riducibilità di codesto intorno costituisce una particolarità della C : in questo caso non si avranno su C punti cuspidali, ma questi verranno surrogati da tacodi ove la curva incrocia se stessa o un'altra curva doppia.

Ora possiamo invertire il risultato ottenuto enunciando il teorema:

se l'intorno di un punto doppio O , sopra una superficie f , è riducibile in due falde, il punto O appartiene ad una curva doppia di f .

Infatti le due falde costituiscono due superficie analitiche f_1 e f_2 che avendo a comune il punto O hanno a comune una linea passante per esso. D'altronde anche la precedente deduzione analitica può essere invertita, trovandosi così per O una curva contata due volte come intersezione di f e della sua polare $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$; dal che segue che codesta curva è doppia per f .

Come corollario del teorema precedente si ha che tutti i punti doppi isolati, in particolare i punti biplanari, uniplanari ecc., danno luogo sempre ad una falda irriducibile. E la dimostrazione diretta di ciò si ottiene come per il punto conico, osservando che una sezione piana parallela all'asse z vicina ad un tal punto, O , contiene due tangenti parallele all'asse z , i cui punti di contatto sono vicini ad O .

Ma qui si presenta la circostanza nuova cui innanzi accennammo: il fatto che il cono osculatore alla superficie f in un punto biplanare O si scinda in due piani α e β , permette di distinguere le curve osculatrici ai due rami della sezione generica per O , distribuendo quelle curve in due superficie approssimanti, onde a prima vista si direbbe che in relazione a queste si possano distinguere due falde di f nell'intorno di O . Giova pertanto esaminare più da vicino la distinzione cui si è condotti in tal guisa.

In primo luogo si costruisca in un piano generico per O la parabola osculatrice di un certo ordine $r > 1$ relativa al ramo della sezione di f che tocca α ; facendo ruotare il piano intorno ad una retta per O si dà origine ad un paraboloido il quale tuttavia non riesce più approssimante ad f (nell'or-

dine stabilito) secondo la direzione comune ai due piani α e β ; infatti il piano del nostro fascio contenente quella direzione sega f secondo una cuspidale, mentre la sezione di esso col paraboloidale si riduce alla retta tangente. Si può dire insomma che la definizione che così verrebbe a darsi di due falde di f nell'intorno di O , porterebbe a escludere una parte dell'intorno stesso.

Per eliminare l'inconveniente sopra accennato, si cercherà di approssimare l'intorno di O su f mediante due superficie distinte che tocchino rispettivamente i piani α e β , avendo in O una molteplicità maggiore di uno: in questo modo riusciremo a distinguere due *falde parziali* nell'intorno del punto O , ma queste avranno a comune l'intorno di un punto successivo ad O e quindi non corrisponderanno a una riducibilità della funzione $z(xy)$ in due funzioni distinte nell'intorno di O . Per ottenere le superficie approssimanti anzidette, giova trasformare la superficie f mediante una trasformazione quadratica, T , di centro O ; otterremo una f' a cui appartengono due rette a' e b' che — quando O sia un punto biplanare ordinario per f — si segano in un punto semplice O' . Ora si costruirà una superficie φ_1' che approssimi f' in tutti i punti di a' , e secondo un certo ordine r di approssimazione; analogamente si costruirà una φ_2' che approssimi la f' lungo la b' . È chiaro che le superficie φ_1 e φ_2 trasformate di φ_1' e φ_2' per la T^{-1} porgeranno nel loro insieme una superficie che approssima f nell'intorno di O , e daranno luogo alle due falde parziali di cui sopra si è discusso.

Emerge da ciò:

La possibilità di approssimare l'intorno di un punto sopra una superficie con due superficie distinte, e sia pure in un ordine di approssimazione alto quanto si vuole, non implica la riducibilità di quell'intorno in due falde propriamente dette, ma soltanto una semi-riducibilità in quelle che abbiamo chiamato falde parziali; si ha qui una circostanza essenzialmente nuova della teoria delle superficie in confronto alla teoria delle curve.

La irreducibilità dell'intorno di un punto biplanare isolato sopra una superficie f si estende a tutte le altre specie di punti doppi isolati; non solo al punto uniplanare dove non si distinguono più due rami per le sezioni piane, ma anche al tacnodo.

Si può dire di più:

Se l'intorno di f in un tacnodo O si scinde in due falde, O è punto doppio per una curva doppia di f , cioè — in generale — punto d'incrocio di due curve doppie o di due rami di curva doppia.

Infatti se in O si distinguono due falde di f , queste sono due falde lineari tangenti, e quindi si segano secondo una curva (che risulta doppia per f) avente in O un punto doppio.

Viceversa un punto doppio per la curva doppia di f costituisce in generale un tacnodo ordinario con due direzioni singolari, dove si distinguono due falde lineari tangenti di f .

In ciò che precede si è trattato sempre di punti doppi, ma è facile vedere che *le osservazioni fatte hanno un valore generale per punti di qualsiasi molteplicità.*

In un punto generico di una curva multipla di f si distinguono sempre tante falde quanti sono i rami di una sezione piana; viceversa se l'intorno di un punto multiplo O di f è riducibile in più falde, O appartiene ad una curva multipla e in generale a più rami di questa lungo cui s'intersecano le falde.

Quando in luogo di un punto generico di una curva multipla si considera un punto multiplo O di f che sia punto isolato o punto singolare della curva multipla, la riducibilità del cono osculatore in O porta soltanto la semi-riducibilità dell'intorno in falde parziali, analoghe a quelle considerate nel caso del punto biplanare. Naturalmente c'è qui una maggiore varietà di circostanze; per es. in un punto triplo isolato dove il cono osculatore si spezza in un piano doppio e in un piano semplice, si presentano due falde parziali una delle quali ha come sezione piana un ramo lineare e l'altra un ramo del second'ordine.

Anche le osservazioni relative all'approssimazione delle falde che facemmo nel caso del punto biplanare, si estendono al caso di punti multipli qualunque, ed in particolare a quello dei punti multipli isolati che — per semplicità di discorso — terremo generalmente di mira. Vogliamo specialmente dar rilievo all'osservazione che « per definire l'approssimazione di due falde (totali o parziali) non basta sempre l'approssimazione delle sezioni piane generiche ». (Nel caso del punto

biplanare O si è già visto che una falda lineare non può approssimare una falda parziale pertinente ad O , potendosi avere approssimazione per tutte le sezioni piane escluse quelle di un fascio).

Emerge di qui la convenienza a *definire in modo generale e preciso il concetto della approssimazione di due superficie* (e quindi anche di due falde totali o parziali) nell'intorno di un punto.

A tale scopo riprendiamo la considerazione dei punti successivi di un ramo di curva gobba, ricordando in ispecie che sopra un tal ramo si dicono prossimi all'origine O i punti successivi O_1, O_2, \dots, O_i che — per effetto di una trasformazione quadratica riduttrice — vengono portati in punti del piano fondamentale corrispondente ad O . Ora se ad O_i succedono dei punti prossimi $O_{i+1}, O_{i+2}, \dots, O_{i+j}$, questi si considereranno vicini ad O in un *secondo ordine di prossimità*, e così di seguito.

Ciò posto diremo che *due superficie hanno in O una approssimazione d'ordine s* , quando hanno a comune tutti i punti che si possono definire come vicini ad O in un ordine di prossimità $\leq s$, sopra rami di curve gobbe uscenti da O .

Condizione sufficiente (quantunque non necessaria) *perchè due superficie $f(xyz) = 0$ e $\varphi(xyz) = 0$ abbiano una approssimazione d'ordine s nell'intorno del punto i -plo $O = (000)$, è che siano uguali i termini dei due polinomi f e φ fino all'ordine $(s+1)i$, cioè che queste abbiano la stessa superficie approssimante d'ordine $(s+1)i - 1$*

$$f_i + f_{i+1} + \dots + f_{(s+1)i-1} = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \dots + \varphi_{(s+1)i-1} = 0. \quad (1)$$

Mostriamo anzitutto che f e φ hanno lo stesso numero di intersezioni con un ramo lineare, C , uscente da O , di cui $h \leq s$ punti successivi ad O appartengono ad una delle due superficie, p. es. ad f : a tale scopo basta osservare che C ha con f un numero di intersezioni minore od uguale di $(s+1)i$, mentre la con $f - \varphi$, che possiede in O la molteplicità $(s+1)i$, almeno $(s+1)i$ intersezioni.

La dimostrazione si estende al caso in cui C sia un ramo superlineare che possenga h_1 punti prossimi ad O , h_2 punti

(1) Cfr. la definizione delle curve approssimanti, L. 3°, § 12, pag. 90.

nel secondo ordine di prossimità.... h_s punti nello s -mo ordine di prossimità (i quali ultimi possono supporli semplici per C); basterà osservare che l'ordine del ramo varrà

$$h = h_1 h_2 \dots h_s,$$

la molteplicità dei punti prossimi ad O sarà

$$h_2 \dots h_s = \frac{h}{h_1}$$

e così via; pertanto il numero delle intersezioni di C con f non potrà superare $h(s+1)i$, cioè il numero delle intersezioni di C con $f - \varphi$.

L'importanza della considerazione delle superficie approssimanti nella teoria delle singolarità delle superficie risulta da ciò che:

se O è un punto multiplo isolato della superficie f , si può fissare un numero s abbastanza grande in guisa che tutti i punti multipli di f appartenenti all'intorno di O si trovino vicini ad O in un ordine di prossimità minore di s .

Infatti se la f possiede sopra un ramo C una serie di punti doppi (o multipli) vicini ad O fino all'ordine di prossimità r , si riconosce che due polari φ — essendo costrette a contenere i suddetti punti di C — hanno con f almeno $2r$ intersezioni assorbite in O , sicchè r viene limitato dalla classe di f .

Il ragionamento precedente cade in difetto se la f ha con le polari φ infiniti punti a comune costituenti una curva; in questo caso il teorema va modificato, dovendosi escludere le serie di punti multipli che si succedono sopra la curva multipla passante per O .

Come corollario del teorema innanzi stabilito, dimostriamo che: *una falda (totale) d'ordine i della superficie f , considerata nell'intorno del punto multiplo O , non può essere approssimata da una superficie passante i volte per O che sia riducibile in due falde, al di là di un certo ordine di approssimazione.*

Per semplicità supporremo che O sia un punto multiplo isolato, che anzi potrà supporli addirittura i -plo per f . Allora basterà osservare che se la f viene approssimata dalla super-

ficie riducibile $\varphi_1\varphi_2=0$, in un certo ordine r , i punti comuni a φ_1 e φ_2 fino all'ordine di prossimità r debbono risultare doppi per f .

Alle considerazioni che precedono si collega il *problema di approssimare una falda della superficie f , nell'intorno del punto singolare O , con una superficie razionale φ ⁽¹⁾ cioè con una superficie rappresentata parametricamente mediante funzioni razionali di due variabili:*

$$x = \frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)}, \quad y = \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)}, \quad z = \frac{\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)},$$

considerate nell'intorno di un punto oppure di una curva $\vartheta(uv)=0$. Questo problema si può determinare maggiormente ove si ponga la condizione che la rappresentazione parametrica di φ sia data mediante funzioni razionali intere, e per conseguenza si tratti di *rappresentare una falda uscente da un punto singolare O di f mediante polinomi approssimanti*

$$x = \varphi_1(uv), \quad y = \varphi_2(uv), \quad z = \varphi_3(uv),$$

(riducendosi $\varphi_4 = \text{cost.}$).

Anticipando una proposizione che verrà stabilita precisamente più tardi, potremo supporre che una falda d'ordine i per O sia approssimata quanto si vuole da una superficie avente in O un punto i -plo; pertanto il problema proposto si potrà far dipendere dal seguente: *data una superficie f avente in O un punto i -plo, approssimare l'intorno di O con una superficie razionale φ avente in O la stessa molteplicità; in particolare con una φ rappresentata parametricamente mediante polinomi.*

Quando O sia un punto i -plo isolato di f , si può mettere in luce la possibilità di una superficie razionale φ , approssimante f , con un semplice computo di costanti. Infatti la φ dipende da un numero di costanti grande ad arbitrio che figurano come coefficienti nella sua rappresentazione parametrica, mentre le condizioni di approssimazione di φ e f fino ad un ordine s comunque fissato, sono in numero

(1) Cfr. ENRIQUES Rendic. Accad. di Bologna, 7 Maggio 1916 e 19 Maggio 1917.

finito, bastando uguagliare i coefficienti delle due equazioni $f(xyz) = 0$ e $\varphi(xyz) = 0$ fino all'ordine $(s+1)i$. Lo stesso computo di costanti indica la possibilità di rappresentare l'intorno di O sopra f , ponendo x, y, z funzioni razionali intere di due variabili.

Per sciogliere effettivamente il problema di cui il computo delle costanti indica la solubilità, e rimuovere così le obiezioni critiche che quel computo porterebbe con sè (nonostante l'infinità delle costanti che entrano in considerazione), è naturale di chiedere un procedimento costruttivo che valga a determinare la superficie razionale approssimante φ .

Qui giova osservare come la questione si presenta nel caso delle curve. Il problema è il seguente: data una curva $f(xy) = 0$ avente in $O = (00)$ un punto i -plo, costruire una curva razionale $\varphi(xy) = 0$, la cui equazione abbia a comune con f i primi termini fino ad un certo ordine, e quindi approssimi simultaneamente tutti i rami di f uscenti da O . La costruzione di una tal curva φ riesce agevole, invocando un teorema di CLEBSCH per cui « le curve di genere zero sono razionali » ⁽¹⁾. Infatti si costruirà anzitutto un sistema lineare di curve approssimanti f di genere p e di dimensione $r > p$; basterà quindi costruire — entro questo sistema — una curva dotata di p nuovi punti doppi, la quale riuscirà razionale.

Ma quando dalle curve $f(xy) = 0$ si passa alle superficie $f(xyz) = 0$, si incontrano maggiori difficoltà, perchè le condizioni di razionalità delle superficie si presentano in forma meno semplice. Giova pertanto ricercare un'altra via che conduca direttamente alla costruzione di una superficie razionale approssimante una falda di f per O . Qui ci limiteremo ad accennare che una tal via viene aperta dalla risoluzione delle singolarità mediante trasformazioni razionali (cfr. § 40): se la superficie f si lascia trasformare razionalmente in una F sulla quale all'intorno di O venga a corrispondere una curva semplice k , siamo condotti a cercare una superficie razionale Φ che approssimi F nell'intorno di k , e la costruzione di una tale Φ si ottiene in modo agevole: infatti si può assumere come ψ siffatta una conveniente superficie di un ordine m

(1) Nel L. 3°, § 17 si è dimostrato il teorema inverso; per la dimostrazione di questo rimandiamo al L. 5°.

abbastanza alto, dotata di punto $(m - 1)$ -plo ⁽¹⁾. Allora, ritornando allo spazio di f , si ottiene una superficie razionale φ , che approssima l'intorno di O su f .

Occorre peraltro notare che la φ così costruita avrà in generale in O una molteplicità maggiore di i , sicchè una falda (totale o parziale) di f verrà approssimata generalmente da una falda parziale di φ . Ciò significa che per una falda di f si otterrà una rappresentazione approssimata:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\theta(uv)\theta'(uv)\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)} \\y &= \frac{\theta(uv)\theta''(uv)\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)} \\z &= \frac{\theta(uv)\theta'''(uv)\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)},\end{aligned}$$

dove le funzioni razionali $x(uv)$, $y(uv)$, $z(uv)$ sono da considerare soltanto nell'intorno della curva $\theta(uv) = 0$ (e non della $\theta'(uv) = 0$).

Sul problema della rappresentazione analitica delle falde.

Le questioni che concernono la approssimazione di una falda di superficie mediante funzioni razionali o polinomi, ci conducono a discorrere della rappresentazione analitica delle falde.

Prenderemo le mosse da due teoremi generali delle funzioni analitiche di due variabili:

1) Un'equazione algebrica $f(xyz) = 0$ definisce la z come funzione (analitica) delle due variabili complesse x e y

$$z = z(xy);$$

questa funzione — essendo f irriducibile di grado n in z — è polidroma a n valori ed è finita e continua con le sue derivate (cioè regolare) salvo nei punti (xy) soddisfacenti a certe equazioni algebriche, ove la z diventa infinita, e dove si confondono due o più fra le n determinazioni di essa.

Questo teorema si estende al caso in cui la f sia definita come una funzione analitica delle x , y , z mediante una serie

⁽¹⁾ Cfr. la prima nota citata di ENRIQUES.

convergente in un certo campo: ancora la funzione implicita $z = z(xy)$ risulta una funzione analitica (in generale polidroma ad infiniti valori) ⁽¹⁾.

2) Una funzione $z = z(xy)$ delle due variabili complesse x e y , in un certo campo A si può sviluppare in serie di TAYLOR convergente nell'intorno di ogni punto $x_0 y_0$ interno ad A , dove essa si mantenga finita e continua (cioè regolare) ⁽²⁾.

Ora possiamo dimostrare che:

Nell'intorno di un punto singolare (000) della superficie algebrica $f(xyz) = 0$, una falda lineare di f si può rappresentare con uno sviluppo di z in serie procedente per le potenze intere di x e y , gli assi supponendosi orientati in modo generico.

Pongasi che il punto $O = (000)$ sia r -plo per f , e si considerino gli r valori z_1, z_2, \dots, z_r della funzione implicita $z = z(xy)$ che corrispondono a un punto (xy) assai vicino al punto $(x=0, y=0)$; fra codesti valori ne possiamo distinguere uno, z_1 , corrispondente alla nostra falda, che costituisce una funzione monodroma nell'intorno del punto (00) . In virtù del teorema 2) codesta funzione risulterà quindi sviluppabile in serie di TAYLOR, non soltanto nell'intorno di un punto vicino a (00) , ma anche proprio nell'intorno del punto (00) , ove essa si mantiene finita e continua.

Dal risultato stabilito passiamo al

Teorema. Nell'intorno di un punto singolare (000) della superficie f , una falda d'ordine r viene rappresentata da un'equazione algebrica di grado r

$$z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r = 0,$$

dove i coefficienti a_1, a_2, \dots, a_r sono funzioni analitiche di x e y , regolari nell'intorno del punto $(x=0, y=0)$; s'intende sempre che gli assi sono orientati in modo generico.

Dimostriamo che a_1 è funzione analitica delle x, y , regolare nell'intorno del punto (00) , e analogamente si procederà per le altre a_i .

⁽¹⁾ Cfr. per es. PICARD. « Traité d'Analyse ». Paris, 1893, t. II, pag. 247.

⁽²⁾ Cfr. PICARD. L. c., pag. 237.

Pongasi dunque

$$Z = z_1 + z_2 + \dots + z_r,$$

$$a_1 = -Z;$$

considerando l'equazione della nostra superficie come un'equazione in z , $f(z) = 0$, il cui grado è $n > r$, si vede che Z soddisfa a un'equazione algebrica

$$F(Z) = 0$$

risolvente di quella, di grado $\binom{n}{r}$.

Ora, corrispondentemente alla falda considerata della superficie f , la superficie $F(xyZ) = 0$ possiederà una falda lineare per il punto $x = y = Z = 0$, e su questa risulterà Z , e quindi a_1 , funzione analica regolare di x e y nell'intorno del punto (00).

A questo punto sorge la questione se una falda di superficie algebrica, nell'intorno di un punto singolare, ammetta una rappresentazione analoga a quella che il teorema di PUISEUX assegna per un ramo di curva. Potremo precisare il senso della estensione richiesta, domandando che la falda uscente dall'origine $O = (000)$ venga rappresentata mediante una terna di funzioni analitiche:

$$x = x(uv), \quad y = y(uv), \quad z = z(uv),$$

dove:

1) i due parametri u, v , dipendano univocamente da x, y, z (per valori assai piccoli),

2) le funzioni x, y, z , si esprimano come *serie di potenze* ovvero come *quozienti di serie di potenze* convergenti nell'intorno d'un punto (u_0, v_0) o nell'intorno d'una curva $\theta(uv) = 0$ (su cui le x, y, z si annullano) ⁽¹⁾.

Al nostro problema fondamentale è facile dare una risposta affermativa per le falde di una superficie f consi-

(1) La condizione 1) porta che le u e v risultino funzioni razionali delle x, y e z nell'infinitesimo. Codesta condizione si può modificare nel senso che u e v siano funzioni polidrome di x, y e z a un numero finito di valori, e quindi algebriche nell'infinitesimo. Tuttavia sembra che una siffatta rappresentazione generalizzata si riconduca alla prima con un cambiamento di variabili. Di ciò troveremo un esempio a pag. 650.

derata nell'intorno di un punto generico $O = (000)$ di una curva multipla C ; la quale risposta costituisce un noto teorema di HALPHEN ⁽¹⁾.

Pongasi dapprima che la curva C sia l'asse x ($y = z = 0$), e la falda di f di cui si discorre abbia un certo ordine r . Entro l'equazione $f(xyz) = 0$ consideriamo x come un parametro, il che equivale a considerare la curva sezione della nostra falda con un piano normale all'asse x . Questa curva sezione essendo costituita da un ramo d'ordine r , si trasformerà in un ramo lineare ponendo

$$y = v^r;$$

ma questa sostituzione trasforma anche la data falda d'ordine r di f in una falda lineare appartenente a una superficie $H(x, v, z) = 0$, la quale si potrà rappresentare sviluppando z in serie di TAYLOR per $u = x, v$. In definitiva la data falda d'ordine r di f viene rappresentata sviluppando z con una serie di potenze $\varphi(uv)$, dove

$$u = v, \quad v = y^{\frac{1}{r}}.$$

Il procedimento indicato si estende al caso di una curva C qualsiasi, su cui O sia sempre punto generico, e quindi che sia costituita da un ramo lineare per O . Questo ramo si potrà rappresentare ponendo

$$y = y_0(x), \quad z = z_0(x)$$

dove y_0 e z_0 designano due serie regolari. Ora, cambiando $y - y_0$ e $z - z_0$ in y e z , siamo ricondotti al caso precedente; concluderemo pertanto il

Teorema di HALPHEN: *Una falda d'ordine r di f , nell'intorno di un punto generico della curva multipla C*

$$C \equiv \{y = y_0(x), z = z_0(x)\},$$

si lascia rappresentare sviluppando x, y, z mediante serie di due variabili u e v , convergenti nell'intorno d'un punto (00)

⁽¹⁾ Annali di Matematica, serie 2^a, t. 9, (1878).

avremo precisamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u, \\ y = v + y_0(u) \\ z = z_0(u) + \varphi(uv) \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = x \\ v = y - y_0(x). \end{array}$$

Osservazione. Gli sviluppi di HALPHEN continuano a valere per un intorno finito del punto O anche dove la C incontri un'altra curva multipla a falde lineari distinte. Invero le circostanze che arrestano gli sviluppi precedenti sono: l'incontro di un punto di diramazione della C , ove si arresta lo sviluppo $y_0(x)$, e l'incontro di un'altra curva di diramazione, dove la funzione algebrica definita da F cessa di essere monodroma.

Passiamo dalla considerazione dei punti generici appartenenti alla curva multipla a quella dei punti multipli isolati (o di punti singolari, per es. ipermultipli, sopra la curva multipla); allora non accade in generale di poter rappresentare una falda uscente da un punto multiplo O mediante serie di potenze

$$x = \varphi_1(uv), \quad y = \varphi_2(uv), \quad z = \varphi_3(uv),$$

o quozienti di serie di potenze

$$x = \frac{\varphi_1(uv)}{\varphi_4(uv)}, \quad y = \frac{\varphi_2(uv)}{\varphi_4(uv)}, \quad z = \frac{\varphi_3(uv)}{\varphi_4(uv)},$$

convergenti nell'intorno di un punto $(u_0 v_0)$: perchè ciò accada occorre infatti che il cono osculatore alla falda per O sia razionale (come l'intorno del punto che vi corrisponderebbe nel piano) ⁽¹⁾. Convien dunque cercare *sviluppi in serie con-*

⁽¹⁾ Per un punto doppio conico (il cono osculatore essendo razionale) si può ottenere una rappresentazione analitica dell'intorno del punto, in forma fratta; così per la superficie $z^2 - xy = 0$, e per l'intorno di $O = (000)$, basta porre

$$x = u, \quad y = \frac{v^2}{u}, \quad z = v.$$

Non è possibile una rappresentazione in forma intera che dia l'intorno di un punto conico mediante serie convergenti nell'intorno di un punto $O_0 = (u_0 v_0)$, finchè u e v debbano dipendere univocamente da x , y e z . Infatti al sistema delle sezioni piane della superficie $f(xyz) = 0$ verrebbe

vergenti nell'intorno di una curva $\theta(uv) = 0$. Almeno questa condizione è necessaria ove si voglia soddisfare al requisito essenziale che: la rappresentazione analitica di una falda corrisponda veramente all'insieme di tutti i punti di questa sufficientemente vicini ad O , per modo che tali punti vengano rappresentati dalle stesse tre funzioni analitiche.

a corrispondere sul piano (uv) un sistema di curve per cui O_0 non è punto base, le quali — assoggettate a passare per O_0 — acquisterebbero ivi un punto doppio; quindi O assorbirebbe 4 intersezioni di due curve siffatte anzichè 2 intersezioni, come consegue dal fatto che ad O_0 corrisponde un punto doppio O di f .

Se si abbandona la condizione che le u e v dipendano univocamente da x , y e z , l'intorno del punto doppio O della superficie $z^2 = xy = 0$, si può rappresentare ponendo

$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = uv,$$

dove

$$u = \frac{1}{x^2}, \quad v = \frac{1}{y^2}.$$

In questo caso ad un punto di f rispondono due punti (u, v) ($-u, -v$) del piano rappresentativo, i quali sono coniugati in una involuzione (e precisamente nella simmetria di centro O_0).

Qui si affaccia naturalmente l'idea di sostituire alle variabili u e v due variabili u' e v' , le quali assumano lo stesso valore in punti coniugati dell'involuzione, e valori diversi per punti non coniugati. Effettivamente un tale cambiamento di variabili si effettua, prendendo per esempio:

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ v' = \frac{v}{u} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ v' = uv. \end{cases}$$

Il primo cambiamento dà luogo alla rappresentazione in forma intera

$$x = u', \quad y = u'v'^2, \quad z = u'v',$$

dove all'intorno del punto O corrisponde non più l'intorno del punto O_0 , bensì l'intorno della retta $u' = 0$. Il secondo cambiamento dà luogo alla rappresentazione in forma fratta

$$x = u', \quad y = \frac{v'^2}{u'}, \quad z = v',$$

dove all'intorno di O risponde l'intorno di O_0 , e che coincide con la rappresentazione incontrata qui sopra (pag. 649).

Diremo subito che a codesto requisito non rispondono le soluzioni del problema proposte o tentate da diversi autori; delle quali vogliamo brevemente informare il lettore.

Anzitutto DEL PEZZO e KOB, l'uno indipendentemente dall'altro, nello stesso anno 1892 ⁽¹⁾, hanno pensato di ottenere la rappresentazione analitica di una falda di f , nell'intorno di un punto singolare O , trasformando razionalmente la f in un'altra superficie F in guisa da sciogliere la singolarità O . DEL PEZZO adopera a tal uopo trasformazioni monoidali dello spazio, di forma fratta, con le quali egli ritiene di poter trasformare l'intorno di O in una curva semplice K (o in un insieme di curve semplici); allora la superficie F nell'intorno di K potrà essere rappresentata mediante un numero finito di serie di TAYLOR, e — ritornando ad f — si otterrà la rappresentazione del punto O mediante un *numero finito di quozienti di serie di potenze di due variabili*.

KOB fa uso soltanto di successive trasformazioni quadratiche di forma intera, mediante le quali egli ritiene poter trasformare l'intorno di O in una curva semplice o multipla, di cui l'intorno venga rappresentato da un *numero finito di serie di potenze* (di TAYLOR o di HALPHEN); pertanto anche l'intorno di O su f verrebbe rappresentato in tal guisa.

Tanto il procedimento di DEL PEZZO come quello di KOB danno luogo ad obiezioni, mosse rispettivamente da SEGRE e da B. LEVI ⁽²⁾ e riferentisi alla risolubilità dei punti singolari con trasformazioni (cfr. § 40). Ma quando pure si suppongano completamente superate le difficoltà che codeste critiche hanno messo in rilievo, resta sempre che il procedimento di DEL PEZZO e di KOB è incapace di rispondere al requisito fondamentale di rappresentare analiticamente una falda uscente da un punto singolare; e a dir vero l'uno e l'altro autore segnano come scopo alle loro ricerche soltanto la *possibilità di rappresentare la totalità dei punti di una superficie algebrica con un numero finito di serie di potenze*, il qual risultato appare appunto come una conseguenza della risoluzione delle singolarità con trasformazioni.

⁽¹⁾ DEL PEZZO. « Rendiconti del Circolo mat. di Palermo », t. 6, pag. 139. — KOB. « Journal de Mathématiques », serie 4^a, t. 8, pag. 385

⁽²⁾ Cfr. « Annali di Matematica », serie 2^a, t. 25 e 26, (1896-97).

Che effettivamente il procedimento sopra indicato non possa condurre a rappresentare tutto l'intorno di un punto multiplo di una superficie f con una sola terna di serie (o di quozienti di serie) $x = x(uv)$, $y = y(uv)$, $z = z(uv)$, si vede molto bene riferendosi ad un semplice caso particolare: per es. ove si prenda un punto O triplo per f in guisa che con una trasformazione quadratica l'intorno di O si cambi in una cubica piana irriducibile K , appartenente ad una superficie F . Qui si è condotti a considerare la rappresentazione analitica di una falda lineare nell'intorno di un punto di K , in generale semplice per F ; rappresentazione che viene fornita dallo sviluppo di TAYLOR. Ora le serie che porgono questa rappresentazione analitica si arrestano necessariamente in corrispondenza ai punti di diramazione della funzione algebrica relativa a K .

Al problema di rappresentare analiticamente l'intorno di un punto singolare di una superficie f , soddisfacendo al requisito fondamentale che ogni falda venga fornita nella sua interezza da uno stesso sistema di serie convergenti, si riferiscono le ricerche di HENSEL ⁽¹⁾ del 1900, il cui risultato è presentato dall'autore come una completa estensione dei teoremi di CAUCHY e di PUISEUX relativi alle funzioni di una variabile. La conclusione di HENSEL si può enunciare dicendo che una falda di f di origine O si lascia generalmente rappresentare mediante serie procedenti per le potenze di due variabili u e v , in un intorno di $u = 0$, $v = 0$.

Ma, disgraziatamente, non siamo riusciti a comprendere bene il significato di questo sviluppo: tuttavia vediamo che almeno i punti multipli isolati (o anche singolari per la curva multipla) in cui la falda abbia un cono osculatore di genere maggiore di zero, devono dar luogo ad una eccezione essenziale al teorema di HENSEL, poichè, la rappresentazione di f essendo data nell'intorno di un punto del piano, il detto cono dovrebbe essere razionale ⁽²⁾.

In quest'ordine di idee ci limiteremo ad aggiungere la rappresentazione analitica di una superficie f considerata nel-

⁽¹⁾ « Acta mathematica », Bd. 23, (1900) e « Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigungs » Bd. 8, (1900).

⁽²⁾ Ciò è d'accordo con una critica mossa da B. LEVI, (Comptes Rendus - 17 marzo 1902).

l'intorno di un punto doppio conico, ovvero di un incrocio ordinario di due curve cuspidali. Designando con $O = (000)$ il punto singolare, avremo generalmente per O due rami lineari della curva L segata dalla polare del punto all'infinito dell'asse z , i quali potranno venir rappresentati mediante due sviluppi di MAC-LAURIN (relativi alle proiezioni)

$$y = \alpha(x), \quad y = \beta(x);$$

allora ponendo

$$u = (y - \alpha(x))^{\frac{1}{2}}, \quad v = (y - \beta(x))^{\frac{1}{2}},$$

le x , y e z di un punto della f , in un intorno finito di O , verranno date da funzioni uniformi di u e v , cioè mediante serie di potenze delle due variabili, convergenti nell'intorno di $u = 0$, $v = 0$.

Ciò che si è detto vale tanto per il punto doppio isolato, come per l'incrocio ordinario di due curve cuspidali; in quest'ultimo caso i due rami di L sono le due curve cuspidali stesse. Poniamo che i detti rami coincidano con gli assi x e y , e prendiamo, per es.,

$$f = z^2 - xy + xy^2 = 0$$

(esempio di HENSEL in cui O è un punto doppio isolato), avremo

$$u = x^{\frac{1}{2}}, \quad v = y^{\frac{1}{2}},$$

$$z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(1 - y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{7}{2}} - \dots;$$

prendiamo invece

$$f = z^2 - x^3y^3 = 0$$

(superficie con due rette cuspidali), avremo

$$u = x^{\frac{1}{3}}, \quad v = y^{\frac{1}{3}},$$

$$z = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}.$$

Si noti che le rappresentazioni così ottenute per le nostre f sul piano (uv) non soddisfano al requisito della invertibilità, avendosi due punti (u, v) e $(-u, -v)$ cui risponde un medesimo punto (xyz) .

40. **Nota storica sulle singolarità delle superficie e sulla trasformazione di una superficie in un'altra dotata di singolarità elementari.** — Le prime ricerche intorno ai punti singolari delle superficie si riattaccano agli studi di SALMON e CAYLEY concernenti l'estensione delle formule di Plücker (cfr. L. 3° § 19). SALMON fino dal 1846 ⁽¹⁾ valutava l'abbassamento della classe dovuto a un punto doppio isolato, mostrando che per un punto biplanare esso diventa in generale 3 e per un punto uniplanare 6; più tardi (1849 e 1857) valutava l'abbassamento della classe dovuto a una curva nodale dotata di punti tripli.

I punti cuspidali della curva nodale, che appaiono già nella precedente ricerca, furono poi oggetto di uno studio approfondito di CAYLEY (1868) ⁽²⁾: questi trova in particolare che la sezione della superficie col piano tangente si compone di un ramo lineare e un ramo cuspidale che tocca la curva doppia.

Una tavola delle singolarità più usuali che compariscono nello studio delle superficie trovasi in una memoria di ZEUTHEN pubblicata nel tomo 9 dei Math. Annalen (pagg. 450, 452). Lo stesso autore dedicava l'anno appresso (1875) uno studio particolare al tacnode (ibidem Bd. 10) notando il caso più semplice dell'incrocio di due rami nodali, in cui vi è contatto di due falde della superficie.

Infine uno studio completo delle varie specie di punti doppi isolati è dovuto a ROHN (1883) ⁽³⁾; il quale determina l'abbassamento per la classe della superficie ad essi dovuto, considerando la singolarità che portano nel cono circoscritto da un punto generico: nel lavoro di ROHN i punti biplanari straordinari figurano come riunione di punti doppi successivi; così questa analisi viene ad accostarsi al concetto noetheriano della singolarità.

Nella nota di NÖTHER del 1871 ⁽⁴⁾, ove è posto per la prima volta il concetto dei punti multipli infinitamente vicini delle curve, analizzando le singolarità mediante l'ausilio delle trasformazioni quadratiche, trovasi anche contenuto

⁽¹⁾ Cambridge and Dublin math. Journal, t. 2, pag. 65.

⁽²⁾ Papers VI, pag. 123.

⁽³⁾ Math. Annalen, Bd. 22.

⁽⁴⁾ Göttinger Nachrichten, pag. 267.

un cenno sulla estensione che questo concetto può ricevere nel caso delle superficie.

Qui giova osservare che, quando vogliansi indagare, non soltanto i punti multipli che trovansi nell'intorno di un punto proprio, ma anche le curve multiple infinitamente vicine ad una curva propria, occorre introdurre — accanto alle trasformazioni quadratiche — trasformazioni birazionali dello spazio di ordine superiore, e DEL PEZZO (1892) ha osservato che può usarsi a tal uopo la trasformazione monoidale, già studiata da DE PAOLIS.

Ora uno sviluppo del concetto di NÖTHER per le singolarità delle superficie è dovuto al SEGRE, nella memoria citata del 1896, ricca di istruttivi esempi; qui trovasi sistematicamente definita la composizione della singolarità di una superficie nell'intorno di un punto (punti multipli infinitamente vicini e curve infinitesime costituite da tali punti) mediante le molteplicità di intersezione della superficie con rami, lineari o superlineari, uscenti da un punto.

Alcune delle ricerche sopra menzionate traggono origine dal problema di « trasformare una superficie, dotata di singolarità qualsiasi, in un'altra possedente soltanto certe singolarità elementari » analogamente a ciò che si fa per le curve.

Anzitutto NÖTHER, in una nota sui moduli delle superficie del febbraio 1888, ha avvertito la possibilità di trasformare *in generale* una superficie qualsiasi $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ in una superficie dotata soltanto di curva nodale con punti tripli, che sono tripli ugualmente per la curva e per la superficie, e ciò mediante una sostituzione razionale del tipo

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Ad accertare la possibilità di una siffatta trasformazione per singolarità *arbitrarie*, è dedicata una nota di DEL PEZZO, pubblicata nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo nel luglio del medesimo anno: il DEL PEZZO si propone di *trasformare la data superficie f in una superficie F di un conveniente iperspazio* (che deve avere 5 dimensioni almeno) *affatto priva di punti multipli*; proiettando la F sullo spazio S_3 , si ottiene allora una f dotata delle singolarità elementari indicate da NÖTHER. Ma quantunque lo stesso autore sia ritornato l'anno appresso nell'argomento, per spiegare alcuni punti

soltanto accennati nella prima Nota, le critiche mosse particolarmente dal SEGRE hanno posto in luce che i ragionamenti di DEL PEZZO sono insufficienti a stabilire la proposizione da lui intuuta, col rigore necessario in una questione di ordine così delicato. Lo stesso può dirsi per riguardo a un lavoro di DEL PEZZO del 1892, che veniva a sciogliere le singolarità di una superficie con trasformazioni moroidali dello spazio, nel qual lavoro è pur contenuto un concetto fecondo, come sopra abbiamo rilevato.

Il SEGRE, nella sua citata memoria del 1896, riprendendo il concetto della trasformazione iperspaziale di DEL PEZZO, lo semplifica presentandolo nella forma seguente.

Si considerino le superficie φ di un ordine m abbastanza elevato, che passano per tutti i punti multipli e per tutte le curve multiple (proprie o no) di f ; si può provare che esistono superficie siffatte, non contenenti f come parte, osservando che soddisfano alla condizione anzidetta le polari di f . Ora quando si riferisce proiettivamente il sistema r volte infinito $|\varphi|$ al sistema degli iperpiani di un iperspazio S_r , si ottiene una F , trasformata birazionale di f , che viene priva di singolarità. Per dimostrare effettivamente che F non possiede punti multipli, occorre esaminare il sistema irriducibile di curve C segato dalle φ sopra f , fuori delle curve multiple; e basta riconoscere che, considerando tutte le superficie φ di un ordine abbastanza elevato e riferendosi a punti P , propri o impropri di f , fuori degli elementi base di $|\varphi|$ (e quindi semplici di f):

1) la curva generica C costretta a passare per un punto qualsiasi P si mantiene irriducibile e non diminuisce di genere, acquistando un nuovo punto doppio o multiplo;

2) la C passando per P non passa di conseguenza per altri punti della superficie.

Tuttavia il SEGRE non arriva a concludere la dimostrazione del teorema, arrestandosi di fronte ad un esame minuto delle questioni sopra accennate. Al qual proposito ci limiteremo a rimandare il lettore ai lavori posteriori di B. LEVI ⁽¹⁾ (1897, 98) e F. SEVERI ⁽²⁾ (1914).

⁽¹⁾ Cfr. in ispecie la Nota del 5 Dec. 1897 negli Atti dell'Accad. di Torino

⁽²⁾ Rendic. Accad. dei Lincei 20 Dec. 1914. Cfr. O. CHISINI ibidem Luglio 1917.

Della possibilità di trasformare una superficie f in un'altra priva di singolarità in un iperspazio, segue subito che: *una superficie algebrica si può trasformare birazionalmente in un'altra dotata soltanto di curva doppia nodale con punti tripli* (tripli ad un tempo per la curva e per la superficie).

Occorre qui rilevare esplicitamente che la trasformazione di cui si parla è una trasformazione birazionale per i punti delle due superficie ma non per lo spazio ambiente. Operando con trasformazioni birazionali dello spazio si può sciogliere in generale una curva multipla, ma si dà origine a nuove curve multiple al cui ordine non può essere fissato *a priori* limite alcuno.

Ora sorge il problema di determinare le *singolarità elementari* delle superficie rispetto a *trasformazioni birazionali dello spazio*; in particolare si affaccia qui la domanda « se con siffatte trasformazioni una superficie qualunque possa convertirsi in un'altra dotata soltanto di curve multiple a falde distinte, dotate di punti cuspidali ordinari e di punti multipli ordinari non abbassanti la classe delle sezioni piane ». Alla quale domanda non sembra sia stata data fin qui una risposta precisa.

Lo studio delle falde di una superficie nell'intorno di un punto singolare, che, come diremo, si può anche collegare alla trasformazione di cui sopra è discorso, viene iniziato dal teorema di HALPHEN (1878), concernente i punti generici delle curve multiple, che abbiamo dimostrato nel § 39. Ma la questione ha fatto da allora pochi progressi, tantochè nuove riescono in gran parte anche le semplici osservazioni da noi svolte nel citato paragrafo (1).

Per quanto concerne il problema fondamentale della rappresentazione analitica delle falde in un punto multiplo isolato o in un punto singolare della curva multipla, abbiamo segnalato i tentativi di DEL PEZZO e KOBBS (1892) in rapporto alla risoluzione delle singolarità con trasformazioni, e il nuovo tentativo di HENSEL (1900); i quali sono stati esaminati nel § 39, dove insieme all'esame critico della questione si trovano le notizie storiche che qui è inutile ripetere.

Termineremo questo cenno menzionando un interessante

(1) Cfr. ENRIQUES « Accad. Bologna 1916, 1917 ».

segue. Anzitutto nel piano si ottengono i punti uniti di una omografia come intersezioni delle coniche generate da due coppie generiche di fasci proiettivi corrispondenti AA' e BB' , prescindendo dal punto comune alle due rette omologhe AB e $A'B'$, che appartiene ad entrambe le coniche. Nello spazio S_3 basterà considerare due trilateri omologhi, affatto generici, abc , $a'b'c'$: i fasci proiettivi di assi a e a' , b e b' , c e c' , generano tre superficie quadriche Q^2 , passanti per la retta comune ai piani corrispondenti abc e $a'b'c'$, le quali s'intersecano ulteriormente nei punti uniti dell'omografia. Analogamente in S_n si assumeranno n S_{n-2} : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, appartenenti ad un iperpiano π , e gli n S_{n-2} omologhi: $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$, entro l'iperpiano corrispondente π' : i fasci proiettivi di iperpiani corrispondenti α_i e α'_i generano una quadrica ⁽¹⁾ passante per lo S_{n-2} , β , comune a π e π' ; le n quadriche così definite s'intersecano (fuori di β) nei punti uniti dell'omografia di S_n .

Vale la pena di osservare che, come un'omografia di S_n dà luogo ad un sistema di n Q^2_{n-1} passanti per un S_{n-2} β , così viceversa: *ad un sistema di n Q^2_{n-1} indipendenti, aventi a comune un S_{n-2} β , corrisponde un'omografia che ha come punti uniti le ulteriori intersezioni delle Q^2_{n-1} ; la quale resta determinata quando si facciano corrispondere gli S_{n-2} α_i e α'_i , sezioni di ciascuna quadrica con due iperpiani π e π' condotti per β .*

Ora possiamo dimostrare con ragionamento geometrico diretto che « $n+1$ quadriche Q^2_{n-1} di S_n , aventi a comune un S_{n-2} base β , si intersecano generalmente in $n+1$ punti fuori di β ».

A tal uopo conviene premettere che (per $n > 3$) una Q^2_{n-1} di S_n contenente un S_{n-2} , β , è un cono (di specie $n-3$) proiettante da un S_{n-4} , ω , una superficie del second'ordine Q^2_2 di S_3 ⁽²⁾, e quindi contiene due sistemi di S_{n-2} proiettanti le

⁽¹⁾ Ciò risulta p. es. cercando le intersezioni della varietà generata con una retta, che sono date dai punti uniti di una proiettività.

⁽²⁾ L'osservazione viene giustificata per le nostre Q^2_{n-1} dalla loro generazione proiettiva; indipendentemente da questa, essendo data comunque una Q^2_{n-1} per β , basterà notare che gli iperpiani per β segano la Q^2_{n-2} secondo S_{n-2} aventi a comune con β gli S_{n-3} di un fascio, cioè passanti per uno stesso S_{n-4} ω .

La teoria generale degli spazi lineari appartenenti ad una quadrica è dovuta a SEGRE (1884). Cfr. per es. BERRINI « Introduzione... » cap. VI.

generatrici della Q_2^2 : un sistema (β) a cui appartiene il dato spazio β , e un sistema complementare (γ); due S_{n-2} di sistema diverso sono incidenti fra loro avendo a comune un S_{n-3} per ω , mentre due S_{n-2} dello stesso sistema sono sghembi fra loro non intersecandosi fuori di ω .

Ciò premesso procediamo induttivamente, ammettendo vero il teorema che si vuol dimostrare per m Q_{m-1}^2 aventi a comune un S_{m-2} in S_m , finchè sia $m < n$, e facciamo vedere che il teorema stesso segue per n .

L'ipotesi fatta porta che « m Q_{m-1}^2 aventi a comune un S_{n-2} , β , in S_n , si segano generalmente fuori di β secondo una varietà V_{n-m}^{m+1} d'ordine $m+1$ ». Si può aggiungere che per $m = n-1$ la (curva) V_1^n sega in un punto gli S_{n-2} del sistema (γ) appartenente ad una Q_{n-1}^2 che la contiene, e quindi ha $n-1$ punti comuni con lo S_{n-2} β incidente ai (γ). Perciò basta osservare che le $n-1$ Q_{n-1}^2 intersecantisi secondo la V_1 , segano sopra un iperpiano per β quadriche Q_{n-2}^2 , riducibili in β e in $n-1$ S_{n-2} residui, che determinano un punto di V_1 . In conseguenza una Q_{n-1}^2 passante per β , e non per V_1 , segnerà questa curva in $n+1$ punti fuori di β . c. d. d.

Il problema della classificazione delle omografie di S_n esige l'analisi dei casi in cui le quadriche del sistema 4) hanno a comune (fuori di β), non più $n+1$ punti distinti, bensì gruppi di punti infinitamente vicini oppure varietà continue di punti.

Convieni premettere che nella nostra discussione supporremo le quadriche Q_{n-1}^2 del sistema 4) siano *coni di specie $n-3$* e *non con* di specie superiore: con ciò resterà escluso soltanto il caso della *omologia*, in cui vi è un iperpiano di punti uniti; il qual caso del resto apparirà rientrare nel tipo generale delle nostre omografie. Effettivamente, se non vi è un iperpiano di punti uniti, possiamo supporre che lo S_{n-2} , β , intersezione degli iperpiani corrispondenti π e π' , non sia costituito di punti uniti, e quindi due qualsiasi S_{n-2} corrispondenti, α e α' , scelti entro π e π' , s'incontrino soltanto secondo un S_{n-4} (e non un S_{n-3}), sicchè la quadrica generata dai fasci proiettivi di iperpiani che hanno per sostegni α e α' riescirà appunto un cono di specie $n-3$, avente come spazio doppio l'intersezione di α e α' .

Ciò posto, porremo a base della nostra discussione la seguente

Proprietà fondamentale del sistema delle quadriche 4): le

varietà V_{n-m}^{m+1} sezioni di m quadriche del sistema segano gli iperpiani passanti per β secondo spazi lineari S_{n-m-1} .

Questa proprietà si dimostra mediante l'osservazione, già adoperata innanzi, che le quadriche Q_{n-1}^2 sono segate da un iperpiano per β secondo un S_{n-2} .

Ora si noti il

Lemma. Se le n quadriche 4) hanno a comune una varietà irriducibile V , questa appartiene intieramente ad un iperpiano per β . Infatti V sega l'iperpiano $x_0 = 0$ in punti appartenenti tutti a β (osservammo già che le ulteriori intersezioni dell'iperpiano con le nostre Q_{n-1}^2 non hanno punti comuni); così un iperpiano proiettante da β un punto di V conterrà tutta la V .

Tenuto conto della proprietà fondamentale segue senz'altro il

Teorema I. Se le n quadriche Q_{n-1}^2 hanno a comune una varietà irriducibile, V , questa è lineare.

Aggiungasi che se le dette quadriche hanno comuni un S_h e un S_n , questi sono *sghebbi fra loro*, altrimenti lo spazio da essi determinato riuscirebbe comune a tutte le Q_{n-1}^2 . Invero in questo spazio la 1) subordina una omografia identica, sicchè tutti i punti di esso sono uniti e perciò comuni a tutte le quadriche Q_{n-1}^2 .

Di qui segue il

Teorema II. Se le n quadriche aventi a comune un S_h , hanno ulteriormente a comune una varietà irriducibile V_{n_1} , di dimensione h_1 ($\leq h$), di cui qualche punto giaccia nello S_n , questa varietà è un S_{h_1} contenuto in S_h .

Infatti V_{n_1} è uno spazio lineare S_{h_1} perchè le intersezioni di $n - h$ (o più) quadriche fuori di S_h soddisfano sempre alla proprietà fondamentale di intersecare gli iperpiani per β secondo spazi lineari.

Lo S_{h_1} , facente parte delle ulteriori intersezioni delle Q_{n-1}^2 per S_h e contenuto in S_h , si dirà costituito di *punti uniti doppi per l'omografia*.

Qui occorre notare che i punti uniti doppi appartenenti ad un S_h formano sempre un unico sistema lineare S_{h_1} ; infatti l'insieme dei punti doppi di S_h viene definito come intersezione di S_h con una varietà V , cui spetta la proprietà fondamentale di incontrare gli iperpiani per β secondo spazi lineari.

Ora, in un S_{h_1} di punti uniti doppi per la omografia, si potrà trovare uno spazio S_{h_2} di punti *uniti tripli*, facente

parte dell'intersezione ulteriore delle Q^2_{n-1} , dopochè si sian tolti successivamente S_h e S_{h_1} . Così procedendo induttivamente si definiranno in generale gli *spazi di punti uniti multipli* dell'omografia.

Quindi, per determinare esattamente la composizione dell'insieme dei punti uniti di una omografia, assegnando il numero e le dimensioni degli spazi di punti semplici e multipli che lo costituiscono, occorre anzitutto valutare l'equivalenza di un S_h di punti uniti, cioè calcolare il numero delle intersezioni che le Q^2_{n-1} hanno in generale fuori di questo (e di β).

Teorema III. *L'equivalenza di un S_h comune alle n quadriche Q^2_{n-1} è $h + 1$, diguisachè fuori di un S_h di punti uniti semplici si hanno in generale $n - h$ punti uniti dell'omografia.*

Il teorema si dimostra riprendendo il ragionamento con cui si prova che le n Q^2_{n-1} hanno in generale $n + 1$ intersezioni fuori di β , e tenendo conto della modificazione portata dall'esservi ancora un S_h comune alle dette quadriche.

Pongasi dapprima per semplicità $h = 1$, cioè si abbia una retta a comune a tutte le Q^2_{n-1} , e giacente — per ciascuna di esse — in un S_{n-2} generatore, γ . L'intersezione di $n - 1$ Q^2_{n-1} è una curva V_1^n , d'ordine n , che si spezza nella retta a e in una \bar{V}_1^{n-1} ; quest'ultima curva incontrerà β in $n - 2$ punti, avendo un'intersezione variabile con gli iperpiani per β , e incontrerà il γ in un punto di a ; perciò l'ultima Q^2_{n-1} , non contenente la \bar{V}_1^{n-1} ma passante per β e per la a , segnerà ulteriormente la \bar{V}_1^{n-1} in

$$2(n - 1) - (n - 2) - 1 = n - 1$$

punti.

Pongasi successivamente $h = 2$, cioè le Q^2_{n-1} abbian comune un piano α giacente in un loro S_{n-2} γ . La V_2^{n-1} , intersezione di $n - 2$ Q^2_{n-1} , si spezzerà nel piano α e in una residua \bar{V}_2^{n-2} ; il ragionamento precedente prova che l'intersezione della \bar{V}_2^{n-2} con un'altra Q^2_{n-1} , fuori di α , è una \bar{V}_1^{n-2} , la quale sarà generalmente irriducibile e incontrerà gli iperpiani per β , e quindi il piano α in un punto: perciò il numero dei punti in cui l'ultima Q^2_{n-1} sega ulteriormente la \bar{V}_1^{n-2} è

$$2(n - 2) - (n - 3) - 1 = n - 2.$$

Analogamente si procederà per $h > 2$.

Dal teorema III si passerà ad un teorema generale contemplante diversi spazi di punti uniti semplici o multipli, mediante la seguente

Osservazione. Se le quadriche Q^2_{n-1} posseggono in comune due spazi di punti uniti S_h e S_k , l'equivalenza della varietà $S_h + S_k$ rispetto alle intersezioni delle Q^2_{n-1} , si può calcolare in due modi:

a) ripetendo il ragionamento precedente con la modificazione che viene portata dal fatto che non solo lo S_h , ma anche lo S_k fa parte di tutte le varietà intersezioni di più Q^2_{n-1} , e si stacca da quelle di dimensione k ;

b) fondandosi sulla indipendenza dei due spazi S_h e S_k che sono sghembi fra loro, sicchè l'equivalenza della varietà somma $S_h + S_k$ sarà la somma dell'equivalenza dei due spazi: con questo secondo metodo si trova dunque che due spazi di punti uniti S_h e S_k assorbono $h + k + 2$ punti uniti.

La conclusione del secondo metodo vale anche per il primo, e perciò — senza entrare in un esame più minuto — siamo assicurati *a priori* che esso pure conduce a trovare l'equivalenza $h + k + 2$ per il sistema di due spazi S_h e S_k comuni alle n Q^2_{n-1} . Ma questo secondo metodo, e quindi la relativa conclusione, si estende senz'altro al caso in cui lo S_k venga sostituito da un S_{h_1} ($h_1 \leq h$) di punti uniti doppi interno allo S_h o coincidente con esso, (che dovrà esser comune all'intersezione ulteriore delle Q^2_{n-1} passanti per S_h). E analogamente si dica per il caso in cui si abbiano più spazi di punti uniti semplici o multipli.

Pertanto concluderemo la nostra osservazione enunciando il

Teorema IV. *Se un'omografia di S_n possiede un S_n di punti uniti e dentro questo un S_{h_1} di punti uniti doppi, il quale contiene a sua volta un S_{h_2} di punti tripli, ecc. fino ad un S_{h_i} di punti uniti $(i + 1)$ -pli ($h \geq h_1 \geq h_2 \dots \geq h_i$), il gruppo degli spazi di punti uniti $S_h S_{h_1} \dots S_{h_i}$ equivale a*

$$h + h_1 + \dots + h_i + i + 1$$

punti uniti.

L'esistenza di spazi di punti uniti multipli per l'omografia 2), corrisponde all'esistenza di spazi di contatto o di osculazione per le quadriche 4); quindi si può dire che un'omografia con spazi di punti uniti multipli possiede *spazi di punti*

uniti infinitamente vicini, nel senso stesso in cui la locuzione dei punti infinitamente vicini si usa nella teoria delle singolarità delle curve, superficie ecc.

Definiremo in generale gli spazi (lineari) infinitamente vicini entro un S_n (limitandoci al caso che corrisponde ai punti successivi sopra rami lineari) per mezzo di varietà V_{n+1} generate come serie semplicemente infinite di spazi S_h (prive di punti doppi).

Diremo che due V_{n+1} siffatte hanno a comune i spazi generatori successivi ad un S_h semplice contenuto in esse; quando le curve sezioni delle V_{n+1} con gli S_{n-h} di S_n hanno un contatto d'ordine i . Per n abbastanza alto due S_h infinitamente vicini di V_n determinano in generale un S_{2h+1} (tangente a V_{n+1} lungo S_h) che li contiene, e così tre S_h infinitamente vicini determinano un S_{3h+2} (osculatore lungo S_h), ecc., $i+1$ S_h infinitamente vicini determinano un $S_{(i+1)(h+1)-1}$. Se (per i piccolo rispetto ad n) gli $i+1$ S_h successivi debbono appartenere ad uno spazio di dimensione minore di $(i+1)(h+1)-1$, questa proprietà si traduce in una condizione differenziale per la V_{n+1} in relazione allo S_h origine; la qual condizione si esprime dicendo che si hanno $i+1$ S_h *infinitamente vicini non indipendenti fra loro* ⁽¹⁾.

È importante osservare che:

In ogni punto P dello S_n riesce definito un S_{h+1} tangente alla V_{n+1} , che contiene tutti i punti della varietà infinitamente vicini a P nell'intorno del prim'ordine; questo S_{h+1} viene a passare per lo S_h e si può ritenere come proiettante da P lo spazio S_h infinitamente vicino. Pertanto vi è *omografia fra lo spazio S_h dei punti di contatto e la serie lineare ∞^h degli S_{h+1} tangenti alla V_{n+1}* ⁽²⁾, (i quali riempiono lo S_{2h+1} tangente lungo S_h); l'omografia degenera quando i due spazi infinitamente vicini S_h e S_h' non sono indipendenti (cioè sghembi), appartenendo a uno spazio di dimensione inferiore a $2h+1$.

Analogamente in ogni punto P dello S_n riesce definito un S_{2h+2} osculatore, avente un contatto di 2° ordine colla V_{n+1} , il quale S_{2h+2} contiene tutti i punti della varietà vicini a P

⁽¹⁾ Si presenta qui una generalizzazione delle rigate sviluppabili di S_3 .

⁽²⁾ Questa proprietà appare immediata estensione di quella, notissima, relativa alle rette infinitamente vicine dello spazio. Cfr. per es. ENRIQUES. « G. Descrittiva » Parte seconda §§ 17, 53.

nell'intorno di second'ordine; questo S_{2h+2} viene a passare per lo S_{2h+1} tangente lungo S_h , e si può ritenere come proiettante da P lo spazio a $2h+1$ dimensioni tangente lungo lo S_h' infinitamente vicino. Pertanto vi è *omografia fra lo spazio S_h dei punti di contatto e la serie lineare ∞^h dei relativi S_{2h+2} osculatori alla V_{h+1}* (i quali passano per lo S_{2h+1} tangente lungo S_h e riempiono lo S_{3h+2} osculatore lungo S_h); l'omografia degenera quando i tre spazi infinitamente vicini S_h, S_h', S_h'' non sono indipendenti, appartenendo ad uno spazio di dimensione inferiore a $3h+2$.

È chiaro come le cose dette si estendono alla serie degli spazi osculatori aventi un contatto d'ordine i nei punti di S_h : si dà sempre luogo ad un'omografia fra le serie lineari di codesti spazi e lo S_h dei punti di contatto; la quale omografia degenera nel caso di S_h infinitamente vicini non indipendenti.

Tuttavia, già nel caso di $i=3$, la nominata omografia non basta più (come nel caso di $i=2$) a definire gli S_h infinitamente vicini; ed un conto di costanti vale a mostrarcelo. P. es. nello S_3 vi sono ∞^8 rette e quindi ∞^7 rette p' infinitamente vicine ad una data p , ed ∞^7 rette p'' successive a p' ; l'esistenza di p' riesce ben definita da un S_3 per p (4 costanti arbitrarie) e da una proiettività fra i punti di p e i piani del fascio p ; invece l'esistenza di p'' non può essere definita dando una proiettività fra i punti di p e gl'iperpiani S_4 per lo $S_3 = (pp')$, giacchè tale proiettività importa soltanto 3 costanti arbitrarie invece di 7.

Ora, la definizione di $i+1$ S_h infinitamente vicini indipendenti in un $S_{(i+1)(h+1)-1}$, conduce a considerare — entro questo spazio — una *congruenza lineare di S_i incidenti*, che reciprocamente determina il gruppo degli $i+1$ S_h . Si pensino $i+1$ S_h successivi della nostra V_{h+1} come limiti di $i+1$ S_h generatori distinti, i quali determinano uno $S_{(i+1)(h+1)-1}$ variabile. Nel detto $S_{(i+1)(h+1)-1}$ si ha una serie $\infty^{(i+1)h}$ di S_i incidenti ai dati S_h , che formano una congruenza lineare, in modo che per ogni punto P dello $S_{(i+1)(h+1)-1}$ ne passa « uno » (il nominato S_i si costruisce intersecando gli $i+1$ spazi $S_{(i+1)h}$ che proiettano da P gli $S_{(i+1)h-1}$ definiti dai diversi gruppi di i S_h); quando i nostri S_h diventano infinitamente vicini la congruenza lineare degli S_i incidenti resta sempre una serie $\infty^{(i+1)h}$ (e non più ampia) di S_i determinati dalla condizione di contenere un punto di un S_h proprio, una tangente in esso

a V_{h+1} ecc.; pertanto la congruenza-limite degli S_i incidenti ad $i+1$ S_h che divengono infinitamente vicini resta lineare: per un punto generico dello $S_{(i+1)(h+1)-1}$ definito da codesti S_h infinitamente vicini, passa sempre un S_i incidente ad essi.

(Si può aggiungere che la congruenza anzidetta rimane irriducibile se gli spazi infinitamente vicini sono indipendenti; ove questi stieno in uno spazio con meno di $(i+1)(h+1)-1$ dimensioni essa si scinde in due sistemi, analogamente a ciò che accade per la congruenza delle rette incidenti a due rette date, quando queste diventano incidenti fra loro).

Vogliamo ancora osservare esplicitamente che: gli $i+1$ punti successivi O, O_1, O_2, \dots, O_i appartenenti ad un S_i incidente ad $i+1$ S_h infinitamente vicini, stanno sempre sopra un ramo lineare, finchè gli stessi S_h successivi sono definiti come spazi generatori (indipendenti) di una V_{h+1} priva di punti doppi. Invero se p. es. OO_1O_2 stessero sopra un ramo di second'ordine, il piano OO_1O_2 riuscirebbe tangente a V_{h+1} , e quindi contenuto nello S_{2h+1} tangente alla varietà lungo S_h ; se O, O_1, O_2 succedendosi su un ramo lineare, fosse di second'ordine il ramo $OO_1O_2O_3$ (O_3 satellite di O_2) dovrebbe O_3 appartenere al piano tangente in O_1 e quindi allo spazio S_{3h+1} osculatore alla V_{h+1} lungo S_h , e così di seguito.

Il concetto degli S_h infinitamente vicini in un S_n , si lascia estendere ove si considerino spazi infinitamente vicini di dimensioni diverse, $S_h, S_{h_1}', S_{h_2}'', \dots$ ($h \geq h_1 \geq h_2, \dots$). Invero si dovrà dire infinitamente vicino ad S_h uno spazio S_{h_1}' che sia infinitamente vicino ad un S_{h_1} di S_h , e così di seguito. La determinazione del detto spazio S_{h_1}' potrà farsi per mezzo di varietà V_{h_1+1} generate da spazi S_{h_1} e contenute entro una V_{h+1} generata da S_h ; la determinazione dello S_{h_2}'' mediante V_{h_2+1} generate da S_{h_2} e contenute nella precedente V_{h_1+1} ecc.; si supporrà sempre che le nostre varietà sieno prive di punti doppi.

Ma la considerazione di spazi infinitamente vicini di dimensione diversa, dà luogo ad un'avvertenza che apparisce chiara già nel caso di un punto infinitamente vicino ad una retta. Se il punto P' è infinitamente vicino al punto P della retta p , le superficie per p e P' riescono tangenti al piano $\pi = p \cdot PP'$, e quindi contengono tutti i punti infinitamente vicini a P nell'intorno del prim'ordine, sopra π ; i quali costituiscono una « retta infinitesima ». Le circostanze accennate

si lasciano comprendere intuitivamente dicendo che « le superficie per p e P' possono ritenersi avere a comune il punto P e una retta p' infinitamente vicina ad esso ».

Analogamente, se uno spazio S_{n_1}' , con $h_1 < h$ dimensioni, viene infinitamente vicino ad un S_{n_1} di S_h (gli S_h , S_{n_1}' essendo sghembi fra loro in un S_n ambiente di dimensione abbastanza grande), accade che le nostre V_{n+1} passanti per S_h e S_{n_1} abbiano lo stesso S_{n+h_1+1} tangente lungo S_{n_1} (contenente gli S_{n+1} tangenti nei punti di S_{n_1}); in conseguenza « le dette V_{n+1} si possono ritenere come aventi a comune un S_{n_1} ed un S_h' infinitamente vicino ».

È chiaro come queste considerazioni si estendano al caso di più spazi infinitamente vicini di dimensioni diverse; ed ecco il loro proprio significato.

Si abbiano $i+1$ spazi indipendenti

$$S_h S_{n_1}' \dots S_{h_i}^{(i)} \quad (h \geq h_1 \geq \dots \geq h_i)$$

comuni a più varietà V_{n+1} (generate da spazi S_h); queste V_{n+1} possono ugualmente ritenersi avere a comune una successione di spazi con h_i, h_{i-1}, \dots, h_1 e h dimensioni.

Ciò importa che: una successione di $i+1$ spazi infinitamente vicini indipendenti $S_h S_{n_1}' \dots S_{h_i}^{(i)}$ determina nello $S_{h+h_1+\dots+h_i+i}$ a cui appartiene una congruenza lineare di S_i incidenti, la quale può definirsi come limite della congruenza (ad $h+h_1+\dots+h_i$ dimensioni) determinata da $i+1$ spazi distinti di uguali dimensioni ⁽¹⁾ che si avvicinino — nel modo indicato — entro V_{n+1} . L'anzidetta congruenza lineare è costituita da S_i aventi un contatto d'ordine i con le nostre V_{n+1} , cioè contenenti $i+1$ punti di queste succedentisi sopra rami lineari (le V_{n+1} sono supposte non avere punti multipli in S_h).

Ciò che abbiám detto intorno agli spazi infinitamente vicini in un S_n , si applica direttamente al caso delle omografie.

Se un'omografia di S_n possiede un S_h che sia $(i+1)$ -plo ($h \geq 0$), le V_{n+1} comuni ad $n-h-1$ quadriche \mathcal{Q} hanno lungo lo S_h un contatto d'ordine i : infatti le sezioni di codeste

(1) Lo S_i incidente ad $i+1$ spazi $S_h S_{h_1} \dots S_{h_i}$ in un $S_{h+h_1+\dots+h_i+i}$, per un punto P , si costruisce proiettando da P gli spazi determinati da i spazi S , e intersecando gli spazi proiettanti così ottenuti.

quadriche con un S_{n-h} generico hanno $i+1$ punti comuni, riuniti nella intersezione dello S_h (facente parte $i+1$ volte di V_h) con lo S_{n-h} .

Lo stesso ragionamento prova che, più generalmente: se un'omografia possiede gli spazi di punti uniti sovrapposti

$$S_h \ S_{h_1} \ S_{h_2} \ \dots \ S_{h_i} \quad (h \geq h_1 \geq \dots \geq h_i),$$

le quadriche 4) hanno un contatto del prim'ordine lungo S_{h_1} , un contatto del second'ordine lungo S_{h_2} , ecc., e quindi posseggono in comune $i+1$ spazi infinitamente vicini delle dette dimensioni, cioè: lo spazio generatore successivo allo S_{h_1} sopra ciascuna V_{h_1+1} (che per $h_1 < h$ è diverso per le varie V_{h_1+1}), due spazi generatori successivi ad S_{h_2} sopra ciascuna V_{h_2+1} , ecc.

Rileviamo esplicitamente che: un S_i incidente agli $i+1$ spazi infinitamente vicini dell'omografia, e non avente a comune con S_h una retta o uno spazio più ampio (di punti uniti) contiene $i+1$ punti infinitamente vicini, comuni alle quadriche 4), i quali si succedono sopra un ramo lineare (¹).

Invero le sezioni di $i-1$ quadriche con lo S_i hanno a comune delle curve C che si ottengono intersecando con lo S_i le varietà V_{n-i+1} ; perciò le C sono unisecanti gli spazi γ generatori delle nostre quadriche e risultano prive di punti doppi. (Si avverta che si ha qui $n-i+1 \geq h$ essendo, come abbiamo visto,

$$n+1 \geq (h+1) + (h_1+1) + \dots + (h_i+1);$$

perciò le $i-1$ Q^2_{n-1} passanti per lo S_h hanno sempre a comune una varietà di $n-i+1$ dimensioni).

Ora dimostriamo che: un S_i contenente $i+1$ punti infinitamente vicini e indipendenti, $OO_1 \dots O_i$, comuni alle quadriche 4), è invariante per l'omografia. Invero se le nostre quadriche hanno a comune soltanto i detti punti e non un S_h per O , con $h > 0$, appare subito che il sistema delle quadriche stesse è limite di un altro con $i+1$ punti comuni distinti che danno origine a $OO_1 \dots O_i$, e quindi la nostra omografia è limite di un'altra con uno spazio invariante che si riduce allo S_i congiungente $OO_1 \dots O_i$. Se poi le quadriche anzidette

(¹) Ciò è d'accordo colla circostanza che le varietà V_{h_1+1} , $V_{h_2+1} \dots$ riescono prive di punti doppi.

hanno a comune un S_n per O , con una piccola variazione di esse, si può eliminare questa circostanza conservando i punti comuni OO_1, \dots, O_i .

Pertanto dedurremo: se un'omografia di S_n possiede $i+1$ spazi di punti uniti infinitamente vicini $S_n S_{n_1} \dots S_{n_i}$, essa ammette come invariante lo spazio da essi determinato (osculatore alle Q lungo S_{n_i}).

Codesto spazio unito congiungente gli S non può avere dimensione inferiore ad

$$h + h_1 + \dots + h_i + i,$$

altrimenti si avrebbe in esso un'omografia subordinata con spazi di punti uniti la cui equivalenza supererebbe la dimensione aumentata di un'unità, la quale dovrebbe essere identica. Ciò significa che « gli spazi di punti uniti infinitamente vicini di un'omografia sono indipendenti ».

Pertanto sarà lecito riassumere i risultati ottenuti enunciando il

Teorema. *Un'omografia, non identica, di S_n possiede in generale diversi gruppi di spazi di punti uniti infinitamente vicini, indipendenti:*

$$S_n S_{n_1} \dots S_{n_i}, \quad S_w S_{w_1'} \dots S_{w_j'}, \dots;$$

dove

$$(h + h_1 + \dots + h_i + i + 1) + (h' + h_1' + \dots + h_j' + j + 1) + \dots = n + 1$$

$$h \geq 0, \quad h' \geq 0, \dots$$

Ogni gruppo di r spazi S infinitamente vicini determina uno spazio invariante dove viene subordinata un'omografia che diremo *monovalente* (e non identica per $r > 1$): in questa si ha una *congruenza lineare di S_r uniti*, incidenti agli S di punti uniti, ciascun S_r contenendo $r+1$ punti uniti successivi sopra un ramo lineare.

Queste conclusioni si estendono anche al caso dell'omologia di S_n (caso di riducibilità delle Q^2_{n-1}), avendosi qui un iperpiano ω di punti uniti e un punto unito isolato O (il centro), che può divenire infinitamente vicino al detto iperpiano: in quest'ultimo caso le quadriche Q^2_{n-1} si riducono all'iperpiano fisso ω e a un altro iperpiano per O , e quindi i punti infinitamente vicini al punto doppio O , in tutte le direzioni, riescono uniti per l'omologia.

Risulta dal teorema precedente che ogni omografia di S_n si può ritenere determinata mediante le omografie che essa subordina in certi spazi inferiori, e precisamente:

1) mediante le omografie monovalenti, che subordina negli spazi $S_{h+h_1+\dots+h_i+i}$ definiti dai diversi gruppi di spazi di punti uniti infinitamente vicini;

2) e mediante omografie con due spazi di punti uniti distinti, come quella, dotata dei due spazi di punti uniti S_h e $S_{h'}$, nello $S_{h+h'+1}$ che li congiunge.

Ora l'omografia con due spazi di punti uniti S_h e $S_{h'}$ è caratterizzata dalla proiettività subordinata sopra una retta incidente a codesti spazi, la quale proiettività possiede un certo birapporto invariante: tale invariante è fisso per tutte le rette unite analoghe, che formano, nello $S_{h+h'+2}$, una congruenza lineare.

In qual modo potranno caratterizzarsi le omografie monovalenti con $i+1$ spazi di punti uniti infinitamente vicini $S_{h_1} S_{h_2} \dots S_{h_i}$, cioè quelle omografie monovalenti che diremo di *caratteristica* (h, h_1, \dots, h_i) ?

La risposta a tale questione ci fornirà il tipo assolutamente generale di tutte le omografie iperspaziali, indicandoci la *riduzione delle sostituzioni lineari* corrispondenti ad una *forma canonica*, che ne mette in luce gl'invarianti.

Ma per conseguire tale risposta conviene anzitutto studiare più profondamente le omografie (monovalenti), di un S_i , dotate di un solo punto unito multiplo, cioè di $i+1$ punti uniti infinitamente vicini, succedentisi sopra un ramo lineare.

Giova premettere alcune nozioni intorno alle *curve razionali normali*.

Si dice curva razionale normale, in uno spazio $S_r \equiv (x_0 x_1 x_2 \dots x_r)$, una curva C_r , d'ordine r , rappresentata parametricamente mediante polinomi di grado r :

$$5) \quad C_r \equiv \begin{cases} x_0 \equiv \varphi_0(t) \\ x_1 \equiv \varphi_1(t) \\ x_2 \equiv \varphi_2(t) \\ \dots \dots \dots \\ x_r \equiv \varphi_r(t); \end{cases}$$

i polinomi φ_i debbono essere linearmente indipendenti, affinchè

la C_r , appartenga allo S_r , e non a uno spazio inferiore. Tutte le C_r , di S_r , sono proiettive fra loro, giacchè con una sostituzione lineare, la C_r , scritta innanzi può dedursi dalla ⁽¹⁾

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 1 \\ x_1 \equiv t \\ x_2 \equiv t^2 \\ \dots \dots \\ x_r \equiv t^r \end{array} \right.$$

Si pone fra due C_r , una *proiettività, subordinata da un'omografia dello spazio* che le contiene, associando con una sostituzione lineare i relativi parametri; e così in particolare se nelle formule rappresentative della C_r , si eseguisce una sostituzione lineare (intera o fratta) sopra t , si definisce una *proiettività sopra C_r* , la quale viene subordinata da una *omografia di S_r trasformante in sè la curva*, che così riesce determinata.

Al concetto della proiettività fra C_r , si lega la *generazione proiettiva* di essa ⁽²⁾, che estende la nota generazione steineriana delle coniche e delle cubiche gobbe: una curva razionale normale di S_r , si può generare come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi incidenti di due stelle omografiche coi centri sopra la curva. Infatti, i coni proiettanti una C_r da due punti A e A' di essa risultano proiettivi (come le C_{r-1} sezioni iperpiane di essi), e tale proiettività riesce subordinata da un'omografia tra le stelle A e A' . Viceversa se si pone fra due stelle una generale omografia, la curva-

⁽¹⁾ Ciò si collega a quanto è detto nel L. 2^o, § 6 sulla costruzione della C_r come immagine della serie lineare dei gruppi di r punti della retta su cui è disteso il parametro t ; qui, a determinare la detta serie, vengono presi $r+1$ gruppi come segue: un primo gruppo costituito dal punto $t=\infty$ contato r volte, un secondo gruppo costituito dal punto $t=\infty$ contato $r-1$ volte e dal punto $t=0, \dots$, un ultimo gruppo costituito dal punto $t=0$ contato r volte.

Nello spazio S_r la rappresentazione canonica della C_r indicata nel testo si ottiene scegliendo una piramide fondamentale di cui due vertici M e N appartengono alla curva e le facce sono gli iperpiani determinati da un S_a osculatore in M e da un S_b osculatore in N , dove $a+b=r-1$; occorre inoltre scegliere il punto unità in un punto U della curva, e fissare il parametro t in guisa che per $t=0, \infty, 1$, si ottengano i punti M, N, U .

⁽²⁾ Cfr. VERONESE. Math. Annalen. Bd. 19.

luogo così definita è d'ordine r perchè incontra un iperpiano in r punti, che sono uniti per l'omografia determinata in esso segnando le due stelle.

Ciò posto (come per la conica e per la cubica gobba) si vede che « una C_r di S_r è definita da $r+3$ dei suoi punti » i quali possono essere assunti ad arbitrio nello S_r , purchè siano *indipendenti*, cioè tali che $r+1$ di essi non giacciono in un iperpiano.

La conclusione sopra enunciata si estende al caso in cui alcuni dei punti dati divengano infinitamente vicini sopra rami lineari, (conservandosi indipendenti); in particolare « esiste una C_r determinata che passa per $r+1$ punti infinitamente vicini (sopra un ramo lineare non contenuto in un iperpiano) e per altri 2 punti generici dello spazio ».

Per giustificare rigorosamente l'estensione del teorema sulla determinazione di una C_r , nel caso di punti infinitamente vicini, si può procedere induttivamente, ammettendo vero il teorema per $r-1$ e dimostrando quindi che esso sussiste per r , cioè che anche nello S_r vi è una C_r sola, e non infinite C_r , definita dal passaggio per $r+3$ punti indipendenti, alcuni dei quali sono infinitamente vicini ad un punto O . Ora l'ipotesi fatta porta che la C_r di cui vogliamo mostrare l'unicità debba giacere sopra un determinato cono K proiettante da O una curva razionale normale di S_{r-1} : basta dunque mostrare che su K non possono esistere due C_r passanti per O ed aventi a comune ulteriormente $r+2$ punti, comunque infinitamente vicini. A tale scopo si eseguirà una proiezione sopra un piano delle curve C_r tracciate su K (e passanti per O) da $r-2$ punti generici di K $A_1 A_2 \dots A_{r-2}$: ogni C_r viene proiettata in una curva d'ordine r C_r' , avente un punto $(r-1)$ -plo fisso O' , proiezione di O , ed ivi $r-2$ tangenti fisse che sono le tracce, sul piano, degli iperpiani tangenti al cono in un punto A_i e passanti per i rimanenti $r-3$ centri A . Si constata quindi che due C_r' siffatte s'intersecano ulteriormente in $r+1$ punti, immagini delle intersezioni che le corrispondenti C_r hanno su K fuori di O , e così non è possibile che due C_r tracciate su K abbiano, oltre O , $r+2$ punti a comune. e. d. d. (Nel ragionamento che precede viene tacitamente utilizzata l'ipotesi che gli $r+3$ punti dati per determinare la C_r siano indipendenti, col che resta escluso lo staccamento di rette del cono K per O , e quindi la riducibilità delle C_r di cui si discorre).

Ora la generazione proiettiva delle C_r , ci conduce alla costruzione delle omografie di S_r , dotate di $r + 1$ punti uniti infinitamente vicini.

Anzitutto, se è data in S_r un'omografia con un unico punto unito $(r + 1)$ -plo P , si costruiranno i punti uniti $P_1 P_2 \dots P_r$, vicini a P come punti successivi a P sopra la C_r , che viene generata da due stelle omografiche corrispondenti A, A' ; infatti questa C_r appartiene ad $r - 1$ quadriche 4) indipendenti, generate da fasci proiettivi d'iperpiani, i cui S_{r-2} base passano per A, A' . Viceversa, la conoscenza dei punti uniti $PP_1 \dots P_r$ e di una coppia di punti corrispondenti AA' , determina una C_r , passante per gli $r + 3$ punti dati, luogo dei raggi omologhi incidenti delle stelle A, A' , e così permette di costruire l'omografia fra queste stelle; quindi si otterrà una seconda coppia di stelle omografiche BB' , osservando che i punti corrispondenti delle rette PA, PA' , sono allineati col'intersezione della retta e dello $S_{r-1} = (PP_1 \dots P_r)$.

Ma la teoria delle curve razionali normali si collega anche in altro modo a quella delle omografie di S_r , dotate d'un punto $(r + 1)$ -plo.

Se si pone su C_r una proiettività con due punti uniti distinti M, N , si ottiene in S_r un'omografia con $r + 1$ punti uniti distinti; infatti la piramide degli elementi uniti viene definita dai seguenti $r + 1$ iperpiani:

- 1) l'iperpiano S_{r-1} osculatore, cioè avente un contatto r -punto con C_r , in M ;
- 2) l'iperpiano proiettante da N lo S_{r-2} osculatore, cioè avente un contatto $(r - 1)$ -punto con C_r , in M ;
- 3) l'iperpiano proiettante dalla retta tangente in N lo S_{r-3} osculatore a C_r in M ;

-
- r) l'iperpiano proiettante M dallo S_{r-2} osculatore in N ;
 - $r + 1$) e finalmente l'iperpiano osculatore a C_r in N .

Appare quindi che « quando M e N vengono a coincidere sopra C_r , per l'omografia trasformante in sè la curva tutti gli $r + 1$ punti uniti vengono a coincidere in un solo punto unito multiplo ».

Viceversa: un'omografia con un punto unito $(r + 1)$ -plo in S_r , possiede una curva razionale normale invariante (anzi una congruenza ∞^{r-1} di curve analoghe) e riesce definita dalla proprietà di subordinare sulla detta curva una proiettività parabolica.

Il teorema risulta da un semplice computo di costanti, tenuto conto dell'osservazione che le omografie di S_r , dotate di un punto $(r+1)$ -plo formano un sistema (razionale) irreducibile.

Infatti:

1) per determinare in S_r un'omografia dotata di un punto $(r+1)$ -plo P si possono dare ad arbitrio, oltre P , r punti $P_1 P_2 \dots P_r$, infinitamente vicini ad esso sopra un ramo lineare e una coppia di punti propri corrispondenti AA' , in posizione generica; ciò importa che la dimensione di codesto sistema d'omografie vale

$$r + (r - 1)r + r = r^2 + r;$$

2) d'altra parte, come abbiám detto, le curve razionali normali, C_r , di S_r dipendono da

$$(r + 3)(r - 1)$$

costanti arbitrarie; ponendo su una C_r una proiettività parabolica (che implica 2 costanti) si dà luogo ad una omografia di S_r , dotata di punto $(r+1)$ -plo, che lascia invarianti ∞^{r-1} C_r analoghe ⁽¹⁾, sicchè la dimensione del sistema d'omografie così determinato vale

$$(r + 3)(r - 1) + 2 - (r - 1) = r^2 + r.$$

L'esistenza di una curva razionale normale invariante per una omografia di S_r dotata di $r+1$ punti uniti infinitamente vicini, conduce a scrivere le equazioni dell'omografia sotto una forma canonica.

Invero rappresentiamo la C_r invariante con le formule

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 1 \\ x_1 \equiv t \\ x_2 \equiv t^2 \\ \dots \dots \dots \\ x_r \equiv t^r, \end{array} \right.$$

(1) Si consideri la serie dei punti $AA'A''\dots$ che corrispondono ad un punto generico A nelle successive potenze (d'ordine 1, 2, ...) d'un'omografia Π : questa serie è proiettiva alla serie analoga $BB'B''\dots$ costruita a partire da un punto B ; quindi se la prima serie appartiene a una C_r invariante, altrettanto avviene per la seconda.

minando i polinomi $\varphi(t)$ mediante l'equazione ricorrente

$$\varphi_k(t+1) - \varphi_k(t) = \varphi_{k-1}(t);$$

ove si prenda, per es.

$$\varphi_r(t) = t^r;$$

i polinomi φ_k risultano di grado k , e l'omografia che trasforma in sè C_r , cambiando t in $t+1$, viene data da

$$y_k = x_{k-1} + x_k,$$

ciò dalle formule 8).

Ora le formule 8) danno luogo ad una semplice interpretazione, in base a cui l'omografia di S_r , con un punto unito $(r+1)$ -plo riesce definita indipendentemente dal concetto dei punti uniti infinitamente vicini, come segue.

Si designino con

$$A_0 = (10 \dots 0), A_1 = (010 \dots 0), \dots, A_r = (0 \dots 01)$$

i vertici della piramide fondamentale per le coordinate; allora:

il punto A_0 è unito;

il punto A_1 appartiene alla retta unita (congiungente A_0 al punto unito infinitamente vicino cioè) tangente alla C_r , invariante, giacchè il punto omologo A_1' si trova sulla retta $A_0 A_1$;

il punto A_2 appartiene al piano unito osculatore a C_r , ed il suo omologo A_2' trovasi sulla retta $A_2 A_1$;

.....

il punto A_r stà, nello S_r , fuori dell'iperpiano unito osculatore a C_r , (cui appartiene A_{r-1}) e il suo punto omologo A_r' trovasi sulla retta congiungente $A_r A_{r-1}$.

Le coppie di punti omologhi $A_k A_k'$ diconsi *coppie caratteristiche* e il gruppo dei punti $A_0 A_1 \dots A_r$, in cui $A_k A_k' A_{k-1}$ sono allineati e A_k appartiene allo S_k unito stando fuori dello S_{k-1} unito, dicesi *gruppo caratteristico* per l'omografia: *la forma canonica* 8) si ottiene riferendo l'omografia a una *piramide fondamentale* costituita dai punti d'un gruppo *caratteristico* e scegliendo convenientemente il punto unità, per ridurre uguali i coefficienti di x_{k-1} e x_k nella combinazione lineare che porge y_k (l'ipotesi che l'omografia possenga il

punti uniti di dimensione ≥ 0 , il quadro 9) riducendosi alla sua prima linea ed eventualmente anche alla prima equazione di questa). Occorre però mettere in evidenza per ciascun gruppo di formule un diverso fattore di proporzionalità; così ad esempio si scriverà in relazione ad un S_h di punti uniti $y_{00} = \rho x_0 \dots$, e in relazione ad un secondo $S_{h'}$ di punti uniti $y_{00}^{(1)} = \rho_1 x_{00}^{(1)} \dots$, ed il quoziente $\frac{\rho_1}{\rho}$ designerà il birapporto invariante dell'omografia subordinata della data sopra la retta unita (congiungente due vertici della piramide fondamentale) che si appoggia ai due spazi S_h e $S_{h'}$; esso porgerà quindi un *invariante assoluto* dell'omografia.

Ora la forma canonica mette in luce che:

Due omografie entro lo spazio S_n sono trasformabili proiettivamente l'una nell'altra quando posseggono gruppi di spazi di punti uniti infinitamente vicini con le medesime dimensioni (corrispondenti a radici uguali dell'equazione $D(\rho) = 0$) e di più hanno gli stessi invarianti assoluti, forniti dei rapporti delle radici diverse della $D(\rho) = 0$.

Notizia storica ed osservazioni critiche. Il principio di una classificazione generale delle omografie o sostituzioni lineari omogenee sopra $n+1$ variabili si trova in una memoria di CAYLEY del 1854⁽¹⁾. L'autore, riattaccandosi a SYLVESTER, studia i determinanti $D(\rho)$ i cui termini contengono linearmente una variabile ρ , e considera le molteplicità $(\mu, \mu_1 \dots \mu_2)$ che spettano a una radice $\rho = \bar{\rho}$ in rapporto alle equazioni ottenute annullando il $D(\rho)$ e i suoi minori d'ordine

$$n, n-1, \dots, n-r+1.$$

Alla fine della memoria, in poche righe, osserva che questa analisi si applica alla classificazione delle omografie, ove appunto s'incontra il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix},$$

(1) Journal für Math. Bd. 50, pag. 313.

menzionando le classi di omografie del piano e il numero di quelle dello spazio.

WEIERSTRASS ⁽¹⁾ (1858-68), svolgendo lo stesso principio, osserva che la considerazione delle molteplicità μ, μ_1, \dots, μ_r secondo cui una radice $\rho = \bar{\rho}$ appartiene alle equazioni ottenute annullando un determinante d'ordine $n+1$ $D(\rho)$ e i suoi minori d'ordine $n, n-1, \dots, n-r+1$, corrisponde a una decomposizione del fattore $(\rho - \bar{\rho})^\mu$ in tanti divisori elementari del $D(\rho)$:

$$(\rho - \bar{\rho})^e (\rho - \bar{\rho})^{e_1} \dots (\rho - \bar{\rho})^{e_r},$$

dove

$$e = \mu - \mu_1, \quad e_1 = \mu_1 - \mu_2, \dots, e_{r-1} = \mu_{r-1} - \mu_r, \quad e_r = \mu_r,$$

e stabilisce un celebre teorema che, come diremo, significa l'equivalenza proiettiva delle omografie di un S_n i cui determinanti posseggano gli stessi divisori elementari.

A vero dire WEIERSTRASS non tratta esplicitamente delle omografie, ma delle condizioni di equivalenza delle coppie di forme bilineari,

$$f = \sum a_{ik} x_i u_k, \quad \varphi = \sum b_{ik} x_i u_k,$$

e

$$f' = \sum a'_{ik} x'_i u'_k, \quad \varphi' = \sum b'_{ik} x'_i u'_k,$$

per una trasformazione lineare delle x nelle x' e per un'altra trasformazione delle u nelle u' .

Frattanto, indipendentemente dall'analisi di WEIERSTRASS, CLEBSCH e GORDAN ⁽²⁾ per le omografie piane, e JORDAN ⁽³⁾, per le sostituzioni lineari sopra un numero qualunque di variabili, trovavano in modo diretto le forme canoniche ⁽⁴⁾.

SEGRE ⁽⁵⁾ (1884) indipendentemente dalla considerazione di forme ridotte, fonda la classificazione generale delle omografie iperspaziali sulla interpretazione geometrica del teorema di WEIERSTRASS ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ Accad. di Berlino, marzo 1858 e maggio 1868.

⁽²⁾ Math. Annalen, Bd. 1, pag. 359.

⁽³⁾ Traité des substitutions, (Paris 1870), Cap. II.

⁽⁴⁾ Studi geometrici sulle omografie del piano e dello spazio ordinario trovansi anche in HIRST (1874), REYE (1880), BATTAGLINI ecc.

⁽⁵⁾ Memorie dell'Acc. dei Lincei, serie III, vol. 19.

⁽⁶⁾ Contemporaneamente LORIA (Giornale di Matematiche, t. 22) ha classificato le omografie spaziali, riferendosi pure al metodo dei divisori elementari di WEIERSTRASS.

Si considerino le x e le x' come coordinate di punti di uno spazio S e le u e u' come coordinate degli iperpiani di un altro spazio S' ; allora le equazioni $f=0$ e $\varphi=0$ pongono due omografie fra S e S' (dato un punto viene definita l'equazione della stella corrispondente) e quindi determinano in S una omografia rappresentata dalla

$$f(yu) = \varphi(xu)$$

ritenuta come una identità rispetto alle u , cioè dalle sostituzioni lineari fra le y e le x che si ottengono uguagliando nelle due forme i coefficienti delle u_i .

Più semplicemente, se si interpretano le u come coordinate degli iperpiani dello stesso spazio S , un'omografia di S viene rappresentata annullando un'unica forma bilineare

$$f = \sum a_{ik} x_i u_k;$$

ma le sostituzioni lineari che si operano sulle x e sulle u sono soggette a trasformare in sè la relazione di appartenenza di punti e iperpiani

$$\varphi = \sum x_i u_i = 0.$$

Pertanto, come SEGRE spiega nella sua citata memoria, il teorema di WEIERSTRASS porge le condizioni di equivalenza di due omografie dello S ; e costituisce così il fondamento di una teoria che il SEGRE svolge in diversi sensi (applicandola anche alla classificazione delle coppie di quadriche, dei complessi di secondo grado, ecc.).

PREDELLA ⁽¹⁾ (1888-1892), riprendendo e approfondendo la teoria delle omografie, riesce all'interpretazione geometrica dei divisori elementari ⁽²⁾, che trovano riscontro nel concetto degli *spazi di punti uniti multipli*; quindi egli è

⁽¹⁾ Annali di Matematica, t. 17, (1889-90), pag. 113; Atti dell'Accad. di Torino, t. 27, (1891-92), pag. 270. Cfr. BERTINI, « Introduzione... », Cap. IV.

⁽²⁾ Questo riscontro emerge dal nostro quadro 9) come si è accennato nella nota a piè di pag. 680, tenendo presente che ogni gruppo di spazi di punti uniti sovrapposti risponde ad un'unica radice dell'equazione $D(\rho) = 0$.

tratto a giustificare geometricamente, mediante l'introduzione delle coppie caratteristiche, la forma canonica delle sostituzioni lineari, dalle quali deduce poi lo stesso teorema di WEIERSTRASS.

PREDELLA considera l'omografia con spazi di punti uniti sovrapposti $S_h, S_{h_1}, S_{h_2} \dots$ come limite di una omografia dotata di spazi di punti uniti distinti con le medesime dimensioni; ma non tiene conto del modo di avvicinamento di codesti spazi, se non per quanto occorre a riconoscere l'esistenza di spazi invarianti $S_{h+h_1+1}, S_{h+h_1+h_2+2} \dots$, congiungenti gli spazi di punti uniti infinitamente vicini. Anzi si vede in PREDELLA la tendenza ad emanciparsi dalla considerazione di limite; il quale scopo viene raggiunto nella seconda delle memorie citate. PREDELLA considera, entro il dato S_n , lo S_{n-h} unito associato ad un S_h di punti uniti che (seguendo SEGRE) si costruisce come luogo dei centri di prospettività degli S_{h+1} omologhi passanti per S_h : Il detto S_{n-h} può segare lo S_h secondo un S_{h_1} , che risulta allora costituito di punti uniti doppi; a sua volta nello S_{n-h} viene subordinata una omografia che possiede un S_{n-h-h_1} associato allo S_{h_1} , il quale può segare lo S_{h_1} secondo un S_{h_2} di punti uniti triplo, ecc.

È facile riconoscere come la precedente definizione degli spazi di punti uniti multipli, equivalga alla nostra; giova piuttosto fermarsi un istante sul caso elementare di una omografia di S_r con il punto unito $(r+1)$ -plo, per vedere come nella teoria di PREDELLA riesca caratterizzata l'omografia surrogando i punti uniti infinitamente vicini (che ivi non vengono definiti) mediante la considerazione delle omografie subordinate nei successivi spazi invarianti: per es. nel piano, l'omografia riesce determinata dal punto triplo O , da una coppia generica di punti corrispondenti, e dalla proiettività parabolica sopra la retta unita per O ; quest'ultima proiettività parabolica sostituisce la conoscenza del terzo punto unito infinitamente vicino ad O , che potrà venire definito costruendo una conica invariante (1).

(1) Alla costruzione di un'omografia, A , di S_r dotata di un unico punto unito $(r+1)$ -plo, mediante le coppie caratteristiche di PREDELLA, si può collegare la trattazione delle omografie dovuta a PINCHERLE e svolta nel cap. IV del suo libro su « Le operazioni distributive » (1901). Il concetto nuovo qui introdotto si può tradurre geometricamente dicendo che PIN-

La scoperta delle curve razionali normali C_r , invarianti per una omografia di S_r con un punto unito $(r+1)$ -plo, si può riattaccare allo studio geometrico delle equazioni differenziali lineo-lineari contenuto nella memoria di CLEBSCH e GORDAN citata innanzi: si tratta di equazioni differenziali per cui ad ogni punto del piano viene associata la retta che lo unisce al punto corrispondente in una data omografia. Quando questa omografia ha un punto unito triplo, le curve integrali sono coniche osculanti nel punto unito triplo, e ciò porta che anche l'omografia data lasci invarianti le coniche di un fascio ⁽¹⁾.

Per $r > 2$ l'esistenza di curve C_r invarianti per un'omografia di S_r dotata di un punto $(r+1)$ -plo, fu osservata contemporaneamente da ENRIQUES e FANO, che alcuni anni or sono ebbero una conversazione su tale argomento: la signorina MARIA SOSTEGNI, nella sua tesi di laurea (non pubblicata) del 1914, ha dato del fatto una verifica algebrica diretta.

Le cose dette pongono nella propria luce la posizione da noi assunta nello sviluppo della teoria delle omografie, dove abbiamo voluto definire precisamente gli spazi di punti uniti infinitamente vicini ⁽²⁾.

Qui vogliamo esplicitamente rilevare la semplicità portata dalla circostanza che « nello studio delle omografie si hanno a considerare soltanto punti infinitamente vicini sopra rami lineari (almeno entro gli spazi invarianti che non ne

CHEPPE considera, accanto alla data omografia dello S_r , una omografia

$$E \equiv \begin{cases} y_0 = (a_{00} - \rho)x_0 + a_{01}x_1 + \dots \\ y_1 = a_{10}x_0 + (a_{11} - \rho)x_1 + \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

(simbolicamente rappresentata con l'operazione $E = A - \rho$), la quale, in corrispondenza alla radice $\rho = \bar{\rho}$ del determinante $D(\rho)$, è degenera e fa corrispondere ad uno spazio invariante S_k lo spazio invariante S_{k-1} in esso contenuto. Prendendo come vertici della piramide fondamentale un punto generico di S_r e i suoi trasformati mediante E, E^2, \dots, E^r , si ottiene un gruppo caratteristico, che porge la nostra forma canonica 8), (da cui segue per le più generali omografie monovalenti il quadro 9). La deduzione delle formule accennate si ottiene così nel modo più rapido.

⁽¹⁾ Le quali sono le traiettorie di un gruppo semplicemente infinito di omografie. Cfr. KLEIN-LIE. Math. Annalen. Bd. 4.

⁽²⁾ Cfr. ENRIQUES. Rend. dell'Acc. dei Lincei, 17 giugno 1917.

contengono infiniti) ». A prima vista questa affermazione potrebbe apparire paradossale, giacchè si può determinare una omografia limite in cui i punti uniti vengano a coincidere variando comunque su rami lineari o superlineari. Ma il paradosso si risolve già considerando ciò che accade nel piano: se due punti uniti B e C di un'omografia si avvicinano indefinitamente ad un punto unito fisso A , in direzioni diverse, oppure l'uno dopo l'altro su un ramo del second'ordine, l'omografia limite viene a possedere una retta di punti uniti per A .

Chiuderemo questa notizia ricordando che la teoria delle omografie, si estende anche al caso delle omografie degeneri escluse nelle nostre precedenti considerazioni: questo caso viene studiato da SEGRE e PREDELLA ed in particolar modo da DEL PRETE (¹).

(¹) Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1897.

INDICI

INDICE ALFABETICO

A

Abbassamento della classe - pag. 276, 617.
 vedi: classe, flessi, equivalenza - (cfr. vol. I, 259).

» del numero delle bitangenti - 277.

ABEL - 215.

Albero della singolarità - 385, 475, 497, 501.

Alternanza (legge di) - 440.

Analitica, vedi funzioni.

Analogia - 269.

ANGAS SCOTT - 530.

Apolare - 61, 63, 75.

APOLLONIO - 5, 269.

Apparenti e effettivi (punti doppi d'una curva gobba) - 138, 143, 147, 545.

» (punti doppi e tripli di una superficie di S_4 o S_5) - 584, 585.

Approssimanti (curve) - 38, 90, 110, 111, 118, 252, 276, 389 (cfr. vol. I, 67, 185-86).

» (omografie) - 415.

» (superficie) - 641.
 vedi: rami, parabole, iperparabole, falde.

ARCHIMEDE - 269.

Aritmetici (valori) - 366.

Armonia — relazione fra curve luogo e curve involuppo - 62, 63, 76.

Armonica: vedi cubica.

Armonico (coniugato) - pag. 11.

» pentaedro - 73.

» polilatero - 64-72.

» tacnodo - 188.

Armonizzante - 61.

ARONHOLD - 14, 194, 196, 199, 215, 218.

Asintoti - 242, 244, 246.

Asintotiche (curve) - 246.

» (proprietà) - 275.

Asintotico (coefficiente d'una derivata infinita) - 503.

Associato (sistema) - 62.

AUTONNE - 658.

B

Base per un fascio (punti infinitamente vicini) - pag. 167, 177, 179 (cfr. vol. I, 182-86).

» per un sistema lineare (punti e curve) - 30, 35, 162, 180, 401, 552, 582, 583.

BATTAGLINI - 61, 76, 681.

Becco - 529.

BECK - 286, 291, 297.

BELLAVITIS - 245.

BELTRAMI - 74.

BERNOULLI - 537.

BERTINI - 48, 135, 173, 177, 188, 410, 419, 540, 567, 575, 590, 682.

BERZOLARI - 73, 76, 290, 596.

BÉZOUT - 77, 79, 93, 96, 98, 101.

Bifolium - 259.

Bilatero (superficie) - 247.

Biplanare (punto) - 578, 609-10, 630, 636.

- Bitangenti (curve d'una rete) - pag. 178, 180.
- » (piani) - 142, 153, 586, 631.
 - » (rette) - 123, 142, 153, 277.
 - » di prima e seconda specie a una quartica - 257, 259.
- BOBILLIER - 4, 7.
- BOUQUET - 538.
- BRAGELOGNE - 245.
- BRIANCHON - 5, 69.
- BRILL - 54, 114, 116, 120, 135, 187, 535, 542, 549, 612.
- BRIOT - 538.
- BRUSOTTI - 265.
- C**
- Calcolo effettivo, vedi: sviluppi.
- » simbolico di SCHUBERT - pag. 312.
- Canoniche (equazioni), vedi: forme.
- CAPELLI - 81, 99, 210.
- CAPORALI - 103, 170, 180.
- Caratteri plueckeriani - 104-188; vedi: formule, cayleyana, hessiana, steineriana, curve gobbe, ecc..
- Caratteristica d'un'omografia - 672.
- » d'un ramo - 374-377.
- Caratteristiche (teoria delle) - 284.
- CARNOT - 272, 273.
- CASTELNUOVO - 171, 287, 316, 317.
- CAUCHY - 79, 278, 279, 281, 537, 538, 652.
- CAYLEY - 4, 9, 101, 106, 124, 135, 136, 141, 142, 144, 147, 149, 155, 186, 224, 228, 246, 282, 283, 288, 289, 290, 297, 330, 530, 538, 541, 551, 576, 587, 604, 626, 654, 681.
- Cayleyana - 187.
- » (d'una cubica) - 223, 225, 229.
- Centri armonici - 17.
- » critici (per la forma delle cubiche) - 255.
- Centro di una trasformazione quadratica - 553.
- CHASLES - 94, 103, 140, 208, 209, 245, 274, 282, 283.
- Chiuso (punto) - 604.
- CHISINI - 188, 201, 595, 617, 656.
- Cielo - 328, 329.
- Circuiti - vedi rami reali.
- Classe (d'una curva piana) - pag. 6, 104, 277, 421, 424 (cfr. vol. I, 59, 257).
- » (d'una curva gobba) - 142, 576.
 - » (d'una superficie) - 152, 606.
 - » (d'una superficie rigata) - 139.
- Classe d'un ramo - 330, 424, 567.
- Classificazione dei fasci di cubiche d'ugual modulo - 201.
- » delle congruenze del 1° ordine di rette - 308.
 - » delle cubiche piane reali 202, 241, 246.
 - » delle omografie iperspaziali - 658.
 - » delle quadriche gobbe - 144.
 - » delle quartiche piane reali - 241, 255.
- CLEBSCH - 4, 9, 14, 71, 72, 74, 124, 134, 184, 185, 187, 215, 307, 644, 682, 685.
- CLIFFORD - 76, 237.
- Close-point - 604.
- Coefficiente asintotico (di una derivata infinita) - 503, 506.
- Combinante - 32.
- Completa intersezione di due superficie - 94, 136, 149, 582.
- Comportamento vedi: polari, jacobiana ecc.
- Composizione e decomposizione di una singolarità - 381-82, 409, 412, 447, 452, 558; (vedi: infinitamente vicini, multiplo, riduzione.
- Computo di costanti - 71, 73.
- » » (principio del) - 307 (cfr. vol. I, 149).
- Condizione d'esistenza di una curva con data singolarità - 392, 427.
- » di proiettività di due cubiche piane 191, 211.
 - » di trasformabilità di due omografie - 680.
 - » per la coincidenza di due flessi - 52-53.
 - » perchè la hessiana o la jacobiana abbia punti doppi - 176, 181-183.

- Condizione perchè il polo appartenga alla polare - pag. 12, 19.
- » perchè una cubica ammetta infinite trasformazioni proiettive - 194, 202.
 - » perchè una forma sia somma di potenze - 64.
 - » perchè un punto appartenga a tutte le forme polari - 19, 26.
- Condizioni caratteristiche - 313.
- » di passaggio per punti multipli infinitamente vicini - 338, 342, 393, 425, 469, 483, 501, 605 (v. condizioni limiti).
 - » limiti (singolarità) - 106, 442, 476, 501.
 - » perchè una curva possessa δ punti doppi - 108.
- Configurazione dei flessi d'una cubica - 213, 231.
- Congruenza del 1° ordine di raggi - 308.
- » lineare di spazi - 667.
- Coniche; vedi: approssimanti.
- » armoniche - 69.
 - » polari - 49, 224, 228.
- Conico (punto) - 578, 629, 635, 649-50.
- Coniugati (punti su una cubica) - 223-24.
- » (poligoni) 65, 66; v. armonici.
- Cono circoscritto - 152.
- » osculatore (o tangente in un punto multiplo di superficie) - 577, 578.
- Contatti - 83, 342, 352.
- Conservazione del numero (principio della) - 282, 284, 317.
- Contingenti (principio delle relazioni) - 274.
- Continuità 119, 126, 251, 268, 275, 278; vedi: condizioni limiti, ecc.
- Contorno apparente - 152.
- Coordinata (di un punto libero infinitamente vicino) - 370.
- Coppie caratteristiche di numeri (singolarità) - 375.
- Coppie caratteristiche di punti (omografia) - 678.
- Correlative; vedi: figure primitive.
- Corrispondenza birazionale fra curve - pag. 127.
- Corrispondenze $[m, n]$ sulla retta; vedi: uniti.
- Costante caratteristica (d'un ramo cuspidale) - 87, 89, 113, 116.
- CÔTES - 8.
- Covarianti - 12, 185; vedi: jacobiana, hessiana, ecc.
- CRAMER - 77, 78, 97, 242, 244, 245, 516, 521, 522, 523, 529, 530, 536, 538, 543, 544.
- CREMONA - 4, 9, 15, 17, 25, 70, 74, 93, 99, 134, 153, 158, 170, 180, 184, 185, 186, 187, 210, 214, 230, 282, 283, 552.
- Cubica gobba - 148, 673.
- » piana (caratteri) - 105.
 - » » (equazioni canoniche o normali) - 194, 218.
 - » » (forma) - 202, 242, 246.
 - » » (invarianti) - 194.
 - » » (riemanniana) - 236.
 - » » (trasformazioni proiettive) - 191, 192, 211, 231.
 - » » armonica - 190, 192, 196, 200, 220, 233.
 - » » bipartita e unipartita - 208, 210, 252.
 - » » con nodo - 193, 195, 201, 206, 222, 250.
 - » » cuspidata - 194, 201, 223.
 - » » equiarmonica - 70, 190, 192, 195, 196, 199, 220.
- Cubica superficie 73, 155-57.
- » superficie rigata - 626.
- Curva, curve; vedi: approssimante, base, derivata, doppia, fondamentale, irriducibile, multipla, normale, razionale; bitangenti, cuspidate, osculatrici.
- Curva gobba (caratteri) - 136, 137, 289.
- » » (singolarità) 551, 562.
- Curva infinitesima - 600, 626.
- Curva iperspaziale - 135, 546, 575, 672.
- Curvatura logaritmica - 531.
- Curve, vedi curva.
- » cuspidate di una rete - 179-80.
 - » di terza classe - 238.

- Curve di KLEIN-LIE - pag. 685.
 » infinitamente vicine - 167, 605,
 Cuspidale (curva) - 139, 141, 580, 587.
 604.
 » (falda) - 580.
 » (punto) - 578; 580, 598-99,
 614, 623-29.
 Cuspide (curve d'una rete) 179-80.
 Cuspide - 53, 104, 105, 107, 115, 167-69,
 178, 180, 201, 223.
 » (forma) - 208, 529.
 » di specie superiore - 341.

D

- DARBOUX - pag. 69.
 Decomposizione di una singolarità;
 vedi: composizione.
 Degenerazione o spezzamento (metodo
 di) 93, 99, 117-120, 253,
 277, 285, 289, 291, 295.
 » o svanimento - 617 (vedi:
 indeterminazione).
 DE-GUA - 79, 535, 536, 543.
 DE JONQUIÈRES - 4, 9, 17, 271, 274,
 278, 282, 283, 285, 286, 287, 291,
 307, 582.
 DE LA HIRE - 3, 8.
 DE L'HÔPITAL - 529, 536.
 DEL PEZZO - 185, 576, 651, 655, 656, 657.
 DEL PRETE - 686.
 DE PAOLIS - 69, 71, 73, 76, 655.
 Derivata (curva di PONCELET) - 94.
 Derivata infinita - 503.
 Derivate delle funzioni composte (for-
 mule) - 459, 477.
 DESARGUES - 3, 5, 8, 242, 270, 275.
 DESCARTES - 242.
 Determinante funzionale - 185.
 » jacobiano - 31, 45.
 Diagramma delle partizioni triango-
 lari - 483, 489, 511, 512, 522.
 » di NEWTON - 532.
 » » esteso alle su-
 perficie - 658.
 Dialitico (metodo per formazione del
 risultante) - 79.
 Diametrali curve - 242, 243.
 Diametri - 6.

- Differenziale (senso, proprietà) - pag. 6,
 242, 244, 421.
 Diramazione (punti critici di) - 280,
 327, 444, 620, 621.
 Direzioni singolari per il tacnodo -
 602, 603.
 Discriminante - 166 (cfr. vol. 1, 99).
 » (di una cubica) 196, 210.
 » (di una funzione alge-
 brica) - 539 (cfr. vol. I,
 289).
 Dispari (punto biplanare di tipo) -
 610.
 Divisori elementari - 679.
 Divisioni successive (metodo per la
 formazione del risultante)
 - 78.
 » successive (metodo per la
 ricerca dei punti multipli
 d'un ramo di curva) - 361,
 455, 570.
 DÖHLEMANN - 187.
 Doppia (curva) 280, 620, 621.
 Doppia per una superficie (curva) -
 140, 141, 578, 657;
 vedi: nodale, cuspidale (punto
 e curva), multipla.
 Doppie tangenti, vedi: bitangenti.
 Doppio per una curva (punto) 49, 138,
 157, 175-76, 180, 201, 341, 550
 vedi: nodo, cuspide, tacnodo,
 equivalenti, ecc.
 » per una superficie (punto) -
 156-77, 578, 597, 598, 600-04,
 609-12, 623-28, 629-32, 635, 638,
 649-50, 654.
 Dualità (trasformazione della singo-
 larità d'un ramo di curva) - 424.
 » (trasformazione delle singola-
 rità d'una superficie) - 629,
 632.
 DUMAS - 658.

E

- Effettiva, vedi: molteplicità.
 Effettivi, vedi: apparenti.
 Elemento di funzione, curva o super-
 ficie, vedi: ramo, falda.

- Elementari singolarità (di una curva) (cfr. vol. I, pag. 262); vedi:
 equivalenti plueckeriani.
 » singolarità rispetto a trasformazioni (di una curva) 417, 500.
 » » (di una superficie) - 585, 655, 657.
- Eliminazione (teoria generale) - 94.
- ENRIQUES - 135, 136, 139, 275, 297, 542, 590, 626, 643, 645, 657, 666, 685.
- Equazione dei nove flessi (risolubilità per radicali) - 215.
 » normale (vedi forme).
- Equazioni funzionali nella geometria numerativa - 288, 290.
- Equianarmonica, vedi: cubica.
- Equivalenti plueckeriani - 106, 122, 425.
- Equivalenza di gruppi di coefficienti in sviluppi di PUISEUX - 354.
- Equivalenza di una curva comune a tre superficie - 311, 612.
 » di uno spazio di punti uniti di un'omografia - 664-665.
 » nel gruppo jacobiano di un fascio: di una curva - 174.
 » » : di un punto base - 162, 164.
 » » : di un punto multiplo - 161.
 » negativa - 309.
- Esponenti caratteristici - 375.
- Espressione di una forma come somma di potenze - 61.
- Essenziali (punti della curva multipla d'una superficie) - 592.
- EUCLIDE - 78 - 269.
- ECLERO - 12, 33, 77, 78, 79, 97, 161, 244, 245, 411, 536.
- F**
- Falde d'una superficie nell'intorno d'un punto - pag. 578, 580, 634, 636, 640.
 » » (loro approssimazione) - 638, 640, 641, 643.
- Falde (rappresentazione analitica) - pag. 645, 646, 648, 651.
- Falde parziali, 639.
- FANO - 685.
- Fascio - 47, 157, 173, 176, 178, 179, 183, 195, 217 (vedi base).
- Fattore determinato di una forma evanescente - 618-622.
 » identicamente nullo d'un'equazione limite - 618.
- FERMAT - 79.
- Figure primitive e correlative (metodo di CARNOT) - 272.
- Flessi di una cubica - 105, 213, 216, 221, 236, 250 (cfr. vol. I, 272-76).
 » d'una curva - 49, 51, 109, 286 (cfr. vol. I, 263).
 » » (assorbiti in un punto multiplo) 109, 278.
 » di un ramo impari - 248.
 » reali di una quartica - 259.
- Fondamentale (forma di spazi) - 313.
 » d'un sistema lineare (curva) - 180.
 » per una trasformazione (punto, curva o superficie) - 401, 402, 407, 553, 554, 561, 583.
- Forma delle curve - 242 (vedi: cubica, quartica, rami reali).
 » di spazi (vedi: fondamentale).
- Forme canoniche o normali dell'equazione di una curva - 67, 199, 218, 230-32, 237, 242, 243, 246 (cfr. vol. I, 148).
 » di un'omografia - 659, 677-680.
 » polari (vedi polari).
- Formule di CAYLEY - 141-144.
 » di PLÜCKER - 122, 286, 419 (cfr. vol. I, 259, 266).
 » di SALMON - 150, 614).
- FOURET - 100, 103.
- Frazione continua (determinazione dei punti multipli successivi d'un ramo) - 367.
- Fronteggiati (punti) - 380, 381. vedi: prossimi.
- Funzioni analitiche di due variabili - 635.

Funzioni simmetriche (metodo per la formazione del resultante)
- pag. 78.

FUOCHI - 308.

G

Generatrici doppie (di una rigata) - pag. 141.

Genere (d'una curva piana) - 122, 130, 412, 417.

» d'una curva gobba - 138, 295.

Genere d'un ramo - 376.

Generico (stato generale) - 272.

Genesis curvarum per umbras - 208, 242.

Geometria numerativa - 275-317.

GERBALDI - 187.

GERGONNE - 5; 279.

GIAMBELLI - 316, 317.

Gobba (vedi curva).

GORDAN - 76, 134, 188, 682, 685.

GOURSAT - 267.

Grado di una rete - 129.

» di una rigata (139).

GRASSMANN - 9.

Gruppi polari sopra la retta - 10, 15.

» di trasformazioni proiettive di una cubica - 232, 236.

Gruppo caratteristico di un'omografia - 678.

» jacobiano di un fascio - 157-174.

Gruppo tetraedrico - 236.

GUCCIA - 187.

H

HALPHEN - pag. 84, 100, 103, 147, 313, 329, 330, 375, 378, 421, 535, 539, 540, 541, 542, 567, 575, 576, 587, 648, 649, 651, 657.

HAMBURGER - 446, 452, 455, 539, 542, 543, 544.

HARNACK - 197, 255, 260, 264, 265.

HENSEL - 652, 653, 657.

HERMITE - 108, 228.

HESSE - 9, 65, 123, 185, 187, 188, 214, 215, 218, 229, 231.

Hessiana - 49, 54, 57, 113, 116, 183 (cfr. vol. I, 99).

Hessiana (d'una cubica) - pag. 200, 217, 227.

» (d'una superficie) - 151.

Hessiano di una forma binaria - 22, 23 (cfr. vol. I, 17).

HILBERT - 265, 317.

HIRST - 682.

HUDEDE - 79.

K

KANTOR S. - pag. 201.

KEPLERO - 269, 271.

KLEIN - 231, 237, 265, 266, 540, 685.

KOBB - 651, 657.

KOHN - 317, 318.

KÖNIGSBERGER - 539.

KÖTTER - 187.

KRONECKER - 539, 540.

KUMMER - 308.

I

Immaginari - pag. 271, 274, 281.

Impari (ramo) - 203, 245, 247.

Incidenti (piani, rette) - 297, 314, 315.

Incrocio di curve multiple (ordinario) 589-91, 604.

» » (generalizzato) - 593.

Indeterminazione del gruppo jacobiano di un fascio - 171-173.

» della forma hessiana - 23, 59, 188.

» della forma jacobiana - 47, 185.

» della steineriana - 184.

» delle polari - 27, 63.

» d'un involuppo - 280, 617.

vedi: degenerazione.

Indipendenza delle condizioni di passaggio d'una curva per punti - 396, 474.

Infinita (derivata) - 501, 531, 537.

Infinitamente vicine (curve) - 605.

Infinitamente vicini (punti) - pag. 50, 153, 276, 336, 341, 345, 361, 374, 381, 404, 425, 442, 469, 483, 501, 551, 562, 595 - (vedi: base).
 » vicini (spazi) - 666, 669.
 Infinitesima curva - 600, 626.
 » curvatura - 531.
 Infinito (numero delle soluzioni d'un problema) - 307.
 » (retta all') - 5, 34, 244-46, 276.
 » (singolarità all') 242, 244, 245.
 Integrale (senso, concezione) - 6, 242, 244, 266-67.
 Intersezione di due superficie; vedi: completa.
 Intersezioni di curve e superficie -
 » 98-101, 596.
 » di due curve - 77, 82-83, 85-87, 93, 94, 337, 388, 404, 538.
 » di due rami - 88-90, 345, 360, 378.
 » di varietà iperspaziali - 101, 102.
 » (di tre superficie) - 96, 312, 596, 612.
 » (di una curva con la hesiana) - 49, 109-122.
 Intorni successivi d'un punto - 340, 350, 364, 382, 386, 404, 558, 570, 587.
 Irreducibile (curva) - 124, 127, 137, 260 (vedi: degenerazione, riducibile).
 » (elemento di funzione) - 328, 329, 634, 635, 638-39.
 Irreducibilità e riducibilità - 137, 244, 300, 321, 635, 638-39.
 Invariante di CLEBSCH di una quartica - 71.
 » di ZEUTHEN-SEGRE - 171.
 Invarianti della cubica - 190, 194-201, 211, 221.
 Invarianti di un'omografia - 659, 680.
 Invarianza del genere - 130, 420.
 Inviluppo (curva), vedi: classe, cayleyana, tangenti.
 » (superficie) - 139, 151, 629.

Inviluppo d'una curva doppia - 280, pag. 619.
 Iperparabole osculatrici - 90, 91, 373, 382 (cfr. vol. I, 77, 83, 84).
 Iperspaziale, vedi: curva, superficie, omografia.
 Isolato (punto doppio d'una curva reale) - 207, 266.
 Isolato (punto multiplo fuori della curva multipla d'una superficie) 577, 597, 608, 638, 639, 640, 642.

J

JACOBI - pag. 79, 124, 185.
 Jacobiana di una rete - 31, 45, 175, 186.
 » di una rete di coniche - 37.
 Jacobiano di due curve - 159.
 JOACHIMSTHAL - 13.
 JORDAN - 682.

L

Lacunare (punto) pag. 496.
 LAGRANGE - 79, 530, 537, 543.
 LAMÈ - 30, 48.
 LAURENT - 537, 538.
 Legge di alternanza - 440.
 » di quasi permutabilità - 463.
 LEIBNIZ - 78, 270.
 Lemma di PONCELET - 24.
 Lemmi di riduzione - 110, 111.
 LE PAIGE - 76.
 Le VASSEUR - 78.
 LEVI A. - 188.
 LEVI B. - 576, 651, 652, 656.
 Libero (punto) - vedi satellite.
 LINDEMANN 124, 134, 184, 187, 230.
 LORIA - 682.
 LÜROTH - 72.

M

MAC LAURIN - pag. 3, 8, 77, 204, 213, 215, 229, 271, 395, 537, 653.
 Massima separazione dei rami (principio di) - 432.

- Massimo comun divisore - pag. 78, 359, 369, 458, 570.
- Medie armoniche (centro delle) - 17.
- Metodo delle proiezioni - 276, 545, 584.
- » di degenerazione (vedi: degenerazione).
 - » di HAMBURGER-WEIERSTRASS - 452).
 - » di NEWTON-CRAMER - 516.
 - » di piccola variazione - 253, 258, 262.
- Metrica (classificazione di curve) - 202-208, 242-246.
- MEYER - 73, 156.
- MINKOWSKY - 544.
- MÖBIUS - 204, 209, 245, 247, 248, 250.
- Modulo di una cubica - 189; vedi: invarianti.
- MONGE - 3, 5, 6, 95, 269, 271, 272, 274, 279.
- Monoidale (trasformazione) - 581.
- » (rappresentazione d'una curva gobba) - 101.
- Monoide - 101.
- Monovalente (omografia) - 671-672.
- Molteplicità delle soluzioni d'un problema - 82, 83, 303.
- » di un punto per un gruppo o curva (determinazione di) - 20, 23, 26-28, 35-45, 53, 54, 57-58, 82, 83, 161, 165. (vedi: intersezioni).
 - » effettive e virtuali - 340, 392, 425, 509.
- Multiplo (curva) - 57, 280, 617.
- » per una superficie (curva) - 577, 605.
- Multiplo per una curva (punto) - 106, 109, 121, 336, 381, 408, 546, 551, 576 (vedi: molteplicità, infinitamente vicini).
- » per una omografia (punto unito) - 663-64, 675, 683-84.
 - » per una superficie (punto) - 577, 587, 595, 608, 633, 654.
- NEWTON - pag. 8, 78, 79, 205, 206, 208, 209, 242, 243, 244, 245, 516, 521, 522, 523, 524, 527, 529, 535, 536, 538, 544, 658.
- Nodale (curva) - 140, 141, 142, 578, 585, 586, 614-15, 626, 636, 654, 655, 657; vedi: cuspidale (punto e curva).
- Nodate e binodate (curve di fascio e rete) - 158, 170, 179-80.
- Nodo - 53, 104, 109, 113, 193, 201, 222, 550 (vedi equivalenti).
- » (forma) - 206, 251-53.
- Normale (curva razionale) - 672-674.
- » (serie di PUISEUX) - 488, 492
 - vedi: forme.
- NÖTHER - 103, 135, 147, 150, 188, 326, 330, 375, 409, 417, 418, 447, 539, 540, 541, 542, 546, 550, 576, 654, 655.
- Numeri caratteristici - 375.
-
- Occhiello - pag. 250.
- Ogivale - 532.
- Omaloideo (sistema) - 582.
- Omografie (teoria generale) - 658.
- » cicliche - 232, 236.
 - » definite da spazi infinitamente vicini - 667.
 - » degeneri - 685.
 - » inerenti alle cubiche - 192-194, 202, 231.
 - » trasformanti curve razionali normali - 673.
- Omologia - 213, 232-234.
- Omologica (trasformazione) - 133.
- Operatori - 11, 459, 478.
- Ordinario (incrocio di due curve multiple) - 589.
- » (punto cuspidale d'una superficie) - 623.
 - » (punto multiplo di una curva) - 87-88, 109, 337, 382-83.
 - » (ramo) - 89, 377, 571-72.
- Ordine di contatto di due rami (vedi intersezioni).
- » di prossimità - 641.
 - » di una curva gobba - 137.
- N
- NETTO - pag. 78.

Ordine di una falda - pag. 635.
 » di una varietà - 102.
 » di un ciclo - 328, 330.
 » di un ramo - 330.
 Osnodo - 345.
 Osculatori a una curva gobba (piani)
 139, 566.
 » a una superficie (piani e
 [coni] - 577, 578, 629, 633,
 638.
 Osculatrici (curve) - 90-91 (vedi: pa-
 rabole e iperparabole).
 » (curve d'una rete) - 179-80.
 Ovale - 247, 259.

P

PAINLEVÉ - pag. 267.
 PANNELLI - 576.
 PAPPO - 5.
 Parabole cubiche - 205-208.
 » osculatrici - 85, 90, 91, 337,
 382 - (cfr. vol. I, 68, 69, 75,
 83).
 Parallelogramma di NEWTON - 522,
 535.
 Pari (linee, rami) 203, 245-47.
 » (punto biplanare di tipo) - 610.
 Partizioni triangolari (diagramma
 delle) - 483.
 PASCAL - 270.
 PASCH - 188.
 Passaggio, vedi: polari, hessiana, ja-
 cobiana, condizioni.
 Pentaedro armonico di SYLVESTER -
 73.
 Pentalateri armonici ad una quartica
 - 71.
 Permutabilità delle operazioni polari
 - 13, 17.
 Piano, piani, vedi: bitangenti, inci-
 denti, osculatori, stazionari, sin-
 golari, tangenti, tritangenti.
 PICARD - 646.
 PICQUET - 290.
 PIERI - 103, 316, 550.
 PINCHERLE - 45, 203, 684.
 Pinch-point, vedi: cuspidale.
 Pippiana - 186.

PLÜCKER - pag. 4, 7, 8, 9, 13, 14,
 25, 28, 49, 122, 123, 124, 141, 142,
 150, 151, 152, 208, 213, 215, 216,
 245, 246, 254, 255, 258, 277, 278,
 282, 286, 291, 307, 419, 425, 446,
 530, 543.
 POINCARÉ - 98, 540, 550.
 Points-pince, v. cuspidale.
 POISSON - 97.
 Polari - 6, 11, 14, 16, 18, 24, 61.
 » (comportamento in contatti e
 punti multipli) - 25, 27, 410,
 441, 606 (v. cayleyana, hessiana,
 steineriana ecc.).
 » armoniche (rette) - 213, 229.
 Poligoni e polilateri, v. armonici,
 coniugati.
 Polo - 10.
 PONCELET - 3, 5, 6, 7, 8, 17, 24, 69, 93,
 94, 99, 100, 103, 122, 152, 215, 244,
 247, 254, 269, 272, 273, 274, 275,
 276, 277, 279, 281, 282.
 PREDELLA - 683, 684, 686.
 Principali (tangenti a curva in un
 punto multiplo) - 27, 29,
 54 (cfr. Vol. I, 72, 81).
 » (tangenti di superficie) -
 152-53.
 Principio della conservazione del nu-
 mero di SCHUBERT - 284,
 317, 321.
 » della massima separazione
 dei rami - 398, 432.
 » delle relazioni contingenti
 di CHASLES - 274.
 » di continuità di PONCELET
 - 93, 275, 278 (vedi: con-
 tinuità).
 » di corrispondenza - 94, 100
 (cfr. Vol. I, 157).
 » di corrispondenza genera-
 lizzato - 103.
 » di PLÜCKER-CLEBSCH (com-
 puto delle costanti) - 71, 307
 (cfr. Vol. I, 149).
 » di scaricamento (singolarità)
 - 431, 432.
 » di scorrimento (singolarità)
 - 428, 430.

- Prodotto simbolico (di condizioni caratteristiche) - pag. 314.
- Proiettività; vedi: condizione, cubiche, omografie.
- Proiezioni (metodo di PONCELET) - 276.
- » di curve e superficie gobbe - 141, 301, 546, 549, 550, 551, 558, 576, 585.
- Prossimi (punti) - 381, 389, 427, 431, 510, 565, 641.
- PUISEUX - 325, 326, 327, 329, 375, 446, 447, 450, 451, 455, 478, 516, 521, 522, 529, 537, 539, 551, 647, 652.
- Punto, punti, v.: apparenti coniugati, cuspidi, doppio, di diramazione, multiplo, nodo, oscnodo, tacnodo; infinitamente vicini, prossimi, satelliti;
- biplanare, chiuso, conico, cuspidale, isolato, singolare su curva multipla, tacnodo di superficie, triplo, uniplanare;
- base, singolari per fascio o rete;
- fondamentale, uniti.
- Q**
- Quadrifolium - pag. 259.
- Quadrilateri armonici ad una cubica - 70.
- Quadriseccanti di una curva gobba - 303.
- Quartiche gobbe (di prima e seconda specie) - 144-47, 148, 149.
- » piane (forma) - 245-46, 255. (per la teoria cfr. Vol. I, - 302, 312).
- Quasi permutabilità di forme differenziali operatori - 461, 478.
- Quasi-triangolo - 490; v. diagramma.
- R**
- Radici di un sistema di equazioni - pag. 101.
- Rami o elementi di curva 91, 328-31 (cfr. Vol. I. - 75, 83, 341).
- Rami (caratteristica e schema grafico) - 250-51, pag. 376, 379, 564-65. (vedi: albero).
- » (esempi) - 351, 379, 383-85, 433-34, 511, 514, 524-28, 571-75.
- » (punti multipli successivi) - 369, 435, 570.
- » (rappresentazione analitica) - 330, 333, 335, 566.
- » (separazione, calcolo degli sviluppi) 332, 343, 397, 452, 516-24; v. intersezioni, prossimi, satelliti ecc.
- » lineari - 331, 336.
- » di second'ordine - 345.
- » reali - 203, 209, 244-45, 247-53, 255, 259, 260, 265, 266; v. cubica e quartica (forma).
- » reali nell'intorno d'un punto - 529, 533-34, 536.
- Rango di una curva gobba - 142.
- » di un ramo - 372.
- Razionale (curva) - 134, 284-85, 291, 672 (cfr. Vol. I, 282-83).
- » (superficie) - 643.
- Realità (questioni di) - 210-11, 265-66; v. cubica e quartica (forma), rami reali; bitangenti di prima e seconda specie, flessi.
- Reciprocità (legge di) 13, 16, 25.
- Regola di HALPHEN - 84.
- » di ZEUTHEN - 85, 304 (cfr. Vol. I, 161).
- Relazione di KLEIN (fra i caratteri di una curva reale) - 266.
- Resultante - 78-81 (cfr. Vol. I, 227).
- » (di tre equazioni) - 97; vedi: intersezioni.
- Rete - 29, 31, 35, 37, 174, 181, 228.
- Retta, rette, v.: bitangenti, flessi, fondamentale, incidenti, infinito, tangenti, trisecanti, quadriseccanti.
- Rette determinatrici o separatrici (diagramma) - 490, 523.
- » di MAC-LAURIN - 213.
- » di una superficie cubica - 155.
- REYE - 65, 74, 76, 682.
- Riducibile (curva) - 57, 277, 295; vedi: degenerazione.

Riducibilità v. irreducibilità.
 Riduzione delle singolarità con trasformazioni - pag. 404, 409, 417, 419, 539, 550, 558, 560, 562, 655-57.
 RIEMANN - 134, 137, 236, 264, 413, 539, 541, 620.
 Rigate (gobbe) - 136, 297-99; vedi: sviluppabili.
 » cubiche di CAYLEY - 626.
 Risoluzione nel campo reale di una equazione algebrica $f(xy) = 0$ - 266.
 RODEMBERG - 76.
 ROHN - 610, 654.
 ROLLE - 203.
 ROSANES - 65, 69, 76.

S

SALMON - pag. 4, 99, 103, 124, 144, 150, 153, 155, 156, 157, 189, 196, 375, 535, 539, 540, 629, 654.
 Satelliti (punti) - 350, 366, 372, 376, 386-87, 483, 486, 495, 496-97, 498, 502, 509, 511-16, 562.
 Scaricamento v. principio.
 Schema grafico d'un ramo - 351, 379, 564-65, v. albero.
 SCHIAPPARELLI - 551.
 Schiera v. sigizetica.
 SCHMIDT - 97.
 SCHUBERT - 282, 283, 284, 312, 313, 315, 316.
 Scorrimento v. principio.
 SCOTT - 542.
 Segmentarie (relazioni) - 272, 281.
 SEGRE - 135, 171, 188, 287, 426, 541, 550, 539, 590, 603, 610, 651, 655, 656, 661, 682, 683, 686.
 Separazione dei rami - 331, 397-98, 432, v. rami, sviluppi.
 Separatrici (rette) - 490.
 Serie v. sviluppi.
 SERVOIS - 5.
 SEVERI - 297, 317, 318, 321, 656.
 Sestatico (punto) 288-89 (cfr. Vol. I, 277).
 Simbolo caratteristico, vedi: caratteristica.

Simbolo di SCHUBERT - pag. 313-15.
 Simbolo operatorio (derivazione di funzioni composte) 459-478.
 » operatorio (polari) - 11.
 SIMART - 540.
 SIMSON - 270.
 Singolari (curve), vedi: fascio, rete; bitangenti, cuspidate, nodate, osculatrici;
 cuspidale, doppia, multipla.
 » (piani), v. tangenziali (singolarità).
 » (tangenti), vedi: bitangenti, cuspidi, flessi, principali, tacnodo di superficie.
 » per fascio o rete (punti), vedi: jacobiano, jacobiana, steineriana ecc.
 » sopra la curva multipla (punti) - 587, v. cuspidale (punto), incrocio, tacnodo.
 Singolarità (storia) - 535, 575, 651-52, 654; v. multipla, multiplo, composizione, riduzione; rami, sviluppi; infinitamente vicini; albero, condizioni, diagramma, schema.
 » ordinarie, tangenziali ecc. vedi: ordinario, tangenziale ecc.
 Sistema lineare - 62, 64, 67, 69, 418-19 (cfr. Vol. I, 90); vedi: condizioni, fascio, rete.
 Sizigetica (schiera) - 229.
 Sizigetico (fascio) - 214, 217.
 SMITH - 69, 375, 530, 539, 541, 542.
 Sostegni - 684.
 Spazi di punti uniti, v. uniti.
 » secanti (problema degli) - 312.
 Specie di una singolarità - 337, 347, 372, 382, 409, 529, 536.
 » di punti satelliti (rami gobbi), vedi: satelliti.
 Spigolo di regresso - 139.
 STAUDT - 5, 209, 238, 245, 274.
 Stato generale v. generico.
 STEINER - 4, 9, 69, 74, 185, 186, 282, 590.

- Steineriana - pag. 49, 183-84, 186.
 Stazionarie tangenti, vedi: fiessi.
 Stazionari piani (a contatto quadri-
 punto con curva gobba) - 142.
 Stazionari piani per una superficie
 - 153, 155, 586.
 STEVIN - 78.
 STOLZ - 469, 544.
 STUDY - 317, 318, 321.
 Superficie, vedi: classe, formule di
 SALMON, singolarità; cu-
 bica razionale, rigata, svi-
 lupabile.
 » di RIEMANN - 236 (Cfr.
 Vol. I, 335, 359, 381).
 » di SEGRE (intersezione di
 due quadriche di S_1) - 589.
 » di VERONESE - 590.
 » romana di STEINER - 590.
 Svanimento di un' equazione - 617,
 vedi: indeterminazione, abbassa-
 mento.
 Sviluppabile - 139, 151, v. bitangenti,
 stazionari.
 Sviluppi in serie (di HALPHEN) - 587,
 648-49, 651.
 » (di HENSEL) - 652-53, vedi:
 falde.
 » (di MAC-LAURIN e TAYLOR)
 - 5, 36-38, 646, 651.
 » (di PUISEUX) - 329-31, 335,
 450, 538-39, 551, v. rami.
 SYLVESTER - 72, 73, 74, 75, 76, 79, 81,
 186, 210, 681.

T

- Tacnodo (curve) - pag. 188, 342, 344,
 vedi: oscnodo.
 » di superficie - 588, 600, 602-3,
 612, 627, 640, vedi: chiuso
 (punto).
 Tangenti - 25-30, 127, 139, 316, vedi:
 classe, singolari.
 » (piani) - 139, 151, vedi: classe,
 formule di SALMON.
 Tangenziale (di un punto) - 227, 249
 (cfr. vol. I, 263).

- Tangenziale (singolarità) - pag. 104-5,
 424, 629-34.
 TANTURRI - 317.
 TARDY - 469, 544.
 TAYLOR - 13, 269, 455, 536, 646, 648,
 651, 652.
 Teorema di BERTINI - 173, 419 (cfr.
 vol. I, 181).
 » di BÉZOUT - 83, 93, 96 (cfr.
 vol. I, 224, 227), vedi: inter-
 sezioni (388).
 » di HALPHEN - 587.
 » di HARNACK - 260, 264
 » di HERMITE - 228.
 » di HESSE - 218.
 » di KUMMER - 308.
 » di MAC-LAURIN - 213.
 » di NÖTHER - 417.
 » di PUISEUX - 450.

- Termini caratteristici - 375.
 Ternario (procedimento per la ricerca
 del m. c. d.) - 568.
 Trasformazione cremoniana - 407, 447.
 » di JONQUIÈRES - 582.
 » monoidale - 281.
 » omologica - 133.
 » proiettiva, vedi: pro-
 iettività.
 » quadratica - 401, 551-
 57, 560 (cfr. vol. I,
 106-8), vedi: riduzione.
 Triangoli di condizione - 475, 495.
 Trifolium - 259.
 Trilateri armonici - 67, 70.
 » inflessionali - 214.

- Trilatero hessiano - 233.
 Triplo per una superficie (punto) -
 585, 589-90, 657.
 Trisecanti di una curva gobba - 289,
 300, 316.
 » di una superficie di S_1
 (piani) - 585.
 » » (rette) - 591.

U

- Unifolium - pag. 259.
 Unilatero (superficie) - 247 (cfr. vol. I,
 364, 378-80).

Uniplanare (punto) - pag. 578, 597, 632, Virtuale, vedi: molteplicità.
vedi: cuspidale, tacnodo.

Uniti (punti di coincidenza per una corrispondenza sulla retta) - 105, 219-20, 226, 249, 251, 285, 304-5, 546 (cfr. vol. I, 157).

» (punti per uu'omografia) - 660, 671; vedi: multiplo.

V

Variazione (metodo di piccola) - pag. 246.

Varignon - 270.

VERONESE - 135, 549, 590.

W

WARING - pag. 7.

WEIERSTRASS - 329, 452, 455, 539, 680, 682, 683.

WÖLFING - 658.

Z

ZEUTHEN - pag. 85, 103, 171, 246, 257, 259, 265, 282, 283, 291, 304, 305, 317, 541, 576, 654.

BIBLIOTECA BIANCHI 121

INDICE DEI CAPITOLI

LIBRO TERZO

La teoria elementare delle curve piane basata sulla polarità

Letteratura Pag. 3

CAPITOLO I

Polarità e curve covarianti.

1. Introduzione storica	Pag.	5
2. Espressione differenziale delle forme polari	»	10
3. Gruppi polari sopra la retta: espressione delle forme polari per le radici di $f(x)=0$	»	15
4. Curve polari	»	23
5. Jacobiana di una rete	»	31
6. Nota sull'annullamento identico del determinante jacobiano	»	45
7. Hessiana di una curva	»	49
8. Curve aventi una parte comune colla hessiana: indeterminazione della hessiana.	»	57
9. Nota sulla teoria delle forme polari generalizzata e sull'espressione di una forma d'ordine n come somma di potenze n -me.	»	61
10. Notizia storica e complementi: pentaedro di Sylvester della superficie cubica.	»	72

CAPITOLO II

Il problema delle intersezioni e i caratteri plueckeriani delle curve.

11. Intersezioni di due curve: metodi di formazione della risultante	Pag.	77
12. Intersezioni assorbite da contatti e punti multipli	»	83

13. Complemento alla storia del teorema di Bézout: dimostrazioni geometriche	Pag. 93
14. Nota sulla teoria generale della eliminazione e sulle intersezioni delle varietà algebriche.	» 94
15. Classe d'una curva: abbassamento prodotto da un punto doppio o multiplo	» 104
16. Numero dei flessi d'una curva: abbassamento prodotto da un punto doppio o multiplo	» 109
17. Le formule di Plücker e l'equazione del genere	» 122
18. Nota sui caratteri delle curve gobbe: formule di Cayley	» 135
19. Nota su alcuni caratteri delle superficie: formule di Salmon	» 150
20. Punti doppi delle curve di un fascio	» 157
21. Curve singolari di una rete	» 174
22. Caratteri della hessiana e della steineriana	» 180
23. Notizia storica sulle curve covarianti	» 185

CAPITOLO III

La cubica piana.

24. Il teorema di Salmon e la condizione di proiettività fra due cubiche	Pag. 189
25. Invarianti di Aronhold e equazione normale.	» 194
26. Forma delle cubiche reali.	» 202
27. Configurazione dei flessi.	» 213
28. Fascio sizigetico	» 217
29. La cayleyana e le tre involuzioni di punti coniugati sopra una cubica.	» 223
30. La configurazione delle polari armoniche e la schiera sizigetica delle cayleyane	» 229
31. Trasformazioni proiettive delle cubiche e della configurazione dei flessi.	» 231
32. Nota sulla superficie di Riemann relativa a una cubica	» 236

CAPITOLO IV

Appendice: realtà e continuità; geometria numerativa.

33. Introduzione: cenno storico sulla classificazione delle cubiche e delle quartiche	Pag. 241
34. La classificazione proiettiva delle cubiche e il metodo di piccola variazione	» 246
35. Cenno sulla forma delle quartiche:	» 255
36. Il teorema di Harnack e altre proprietà generali concernenti la forma delle curve	» 260
37. Nota sulla rappresentazione analitica dei rami reali.	» 266
38. Sulla storia del principio di continuità.	» 268
39. Il principio di Poncelet esaminato nelle sue applicazioni.	» 275
40. Analisi critica del principio di continuità di Poncelet.	» 278
41. Sviluppo della geometria numerativa	» 282
42. Appunti sulla teoria delle caratteristiche.	» 284
43. Curve gobbe: trisecanti e quadrisecanti	» 288

44. Nota sulla molteplicità delle soluzioni nelle determinazioni di numero	Pag. 303
45. Caso in cui il numero delle soluzioni del problema diventa infinito: formule d'equivalenza	» 307
46. Cenno sul problema degli spazi secanti e sul calcolo simbolico dello Schubert.	» 312
47. Il principio di conservazione del numero e la critica contemporanea.	» 317

LIBRO QUARTO

Le singolarità delle curve algebriche

CAPITOLO I

Le singolarità e gli sviluppi in serie di Puiseux.

1. Sviluppi di Puiseux: separazione dei rami	Pag. 327
2. Nota sulla rappresentazione parametrica dei rami e sulle trasformazioni puntuali	» 332
3. Singolarità con rami lineari: punti multipli infinitamente vicini.	» 336
4. Punti doppi successivi: tacnodo e cuspidi di seconda specie	» 341
5. Rami di second'ordine	» 345
6. Rami superlineari: loro intersezioni.	» 352
7. Punti multipli successivi appartenenti ad un ramo superlineare	» 361
8. Caratteristica di un ramo: schema grafico.	» 374
9. Analisi di una singolarità qualunque: punti multipli infinitamente vicini su rami non lineari.	» 381
10. Intersezioni di due curve	» 388
11. Punti prossimi: condizioni di esistenza d'una curva con date molteplicità effettive	» 389
12. Costruzione di una curva con punti multipli assegnati: molteplicità virtuali	» 392

CAPITOLO II

Le singolarità rispetto alle trasformazioni quadratiche.

13. Riduzione delle singolarità mediante trasformazioni quadratiche.	Pag. 401
14. Decomposizione di una singolarità.	» 408
15. Teorema di Nöther: trasformazione di una curva in un'altra con punti multipli a tangenti distinte.	» 417
16. Il genere e l'estensione delle formule di Plücker.	» 419
17. Curve passanti per punti infinitamente vicini: molteplicità virtuali e molteplicità effettive	» 425
18. Nota sul comportamento effettivo delle curve polari.	» 438
19. Le singolarità straordinarie come singolarità-limiti	» 442
20. Complementi alla teoria delle singolarità basata sulle trasformazioni quadratiche: sviluppi di Puiseux e punti multipli successivi di un ramo	» 446

CAPITOLO III

Le singolarità rispetto al Calcolo differenziale.

21. Formule generali per le derivate successive delle funzioni composte $f(x, y(x))$	Pag. 459
22. Condizioni differenziali che caratterizzano le molteplicità dei punti succedentisi sopra rami lineari	» 469
23. Derivate delle funzioni $f(x(t), y(t))$: formule fondamentali per le condizioni differenziali che caratterizzano le molteplicità dei punti appartenenti a rami superlineari.	» 477
24. Passaggio di una curva per punti satelliti e diagramma delle partizioni triangolari	» 483
25. Le condizioni di passaggio d'una curva per punti di un ramo superlineare come condizioni linriti	» 501
26. Osservazioni sul problema delle molteplicità effettive	» 509
27. Calcolo effettivo degli sviluppi di Puiseux: confronto col metodo di Newton-Cramer	» 516
28. Nota sulle questioni di realtà	» 529
29. Notizia storica sullo svolgimento della teoria delle singolarità	» 535

CAPITOLO IV

Appendice: singolarità delle curve gobbe e delle superficie.

30. Genesi delle singolarità delle curve per proiezione: trasformazione di una curva piana in un'altra con soli nodi	Pag. 545
31. Le singolarità delle curve gobbe e la trasformazione quadratica spaziale	» 551
32. Varie specie di punti satelliti che figurano nella singolarità di una curva gobba: analisi mediante la rappresentazione parametrica.	» 562
33. Notizia storica sulla teoria delle singolarità delle curve gobbe.	» 575
34. Singolarità delle superficie: punti multipli isolati e curve multiple; definizioni	» 577
35. Punti multipli singolari appartenenti alle curve multiple	» 587
36. Punti multipli infinitamente vicini	» 595
37. Comportamento delle polari e abbassamento della classe dovuto alle singolarità delle superficie	» 606
38. Complementi: punti cuspidali particolari, singolarità duali di punti multipli isolati.	» 623
39. Nota sulle falde di una superficie nell'intorno d'un punto singolare.	» 634
40. Nota storica sulle singolarità delle superficie e sulla trasformazione di una superficie in un'altra dotata di singolarità elementari	» 654
41. Nota sulla classificazione delle omografie iperspaziali	» 658
INDICE ALFABETICO.	» 689
» DEI CAPITOLI	» 703
ERRATA-CORRIGE E ADDIZIONI.	» 707

ERRATA-CORRIGE E ADDIZIONI

VOLUME I

Pag. linea

adde:

4	+ 6	F. SEVERI — <i>Complementi di Geometria proiettiva</i> — Bologna, Zanichelli 1906.		
		invece di		leggi
7	+ 13	ordine r		ordine $r-1$
»	- 5	$x' = \frac{\partial x - \beta}{\gamma x - \alpha}$		$x' = \frac{\beta - \delta x}{\gamma x - \alpha}$
»	- 2	a $f(x)$		la $f(x)$
15	- 8	b_3		b_2
16	+ 5	$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}$		$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$
19	- 11	$\frac{a_i}{x}$		$\frac{a_1}{x}$
20	+ 2	$\alpha\gamma'_k + \delta$ (nel denominatore)		$\gamma\alpha'_k + \delta$
»	+ 11	$\Pi(\alpha_i - \alpha_{k'})$		$\Pi(\alpha'_i - \alpha_{k'})$
»	+ 13	»		»
»	+ 15	»		»
»	»	$\Pi(\alpha_i - \alpha_k)$		$\Pi(\alpha_i - \alpha_k)$
31	- 10	x^2		x^3
39	+ 13	$a_0 + \lambda b'_i$		$a'_0 + \lambda b'_0$
45	- 7	1°		2°
52	- 5	funzionale		funzione
78	- 12	$x = -\frac{2\varepsilon}{3k}$		$x = -\frac{\varepsilon}{k}$
»	- 10	$x = -\frac{3\varepsilon}{3k}$		$x = -\frac{\varepsilon}{k}$
79	- 2	$\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial x^k}$		$\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}$
81				
90	+ 7	$r-1$		$r-2$
94	- 10	Le curve composte $f\varphi=0...$ formano un sistema lineare		Le curve composte $f\varphi=0$ ap- partengono ad un sistema lineare $\sum \lambda_i \mu_k f_i \varphi_k = 0$

Pag.	linea	invece di	leggi
95	- 8	$y = \frac{x_1}{x_3}$	$y = \frac{x_2}{x_3}$
98	+ 4	$y = \frac{y_1}{y_3}$	$y = \frac{x_2}{x_3}$
98	- 1	a_{10}	a_{11}
100	- 12	ζ_3	ζ_2
116	- 18	dei piani	degli iperpiani
118	- 10	zero	zero ove non si abbia insieme $a_0 = b_0 = 0$
130	+ 10	5, 7	5, 6, 7
136	- 12	i piani	gli iperpiani
138	- 7	ipersuperficie	ipersuperficie di 2° ordine
139	+ 15	V_n	di V_n
156	+ 2	Il principio di corrispondenza e le sue applicazioni (titolo che corrispondeva a una partizione più ristretta).	Il principio di corrispondenza e la teoria elementare delle curve piane.
164	-- 12	ma i 4 punti comuni... ... soluzioni improprie...	Ma per $n=3$ (o più generalmente per n dispari) i 4 punti uniti della corrispondenza [2, 2] su C vengono dati dagli ulteriori punti d'incontro di C colle seconde tangenti di K uscenti dai punti di contatto della C stessa colle tangenti comuni a C, K : e si hanno in tal guisa soluzioni improprie...
168	+ 2	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
170	- 12	f	φ
175	+ 10	$r + p = s$	$r + p - 1$
178	- 14	$\sqrt[i]{\frac{b_n}{a_{n-1}}}$	$\sqrt[i]{\frac{b_n}{a_{n-i}}}$
180	+ 4	$(r + s)$ -plo	$(r + s - 1)$ -plo
182	- 9	$\theta = 0$	$\theta' = 0$
187	- 10	§ 3	§ 5
191	- 16	coincidenti colle	incidenti alle
195	+ 1	$[n - 1, n - 1]$	$[n - s, n - s]$
196	- 5	G_s^n	G_s^r
197	+ 19	punto A	punto A , non unito
204	- 13	g_4^1	g_2^1
»	- 11	»	»
»	- 10	»	»
»	- 7	»	»

Pag.	linea	invece di	leggi
216	— 11	rotazioni	rotazioni (reali)
»	— 9	alle più generali	a particolari
adde:			
216	— 7	Si riconosce quindi che vi sono gruppi di tali sostituzioni in corrispondenza ai vari tipi di gruppi finiti di proiettività binarie.	
<p>Aggiungeremo che si ottengono tutte le ∞^6 trasformazioni proiettive <i>reali</i> della sfera in se stessa (fra cui si trovano le rotazioni nominate) corrispondentemente alle più generali sostituzioni lineari su x'. Invero una sostituzione siffatta (con coefficienti comunque complessi) si lascia interpretare come una proiettività sopra una delle due schiere rigate costituite dalle generatrici immaginarie della sfera; associando a questa proiettività la proiettività coniugata sull'altra schiera, nasce appunto una trasformazione proiettiva reale della sfera.</p> <p>D'altra parte le ∞^6 rotazioni <i>complesse</i> della sfera in se stessa (che contengono in particolare le ∞^3 rotazioni <i>reali</i>), possono rappresentare le proiettività di una retta, come si vede, in base al ragionamento che segue. (vedi linea — 4).</p>			
240	— 14	invece di: B'	leggi: P'
268	+ 3	CRONE (Acta Math. II p. 89) rileva che non esistono sestiche irriducibili con 7 cuspidi e 1 nodo.	
296	+ 13	invece di: $(k_1 k_3)$	leggi: $(k_3 k_4)$
»	— 17	» : k_2 e k_3	» : k_3 e k_4

VOLUME II

Pag.	linea	invece di	leggi
5	— 14	d'un fascio	dei punti d'una retta
6	+ 16	1895	1795
8	— 20	delle	dalle
14	— 9	y	y_1
15	+ 6	$\frac{\partial f}{\partial y_3}$	$\frac{\partial f}{\partial x_3}$
16	— 4	3) ...	$3) \Sigma(-1)^s \binom{r+s}{s} \Sigma(a_h)_{r+s} \left\{ x^{n-r-s} = \right.$ $= \Sigma(a_h) x^{n-r} - (r+1) \Sigma(a_h)_{r+1} \cdot x^{n-r-1}$ $+ \dots = 0$
16	— 2	$\binom{s+s}{r}$	$\binom{r+s}{s}$

Pag.	linea	invece di	leggi
17	+ 6	$(r + 1)$ -mo	$(r + s)$ -mo
17	- 5	$r = 1$	$r = n - 1$
19	+ 19	$r = n - 1$	$r = 1$
20	- 16	$i - 1$	i
20	+ 3	si scrive	si scrive, per $r = 1$,
21	+ 1	f_{n-1}	f_{n-i}
21	+ 6	$+ (r - 1)!$	$+ r(r - 1)!$
24	+ 1	O	o
25	+ 11	$f(x_1 x_2 x_2)$	$f(x_1 x_2 x_3)$
27	+ 4	le i rette	le $i - 1$ rette
28	+ 8	tangente principale	tangenti principali
»	- 14	Δ_x^{n-i-1}	Δ_x^{n-i+1}
»	- 12	»	»
32	+ 6	$\lambda_i b + \mu_i \varphi + \nu_i \psi$	$\lambda_i f + \mu_i \varphi + \nu_i \psi$
39	+ 18	approssimamente	approssimante
40	- 9	linea	linea moltiplicata per y
41	- 11	coefficiente	coefficienti
46	- 4	$\frac{\partial f}{\partial x} f$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x} f$
	(1° det.)		
51	+ 7	$L^\circ \dots \S 5$	$L^\circ 2 \S 5$
52	+ 8	x_n	u_n
	in (Δ)		
55	+ 3	grado	grado in x_1, x_2
58	+ 15	a	a^i
59	- 10	$a_s^{i_s-1}$	$a_r^{i_r-1}$
60	+ 17	s -plo	$(s - 1)$ -plo
61	+ 8	u_α^m	α_α^m
79	- 9	1870	1770
81	- 6	$b_{r_1} b_{r_2} \dots$	$b_{s_1} b_{s_2} \dots$
82	+ 11	radice $R(x)$	radice di $R(x)$
101	+ 3	adde:	$f = \frac{f_m}{f_{m-1}}$
		invece di	leggi
103	- 8	S_{r-1}	S_{n-1}
107	- 13	$n(n - 1)$	$r(r - 1)$
112	+ 3	$\alpha_{13} \neq 0$	$\alpha_{12} \neq 0$
112	- 1	$ u_2 u_3 u_4 $	$ u_2 u_2 u_4 $
114	+ 3	$\alpha_{11} xy$	$\alpha_{11} xy$
117	+ 3	a_{02}	$2a_{02}$
»	+ 5	»	»
»	+ 6	$\alpha_{40} = -3 \dots$	$\alpha_{40} = -6 \dots$
»	+ 11	$-\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}} = \frac{1}{4} \dots$	$-\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{12}} = -\frac{1}{2} \dots$
»	+ 14	$-\frac{1}{4} \frac{n-3}{n-2}$	$\frac{1}{2} \frac{n-3}{n-2}$

Pag.	linea	invece di	leggi
117	- 11	6	8
119	+ 1	$\rho = 9 + \sigma$	$\rho = 9 - \sigma$
124	- 5	$m = 2n + 2p - 2 + k$	$m = 2n + 2p - 2 - k$
127	- 10	così	così (per le curve irriducibili)
130	- 14	$X - kX$	$X - kY$
136	- 8	funzioni	funzioni della sola u
145	+ 17	adde: (In ciò che precede si ragiona supponendo che Q non sia un cono: se Q è un cono la O ne incontrerà le generatrici in due punti).	

		invece di	leggi
146	+ 8	cubiche linearmente indipendenti	cubiche
148	- 6	$t' = 8$	$t' = 16$
149	- 10	$- 10(\mu + \nu - 1)$	$- 10(\mu + \nu)$
152	+ 10	e quindi	e quindi O
159	- 11	$f(x_1 x_2 x_3)$	$f(x_1 x_2 x_3) = 0$
171	nota (4)	1910	1901
172	- 8	equazione	frazione
173	- 3	$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \varphi$	$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \varphi$
175	- 11	$\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$
190	- 6	$J = \frac{4 \dots}{(\alpha - 1)^2 \dots}$	$J = \frac{4 \dots}{(\alpha + 1)^2 \dots}$
199	- 11	$\frac{4}{27}$	$\frac{27}{4}$
201	- 7	$q = 2\alpha^2$	$q = 2\alpha^3$
210	+ 8	$D = \frac{4}{27} \dots$	$D = \frac{27}{4} \dots$
»	+ 9	$D > 0$	$D < 0$
»	+ 10	$D < 0$	$D > 0$
»	+ 12	positivo	negativo
»	+ 13	negativo	positivo
»	+ 15	$S > 0$	$S < 0$
»	+ 16	$S < 0$	$S > 0$
233	- 11	$x(y^2 - 69)$	$x(y^2 + 39)$
»	- 4	ad	ed
234	- 12	$x = 0$	$y = 0$
245	in	1830, 1832, 1848, 1850,	1730, 1732, 1748, 1750
	fondo		
275	+ 17	(²)	(³)
275	- 6	(³)	(²)
284	- 2	(razionale)	razionale
291	+ 14	cioè alle	che sono
»	+ 18	e perciò è una curva razionale, cioè ammette	e ammette

Pag.	linea	invece di	leggi
291	— 9	§ 23, pag. 282	§ 23, Vol. I pag. 282; L.°, 3°, § 11, pag. 134.
293	16	rette incidenti a C_{n-1}, r, s	corde di C_{n-1} incidenti ad r, s
294	— 8	$\binom{n-1}{4}$	$\binom{n-1}{3}$
»	— 7	$x \leq \binom{n-1}{4}$	$x \leq \frac{1}{4} \binom{n-1}{3}$
297	+ 16	$C_m, C_n,$	C_m, C_n, a
»	— 12	C_m	C_n
300	+ 2	3) $f(n, d)$	$3f(n, d)$
»	— 18	irriducibile. Se la.,.	irriducibile. {Fa eccezione il caso della curva interse- zione di due coni, la rigata delle trisecanti spezzandosi al- lora nei due coni e in una ri- gata ulteriore. Eccepiuto questo caso lo spezzamento della ri- gata delle trisecanti in due rigate <i>distinte</i> porta che la C_n debba avere un punto doppio (o multiplo). Invero se la...
300	— 16	Ma se...	
	— 12	riducibile. Può...	Può...
305	— 2	a C_n	di C_n
306	+ 15	$d=6$	$d=3$
308	+ 16	S_4	S_5
»	+ 24	un cono o una stella:	una stella o un cono:
»	nota (4)	1886	1866
312	— 10	+ $2d$	— $2d$
313	7 —	un punto	una retta
316	+ 20	a tre	a quattro
327	— 13	$y = \text{cost.}$	$x = \text{cost.}$
335	+ 15	γ	Y
»	— 1	coordinate	coordinate curvilinee generali
339	+ 16	non lineari,	non lineari (con punti multipli sucedentisi su rami lineari).
341	+ 10	$= r_2$	$= r_1$
»	— 9	un doppio	un punto doppio
342	+ 13	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
349	+ 4	$a_s x$	$a_s x^s$
352	+ 10	$a \neq 0$	$a = 0$ o $a \neq 0$
354	+ 15	p	p_1
359	— 9	$\frac{\nu \mu'''}{\rho \rho_1} = \frac{\nu \mu'''}{\rho \rho_1}$	$\frac{\mu \nu'''}{\rho \rho_1} = \frac{\nu \mu'''}{\rho \rho_1}$

Pag.	linea	invece di	leggi
359	- 6	$\frac{\mu\nu}{\rho\rho_1\rho_2}$	$\frac{\mu\nu^{(4)}}{\rho\rho_1\rho_2}$ o $\frac{\mu^{(4)}\nu}{\rho\rho_1\rho_2}$
363	- 5	$\frac{\mu'}{\mu} = 2, 3 \dots h + 1$	$\frac{\mu'}{\mu} = 1, 2, 3 \dots h + 1$
364	- 2	h	$h + 1$
	- 3		
365	+ 10	$\frac{\nu + \nu'}{\nu}$	$\frac{\nu'}{\nu}$
369	+ 15	funzioni	frazioni
375	- 13	$\frac{\nu^{(i)}}{\rho_1 \dots \rho_m}$	$\frac{\nu^{(i)}}{\rho_{i-1} \dots \rho_m}$
376	- 2	$y = ax + a_1 x^2 a_2 + x^3 + \dots$	$y = ax + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$
377	+ 12	$a_2 = 0$	$a_1 = 0$
379	fig.	I punti $O_{13} O_{13} O_{14}$ debbono essere allineati	
380	+ 10	O_{22}^3	O_{22}^4
391	+ 8	$r_k \geq r_{k+1} + \dots$	$r_h \geq r_{h+1} + \dots$
410	- 1	Sopprimere i fattori $\frac{1}{2}$ dentro la parentesi.	
413	+ 15	$\frac{\Sigma(i-1)(i-2)}{2}$	$\frac{\Sigma i(i-1)}{2}$
415	+ 13	$\frac{r-plo}{\pi_1 T \pi^{-1}}$	$\frac{r-plo}{\pi_1 T \pi_1^{-1}}$
415	- 16		
418	- 14	si corrispondono	corrispondono a quelle del primo
422	- 1	prossime	vicine
423	+ 1	prossime	vicine
424	+ 10	$-\Sigma r_i (r_i - 1)$	$-\frac{1}{2} \Sigma r_i (r_i - 1)$
425	- 14	$r_1 \geq r$	$r_1 \leq r$
429	- 9	$(h = 0, i = 1)$	$(h = i - 1)$
432	+ 5	$\bar{O}^{r_2-x} \dots \bar{O}_h^{r_h-x}$	$\bar{O}_r^{r_2} \dots \bar{O}_i^{r_i-x}$
433	- 1	caratteristica	caratteristica)
435	- 1	$(O^2 O_1^4 [O_1^4])$	$(O^2 O_1^4 [O_2^4])$
437	- 2	$[O_1^2 O_2^4 O_3^4]$	$[O_2^2 O_3^4 O_4^4]$
442	+ 18	y	x
		$\frac{r}{r+r}$	$\frac{r}{r}$
454	- 1	a_1^{r+r}	$a_1^{r+r_1}$
457	+ 9	$a_2 t^{\nu_1+\nu''}$	$a_2 t^{\nu_1+\nu'}$
467	- 16	$m \geq n$	$n \geq m$
606	+ 23	adde alla dimostrazione del testo: Basta anche qui ripetere il calcolo fatto per le curve a pag. 410.	
649	+ 9	definita da F	definita da f

Finito di stampare
nella Tipografia della Cooperativa Azzoguidi
di Bologna
il giorno 11 Febbraio 1918.