Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Conferenze sulla geometria non-euclidea

(1918). (a cura di O. Fernández)

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

FEDERIGO ENRIQUES

CONFERENZE

SULLA

GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

PER CURA DEL

DOTT. OLEGARIO FERNANDEZ

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

BOLOGNA - COOP. TIPOGRAFICA AZZOGUIDI - 1918.

PREFAZIONE

In questo libretto sono raccolte alcune conferenze sulla Geometria non-euclidea che ho tenuto all'Università di Bologna durante l'anno scolastico 1916-17.

Il dott. OLEGARIO FERNANDEZ, valente giovane spagnuolo che — trovandosi fra i miei ascoltatori — ha raccolto e ordinato codeste conferenze, mi ha aiutato a dar loro la forma che qui hanno ricevuto; e della sua preziosa collaborazione mi è caro ringraziarlo pubblicamente.

Lo scopo che mi sono proposto è di recare, agli allievi delle nostre Scuole di Magistero e alla cerchia più larga degli insegnanti delle nostre Scuole Medie, una rapida informazione dei problemi sollevati dal così detto postulato d'EUCLIDE sulle parallele, e particolarmente di porgere la prova più semplice della *indimostrabilità di codesto postulato,* cioè della impossibilità di dedurlo dai principî che stanno a base della teoria della congruenza e del movimento (contenuta nelle prime 27 proposizioni euclidee).

All'infuori di accenni posti in alcune *Note*, la lettura di questo libretto non richiede cultura superiore a quella che i nostri studenti ricevono nel primo anno d'Università, ed in ispecie nel corso di Geometria proiettiva; onde io spero che esso riuscirà accessibile a numerosi lettori.

FEDERIGO ENRIQUES

Capitolo I

Il primo libro degli « Elementi » e le premesse della Geometria di Euclide

1\. - Gli « Elementi » di Euclide costituiscono, come è noto, il primo trattato a noi pervenuto di Geometria razionale, in cui si offre una sistemazione del lavoro proseguito dai geometri greci durante tre secoli.

Il primo libro può riguardarsi come la parte fondamentale del trattato, contenendo già due teoremi veramente espressivi, cioè « la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti » e la relazione tra i quadrati dei lati di un triangolo rettangolo, che Plutarco, Diogene Laerzio ed Ateneo sono concordi nell'attribuire a Pitagora. Questi teoremi che, a differenza di altre più ovvie proposizioni, porgono la conoscenza di fatti nuovi ed inaspettati, appariscono come i « fuochi » rispetto a cui viene ordinata la serie delle proposizioni del primo libro euclideo. Il contenuto del quale vogliamo qui brevemente riassumere [1].

A prescindere dalle premesse che ne costituiscono l'introduzione, il libro di cui si discorre contiene:

1°. Proposizioni costruttive, cominciando dalle costruzioni elementari che concernono il trasporto di segmenti (prop. 1, 2, 3) e di angoli (23), ecc.

2°. I criterî per l'uguaglianza (congruenza) dei triangoli (4; 7, 8; 24, 25, 26).

3°. Le proprietà delle perpendicolari (11, 12) e le relazioni fra gli angoli formati da due rette incidenti (13, 14, 15).

[1] Ci riferiamo all'edizione critica di Heiberg (Teubner, Lipsia, 1883-88) riprodotta in G. Vacca « Euclide: il primo libro degli Elementi » testo greco con versione italiana e note (G. C. Sansoni, Firenze, 1916).

4°. Le relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo (5, 6; 16, 17; 18, 19), fra cui noteremo in particolare il teorema (16) che « l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni opposti » (teorema che verrà ripreso e precisato dalla prop. 32).

5°. La teoria delle parallele (27, 31) che comprende in particolare l'esistenza e l'unicità della parallela per un punto a una retta data e, attraverso quest'ultima proprietà, conduce a riconoscere il teorema fondamentale della somma degli angoli d'un triangolo (32), cui si riattaccano le proprietà elementari dei parallelogrammi.

6°. I principali teoremi concernenti l'uguaglianza di superficie dei parallelogrammi e triangoli (equivalenza) (35-48): una serie di proposizioni che si conchiude col teorema di Pitagora (47, 48).

2. - Passiamo a esaminare in breve le premesse del trattato euclideo. Queste sono da ricercare nei brevi paragrafi introduttori dedicati alla spiegazione dei *termini* (ὅροι), ai *postulati* (αἰτήματα) e alle *nozioni comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι), nonchè nei *presupposti impliciti* che si introducono nella dimostrazione d'alcune proposizioni, soprattutto fra le prime. Qui vi è luogo ad osservare:

1) Le spiegazioni dei termini comprendono, accanto a vere definizioni logiche, anche semplici descrizioni di enti che non possono quindi ritenersi definiti senza far ricorso a una qualche intuizione o esperienza, sicchè — dal punto di vista della critica moderna — dovrebbero assumersi nell'ordinamento logico come *concetti primitivi o fondamentali*. Inoltre manca in Euclide la spiegazione di alcuni termini essenziali, adoperati nel seguito. Così, per esempio, non viene nettamente posta la distinzione fra la *retta terminata* (segmento) e la retta *illimitata*, che per verità Euclide considera soltanto in modo virtuale (post. 2); e, come non si parla della partizione d'una retta mediante un punto, così nemmeno si definiscono le due parti in cui il piano è diviso da una sua retta, sebbene di queste parti si faccia uso più volte, nel seguito.

2) I postulati e le nozioni comuni dell'Euclide (che vengono anche denominate « assiomi ») vogliono esprimere le proposizioni fondamentali del trattato, che oggi — senza

distinzione — soglionsi raccogliere sotto il nome comune di « postulati » (1).

Tuttavia occorre osservare che:

a) non tutte le nozioni adoperate come evidenti nel trattato, figurano esplicitamente enunciate fra le proposizioni fondamentali.

Così nella prop. 1 figura già adoperato un postulato costruttivo sull'intersezione di due cerchi di cui l'uno ha un punto interno e un punto esterno all'altro, che bene avrebbe potuto figurare tra i postulati (o che si dimostrerebbe in base alla continuità della retta). Nella dimostrazione della prop. 4 si adopera un principio di sovrapponibilità delle figure col movimento, che non è stato precedentemente formulato.

b) Le nozioni comuni dell'Euclide appaiono come proposizioni di pura logica inerenti al concetto d'uguaglianza; ma, il contenuto intuitivo di codeste proposizioni fondamentali consiste nell'applicazione che si fa poi del detto concetto alle relazioni geometriche di congruenza e di equivalenza delle figure.

c) È degno di nota che negli Elementi resta traccia di tentativi per un'analisi approfondita di alcuni concetti o principî. Così le prop. 1, 2, 3 adombrano forse un tentativo di ridurre la nozione del movimento al caso elementare della rotazione di un segmento intorno ad un suo estremo.

E' la preoccupazione d'Euclide di escludere l'uso più generale del movimento, si avverte anche in ciò, che quell'uso è strettamente limitato alla dimostrazione del primo criterio d'uguaglianza dei triangoli, mentre il caso di due triangoli con un lato e due angoli adiacenti eguali viene trattato per assurdo in base a una relazione di disuguaglianza, anzichè in modo diretto col movimento. Aggiungasi che se Euclide avesse introdotto in tutta la sua larghezza il principio del movimento, avrebbe potuto servirsene per dimostrare l'uguaglianza degli angoli retti, che egli enuncia come postulato.

(1) Proclo, nel suo Commento all'Euclide esamina varî sensi attribuiti alla distinzione fra assiomi e postulati; secondo il primo senso (che si riattacca a Gemino) codesta distinzione sarebbe analoga a quella fra teoremi e problemi. Cfr. G. Vailati Comunicazione al III Congresso matematico di Heidelberg. (Opere, pag. 547).

4) Più evidente e interessante è il tentativo di Euclide di affrancarsi dal postulato 5° « se una retta incontrando due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti ». Infatti, di questo postulato si fa uso soltanto nella prop. 28 e non nelle precedenti; anzi, per evitare di ricorrervi, Euclide ha considerato due volte la proprietà dell'angolo esterno del triangolo: nella prop. 16, come diseguaglianza, e nella 32 come eguaglianza alla somma di due angoli interni non adiacenti. (Qui vi è luogo ad osservare che anche altri libri degli Elementi serbano tracce di preoccupazioni analoghe tendenti a limitare o differire l'uso di certe teorie; ne è prova lo sviluppo della teoria dell'equivalenza nei Libri 2, 3 e 4, dove si rivela lo sforzo di non adoperare il concetto della proporzione, introdotto col Libro 5).

3. - L'analisi dei diversi sistemi di proposizioni fondamentali o postulati corrispondenti ai possibili ordinamenti logici della Geometria euclidea, ha dato luogo ad una serie di ricerche che s'iniziano fin dai primi commentatori d'Euclide, e si svolgono soprattutto ai nostri giorni con profonde investigazioni critiche; delle quali il lettore potrà avere informazione dai Collectanea di F. Enriques « Questioni riguardanti le Matematiche elementari — Vol. I: Critica dei principî — ».

Qui ci limiteremo ad indicare un ordinamento in cui figurano due gruppi di postulati atti a rendere esplicite le premesse delle prime 27 proposizioni euclidee; a codesti postulati occorrerà aggiungere il postulato 5° d'Euclide, ovvero un altro equivalente, per stabilire la teoria delle parallele e le conseguenze che ne dipendono. Per semplicità di discorso ci limiteremo sempre alla geometria del piano, e così verrà sottinteso che le figure di cui si discorre appartengono sempre ad un piano fondamentale. I concetti geometrici primitivi o fondamentali che figurano nel nostro sistema di postulati verranno designati la prima volta con carattere grassetto, gli altri termini geometrici di cui occorrerà l'uso, riceveranno, o potranno ricevere, una precisa definizione logica [1].

[1] Talvolta per brevità ci dispenseremo dall'indicare esplicitamente qualche definizione, quando la lacuna può essere riempita dal lettore senza

Un primo gruppo di postulati varrà a caratterizzare le proprietà lineari della retta entro la superficie piana, cioè esprimerà che « le rette sono linee aperte (indefinite) tali che per due punti qualunque (del piano) ne passa una ed una sola », e che « ogni retta divide la superficie piana in due parti ». L'analisi di questa proprietà conduce ai postulati che qui enunciamo, accennando alle più semplici conseguenze che ne dipendono.

I) *Primo Gruppo di Postulati*:

1) *La retta è una serie di infiniti punti ordinati secondo due ordini naturali l'uno inverso dell'altro* (1): *fra due punti vi sono sempre punti intermedî; non vi è alcun primo, nè alcun ultimo punto.*

2) *L'ordine dei punti d'una retta è continuo*, cioè: se i punti della retta sono distribuiti in due classe α e β, per modo che:

ogni punto appartenga all'una o all'altra classe,

ed ogni punto della prima classe preceda ciascun punto della seconda,

esiste un punto P (punto di divisione delle due classi) tale che tutti i punti precedenti P appartengono ad α e tutti i punti seguenti P appartengono a β (2).

Questo postulato esprime le proprietà interne che spettano alla retta come ad una qualunque linea aperta (continua). Seguono la definizione delle due parti (*semirette* o *raggi*) in cui una retta è divisa da un punto, e quindi del *segmento*, nonchè le proprietà segmentarie, conformemente all'intuizione.

difficoltà. Così pure ci riserviamo libertà di usare i diversi termini del linguaggio ordinario che — in rapporto a diverse immagini — traducono una medesima relazione logica; il lettore attento riconoscerà che ciò non toglie nulla allo stretto rigore (quando questo non voglia confondersi colla minuzia d'un pedante formalismo!).

(1) Il concetto logico di « serie ordinata » significa: classe di elementi tale che:

1) dati due elementi A e B, uno dei due, p. es. A, *precede* l'altro, ed allora B *segue* ad A;

2) se A precede B e B precede C, si deduce pure che A precede C.

(2) L'uso di questo postulato di continuità, per quanto riguarda la fondazione della geometria euclidea, si può limitare a quanto occorre per le intersezioni di rette e cerchi (cfr. l'Art. 5° di G. Vitali nei citati Collectanea di Enriques); dal punto di vista analitico ciò importa soltanto l'introduzione di irrazionali quadratici.

3) *Il piano è un insieme di punti tale che:*

a) *due punti di esso appartengono ad una retta e ad una sola* (*loro congiungente*).

b) *fuori d'una retta contiene ancora dei punti.*

Segue che due punti qualunque del piano sono sempre gli estremi di un segmento appartenente al piano, e che esistono — in questo — terne ABC di punti non in linea retta. La figura costituita dai tre punti A, B, C, e dai segmenti che li congiungono a due a due, dicesi *triangolo*; i punti diconsi i *vertici* del triangolo ed i segmenti ne costituiscono i *lati*.

4) *Se nel piano sono dati un triangolo ed una retta — non passante per alcun vertice di questo — che incontri uno dei lati, la retta incontrerà un secondo lato del triangolo, ma non il terzo.*

Questo postulato (esplicitamente enunciato da Pasch) esprime che:

Una retta p divide il piano in *due parti* (*semi-piani*) per modo che:

a) se due punti A e B, fuori di p, appartengono a parti diverse, essi sono estremi di un segmento che incontra p;

b) se A e B appartengono alla medesima parte, il segmento AB non incontra p.

Infatti, il postulato di Pasch conduce ad una partizione del piano soddisfacente alle condizioni enunciate, tosto che — assunti una retta p ed un punto A fuori di essa — si attribuiscono a parte opposta di A i punti B (fuori di p) per cui il segmento AB incontra p ecc.

Segue la definizione della *regione angolare* e dell'*angolo* ab determinato da due raggi (lati) a e b, uscenti da un punto (*vertice*): la regione angolare contiene tutti i segmenti che hanno gli estremi A e B rispettivamente sopra a e b; l'angolo si definisce come la serie dei raggi proiettanti dal vertice i punti di un segmento AB, e risulta così ordinato, in modo continuo, secondo due ordini opposti l'uno dell'altro, come lo stesso segmento (e indipendentemente dalla scelta di A su a e di B su b).

Aggiungeremo che lo stesso postulato di Pasch porge la base logica per introdurre la nozione di « angoli di *ugual verso* o di *verso opposto* » appartenenti al piano, senza ulteriore appello all'intuizione: il confronto dei versi di due angoli ordinati ab e cd si riconduce ai due casi elementari in cui i detti angoli hanno comune il vertice, oppure hanno due lati sulla stessa retta. Ma non ci indugeremo su ciò, rimandando — per tutta questa analisi dei postulati del piano — all'Art. 3°, di U. AMALDI, nei citati Collectanea.

4. - Un secondo gruppo di postulati, che occorre alla fondazione della geometria euclidea, concerne le nozioni di *congruenza* (*uguaglianza*) o di *movimento*. Due vie si presentano al critico che voglia approfondire l'analisi di queste nozioni [1].

a) Assumere come primitivo il concetto della congruenza, sia per le figure in generale (PASCH), sia per alcune figure elementari, ad esempio per i segmenti (VERONESE) o per i segmenti e per gli angoli (HILBERT), postulando poi le relazioni più semplici che valgono a definire implicitamente codesto concetto.

b) Analizzare la nozione stessa dei movimenti, dove è lecito prescindere dalla continuità del moto considerando soltanto l'operazione che fa passare dalla posizione iniziale d'una figura (o del piano che la contiene) alla posizione finale; questa analisi condurrebbe anche — con HELMHOLTZ e LIE — alla definizione della « retta », ma assume una forma più semplice quando — come noi abbiamo fatto — si presuppone dato il concetto di questa.

Noi seguiremo la seconda via, e — per raggiungere maggiore semplicità d'espressione dei postulati — premetteremo alcune semplici:

Definizioni. Diremo *trasformazione* del piano (in se stesso) una corrispondenza biunivoca, cioè univoca e univocamente invertibile, che sia data comunque fra i suoi punti.

Diremo *prodotto* di due trasformazioni Π e T, la trasformazione $T\Pi$ che si ottiene eseguendo successivamente le due date (prima la Π, poi la T).

Diremo *gruppo di trasformazioni*, un insieme Γ di trasformazioni, tale che:

a) il prodotto di due trasformazioni di Γ appartenga a Γ,

b) insieme ad una trasformazione di Γ appartenga a Γ anche la inversa (così Γ conterrà certo la trasformazione identica in cui ad ogni punto corrisponde se stesso).

(1) Cfr. l'art. 4° di A. GUARDUCCI nei citati Collectanea.

Diremo *omografia affine* una trasformazione del piano in cui a punti susseguentisi d'una retta p corrispondano sempre punti susseguentisi d'una retta (omologa) p' [1]; segue dalla definizione che l'omografia affine trasforma sempre un semipiano in un semipiano e un angolo in un angolo.

Poste queste definizioni, formuleremo il:

II) *Secondo Gruppo di Postulati.*

1) *I movimenti del piano sono omografie affini formanti un gruppo.*

2) *Esiste un movimento ben determinato del piano che porta un punto (qualsiasi) P in un altro punto dato P', una semiretta p uscente da P in una semiretta p' per P', e che trasforma un semipiano limitato dalla retta p in uno dei due semipiani limitati dalla p'.*

Ora si diranno *congruenti* due figure piane che si corrispondono punto per punto in un movimento (figure sovrapponibili). Il post. II. 1) porta che la congruenza si possa considerare come un caso d'*uguaglianza* (uguaglianza geometrica), resultando verificate le condizioni logiche per cui:

a) ogni figura è uguale a sè stessa (*proprietà identica* della uguaglianza rispecchiante l'esistenza della trasformazione identica nel gruppo dei movimenti);

b) se una figura F è uguale a F', anche F' è uguale ad F (proprietà *riflessiva*, rispecchiante la condizione che la trasformazione inversa d'un movimento è un movimento);

c) figure uguali a una terza sono uguali tra loro (proprietà *transitiva*, rispecchiante la condizione che il prodotto di due movimenti è un movimento).

Ora il post. 2 porge la:

Proprietà del trasporto dell'angolo: esistono due angoli uguali ad un angolo dato, che posseggono come lato un raggio dato.

Vediamo ancora come si trasporti un segmento dato sopra una retta. È chiaro anzitutto che: a partire da un punto

[1] L'omografia definita nel testo è veramente affine nel senso della Geometria proiettiva, lasciando invariata la retta all'infinito. Ciò dipende dal significato che qui occorre dare alla parola « susseguenti », in rapporto all'ordine naturale dei punti della retta concepita come linea aperta; quando si aggiunge il punto all'infinito, l'ordine dei punti della retta diventa quello della linea chiusa ed allora la definizione del testo viene a corrispondere all'omografia più generale.

della retta, e da una parte di questa, esiste almeno un segmento uguale ad un segmento dato; ma, in conformità al post. 2, parrebbe che di tali segmenti ne esistessero due; dimostreremo invece che questi coincidono in uno solo. Ciò risulta come conseguenza dal

Lemma. Il movimento del piano che lascia fermi un punto ed una retta per esso, scambiando i due semipiani, lascia fermi tutti i punti della semiretta, ed anche della retta a cui questa appartiene. Per tale proprietà esso dicesi un *ribaltamento* attorno a codesta retta (l'altro movimento, ottenibile come ripetizione del precedente, che lascia fermi la semiretta data e i due semipiani, è l'identità).

Dimostriamo il nostro lemma. Sia P un punto e p una semiretta uscente da esso, e pongasi che il movimento lasciante fermo p e scambiante i due semipiani, porti p. es. un punto Q di p in un punto Q' successivo a P nell'ordine della semiretta; allora ai tre punti susseguentisi P, Q e Q' corrispondono nel nostro movimento, punti susseguentisi P, Q' e Q'', sicchè la ripetizione del movimento conduce da Q a Q'', laddove essa deve condurre all'identità.

Ordunque dedurremo la:

Proprietà di trasporto del segmento: sopra una retta esistono due segmenti uguali ad un segmento dato ed aventi un dato estremo, i due segmenti giacendo da parti opposte di questo.

Per completare l'elenco delle proprietà fondamentali relative all'uguaglianza di segmenti e di angoli, occorre ancora dimostrare che:

Somme e differenze di segmenti e di angoli uguali sono uguali.

Per brevità di discorso ci limiteremo al caso di due segmenti

$$AC = AB + BC, \quad A'C' = A'B' + B'C';$$

si tratta di provare che, se

$$AB = A'B', \quad BC = B'C',$$

si deduce

$$AC = A'C'.$$

La dimostrazione dell'asserto si trae dalla considerazione di certi movimenti (*scorrimenti*) che lasciando ferma una retta e i suoi versi, nonchè i relativi semipiani, portano un punto della retta in un altro punto. Si considereranno gli scorrimenti (AB) e (BC) che, lasciando ferma la retta contenente i tre punti A, B, C, portano rispettivamente A in B e B in C; analogamente si definiranno gli scorrimenti $(A'B')$ e $(B'C')$. Ora l'uguaglianza dei segmenti AB e $A'B'$ equivale all'esistenza di un movimento (AA') che trasforma lo scorrimento (AB) in $(A'B')$:

$$(AA')(AB)(A'A) = (A'B');$$

similmente l'uguaglianza dei segmenti BC e $B'C'$ equivale alla trasformazione espressa da

$$(BB')(BC)(B'B) = (B'C').$$

Quindi, osservando che (BB') e (AA') sono due designazioni d'uno stesso movimento, ed osservando pure che lo scorrimento

$$(AC) = (BC)(AB),$$

e così

$$(A'C') = (B'C')(A'B'),$$

si dedurrà

$$(AA')(AC)(A'A) = (A'C'),$$

cioè

$$AC = A'C' \qquad \text{c. d. d.}$$

Infine il post. 2 porge i due *criteri d'uguaglianza dei triangoli*, dove siano uguali due lati e l'angolo compreso ovvero un lato e i due angoli adiacenti; dai quali segue il terzo criterio, dove i tre lati sono uguali.

Ciò posto, resta a vedere come i postulati I, II conducano alle prime proprietà del *cerchio* e quindi alle costruzioni euclidee, ed in breve a tutto ciò che è contenuto nelle prime 27 proposizioni degli *Elementi*.

La definizione della circonferenza di dato centro risulta subito dalla proprietà di trasporto dal segmento, e si vede ancora che i punti della circonferenza sono ordinati in guisa da costituire una linea chiusa che è divisa in due segmenti o archi da due dei suoi punti: un arco i cui estremi appartengano ai lati d'un angolo col vertice nel centro, riesce ordinato come l'angolo dei raggi proiettanti i suoi punti.

Ora la circonferenza divide il piano in due parti: la regione interna (detta cerchio), luogo dei segmenti (raggi del cerchio) che congiungono il centro coi punti della circonferenza, e una regione esterna. Dalla continuità dell'ordine dei punti della circonferenza (o di un suo arco), si deduce che un arco circolare od un segmento rettilineo aventi un estremo interno e l'altro esterno ad un cerchio hanno un punto (almeno) comune colla circonferenza. Così è posto il fondamento delle costruzioni euclidee; si ottengono dunque la bisezione del segmento e dell'angolo, e le costruzioni delle *perpendicolari*: si chiamano perpendicolari due rette per un punto che formano due angoli adiacenti uguali (*angoli retti*); l'uguaglianza degli angoli *piatti*, aventi come lati i due raggi opposti d'una retta, permette di dedurre che: « tutti gli angoli retti sono uguali fra loro », onde sussistono le note relazioni fra i quattro angoli di due rette incidenti; in particolare segue che due perpendicolari formano quattro angoli uguali.

Le proposizioni cui abbiamo accennato, permettono finalmente di dimostrare anche le prime relazioni fra i lati e gli angoli d'un triangolo, in ispecie la diseguaglianza relativa all'angolo esterno (prop. 16), cioè tutte le prime 27 proposizioni del primo libro degli Elementi.

5. - Fra le proposizioni euclidee che si deducono dai postulati I e II, c'è la prop. 27 per cui « due rette del piano che formano con una terza angoli alterni interni uguali sono parallele (non s'incontrano) »; ciò porta l'*esistenza della parallela* per un punto ad una retta data. Giova notare che nella dimostrazione della prop. 27, si adopera esplicitamente la proprietà introdotta dal post. I, 1), che l'ordine dei punti della retta sia quello d'una linea aperta.

Ora per invertire la prop. 27, come si fa nella prop. 28, occorre l'uso d'un postulato che definiremo come

III) ***Postulato d'Euclide sulle parallele***: due rette del piano che formano con una terza retta, e da una parte di questa, angoli interni la cui somma sia minore di due retti, hanno un punto comune entro la nominata parte di piano.

Ovvero:

Per un punto vi è una sola parallela ad una retta data.

L'equivalenza di queste due proposizioni è manifesta.

Il postulato III, congiunto agli I e II, porge la base all'intiera teoria delle parallele e permette di proseguire senz'altre ammissioni nello svolgimento della geometria euclidea. Ma, fino dai più antichi commentatori d'Euclide, si è posta la domanda se « il postulato d'Euclide sulle parallele non sia superfluo », cioè, se sia possibile dimostrarlo in base alle 27 proposizioni o ai postulati che ne porgono il fondamento, che noi abbiamo espresso nella forma I e II. Questa domanda ha dato origine a innumerevoli tentativi, la cui storia interessante si può leggere nell'art. 8 di R. Bonola inserito nei citati Collectanea e più diffusamente in un libro dello stesso autore intitolato « La Geometria non euclidea, esposizione storico-critica del suo sviluppo » [1].

La conclusione dei tentativi accennati è che l'insuccesso dei geometri, nella loro millenaria fatica, non tiene alla deficienza delle loro forze, ma ad una causa profonda, *in re*: la *indimostrabilità del postulato di Euclide*, cioè la sua indipendenza dai postulati I e II. Stabilire, nel modo più rapido questa indipendenza, costituisce lo scopo del presente libretto.

6. - *Nota sul gruppo dei movimenti del piano che lasciano fermi un punto P ed una retta per esso.*

Si consideri un raggio p di questa retta; sappiamo che esistono due movimenti, l'identità e il ribaltamento attorno alla retta, che lascian fermo p (e di conseguenza tutti i punti della retta). Ora si avranno anche due movimenti che scambiano p col raggio opposto p' (appartenente alla medesima retta). I quattro movimenti potranno essere opportunamente designati nel modo che segue:

1) movimento (identico) che lascia fermi i due semipiani e le due semirette

$$\Pi_{11} = 1;$$

2) ribaltamento che scambia i due semipiani, lasciando ferme le due semirette

$$\Pi_{12};$$

3) movimento che lascia fermi i due semipiani e scambia le due semirette

$$\Pi_{21};$$

4) movimento che scambia tanto le semirette che i semipiani

$$\Pi_{22}.$$

[1] Bologna, Zanichelli 1906.

Si può dimostrare anzitutto che i movimenti considerati sono involutori, cioè, ripetuti producono l'identità:

$$\Pi_{12}{}^2 = \Pi_{21}{}^2 = \Pi_{22}{}^2 = 1.$$

Infatti il quadrato d'una Π_{ik} lascia fermi semipiani e semirette, e quindi equivale a

$$\Pi_{11} = 1.$$

In secondo luogo risulta subito dalla loro definizione che: il prodotto di due fra le tre Π_{ik} non identiche è uguale alla terza:

$$\Pi_{21}\Pi_{12} = \Pi_{12}\Pi_{21} = \Pi_{22} \text{ ecc.}$$

Queste proprietà mettono in evidenza che: i quattro movimenti del piano lascianti fermi un punto ed una retta per esso formano un *gruppo* (detto *trirettangolo*).

Si può aggiungere che: il movimento Π_{21} è un ribaltamento del piano attorno alla retta perpendicolare a p, giacchè appunto questo ribaltamento scambia p e p', lasciando fermi i due semipiani relativi alla retta p.

Infine il movimento Π_{22} cambia ogni raggio nel suo opposto, e perciò può designarsi come un *mezzo giro* del piano attorno a P (*un giro* equivale all'identità). La proprietà enunciata di Π_{22}, si deduce dall'uguaglianza degli angoli opposti formati da due rette incidenti.

Riassumendo: il gruppo costituito dai movimenti del piano che lascian fermi un punto P ed una retta per esso, contiene: l'identità, i ribaltamenti attorno alla retta data e alla sua perpendicolare in P, e il mezzo giro attorno a P.

7. - *Nota sui versi di rotazione del piano.* Abbiamo detto che la distinzione intuitiva di due versi di rotazione del piano, cioè di due versi degli angoli contenuti nel medesimo, si può porre logicamente in base ai postulati I. Ora, conformemente alla stessa intuizione, si deduce dai postulati I e II che « se un movimento del piano fa corrispondere due angoli (uguali) d'ugual verso, sono d'ugual verso anche tutte le altre coppie d'angoli che si corrispondono in esso, e similmente quando si abbiano angoli corrispondenti di verso opposto »: nel primo caso si ha un *movimento concorde* e

l'*uguaglianza* delle figure da esso generata si dice *diretta*, nel secondo caso si ha un movimento *discorde*, generatore d'*uguaglianza inversa*: il movimento concorde si può concepire come un movimento delle figure piane senza uscire dal piano stesso; invece la sovrapposizione di figure inversamente uguali con un movimento discorde, implica d'uscire dal piano; così p. es. per le figure inversamente uguali che si corrispondono in un ribaltamento.

Fra i due movimenti del piano che portano un raggio p in un raggio p', uno è concorde e l'altro discorde, segue da ciò che un qualsiasi movimento discorde, può ridursi ad avere un raggio unito (e quindi costituito di punti uniti) moltiplicando per un movimento concorde, ossia:

I movimenti discordi del piano si ottengono moltiplicando i movimenti concordi per i ribaltamenti attorno alle sue rette.

Capitolo II

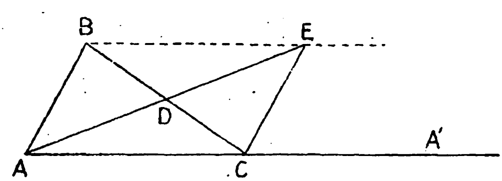
I principî della Geometria generale, indipendente dal postulato d'Euclide

8. - Assumiamo come base della Geometria i postulati I e II, prescindendo dal postulato d'Euclide (III), e cerchiamo di proseguire oltre le 27 proposizioni euclidee, a costituire una generale teoria delle parallele.

Prenderemo le mosse dal teorema (che costituisce per Euclide, la prop. 16):

Teor. 1°. *In ogni triangolo, l'angolo esterno è maggiore dei due interni opposti.*

Rammentiamo brevemente la dimostrazione. Sia ABC un triangolo e si bisechi in D il suo lato BC, quindi si prolunghi AD prendendo $DE = AD$: il triangolo CDE risulta uguale al triangolo ADB, e quindi l'angolo $\widehat{ECD}$, che è una parte dell'angolo esterno $\widehat{BCA'}$ (v.[i] fig.), risulta uguale all'angolo $\widehat{ABC}$: così l'angolo esterno in C del triangolo ABC è maggiore dell'angolo interno $\widehat{B}$, e quindi anche dell'angolo interno $\widehat{A}$ che occupa posizione analoga rispetto al suo opposto al vertice. c. d. d.



Ora osserviamo che i triangoli ACE, ABE ed ABC, appariscono come somme di triangoli uguali, e perciò in essi risultano uguali le somme dei tre angoli interni; notando che uno almeno fra i due angoli EAC, EAB sarà minore o uguale alla metà di BAC, si deduce il:

Teor. 2°. *Dato un triangolo ABC, si può trasformare in* *un altro (equivalente) avente la stessa somma degli angoli interni ed un angolo minore o uguale alla metà di* $\widehat{A}$.

Ripetiamo successivamente questa trasformazione, otterremo così un triangolo la cui somma degli angoli è uguale a quella di ABC, e dove si ha un angolo $\leq \frac{1}{2^n}\widehat{A}$; quindi avremo il:

Teor. 3°. *Un dato triangolo ABC si può sempre trasformare in un altro, avente la stessa somma degli angoli, e con un angolo piccolo ad arbitrio.*

Questa conseguenza è molto notevole. Infatti si ricordi che dal teor. 1° si deduce (con Euclide prop. 17) « la somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti », pertanto avremo il:

Teor. 4°. *La somma degli angoli d'un triangolo è minore o uguale a due retti.*

A questo teorema si arriva, in luogo che alla più espressiva prop. 32, che dà la somma degli angoli del triangolo uguale a due retti, quando si prescinda dal postulato d'Euclide sulle parallele; e ciò proseguendo — come si è visto — gli stessi ragionamenti euclidei.

Teor. 5°. *La somma degli angoli di un poligono di n lati è minore o uguale a 2n — 4 retti.*

È una conseguenza immediata del precedente.

9. - *A priori* si può dubitare che esistano contemporaneamente triangoli in cui la somma degli angoli è uguale a due retti e altri triangoli in cui essa è minore di due retti; ma un esame approfondito risolve il dubbio, come viene espresso dal seguente:

Teorema di Saccheri-Legendre [1]: *Se in un particolare triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, essa è sempre uguale a due retti per qualunque triangolo*; se la somma degli angoli di un particolare triangolo è minore di due retti, altrettanto accade per ogni triangolo.

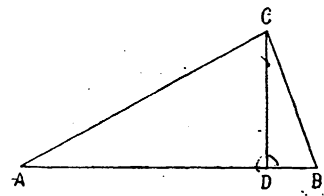
Il teorema fondamentale che abbiamo in vista, viene guadagnato attraverso la serie delle proposizioni che qui enumeriamo:

1) Se esiste un triangolo ABC per cui la somma degli

[1] Saccheri, 1733; Legendre 1794-1823. Cfr. Bonola, op. cit.

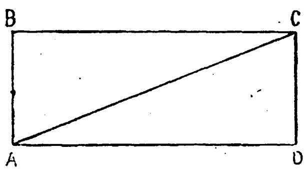
angoli è uguale a due retti, esiste anche un triangolo rettangolo in cui la somma degli angoli è similmente due retti.

Infatti, dal vertice del maggior angolo del triangolo ABC si abbassi la perpendicolare CD sul lato opposto: questa divide ABC nei due triangoli ADC e BDC, rettangoli in D; la somma degli angoli dei due triangoli rettangoli vale 4, e poichè non può essere > 2 per alcuno di essi, si deduce che in ciascuno dei due triangoli rettangoli la somma degli angoli è uguale a due retti.



2) Dato un triangolo rettangolo ABC, in cui la somma degli angoli sia uguale a due retti, si può costruire un quadrilatero (rettangolo) in cui tutti e quattro gli angoli sono retti.

Infatti si costruisca sulla ipotenusa AC, e dell'altra parte di essa il triangolo rettangolo ADC direttamente uguale a CBA: il quadrilatero $ABCD$ risulta rettangolo.



3) Dato un rettangolo $ABCD$, si può costruire un altro rettangolo i cui lati siano grandi quanto si vuole.

A tale scopo basta osservare che ribaltando il rettangolo $ABCD$, attorno ad uno dei suoi lati, si ottiene un altro rettangolo che ha un lato doppio del primo [1].

[1] La dimostrazione consegue quindi adoperando il così detto *postulato d'Archimede* (che Zeuthen ha fatto risalire a Eudosso) « dati due segmenti, esiste sempre un multiplo del primo maggiore del secondo ».

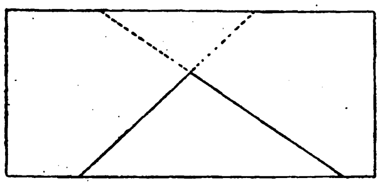
Ma questa proposizione (allo stesso modo che quella usata nel prec. teor. 3°, relativa alla possibilità di render piccolo quanto si vuole un angolo per bisezione ripetuta) è una conseguenza del postulato della continuità della retta.

Infatti, siano AB e AC i due segmenti dati in uno stesso raggio, e si ammetta che, per qualunque intero n: $nAB < AC$; in questo caso si potrà dividere il segmento AC in due parti, distinguendo i punti X per cui esiste un n tale che $nAX > AC$, dai punti X per cui non esiste: questa divisione soddisfa alle condizioni richieste dal postulato di continuità, e conduce così ad un punto di divisione Y, tale che del segmento AY esiste un multiplo maggiore di AC, ma per ogni segmento minore di AY non esiste un siffatto multiplo; questa conclusione è assurda, giacchè il segmento AY può essere bisecato.

4) Dato un triangolo in cui la somma degli angoli vale due retti, si può costruire un rettangolo che contenga nel suo interno un altro triangolo comunque dato nel piano, e di cui un lato contenga un lato di questo.

È una conseguenza immediata delle proposizioni precedenti.

Ora, prolungando i lati del triangolo, il rettangolo resterà diviso in quattro poligoni (triangoli, quadrilateri o pentagoni) per cui le somme degli angoli, prese insieme, valgono otto retti: tenuto conto che in un poligono di n lati la somma degli angoli è minore o uguale a $2n-4$ retti, si deduce che sussiste qui l'uguaglianza, e in particolare risulta uguale a due retti la somma degli angoli del triangolo dato. Con ciò resta stabilito il teorema di Saccheri-Legendre.



10. Il teorema di Saccheri-Legendre apre la via a due ipotesi:

1ª ipotesi: La somma degli angoli di un qualsiasi triangolo è uguale a due retti;

2ª ipotesi: la somma degli angoli d'un triangolo è sempre minore di due retti.

Ora è interessante riconoscere che queste due ipotesi rispondono a due ipotesi che si possono fare intorno alle parallele per un punto ad una retta data.

Consideriamo una retta r e un punto P fuori di essa; abbiamo visto che in base ai postulati I e II esiste per P almeno una retta p che giace nel piano Pr e non incontra r: si può costruire p mandando per P la perpendicolare PR ad r e poi costruendo in P la perpendicolare a questa.

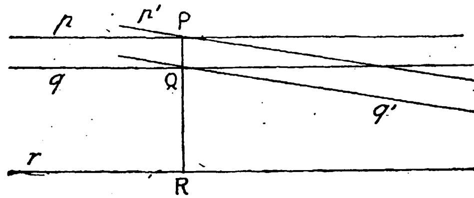
Ora si può supporre:

a) Che p sia l'unica retta del piano per P che non incontra r; in questo caso si dimostra che « *per qualunque punto del piano passa una sola retta non incontrante una retta data* » cioè sussiste *il postulato d' Euclide* (III).

Basterà dimostrare l'asserto per un punto Q che si trovi sulla retta PR, perpendicolare comune a p e ad r (giacchè con un movimento del piano ci si riconduce a questo caso), e si potrà anche supporre che Q sia della stessa parte di P

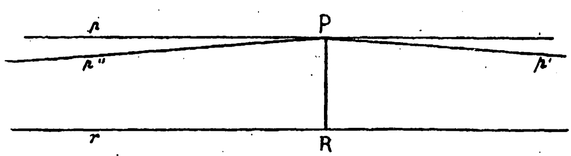
rispetto ad R, e di più anche che Q appartenga al segmento PR; questa ultima ipotesi si può ritenere realizzata, perchè è sempre possibile raddoppiare il segmento PR, sostituendo a p la perpendicolare nell'estremo del segmento raddoppiato alla stessa retta PR.

Ciò posto procederemo per assurdo, come segue. Si conduca per Q la retta q perpendicolare a PR: se per Q passa un'altra retta q' non incontrante r, si costruisca per P la retta p' che — in rapporto alla trasversale PQ — dà luogo con q' ad angoli alterni uguali: si deduce che p' non incontra q' e giace, rispetto ad essa, da parte opposta di r, quindi la



retta p' che è diversa da p, non incontra r; ciò che contradice all'ipotesi a) da cui siamo partiti.

b) Che esistano per P, altre rette — oltre p — non incontranti r; ed allora questa ipotesi si verificherà comunque il punto P sia scelto nel piano. In tal caso ciascuno dei due angoli formati da p col raggio PR comprenderà raggi incontranti e raggi non incontranti r, e la partizione così ottenuta (soddisfacendo alle condizioni del postulato di continuità) darà luogo a due raggi limiti p' e p'', che non incontrano r, ma tali che ogni raggio compreso nell'an-



golo $p'p''$ incontri r: *i due raggi limiti p' e p'' si dicono paralleli* alla retta r, e rispettivamente ai due raggi in cui essa è divisa da R. Così l'ipotesi b) si può esprimere col *postulato di Lobacefski* (1): *nel piano esistono due parallele per un punto ad una retta data.*

Dimostreremo il seguente *Teorema fondamentale. Il postulato euclideo dell'unicità della parallela per un punto ad una retta data corrisponde alla prima ipotesi « somma degli*

(1) Le ricerche del geometra russo risalgono al 1829. Cfr. ENGEL « N. J. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen » Lipsia 1898-99.

angoli d'un triangolo uguale a due retti »; invece il postulato di Lobacefski sull'esistenza di due parallele, corrisponde alla seconda ipotesi « somma degli angoli di un triangolo minore di due retti ».

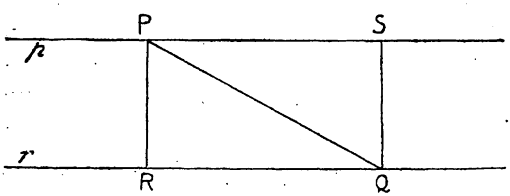
Sappiamo già che dal postulato d'Euclide segue la somma degli angoli d'un triangolo uguale a due retti (Elementi, prop. 32); pertanto basterà dimostrare che, viceversa:

Se la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti, esiste una sola parallela per un punto ad una retta data.

L'asserto si deduce facilmente da una proposizione, già interessante per se stessa, che qui figura come

Lemma: Nell'ipotesi che la somma degli angoli d'un triangolo sia uguale a due retti, due rette aventi una perpendicolare comune sono *rette equidistanti.*

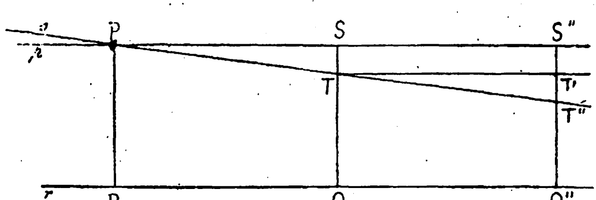
Siano invero p e r perpendicolari alla retta PR, che rispettivamente le sega nei punti P e R; da un punto Q di r si



conduca la perpendicolare QS a p: la nostra ipotesi porta che il quadrilatero $PRQS$ (in cui la somma degli angoli vale quattro retti) sia rettangolo, e che la retta PQ lo divida in due triangoli uguali. Infatti, in ciascuno di questi due triangoli la somma degli angoli vale due retti, e perciò risultano uguali gli angoli alterni interni che la PQ forma colle rette p, r e colle PR, QS. Ciò posto, l'uguaglianza dei due triangoli PRQ e PSQ, porta

$$PR = QS \qquad \text{c. d. d.}$$

Posto il lemma precedente, riprendiamo la stessa figura, e — conservando sempre l'ipotesi « somma degli angoli d'un



triangolo uguale a due retti » — dimostriamo che « una qualunque retta s per P, diversa dalla perpendicolare a PR, incontra necessariamente la r ». Invero si consideri il raggio di s che penetra nella striscia di piano pr, e sia T il punto in cui esso incontra SQ: se T non appartiene al segmento SQ vuol dire che s passa dall'altra parte di r e quindi la sega; poniamo dunque T entro il segmento QS. Ora raddoppiamo i segmenti PS e RQ, costruendo il rettangolo $SQS''Q''$ uguale a $PRQS$, prolunghiamo s ad incontrare $S''Q''$ in T'', e mandiamo per T la perpendicolare a SQ, ad incontrare in T' la detta $S''Q''$: qui risulta $S''T' = ST$, e il triangolo rettangolo $TT'T''$ uguale a PST (essendo uguali i lati PS, TT' e gli angoli in P e T); pertanto avremo $S''T'' = 2ST$. In modo analogo si vede che, considerando la perpendicolare $S^{(n)}Q^{(n)}$ alle p e r ad una distanza nPS, codesta $S^{(n)}Q^{(n)}$ viene incontrata da s in un punto $T^{(n)}$ tale che

$$S^{(n)}T^{(n)} = nST,$$

e quindi — per n assai grande —

$$S^{(n)}T^{(n)} > S^{(n)}Q^{(n)} \qquad (S^{(n)}Q^{(n)} = PR);$$

ma da ciò segue che la s traversa la r ed ha con essa un punto a comune.

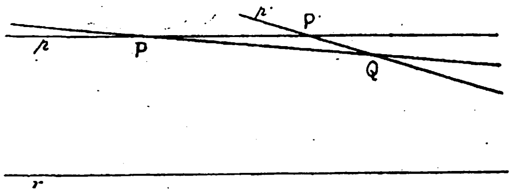
Con ciò resta pienamente dimostrato il nostro teorema fondamentale.

11. - La discussione precedente mostra *a priori possibili due Geometrie*, elevate ugualmente sulla base dei postulati I e II: una Geometria euclidea in cui si ha l'unicità della parallela per un punto ad una retta data e la somma degli angoli del triangolo uguale a due retti, e una Geometria di Lobacefski in cui si hanno due parallele per un punto e la somma degli angoli d'un triangolo minore di due retti. Si può proseguire lo svolgimento di questa seconda Geometria non-euclidea e riconoscere come le proprietà della Geometria euclidea vengano in essa estese o modificate.

Osserveremo anzitutto che, nei riguardi della definizione più generale delle parallele, permangono le due proprietà fondamentali seguenti:

1ª. Se la retta p è parallela alla r, in rapporto al punto P, essa è ugualmente parallela in rapporto ad ogni suo punto.

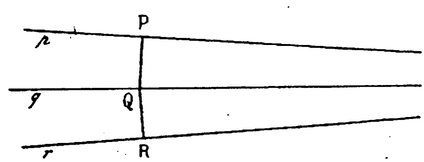
Infatti, se per un altro punto P' si ha un' altra parallela p' alla r, questa p' dovrà penetrare con un suo raggio entro la striscia di piano pr; allora preso un punto Q di tale raggio e congiuntolo con P, si ottiene una retta PQ che non incontra r, pur penetrando nella striscia pr; ma ciò contraddice alla proprietà di retta limite delle non-secanti per P, che spetta alla parallela p.



In conclusione: il parallelismo costituisce una *relazione fra le due rette* p, r, indipendente dalla scelta di un particolar punto di una di esse, che entra nella definizione.

2ª. *Proprietà simmetrica della relazione di parallelismo*: se la retta p è parallela alla r, reciprocamente la r è parallela alla p.

Infatti si consideri un punto Q equidistante dalle due rette (l'esistenza di un tal punto, sopra una perpendicolare a p, segue dal postulato di continuità); si mandino da Q le perpendicolari QP e QR, rispettivamente a p e r, e si costruisca la bisettrice q dell'angolo PQR: il ribaltamento attorno alla retta q scambia le p ed r fra loro, sicchè la relazione delle due rette è simmetrica: c. d. d.



3ª. *Proprietà transitiva della relazione di parallelismo*: due raggi paralleli ad un terzo sono paralleli fra loro. Siano le rette p ed r parallele alla q, e poniamo — per semplicità di discorso — che q si trovi nella striscia pr: se p non fosse parallela ad r, si dovrebbe avere per un punto di p una retta parallela ad r e incontrante q, ciò che (tenuto conto del verso dei raggi paralleli) contraddice al parallelismo di q ed r.

Le proposizioni precedenti estendono, in qualche modo, al caso non-euclideo, la teoria delle parallele; ma la differenza essenziale tiene alla circostanza, già innanzi implicitamente avvertita, che « nell'ipotesi non-euclidea viene meno l'esistenza di rette equidistanti ».

Se si hanno due punti P_1 e P_2 della retta p equidistanti della retta r, le distanze di P_1 e P_2 da r, insieme alle rette p ed r, dan luogo ad un quadrilatero che ha due angoli acuti uguali in P_1 e P_2, segue da ciò che il punto medio di $P_1 P_2$ dà origine ad una perpendicolare comune a p ed r, che ne misura la minima distanza.

Ciò posto si consideri in generale un punto P preso sopra una retta p, e il modo di variare della sua distanza da una retta qualsiasi r; si potrà avere:

a) un minimo uguale a zero, corrispondente all'incontrarsi delle rette p ed r;

b) un minimo maggiore di zero, corrispondente ad una perpendicolare comune (necessariamente unica);

c) infine potrà darsi che, progredendo in un verso di p, la distanza da r diventi piccola quanto si vuole, senza mai annullarsi; si riconosce facilmente che questo *comportamento asintotico* spetta alle *parallele.*

Così dunque: *nell'ipotesi non-euclidea due rette del piano hanno un punto o una perpendicolare comune, ovvero sono parallele.*

12. - *Nota.* Nella Geometria non-euclidea la linea luogo dei punti equidistanti da una retta r, e da una parte di questa, (linea che non è più una retta parallela) assume il nome di *iperciclo.*

L'iperciclo ha comune con il cerchio la proprietà di essere *traiettoria per un gruppo continuo semplicemente infinito di movimenti*: gli scorrimenti del piano che lasciano ferma r. Oltre a questi ∞^1 scorrimenti, che sono movimenti concordi, vi sono anche ∞^1 ribaltamenti, attorno alle perpendicolari ad r, che scambiano l'iperciclo in se stesso: così come i ribaltamenti attorno ai diametri scambiano in se stesso il cerchio.

Oltre al cerchio (luogo dei punti equidistanti da un centro) e all'iperciclo, vi è una terza specie di linee che, nella Geometria non-euclidea, si presentano pure come generalizzazione del cerchio euclideo; tali sono gli *oricicli*, cioè le *traiettorie ortogonali d'un fascio di rette parallele* (i cerchi sono traiettorie ortogonali del fascio delle rette passanti per il centro e gli ipercicli sono traiettorie ortogonali del fascio delle rette perpendicolari all'asse).

Anche l'oriciclo è traiettoria d'un gruppo continuo semplicemente infinito di movimenti del piano, gruppo che si ottiene come limite di un gruppo di rotazioni attorno ad un punto, quando questo s'allontani all'infinito.

13. - Accenneremo soltanto discorsivamente al modo come nella Geometria non-euclidea, viene profondamente modificata la teoria dell'equivalenza, e faremo rilevare (con WALLIS, 1693) come qui non abbia più luogo la considerazione di figure simili.

Enunciamo il

Teorema fondamentale della teoria delle aree: l'area d'un poligono di n lati (convesso o meno) è proporzionale al suo *difetto*, cioè alla differenza fra la somma dei suoi angoli e $2n-4$ retti; il fattore di proporzionalità, che dipende della scelta dell'unità di misura, si può assumere uguale ad 1. Base del teorema precedente è la *proprietà additiva* che spetta al difetto d'un poligono e che costituisce d'altra parte la proprietà caratteristica dell'area: se un poligono è diviso comunque in due altri, il difetto della somma è uguale alla somma dei difetti dei poligoni addendi [1].

Il nostro teorema fondamentale mostra che, nella Geometria non-euclidea, non si possono avere triangoli simili con angoli uguali e superficie diversa; ma più precisamente si riconosce che: nell'ipotesi non-euclidea, *due triangoli aventi tre angoli uguali sono uguali.*

Infatti si considerino due triangoli ABC, $AB'C'$, aventi comune l'angolo in A, uguali gli angoli B, B' e C, C' e (se possibile) il lato $AB' > AB$: non può il segmento $B'C'$ incontrare BC, giacchè altrimenti (per la diseguaglianza cui dà luogo l'angolo esterno d'un triangolo) si avrebbe $\widehat{ABC} > \widehat{AB'C'}$; ma da ciò segue che la superficie $AB'C'$ comprende ABC, quindi il difetto del primo triangolo è maggiore di quello del secondo, e non può sussistere l'uguaglianza dei tre angoli; così si riduce all'assurdo l'ipotesi $AB' > AB$.

[1] P. es.: Se un triangolo ABC viene diviso in due parti per mezzo d'una retta passante per un suo vertice, la somma degli angoli dei triangoli addendi, risulta uguale alla somma degli angoli del triangolo dato più due retti ecc.

14. - *Nota.* L'ultimo teorema ottenuto mostra che: nella geometria piana non-euclidea i criteri d'uguaglianza dei triangoli vengono a concordare con quelli dell'ordinaria geometria sferica. Questa osservazione è molto notevole, giacchè permette di paragonare in senso differenziale (cioè per regioni convenientemente limitate) la geometria piana non-euclidea e la geometria sferica: ordinando le proposizioni che conseguono alla teoria dell'uguaglianza dei triangoli, le due geometrie presenteranno un notevole parallelismo; e d'altra parte si avrà una caratteristica differenza nel senso di certe diseguaglianze, imperocchè la somma degli angoli d'un triangolo, che è minore di due retti nel piano non-euclideo, riesce maggiore di due retti per i triangoli sferici, il cui eccesso (anzichè il difetto) riesce proporzionale all'area.

Già LAMBERT (1786) ebbe ad avvertire l'anzidetta analogia fra la geometria sferica e la geometria che corrisponderebbe nel piano all'ipotesi non-euclidea; e più profondamente questo geometra osservava che l'analogia si muterebbe in identità (tradotte opportunamente le designazioni dei termini) ove il raggio della sfera divenisse immaginario.

L'osservazione di Lambert conduce, d'un colpo, a scrivere le formule della *trigonometria non-euclidea* (TAURINUS, 1825) dove accade che (diventando immaginario il raggio della sfera) le funzioni circolari dei lati d'un triangolo sferico vengono sostituite con funzioni iperboliche.

Partiamo dalle relazioni della trigonometria sferica relative a un triangolo di lati a, b, c ed angoli opposti α, β γ:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \operatorname{sen}\frac{b}{r}\operatorname{sen}\frac{c}{r}\cos\alpha \\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{r} \\ \operatorname{sen}\frac{a}{r} : \operatorname{sen}\frac{b}{r} : \operatorname{sen}\frac{c}{r} = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma . \end{array}\right.$$

Mutando il raggio r in ir si ottengono le

Formule della trigonometria non-euclidea:

$$
1) \quad \begin{cases} Ch\,\frac{a}{r} = Ch\,\frac{b}{r}\,Ch\,\frac{c}{r} - Sh\,\frac{b}{r}\,Sh\,\frac{c}{r}\cos\alpha \\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\,Ch\,\frac{a}{r} \\ Sh\,\frac{a}{r} : Sh\,\frac{b}{r} : Sh\,\frac{c}{r} = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma; \end{cases} \quad (^1)
$$

le quali, come nella trigonometria sferica, si riducono al limite, per $r = \infty$, alle formule dell'ordinaria trigonometria piana (euclidea).

Delle formule suddette, si possono fornire diverse dimostrazioni dirette; ad esempio con un semplice procedimento d'integrazione, osservando che *nell'infinitesimo vale sempre la Geometria euclidea* [2], ovvero anche con metodo più elementare costruendo prima la trigonometria relativa alla superficie (*orisfera*) che taglia ortogonalmente una stella di raggi paralleli (LOBACEFSKI, G. BOLYAI). Infatti, se sull'orisfera si assumono gli oricicli al posto delle rette, vengono verificati i postulati della Geometria piana I e II, ed anche il postulato d'Euclide III, sicchè: *sulla orisfera vale la geometria del piano euclideo* (WACHTER, 1816) [3].

[1] Giova qui ricordare la definizione delle funzioni iperboliche:

$$Sh\,x = \frac{\operatorname{sen}(ix)}{i} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

$$Ch\,x = \cos(ix) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots..$$

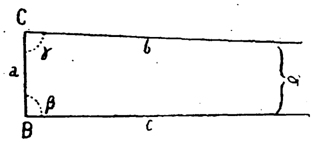
[2] Confronta p. es. KILLING « Einführung in die Grundlagen der Geometrie » Paderborn, 1893.

[3] G. BOLYAI, cercando la forma generale delle proposizioni indipendenti dal postulato d'Euclide (cioè comuni all'ipotesi euclidea e non-euclidea) ha dato al teorema dei seni la seguente forma notevole: i seni degli angoli d'un triangolo sono proporzionali alle circonferenze che hanno per diametri i lati opposti. Lo stesso Bolyai ha osservato che la trigonometria sferica riesce indipendente dal postulato d'Euclide.

Le formule 1) assumono una forma più semplice se si pone in esse $r = 1$: ciò indica che nella Geometria non-euclidea, a differenza dell'ipotesi euclidea, ma a somiglianza della geometria sferica, esiste per le misure lineari una specie di *unità di misura naturale o assoluta.*

Se si sceglie l'unità di misura di superficie in guisa che il quadrilatero equilatero e equiangolo infinitesimo di lato h (cioè il quadrato infinitesimo) sia misurato da h^2, l'area del poligono di difetto d viene data da dr^2 (così come l'area del poligono sferico di eccesso e viene misurata da er^2). La scelta dell'unità di misura naturale, $r = 1$, corrisponde ad assumere come *misure delle aree dei poligoni* semplicemente *i loro difetti.*

Ora le formule 1) si estendono al caso limite d'un triangolo ABC per cui un vertice A vada all'infinito, cioè d'un triangolo compreso da un segmento BC e da due raggi paralleli b e c, dove supporremo — per semplicità — che BC sia perpendicolare a c $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Dalla proporzionalità



$$Sh\, b : Sh\, a = \operatorname{sen} \beta : \operatorname{sen} \alpha,$$

essendo

$$Sh\, b = \infty,$$

segue

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,$$

cioè

$$\alpha = 0.$$

Quindi la seconda delle formule 1) ci dà

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma\, Ch\, a,$$

dove

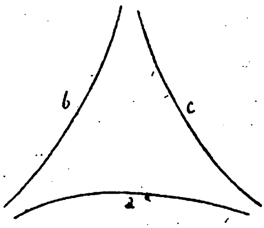
$$\cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = 0, \quad \operatorname{sen} \beta = 4,$$

e però

2) $$\operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{Ch\, a}.$$

La formula 2) *porge l'angolo di parallelismo,* cioè l'angolo che la parallela per C a c forma con la perpendicolare, *in funzione della distanza $a = CB$.*

Appare da codesta formula che l'angolo di parallelismo va indefinitamente decrescendo quando C s'allontana da c, e tende al limite zero per $a = BC = \infty$. Ciò posto, se si consideri accanto a b anche il raggio simmetrico rispetto a BC, parallelo nell'altro verso alla c, si vede che — C allontanandosi all'infinito — si ottiene una figura limite costituente un *triangolo abc in cui ciascun lato è parallelo secondo due versi opposti agli altri due.* Questo triangolo, avendo i tre angoli nulli, ha per *area* π, e tale area costituisce il *limite superiore di tutte le aree triangolari nel piano non-euclideo* (Gauss, 1819).



Capitolo III

La metrica-proiettiva e la indimostrabilità del postulato d'Euclide

15. - Abbiamo veduto che i postulati I e II, fondamento delle prime 27 proposizioni euclidee, aprono l'adito a due ipotesi concernenti la teoria delle parallele, dalle quali dipendono due sistemi geometrici: l'euclideo e il non-euclideo. Dimostrare il postulato d'Euclide, deducendolo dai postulati I e II, equivale a ridurre all'assurdo il sistema non-euclideo. Ma un assurdo non si è palesato negli sviluppi della geometria non-euclidea, che abbiamo disegnati nel precedente capitolo. A vero dire dall'ipotesi non-euclidea derivano conseguenze contraddicenti, in varî modi, alla nostra intuizione geometrica: citiamo p. es., con Gauss, l'esistenza d'un massimo per l'area del triangolo; però tali conseguenze non costituiscono contraddizioni logiche ai postulati I e II, e quindi non danno una dimostrazione del post. III, bensì soltanto motivi per suffragare la convenienza intuitiva di postulare la prop. III.

Ora si domanda: siamo noi certi che la contraddizione logica non ancora rivelatasi nel sistema non-euclideo, non potrebbe rivelarsi in uno sviluppo più progredito? La geometria di Lobacefski-Bolyai costituisce veramente qualcosa di più che un tentativo infruttuoso di fornire una dimostrazione per assurdo del postulato euclideo? O non è invece da sperare che, proseguendo questo tentativo, si possa un giorno o l'altro arrivare alla meta cui tesero, per due mila anni, gli sforzi dei geometri successori d'Euclide?

La soluzione di questi dubbi costituisce precisamente il punto centrale nella questione euclidea. I fondatori della Geometria non-euclidea (Gauss, Lobacefski e Bolyai) appunto si distinguono dai loro predecessori, per avere ritenuto la possibilità logica del sistema basato sulla negazione del postulato d'Euclide, e scorta così l'indipendenza di questo dalle prime 27 proposizioni euclidee; anzi essi videro qui una prova del carattere sperimentale della Geometria, e domandarono all'esperienza e all'osservazione astronomica di decidere, per lo spazio fisico, la questione concernente la validità dell'una o dell'altra ipotesi nella teoria delle parallele (1).

La convinzione della possibilità logica della Geometria non-euclidea è specialmente fondata da LOBACEFSKI, sulle formule della trigonometria; le quali, costituendo un sistema d'equazioni ben concatenate, dan luogo ad un sistema analitico più generale di quello rispondente all'ordinaria Geometria analitica, ed ugualmente possibile. Più tardi si è riusciti, in varî modi, a fornire una dimostrazione geometrica diretta della Geometria non-euclidea, cioè dell'indipendenza del post. III dagli I e II.

(1) Anzitutto GAUSS nel § 28 delle sue « Disquisitiones circa superficies curvas » esamina i lati del triangolo geodetico Brocken-Hohehagen-Inselberg (circa km. 69, 85, 197), deducendone la validità della geometria euclidea nei limiti d'approssimazione che occorre considerare sulla nostra terra. Quindi LOBACEFSKI, riprendendo il concetto di SCHWEIKART che all'ipotesi non-euclidea aveva dato il nome di « astrale », esamina le parallassi delle stelle, arrivando alla stessa conclusione nell'ordine astronomico, e nei limiti di precisione consentiti dalle più delicate misure. Infatti nella memoria sui « Nuovi fondamenti della geometria con una completa teoria delle parallele » (1835-1838) di LOBACEFSKI, che si può leggere nella traduzione di F. Engel col titolo « N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen » (Teubner Lipsia 1899), si trovano i resultati seguenti.

Se si suppone la validità fisica della geometria non-euclidea, le parallassi delle stelle conducono a determinare un limite inferiore per l'unità di misura che nel sistema compare come naturale o assoluta: invero la parallasse d'una stella S, il cui raggio visuale s'assuma perpendicolare alla distanza della terra dal sole, ci fornisce un limite superiore per la differenza fra 90° e l'angolo di parallelismo relativo a codesta distanza. Così dalla parallasse di Sirio, che ritiene 1″, 24, Lobacefski deduce che la detta unità supera in cifra tonda 170 mila volte il diametro dell'orbita terrestre (la misura di questo in rapporto a tale unità essendo 0,000006012). Risultati più espressivi si ottengono considerando che l'anzidetta parallasse vale in realtà 0″, 37, e che esistono stelle la cui parallasse è minore di 0″, 1: si trova così che l'unità di misura naturale dello spazio non-euclideo dovrebbe superare un milione di volte il nominato diametro; una tale misura deve ritenersi praticamente come infinita!

Il concetto comune che ricorre nelle dimostrazioni di compatibilità e d'indipendenza di postulati, è quello della *Geometria astratta*, che — a sua volta — esce fuori dalla piena consapevolezza del significato che spetta all'ordinamento logico d'una teoria geometrica.

Al lume della critica logica moderna, noi vediamo oggi nel sistema dei postulati posti a base d'una teoria T, un sistema di relazioni logiche che intercedono fra alcuni concetti primitivi (indefiniti) A, B, C...; e poichè in T tutte le proposizioni vengono dedotte logicamente dai postulati, si può dire che questi porgono la *definizione implicita* di A, B, C...: altre proprietà di A, B, C, che si riattacchino a qualche immagine intuitiva dei detti concetti, ma non seguano dai postulati introdotti, non appartengono alla teoria T, alla quale resta estranea l'ulteriore determinazione dei concetti A, B, C... che quelle proprietà vorrebbero recare. Per preservarci dalla tentazione d'aggiungere così ad A, B, C... un contenuto intuitivo, che ecceda da quanto è richiesto per la teoria T, potremo sostituire A, B, C... con simboli scelti mediante una convenzione qualsiasi, i quali facciano dimenticare il significato che originariamente si voleva attribuire a quei concetti. Per tal modo s'avrà una formulazione astratta della teoria T', rispetto alla quale T apparirà soltanto come una possibile interpretazione: altre interpretazioni, ugualmente legittime, s'avranno attribuendo ad A, B, C... significati diversi, in guisa da soddisfare tuttavia alle medesime relazioni logiche, espresse dai postulati di T.

Le considerazioni precedenti si possono chiarire anche nel modo seguente. Pongasi che un erudito ricercatore, il quale si diletti, fra qualche migliaio d'anni, ad investigare la nostra letteratura scientifica, riesca soltanto a possedere un trattato di Geometria, ed abbia la fortuna che questo sia l'opera d'un autore, non soltanto logico, ma anche minutamente pedante, che tutte le relazioni logiche esprima sempre nella medesima precisa forma, astenendosi dall'uso di quei sinonimi che il nostro colorito linguaggio prende a prestito dall'intuizione.

Il prof. X (giacchè sarà conveniente dare una cattedra all'uomo che si accinge con tanta fatica a perpetuare l'opera scientifica dell'epoca nostra!), confrontando le diverse proposizioni, e valendosi forse di qualche altro documento letterario caduto nelle sue mani, riesce infine a decifrare il senso delle relazioni logiche; ma, poichè il libro non contiene figure, i termini geometrici (A, B, C...) restano per il prof. X assolutamente indecifrabili. A lui rimane soltanto la possibilità di fare delle ipotesi: A, B, C... possono ricevere diverse interpretazioni, che danno un senso plausibile alla teoria. Così il prof. X ha scoperto il *principio che una teoria scientifica è capace di ricevere interpretazioni diverse*, le quali si presentano a lui come possibili traduzioni d'un testo, pervenutogli quale retaggio di antichi predecessori.

Vogliamo proseguire la nostra fantastica previsione, supponendo che il libretto di Geometria caduto nelle mani del prof. X, sia precisamente un libretto di Geometria non-euclidea. Il prof. X ha tentato dapprima di spiegare le parole « punto, retta, piano, movimento... », colle parole analoghe del proprio linguaggio; ma, non avendo mai sentito dire che per un punto possano condursi due parallele ad una retta data, e ricordando da quanto gli fu insegnato al Ginnasio che la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti (nè potendo credere che essa fosse minore di due retti al secolo ventesimo!), il pover'uomo si è deciso a tentare qualche altra più sensata interpretazione. Noi vogliamo venirgli in aiuto in quest'opera, presentando qui una semplice interpretazione o traduzione della Geometria piana non-euclidea. La quale varrà a dimostrare la possibilità logica del sistema, cioè la compatibilità dell'ipotesi non-euclidea coi postulati I e II, ossia *l'indipendenza del post.* III *dagli* I *e* II.

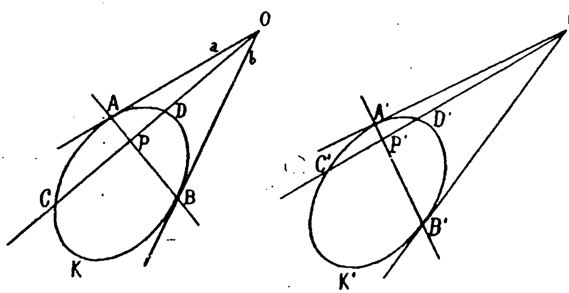
16. - L'interpretazione che vogliamo fornire della Geometria piana non-euclidea, esige il possesso delle nozioni elementari di Geometria proiettiva, e in particolare di quelle che si riferiscono alle coniche e alle loro trasformazioni omografiche [1].

Ricordiamo che, in conseguenza della generazione proiettiva delle coniche (teorema di STEINER), si può definire la proiettività fra coniche e dimostrare il teorema fondamentale circa la sua determinazione: due coniche K e K' sono proiettive quando sono riferite punto per punto in modo che,

[1] Cfr. p. es. ENRIQUES « Lezioni di Geometria proiettiva » Cap. IX e X 3ª ed. Bologna, Zanichelli.

proiettando le serie di punti omologhi da due centri presi sulle coniche stesse, si ottengano fasci proiettivi; il teorema di STEINER rende questa definizione indipendente dall'arbitrarietà che si ha nella scelta dei detti centri; si ottiene quindi il teorema fondamentale che: la proiettività fra due coniche è determinata da tre coppie di punti omologhi AA', BB' e CC'.

Ora, si considerino le tangenti a e b a K, rispet. in A e B, le quali s'incontrino in O; e similmente si consideri il punto O', intersezione delle due tangenti a K' in A' e B'. Fra i piani di K e K' vi è una determinata omografia, che



fa corrispondere ordinatamente ai punti A, B, C, O, i punti A', B', C', O'; questa omografia trasforma la K in un'altra conica che ha comuni con K' i punti A', B', C', e le tangenti in A', B', e quindi coincide con K': in tal guisa la proiettività fra K e K', determinata dalle tre coppie di punti omologhi AA', BB' e CC', viene subordinata dall'omografia anzidetta.

Per ciò che segue occorrerà completare queste nozioni, esaminando come possa definirsi una trasformazione omografica di due coniche, mediante due gruppi armonici dati sopra di esse. Ricordiamo dunque che se due coppie di punti AB e CD, appartenenti alla conica K, si separano armonicamente, le due rette AB e CD sono coniugate, cioè l'una d'esse passa per il polo dell'altra: nella figura questa relazione viene indicata facendo passare la CD per il punto O intersezione delle tangenti a K in A e B.

Si abbiano ancora sulla conica K' le coppie armoniche $A'B'$ e $C'D'$. Vi sono *due* trasformazioni omografiche di K in K', che portano A in A', B in B', e rispettivamente C in C' e D in D', ovvero C in D' e D in C'. Quindi, designando con P e P' le intersezioni delle coppie di rette $AB \cdot CD$ e $A'B' \cdot C'D'$, avremo: esistono due trasformazioni omografiche di K in K', che portano il punto P in P', A in A' e B in B'. Qualora la K' venga a sovrapporsi a K, diremo: ***esistono due trasformazioni omografiche d'una conica in se stessa che portano un punto P interno a K in un altro punto interno P', e contemporaneamente due punti A e B di K, estremi di una corda contenente P, in due punti A', B' estremi di una corda contenente P'.*** (Una di queste trasformazioni è ***concorde***, cioè subordina su K una proiettività concorde, e l'altra è ***discorde***).

17. - Queste premesse occorrono a spiegare l'interpretazione della Geometria non-euclidea, che abbiamo in vista.

Si traducano i termini geometrici del linguaggio ordinario nel modo che viene indicato dal seguente quadro:

Piano.	Regione piana interna alla conica K.
Punto.	Punto interno a K.
Retta.	Corda di K (estremi esclusi).
Punti susseguentisi sulla retta.	Punti susseguentisi sulla corda.
Movimento del piano.	Trasformazione omografica della regione piana interna a K.
Figure piane uguali.	Figure trasformabili con una omografia che lascia ferma K.

Quando i termini geometrici ricevono questa interpretazione, vengono senz'altro verificati i postulati I e II.

Infatti il postulato I esprime che « le rette sono linee aperte, tali che ne passa una per due punti »; evidentemente ciò si può dire del sistema delle corde di K (da cui vengono esclusi gli estremi). In secondo luogo, il postulato II esprime che « i movimenti sono omografie trasformanti punti susseguentisi d'una retta (aperta) in punti susseguentisi, e formanti un gruppo cui appartengono due omografie che portano un punto P in un punto P' ed un raggio per P in un raggio per P' »; ora le omografie che trasformano in se stessa la conica K, formano un gruppo che soddisfa alle medesime proprietà per riguardo alla regione interna a K. Così il sistema metrico-proiettivo che s'ottiene rispetto a K, in base alle convenzioni sopra indicate, dà luogo a una teoria geometrica in cui valgono i postulati I e II.

Nasce ora la domanda: la metrica-proiettiva relativa a K, verifica l'ipotesi euclidea o l'ipotesi non-euclidea?

La risposta è immediata, ove si osservi che devono ritenersi rette *parallele*, le corde di K aventi (su K) un estremo comune; appare così che, nel nostro sistema convenzionale, « per un punto passeranno due parallele ad una retta data ». Dunque:

La metrica-proiettiva rispetto ad una conica porge una interpretazione della Geometria piana non-euclidea. La possibilità di tale interpretazione fornisce la prova della indimostrabilità del postulato d'Euclide, cioè della sua indipendenza dai postulati della retta e del movimento (I e II).

18. - È interessante accennare come si proseguono alcuni sviluppi della metrica-proiettiva rispetto ad una conica K, rispecchiando proprietà fondamentali della Geometria non-euclidea, cui pure innanzi accennammo.

1) Rette *perpendicolari* del piano non-euclideo sono qui rappresentate da *rette coniugate* rispetto alla cònica K (cioè da rette di cui ciascuna contiene il polo dell'altra): da ciò emerge l'esistenza di *una* perpendicolare per un punto ad una retta data.

2) I quattro movimenti del piano non-euclideo che lasciano fermi un punto P e una retta p per esso, sono dati qui dalle quattro trasformazioni omografiche di K che lascian fermo un punto P e lasciano pur fermi, ovvero scambiano fra loro, i due punti A e B in cui p incontra K. Queste quattro trasformazioni sono:

a) l'identità;

b) e *c*) le due omologie armoniche aventi come assi p e la sua retta coniugata per P, e come centri i loro poli rispetto a K: trasformazioni rappresentanti i « ribaltamenti rispetto a p e alla sua perpendicolare in P »;

d) l'omologia armonica che ha per centro P e per asse la sua polare rispetto a K: trasformazione che rappresenta la « rotazione di un mezzo giro ».

3) I *cicli*, *ipercicli* e *oricicli* della Geometria non-euclidea si ottengono nella metrica-proiettiva rispetto a K, considerando le traiettorie dei gruppi continui ∞^1 d'omografie trasformanti K in se stessa.

Queste traiettorie sono *coniche toccanti K in due punti* (reali o meno), che sono i punti uniti della proiettività subordinata sopra K [1]. Pertanto si avranno tre specie di traiettorie siffatte:

a) Quelle che rappresentano i « cerchi », corrispondono ai gruppi d'omografie che trasformano in se stessa la K e lascian fermo un punto (centro) interno ad essa; la polare di questo punto (che resta pur ferma pel gruppo) riesce esterna, cioè incontra la K in due punti immaginari coniugati, che sono i punti di contatto di K con la nostra traiettoria.

b) Le coniche che rappresentano « ipercicli » corrispondono a gruppi ∞^1 di omografie che lasciano ferma K ed una sua retta secante (quindi anche un punto, esterno, suo polo): esse riescono così bitangenti a K in due punti reali e distinti.

c) Finalmente gli « oricicli » corrispondono a gruppi ∞^1 d'omografie lascianti ferma K e subordinanti su di essa una proiettività parabolica: così queste coniche sono caratterizzate dalla proprietà di avere con K un contatto quadripunto, giacendo internamente ad essa.

4) La *distanza* di due punti P, Q nel piano non-euclideo (e analogamente l'*angolo* di due raggi p e q uscenti da un punto) si può definire in base alle due proprietà seguenti:

a) la distanza è un *invariante* rispetto al gruppo dei movimenti, cioè rimane invariata per questa trasformazione;

b) la distanza gode della *proprietà additiva*, cioè « se un segmento PR è somma di due segmenti PQ e QR, la distanza PR è la somma $PQ + QR$ ».

Ora, per definire la distanza di due punti PQ nella metrica proiettiva relativa ad una conica K, consideriamo i due punti A e B in cui la retta PQ sega K. Avremo un invariante della coppia di punti PQ, rispetto al gruppo delle omografie trasformanti in sè K, che ci verrà offerto dal birapporto

$$(ABPQ);$$

[1] La dimostrazione elementare dell'asserto, si può ricavare dalla proprietà seguente: s'applichi ripetutamente una medesima omografia piana a due punti generici A e B, costruendo le serie di punti $AA'A''A'''A''''....$, $BB'B''B'''B''''....$; queste due serie di punti sono proiettive, trasformandosi l'una nell'altra mediante l'omografia che ha gli stessi punti uniti della data e che porta A in B.

è facile riconoscere che ogni altro invariante della coppia PQ rispetto al gruppo nominato è una funzione del detto birapporto, non potendosi avere due invarianti indipendenti di P, Q. Ma al detto birapporto non spetta la proprietà addittiva, bensì la proprietà *moltiplicativa*, giacchè — se P, Q, R sono in linea retta — si ha

$$(ABPR) = (ABPQ)(ABQR);$$

pertanto si è condotti ad assumere la *distanza* PQ *proporzionale al log.* $(ABPQ)$.

Una definizione analoga riceve l'angolo di due rette p, q uscenti da un punto O: ove si designino con a, b le tangenti (immaginarie coniugate) condotte da O a K, *l'angolo viene dato da*

$$\log. (abpq).$$

19. - A complemento delle cose dette faremo ancora le seguenti osservazioni.

A quel modo che la Geometria del piano non-euclideo può essere interpretata come metrica-proiettiva rispetto ad una conica K, cioè come teoria delle proprietà invarianti rispetto al gruppo delle omografie piane che trasformano K in se stessa, allo stesso modo la Geometria non-euclidea dello spazio può ricevere una interpretazione analoga, come metrica-proiettiva rispetto ad una superficie del secondo ordine, p. es. ad una sfera S: si prende qui come spazio la regione interna ad S, e come « movimenti » le trasformazioni omografiche di S in se stessa.

Questa interpretazione vale a stabilire *l'impossibilità di dimostrare il postulato d'Euclide, anche facendo uso di considerazioni stereometriche, a partire dai postulati fondamentali relativi alla retta, al piano e al movimento.*

Un'altra osservazione degna di nota è che: *la Geometria proiettiva riesce indipendente dal postulato d'Euclide.*

Difatti nell'ipotesi non-euclidea si avranno a considerare nello spazio tre specie di stelle:

a) stelle di rette uscenti da un punto proprio;

b) stelle di rette perpendicolari ad un piano;

c) e stelle di rette parallele, nello stesso verso.

Due rette coplanari determinano sempre una stella a cui appartengono; e la considerazione di questa, vale a definire due specie di *punti impropri*: punti impropri *ideali* corrispondenti alle stelle *b*), e *punti limiti* di punti propri che s'allontanano *all' infinito*, corrispondenti alle stelle *c*). Ora, dopo l'introduzione dei punti impropri, la retta diventa una linea chiusa, e restano soddisfatti senza eccezione i postulati della Geometria proiettiva (due rette coplanari hanno sempre un punto a comune).

È interessante osservare che *la costruzione della Geometria proiettiva entro il piano* (o lo spazio) *non-euclideo, conduce a considerare una conica* (o quadrica) *limite*, cioè luogo dei punti impropri all'infinito, *rispetto a cui la* nostra Geometria non-euclidea, si può interpretare come *metrica-proiettiva*. Da questo punto di vista la considerazione della metrica-proiettiva rispetto ad una conica, appare come qualcosa di più che una possibile interpretazione convenzionale: essa porge una forma semplice e naturale allo studio di quella teoria. Se poi la conica limite si fa degenerare, come inviluppo, in due fasci (*punti ciclici* del piano) e quindi come luogo in una retta contata due volte, questa degenerazione fa passare dalla Geometria di Lobacefski al caso limite della Geometria d'Euclide [1].

20. - *Nota sulla Geometria di Riemann.*

In luogo di assumere a fondamento d'una metrica-proiettiva del piano, una conica reale K, si può supporre che K diventi immaginaria, corrispondendo ad una polarità reale uniforme. Allora si ottiene una Geometria che soddisfa ancora a tutti i postulati I e II, salvo che in essa *la retta non figura più come linea aperta, ma come linea chiusa* giacchè — in questo caso — nessun segmento viene tolto alla retta (chiusa) della Geometria proiettiva. Qui accade che due rette d'un piano s'incontrino sempre, cioè *non vi sono parallele*. La Geometria che così nasce (RIEMANN) può essere considerata come un'altra Geometria non-euclidea, accanto a quella di LOBACEFSKI.

Le due Geometrie non-euclidee hanno fra loro strette

[1] Si confronti l'interpretazione delle ordinarie relazioni metriche come relazioni proiettive colla retta all'infinito e coll'involuzione assoluta (punti ciclici) sopra di essa: ENRIQUES « Lezioni di Geometria proiettiva » cap. VII.

analogie, e posseggono a comune i criteri d'uguaglianza dei triangoli; però nella Geometria riemanniana non vale sempre la diseguaglianza dell'angolo esterno del triangolo: l*a somma degli angoli d'un triangolo, risulta sempre maggiore di due retti*, come ben si vede nel triangolo formato da una retta con due perpendicolari (le quali, sempre s'incontrano).

La Geometria riemanniana, considerata entro una regione limitata del piano, (cioè in senso differenziale), trova una semplice interpretazione nella *geometria sopra la sfera*, dove le rette vengono sostituite da cerchi massimi = geodetiche. In senso integrale, la Geometria sferica non risponde più completamente alle ipotesi che stanno a base della Geometria riemanniana, giacchè vi sono coppie di punti (opposti) che appartengono ad infinite rette = geodetiche.

Una esatta interpretazione della Geometria piana non-euclidea di RIEMANN, si ha invece nella Geometria della stella di rette, dove ai « punti » e alle « rette » del piano si facciano corrispondere le « rette » ed i « piani » della stella, e si assuma in questa — per determinare una metrica-proiettiva — il cono che proietta il cerchio immaginario all'infinito delle sfere (definito dalla polarità ortogonale entro la stella).

21. - *Nota intorno all'interpretazione della Geometria piana non-euclidea sopra le superficie a curvatura costante negativa.*

Come la Geometria del piano di RIEMANN, presa in senso differenziale, trova una interpretazione nella Geometria sopra la sfera, così analogamente si può chiedere se anche la Geometria non-euclidea di LOBACEFSKI sia suscettibile d'essere interpretata come Geometria sopra una superficie. S'intende che in una siffatta interpretazione alle rette del piano debbono corrispondere « geodetiche » (cioè linee misuranti la minima distanza) tracciate sulla superficie, e alle figure « eguali » del piano (sovrapponibili per un movimento di questo) figure superficiali « geodeticamente uguali », quali sono figure sovrapponibili per un movimento della superficie, concepita come un velo flessibile e inestendibile.

La domanda posta innanzi riceve una risposta affermativa: *la geometria del piano di Lobacefski, presa in senso differenziale, si può interpretare come geometria sopra una* *superficie a curvatura costante negativa* (1); questa interpretazione, accennata da Riemann, fu sviluppata in un classico « Saggio » del BELTRAMI (2).

L'interpretazione accennata della Geometria non-euclidea, si può riattaccare semplicemente alla metrica-proiettiva rispetto ad una conica K. Infatti l'espressione della distanza fra due punti incontrata al n. 18, conduce a rappresentare la distanza di due punti infinitamente vicini con una forma differenziale quadratica

$$E(uv)du^2 + 2F(uv)dudv + G(uv)dv^2 = 0$$

che uguagliata a zero porge l'equazione della conica K come inviluppo. Perciò nell'interno della conica K, supposta reale, la nostra forma differenziale è *definita*, e si può ritenere sempre positiva. Ora, la detta forma quadratica differenziale si può assumere come quadrato dell'elemento lineare d'una superficie

1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v):$$
$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

occorre perciò integrare il sistema d'equazioni alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E(u, v), \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} = F(u, v), \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G(u, v). \end{cases}$$

(1) Curvatura (totale) d'una superficie in un punto (GAUSS) è il prodotto delle curvature principali spettanti alle sezioni normali della superficie che toccano le due tangenti coniugate ortogonali. La curvatura è invariante per flessioni senza estensione della superficie; quindi una superficie per cui valga il principio del movimento delle figure, deve essere a curvatura K costante: se $K = 0$ la superficie è sviluppabile e la sua Geometria coincide (differenzialmente) con quella del piano ordinario; se $K > 0$ la superficie si può applicare sopra una superficie sferica e porge così la geometria del piano riemanniano; infine se $K < 0$ si ottiene una famiglia di superficie (dette *pseudo-sferiche*) su cui vale, differenzialmente, la geometria del piano non-euclideo di LOBACESFKI.

(2) Cfr. « Opere » t. I, pag. 281.

La superficie 1) così ottenuta, ammette un gruppo triplamente infinito di trasformazioni in se stessa che ne conservano il ds^2 (movimenti sopra se stessa); le quali corrispondono alle trasformazioni omografiche di K in sè. Infatti il gruppo di queste omografie si lascia generare, per moltiplicazione, mediante ∞^2 omologie armoniche, le quali danno — sopra la superficie — trasformazioni involutorie, conservanti, non soltanto l'equazione $ds^2 = 0$, ma anche il valore assoluto del ds^2.

Così dunque si riesce a costruire una superficie (a curvatura costante negativa) la cui Geometria porge un' interpretazione di quella del piano non-euclideo di Lobacefski (1).

---

(1) La costruzione anzidetta si può mettere in rapporto con un teorema di BELTRAMI, concernente le superficie di cui le geodetiche sono rappresentabili con equazioni lineari. Cfr. ENRIQUES « Rendiconto dell'Accademia di Bologna, 1902-3 ».

INDICE

Capitolo I

Il primo libro degli Elementi e le premesse della Geometria d'Euclide.

Capitolo II

I principî della Geometria generale indipendente dal postulato d'Euclide.

CAPITOLO III

La metrica-proiettiva e la indimostrabilità del postulato d'Euclide.