Enriques, Federigo

Questioni numerative e loro significato nella geometria sopra le curve algebriche

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (V) **XXVIII** (1919), pp. 370-374.

Matematica. — *Questioni numerative e loro significato nella geometria sopra le curve algebriche.* Nota del Corrisp. FEDERIGO ENRIQUES.

1. In un corso di Lezioni tenuto all'Università di Bologna, l'anno 1897-98, ho porto una dimostrazione dell'invarianza della serie canonica (¹) g_{2p-2}^{p-1} che si fonda sulla considerazione di una certa serie covariante di una g_n^r, cioè della serie (che ho chiamata « jacobiana ») a cui appartengono i gruppi dei punti doppî delle g_n^1 contenute nella g_n^r. Si ha infatti, designando con $|a|$ e $|b|$ due serie diverse, date sulla medesima curva, e con $|a_j|$ e $|b_j|$ le loro jacobiane:

$$|a_j - 2a| = |b_j - 2b|,$$

onde $|a_j - 2a|$ costituisce una serie invariante per la curva data, che è poi (per una curva piana d'ordine m e di genere p) la g_{2p-2}^{p-1} segata dalle curve aggiunte d'ordine $m - 3$.

Ora l'idea fondamentale di questa dimostrazione si può estendere in varie guise. Ogni qualvolta si costruisca sulla curva un gruppo di punti covariante di una g_n^2 o g_n^r (ovvero anche di più serie di certe dimensioni) si è condotti a considerare una serie lineare covariante della serie completa che contiene la g_n (ovvero delle serie complete contenenti le date). E diverse considerazioni, sulle quali non mi indugerò in questa Nota, mi hanno indotto a riconoscere un fatto generale che — senza ricercarne qui una dimostrazione — formulerò quale

Principio euristico. Le serie lineari che si possono definire sopra una qualsiasi curva di genere p, come covarianti razionali di serie date,

(¹) Cfr. il Programma pubblicato nel Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche (Aprile 1899) e (per le superficie) Atti R. Acc. Torino, 1901. Cfr. pure Memorie R. Acc. Bologna, 1914.

si possono formare combinando, per somma e sottrazione, le serie date colla serie canonica g_{2p-2}^{p-1}.

Questo principio porge un metodo per la risoluzione delle questioni numerative, e permette — nei singoli casi — di aggiungere, alla formula cercata, la sua interpretazione funzionale.

Mi limiterò ad indicare alcuni esempî istruttivi. Ed, in particolare, ritroverò per questa via una formula già data da Schubert, Segre, Castelnuovo, che — per l'uso fattone dal Castelnuovo nella dimostrazione del teorema di Riemann-Roch — ha acquistato una importanza fondamentale per lo sviluppo della teoria, secondo l'ordine di concetti di Segre ([1]) e Castelnuovo ([2]). La maggiore semplicità (oltrechè l'espressività) del metodo che mi porge la detta formula, anche in confronto al metodo che si basa sul principio di corrispondenza sopra le curve (adoperato da Severi), risulterà evidente ad ognuno.

2. Anzitutto la definizione della serie jacobiana di una serie $|a|$ si lascia generalizzare, prendendo in $|a|$ una g_n^{r-1} con $r > 2$, e costruendone il gruppo dei punti r-pli: invero è facile riconoscere che questo gruppo, G, al variare della g_n^{r-1} entro $|a|$ varia in una serie lineare. A tale scopo si può invocare il teorema generale che « una serie razionale di gruppi di punti è sempre contenuto in una serie lineare » o, più semplicemente per questo caso, basta osservare che alle ∞' g_n^{r-1} aventi a comune una g_n^{r-2} (e quindi contenute in una g_n^r) corrispondono gruppi G formanti una involuzione lineare, ossia equivalenti.

Ora sommeremo alla data g_n^{r-1} un punto P e troveremo che esso si aggiunge al gruppo dei punti r-pli della g_n^{r-1} contando, nel gruppo analogo della $g_{n+1}^{r-1} = g_n^{r-1} + P$, precisamente per r: si valuterà tale molteplicità, r, che costituisce un carattere differenziale del punto P sulla curva, sostituendo a questa una curva razionale osculatrice. In tal guisa, designando con $|a_r|$ la serie lineare che contiene i gruppi di punti r-pli di $|a|$ ($|a_j| = |a_2|$) e con $|b_r|$ l'analoga serie covariante di una serie $|b|$, si troverà la relazione fondamentale:

$$|(a+b)_r| = |a_r + rb| = |ra + b_r|.$$

Di qui emerge che la serie $|a_r - ra|$, supposta esistente, è un invariante della curva. Si riconosce di più che essa è multipla della serie canonica, secondo il numero $\dfrac{r(r-1)}{2}$.

([1]) *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Mat., serie II, tomo XXII).

([2]) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Accademia Torino, tomo XXIV, 1889).

A tale scopo si consideri una $g^{r-1}_{(r-1)n}$ composta con una g'_n, cioè $(r-1)$-pla di questa. I punti r-pli saranno dati dai punti doppî della g'_n, da contarsi un certo numero x di volte. Siccome x esprime un carattere differenziale, si potrà calcolare sopra la retta, e si troverà

$$x = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Pertanto, designando ora con $|a|$ la serie completa a cui appartiene la g'_n, si avrà

$$|\{(r-1)\,a\}_r| = |a_r + r(r-2)\,a| = \left|\frac{r(r-1)}{2}\,a_2\right|,$$

$$|a_r - ra| = \left|\frac{r(r-1)}{2}\,(a_2 - 2a)\right| \quad \text{c. d. d.}$$

Si ha dunque il *significato funzionale della nota formula che assegna il numero dei punti r-pli di una* g^{r-1}_n :

$$\mathrm{N} = nr + \frac{r(r-1)}{2}(2p-2) = r\,\{n + (r-1)(p-1)\}.$$

3. In ciò che segue mi limito a trovare la formula numerativa, avvertendo che il procedimento ne reca con sè l'interpretazione.

Si voglia determinare il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g'_m e ad una g^r_n, cioè appartenenti ad una G_m della prima serie e ad un G_n della seconda. Il numero N_r cercato si designi, a priori, come funzione di r, n ed m: $\mathrm{N}_r = f(r, n, m)$.

Sommando alla g^r_n un punto fisso P, si troverà:

$$f(r, n+1, m) = f(r, n, m) + \binom{m-1}{r}.$$

La ricerca del numero dei gruppi, G_{r+1}, di $r+1$ punti, comuni alla data g'_m e alla g^r_n si riconduce così alla ricerca dei gruppi di $r+1$ punti comuni alla g'_m stessa e ad una g^r_{rn} contenuta nella serie r-pla della g^r_n data. Assumendo come serie g^r_{rn} una serie composta dei gruppi di una g'_n presi ad r ad r, il problema viene risolto dalla conoscenza delle coppie comuni alla g'_m e alla g'_n che sono

$$(m-1)\,(n-1) - p.$$

Infatti si otterranno i G_{r+1} associando a ciascuna delle coppie nominate $r-1$ punti del gruppo G_m di g'_m che la contiene.

Avremo dunque:

$$f(r, rn, m) = \{(n-1)\,(m-1) - p\}\binom{m-2}{r-1},$$

e di qui coll' uso della formula ricorrente che precede, o — addirittura — mutando n in n/r, si deduce

$$N_r = f(r, n, m) = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p.$$

L' interpretazione funzionante della formula viene suggerita dal procedimento che ci ha condotto a stabilirla e non presenta difficoltà.

Nel caso più semplice di $r = 2$, e prendendo due g'_n contenute in una stessa g^2_n, si ottiene in tal guisa la definizione della serie canonica come differenza della serie cui appartiene il gruppo delle coppie neutre e del multiplo secondo $n-3$ della g^2_n; sicchè, traducendo in linguaggio proiettivo, si ha la *dimostrazione diretta dell' invarianza della serie segata sopra una curva piana d'ordine* n *dalle curve aggiunte d'ordine* $n-3$. Nondimeno questa dimostrazione diretta è superata in semplicità dalla dimostrazione che si fonda sull'uso della serie jacobiana, specialmente perchè non importa qui fare appello al teorema che una serie razionale è contenuta in una serie lineare.

4. Ora conviene rilevare che il procedimento, adoperato per trovare il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g^r_n e ad un'altra involuzione lineare g'_m, si estende al caso in cui la g'_m venga rimpiazzata con un'involuzione irrazionale γ'_m. Si è anche qui ricondotti al numero delle coppie comuni ad una g'_n e alla γ'_m.

Ma questo numero si lascia calcolare collo stesso metodo usato dal Segre per una g'_n e una g'_m, metodo che — nello sviluppo delll' A. — porge la dimostrazione dell' invarianza del genere e la formula di Zeuthen. Infatti si associno i gruppi della g'_n che contengono due punti di un medesimo G_m della γ'_m; si avrà fra gli elementi della g'_n una corrispondenza

$$[n(m-1), n(m-1)]$$

con $2n(m-1)$ elementi doppî. Questi elementi doppî corrispondono: ai gruppi G_n aventi una coppia G_2 comune con un G_m di γ'_m, da contarsi due volte, e ai gruppi della γ'_m dotati di un punto doppio, che — per una γ'_m di genere π — sono in numero di $\delta = 2p-2-m(2\pi-2)$ (formula di Zeuthen). Si deduce che il numero delle coppie G_2 comuni ad una γ'_m di genere π e ad una g'_n, sopra una curva di genere p, vale:

$$(n-1)(m-1)-p+m\pi.$$

E da ciò si è condotti alla formula di Schubert che dà il *numero* $N_{r,\pi}$ *dei gruppi di* $r+1$ *punti comuni ad una* g^r_n *e ad una* γ'_m *di genere* π. Basta cambiare, nell'espressione di N_r, il p in $p-m\pi$, e si ottiene:

$$N_{r,\pi} = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}(p-m\pi).$$

5. La formula che dà il numero dei gruppi di $r+1$ punti comuni ad una g_n^r e ad una g_m' è quella appunto da cui Castelnuovo ha dedotto un criterio perchè una g_m^s sia contenuta in una g_n^r speciale, criterio che conduce immediatamente al teorema di Riemann-Roch. L'idea fondamentale consiste nell'osservare che l'espressione indicata dalla detta formula non può diventare negativa per due serie g_n^r e g_m' che non abbiano infiniti G_{r+1} comuni. E l'osservazione resta ugualmente giustificata rispetto al nostro metodo di deduzione della formula, come per quello adoperato dal Segre o dal Castelnuovo.

Nelle lezioni di Geometria sopra le curve algebriche, che ho tenuto quest'anno all'Università di Bologna, accanto allo sviluppo della teoria secondo il metodo di Brill e Noether, ho spiegato anche quello che si basa sul metodo accennato, traducendo i ragionamenti iperspaziali in linguaggio invariantivo e semplificandoli in qualche punto. I due sviluppi troveranno posto ugualmente nel terzo volume del mio trattato sulla *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, a cui sto attendendo con la collaborazione del dott. Chisini.