Enriques, Federigo

## Sul procedimento di riduzione all'assurdo

Boll. Mathesis **XI-XII** (1919), pp. 6-14.

FEDERIGO ENRIQUES

# SUL PROCEDIMENTO

# DI RIDUZIONE ALL' ASSURDO

BOLOGNA

COOP. TIPOGRAFICA AZZOGUIDI

1919

Estratto dal *Bollettino della « Mathesis »*, anno XI, aprile 1919, n. 1-2-3-4

# SUL PROCEDIMENTO DI RIDUZIONE ALL'ASSURDO

1. Per dimostrare che sussiste una proposizione $a$ basta dimostrare la falsità della proposizione contraddittoria $a' = non\text{-}a$, facendo vedere che dall'assumerla come ipotesi discendono conseguenze assurde, cioè incompatibili col sistema dei postulati accettati e dei teoremi già stabiliti che ne dipendono. Questo metodo di dimostrazione si chiama *riduzione all'assurdo*. Ad esso nulla si può obiettare sotto l'aspetto logico, ma — a differenza degli antichi che sembrano spesso averlo preferito ad altri metodi — i moderni manifestano la tendenza a sostituirlo con altre forme di ragionamento, che ritengono più dirette, o più naturali e luminose.

A questa tendenza risponde il giudizio che filosofi e critici matematici esprimono di sovente intorno a quel procedimento dimostrativo. Appunto dalla repugnanza che esso ispira è mossa, in gran parte, la critica vivace che lo SCHOPENHAUER (1) rivolge alla trattazione della geometria euclidea. « Che tutto sia come Euclide dimostra, bisogna concedere costretti dal principio di contraddizione: ma *perchè* sia così non si apprende. Si ha quindi press'a poco la stessa impressione spiacevole che ci lascia un giuoco di destrezza; e in verità a questi somigliano in massima parte le dimostrazioni euclidee » (op. c. pag. 91). Vero è che lo SCHOPENHAUER non limita la sua antipatia alle dimostrazioni per assurdo, ma la estende a tutto il metodo logico euclideo, che giudica una « brillante stortura ». Infatti « quasi sempre la verità irrompe da una porticina secondaria, resultando *per accidens* da qualche circostanza accessoria. Sovente una dimostrazione apagogica chiude tutte le porte, l'una dopo l'altra, e ne lascia aperta una sola, nella quale si ha quindi da entrare per forza. Spesso, come accade nel teorema di Pitagora, vengono tirate certe linee senza che si sappia perchè: di poi si apprende che erano lacciuoli destinati a stringersi all'improvviso per imprigionare l'assenso del discepolo.... ». (Ibidem). E il pensiero dell'A., aduggiato nelle nebbie metafisiche del principio di ragione, si trova infine esser questo: che ogni teorema, ed in ispecie il teorema di Pitagora nel caso generale, dovrebbe provarsi con quella evidenza intuitiva immediata che si ha — da una nota figura — pel caso del triangolo rettangolo isoscele, giacchè così e non altrimenti deve essersene fatta la scoperta (2).

(1) *Il mondo come volontà e rappresentazione*, trad. it. Bari, Laterza, vol. I, pag. 90-101.

(2) Cfr. op. c., pag. 94.

Qui non si può a meno di constatare che il filosofo, cresciuto in ambiente romantico, è incapace di comprendere lo sviluppo storico della geometria razionale (di cui è massimamente espressiva la storia del teorema di Pitagora) o soltanto la ragion d'essere di codesta geometria: la quale riesce appunto a stabilire resultati, che sono stati prima raggiunti per induzione da casi particolari, e che — nella loro generalità — non appaiono affatto suscettibili di una immediata comprensione intuitiva. Nondimeno rimane alle critiche dello SCHOPENHAUER questo valore: che esse esprimono, con singolare vigoria artistica, uno stato d'animo assai diffuso nel mondo moderno e contemporaneo, cioè simpatia per l'intuizione e antipatia per le forme della logica astratta, di cui la riduzione all'assurdo offre un tipo caratteristico.

Ora, per tornare più strettamente al tema, anche dei critici matematici, come HOÜEL (1) e DUHAMEL (2), non si mostrano teneri per questo processo dimostrativo.

Ad esso allude lo HOÜEL, nell'introduzione all'opera citata (pag. 7 della 1ª ed.), laddove rimprovera ad EUCLIDE la forma dogmatica delle dimostrazioni da lui adottata « dans sa préoccupation de fermer avant tout la bouche à des sophistes que la Grèce avait le tort de prendre au sérieux ». « De là », egli aggiunge, « son habitude de démontrer toujours qu'une chose *ne peut pas ne pas être*, au lieu d'établir qu'elle *est* et de faire voir en même temps *pourquoi* elle est et comment on a été conduit à reconnaître son existence ».

Anche per DUHAMEL il metodo di riduzione all'assurdo costituisce una via indiretta « un procédé détourné mais souvent utile » (3), molto usato dagli antichi geometri, cui i sofisti non permettevano gli ardimenti di ragionamento, che si prendono così legittimamente i moderni. E soltanto nelle *Remarques générales* che chiudono il Cap. I della II Parte, l'esame dell'ordinamento euclideo conduce l'A. a riconoscere che la riduzione all'assurdo si è presentata naturalmente per stabilire le proposizioni reciproche, sicchè appare in questo caso preferibile a qualunque altro metodo di dimostrazione (4).

Ma HOÜEL e DUHAMEL avrebbero dato un migliore apprezzamento del metodo di cui si tratta, se avessero approfondito il problema storico della sua genesi e del suo sviluppo nella geometria greca, anzichè fermarsi ad una spiegazione superficiale, che ha anche il torto di non vedere l'importanza filosofica dei sofisti, già riconosciuta da HEGEL, e soprattutto da GROTE, nella sua storia generale della Grecia.

(1) *Essai critique sur les Principes fondamentaux de la Géométrie*, 1ª ed. Parigi 1867, 2ª ed. 1883.

(2) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Parigi, 1879.

(3) Op. c. Parte I, vol. I, pag. 60.

(4) Op. c. Vol. I, pag. 342.

2. Il procedimento di riduzione all'assurdo nasce, col rilievo esplicito del principio di contraddizione che ne forma la base, dall'antica *scuola d'Elea* (5° secolo a. C.). Nei celebri argomenti di ZENONE d'Elea, il TANNERY ha riconosciuto la riduzione all'assurdo della teoria pitagorica, che poneva a base della geometria una concezione atomica dello spazio. Ma io ritengo che codesta polemica anti-pitagorica s'inizii già nel poema « Sulla natura » di PARMENIDE, maestro a ZENONE. Certo nei frammenti a noi pervenuti di codesto poema (1) si trova solennemente formulato il principio di contraddizione, di cui si fà un uso metafisico, come principio d'invarianza della realtà.

Ma un esame approfondito di quei frammenti, che qui non è il luogo di svolgere, conduce a riconoscere che le speculazioni dell'Eleate hanno principio nella veduta della geometria come scienza razionale. Attribuendo al punto-monade un'estensione — per quanto piccola — i pitagorici non si erano ancora sollevati sopra la concezione empirica degli enti geometrici (punti, linee, superficie); laddove PARMENIDE accenna a volere ritenere codesti enti come puramente razionali. Così nel fr. 2, che di solito dà luogo ad una traduzione priva di senso, e che si può tradurre:

« Ciò che non hai davanti agli occhi, contemplalo fermamente davanti al pensiero. Tu non separerai l'esistente (lo spazio) dalla connessione coll'esistente, nè staccandolo da tutte le parti del tutto ordinatamente (caso della superficie chiusa che racchiude un solido) nè congiungendolo (caso della superficie che è limite comune di solidi contigui) ».

Ed è verosimile che alle contraddizioni in cui si avvolgevano i sostenitori del punto-monade (ammettendo che la monade fosse al tempo stesso qualcosa di limitato e d'illimitato ecc.) volesse alludere PARMENIDE nei versi del fr. 6, ove polemizza coi « mortali a due teste, che nulla sanno, ciechi e sordi, stupidi e senza giudizio, pei quali essere e non essere è la stessa cosa e non la stessa cosa », e di cui dice che « il cammino di tutti oscilla (fra questi estremi) » (2). Se si accetta questa interpretazione si troverebbe dunque qui un preciso accenno allo schema del ragionamento per assurdo.

(1) Cfr. H. DIELS. *Die Fragmente der Vorsokratiker.*

(2) La spiegazione di cui sopra si complica con una difficoltà di traduzione del testo greco, su cui non posso qui indugiarmi. Ma, pei competenti, basti dire che il riferimento dei versi suddetti ad ERACLITO, secondo un'ipotesi di BERNAYS confutata dallo ZELLER, ma recentemente rinnovata dal BURNET, non mi pare accettabile: giacchè nel frammento eracliteo a cui il BURNET troverebbe un'allusione (« la via all'in su è la stessa che la via all'in giù »: DIELS, op. c. fr. 60) vedo un significato che PARMENIDE avrebbe fatto proprio, ritenendo che si tratti — in qualche modo — della sfericità della terra e della relatività della verticale (già rilevata da ANASSIMANDRO).

Ciò che in PARMENIDE appare involuto nel discorso metafisico, assume per ZENONE una forma matematica precisa. L'argomento di Achille e della tartaruga vale appunto a dimostrare che nell'ipotesi in cui il punto abbia dimensioni finite — per quanto piccole — Achille piè-veloce non potrebbe superare, alla corsa, la tartaruga, sol che le desse un vantaggio iniziale; poichè Achille, prima di passare avanti alla tartaruga deve andare ad occupare il posto occupato da quella, e mentre percorre lo spazio che lo separa dal suo tardigrado competitore, questi è già proceduto innanzi, di un qualche intervallo. Il valore dell'argomento sta in ciò che « Achille deve percorrere infiniti intervalli, prima di raggiungere la tartaruga », e se questi hanno una lunghezza minima (superiore a quella del « punto ») ne deriva l'impossibilità dell'incontro.

Il significato anzidetto dell'argomento di ZENONE (e degli altri analoghi di quel filosofo) riceve una conferma dalla testimonianza di DIOGENE LAERZIO che ci addita appunto ZENONE quale inventore della *dialettica*, cioè della logica concepita come regola della riduzione all'assurdo: forma di ragionamento che ebbe poi un uso straordinario nelle polemiche dei sofisti (dirette dapprima contro il razionalismo eleatico, a favore dell'empirismo, quindi — nella *scuola di Megara* — di nuovo contro l'empirismo).

Ora importa aggiungere un'osservazione dello ZEUTHEN: certo ZENONE possedeva nelle costruzioni della geometria pitagorica il modo di risolvere l'equazione di primo grado da cui dipende il problema dell'incontro di due punti che si muovono di moto uniforme sopra la retta; e perciò la sua considerazione doveva portarlo a scoprire la *somma della progressione geometrica infinita*. D'altronde l'argomento della freccia, dello stesso autore, ci offre già la decomposizione in serie infinita di

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$$

Non è privo d'importanza riconoscere come, in tal guisa, *le origini della logica si riattaccano alle origini della analisi infinitesimale*, che — in largo senso — si può dire già implicita nel concetto razionale della geometria. Ed in questa circostanza possiamo ravvisare un motivo (sebbene non unico) della forma iniziale che abbiam detto aver rivestito la logica stessa, come teoria del ragionamento per assurdo. Infatti il legame di siffatto tipo d'argomentazione coll'analisi dell'infinito non è contingente, ma tiene a cause profonde che giova mettere in luce.

Le poche notizie sullo sviluppo dell'analisi infinitesimale presso i Greci, che dobbiamo ad ARCHIMEDE, ci lasciano comprendere che il seme gettato da ZENONE d'Elea fu raccolto da DEMOCRITO d'Abdera, scopritore del volume della piramide, e che ad un primo periodo di scoperte successe presto un periodo critico, cui appartiene — soprattutto — l'opera di EUDOSSO di Cnido (il costruttore della teoria delle grandezze incommensurabili, che figura nel 5° libro degli Elementi di EUCLIDE). Ora la sistemazione — che ben può dirsi eudossiana — di tale ordine di considerazioni, nel mondo greco, si basa sul così detto *procedimento di esaustione*, che è un particolare procedimento di riduzione all'assurdo [1]. La forma negativa qui sembra imposta dall'esigenza di evitare il progresso all'infinito del nostro pensiero.

A questo punto mi sia consentita una digressione, per confrontare all'antico il modo con cui la difficoltà viene superata dai moderni. Giacchè la differenza è men grande di quanto — a prima vista — si sarebbe indotti a ritenere. Secondo lo spirito dei Greci, le aree, i volumi ecc. hanno — per così dire — un'esistenza a priori: il confronto con aree o volumi noti a cui vogliansi eguagliare, si fa supponendo che vi sia una differenza e dimostrando che questa dovrebbe essere più piccola di qualsiasi grandezza arbitraria. Nell'uso moderno si dimostra invece che una certa serie di poligoni o di poliedri ammette un limite, che vien *definito* come l'area o il volume cercato, la dimostrazione basandosi sul *postulato di continuità*, a cui ci si riduce sempre nelle proposizioni esistenziali di questo genere. Ebbene il ragionamento indiretto per assurdo viene qui evitato, quando mai, solo in apparenza, giacchè esso figura — ad ogni modo — come un presupposto della definizione adottata.

3. La riduzione all'assurdo, costituitasi come primo tipo di ragionamento logico, si è estesa naturalmente — pei Greci — a tutte le questioni geometriche, il suo uso progredendo di pari passo coll'esigenza che domandava di emancipare il pensiero dall'intuizione sensibile. Non furono certo i sofisti ad imporre codesta esigenza; tutt'al più indirettamente la rafforzarono, per reazione all'empirismo che essi tentarono di sostenere coll'arma foggiata dai razionalisti matematici della scuola d'Elea. Ma la loro polemica antimatematica (di cui rimane qualche interessante accenno) sembra uscire — come dice ARISTOTELE — dal terreno dei principii, e però mal poteva assumer valore di una vera critica scientifica.

D'altronde i sopra indicati motivi interni di sviluppo, attinenti all'affacciarsi delle questioni infinitesimali, spiegano sufficientemente il periodo critico per cui ebbero a passare le matematiche greche; ed è facile comprendere che la dimostrazione per assurdo convenga ad un siffatto periodo di sistemazione della scienza, giacchè (come osserva il VAILATI [2]) codesto modo di dimostrazione è il solo in

(1) Il postulato a cui si fa capo è quello che viene comunemente designato dal nome di ARCHIMEDE, e che in realtà EUDOSSO medesimo ebbe a riconoscere come principio.

(2) « Scritti » pag. 660.

cui il procedimento analitico di deduzione da un'ipotesi conduca direttamente a stabilire la tesi, senza bisogno di fornirne la sintesi. Esso si applica dunque, con particolare opportunità, quando si tratta, non tanto di scoprire teoremi nuovi, quanto di porgere una prova rigorosa di teoremi già conosciuti. Onde l'uso assai largo che EUCLIDE fa delle dimostrazioni per assurdo, nei suoi Elementi, si spiega storicamente come prodotto del precedente sviluppo critico della geometria, al quale s'ispira direttamente la sistemazione del trattato.

Ora le stesse osservazioni che conducono alla veduta storica illuminano la questione didattica. Il che apparirà chiaro a priori se si ammette che l'ideale esposizione di una teoria debba riassumere il processo storico di acquisto della verità e lo sviluppo delle sue applicazioni, a quel modo che nella Biologia si ritiene essere l'ontogenesi una ricapitolazione abbreviata della filogenesi. Così dunque si otterrà un criterio per apprezzare il valore didattico del procedimento di riduzione all'assurdo.

Che esso fornisca un mezzo di prova rigoroso è fuori questione. Ma come sopra è accennato, alla dimostrazione di un teorema si possono segnare didatticamente altri scopi:

1°) di abilitare lo studioso a ritrovare il resultato da sè, come se egli fosse nella condizione di doverlo scoprire per la prima volta;

2°) di spiegare il significato del teorema, cioè — secondo la formula pragmatistica — di insegnarne l'uso mostrandone le possibili applicazioni.

In quale misura la dimostrazione per assurdo soddisfa a tali requisiti?

Relativamente al 1° conviene distinguere due casi.

Talvolta il teorema di cui si tratta costituisce la risposta ad una domanda che si pone affatto naturalmente: sussiste la proprietà $a$, ovvero la sua contraddittoria $a' = non\text{-}a$? In tal caso, per rispondere alla domanda, si è tratti ad assumere come ipoteticamente vera una qualunque delle due proposizioni $a$ e $a'$, deducendone una serie di conseguenze,

$$a \supset b \supset c \supset \dots \supset m \supset n;$$

questa serie di proposizioni si arresterà quando si giunga ad una proposizione $n$ che (al lume delle cose conosciute) si conosca per vera o per falsa: orbene, se $n$ è vera non si può ancora concludere circa la verità di $a$, bensì occorre ricostruirne la prova sintetica esaminando se le deduzioni fatte sono invertibili, per modo che si abbia

$$n \supset m \supset \dots \supset c \supset b \supset a;$$

ma se la $n$ è falsa, la questione proposta viene senz'altro risolta, nel senso che sussiste la proprietà $a'$. Un caso notevole che rientra nel precedente è quello in cui trattasi di stabilire una proposizione *a* la cui reciproca *b* sia stata già innanzi dimostrata, dove insomma si chiede se il teorema *a* sia caratteristico o meno per una certa classe di enti a cui si riferisce (per esempio il teorema di PITAGORA per i triangoli rettangoli): appunto per ciò, qui non vi è nulla di più naturale, o di più soddisfacente al criterio euristico, che la dimostrazione per assurdo, colla quale si riconosce che — negando la *a* — si contraddirebbe a *b*.

Ancora si riattacca al caso di cui sopra è discorso quello — se pure assai raro nelle matematiche elementari — in cui il teorema da stabilire rivesta una forma paradossale, contraddicendo ad un'ipotesi avente per sè l'apparenza della verità (1). Allora è chiaro che la riduzione all'assurdo costituisce la via più naturale per la scoperta di tale verità. E risalta anche l'analogia di codesto metodo geometrico col metodo sperimentale dei fisici, che riesce spesso a scoprire qualche cosa di essenzialmente nuovo, allorchè le conseguenze di una teoria vengono contraddette dall'esperienza (2).

Un caso affatto diverso da quello di cui innanzi si sono rilevati taluni aspetti, e dove — all'opposto — il metodo di riduzione all'assurdo, non sembra possedere un valore euristico, si ha quando la domanda cui risponde l'enunciato di un teorema da dimostrare non trovi in se stessa, o nei teoremi che la precedono, suggerimento o spiegazione, di guisa che il detto enunciato appaia come una scoperta piovuta dal cielo; allora la dimostrazione per assurdo non vale certo a colmare la lacuna, e conviene pertanto aggiungere qualche indicazione sul procedimento induttivo per cui il teorema potè essere conseguito.

Relativamente al 2° requisito didattico, la dimostrazione per assurdo è posta — in generale — in una situazione meno favorevole, almeno in confronto con quella dimostrazione che porge successivamente un'analisi e una sintesi, deducendo dal teorema proposto, *a*, una serie di conseguenze:

$$a \supset b \supset c \supset \ldots \supset m \supset n$$

che si arresta ad una proposizione *n* già conosciuta, e invertendo poi la serie di codeste deduzioni:

$$n \supset m \supset \ldots \supset c \supset b \supset a.$$

(1) Come esempio si possono citare le dimostrazioni di irresolubilità con riga e compasso di noti problemi costruttivi classici, dove la pratica di altri problemi — apparentemente analoghi — suggerisce a priori il tentativo, che implica l'ipotesi della risolubilità.

(2) L'analogia e le differenze fra il metodo di riduzione all'assurdo e il metodo sperimentale sono rilevate dal DUHEM in uno studio su « La théorie physique » ella Revue de philosophie, 1905 (Cfr. VAILATI, op. c., pag. 593).

Infatti questa dimostrazione insegna l'uso che si può fare del teorema *a*, di cui *b*, *c* .... costituiscono altrettante possibili applicazioni; laddove la riduzione all'assurdo c'insegnerebbe soltanto l'uso che si potrebbe fare della proposizione falsa $a' = non\text{-}a$.

Naturalmente il valore di tale critica non deve essere esagerato, perchè al difetto si può supplire con successivi sviluppi della teoria, deducendo altre conseguenze utili del teorema; e si può dire che si è già supplito — in parte — a priori, nel caso della proposizione reciproca di un teorema, di cui sia bene chiarito l'uso.

Alle osservazioni didattiche che precedono si può aggiungere una nota relativa alla difficoltà che può presentare la riduzione all'assurdo, in un primo grado d'insegnamento geometrico: specialmente nel caso in cui lo sviluppo del ragionamento domandi di essere chiarito con figure, che — corrispondendo ad enti geometrici fittizii — contraddicano all'intuizione.

4. A chiarimento delle considerazioni svolte, farò qui una breve analisi del posto che occupa il procedimento di riduzione all'assurdo nel primo libro degli Elementi d'Euclide.

Anzitutto è da osservare che il grande trattatista adopera quel procedimento prevalentemente nella dimostrazione delle proposizioni reciproche; così nella prop. 6 per invertire il teorema (5) che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali, nella prop. 14 per invertire la 13 relativa alla somma di angoli adiacenti, nella 25 per invertire una diseguaglianza fra gli elementi del triangolo data nella 24, nelle 39 e 40 per invertire i teoremi sull'equivalenza di triangoli d'ugual base ed altezza, ed infine nella 48 per stabilire il reciproco del teorema di Pitagora. Soltanto la dimostrazione adoperata per la prop. 6 dà luogo ad una critica, che è in rapporto cogli sviluppi moderni sulla teoria dell'equivalenza, giacchè l'uso che ivi si fa del concetto della superficie del triangolo (ricorrendo al postulato che « il tutto non può essere uguale — cioè equivalente — alla parte ») è superfluo: bastava adoperare la proprietà che un angolo non può uguagliare una sua parte. E d'altronde la stessa prop. 6 poteva venire dedotta direttamente dal criterio d'uguaglianza relativo a due triangoli aventi uguali un lato e gli angoli adiacenti, che costituisce il teorema reciproco del 1° criterio, e che — ove non si voglia invocare ancora il principio di sovrapponibilità (per cui, in effetto, si ha soltanto una prova sperimentale della proposizione) — poteva venire dedotto, per assurdo, immediatamente da questo.

Quel criterio d'uguaglianza dei triangoli, che d'ordinario figura oggi nei trattati come 2°, e che Euclide dà — come 3° — soltanto nella prop. 26, viene ivi dimostrato, parimente per assurdo, in base alle diseguaglianze stabilite nelle proposizioni precedenti. Certo questa dimostrazione ci sembra meno naturale; ma — a giustificazione di Euclide — si deve avvertire che, in tal guisa, egli riesce a dare al teorema la forma più generale, contemplando anche il caso di due angoli similmente posti e non adiacenti, senza bisogno di dedurre questo caso da quello degli angoli adiacenti, per mezzo del teorema sulla somma degli angoli, presupponente la teoria delle parallele.

Rimane ancora, nel 1° libro degli Elementi, un' altra dimostrazione per assurdo, là dove si tratta dell' uguaglianza di due triangoli coi lati uguali, nelle proposizioni 7 e 8. Ora questa dimostrazione suscita qualche repugnanza: anzitutto perchè il lemma 7 (« non è possibile costruire sulla stessa base, e dalla stessa parte, due triangoli coi lati uguali ») assume il suo significato solo per riguardo alla prop. 8, ed anche perchè nel ragionamento relativo a codesto lemma si è costretti a ragionare sopra figure impossibili. Per tali motivi si suole — assai generalmente — sostituire alla dimostrazione euclidea della prop. 8, un' altra dimostrazione diretta, ottenuta collocando i triangoli che si vogliono uguagliare da parte opposta della base comune. Tuttavia non si deve tacere che il vantaggio didattico, cercato con questa sostituzione, viene raggiunto solo a prezzo di un artificio: giacchè il tentativo di sovrapporre i due triangoli, conduce direttamente alla dimostrazione euclidea.

Tali sono le osservazioni cui dà luogo l' uso del procedimento di riduzione all' assurdo nel 1° libro dell' EUCLIDE. E piace infine di riconoscere che, anche là dove l' esposizione euclidea è suscettibile di critica, ragioni non prive di valore — e, in genere, prevalenti da un punto di vista esclusivamente logico — assistono la scelta del geometra alessandrino.