Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Lezioni di Geometria descrittiva

Zanichelli, Bologna, 1920. (a cura di U. Concina) (II ediz.)



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

LEZIONI
DI
GEOMETRIA DESCRITTIVA
DI

FEDERIGO ENRIQUES
PROFESSORE NELLA UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

PUBBLICATE PER CURA
DEL
DOTT. UMBERTO CONCINA

RISTAMPA DELLA SECONDA EDIZIONE



BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Stabilimenti Poligrafici Riuniti — Bologna - III - 1920

PREFAZIONE

1. *Il Dott.* UMBERTO CONCINA *che ebbi già allievo, ed oggi ho valido collaboratore nell' insegnamento della Geometria descrittiva, ha atteso alla pubblicazione di queste Lezioni, le quali riproducono ordinati e completati gli appunti da me composti ad uso della scuola* (1).

Ma poichè il libro, nella stampa, può andar oltre la cerchia degli studenti per cui fu pensato e scritto, così stimo opportuno dichiarare gli intendimenti e gli scopi che alle suddette Lezioni furono proposti.

Non sono interamente concordi i giudizî dei Colleghi intorno al posto che deve essere attribuito alla Geometria descrittiva, nell' ordine dei nostri studi universitari. Fra le due estreme tendenze di coloro che vorrebbero determinato questo insegnamento dalle pure esigenze tecniche delle applicazioni, e di coloro che all' opposto vagherebbero di surrogarlo con un corso complementare della Geometria analitica e proiettiva, parvemi si potesse tentare utilmente una conciliazione.

---

(1) *Debbo segnalare particolarmente i capitoli attinenti alla teoria delle ombre e all' assonometria, di cui non trovavasi cenno negli appunti sopra citati, che furono redatti personalmente dal Dott.* CONCINA *su poche mie indicazioni.*

F. E.

« Stringere sempre più saldamente i legami fra le Matematiche pure e le applicate, e mostrare come i due indirizzi, il teorico ed il pratico, si distacchino da un tronco comune », tale è lo scopo che ho inteso proporre a queste Lezioni.

Il quale scopo mi è anche parso conforme alla tradizione della scuola di MONGE, *e adatto alle esigenze delle nostre scuole, frequentate da due diversi ordini di studenti.*

Giacchè sembra opportuno, per una parte che i futuri ingegneri educhino sempre più le naturali attitudini dell' intelligenza colla coltura geometrica, e meglio apprendano a valutare l' importanza delle teorie, attingendo ad esse la comprensione dei principii che reggono le applicazioni; per l' altra parte che gli studiosi delle Matematiche pure, lungi dal ritrarsi troppo presto nel campo della ricerca astratta, meditino lungamente i problemi pratici da cui l' intiero sviluppo delle Matematiche trae la sua origine.

2. *Dichiarato il fine, dovrei dire più lungamente del modo come queste Lezioni furono disposte ad ottenerlo.*

Senonchè l' indice assai particolareggiato del libro me ne dispensa. Apparirà da esso come sieno state, per quanto è possibile, riavvicinate le questioni introduttorie alla Geometria differenziale, alla teoria degli enti algebrici, e alle applicazioni propriamente tecniche dei metodi descrittivi.

3. *Una siffatta disposizione della materia non consente unità o purezza di metodo, pregi questi che è parso dovessero essere sacrificati agli scopi detti di sopra. E*

(cosa ben più dispiacevole per un matematico!) ai medesimi scopi si è pur dovuto sacrificare bene spesso il rigore, facendo largo uso dei procedimenti della Geometria infinitesimale sintetica, che non possono veramente riguardarsi come procedimenti di prova, ma palesano tutto il loro valore nel preparare la scoperta.

4. *Oltre ai trattati più noti riguardanti la Geometria descrittiva* (FIEDLER, WIENER, ASCHIERI....) *o le sue Applicazioni o gli Esercizî che ad essa si riferiscono* (1), *avemmo sott' occhio, nelle litografie, le belle Lezioni tenute nel* 1896-97 *a Torino dal prof.* BERZOLARI, *nel* 1898-99 *a Roma dal prof.* PITTARELLI.

Infine ci furono di aiuto i consigli che dobbiamo alla bontà del prof. VERONESE, *cui mi è grato di porgere qui, terminando, i più cordiali ringraziamenti.*

30 ottobre 1901.

FEDERIGO ENRIQUES

---

(1) *Fra gli esercizî proposti in queste Lezioni, molti, ed in ispecie i più eleganti, furono tolti dalla raccolta « Exercices de Géométrie descriptive par* F. J. *» edita Mâme (Tour) e Poussielgue (Paris).*

ELENCO

DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE NOTEVOLI

CONSIDERATE IN QUESTE LEZIONI.

I. Linee.

Asintotiche . . . . . Pag. 297-299, 302, 304, 307 309, 319, 320, 322.
Cardioide . . . . . » 176, 287.
Catenaria . . . . . » 180, 327, 345.
Cerchio osculatore . . . . . » 154, 155, 302-304.
Cicloide . . . . . » 179, 180, 196.
Cissoide di Diocle . . . . . » 172-173, 177.
Conchiglia di Pascal . . . . . » 176.
Concoide di Nicomede . . . . . » 176-177.
Contorno apparente (o linea separatrice) » 91-93, 104-112, 181, 186, 240, 261-265, 279, 285, 319, 321, 323, 324, 330, 343, 344, 356, 357.
Cubica gobba . . . . . » 211, 216-226, 234, 242, 284, 316, 324, 351, 352, 359, 360.
Cubica piana . . . . . » 163, 165, 166, 284, 288, 314, 351, 352, 357-359.
Curva cuspidale . . . . . » 236, 308, 315, 322.
Curva degli errori . . . . . » 154.
Curva digrammatica. . . . . » 172.
Curva doppia (delle rigate algebriche) . . » 310, 313, 314-317, 321, 335.
Curva nodale . . . . . » 236, 308, 317.
Curve algebriche gobbe. . . . . » 211-216, 242, 281-284.
Curve algebriche piane. . . . . » 157-181, 281-284.
Curve analitiche gobbe. . . . . » 197-200, 202-204.
Curve analitiche piane . . . . . » 155-157.
Curve trascendenti . . . . . » 171, 177-180.
Elica. . . . . » 194-197, 204, 205, 207-209, 310, 311, 319-321, 339-345.
Ellisse gobba . . . . . » 219, 224, 225.
Evoluta. . . . . » 155.
Evolvente . . . . . » 155, 205.

Geodetiche . . . . . Pag. 193, 194, 197, 206-208, 306, 307, 320.
Iperbole gobba . . . . . » 219, 224, 225.
Iperbole parabolica . . . . . » 219, 224, 225.
Lemniscata di Bernouilli . . . . . » 173, 175, 336.
Lemniscata di Gerono . . . . . » 173, 175, 185, 335.
Lemniscate (famiglia) . . . . . » 175, 233, 287, 336, 337.
Linea parabolica (di una superficie) . . . » 238, 297, 329, 335, 336.
Linea separatrice (vedi Contorno apparente)
Linee coniugate . . . . . » 298, 290, 301.
Linee di curvatura . . . . . » 299-302, 320, 329.
Linee isofote . . . . . » 187.
Lossodromica sferica . . . . . » 282, 283.
Ovuli di Cartesio . . . . . » 175, 334.
Parabola campaniforme con ovale . . . » 171.
Parabola campaniforme puntata . . . . » 172, 223.
Parabola campaniforme senza ovale . . . » 172.
Parabola cuspidata . . . . . » 172, 223.
Parabola gobba . . . . . » 219, 224, 225.
Parabola nodata . . . . . » 172, 223, 225
Parabola osculatrice . . . . . » 155, 292.
Parabole cubiche di Newton . . . . . » 171, 172, 223-225, 230.
Quartica gobba di 1ª specie . . . . . » 211, 226-234, 259, 260, 284-288, 334.
Quartica gobba di 2ª specie . . . . . » 288, 317, 323.
Quartiche piane . . . . . » 168, 169, 336, 356-358.
Sinusoide . . . . . » 179, 196, 320, 344.
Spigolo di regresso . . . . . » 200, 201, 204-206, 209, 308, 317.
Spirale d'Archimede . . . . . » 178, 179, 321, 344.
Spirale iperbolica . . . . . » 179, 196.
Spirale logaritmica . . . . . » 177, 178, 185, 280, 281, 320.
Spirica . . . . . » 336.
Trattrice . . . . . » 180, 327.

II. Superficie.

Catenoide . . . . . » 327.
Elicoide a piano direttore . . . . . » 311, 319, 320, 344.
Elicoide gobbo a cono direttore . . . . » 310, 320, 321.
Elicoide sviluppabile . . . . . » 204, 205, 207-209.
Elicoidi (famiglia) . . . . . » 339-345.
Ellissoide . . . . . » 240, 256-259, 267-270, 327, 334.

Involvente . . . . . Pag. 104, 105, 111, 186.
Iperboloide . . . . . » 238, 253-258, 267, 275, 326, 327, 333.
Iperboloide osculatore . . . . . » 308, 309.
Monoidi (famiglia) . . . . . » 347-350, 352.
Paraboloide . . . . . » 238, 253, 256, 257, 265, 267, 270-273, 275, 276, 327.
Paraboloide osculatore . . . . . » 293-296, 300, 302, 305.
Pseudosfera . . . . . » 327.
Rigata cubica . . . . . » 288, 315, 321-324.
Rigata di Cayley . . . . . » 322.
Rigate algebriche . . . . . » 311-317.
Rigate del 4° ordine . . . . . » 315, 316, 360.
Rigate (famiglia) . . . . . » 307-324.
Rigate sviluppabili . . . . . » 200-207, 216, 238-240, 298-302, 306-309.
Serpentino . . . . . » 342-345.
Superficie algebriche . . . . . » 240-242, 292, 311-314, 335, 347, 355.
Superficie analitiche . . . . . » 291-293.
Superficie cubica . . . . . » 313, 314, 350-352, 351-359.
Superficie della volta a sbieco . . . . . » 310, 313.
Superficie di rotazione . . . . . » 325-337, 341, 342.
Superficie di Steiner . . . . . » 352-355.
Superficie sviluppabili (vedi Rigate)
Sviluppabile algebrica . . . . . » 214-216, 308, 316.
Sviluppabile circoscritta ad una cubica . » 216, 225, 226, 308, 317.
Sviluppabile circoscritta ad una quartica » 233, 317.
Toro (o anello) . . . . . » 327, 335-337.

PARTE PRIMA

METODI DI RAPPRESENTAZIONE

METODO DELLE PROIEZIONI CENTRALI

CAPITOLO I.

Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici.

§ 1. **Rappresentazione della retta.** — Si fissi un piano π come *piano iconico* o *quadro;* fuori del detto piano e da una determinata banda di esso si fissi un punto proprio O come *centro di proiezione.* La perpendicolare abbassata da O sul piano π incontra quest'ultimo in un punto P, detto *punto principale;* il cerchio di centro P e di raggio OP sul piano π dicesi *circolo di distanza*; esso serve a fissare bene la posizione del centro di proiezione O essendo noto in quale regione dello spazio giace O rispetto al quadro. Ogni punto A dello spazio diverso da O viene proiettato da O in un punto A' di π, che dicesi sua *immagine* o *proiezione.* Il punto A' è l'immagine di tutti i punti del raggio proiettante OA e non ne determina quindi alcuno in modo speciale. Tuttavia due punti di OA risultano individuati dato il punto A'; sono il punto A' stesso, che dicesi traccia del raggio OA, ed il punto all'infinito della retta OA.

L'osservazione precedente permette di rappresentare sul quadro senza ambiguità una retta propria dello spazio, non passante per il centro di proiezione e non parallela al quadro. Infatti una tal retta a viene individuata completamente, quando sono dati il punto T, *traccia* di a, sezione di essa col quadro, ed il punto Q, *punto di fuga*, immagine del suo punto all'infinito. Sotto le restrizioni poste, questi due punti sono propri e distinti; per essi passa l'immagine a' della retta a. In tal caso si può dunque dire che la retta a è rappresentata sul quadro mediante la sua traccia ed il suo punto di fuga (fig. 1).

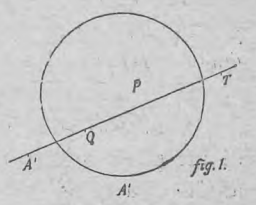


fig. 1.

Se la retta a, pur non essendo parallela al quadro, passa per il centro di proiezione, la sua immagine si riduce ad un punto proprio del quadro che è insieme la traccia ed il punto di fuga della retta; questo punto serve ancora ad individuare la retta a nello spazio, poichè essa è in tal caso la retta del raggio proiettante la sua traccia da O.

Viceversa due punti propri T, Q del quadro, affatto arbitrari, ed anche, se si vuole, coincidenti fra loro, sono sempre rispettivamente la traccia ed il punto di fuga di una retta dello spazio non parallela al quadro; questa retta a è la parallela al raggio OQ condotta per T. Se T e Q sono coincidenti, la a passa per il centro O.

Se la retta a è parallela al quadro, la sua traccia coincide ancora col suo punto di fuga, ma in un punto improprio del quadro che non serve più ad individuare la a, perchè rappresenta nello stesso modo tutte le parallele ad a, e per individuare la a non basta nemmeno dare la sua immagine a' (salvo che a' si riduca ad un punto, ove a passi per O), giacchè ogni retta parallela ad a nel piano Oa' è rappresentata ugualmente.

Parimente non riesce determinata la rappresentazione sul quadro di una retta impropria mediante la sua traccia e la sua immagine, potendo qui ogni punto della detta immagine considerarsi come punto di fuga della retta data. Per completare la rappresentazione di una retta nei casi di eccezione considerati, basta fissarne un punto: vedremo nel § 3 come ciò possa farsi.

Intanto riassumendo abbiamo il

Teorema. — *Ogni retta propria dello spazio, non parallela al quadro, viene rappresentata senza ambiguità da due punti propri* T, Q *del quadro appartenenti alla sua immagine, che sono la traccia ed il punto di fuga della retta.*

Viceversa una coppia di punti propri T, Q *del quadro rappresenta una retta propria dello spazio non parallela al quadro. Questa retta si designerà con* (TQ).

§ 2. **Rappresentazione del piano.** — La rappresentazione di un piano proprio non parallelo al quadro si ottiene in modo analogo a quello usato per rappresentare la retta. Un piano α, non parallelo al quadro, lo sega secondo una retta propria t che dicesi la sua *traccia*; il piano parallelo ad α pel centro di proiezione O sega il quadro secondo una retta propria q, parallela a t, che dicesi la *retta di fuga* del piano α (fig. 2). Date le rette (proprie) parallele t, q vi è un piano determinato passante per t e parallelo al piano Oq, il quale riesce così rappresentato senza ambiguità dalla sua traccia e dalla sua retta di fuga. Se la traccia e la retta di fuga di un piano coincidono (in una retta propria), il piano rappresentato passa per il centro di proiezione O e viceversa. Per un piano parallelo al quadro la traccia e la retta di fuga coincidono colla retta impropria del quadro, la quale rappresenta ugualmente tutti i piani ad esso paralleli e quindi un piano parallelo al quadro non risulta più determinato mediante la sua traccia e la sua retta di fuga.

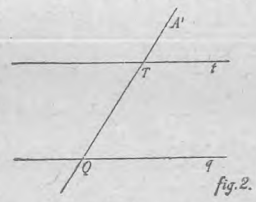


fig. 2.

Riassumendo si ha il seguente

Teorema — *Ogni piano proprio dello spazio non parallelo al quadro si rappresenta mediante una coppia di rette proprie parallele del quadro, che sono la sua traccia e la sua retta di fuga; viceversa una tale coppia, assunta ad arbitrio nel quadro, rappresenta un piano non parallelo al quadro.*

Un piano che abbia per traccia e retta di fuga rispettivamente le rette proprie t, q si designerà con (tq).

Se un piano α sega un piano π del quadro secondo una retta t (sua traccia), ogni retta a di α sega π in un punto T di t; parimente la retta parallela alla a pel centro di proiezione O sega π secondo un punto Q appartenente alla retta di fuga q di α.

Dunque: *La traccia ed il punto di fuga di una retta appartenente ad un piano, appartengono rispettivamente alla traccia ed alla retta di fuga del piano.*

§ 3. **Rappresentazione del punto.** — Un punto A dello spazio, come abbiamo già osservato, non risulta determinato data la sua immagine A' sul quadro, ma quest'immagine è sufficiente ad individuarlo ove siano dati una retta o un piano passanti per esso e non passanti per O: infatti così i punti di una retta come quelli di un piano non passanti per O, vengono riferiti in modo biunivoco alle loro proiezioni sul quadro.

Risulta quindi il

Teorema. — *Ogni punto proprio od improprio dello spazio e diverso dal centro di proiezione, si può rappresentare sul quadro*

senza ambiguità, dando la sua immagine e rappresentando una retta od un piano che passi per esso e non pel centro di proiezione.

Se A' è l'immagine di un punto del piano (tq), si può individuare il punto stesso considerandolo come appartenente ad una retta la cui immagine sul quadro passi per A' e seghi rispettivamente le t, q secondo la traccia T e il punto di fuga Q della retta stessa. Viceversa se un punto A è dato mediante la sua immagine A' ed una retta (TQ) per esso, si può avere un piano (tq) per A, assumendo come traccia t e retta di fuga q di esso due parallele risp. per T, Q.

Un punto rappresentato mediante la sua immagine A' ed una retta (TQ) od un piano (tq) per esso, si denoterà con

$$A \equiv (A' - TQ) \equiv (A' - tq).$$

Una retta parallela al quadro si può fissare rappresentandone un punto e assegnandone la traccia (punto improprio) o l'immagine; un piano parallelo al quadro rimane completamente determinato dalla rappresentazione di un suo punto proprio. Ciò completa quanto sulla rappresentazione della retta e del piano si è detto nei §§ 1 e 2.

§ 4. **Problemi grafici fondamentali.** — Passiamo ora a risolvere nel piano iconico, usando dei metodi di rappresentazione stabiliti, i principali problemi grafici cui danno luogo il punto, la retta ed il piano nello spazio.

Nella trattazione di questi problemi escludiamo di regola che le rette ed i piani dati o da determinare siano paralleli al quadro o passino per il centro di proiezione: per tali posizioni particolari degli elementi che si considerano, nascono talvolta dei casi di eccezione nelle costruzioni indicate, alle quali debbono allora sostituirsi altre costruzioni lievemente modificate; accenneremo a queste più tardi.

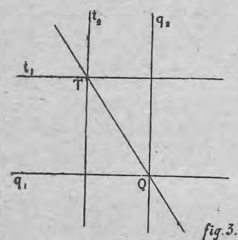


fig. 3.

PROBLEMA 1°. — *Determinare l'intersezione di due piani (la quale non risulti parallela al quadro, nè passante pel centro di proiezione).*

Sieno t_1 q_1, t_2 q_2 le coppie rappresentative formate dalle rispettive tracce e rette di fuga dei due piani (fig. 3): l'intersezione di due piani deve avere la traccia T appartenente a t_1, t_2, e il punto di fuga Q appartenente a q_1, q_2: così risultano fissati T e Q (coppia rappresentativa della retta da determinare) perchè sotto le ipotesi dell'enunciato, le t_1, t_2 (e quindi le q_1, q_2) non risultano parallele (poichè la retta comune ai due piani non è parallela al quadro). Sotto le indicate ipotesi i punti T, Q risultano distinti, ma se anche coincidessero (passando i due piani pel centro di proiezione) la retta intersezione dei due piani resterebbe fissata e sarebbe il raggio proiettante OQ, purchè essa non sia parallela al quadro.

PROBLEMA 2°. — *Determinare il piano ed il punto appartenenti a due rette incidenti (non parallele al quadro e non giacenti in un piano pel centro di proiezione).*

Sieno T_1Q_1, T_2Q_2 le coppie rappresentative delle due rette, le quali sotto le restrizioni poste sono distinte e non appartenenti ad una stessa retta (fig. 4). Poichè le due rette sono incidenti, cioè giacciono in un piano, le tracce T_1, T_2 debbono appartenere alla traccia t del piano, e i punti di fuga Q_1, Q_2 alla retta di fuga q del piano stesso; le rette $t \equiv T_1T_2$ e $q \equiv Q_1Q_2$ debbono dunque essere parallele e costituire la coppia rappresentativa del piano da determinare. L'immagine del punto comune alle due rette incidenti è il punto A' intersezione delle immagini T_1Q_1, T_2Q_2 delle due rette; A' rappresenta completamente il punto cercato, in quanto è dato il piano (tq) per esso.

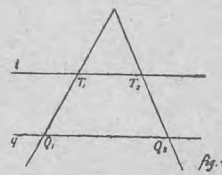


fig. 4.

Come caso particolare le due rette date possono aver comune la traccia $T_1 \equiv T_2$ o il punto di fuga $Q_1 \equiv Q_2$ (fig. 5): nel 1.° caso la traccia del piano delle due rette è la retta t parallela alla $q \equiv Q_1Q_2$ e passante per $T_1 \equiv T_2$; nel 2.° caso la retta di fuga del piano delle due rette è la retta q parallela alla $t \equiv T_1T_2$ e passante per $Q_1 \equiv Q_2$.

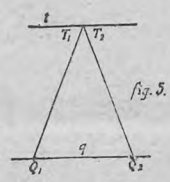


fig. 5.

PROBLEMA 3°. — *Determinare la intersezione di tre piani (non passanti per la stessa retta e di cui nessuno sia parallelo al quadro o passi pel centro di proiezione).*

Sieno (t_1q_1), (t_2q_2), (t_3q_3) i tre piani (fig. 6). Due almeno delle loro intersezioni [ad es. quelle sezioni di (t_1q_1) con (t_2q_2) e (t_3q_3)] non sono parallele al quadro stante le restrizioni poste, a meno che non risultino tutte e tre parallele tra loro e al quadro, e in questo caso l'intersezione dei tre piani sarebbe

data dalla direzione comune delle loro tracce. Prescindendo da questo caso, le nominate due intersezioni (T_2Q_2), (T_3Q_3) che si determinano come nel 1.° problema, sono incidenti e si segano in un punto A che si determina come nel 2.° problema. Per l'immagine A' di questo punto passa la 3ª retta T_1Q_1 immagine dell'intersezione di (t_2q_2) e (t_3q_3) che si determina come nel 1.° problema, salvo il caso in cui essa risulti parallela al quadro.

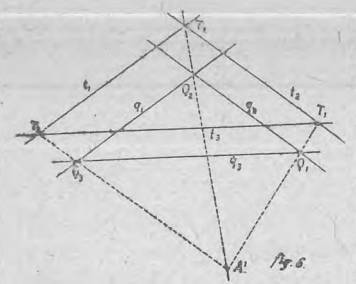


fig. 6.

Problema 4.° — *Determinare il punto individuato da una retta e da un piano che non si appartengono e non sono paralleli al quadro, nè fra loro.*

Sia (TQ) la retta e (tq) il piano (fig. 7). Si conduca un piano arbitrario per la retta (TQ), rappresentato da una coppia di rette parallele t_1, q_1 risp. per T, Q: questo piano (t_1q_1) sega (tq) secondo la retta $(T'Q')$, dove $T' \equiv (tt_1)$, $Q' = (qq_1)$ (Probl. 1.°): le rette TQ, $T'Q'$ nel quadro si segano in un punto A' che è l'immagine del punto cercato (Probl. 2.°) ed è rappresentato completamente appartenendo a (tq).

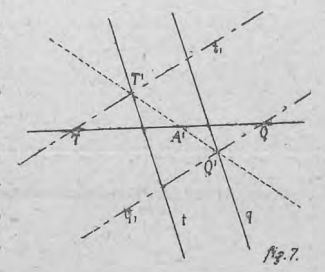


fig. 7.

Problema 5°. — *Determinare la retta individuata da 2 punti.*

I punti A, B abbiano per immagini sul quadro i punti A', B' ed appartengano risp. alle rette (T_1Q_1) (T_2Q_2) (fig. 8). L'immagine della retta cercata è la retta $A'B'$. Per determinarne la traccia ed il punto di fuga si proceda così. Si consideri la retta AT_2 che ha per immagine $A'T_2$ e per traccia T_2; essa giace in un piano colla (T_1Q_1) e però il suo punto di fuga è l'intersezione Q' di $A'T_2$ colla parallela per Q_1 alla traccia T_1T_2 di questo piano. Allora la retta $q \equiv Q'Q_2$ e la parallela t per T_2 sono risp. retta di fuga e traccia del piano che contiene le rette (T_2Q_2) (T_2Q') e però i punti A, B e la retta AB: segue che la traccia T

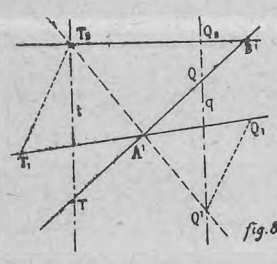


fig. 8.

della AB è l'intersezione di t e di $A'B'$; e l'intersezione di q con $A'B'$ è il punto di fuga Q.

Questa costruzione non dà più due punti propri T, Q di AB quando le t, q risultino parallele alla $A'B'$; allora la retta AB è parallela al quadro ed è fissata mediante la sua immagine ed uno dei suoi punti. La costruzione cade in difetto se A', B' coincidono, ma allora la AB è il raggio proiettante A' da O (che ha in A' la traccia e il punto di fuga).

Problema 6°. — *Determinare il piano individuato da un punto* A *e da una retta* a *(non parallela al quadro) che non si appartengono.*

Sia $A \equiv (A' - T_1Q_1)$ il punto dato e sia $a \equiv (TQ)$ la retta data (fig. 9).

Si conduca la $A'T$ e si seghi in Q' con la parallela per Q' a TT_1, così si determina il punto di fuga Q' della retta AT. Ora la retta $q \equiv QQ'$ e la parallela ad essa t, condotta per T sono rispettivamente la retta di fuga e la traccia del piano Aa che contiene le due rette (TQ) e (TQ'). Questa costruzione è in sostanza quella che compare nel problema precedente per determinare la traccia e il punto di fuga della retta che congiunge un punto A della retta (T_1Q_1) ed un punto B della (TQ).

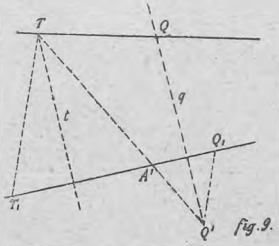


fig. 9.

Problema 7°. — *Determinare il piano individuato da tre punti* A, B, C, *non appartenenti ad una retta.*

I punti A, B, C, siano dati mediante le loro immagini A', B', C', e le rette (T_1Q_1), (T_2Q_2), (T_3Q_3) che ad essi rispettivamente appartengono (fig. 10). Si determinino la traccia e il punto di fuga di due lati del triangolo ABC (Problema 5°); unendo fra loro le tracce e risp. i punti di fuga delle due rette, si hanno la traccia e la retta di fuga del piano ABC.

In conseguenza le costruzioni da eseguire sono p. es. le seguenti: Si conduca $B'T_1$ e si seghi questa retta colla parallela per Q_2 alla T_1T_2; il punto d'intersezione congiunto con Q_1, dà una retta che determina su $A'B'$ il punto di fuga Q della AB; la traccia T della medesima si ha segando $A'B'$ colla parallela Q_1Q per T_1. Similmente si conduca la $B'T_3$, e si seghi colla parallela alla T_2T_3 per Q_2; il punto d'intersezione congiunto con Q_3 dà una retta che determina su $B'C'$

il punto di fuga Q' della BC, la sua traccia T' vien segata su $B'C'$ dalla parallela alla Q_3Q' per T_3. Le rette TT', QQ' risultano parallele e sono la traccia e la retta di fuga del piano ABC.

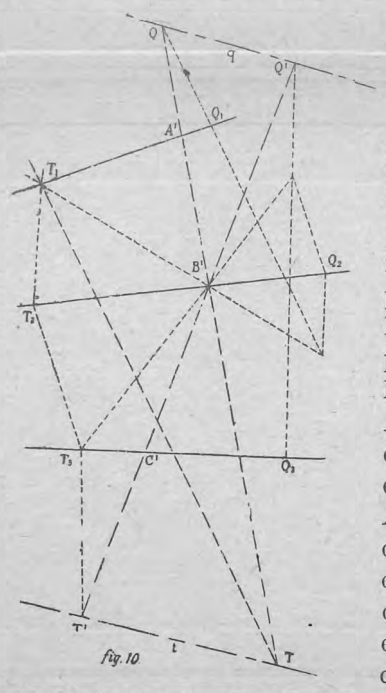


fig. 10

Alcune di queste costruzioni possono cadere in difetto per speciali posizioni degli elementi considerati. Così se il piano $A\,B\,C$ da determinare risulta parallelo al quadro, i punti T,T' e Q,Q' cadono all'infinito; se il piano ABC passa per il centro di proiezione O, le immagini delle rette $A\,B$, BC, AC coincidono, e quindi coincidono TT' e QQ'. Essendo esclusi i detti casi, fra le rette AB, BC, AC ve ne sono almeno due non parallele al quadro, della cui rappresentazione ordinaria possiamo servirci per eseguire la costruzione indicata, perchè le loro immagini sono distinte, i tre punti A, B, C non appartenendo alla stessa retta.

Problema 8°. — *Condurre per un punto (proprio) la retta parallela ad una retta data (non parallela al quadro).*

Questo problema rientra come caso particolare nel 5°, ove uno dei punti ivi considerati sia improprio, ma la soluzione riesce in questo caso più semplice (1). Sia $A \equiv (A' - TQ)$ il punto dato: sia Q' il punto di fuga della retta data, che basta qui considerare, perchè si tien conto solo della direzione di essa (fig. 11). Q' è pure il punto di fuga

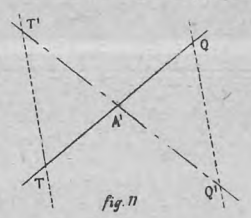


fig. 11

(1) Una semplificazione analoga ha luogo nel Problema 5°, ove uno dei punti ivi considerati stia sul quadro e quindi sia la traccia della retta da determinare. Semplificazioni analoghe possono aversi per gli altri problemi. Un esempio è dato nel Problema 10°.

della retta cercata la cui immagine è la retta $A'Q'$; la traccia della retta da determinare è l'intersezione T' della $A'Q'$ colla parallela per T alla QQ'. La costruzione cade in difetto se Q' coincide con A', nel qual caso la retta cercata è il raggio OA'; parimente la costruzione cade in difetto, se Q concide con Q', ma allora la retta cercata è la (TQ) stessa.

Problema 9°. — *Condurre per un punto (proprio) il piano parallelo ad un dato piano (non parallelo al quadro).*

Questo problema non rientra come caso particolare nel 6°, perchè nell'usare la rappresentazione di una retta supponiamo che questa sia propria, potendosi considerare una retta impropria come parallela al quadro.

Sia $A \equiv (A' - TQ)$ il punto dato, sia q la retta di fuga (propria) del piano dato che basta qui considerare per individuarne la giacitura (fig. 12). Sulla q si prendano due punti Q_1, Q_2 e si congiungano con A'; le rette $A'Q_1$, $A'Q_2$ sono le immagini di due rette per A parallele al dato piano; le loro rispettive tracce T_1, T_2 si determinano (Probl. 8°) segando risp. queste immagini colle parallele per T a QQ_1 ed a QQ_2; la retta T_1T_2, che risulta parallela alla Q_1Q_2, è la traccia del piano cercato.

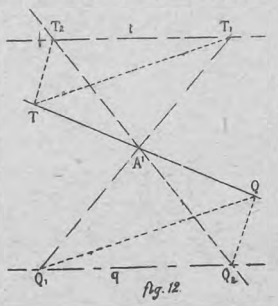


fig. 12

Se A' appartiene alla q, il piano cercato è il piano Oq pel centro di proiezione, la cui traccia coincide con q.

Nella costruzione, pel caso generale, basta determinare la traccia T_1 di una retta per A avente il punto di fuga Q_1 su q e condurre per T_1 la parallela a q; la considerazione di due rette per A serve come riprova.

Problema 10°. — *Condurre per una retta (non parallela al quadro) il piano parallelo ad un'altra retta (non parallela alla prima).*

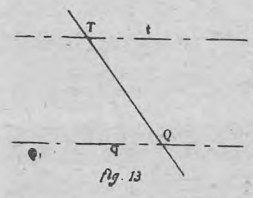


fig. 13

Questo problema è caso particolare del 6° ove il punto ivi considerato sia improprio, ma la sua soluzione riesce più semplice. Sia (TQ) la retta per cui si vuole condurre il piano, e Q_1 (distinto da Q) il punto di fuga dell'altra retta, che basta qui considerare. Il piano cercato ha per retta di fuga la QQ_1 e per traccia la parallela ad essa per T (fig. 13)

§ 5. **Casi eccezionali di rappresentazione.** — Nei problemi grafici che abbiamo trattato, sono stati esclusi quei casi di eccezione nei quali le rette ed i piani considerati non si rappresentano sul quadro nel modo ordinario (elementi paralleli al quadro o passanti pel centro di proiezione). Abbiamo detto che in questi casi quando si tratti di rette o di piani paralleli al quadro, s'individua la retta od il piano aggiungendo alla sua traccia (che è un punto improprio o la retta impropria) la rappresentazione di un punto (elemento ausiliario) della retta o del piano.

Allora i problemi da trattare per questi casi si risolvono con facili modificazioni alle costruzioni generali indicate, come dimostrano i seguenti esempi.

Problema 1.° — *Determinare la retta* a *intersezione di un piano* (tq) *con un piano* α *parallelo al quadro.*

Il piano α sia individuato mediante un suo punto $A \equiv (A' - TQ)$ (fig. 14). La retta a', immagine della a parallela al quadro risulterà parallela a t, q: basterà quindi determinare un punto B' di essa e condurre per B' la parallela a t. A tal uopo si conduca per la (TQ) un piano arbitrario $(t_1 q_1)$ il quale incontrerà il piano (tq) secondo una retta b che sappiamo determinare (cfr. § 4 Probl. 1°), e il piano α secondo una retta c passante per A, la cui immagine c' sarà la parallela alle t_1, q_1 condotta per A' (poichè c è parallela al quadro).

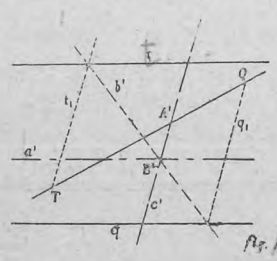


fig. 14

Il punto $B \equiv bc$ appartenendo a (tq) e ad α è un punto della a che si vuole determinare; quindi la retta per $B' \equiv b'c'$ condotta parallelamante alla t,q è la a cercata.

Osservazione. — La traccia e il punto di fuga di a coincidono nel punto improprio di a' poichè a è parallela al quadro; però l'immagine a' insieme colla rappresentazione del suo punto B, o con quella del piano (tq) cui appartiene, la determinano completamente.

Problema 2.° — *Determinare il punto* P *intersezione di una retta* a *parallela al quadro con un piano generico* (tq) (*che non la contenga*).

La retta a è individuata dalla sua immagine a' e da un suo punto $A \equiv (A' - TQ)$ (fig. 15). Il piano di a e di (TQ) ha

per retta di fuga q_1 la parallela condotta per Q ad a' e per traccia t_1 la parallela per T. Questo piano $(t_1 q_1)$ sega (tq) secondo una retta b che contiene il punto P: l'immagine di P è dunque $P' \equiv a'b'$ (denotando b' l'immagine di b).

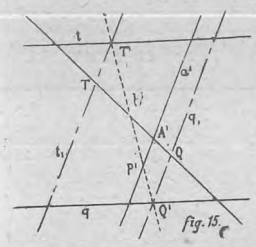


fig. 15

Osservazione. — Il punto P resta così perfettamente determinato mediante la sua immagine P' e la coppia rappresentativa $(T'Q')$ della retta b cui appartiene.

Problema 3.° — *Determinare il punto* P *intersezione di una retta generica* (TQ) *con un piano* α *parallelo al quadro.*

Il piano α sia individuato da un suo punto $A \equiv (A' - T_1 Q_1)$ (fig. 16).

Si trova dapprima la coppia rappresentativa (tq) del piano individuato dalla retta (TQ) e dal punto A (cfr. § 4. Probl. 6°). Poi si considera l'intersezione m del piano (tq) col piano α, che ha per immagine m' la parallela alle t, q condotta per A'. Questa retta m contiene il punto P cercato il quale risulta in tal modo comune ad m e a (TQ) e però dev'essere $P' \equiv m'$. (TQ).

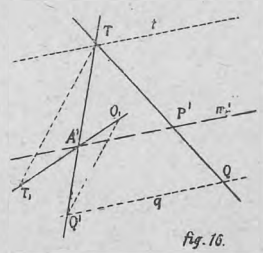


fig. 16.

Problema 4.° — *Determinare il piano individuato da un punto* A *e da una retta* a *parallela al quadro.*

La retta a sia individuata dalla sua immagine a' e da un suo punto $B \equiv (B' - T_1 Q_1)$ (fig. 17). Si determina la retta AB (cfr. § 4 Probl. 5), la cui coppia rappresentativa indichiamo con $(T_2 Q_2)$. Allora siccome a risulta parallela alla traccia t_x (e quindi alla retta di fuga q_x) del piano cercato, queste due rette sono le parallele ad a' condotte per T_2 e Q_2.

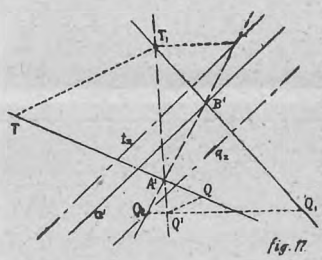


fig. 17

Problema 5.° — *Determinare il punto* A *intersezione di due rette* $a \equiv (T_1 Q_1)$, $b \equiv (T_2 Q_2)$ *le cui immagini coincidono con un'unica retta* $a' \equiv b'$ *e che perciò sono date in un piano passante pel centro di proiezione.*

Si conducano risp. per le due rette date due piani arbitrari (tq), $(t_1 q_1)$ e se ne determini l'intersezione $(T_3 Q_3)$ fig. (18)

Il punto cercato appartiene evidentemente a questa intersezione, e la sua immagine sarà il punto $A' \equiv a' . T_3Q_3$.

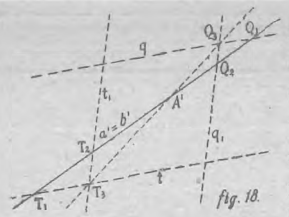


fig. 18.

Osservazione — Nei casi trattati innanzi qualcuno degli elementi dati era in posizione speciale rispetto al sistema di rappresentazione. Nell'esempio seguente gli elementi dati sono rappresentati nel modo ordinario ma riesce invece in posizione eccezionale l'elemento da costruire.

Problema 6.° — *Determinare la retta a intersezione di due piani* (t_1q_1) (t_2q_2) *aventi per tracce e per rette di fuga quattro rette parallele.*

Evidentemente essendo le tracce t_1, t_2 parallele fra loro, la intersezione dei due piani deve essere una retta parallela al quadro. Per individuare tale retta bisognerà determinarne l'immagine a' e un punto $A \equiv (A' - T_1Q_1)$ (fig. 19). Basta considerare un piano (t_3q_3) la cui traccia (e quindi anche la retta di fuga) non sia parallela alle t_1, t_2. Allora il punto A di questo piano intersezione della a è il punto comune alle intersezioni (T_1Q_1) e (T_2Q_2) di (t_3q_3) coi piani (t_1q_1) e (t_2q_2): quindi $A' \equiv T_1Q_1$. T_2Q_2 è l'immagine di A, punto della a, e la a' condotta parallelamente alle t_1, t_2 è l'immagine di a, giacchè a è parallela alle t_1, t_2.

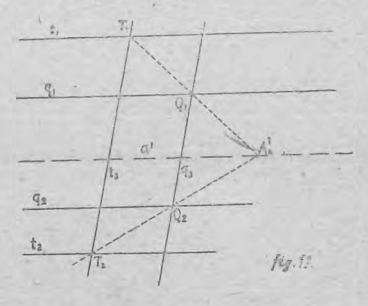


fig. 19.

CAPITOLO II.

Problemi metrici.

§ 6. — **Omotetia individuata da un punto dello spazio sul quadro.** — Sia P un punto proprio dello spazio fuori del quadro e diverso dal centro di proiezione O. Le due stelle di centro O, P vengono riferite fra loro prospettivamente (proiettando il medesimo piano all'infinito), ove si fissi che si corrispondano in esse due rette e due piani paralleli. Segando queste stelle col piano del quadro, si ha un'omologia avente come asse la retta all'infinito, cioè un'omotetia, nella quale si corrispondono la traccia ed il punto o la retta di fuga di ogni retta e risp. di ogni piano per P; due punti omologhi (traccia e punto di fuga d'una retta per P), son allineati con P' immagine di P, che è il centro di omotetia; due rette omologhe, traccia e retta di fuga di un piano per P s'incontrano in un punto dell'asse di omologia, cioè sono parallele. L'omotetia è individuata da una coppia di elementi corrispondenti e dal centro P'; il che segue anche dal fatto che con questi elementi risulta completamente determinata la rappresentazione di P.

§ 7. — **Quota d'un punto.** — Se T, Q sono due punti omologhi dell'omotetia considerata e però sono allineati con P', il rapporto $k = \dfrac{TP'}{TQ}$ è una costante che può dirsi il rapporto di omotetia (generalmente si considera come rapporto di omotetia $\dfrac{TP'}{QP} = \dfrac{k}{k-1}$, ma è qui più comodo considerare k).

Secondo le regole dei segni dei segmenti, che si fissano nella Geometria Analitica, si deve considerare k come positivo se T cade fuori del segmento finito QP' e come negativo se T

è interno al detto segmento. Se P giace sul quadro, P' coincide con P: ogni retta per P ha allora la sua traccia in P' ed è $k = o$. Se P' è all'infinito, ossia P sul piano parallelo al quadro e passante per O, detto *piano parallelo anteriore*, si ha $k = \infty$. Se invece P non giace sul quadro, nè sul piano parallelo anteriore, P' sarà a distanza finita; ogni retta per P, eccetto la OP, avrà la traccia T diversa da P'.

Inoltre, se A_∞ è il punto all'infinito della retta TQ sul quadro (fig. 20) e si considerano i tre segmenti susseguentisi $A_\infty Q$, QT, TA_∞, quando P' cade nel primo segmento è $k > 1$; quando cade nel secondo si ha $o < k < 1$; quando cade nel terzo è $k < o$. Tenuto conto della convenzione relativa ai segni dei segmenti che conduce alle precedenti disuguaglianze, il punto P' sulla retta TQ è determinato dati k e T, Q. Parimente (come è noto) l'omotetia è determinata dato il suo centro, supposto proprio, P', e il rapporto k, poichè allora di ogni punto T si costruisce l'omologo Q; rimane quindi fissato il punto P.

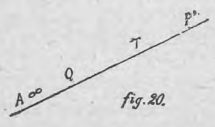


fig. 20

Perciò si può rappresentare sul quadro in modo determinato ogni punto P non appartenente al piano parallelo anteriore assegnando la sua immagine P' ed il numero k che può dirsi *quota del punto* P; ove il punto P (supposto proprio) appartenga al detto piano parallelo anteriore in guisa che la sua immagine sia all'infinito e la sua quota $k = \infty$, occorre aggiungere la rappresentazione di una retta non parallela al quadro passante per il punto.

Da un noto teorema di Geometria elementare, P dividendo nel rapporto k il segmento OP', segue che:

I punti di egual quota stanno in un piano parallelo al quadro.

Ai tre segmenti considerati sull'immagine TQ della retta (TQ) corrispondono sulla retta obiettiva tre segmenti susseguentisi. Per vedere quali essi siano, consideriamo il piano parallelo anteriore, e consideriamo le tre regioni in cui esso ed il quadro dividono lo spazio. Per fissare le idee supponiamo costantemente orizzontale il quadro, e poniamo il centro di proiezione nella banda superiore di esso; allora le nominate regioni sono quella superiore al piano parallelo anteriore, quella inferiore al quadro, e quella compresa fra il quadro ed il piano parallelo anteriore. Il raggio proiettante OPP' (il cui punto

all'infinito si designerà con B_∞) penetra nelle tre regioni nominate, ed incontra risp. in O, P' il piano parallelo anteriore e il quadro (fig. 21). Allora fissando l'attenzione sui triangoli $OP'Q$, $PP'T$, giacenti in un piano ed aventi due lati comuni ed i terzi lati paralleli, si ha che P cade nel segmento (finito) OP', se P' cade nel segmento TA_∞ considerato; invece P cade nel segmento OB_∞ nella regione superiore al piano parallelo anteriore se P' cade nel segmento considerato QA_∞ della retta TQ; infine, P è situato sul segmento $P'B_\infty$ nella regione inferiore al quadro se P' giace nel segmento finito QT. Inoltre, in tutti i casi, si avrà (in grandezza e segno):

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{PO}} = \frac{\overline{TP'}}{\overline{TQ}} = k.$$

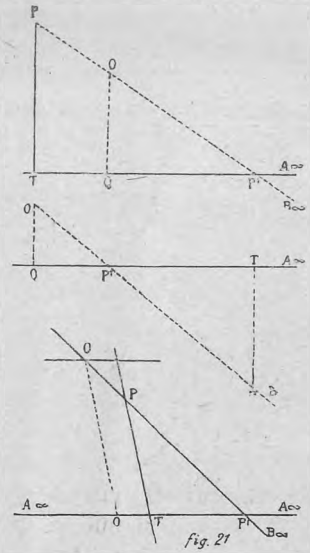


fig. 21

Possiamo dunque enunciare il

Teorema. — *La quota* k *di un punto* P *di immagine* P', *è il rapporto secondo cui il punto* P *divide il segmento (positivo)* P'O. *Il punto* P *cade nella regione superiore al piano parallelo anteriore se è* $k > 1$; *nella regione compresa fra il quadro e il piano parallelo anteriore se è* $k < o$, *e nella regione inferiore al quadro se è* $o < k < 1$. *Se* P *è sul piano parallelo anteriore si ha* $k = \infty$; *se* P *è sul quadro si ha* $k = o$. *I tre segmenti susseguentisi* $A_\infty Q$, QT, TA_∞ *dell'immagine della retta* (TQ) *contengono le proiezioni dei punti della retta obiettiva che cadono risp. nella regione superiore al piano parallelo anteriore, nella regione inferiore al quadro, e nella regione compresa fra il quadro e il piano parallelo anteriore.*

§ 8. — **Segmento intercetto sopra una retta dal quadro e dal piano parallelo anteriore. Inclinazione della retta sul quadro.** — Abbiamo veduto come vengono rappresentati sulla sua immagine tre segmenti di una retta (TQ) non parallela al quadro e non passante per il centro di proiezione, che sono il segmento infinito superiore al piano parallelo anteriore, quello finito intercetto fra il piano parallelo anteriore ed il quadro, ed il segmento infinito inferiore al quadro. Si può ora doman-

dare la determinazione della lunghezza l del segmento della retta (TQ) intercetto fra il piano parallelo anteriore ed il quadro (entro cui la quota di un punto P è negativa). Tale lunghezza è anche la lunghezza del segmento OQ parallelo alla retta (che dicesi *lunghezza* del raggio proiettante OQ).



fig. 22

Per determinare siffatta lunghezza l si consideri il triangolo rettangolo OPQ (fig. 22) dove P è il punto principale, piede della perpendicolare condotta da O al quadro. Allora se $d = OP$ è la distanza principale, raggio del circolo di distanza, si ha:

$$l = \sqrt{d^2 + PQ^2}.$$

Così viene determinata la lunghezza l essendo nota la distanza $\overline{PQ}$ fra il punto di fuga della retta e il punto principale. La detta lungezza l serve a far conoscere immediatamente la inclinazione α della retta sul quadro, che è data dall'angolo OQP. Infatti nel triangolo rettangolo OPQ si ha:

$$sen\ \alpha = \frac{d}{l}; \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{d}{\overline{PQ}}.$$

Da queste formule si deduce il

Teorema. *Tutte le rette su cui il quadro ed il piano parallelo anteriore intercettano segmenti uguali, hanno la stessa inclinazione α sul quadro e viceversa; i loro punti di fuga stanno sopra un circolo che ha per centro il punto principale, il quale vien detto circolo di inclinazione α.*

Il circolo di distanza è il circolo d'inclinazione $\alpha = 45^0$; se la retta è perpendicolare al quadro ($\alpha = 90^0$), il circolo d'inclinazione si riduce al punto principale; le rette parallele al quadro ($\alpha = 0^0$) non hanno un circolo d'inclinazione proprio, ma come tale si può considerare la retta impropria del quadro.

Per $\alpha = 45^0$ si ha $l = d\sqrt{2}$, per $\alpha = 90^0$ si ha $l = d$, per $\alpha = 0^0$ la l non risulta più determinata, perchè sopra una retta parallela al quadro non viene intercetto alcun segmento dal quadro e dal piano parallelo anteriore.

§ 9. **Regioni a cui appartengono i punti d'un piano.** — Sia dato un piano (tq) non parallelo al quadro e non passante per il centro di proiezione (fig. 23). Ogni retta (TQ) di esso ha la traccia T su t ed il punto di fuga Q su q; perciò dato un punto A di (tq) avente una immagine A', e condotta per esso una retta (TQ) nel detto piano, si può dire a quale regione dello spazio appartiene A guardando a quale segmento della retta (TQ) appartiene la sua immagine A'.

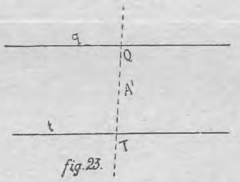


fig. 23.

Si deduce quindi (in base al teorema del § 7) che:

I punti del piano obiettivo (tq), *superiori al piano parallelo anteriore, hanno le immagini nella banda del quadro opposta a quella che contiene* t *rispetto a* q; *i punti di* (tq) *compresi fra il piano parallelo anteriore ed il quadro hanno le immagini nella banda del quadro opposta a quella che contiene* q *rispetto a* t, *ed i punti di* (tq) *inferiori al quadro hanno le immagini nella striscia del quadro compresa tra le parallele* t, q.

§ 10. **Striscia intercetta sopra un piano dal quadro e dal piano parallelo anteriore. Inclinazione del piano sul quadro.** — Qual'è la larghezza della striscia intercetta sopra il piano (tq) dal piano parallelo anteriore e dal quadro?

La nominata striscia è uguale a quella intercetta dai medesimi piani (anteriore e quadro) sul piano Oq (detta *larghezza* del piano Oq proiettante q), perchè Oq è parallelo al piano dato.

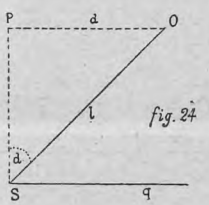


fig. 24

La detta larghezza l è quindi la distanza OS del centro di proiezione O dalla q (fig. 24). Allora se si considera il triangolo OPS, dove P è il punto principale e $d = \overline{OP}$ è la distanza principale, si ha:

$$l = \sqrt{d^2 + \overline{PS}^2},$$

ed il segmento $\overline{PS}$ risulta essere la distanza del punto P dalla retta q, perchè il piano OPS è perpendicolare alla q.

Si può avere ancora l'inclinazione α del piano dato, o ciò che è lo stesso, del piano Oq sul quadro. Essa è data dall'angolo OSP nel triangolo rettangolo considerato; perciò si ha:

$$sen\ \alpha = \frac{d}{l}; \qquad tg\ \alpha = \frac{d}{\overline{PS}}.$$

Segue che:

Tutti i piani su cui il quadro ed il piano parallelo anteriore intercettano striscie uguali hanno la stessa inclinazione α sul quadro e viceversa; le loro rette di fuga sono tangenti al circolo d'inclinazione α.

§ 11. **Ribaltamento di un piano proiettante sul quadro.** — Si consideri un piano Oq pel centro di proiezione, proiettante la retta (propria) q del quadro (sua traccia e retta di fuga).

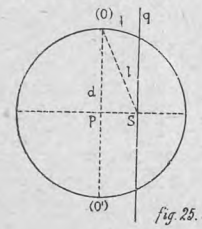


fig. 25.

Abbiamo veduto (§ prec.) come si determini la larghezza del piano Oq, cioè la distanza del centro O da q. Essa è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti la distanza principale e la distanza PS del punto principale P dalla q, quindi si costruisce graficamente (fig. 25) conducendo da P la perpendicolare PS su q, poi in P la perpendicolare $P(O)$ alla PS fino ad incontrare in (O) o in (O') il circolo di distanza, e finalmente conducendo il segmento $\overline{(O)S}$ che esprime appunto la larghezza l del piano Oq.

Il triangolo $(O)PS$ che abbiamo così costruito sul quadro, si può dire il *ribaltamento* attorno a PS di quello OPS che abbiamo considerato nello spazio (§ 10), poichè esso è la posizione assunta dal triangolo OPS fatto ruotare in uno dei due sensi attorno al lato PS fino a sovrapporre il suo piano al quadro. Facendo ruotare OPS attorno a PS in senso opposto, si ha un altro ribaltamento $(O')PS$ del medesimo triangolo OPS intorno a PS; i punti (O), (O') sono i due ribaltamenti del centro di proiezione O intorno a PS.

Immaginiamo ora di voler ribaltare sul quadro il piano Oq, facendolo ruotare in uno dei due sensi attorno a q fino a sovrapporsi al quadro. Dopo questo movimento il centro O assume una posizione ben determinata sulla perpendicolare PS a q e distante da q della larghezza l del piano Oq; esso si troverà quindi in uno dei due punti indicati nella fig. 26 con (O), (O') a seconda del senso in cui è avvenuta la rotazione.

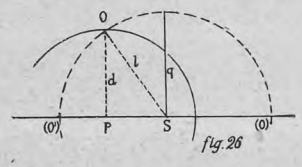


fig. 26

Ognuno di questi punti (O), (O') potrà dirsi ribaltamento di O attorno a q nel senso considerato. Per fissare le idee supponiamo di ribaltare il piano Oq facendolo ruotare attorno a q in modo che il ribaltamento del centro O cada nel punto (O) da parte opposta di P risptto a q, essendo (O) sulla retta PS ed essendo $\overline{(O)S} = l$. Questa operazione è pienamente determinata se q non passa per P, cioè se il piano Oq non è perpendicolare al quadro. In modo del tutto simile si può considerare il ribaltamento del piano Oq in senso opposto. Nel primo caso il piano Oq, supposto non perpendicolare e non parallelo al quadro, descrive nella rotazione l'angolo dietro ottuso formato col quadro, nel secondo quello acuto (*).

Il ribaltamento di un piano proiettante sul quadro permette di risolvere alcuni problemi metrici. Nella trattazione di essi escludiamo ancora il caso in cui le rette ed i piani propri che entrano in considerazione, sieno rappresentati sul quadro in modo eccezionale, avendo la traccia e l'elemento di fuga all'infinito o coincidenti; ed escludiamo parlando di un punto che esso sia il centro di proiezione (o un punto improprio). In questi casi d'eccezione i detti problemi si risolvono con alcune modificazioni come sarà accennato nel seguito.

§ 12. **Distanza di due punti.** — Escludiamo che la congiungente i due punti passi pel centro di proiezione o sia parallela al quadro. Sia $a \equiv (a' - TQ)$ la nominata congiungente che può determinarsi come nel problema 5° del Cap. I (fig. 27). Ribaltiamo in uno dei due sensi il piano Oa' sul quadro (§ 11) e sia (O) il ribaltamento del centro di proiezione O. In questo ribaltamento la retta a che contiene i due punti A, B (di immagini A', B') viene ad assumere la posizione di una retta (a) del quadro, che dicesi il ribaltamento della retta a, e su a si hanno i ribaltamenti (A), (B) rispettivamente di A, B che sono le posizioni da essi assunte. Nel ribaltare la

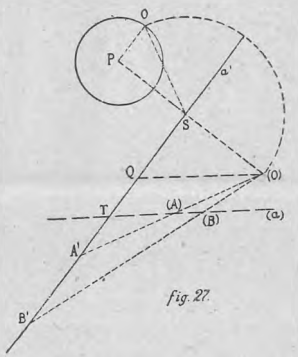


fig. 27

(*) Della indeterminazione che rimane nell'operazione di ribaltamento si profitta convenientemente nell'esecuzione grafica delle figure.

a vi è un punto di essa che rimane fermo, cioè la traccia T di a, onde (a) passa per T; inoltre il raggio $(O)\,Q$ ribaltamento di OQ rimane parallelo alla (a) ribaltamento di a, poichè nella rotazione del piano Oa attorno ad a' non muta la relazione di parallelismo di due rette del piano; dunque la (a) è la parallela per T alla retta $(O)Q$.

Determinata così la retta (a), ribaltamento di a, è facile costruire il ribaltamento (A), (B) dei punti A, B di essa. Basta osservare che nella rotazione del piano Oa' i punti A, B non cessano di essere allineati rispettivamente coi punti fissi A', B' e col punto O, nelle loro successive posizioni, per modo che, eseguito il ribaltamento, (A) si deve trovare su $(O)A'$ e (B) su $(O)B'$. Ora poichè (A), (B) appartengono ad (a) essi vengono determinati risp. come intersezioni di $(O)A'$, $(O)B'$ con (a). Allora il segmento $\overline{(A)\,(B)}$ è il ribaltamento di quello $\overline{AB}$ dello spazio ed ha la stessa lunghezza di esso, perchè la detta lunghezza $\overline{AB}$ non muta nella rotazione del piano Oa'. Dunque il segmento $\overline{(A)\,(B)}$ esprime la distanza cercata dei punti A, B.

Se la a (ciò che si era escluso) è parallela al quadro, ma non giace nel piano parallelo anteriore, il suo ribaltamento (a) risulta parallelo ad a' e viene determinato costruendo il ribaltamento (A) di un suo punto A coll'uso di una retta ausiliaria diversa da a nel piano Oa; quindi il problema si risolve nello stesso modo. Ma il problema può risolversi anche conducendo per A, B arbitrariamente due rette parallele (aventi cioè in comune un certo punto di fuga Q); il segmento $\overline{AB}$ è uguale a quello T_1T_2 determinato dalle tracce delle due rette (fig. 28). Ciò comprende anche il caso che la a parallela al quadro, giaccia nel piano parallelo anteriore.

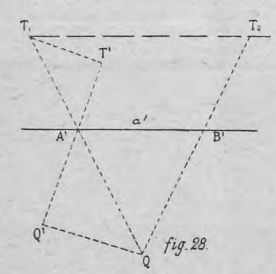


fig. 28.

Se la a è un raggio OQ passante pel centro di proiezione O e non parallelo al quadro, si può considerare per essa un piano perpendicolare al quadro, e ribaltarlo sul quadro in uno dei due sensi attorno alla sua traccia, costruendo come nella fig. 29 la retta $(a) \equiv (O)Q$. Allora la distanza dei due punti A, B della retta può determinarsi fissando i ribaltamenti (A), (B) dei due punti coll'uso degli elementi che individuano i detti punti; p. es. non essendo

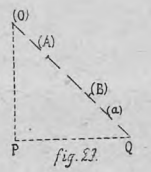


fig. 29.

a parallela al quadro, se si hanno le rispettive quote k_1, k_2 di A, B, basta dividere risp. nei rapporti k_1, k_2 il segmento finito $(O)Q$.

Osservazione. — Determinato il ribaltamento $\overline{(A)(B)}$ sul quadro di un segmento $\overline{AB}$ dello spazio, si possono risolvere (nel quadro) sulla retta $(A)\,(B)$ tutti i problemi di grandezza cui dà luogo il segmento $\overline{AB}$ sulla retta che lo contiene. Determinato il ribaltamento (C) di un punto cercato C della retta AB, se ne ha l'immagine proiettando (C) da (O) in C' sull'immagine a' della retta AB. In tal guisa si può ad esempio risolvere il problema di dividere in un dato rapporto λ il segmento $(A)(B)$. È però notevole che questo problema si risolve anche senza far uso del ribaltamento del segmento AB. Infatti indicato con D_∞ il punto all'infinito della retta AB (fig. 30), il problema posto equivale a quello di determinare un punto C della retta AB tale che sia il birapporto: $(ABCD\infty) = \lambda$. Ora la punteggiata $a \equiv (ABC....)$ è riferita prospettivamente alla sua immagine $a' \equiv (A'B'C'....)$ e al punto D_∞ di a corrisponde Q sulla a'. Il problema proposto si risolve dunque determinando il punto C' della retta a' in modo che sia il birapporto: $(A'B'C'Q') = \lambda$; questo punto C' è l'immagine del punto C cercato.

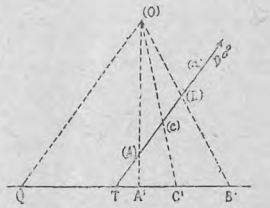


fig. 30.

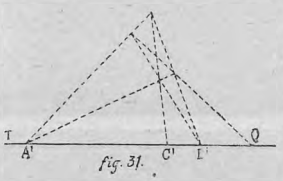


fig. 31.

In particolare se si vuole determinare l'immagine C'' del punto medio C del segmento AB ($\lambda = -1$), basta costruire su a' il coniugato armonico del punto di fuga Q rispetto alle immagini A',B' di A,B (fig. 31).

§ 13. Angoli di due rette.

Problema. — *Determinare gli angoli supplementari di due rette date.*

Escludiamo che esse siano parallele fra loro (nel qual caso uno degli angoli cercati é nullo), o parallele al quadro. Gli angoli (supplementari) cercati dipendono dalle direzioni delle due rette e quindi dai loro punti di fuga (propri e distinti) Q_1,Q_2 (fig. 32). Essi sono misurati dagli angoli dei raggi proiettanti OQ_1, OQ_2 paralleli alle rette date. Ribaltiamo il piano

OQ_1Q_2 (attorno alla $q \equiv Q_1Q_2$) e sia (O) il ribaltamento del centro di proiezione O. Il triangolo $(O)\,Q_1\,Q_2$ è il ribaltamento del triangolo $OQ_1\,Q_2$ dello spazio: uno degli angoli cercati è $Q_1OQ_2 = Q_1(O)Q_2$ e l'altro è l'angolo supplementare formato dalle stesse rette $(O)Q_1$, $(O)Q_2$. La risoluzione del problema pel caso in cui una delle rette sia parallela al quadro, e quindi abbia il punto di fuga all'infinito, si ottiene nello stesso modo, come indica la fig. 33. Quando poi le due rette date sieno parallele al quadro, basta la considerazione degli angoli di due rette parallele ad esse sul quadro, i quali vengono dati dalle direzioni indicate dai due punti di fuga improprî delle due rette (fig. 34).

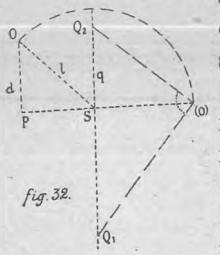


fig. 32.

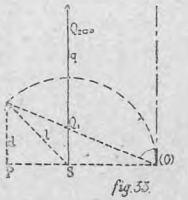


fig. 33.

§ 14. **Ribaltamento di un piano obliquo arbitrario sul quadro.** -- Nel § 11 si è considerato il ribaltamento sul quadro di un piano Oq pel centro di proiezione. Possiamo analogamente considerare il ribaltamento sul quadro di un piano arbitrario non parallelo al quadro e non passante per O, attorno alla sua traccia. Dato un tal piano $\alpha \equiv tq$, si immagini di farlo ruotare in uno dei due sensi attorno alla sua traccia t, fino a sovrapporlo al quadro. Per fissare le idee possiamo p. e. supporre che questo avvenga facendo descrivere al piano l'angolo diedro non acuto che esso fa col quadro, ed allora la operazione del ribaltamento è pienamente determinata se il piano (tq) non è perpendicolare al quadro (cioè q non passa pel punto principale P.) È del resto indifferente considerare il ribaltamento del piano in senso inverso, facendo descrivere al piano il diedro supplementare. Sorge ora la questione di determinare il ribaltamento (A) di un punto A del piano α, cioè la posizione da esso assunta sul quadro dopo la rotazione.

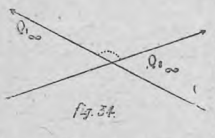


fig. 34.

Cominciamo dall'osservare che il piano α ed il quadro sono prospettivi, essendo omologhi un punto A di α e la sua immagine A', allineati col centro di prospettività O. La retta t è costituita di punti uniti nella prospettività. Dopo il ribaltamento il piano ribaltato (α) ed il quadro π sono ancora omografici, e poichè ancora la t è luogo di punti uniti, i due piani sono omologici essendo t l'asse di omologia: in questa omologia tra i piani sovrapposti $(\alpha),\pi$ si corrispondono i punti $(A),A'$. Si tratta di determinare questa omologia. In primo luogo osserviamo che la retta all'infinito del piano α, la quale corrisponde alla q del quadro π (nella prospettività di centro O) dopo il ribaltamento viene a sovrapporsi alla retta all'infinito di π, e quindi nell'omologia considerata sul quadro, la retta all'infinito corrisponde alla retta q, ossia la q è la *retta limite*.

Per determinare il centro di omologia, s'immagini di ribaltare insieme ad α anche il piano parallelo Oq. Possiamo concepire che mentre il piano α ruota attorno a t, il piano Oq ruoti attorno a q (nello stesso senso fissato) mantenendosi sempre parallelo al primo, in guisa che i due piani vengano a sovrapporsi contemporaneamente su π. Si vede così che il ribaltamento (a) di una retta $a \equiv (TQ)$ del piano $\alpha \equiv (tq)$ viene ad essere parallelo al ribaltamento del raggio parallelo OQ del piano Oq (fig. 35). Ora la retta (a) ribaltamento di a e l'immagine $a' \equiv TQ$ di a sono rette corrispondenti nella omologia, e perciò i punti omologhi di esse sono allineati col centro di omologia. Una coppia di tali punti omologhi è costituita dal punto Q di a' e dal punto improprio (Q_∞) di (a), quindi il raggio $(O)Q$ parallelo ad (a) per Q (il quale congiunge i detti punti) contiene il centro dell'omologia da costruire. Nello stesso modo si dimostra che il centro della omologia appartiene al ribaltamento (O)Q' di un altro raggio OQ' del piano Oq, quindi questo centro è il ribaltamento (O) di O attorno a q.

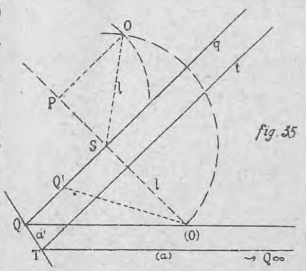


fig. 35

Così possiamo enunciare il:

Teorema. — *Se un piano* $\alpha \equiv$ (tq) *non parallelo al quadro e non passante per il centro di proiezione si ribalta sul quadro facendolo ruotare in uno dei due sensi attorno alla traccia* t, *tra il quadro* π *ed il piano ribaltato* (α) *intercede un'omologia in cui ad ogni punto* A', *immagine di un punto* A *di* α, *corrisponde il ribaltamento* (A) *di* A; *questa omologia ha per asse la traccia* t *del piano* α, *per centro il ribaltamento* (O) *del centro di proiezione* O *attorno alla retta di fuga* q *(fatto nello stesso senso) e per retta limite (a cui corrisponde la retta all'infinito) la nominata retta* q.

Per costruire il ribaltamento (A) di un punto A di α data l'immagine A', basta dunque determinare l'omologo di A' nella indicata omologia (fig. 36); quindi si considera una retta $(O)Q$ il cui punto all'infinito (Q_∞) è omologo di Q, poi si congiunge A' con Q e per il punto $T \equiv (t.A'Q)$ (traccia della retta AQ_∞ dello spazio) si conduce la parallela ad $(O)Q$ e si sega in (A) con $(O)A'$. Il punto (A), ribaltamento di A, così determinato, è l'omologo di A' perchè esso deve trovarsi sulla retta $(O)A'$ e sulla retta $T(Q_\infty^{\perp})$ omologa di TQ.

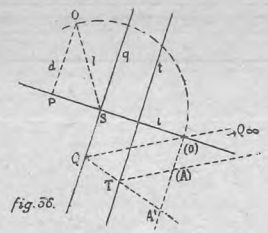


fig. 36.

§ 15. **Grandezza e forma di una figura piana.** — Come applicazione del teorema stabilito sul ribaltamento di un piano (non passante pel centro di proiezione e non parallelo al quadro) si possono risolvere tutti i problemi di grandezza relativi alle figure piane.

Escludiamo che le figure piane considerate appartengano ad un piano parallelo al quadro o passante pel centro di proiezione; a questi casi eccezionali si accenna in seguito e si potranno svolgere per esercizio.

La soluzione dei detti problemi si ha determinando il ribaltamento del piano (tq) della figura, e costruendo quindi per ogni punto A di (tq) avente una data immagine A', il ribaltamento (A) che è l'omologo di A' nella omologia considerata. Basta costruire i ribaltamenti di tanti punti della figura obbiettiva, quanti sono necessari alla determinazione della figura; ma ad ogni modo, ove questa sia p. e. una linea, si ha una costruzione per punti del suo ribaltamento data l'immagine, e così può rappresentarsi nella sua vera grandezza e forma la figura obiettiva. Sulla figura ribaltata nel quadro possono risolversi tutti i problemi di grandezza, cui dà luogo la figura obiettiva; per ottenere le immagini degli elementi così costruiti (che sono i ribaltamenti di quelli da costruire) basta determinare gli omologhi nell'inversa della omologia considerata. La costruzione della figura immagine, dato il suo ribaltamento, dicesi *raddrizzamento della figura*.

A spiegare le cose dette valgano i seguenti esempi di problemi metrici risoluti col metodo generale indicato:

Problema 1°. — *Determinare le bisettrici degli angoli di due rette incidenti.*

Escludiamo che il piano $\alpha \equiv (tq)$ delle due rette a, b, concorrenti in M, sia parallelo al quadro o passante pel centro di proiezione, e che le rette siano parallele al quadro. Allora le immagini a',b' delle rette $a \equiv (T_1Q_1)$, $b \equiv (T_2Q_2)$ sono distinte, ed il piano α delle a, b risulta rappresentato dalla traccia $t \equiv T_1T_2$ e dalla retta di fuga $q \equiv Q_1Q_2$ non coincidenti (e la q almeno fra queste due rette risulta congiungente di due punti Q_1Q_2 distinti) (fig. 37).

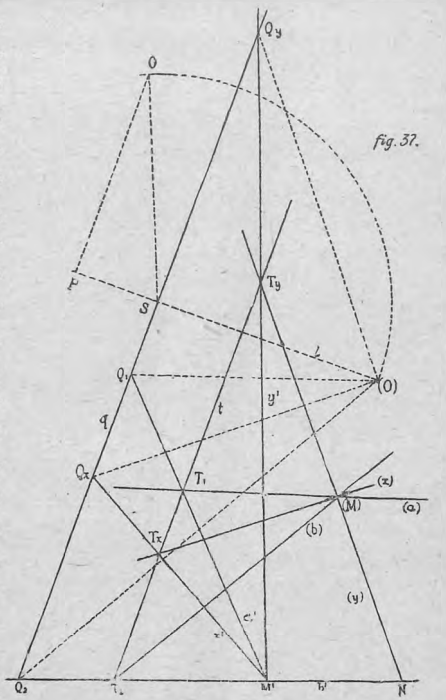


fig. 37.

Ribaltiamo il piano $\alpha \equiv (tq)$ sul quadro ruotandolo attorno a t e determiniamo l'omologia che intercede fra il quadro π e il ribaltamento (α) del piano α. Perciò si determini, come nella figura, la larghezza del piano proiettante Oq, e quindi il ribaltamento (O) di O attorno a q: la nominata omologia ha per centro (O), asse t, e retta limite q. Allora il ribaltamento (a) di a, retta omologa di a', è la parallela per T_1 ad $(O)Q_1$, e così il ribaltamento (b) di b è la parallela per T_2 ad $(O)Q_2$. Siano (x) (y) le bisettrici degli angoli delle due rette (a), (b); esse sono i ribaltamenti delle rette x, y, bisettrici degli angoli supplementari ab, le cui immagini x', y' debbono essere costruite. Allora la x ha per traccia $T_x \equiv t$. (x) ed il suo punto di fuga Q_x si trova sulla q e sulla parallela per (O) ad (x) e risulta così determinato. Analogamente si costruisce la coppia rappresentativa (T_yQ_y) dell'altra retta y, e si hanno così le immagini $x' \equiv T_xQ_x$ ed $y' \equiv T_yQ_y$ delle rette x, y che debbono risultare passanti per il punto $M' \equiv a'\,b'$. Data per es. la x' si può anche costruire la y' come raggio coniugato armonico di x rispetto ad a', b'.

PROBLEMA 2°. — *Determinare la vera grandezza e forma di una conica.*

La conica C è rappresentata sul quadro da un'altra conica sua immagine C' ed è dato il piano $\alpha \equiv (tq)$ (supposto in posizione non eccezionale) che la contiene. Si ribalta il piano α sul quadro, e si determina l'omologia che intercede tra π ed il ribaltamento (α) di α; allora data la C' si ha una costruzione per punti della conica (C) ribaltamento di C. Si possono anche determinare cinque punti di (C) e quindi costruire (C) per punti coi noti metodi della Geometria proiettiva.

Si osserverà che la (C) (uguale alla C) risulta risp. una iperbole, una parabola od un'ellisse secondochè la C' sega la q in due punti, oppure la tocca in un punto, oppure non ha punti comuni con essa. Si svilupperanno questi casi per esercizio.

§ 16. **Traslazione di una figura piana nello spazio.** — Il problema di determinare la vera grandezza e forma di una figura piana è stato risoluto nel § precedente, per il caso generale in cui il piano della figura non sia parallelo al quadro e non passi pel centro di proiezione. Per risolvere il detto problema nei casi d'eccezione prima esclusi, basterà immaginare di aver compiuto nello spazio una traslazione della data figura in guisa che si venga a sostituire ad essa un'altra figura uguale di cui la considerazione riesca più comoda. Così se la data figura piana è parallela al quadro, basta operare su di essa una traslazione, in guisa da sovrapporre il suo piano al quadro.

Se invece la figura giace in un piano non parallelo al quadro, ma passante pel centro di proiezione, basta farle compiere una traslazione qualunque per essere ricondotti al caso del § 15, ma si può invece profittare del ribaltamento di un piano proiettante come nel § 11. In ogni caso la figura deve essere determinata mediante qualche altro elemento, chè in questo caso la sola immagine non basta più.

Per determinare la figura che si ottiene da una data mediante una traslazione, basta fissare il piano parallelo al primo, cui la nuova figura deve appartenere, e determinare le intersezioni di esso colle rette aventi una certa direzione uscenti dai punti della data figura. Le costruzioni che occorrono a tale scopo sono state indicate nel Cap. I. Si svolgeranno per esercizio le risoluzioni dei problemi 3° e 4° del § precedente, quando intervenga un caso d'eccezione.

§ 17. **Antipolarità rispetto al circolo di distanza.** — Qual'è la condizione perchè una retta ed un piano siano perpendicolari? Questa condizione dipende soltanto dalla direzione della retta, e dalla giacitura del piano, quindi in essa comparisce solo la considerazione dei loro elementi di fuga Q e q.

Dire che Q, q sono gli elementi di fuga di una retta e di un piano perpendicolari significa che sono perpendicolari il raggio proiettante OQ ed il piano Oq. In tale ipotesi vi è per O un piano perpendicolare al piano del quadro che contiene Q ed il punto principale P, e riesce perpendicolare alla q, intersecandola in un certo punto S (fig. 38); quindi la retta PQ riesce perpendicolare alla q. Se Q coincide con P, in guisa che la retta PQ non è determinata, la q è la retta all'infinito del quadro, ed il piano Oq è il piano parallelo anteriore. Ora il triangolo SOQ deve essere rettangolo in O se il piano Oq e la retta OQ sono perpendicolari; il triangolo è quindi perfettamente determinato nota la sua altezza OP (che è la distanza principale d) ed uno dei segmenti PQ, PS in cui il piede P di OP divide l'ipotenusa. Possiamo quindi immaginare il triangolo SOQ ribaltato sul quadro attorno ad SQ (in uno dei due sensi) in $S(O)Q$; allora la costruzione di esso permette di costruire q dato Q e viceversa. Perciò si procederà nel modo seguente:

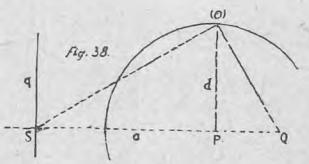


Fig. 38.

Dato Q, supposto distinto da P, si congiunga con P e si elevi in P la perpendicolare alla PQ determinando uno dei punti (O) in cui essa incontra il circolo di distanza. La perpendicolare in (O) alla $(O)Q$ incontra la retta PQ in un certo punto S; la perpendicolare in S alla PQ è la retta q, retta di fuga dei piani perpendicolari al raggio proiettante OQ, ed a tutte le rette che hanno Q come punto di fuga. Si osservi che se $Q \equiv P$, la q cercata è la retta impropria e viceversa.

Data q, supposta propria, si conduca per P la perpendicolare a ad essa che l'incontrerà in un punto S; si conduca quindi la parallela per P a q, e si determini uno dei punti (O) in cui essa incontra il circolo di distanza; quindi si conduca la retta $(O)S$, e ad essa la perpendicolare in (O); quest'ultima retta incontrerà la a nel punto Q cercato, cioè nel punto di fuga delle rette perpendicolari ai piani che hanno q come retta di fuga.

Le costruzioni indicate, l'una inversa dell'altra, nelle quali

entra essenzialmente la considerazione del circolo di distanza, definiscono quella particolare corrispondenza fra punti e rette del quadro che dicesi *antipolarità rispetto al circolo di distanza*. In questa antipolarità, per la costruzione indicata, ai punti di una retta corrispondono i raggi di un fascio e viceversa; se q è la retta corrispondente ad un punto Q, le rette corrispondenti ai punti di q passano per Q e reciprocamente. L'antipolarità è dunque una particolare polarità del piano, secondo la definizione che si dà di questa nella Geometria proiettiva. Del resto ciò risulta chiaro anche dal fatto che questa antipolarità si ottiene segando quella polarità della stella di centro O, in cui si corrispondono un raggio ed un piano perpendicolare, cioè si ottiene come proiezione sul quadro della così detta *polarità assoluta* del piano all'infinito. Risulta così, o dalla costruzione indicata, che l'antipolarità del piano è uniforme, cioè non ha alcun punto appartenente alla retta omologa.

Riassumendo abbiamo il

Teorema. — *I punti e le rette di fuga di rette e piani perpendicolari si corrispondono (sul quadro) nell'antipolarità rispetto al circolo di distanza; questa è la polarità uniforme proiezione (dal centro sul quadro) della polarità assoluta (del piano all'infinito).*

Osservazione. — Dato il circolo di distanza, esso definisce sul quadro una *polarità* T e un'*antipolarità* Ω. Ora, indicando con π quella omografia particolare del quadro che è la simmetria rispetto al centro P del circolo di distanza si vede che è $\Omega \equiv \pi\, T$. Invero ogni punto preso sul circolo di distanza ha come polare la tangente al circolo nel punto stesso e come antipolare la tangente nel punto simmetrico rispetto al centro; quindi per eseguire la Ω sopra uno di questi punti, basta eseguire il prodotto πT. D'altra parte esiste una sola correlazione (cioè la polarità πT) che a 4 punti scelti sul circolo di distanza faccia corrispondere rispettivamente le 4 tangenti al circolo medesimo nei punti simmetrici ai primi rispetto al centro P. Perciò la Ω non può differire dal prodotto πT.

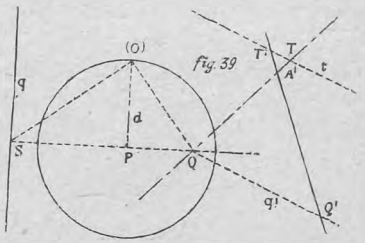
Sussiste anche la relazione $T \equiv \pi\, \Omega$ poichè π è uguale alla propria inversa.

§ 18. **Problemi metrici in cui entra la considerazione di rette e piani perpendicolari.** — Possiamo ora risolvere sul quadro col metodo della proiezione centrale tutti i problemi metrici dello spazio in cui entra la considerazione di elementi (rette e piani)

perpendicolari, facendo uso della costruzione data per l'antipolarità Ω rispetto al circolo di distanza. Escludiamo al solito quei casi di eccezione in cui gli elementi (dati o da costruire) che entrano in considerazione non sono rappresentati sul quadro nel modo ordinario. In questi casi d'eccezione si applicheranno quelle modificazioni alle costruzioni generali indicate che occorrono nella risoluzione dei problemi grafici (Cap. I) entranti in considerazione.

Problema 1.° — *Determinare la perpendicolare ad un piano per un punto (proprio) dato* (fig. 39).

Sia q la retta di fuga del piano, che basta qui considerare. Determiniamo l'antipolo Q di q in Ω; questo è il punto di fuga della retta cercata. Essa viene determinata appena è dato un suo punto proprio e se ne costruisce la traccia come è stato indicato nel Cap. I (§ 4. Probl. 8°).

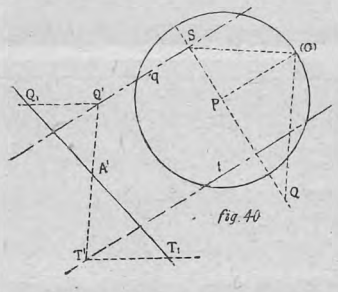


La figura mostra le costruzioni eseguite nel caso generale.

Problema 2.° — *Determinare la distanza di un punto (proprio) da un piano.*

Si conduca pel dato punto A la perpendicolare al piano (Probl. precedente) e si seghi col piano in B (§ 4 Probl. 4°). La distanza cercata è la lunghezza del segmento AB e si determina come nel § 12.

Problema 3.° — *Determinare il piano perpendicolare ad una retta e passante per un punto (proprio) dato.*

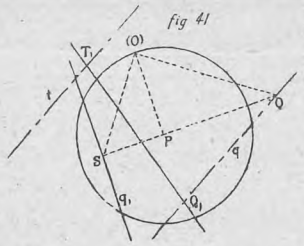


Sia Q il punto di fuga della retta, che basta qui considerare, e sia dato il punto (proprio) A mediante la sua immagine A' ed una retta (T_1Q_1) che lo contenga. L'antipolare q di Q in Ω è la retta di fuga del piano cercato, il quale risulta determinato dato un suo punto (proprio) A. La figura 40 indica le costruzioni eseguite nel caso generale.

Problema 4.° — *Determinare la distanza di un punto (proprio) da una retta.*

La soluzione del problema si deduce da quella del probl. precedente come la soluzione del 2.° da quella del 1.° Trattandosi di un problema di grandezza nel piano si può qui adoperare il metodo del § 14.

Problema 5.° — *Determinare il piano perpendicolare ad un dato piano, e passante per una retta (non perpendicolare ad esso).*



Si costruiscano l'antipolo Q in Ω della retta di fuga q_1 del dato piano. Se T_1Q_1 è la data retta, il piano cercato ha per retta di fuga $q = QQ_1$ e per traccia la parallela t condotta a q per T_1 (fig. 41).

Problema 6.° — *Determinare gli angoli di due piani (non paralleli).*

Si costruiscano i punti di fuga delle perpendicolari ai due piani. Allora gli angoli delle due direzioni da essi individuate si determinano come nel § 13 e sono gli angoli dei due piani.

Problema 7.° — *Determinare l'inclinazione di una retta sopra un piano.*

Per la retta (supposta non perpendicolare al dato piano) si conduca il piano perpendicolare ad esso (Problema 5.°) e se ne determini la sezione con esso; l'angolo acuto di questa intersezione colla retta data, è l'angolo cercato.

Problema 8.° — *Determinare la larghezza dello strato compreso fra due piani paralleli.*

Si determini una perpendicolare ai due piani, quindi le sue intersezioni con essi (§ 4 Probl. 4.°) e la lunghezza del segmento terminato da queste intersezioni (§ 12).

Problema 9.° — *Determinare la larghezza della striscia piana compresa tra due rette parallele.*

Basta condurre un piano perpendicolare alle due rette e determinare la lunghezza del segmento che ha per estremi le intersezioni di questo piano con le due rette.

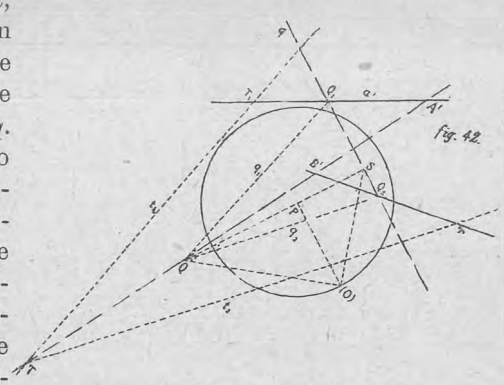
Un'altra soluzione è data dal ribaltamento sul quadro del piano delle due rette (supposto obliquo al quadro e non passante pel centro di proiezione). Se le due rette sono in un piano parallelo al quadro basta eseguire la traslazione della striscia sul quadro.

Problema 10.° — *Determinare la (minima) distanza di due rette sghembe.*

1.ª Soluzione:

Sieno $a \equiv (T_1 Q_1)$, $b \equiv (T_2 Q_2)$ le due rette sghembe (in posizione generale) (fig. 42).

La $q \equiv Q_1 Q_2$ è la retta di fuga di ogni piano parallelo ad a, b. Si conduca per a, e similmente per b, un piano perpendicolare alla giacitura delle rette a, b indicata da q. Questi due piani (nello spazio) si segano secondo la perpendicolare comune alle due rette a, b. Per determinare questa perpendicolare comune occorre dunque costruire l'antipolo Q di q in Ω (che ne è il punto di fuga), condurre le $q_1 \equiv Q_1 Q$, $q_2 \equiv Q_2 Q$ e le parallele ad esse t_1, t_2 risp. per T_1, T_2; determinare il punto $T \equiv t_1 t_2$, e finalmente congiungere T con Q. La retta (TQ) perpendicolare comune ad a, b incontra le a, b in due punti A, B aventi rispettivamente le immagini $A' \equiv (T_1 Q_1, TQ)$; $B' \equiv (T_2 Q_2, TQ)$. La lunghezza del segmento AB, che è la minima distanza di a e b, si determina come nel § 12.



2.ª Soluzione:

Ove non occorra avere rappresentato nella sua vera posizione il segmento perpendicolare ad a, b, incidente ad esse, ma basti averne la lunghezza, si può procedere anche nel seguente modo: Si conduca per a un piano parallelo a b, e per b un piano parallelo ad a (§ 4.°. Probl. 10.°), e si determini la larghezza dello strato compreso fra questi due piani (Probl. 8.°).

Nelle costruzioni indicate abbiamo escluso i casi di eccezione più volte accennati. Fra questi è importante considerare il seguente:

Problema 11.° — *Determinare l'ordinata di un punto (distanza dal quadro) non appartenente al raggio* OP *proiettante il punto principale.*

Questo problema è un caso (eccezionale) del problema 1°.

Sia $A \equiv (A' - TQ)$ il dato punto (fig. 43). Il punto principale P è il punto di fuga della perpendicolare al quadro per A,

e quindi PA' è l'immagine di essa; la sua traccia T' è l'intersezione di PA' colla parallela per T alla PQ. Si tratta di determinare la lunghezza del segmento AT', ciò che sappiamo fare (§ 11),

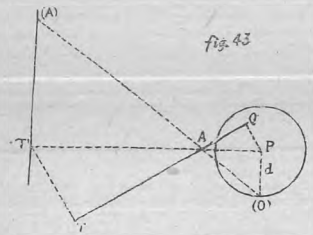


fig. 43

Nella figura è stata eseguita la costruzione, e l'ordinata cercata è la lunghezza del segmento $(A)T'$.

§ 19. **Involuzione subordinata dall'antipolarità sopra una retta del quadro. Applicazioni.** — Sebbene i problemi metrici che si riferiscono a figure piane si possano risolvere coi procedimenti indicati nei §§ 11, 14 e 16, è opportuno notare come si possa ottenere per altra via la risoluzione dei problemi in cui entra la considerazione di rette perpendicolari nel piano, senza far uso del ribaltamento (o della traslazione) di esso.

Nell'antipolarità Ω sul quadro, come in generale in ogni polarità, si dicono reciproci o coniugati due punti di cui ciascuno appartiene all'antipolare dell'altro. Allora sopra ogni retta q del quadro, si ha una involuzione I di punti reciproci rispetto all'antipolarità Ω; ogni punto Q' di q ha per coniugato in questa involuzione il punto O'_1 intersezione dell'antipolare q' di Q' colla retta q (fig. 44). La condizione di ortogonalità di due rette giacenti in un piano che abbia la q come retta di fuga, è che i punti di fuga delle due rette (appartenenti a q) sieno coniugati nell'involuzione I di q, cioè reciproci in Ω.

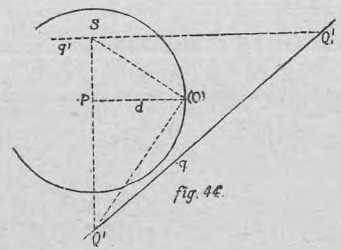


fig. 44

Così può risolversi nel piano il problema di condurre una retta perpendicolare ad un'altra per un dato punto (proprio) in modo analogo a quello tenuto per risolvere il problema 1.° del prec. §.

Facciamo un'applicazione di questo metodo alla risoluzione di alcuni problemi che si riferiscono alle coniche e in particolare al cerchio.

Supponiamo sempre che il piano della conica sia obliquo al quadro, e non passi per il centro di proiezione.

Problema 1.° — *Determinare gli assi di una conica a centro.* Sia C' l'immagine della data conica C, sul quadro, e q la retta di fuga del piano cui C appartiene; sia poi Q il polo di q rispetto a C' (fig. 45). Allora è noto dalla Geometria proiettiva che Q è il centro di una involuzione di raggi reciproci

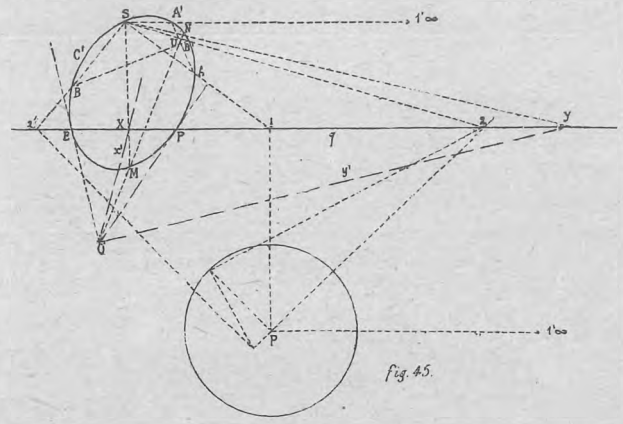


fig. 45.

rispetto a C', e che due raggi reciproci per Q segano la q in due punti $Q_1Q'_1$ reciproci rispetto a C'. Ora essendo C la conica obiettiva di C' nel piano assegnato α avente come retta di fuga q, Q deve essere l'immagine del polo della retta all'infinito di α rispetto a C, cioè del centro della conica C. Quindi due raggi reciproci per Q, come QQ'_1, QQ_1 debbono essere le immagini di due diametri coniugati della C. Se tali diametri della C debbono essere ortogonali, i punti Q_1, Q'_1 debbono essere coniugati nella involuzione I individuata su q dalla antipolarità Ω.

Ora in generale se la C' viene assunta ad arbitrio sul quadro, la conica obiettiva C non sarà un cerchio, ed avrà una coppia di diametri coniugati ortogonali: gli assi. La costruzione di questi si ottiene dunque determinando col noto procedimenlo della Geometria proiettiva, la coppia comune alla involuzione I e a quella dei punti reciproci rispetto a C'. Perciò, costruite su q due coppie di punti coniugati in I (e si potrà assumere come una coppia quella costituita dal punto all'infinito e dal piede della perpendicolare abbassata da P), si proietteranno da un punto S di C' su C', e si avranno così due coppie di punti coniugati A, A' e B, B' nell'involuzione I

proiezione su C' della I. La I' ha come centro di collineazione il punto $AA'.BB'$; mentre la proiezione su C' dell'involuzione di punti coniugati rispetto ad essa su q, è quella che ha come centro di collineazione Q (teorema di **Staudt**). Unendo il punto $AA'.BB'$ con Q, e segando la retta con C', si hanno due punti M ed N che proiettati da S su q danno la coppia X, Y dei punti coniugati in I e coniugati rispetto a C'. Essi sono i punti di fuga degli assi di C.

In particolare emerge di qui che *la condizione perchè la conica* C′ *sia l'immagine di un cerchio è che l'involuzione dei punti di* q, *coniugati rispetto a* C, *coincida coll'involuzione* I *subordinata su* q *dall'antipolarità relativa al cerchio di distanza.*

Si è condotti a questo caso se, nella costruzione precedente, le AA', BB' passano per Q.

La condizione enunciata si può riguardare anche sotto un altro aspetto, perfettamente equivalente, dicendo che:

Le coniche immagini dei cerchi del piano (tq) *passano per due punti fissi, immaginarî coniugati, di* q, *cioè per i punti doppî dell'involuzione* (*ellittica*) I.

Questi punti debbono considerarsi come le proiezioni dei *punti ciclici* del piano (tq), cioè dei punti immaginari coniugati, comuni a tutti i cerchi del piano, che sono doppî per l'involuzione assoluta di esso.

Dopo ciò vediamo come i problemi di costruzione concernenti i cerchi del piano (tq) si lasciano ricondurre, sul quadro, alle costruzioni delle coniche definite da elementi, alcuni dei quali sono immaginarî.

Problema 2.° — *Costruire l'immagine di un cerchio appartenente ad un dato piano* (tq), *dato il centro ed un punto di esso.*

Sia M' l'immagine del centro ed A' l'immagine di un punto del cerchio (fig. 46).

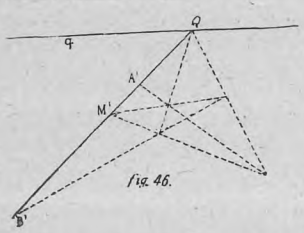


fig. 46.

La conica C' proiezione del cerchio suddetto, si può riguardare definita da un punto reale (A), da due punti immaginarî coniugati, cioè dai punti doppî della involuzione I subordinata su q dalla antipolarità relativa al cerchio di distanza, e dalle relative tangenti, che sono le rette congiungenti i punti suddetti col polo M' della q.

Un secondo punto reale della conica C' si trova subito; è

il punto B', coniugato armonico di A' rispetto ad M' e all'intersezione Q delle due rette q, $A'M'$.

Ora proiettando da A', B' i punti coniugati (in I) della retta q, si otterranno, pel teorema di **Staudt**, rette intersecantisi nei punti della conica C'.

Questa generazione della C' nasce, del resto, per proiezione, dalla generazione del centro obiettivo C come luogo dei punti da cui si vede un diametro (AB) secondo un angolo retto.

Problema 3.° — *Determinare il centro del cerchio che passa per tre punti dati* (*non in linea retta*).

Supponiamo dato anche qui (§ 4, Probl. 7°) il piano (tq) dei tre punti A, B, C, che verranno assegnati mediante le loro

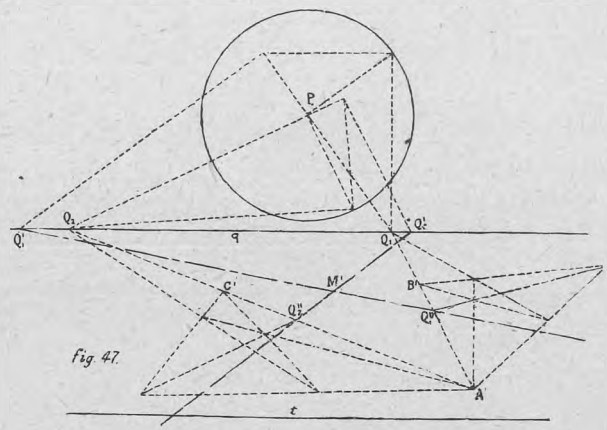


fig. 47.

immagini A', B', C'. La conica K' immagine del cerchio K passante per A, B, C, viene ora definita da tre punti reali (A',B',C') e da due punti immaginari coniugati, cioè dai punti doppi della involuzione I già considerata su q. Si tratta di costruire rispetto a questa conica il polo M' della q, che è la immagine del centro del cerchio obiettivo K (dopodichè la costruzione di K' si otterrebbe come nell'antecedente problema).

Per la effettiva costruzione del punto M' si può procedere come segue:

Il punto M' appartiene alle polari dei punti di q rispetto alla conica K'. Si consideri su q il punto Q_1 sezione della retta $A'B'$ (fig. 47) e se ne determini il coniugato Q'_1 in I (sezione dell'antipolare di Q_1 in Ω); poi si determini il coniugato armo-

nico Q''_1 di Q_1 rispetto ad A', B', e si conduca la $Q'_1Q''_1$; questa retta risulta essere la polare di Q_1 rispetto alla conica K'.

Analogamente si costruisca la polare $Q'_2Q''_2$ del punto Q_2 sezione di q con $A'C'$ rispetto alla medesima conica K'.

Allora il polo M' di q rispetto alla K' è l'intersezione delle rette $Q'_1Q''_1$, $Q'_2Q''_2$; questo punto M' è, come si è detto, l'immagine del centro M del cerchio K per A, B, C.

Problema 4.° — *Determinare il centro* O *della sfera data da quattro punti* A, B, C, D (*non giacenti in uno stesso piano*).

Si determini il centro M del cerchio A, B, C (Problema prec.) e si elevi in M la perpendicolare x al piano A B C (fig. 48); analogamente si costruisca la perpendicolare y al piano del cerchio ABD pel centro N di questo cerchio. Le x, y s'incontrano nel centro della sfera individuata da quei quattro punti.

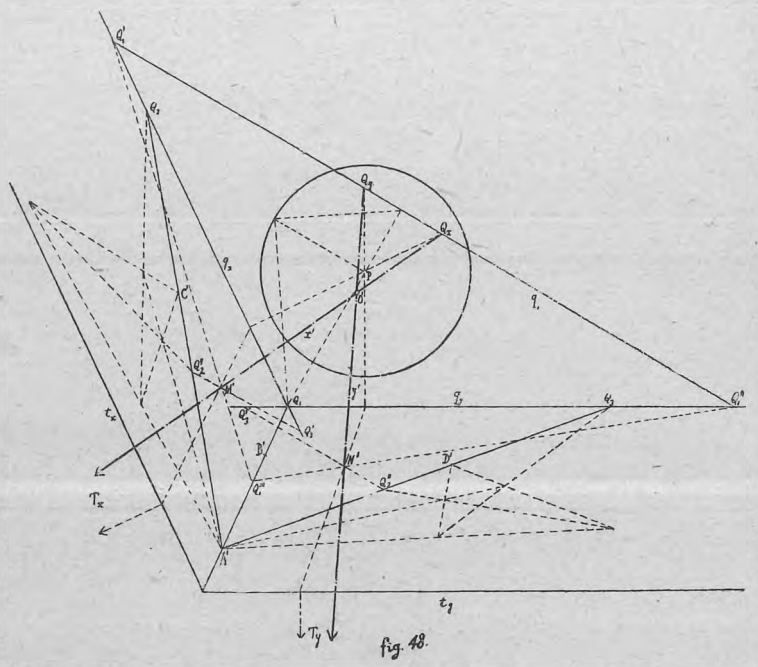


fig. 48.

Per fissare la posizione dei quattro punti A, B, C, D basta conoscere le immagini A', B', C', D' e due piani, l'uno passante ad es. per A, B, C, l'altro per A, B, D. È utile osservare che le perpendicolari x, y determinano un piano perpendicolare ad AB; perciò è chiaro che i punti di fuga Q_x, Q_y appartengono all'antipolare del punto di fuga Q_1 della retta AB. Questa antipolare è dunque la retta di fuga del piano delle rette x, y, e per avere la traccia di questo piano occorre determinare le tracce T_x, T_y delle x, y, ad esempio mediante due rette ausiliarie passanti risp. per M ed N e giacenti nei piani $(t_x q_x)$ e $(t_y q_y)$, come indica la figura 48. Così il punto O, centro della sfera, risulta perfettamente determinato.

CAPITOLO III.

Cambiamento del sistema di proiezione centrale.

§ 20. **Preliminari.** — Con ciò che precede sono dati gli elementi per risolvere sul quadro col metodo della proiezione centrale tutti i problemi relativi a figure dello spazio. Abbiamo però fatto rilevare più volte come nella risoluzione di questi problemi si presentino dei casi di eccezione pei quali bisogna ricorrere a costruzioni più laboriose. Oltre ciò anche tutte le volte che la posizione dell' oggetto rispetto al quadro o al centro di proiezione sia tale che debbasi operare sopra elementi vicini ad una posizione eccezionale, ed anche tutte le volte che gli elementi rappresentati sul quadro conducano ad eseguire costruzioni fuori dei limiti del disegno, quelle costruzioni diverranno spesso inattuabili in pratica. Allora si ricorre ad un *cambiamento del sistema di proiezione* (centro e quadro).

Questo può anche giovare, come vedremo, ove si voglia porre ad es. il centro di proiezione od il quadro in una posizione legata all' oggetto, in modo che le proprietà geometriche di questo vengano a tradursi in proprietà più semplici delle figure rappresentative.

Osservazione. — Il problema del cambiamento del sistema di rappresentazione che qui trattiamo, è da riguardarsi come analogo a quello della trasformazione di coordinate studiato nella Geometria analitica.

Il problema del cambiamento del sistema di proiezione relativo al metodo della proiezione centrale, può scomporsi nei seguenti problemi semplici:

a) Spostamento del centro di proiezione parallelamente al quadro.

b) Spostamento del centro di proiezione normalmente al quadro.

c) Rotazione del quadro attorno ad una sua retta (propria).

d) Traslazione parallela del quadro.

È chiaro che componendo i movimenti *a*), *b*) si può fare assumere al centro di proiezione una qualunque posizione nello spazio, e con uno dei movimenti *c*), *d*) si può sovrapporre il quadro ad un qualunque piano fissato.

§ 21. **Spostamento del centro nel piano parallelo anteriore.** — *Lo spostamento del centro, parallelamente al quadro, di una data lunghezza* l, *equivale alla traslazione degli elementi di fuga della figura obiettiva sul quadro, nella direzione dello spostamento e della medesima lunghezza. Le tracce restano invariate. Le immagini dei punti della figura si muovono nella direzione dello spostamento.*

Infatti nel nominato spostamento i raggi e piani proiettanti paralleli alle rette e ai piani della figura obiettiva vengono spostati parallelamente a sè stessi della lunghezza l misurata nella direzione dello spostamento.

Lo spostamento indicato del centro di proiezione si potrà dunque indicare sul quadro dando un segmento PP_1 (fig. 49) di lunghezza l avente un estremo nel punto principale e avente la direzione dello spostamento.

Data una retta (TQ), la sua rappresentazione nel nuovo sistema si ottiene conducendo per Q una parallela a PP_1 e fissando su di essa nel senso PP_1 il punto Q_1 distante di l da Q; allora la nuova coppia rappresentativa diviene (TQ_1). L' immagine A' di un punto della retta nella trasformazione si muove parallelamente (alla QQ_1 e quindi) alla PP_1 e resta così definita nella sua nuova posizione A'_1 sulla TQ_1 come intersezione colla parallela a PP_1 per A'.

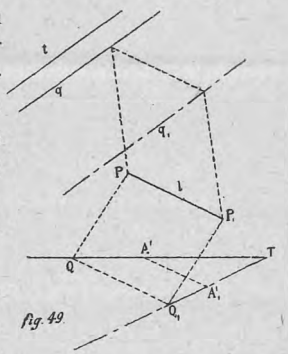


Fig. 49

Dato un piano (tq), si condurrà per un punto di q il segmento parallelo a PP_1 di ugual lunghezza e senso, e per l'estremo di esso la parallela q_1 a q; la nuova coppia rappresentativa del piano sarà quindi (tq_1).

Con lo spostamento del centro di proiezione nel piano parallelo anteriore si possono eliminare le difficoltà dipendenti dal fatto che alcuni elementi dell'oggetto appartengano al centro di proiezione (o sieno troppo vicini ad esso).

§ 22. **Spostamento del centro normalmente al quadro.** — *Lo spostamento del centro di proiezione normalmente al quadro equivale ad un' omotetia operata sugli elementi di fuga delle rette e dei piani della figura obiettiva, avente come centro il punto principale* P. *Le tracce restano invariate. Le immagini dei punti della figura si muovono sulle congiungenti il punto* P.

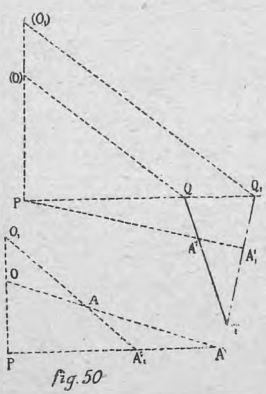


fig. 50

Infatti per il nominato spostamento i raggi e piani proiettanti paralleli alle rette e ai piani della figura si spostano parallelamente a sè stessi, mentre il raggio OP, normale al quadro, rimane fisso. È stato già notato che le sezioni di un piano con due stelle riferite in modo che si corrispondano in esse gli elementi paralleli sono omotetiche avendo per centro d'omotetia il punto d'intersezione del raggio comune alle due stelle (§ 6).

Dato il punto di fuga Q di una retta nel primo sistema, il nuovo punto di fuga Q_1 della retta dopo lo spostamento normale del centro si trova sulla retta PQ, ed il rapporto $\frac{PQ}{PQ_1}$ è uguale a quello fra le distanze principali d, d_1 nei due sistemi di proiezione (fig. 50). La traccia T della retta rimane fissa, onde la nuova immagine della retta è la TQ_1. L'immagine A' di un punto A della retta (TQ) si sposta sulla retta PA', poichè il raggio OA si muove nel piano OAP normale al quadro, quindi la nuova immagine A'_1 del punto A resta definita come intersezione di PA_1, TQ_1.

Dato un piano (tq) (fig. 51), per averne la nuova rappresentazione basta determinare la sua retta di fuga q_1, parallela a t e quindi a q, la cui distanza PS_1 da P sta a quella PS di P da q nel rapporto delle distanze principali d_1, d.

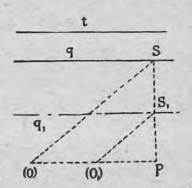


fig. 51.

Nell'eseguire tali costruzioni si possono usare i procedimenti grafici che servono alla costruzione dell'omotetia, appena fissata una coppia di elementi Q, Q_1 o q, q_1 che si corrispondono in essa.

§ 23. **Spostamento arbitrario del centro.** — Eseguendo successivamente uno spostamento del centro parallelamente al quadro ed uno normalmente, si può eseguire un qualunque spostamento del centro in una certa direzione e di una data lunghezza. Risulta dalle cose dette nei precedenti paragrafi che:

In uno spostamento qualunque del centro di proiezione le tracce degli elementi della figura obiettiva restano invariate. Sopra gli elementi di fuga si opera (nel quadro) un' omotetia, che ha per centro il punto principale ed é determinata dal rapporto delle distanze principali, combinata ad una traslazione la cui direzione e lunghezza viene data dalla proiezione ortogonale sul quadro dello spostamento del centro.

Si propone come esercizio la risoluzione dei seguenti problemi.

1. In un sistema di proiezione centrale sia dato un triangolo non giacente nel piano parallelo anteriore, di cui un lato passi pel centro di proiezione; si sposti il centro in modo che la nuova immagine del dato triangolo sia un triangolo coi vertici propri e distinti.

2. In un sistema di proiezione centrale sia dato un triangolo nel piano parallelo anteriore di cui nessun lato passi pel centro; si sposti il centro in modo da avere per immagine del dato triangolo sul quadro un nuovo triangolo avente i tre vertici propri e distinti.

3. Rappresentati tre punti di un circolo giacente in un piano parallelo al quadro, ma diverso dal piano parallelo anteriore del fissato sistema di proiezione centrale, spostare il centro per modo che la nuova immagine del circolo sul quadro risulti un circolo uguale al dato.

Qui basta determinare la perpendicolare nel centro del circolo al quadro e il punto di essa equidistante dal quadro e dal piano del circolo: il centro di proiezione deve portarsi con uno spostamento nel punto così determinato. (Per semplicità si assumano dati i tre punti mediante le loro immagini A', B', C' e la traccia T della perpendicolare condotta per A, la quale ha per punto di fuga il punto principale P).

Problema. — *Costruire la immagine della intersezione* s *di*

due piani (t_1q_1), (t_2q_2) *le cui rette di fuga* q_1, q_2, *non si tagliano entro il foglio.*

Siccome la traccia $T \equiv t_1t_2$ di s ci è data, basterà determinare l'immagine A' di un punto A della s (fig. 52). A tal uopo si consideri un punto Q' di q_1, ed essendo $H \equiv (t_1q_2)$ e K la intersezione di t_1 con la parallela a q_2 condotta per Q' è chiaro che $TQ' \equiv s''$ sarà l'immagine di s in un secondo sistema di proiezione ottenuto mediante lo spostamento di O di un segmento equipollente (cioè parallelo ed uguale) ad HK. Sia ora A'' un punto di s''; esso è l'immagine di A nel secondo sistema di proiezione. Per avere l'immagine primitiva A', consideriamo una retta m passante per A e appartenente a (t_1q_1), la cui seconda immagine sia $T_1Q'_1 \equiv m''$. Allora la prima immagine m' sarà T_1Q_1 essendo Q_1 l'estremo del segmento Q'_1Q_1 equipollente ad HK. Ora A' sarà la intersezione di T_1Q_1 con la parallela a q_1 condotta per A'', e quindi $TA' \equiv s'$ che si voleva costruire.

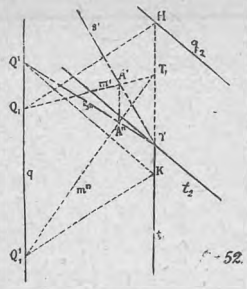


fig. 52.

§ 24. **Spostamento del quadro.** — Il cambiamento del piano di proiezione si riduce, come abbiamo detto, ad una rotazione del quadro attorno ad una sua retta propria, o ad una traslazione di esso. Il problema che si tratta di risolvere, consiste dunque nel muovere la figura piana rappresentativa dell'oggetto sopra un piano α in modo che essa venga a giacere sul piano π e viceversa. Questo problema consiste dunque nel ribaltamento o nel raddrizzamento o nella traslazione di una figura piana, di cui abbiamo già trattato (Cap. II). Invero sia dato un piano (tq) e lo si assuma come nuovo quadro. Ciò vuol dire: determinare nel piano (tq) la immagine F'' dell'oggetto F dato per mezzo della immagine primitiva F' e ribaltare il nuovo quadro (intorno alla sua traccia t) sopra il quadro primitivo π. Evidentemente F' è anche immagine di F'', giacchè ogni punto dello spazio proprio o improprio viene proiettato su π e (tq) dal medesimo raggio proiettante. Allora fra F' e (F''), ribaltamento di F'', intercede l'omologia di cui si è trattato al § 14.

Osservazione. — Per determinare il nuovo punto principale e la nuova distanza principale, si procede così. Immaginiamo di condurre da O la perpendicolare OP_1 a (tq) (fig. 53). Il piano POP_1 risulta perpendicolare ai piani π e (tq), e quindi alla traccia t. Perciò PL perpendicolare a t sarà la sua traccia su π ed $(O)S$ il ribaltamento della sua intersezione col piano Oq, quindi la $L(P_1)$ parallela ad $(O)S$ per L sarà il ribaltamento della sua intersezione con (tq), e infine il segmento $(O)(P_1)$ perpendicolare ad $L(P_1)$ la nuova distanza principale. Ora il nuovo punto principale ci sarà dato da (P_1) essendo $L(P_1) \equiv L(P_1)'$.

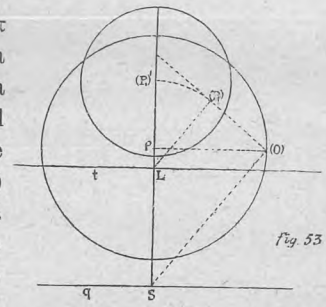


fig. 53

Come applicazione risolviamo il seguente

Problema. — *Costruire un piano che passi per una retta data* $m \equiv (TQ)$ *e sia inclinato di un angolo* α *sopra un piano* (tq).

Intanto osserviamo che se si trattasse di condurre per (TQ) un piano inclinato di un angolo α sopra il quadro, basterebbe costruire un triangolo rettangolo $(O)'PM$, dove $(O)'P$ è la distanza principale ed è $(O)'MP \equiv \alpha$ (fig. 54), quindi descrivere un cerchio con centro in P e raggio PM; le tangenti a questo cerchio condotte da Q sarebbero le rette di fuga q_x e q_y, e le parallele a queste per T sarebbero le tracce t_x e t_y dei due piani soddisfacenti alle condizioni poste.

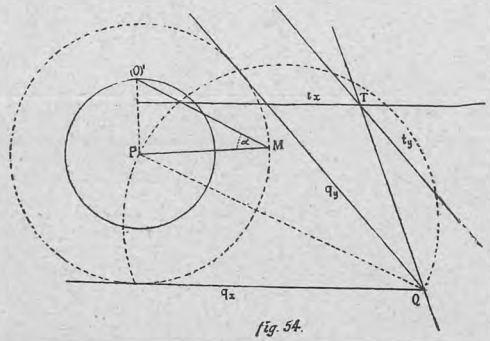


fig. 54.

Per ricondurre il nostro problema al caso più semplice ora indicato, si procede così. Assunto come nuovo quadro il piano (tq), si determina il punto principale $(P_1)'$ e il nuovo circolo di distanza (fig. 55). Poi, essendo $m'' \equiv (T'Q')$ la proiezione, da O sul piano (tq), della retta obiettiva m, occorre costruire il ribaltamento (m'') di m'' sul quadro. Allora il nuovo punto di fuga (Q_1) della retta m è l'omologo di Q nella omologia che ha per centro (O) ribaltamento di O intorno a q, e per asse la traccia t del nuovo quadro (§14); quindi (Q_1) è l'intersezione

di $Q(O)$ con (m''), retta omologa di m'. Dopo ciò si determinano le rette di fuga (q'_x), (q'_y) nel modo indicato precedentemente.

Allora le rette q'_x, q'_y rispettivamente omologhe di (q'_x) e (q'_y) nella omologia inversa, che corrisponde al raddrizza-

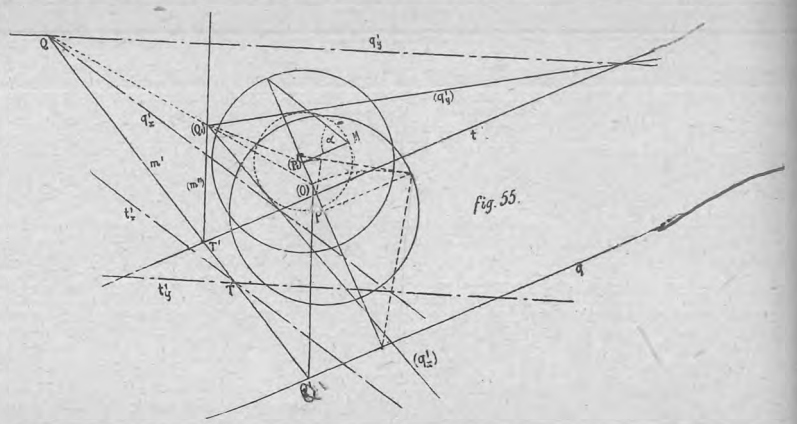


Fig. 55.

mento del piano (tq), sono le rette di fuga dei piani cercati rispetto al quadro π, e le parallele t_x, t_y condotte per T ne sono le tracce.

Osservazione. — Questo problema è di secondo grado e perciò ammette due soluzioni, che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie. Riferendoci alla costruzione possiamo dire che si avrà l'una o l'altra di queste tre soluzioni, secondochè (Q_1) è esterno al cerchio di centro $(P_1)'$ e raggio $(P_1)'M$, giace sul cerchio o è interno ad esso; in altre parole, indicando con μ l'angolo che la retta m forma con (tq), secondochè $a > \mu$, $a = \mu$, $a < \mu$.

§ 25. — **Spostamento di una figura rappresentata nel metodo delle proiezioni centrali.** — Talvolta può riuscire utile di muovere l'oggetto per porlo rispetto al quadro ed al centro in una posizione migliore per dati scopi. Siccome qui si tratta di posizione relativa di un oggetto rispetto ad un piano (quadro) e ad un punto (centro), il problema equivale a quello di muovere il centro di proiezione o la figura piana rappresentativa.

Invero supponiamo di spostare insieme all'oggetto dato anche il sistema di proiezione Σ (considerato rigidamente connesso all'oggetto) portandolo nella posizione Σ'; allora col medesimo spostamento si muove anche, invariata, la figura

rappresentativa. Ora con uno spostamento inverso si riconduce il sistema di proiezione Σ' alla sua posizione primitiva, lasciando fermo l'oggetto, e quest'ultimo spostamento equivale al movimento dell'oggetto considerato. Dunque, anzichè muovere l'oggetto, basta cambiare il sistema di proiezione passando dal sistema Σ' al sistema Σ. Il movimento di una figura piana nello spazio si riconduce sempre ad un ribaltamento o raddrizzamento di essa sopra il quadro, congiunto ad un movimento nel quadro; quest'ultimo movimento si effettua con una rotazione attorno ad un punto proprio o con uno strisciamento (traslazione) del piano su se stesso. (*)

(*) Cfr. Enriques « Lezioni di Geometria proiettiva » § 50 — Zanichelli — Bologna, quarta edizione, 1919.

METODO DELLE PROIEZIONI ORTOGONALI

CAPITOLO IV.

Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici.

§ 26. **Generalità. Rappresentazione del punto.** — Nel metodo della proiezione centrale, la proiezione della figura obiettiva sul quadro veniva fatta da un punto (centro di proiezione) proprio. Se si suppone di allontanare indefinitamente il centro di proiezione in una data direzione, rimangono inalterate le tracce degli elementi della figura; si ottiene ancora una determinata immagine della figura sul quadro (proiezione parallela, obliqua od ortogonale della figura sul quadro), ma vanno all'infinito gli elementi di fuga, e però non resta più una rappresentazione determinata.

Si può allora considerare insieme alla proiezione parallela della figura sul quadro anche un'altra proiezione parallela di essa, sopra un altro piano. Con ciò si ottiene in generale una rappresentazione determinata della figura sopra due piani di riferimento; si potrà quindi ribaltare uno dei due piani sull'altro in guisa da avere sopra un unico piano (di rappresentazione) due immagini rappresentative della figura.

Il caso più importante che qui dobbiamo considerare è quello in cui le proiezioni parallele dell'oggetto si fanno ortogonalmente a due piani perpendicolari fra loro. In questo modo si dà luogo al metodo di rappresentazione che dicesi delle *proiezioni ortogonali* (o di **Monge**).

Per brevità si designerà soltanto col nome di *proiezione di una figura sopra un piano* la sua proiezione ortogonale, salvo esplicito avviso. Parlando di punti, rette e piani dello spazio intenderemo generalmente di indicare elementi propri.

Si assumano due piani π_1, π_2 perpendicolari fra loro, detti *piani principali* o *di riferimento*, i quali si seghino secondo una retta l detta *linea di terra* (fig. 56). I piani π_1, π_2 si dicono risp. *primo e secondo piano di proiezione*, e per semplicità si assume π_1 orizzontale, quindi π_2 verticale.

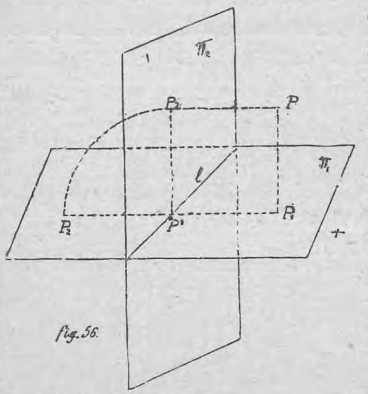


fig. 56.

Ogni punto P dello spazio ha due proiezioni ortogonali P_1, P_2; la prima sul piano π_1, la seconda sul piano π_2. Il piano PP_1P_2 riesce perpendicolare alla retta l in un punto P', così che le perpendicolari condotte ad l risp. in π_1, π_2 da P_1, P_2 si incontrano nel punto P' di l. La posizione del punto P nello spazio fissa le sue proiezioni che si dicono risp. la sua prima e seconda proiezione; viceversa due punti P_1, P_2 presi risp. sui due piani principali π_1, π_2 e in modo tale che le perpendicolari da essi condotte alla linea di terra l s'incontrino su l, sono le proiezioni di un punto P dello spazio che risulta così perfettamente determinato

Delle due regioni in cui π_1 è diviso dalla linea di terra, una si considera come positiva e l'altra negativa. Parimente si considera come positiva la regione del piano π_2 superiore a π_1, negativa l'inferiore.

Ciò posto si conviene di ribaltare il piano di proiezione π_2 su π_1 facendolo ruotare attorno ad l di un angolo retto in modo che la regione positiva di π_2 venga a sovrapporsi alla regione negativa di π_1. Allora la seconda proiezione P_2 di P si trasporta in un punto ben determinato di π_1 che seguiteremo a designare con P_2 e col nome di *seconda proiezione* o *proiezione verticale* di P, mentre P_1 si dirà ancora la *prima proiezione* o *proiezione orizzontale* di P.

L'uso della stessa designazione per i punti di π_2 ed i loro ribaltamenti dipende dal fatto che mentre facciamo le costruzioni sul primo piano di proiezione, usando dei ribaltamenti delle seconde proiezioni, pensiamo sempre rialzato il piano π_2 nella sua posizione verticale; operiamo in sostanza su due piani diversi π_1, π_2 che solo per comodità si immaginano sovrapposti ad uno di essi, detto *piano di rappresentazione.*

Dalle cose dette risulta che:

Eseguito il ribaltamento di π_2 *su* π_1, *le due proiezioni* P_1, P_2 *di un punto* P *sul piano di rappresentazione, risultano poste sopra una perpendicolare alla linea di terra* l, *e viceversa se nel detto piano si prendono due punti* P_1, P_2 *sopra una perpendicolare alla* l, *essi sono le due proiezioni di un determinato punto* P *dello spazio che s'indicherà con* $P \equiv (P_1P_2)$.

Il luogo dei punti che hanno la stessa proiezione verticale è una retta ortogonale al secondo piano principale: il luogo dei punti che hanno la medesima proiezione orizzontale è una retta ortogonale al primo piano principale.

Indicato con P' il punto d'intersezione della linea di terra l colla congiungente P_1P_2 ad essa perpendicolare, i segmenti $\overline{P'P_2}$, $\overline{P'P_1}$ misurano in grandezza e segno le distanze del punto P rispettivamente dai piani π_1, π_2, e diconsi *quote* del punto rispetto ai piani principali (fig. 57).

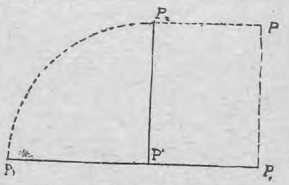


fig. 57.

Il punto P può rappresentarsi mediante la sua prima proiezione P_1, e la relativa (prima) quota ($a = P'P_2$); si costruisce allora immediatamente la seconda proiezione P_2. Quando si considera la rappresentazione del punto P mediante la sua proiezione ortogonale e la relativa quota si ha l'ordinaria *proiezione quotata.* (Cfr. Cap. IX).

Fissato che il segno delle quote di P venga dato dal segno dei segmenti $\overline{P'P_1}$, $\overline{P'P_2}$ e ricordando le convenzioni fatte riguardo ai segni delle bande in cui ogni piano principale è diviso dalla linea di terra e al modo di eseguire il ribaltamento del secondo piano di proiezione, avremo:

1. I punti le cui quote sono ambedue positive cadono nell'angolo diedro limitato dalle bande positive dei piani principali (1.ª regione dello spazio).

2. I punti che hanno la prima quota positiva e la seconda negativa cadono nel diedro limitato dalla banda positiva del secondo piano principale e dalla banda negativa del primo (2.ª regione).

3 I punti che hanno ambedue le quote negative cadono nel diedro limitato dalle bande negative dei piani principali (3.ª regione).

4. I punti che hanno la prima quota negativa e la seconda positiva cadono nel diedro limitato dalla banda positiva

del primo piano principale, e da quella negativa del secondo (4.ª regione).

Si vede inoltre che i punti della 1.ª e 3.ª regione hanno le proiezioni sul piano di rappresentazione da parte opposta della linea di terra; invece i punti della 2.ª e 4.ª regione hanno le loro proiezioni dalla medesima parte della detta linea.

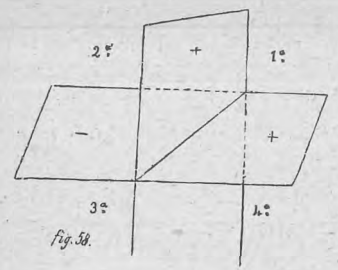


fig. 58.

Le quattro regioni considerate vengono limitate dai due piani principali (fig. 58). Ciascun punto di un tal piano ha la sua proiezione sopra l'altro piano appartenente alla linea di terra.

Vi sono due piani bisettori dei diedri formati dai piani principali; quello che biseca la 1.ª e la 3.ª regione dello spazio si dice il *primo piano bisettore*, e l'altro il *secondo*. I punti del primo piano bisettore hanno le due proiezioni sul piano di rappresentazione simmetriche rispetto alla linea di terra l; i punti del secondo piano bisettore hanno le due proiezioni coincidenti (fig. 59).

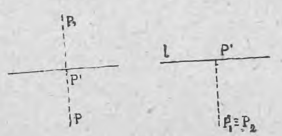


fig. 59.

§ 27. **Rappresentazione della retta.** — *Una retta (propria) a dello spazio viene in generale definita dalle sue proiezioni ortogonali* a_1, a_2 *sui due piani principali* π_1, π_2, *una delle quali* (a_2) *s'immagina portata con un ribaltamento di* π_2 *sul piano di rappresentazione* π_1. *La prima proiezione della retta contiene tutte le prime proiezioni dei suoi punti, e analogamente si dica della seconda.*

La retta le cui proiezioni sono a_1, a_2, s'indicherà con $a \equiv (a_1 a_2)$.

Le rette che hanno una medesima 1.ª (o 2.ª) proiezione a_1 (o risp. a_2) appartengono ad un piano perpendicolare per a_1 (o a_2) al 1.° (o risp. al 2.°) piano principale.

Le rette a_1, a_2 possono assumersi ad arbitrio nel piano di rappresentazione. Invero, rialzata la a_2 su π_2, la a si ottiene come intersezione dei piani perpendicolari a π_1, π_2 risp. per a_1, a_2; e resta così in generale perfettamente determinata (quando cioè le a_1, a_2 non giacciono in uno stesso piano perpendicolare alla linea di terra).

Fra i punti della retta $a \equiv (a_1 a_2)$ sono notevoli le sue intersezioni T_1, T_2 coi piani principali, π_1 e π_2, in generale punti propri. Questi punti diconsi *tracce* di a, e restano determinati data la a, purchè essa non giaccia in un piano principale. Date le tracce, supposte distinte, di a, la a viene definita come la congiungente di esse.

Supponiamo che (come avviene nel caso generale) la retta $a \equiv (a_1 a_2)$ determinata mediante le sue proiezioni a_1, a_2, abbia le due tracce T_1, T_2 proprie. Allora si ha che la 1.ª proiezione di T_1 è il punto T_1 stesso (*1.ª traccia di* a) e la 2.ª proiezione di esso è il piede della perpendicolare condotta da T_1 sulla linea di terra. Analogamente T_2 ha come 2.ª proiezione T_2 (che dicesi, nel punto omonimo sul piano di rappresentazione, 2ª *traccia* di a), e come prima proiezione il piede della perpendicolare condotta da T_2 alla linea di terra (fig. 60). Questa semplice osservazione basta a determinare le tracce T_1, T_2 della retta $a \equiv (a_1 a_2)$. Infatti T_2 deve essere l'intersezione di a_2 colla perpendicolare alla linea di terra l nel punto comune ad a_1 e ad l (1.ª proiezione di T_2). Analogamente si determina T_1.

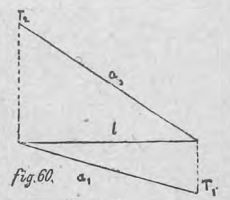


fig. 60.

Viceversa, date le tracce (distinte e proprie) T_1, T_2 di una retta a, si possono costruire le sue proiezioni a_1, a_2. Basta per questo congiungere T_2 col piede della perpendicolare condotta da T_1 su l (e si ha a_2), e congiungere T_1 col piede della perpendicolare condotta da T_2 su l (ciò che dà a_1).

I casi d'eccezione alle cose dette vengono qui enumerati:

1. La retta a può essere perpendicolare ad uno dei piani principali. Allora una delle proiezioni si riduce ad un punto, traccia di a, sul corrispondente piano; l'altra sua proiezione è la perpendicolare alla linea di terra condotta per il punto che è la prima proiezione. La $a \equiv (a_1 a_2)$ resta sempre definita dalle sue due proiezioni, una delle quali è un punto. Una delle tracce della retta risulta impropria. Se p. es. a è perpendicolare al primo piano principale π_1, si ha $a_1 \equiv T_1$, traccia di a su π_1, mentre la seconda traccia T_2 è all'infinito, su a_2 (fig. 61).



fig. 61.

2. La retta a può essere in un piano α perpendicolare alla linea di terra l. Allora le sue due proiezioni a_1, a_2 sul piano

di rappresentazione coincidono in una retta $a_1 \equiv a_2$ ortogonale ad l che non basta a rappresentare la a, perchè tutte le rette del piano α hanno le loro proiezioni coincidenti con la $a_1 \equiv a_2$. Ma se la a non incontra la linea di terra, le sue tracce T_1, T_2 sono distinte e bastano a rappresentarla. Se invece la a è incidente ad l, si ha $T_1 \equiv T_2$ e per rappresentare a occorre dare la rappresentazione di un altro suo punto (fig. 62).

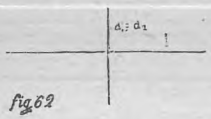


fig. 62

3. La retta a può essere incidente alla linea di terra. Allora se non è perpendicolare alla l, essa viene ancora determinata mediante le sue due proiezioni, ma non più mediante le tracce, perchè queste coincidono in un punto della linea di terra l. Le proiezioni a_1, a_2 della a s'incontrano in questo punto (fig. 63).

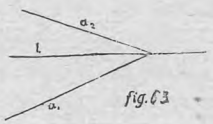


fig. 63

Notevole il caso in cui la a appartenga ad uno dei piani bisettori. Allora secondo che la a è nel 1° o nel 2° piano bisettore, le sue proiezioni sono simmetriche rispetto ad l o coincidenti (fig. 64).

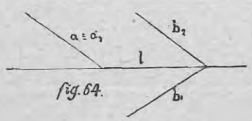


fig. 64

4. La retta a può essere parallela ad uno dei due piani π_1, π_2. Se p. es. la a è parallela al piano π_1, ma non a π_2 la sua 1.ª traccia T_1 va all'infinito e la sua 2.ª proiezione a_2 risulta parallela alla linea di terra l (fig. 65). Analogamente dicasi se la a è invece parallela a π_2.



fig. 65

Se poi a giace in un piano principale, essa coincide colla sua proiezione in quello, mentre l'altra proiezione coincide colla linea di terra, e la a risulta così determinata. Resta però indeterminata una sua traccia, mentre l'altra è sulla linea di terra ed è l'intersezione di l con a.

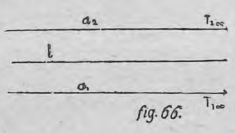


fig. 66

5. La retta a può essere parallela ad entrambi i piani principali, cioè alla linea di terra l. Allora le sue proiezioni riescono parallele alla l mentre le due tracce coincidono col punto all'infinito di l (fig. 66).

§ 28. **Rappresentazione del piano.** — *Ogni piano proprio non passante per la linea di terra può essere rappresentato mediante le due intersezioni di esso coi piani principali, che dopo il ribaltamento del secondo piano principale, vengono poste sopra il piano di rappresentazione e diconsi prima e seconda traccia del piano. Queste tracce s'incontrano sulla linea di terra.*

Le tracce di un piano sono il luogo delle tracce omonime delle sue rette.

Un piano α rappresentato dalle sue tracce t_1, t_2 s'indicherà con $\alpha \equiv (t_1 t_2)$. Una delle due tracce t_1, t_2 può essere impropria; ciò accade se il piano α è parallelo ad un piano principale.

Due rette arbitrarie t_1, t_2 ma distinte da l, ed aventi comune l'intersezione con l, possono sempre considerarsi come le due tracce di un piano $\alpha \equiv (t_1 t_2)$. Questo è il piano condotto per t_1 e per la retta t_2 rialzata nel piano π_2.

Vari casi particolari sono degni di nota.

1. Il piano α sia parallelo alla linea di terra. Allora entrambe le sue tracce sono parallele a questa.

2. Il piano α sia parallelo ad uno dei piani principali. In tal caso, secondochè questo è π_1 o π_2, la 1.ª o la 2.ª sua traccia va all'infinito e l'altra risulta parallela alla linea di terra.

3. Il piano α sia perpendicolare ad uno solo dei piani principali. Se è perpendicolare a π_1, la sua 2.ª traccia è perpendicolare alla linea di terra e l'altra obliqua. Analogamente dicasi se α è perpendicolare a π_2.

4. Il piano α sia perpendicolare ad ambedue i piani principali e quindi alla linea di terra. Allora le sue tracce coincidono in un'unica retta perpendicolare alla linea di terra. Il piano si dice un *piano di profilo.*

5. Il piano α passi per la linea di terra l. Allora, le sue tracce coincidono con la l, e non bastano più a rappresentarlo. Occorre quindi dare la rappresentazione di un suo punto.

§ 29. **Rappresentazione degli elementi di un piano.** — Con ciò che precede abbiamo il modo di rappresentare sul piano del disegno, col metodo delle proiezioni ortogonali, ogni elemento proprio dello spazio. I punti e le rette impropri potranno esser definiti assegnando una retta od un piano che li contenga. Parlando di una retta o di un piano generico intenderemo di escludere quei casi, precedentemente notati, che si presentano nella loro rappresentazione, nei quali non basta più la rappre-

sentazione ordinaria, oppure i casi di perpendicolari ad un piano principale ecc.

A quanto è stato detto importa aggiungere che un punto o una retta vengono rappresentati completamente da una sola proiezione appena sia data una retta o un piano che li contenga, non perpendicolare ad un piano principale. Occorre aver familiare la costruzione dell'altro elemento della coppia rappresentativa di un punto o di una retta così individuata. Vediamo alcuni casi a cui tale questione conduce:

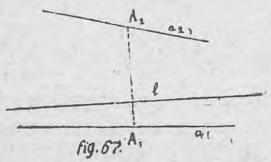


fig. 67.

1. Data una retta generale $a \equiv (a_1 a_2)$, non perpendicolare ad un piano principale, se A_1 è la prima proiezione di un suo punto A, la seconda proiezione A_2 di A è l'intersezione di a_2 colla perpendicolare condotta da A_1 alla linea di terra l (fig. 67).

2. Dato un piano generico $a \equiv (t_1 t_2)$ (non perpendicolare ad un piano principale) ed in esso una retta generica a p. es. mediante la 1.ª proiezione a_1, si ha subito la sua 1.ª traccia T_1 come intersezione di a_1, t_1; la sua 2.ª traccia T_2 è l'intersezione di t_2 con la perpendicolare alla linea di terra l condotta pel punto $l.a_1$. Basta quindi congiungere T_2 col piede della perpendicolare condotta da T_1 su l per avere la 2.ª proiezione della retta a (fig. 68).

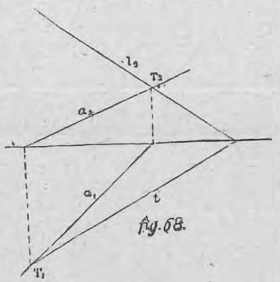


fig. 68.

3. Dato un piano generico $a \equiv (t_1 t_2)$ (non perpendicolare ad un piano principale) ed in esso un punto P di cui è nota p. es. la 1.ª proiezione P_1, per avere la 2.ª proiezione si può condurre una retta generica a_1 per P_1 e considerarla come prima proiezione di una retta a di α; determinata la 2.ª proiezione a_2 di a, si ha su essa la 2.ª proiezione P_2 di P come è stato indicato. Come retta a_1 conviene in generale prendere la parallela per P_1 alla t_1; allora la a_2 riesce parallela alla l (fig. 69).

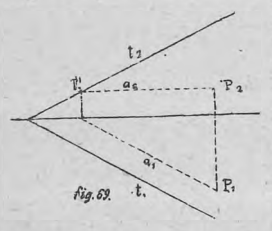


fig. 69.

Dato nello spazio un piano generico α, le prime e le seconde proiezioni dei suoi elementi risp. sui due piani principali π_1, π_2 si corrispondono in una omografia. Ciò segue dal fatto che i punti di una retta su π_1 (o π_2) sono le prime (o le seconde) proiezioni dei punti di una retta di α, di cui le seconde (o risp. le prime) proiezioni appartengono ad una retta.

Nell'omografia che così nasce sul piano di rappresentazione, la congiungente due punti omologhi P_1, P_2 (proiezioni di un punto P) è ortogonale alla linea di terra l, quindi il fascio improprio di raggi ortogonali ad l è costituito di raggi uniti; si deduce che l'omografia considerata è un'*omologia affine* cioè un'omologia col centro all'infinito. L'asse dell'omologia rappresenta il luogo dei punti di α le cui prime e seconde proiezioni coincidono, quindi è l'intersezione del piano α col secondo piano bisettore.

Si può enunciare dunque il

Teorema. — *Le prime e le seconde proiezioni degli elementi di un piano α, non perpendicolare ad uno dei piani principali, si corrispondono sul piano di rappresentazione in un'omologia affine che ha per centro il punto all'infinito della perpendicolare alla linea di terra* l *e per asse la retta che è insieme prima e seconda proiezione dell'intersezione del piano α col 2.° piano bisettore. Alla* l *corrisponde in questa omologia la 2.ª traccia del piano α.*

Con ciò le note costruzioni dell'omologia affine considerata permettono di costruire la 2.ª proiezione di una figura del piano α, data la prima, e viceversa.

Le precedenti considerazioni non valgono se il piano α è perpendicolare ad uno dei piani principali. Se p. es. esso è perpendicolare a π_2, ma non a π_1, le seconde proiezioni dei suoi punti appartengono tutte alla 2.ª traccia t_2. Una figura del piano si rappresenterà in questo caso mediante la sua prima proiezione.

Questa rappresentazione cade in difetto ove α sia un piano di profilo (§ 28).

§ 30. **Problemi grafici fondamentali.** — Possiamo ora risolvere col metodo delle proiezioni ortogonali i principali problemi grafici, a cui dà luogo la considerazione di punti, rette e piani nello spazio. Nella trattazione di essi supponiamo che gli elementi dati o da costruire siano generici. Verranno accennati i casi d'eccezione che si svolgeranno per esercizio, ricorrendo alla considerazione di elementi ausiliari.

Problema 1°. — *Dati due punti* $A \equiv (A_1 A_2)$, $B \equiv (B_1 B_2)$, *determinare la loro congiungente* a.

La prima proiezione a_1 di a è la retta $a_1 \equiv A_1B_1$; la seconda è la retta $a_2 \equiv A_2B_2$. Se due proiezioni omonime di A, B coincidono, la retta AB è perpendicolare al relativo piano principale, e la corrispondente proiezione si riduce ad un punto (proiezione comune di A, B).

Se le congiungenti A_1A_2, e B_1B_2 (perpendicolari ad l) coincidono, la rappresentazione della retta a (giacente in un piano di profilo) non è più definita mediante le sue proiezioni, ma in questo caso, come si è notato nel § 27, è vantaggioso rappresentare la retta a mediante le sue tracce, le quali si possono determinare col metodo che sarà indicato nel § 35.

Problema 2°. — *Determinare l'intersezione di due dati piani generici* $\alpha \equiv (t_1t_2)$ $\beta \equiv (t'_1t'_2)$ *non paralleli.*

Se i due piani hanno comune una traccia, questa è la intersezione cercata. In caso diverso i punti $T_1 \equiv t_1t'_1$ e $T_2 \equiv t_2t'_2$ sono le tracce della intersezione di α, β e bastano a determinarla nel modo noto, ove essa non risulti incidente alla linea di terra, cioè le t_1, t_2, t'_1, t'_2 non passino per un punto (proprio od improprio) di essa (fig. 70).

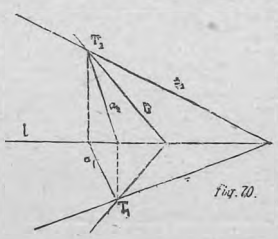


fig. 70.

Problema 3°. — *Determinare il piano ed il punto appartenente a due rette (generiche) incidenti (non giacenti in un piano perpendicolare ad uno di quelli di riferimento).*

Siano $a \equiv (a_1\, a_2)$, $b \equiv (b_1b_2)$ le due rette. Per le restrizioni poste non è $a_1 \equiv b_1$ o $a_2 \equiv b_2$, e quindi riescono determinati i punti $A_1 \equiv a_1b_1$, $A_2 \equiv a_2b_2$, i quali, se le a, b sono incidenti, debbono risultare posti sopra una perpendicolare alla linea di terra l e rappresentare rispettivamente la prima e la seconda proiezione del punto A comune alle due rette (fig. 71). Si determinino quindi (come

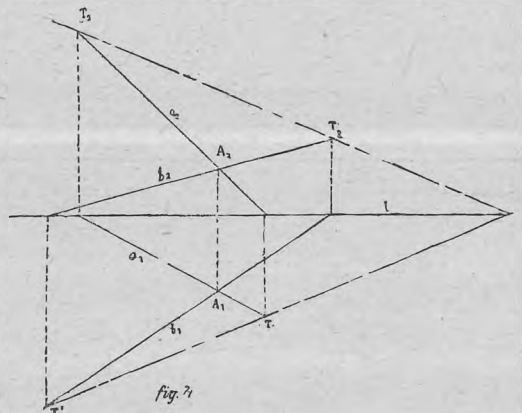


fig. 71

nel § 27) le tracce T_1, T_2 di a, e le tracce T'_1, T'_2 di b; allora le tracce del piano ab sono le congiungenti $t_1 \equiv T_1T'_1$, $t_2 \equiv T_2T'_2$ che debbono incontrarsi su l.

Se $A \equiv T_1$ (e analogamente se $A \equiv T_2$), la traccia t_1 del piano ab, non è più determinata come congiungente di T_1 con T'_1 perchè questi due punti coincidono; basta allora congiungere T_1 col punto lt_2.

Se le rette a, b sono parallele fra loro, tali risultano anche le a_1, b_1 e risp. le a_2, b_2; la determinazione delle tracce t_1, t_2 del piano ab si fa nello stesso modo.

La verificazione che le due rette a, b sono incidenti, si può fare sia verificando che i punti $A_1 \equiv (a_1b_1)$, $A_2 \equiv (a_2b_2)$ stanno sopra una perpendicolare alla l, sia verificando che le rette $T_1T'_1$, $T_2T'_2$ s'incontrano su l. Ognuno di questi fatti è conseguenza dell'altro come risulta anche facilmente dall'esame della figura rappresentativa

Problema 4.°. — *Determinare il piano individuato da un punto e da una retta generica che non si appartengono.*

Sia $A \equiv (A_1A_2)$ il punto dato, ed $a \equiv (a_1a_2)$ la retta. Escludiamo il caso in cui il piano (Aa) da determinare sia perpendicolare ad uno dei piani principali; allora A_1, A_2 non appartengono risp. ad a_1, a_2 (fig. 72).

Per A_1 (nel piano di rappresentazione) si conduca una retta arbitraria b_1 che incontri la a_1 in un punto $P_1 \equiv (a_1b_1)$, per P_1 la perpendicolare alla linea di terra l, prolungandola fino ad incontrare in un punto P_2 la retta a_2, quindi si congiunge A_2P_2 e la congiungente s'indichi con b_2. Le b_1, b_2 così costruite sono le due proiezioni di una retta b per A incidente alla a, la quale con a determina il piano Aa. Così il problema è ricondotto al precedente.

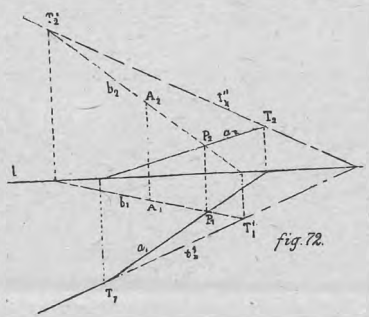
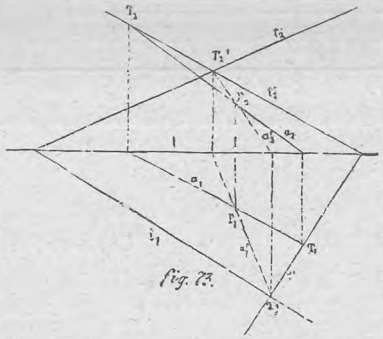


fig. 72.

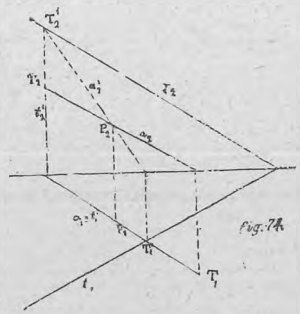
Problema 5.° — *Determinare l'intersezione di una retta e di un piano generici che non si appartengono.*

Sia $a \equiv (a_1a_2) \equiv (T_1T_2)$ la retta ed $\alpha \equiv (t_1t_2)$ il piano (fig. 73). Si conduca per la a un piano arbitrario β assegnandone le tracce t'_1, t'_2 rispettivamente per T_1, T_2 (concorrenti sulla linea di terra). Si determini l'intersezione a' di questo piano arbi-

trario β con α, e poi il punto comune delle a,a' (che giacciono ambedue nel piano β). Nella figura è stata eseguita la costruzione e P_1,P_2 sono le due proiezioni del punto cercato.


fig. 73.

Anzichè condurre per a un piano arbitrario, non essendo a perpendicolare ad un piano principale, nè giacente in uno di essi, si può considerare per essa il piano $\beta \equiv aa_1$ perpendicolare al primo piano principale che ha per prima traccia a_1 e di cui la 2.ª traccia t'_2 passa per la 2.ª traccia T_2 di a ed è perpendicolare alla linea di terra l (fig. 74). Allora i punti $T'_1 \equiv a_1t_1$, $T'_2 \equiv t'_2t_2$ sono le tracce della intersezione del piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$ col piano β condotto per a perpendicolarmente al primo piano principale; le proiezioni di questa retta $(\alpha\beta)$ sono le a_1 e la retta a'_2 congiungente T'_2 col piede della perpendicolare condotta da T'_1 su l. Il punto $P_2 \equiv (a_2a'_2)$ è la seconda proiezione del punto P cercato; la prima proiezione P_1, dovendo giacere su a_1, è l'intersezione di a_1 colla perpendicolare per P_2 alla l. La costruzione si eseguisce così più brevemente.


fig. 74.

Problema 6.° — *Determinare il piano individuato da tre punti non appartenenti ad una retta.*

La risoluzione di questo problema si riconduce a quella del 4.° dopo aver determinato la congiungente di due dei tre punti (Probl. 1.°).

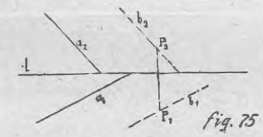
Rimane escluso per quella soluzione il caso in cui il piano da costruire riesce perpendicolare ad un piano principale o passante per la linea di terra. Questa 2.ª restrizione comparisce nel problema 4.°, perchè la retta a ivi data si suppone generica.

Problema 7.° — *Determinare il punto comune a tre piani generici non paralleli ad una stessa retta.*

Si determinino le intersezioni di uno dei piani cogli altri due (Probl. 2.°) e quindi il loro punto comune (Probl. 3.°).

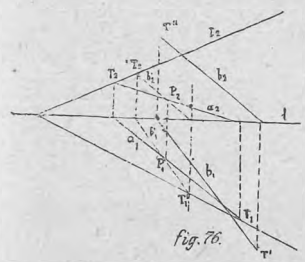
Problema 8°. — *Condurre per un punto la parallela ad una data retta (generica).*

Sia $a \equiv (a_1a_2)$ la retta data, $P \equiv (P_1P_2)$ il punto dato. La parallela ad a per P ha come proiezioni le parallele ad a_1, a_2 risp. per P_1,P_2 (fig. 75).


fig. 75.

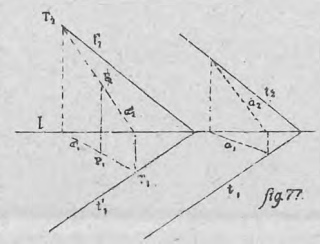
Problema 9°. — *Condurre per una retta (generica) a il piano parallelo ad un' altra retta (generica) b non parallela alla prima.*

Siano $a \equiv (a_1a_2)$, $b \equiv (b_1b_2)$ le rette date non parallele fra loro (fig. 76). Per un punto di a si conduca la parallela $b' \equiv (b'_1\,b'_2)$ alla b e si determini il piano delle due rette a,b'. Le costruzioni sono eseguite nella figura; il piano cercato ha le tracce t_1,t_2.

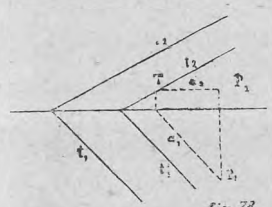

fig. 76.

Problema 10°. — *Condurre per un punto il piano parallelo ad un dato piano generico.*

Basta determinare il piano α' di due rette passanti pel punto dato $P \equiv (P_1\,P_2)$ e parallele a due rette del dato piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$. Ma la costruzione può semplificarsi tenendo conto del fatto che il piano α' da costruire ha le tracce parallele risp. a t_1,t_2. Perciò è sufficiente determinare una traccia di una retta del piano α'. La fig. 77 mostra la costruzione eseguita determinando ambedue le tracce di una retta $(a'_1\,a'_2)$ parallela ad una retta $(a_1\,a_2)$ del piano α e quindi al piano α; ciò serve di riprova perchè le tracce $t'_1\,t'_2$ del piano α' che si costruiscono in tal modo, debbono incontrarsi sulla linea di terra.


fig. 77.

In pratica però non si ricorre neppure alla costruzione generale sopra indicata. Si suppone aver preso come retta $(a_1\,a_2)$ una retta parallela ad una delle due tracce, per esempio a t_1; allora a_1 è parallela a t_1, ed a_2 ad l. Pertanto la costruzione da eseguire si effettua nel modo seguente (fig. 78):


fig. 78.

Si conduce per P_1 una parallela a t_1 e dal punto dove essa incontra l si conduce la perpendicolare ad l fino ad incontrare in T la parallela per P_2 alla l stessa; poi si conduce per T la parallela a t_2 e si ha così, la 2ª traccia t'_2 del piano da determinare; la 1ª traccia t'_1 è la parallela a t_1 pel punto lt'_2.

CAPITOLO V.

Problemi metrici.

§ 31. — **Distanza di due punti. Inclinazione di una retta sopra un piano principale.** — Risolviamo col metodo delle proiezioni ortogonali i principali problemi metrici che si presentano. Anche qui ci limitiamo a considerare il caso generale in cui interviene la considerazione di elementi generici, lasciando da parte i casi particolari.

Problema 1.° — *Determinare la distanza di due punti dati.*

Siano $A \equiv (A_1A_2)$, $B \equiv (B_1B_2)$ i punti dati, non posti sopra una perpendicolare ad un piano principale (fig. 79). Siano A_0, B_0 i punti d'incontro della linea di terra l risp. colle A_1A_2, B_1B_2 ad essa perpendicolari

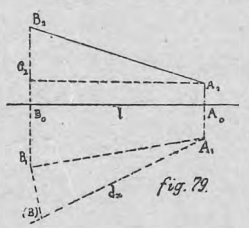
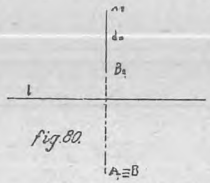


fig. 79.

Nello spazio si immagini condotta la perpendicolare per A alla retta BB_1. Il segmento a di questa perpendicolare intercetto fra A e BB_1 (il quale misura la distanza del punto A della retta BB_1) è uguale al segmento parallelo A_1B_1. La distanza d_x tra i punti A,B è data quindi dall'ipotenusa del triangolo rettangolo di cui un cateto è a, e l'altro cateto è la differenza algebrica delle distanze di A e B dal primo piano principale π_1, cioè la differenza o la somma di queste distanze secondo che i punti A,B si trovano o no dalla stessa parte di π_1. Ora le distanze di A,B dal piano principale π_1 sono date sul piano di rappresentazione risp. dai segmenti A_2A_0, B_2B_0, dove A_2, B_2 cadono o no dalla stessa banda di l secondo che A, B cadono o no dalla stessa banda di π_1. Si costruirà quindi la differenza alge-

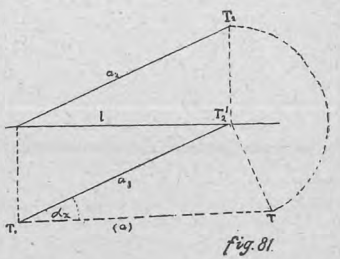
brica di tali distanze conducendo per A_2 la parallela ad l fino ad incontrare in C_2 la B_2B_1 oppure il suo prolungamento; infatti tale differenza è data dal segmento B_2C_2. Dopo ciò la distanza cercata d_x è l'ipotenusa del triangolo rettangolo avente A_1B_1 e B_2C_2 come cateti. Il segmento $B_1(B)$ è uguale al segmento B_2C_2 e $d_x \equiv A_1(B)$, distanza domandata.


fig. 80

Si noti che se la retta AB è parallela a π_1, d_x è uguale al segmento A_1B_1. Se A e B sono posti p. es. sopra una perpendicolare a π_1 in guisa che $A_1 \equiv B_1$, la d_x è data dal segmento A_2B_2 (fig. 80).

Problema 2°. — *Determinare l'angolo di una retta generica* $a \equiv (a_1a_2)$ *con un piano principale.*

Si voglia ad esempio l'angolo della a col primo piano principale π_1. Questo angolo è dato dall'angolo acuto della retta a e della sua prima proiezione a_1. Per determinarlo s'immagini ribaltato il piano proiettante aa_1 attorno ad a_1 in uno qualunque dei due sensi. Il ribaltamento (a) di a passa per la 1ª traccia T_1 di a; inoltre se T_2 è la 2ª traccia di a e $T'_2 \equiv (a_1l)$, la perpendicolare in T'_2 ad a_1 incontra (a) in un punto T tale che i due segmenti TT'_2 e $T_2T'_2$ risultano uguali. Per determinare (a) e quindi l'angolo cercato, basta costruire sopra il cateto T'_2T_1 il triangolo rettangolo che ha come altro cateto un segmento di lunghezza $T_2T'_2$; in esso l'angolo dell'ipotenusa (a) con a_1 è quello α_x cercato.


fig. 81

Si osservi che la costruzione indicata è quella che secondo il problema precedente occorre per determinare la distanza delle tracce T_1, T_2 di a. In luogo di questi si potrebbero considerare altri due punti qualunque della retta a.

§ 32. — **Rette e piani perpendicolari.**

Teorema. — *Se una retta ed un piano sono perpendicolari, la 1ª e la 2ª proiezione della retta sono risp. perpendicolari alla 1ª e 2ª traccia del piano e viceversa.*

La retta $a \equiv (a_1a_2)$ ed il piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$ siano perpendicolari. Ogni piano per la a e in particolare il piano (aa_1), è perpendicolare ad α; ma il piano (aa_1) è anche perpendicolare al

1° piano principale π_1, quindi alla retta t_1; ne segue che la a_1 è perpendicolare a t_1. Invertendo il ragionamento si vede che se a_1 e a_2 sono rispettivamente perpendicolari a t_1 e t_2 il piano α e la retta a sono perpendicolari.

Il teorema precedente sta a fondamento della risoluzione dei successivi problemi:

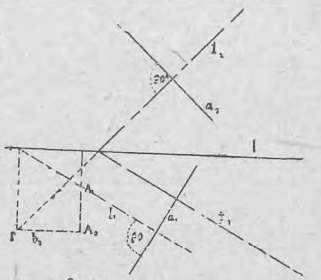
Problema 1°. — *Condurre per un punto la perpendicolare ad un dato piano.*

Il punto dato $A \equiv (A_1A_2)$ e il piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$ si suppongano generici.

La retta cercata $a \equiv (a_1a_2)$ è determinata conducendo risp. per A_1, A_2 le perpendicolari a t_1, t_2; queste sono le due proiezioni a_1, a_2 della retta

Problema 2°. — *Condurre per un punto* $A \equiv (A_1A_2)$ *il piano perpendicolare ad una retta generica* $a \equiv (a_1a_2)$ (fig. 82).

Si conduca il piano per A parallelo ad un qualsiasi piano perpendicolare ad a. Per ciò basta operare come segue (§ 30 Probl. 10): Si conduca per A_1 la perpendicolare b_1 ad a_1 e per A_2 la parallela ad l, e quindi si determini il punto T in cui questa parallela incontra la perpendicolare ad l nel punto lb_1; la 2ª traccia t_2 del piano cercato è la perpendicolare ad a_2 per T; la 1ª traccia t_1 è la perpendicolare ad a_1 pel punto lt_2.


fig. 82

Problema 3°. — *Condurre per un punto la retta perpendicolare ad una retta generica che non gli appartenga.*

Per il punto A si conduca il piano perpendicolare alla retta a (Probl. prec.) e si seghi col piano Aa; l'intersezione è la perpendicolare richiesta.

Problema 4°. — *Condurre per una retta generica il piano perpendicolare ad un piano generico non ortogonale ad essa.*

Per un punto della retta si conduca la perpendicolare al piano (Probl. 1°), e quindi si determini il piano individuato da questa perpendicolare e dalla retta data (§ 30 Probl. 3°).

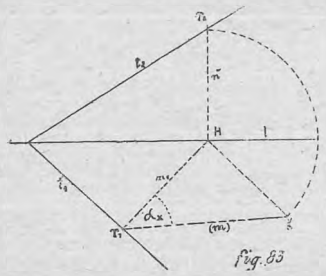
Problema 5°. — *Determinare la distanza di un punto da una retta o da un piano (generici).*

Si conduca pel punto la perpendicolare alla retta o al piano e se ne determini il piede; la distanza di questo dal

punto dato, che è quella cercata, si trova come è stato indicato nel problema 1°.

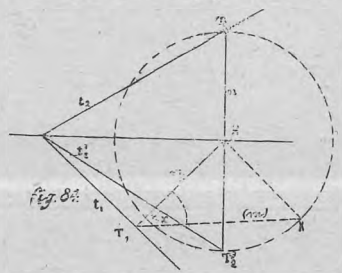
Problema 6°. — *Determinare l'inclinazione di un piano* α *(obliquo) sopra un piano principale* (fig. 83).

Si conduca un piano perpendicolare alla traccia che il dato piano α ha sul piano principale e si seghi col piano α; l'inclinazione della retta sezione sul piano principale (che si misura come è indicato nel Probl. 2° del prec. §) è l'inclinazione cercata. Perciò la costruzione si eseguisce semplicemente così:


Fig. 83

Sia $\alpha \equiv (t_1 t_2)$ e vogliasi p. es. l'inclinazione del piano α sul primo piano principale. Da un punto H di l si conduca la perpendicolare m_1 a t_1 e la perpendicolare n ad l. Il piano che ha per tracce m_1 ed n è perpendicolare alla t_1. L'intersezione di esso con α è la retta m che ha per tracce $T_1 \equiv t_1 m_1$ e $T_2 \equiv t_2 n$, e quindi come 1ª proiezione m_1. L'inclinazione di m su π_1 si ha quindi staccando sulla perpendicolare in H ad m_1 un segmento $HK \equiv HT_2$ e congiungendo K con T_1. L'angolo KT_1H è l'inclinazione cercata.

Osservazione. — Se sia proposta la questione di condurre per una retta di uno dei due piani di proiezione, per es. del primo piano π_1, un piano che faccia col piano π_1 un dato angolo α, basterà fare le costruzioni inverse a quelle eseguite innanzi. Data dunque (fig. 84) la retta t_1 di π_1 per cui si deve far passare il piano domandato, si conduca per un punto H arbitrario della linea di terra la perpendicolare $m_1 \equiv HT_1$ a t_1; quindi costruito il triangolo HT_1K rettangolo in H ed avente l'angolo $HT_1K \equiv \alpha$, si faccia centro in H e con raggio HK si descriva una circonferenza; questa intersecherà la n, perpendicolare per H alla l, in due punti che chiameremo T_2 e T_2'. Le rette t_2, t_2' passanti risp. per questi ultimi e concorrenti in (lt_1) sono le seconde tracce di due piani facenti con π_1 l'angolo α dato, mentre le loro prime tracce coincidono nell'unica retta t_1 data.

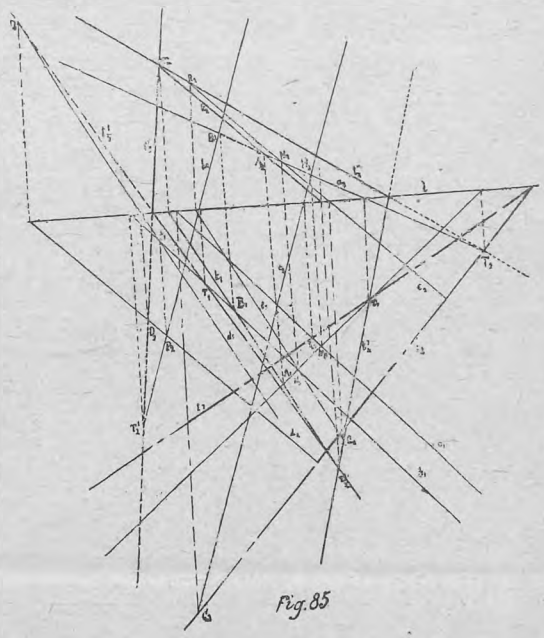

Fig. 84

Questo problema ammette quindi due soluzioni, cioè due sono i piani che passando per t, formano con π_1 un angolo α, come del resto è noto (Cfr. § 24).

Problema 7°. — *Determinare la minima distanza di due rette sghembe (generiche)* (fig. 85).

Siano $a \equiv (a_1 a_2)$, $b \equiv (b_1 b_2)$ le due rette. Per avere la minima distanza occorre determinare la perpendicolare comune alle due rette, ad esse incidente, e quindi determinare il segmento intercetto su di essa dalle due rette (Probl. 1° § prec.).

Per determinare la perpendicolare comune alle due rette a, b si conduca anzitutto un piano parallelo ad entrambe. A tale scopo giova scegliere un punto su a e per esso condurre la retta $c \equiv (c_1 c_2)$ parallela alla b, determinare quindi il piano $(t_1 t_2)$ individuato da a, c. Dopo ciò si deve condurre per ciascuna delle due rette a, b il piano perpendicolare a $(t_1 t_2)$.


Fig. 85

Si procederà perciò nel modo seguente.

Per un punto di a (e si può usufruire di quello già scelto) si conduca la retta $e \equiv (e_1 e_2)$ perpendicolare al nominato piano e si congiungano le sue tracce risp. con quelle omonime di a; si avranno così le due tracce t'_x, t''_x del piano perpendicolare condotto per a al piano $(t_1 t_2)$. Per determinare il piano perpendicolare condotto per b al piano $(t_1 t_2)$ si scelga un punto su b e si conduca per esso la perpendicolare $d \equiv (d_1 d_2)$ al detto piano, quindi si determini il piano $(t'_y\, t''_y)$ di b, d.

Ora dobbiamo intersecare i piani $(t'_x\, t''_x)$ e $(t'_y\, t''_y)$ determinando le tracce e quindi le proiezioni della retta $k \equiv (k_1 k_2)$ ad essi

comune. La k è la perpendicolare incidente ad entrambe le rette a,b, e su di essa si hanno subito i punti $A \equiv (A_1A_2)$, $B \equiv (B_1B_2)$ dove essa è incontrata rispet. da a,b. Con ciò la questione proposta è ricondotta al problema 1° e si risolve quindi costruendo su A_1B_1 come cateto il triangolo rettangolo che ha per altro cateto la differenza algebrica delle distanze di A_2,B_2 da l; l'ipotenusa d_x del nominato triangolo, misura la minima distanza fra a,b.

Un secondo metodo per risolvere il problema proposto (ove non occorra proprio determinare la posizione del segmento che misura la minima distanza fra a,b, ma basti la sua lunghezza) consiste nella costruzione seguente:

Si conduca per ciascuna delle due rette a,b il piano parallelo all'altra; la minima distanza fra a e b è l'altezza dello strato compreso fra i due piani. Per determinarla si conduca una perpendicolare ai due piani, e poi si trovi la distanza dei due punti d'intersezione di detta perpendicolare coi due piani (vedi § 30 Probl. 5° e § 31 Probl. 1°).

Problema 8°. — *Determinare la larghezza della striscia compresa fra due rette parallele generiche.*

Si conduca un piano perpendicolare alle due rette e si determini la lunghezza del segmento intercetto.

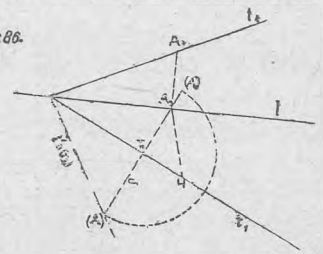
§ 33. **Ribaltamento di un piano generico.** — Sia dato nello spazio un piano generico α obliquo ad un piano principale π_1. Immaginiamo di ribaltarlo facendolo ruotare attorno alla sua traccia t_1 fino a sovrapporlo a π_1.

Si vogliono determinare i *ribaltamenti* dei punti e delle rette del piano α, cioè le posizioni assunte da questi elementi quando si sia eseguito il ribaltamento su π_1.

Indicheremo con (α) il piano ribaltato, con (A) il ribaltamento di un suo punto A, ecc.

Il piano α (nello spazio) e π_1 sono riferiti fra loro prospettivamente in modo che ad ogni punto A e ad ogni retta a di α corrispondono le rispettive proiezioni A_1, a_1. Nella rotazione di α attorno a t_1, i punti α e π_1 non cessano di essere omografici (anzi per di più prospettivi perchè tutti i punti di t_1 sono uniti), e così dopo il ribaltamento i piani (α) e π_2 sono ancora omografici. Quivi si corrispondono le prime proiezioni degli elementi di α ed i loro ribaltamenti. Ma in questa omografia sono uniti tutti i punti della traccia t_2, rimasti fissi

durante la rotazione di α, quindi la nominata omografia è un' omologia cha ha per asse t_1. Inoltre nella rotazione di α, ogni punto si muove nel piano perpendicolare a t_1 che passa per esso e perciò le rette intersezioni di α coi piani perpendicolari a t_1, dopo il ribaltamento risultano sovrapposte alle loro (prime) proiezioni; onde tutte le rette perpendicolari all'asse t_1 sone unite per l'omologia che intercede fra i piani sovrapposti (α) e π_1. La nominata omologia è dunque un' omologia affine ortogonale avente come asse la t_1. Per determinarla completamente basta assegnare una coppia di elementi corrispondenti dell'omologia; basta dunque trovare il ribaltamento di un punto o di una retta di α. A tal fine giova considerare un punto A che ha la 1ª proiezione A_1 sulla linea di terra e quindi la 2ª proiezione A_2 sulla 2ª traccia t_2 del piano α (cioè un punto A della 2ª traccia di α) (fig. 86).



Per A_1 si conduca la perpendicolare a_1 a t_1 che l'incontri in T_1. Su a_1 deve trovarsi il ribaltamento (A) di A, eseguito sul primo piano principale, e precisamente (A) deve distare da T_1, ossia dalla t_1, quanto (nello spazio) A da T_1, ossia dalla t_1.

Perciò occorre determinare la lunghezza di AT_1, la quale è data dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono A_1T_1 e A_1A_2; basta dunque tagliare su t_1 il segmento T_1H eguale al segmento A_1A_2 e si avrà così il segmento A_1H che è la distanza cercata. Allora se con raggio A_1H e centro T_1 si descrive un cerchio, questo incontra a_1 in due punti, ciascuno dei quali è da considerarsi come il ribaltamento (A) di A per due rotazioni opposte di α attorno a t_1. Fissato il senso della rotazione, risulta fissata la scelta fra i due nominati punti (A) e viceversa.

Con ciò risulta fissata la omologia affine ortogonale che intercede fra il piano principale π_1 *ed il ribaltamento* (α), *in un dato senso, del piano (obliquo)* $\alpha \equiv (t_1t_2)$, *attorno a* t_1, *giacchè sono dati l'asse* t_1 *e una coppia* A_1, (A) *di punti corrispondenti.*

Si osservi che la retta congiungente il punto (A) col punto t_1l è la corrispondente l' di l nell'omologia affine, cioè il ribaltamento (t_2) della 2ª traccia t_2.

Si noti, riferendoci alla figura, che il rapporto (*costante*

dell'omologia affine) $\frac{A_1 T_1}{(A) T_1}$ misura il coseno dell'angolo $\omega \equiv HA_1T_1$, cioè il coseno della inclinazione su π_1 della retta di α che ha per prima proiezione a_1; in altre parole il rapporto $\frac{A_1 T_1}{(A)T_1}$ è il coseno della inclinazione del piano α sul primo piano principale (Cfr. Probl. 8°).

§ 34. — **Grandezza e forma di una figura piana.** — Al ribaltamento di un piano obliquo sopra un piano principale (di cui immaginiamo di aver fissato il senso) si riattacca la risoluzione di un nuovo gruppo di problemi metrici.

Si può dire infatti che il ribaltamento ci permette di determinare la vera forma e grandezza di una figura piana obliqua ad un piano principale; invero questa forma e grandezza si conservano nel ribaltamento. La soluzione della questione è ricondotta, per il teorema del prec. §, alle note costruzioni della omologia piana affine.

Risolviamo così alcuni dei problemi più importanti:

Problema 1.° — *Determinare l'angolo di due rette generiche incidenti (non parallele)* (fig. 87).

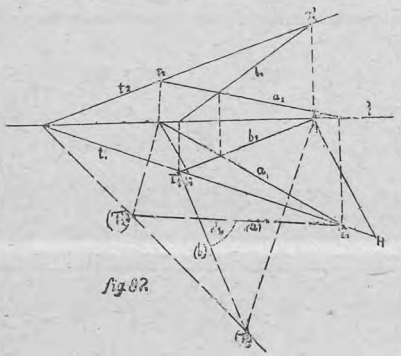


fig 87

Si supponga che il piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$ delle due rette date $a \equiv (a_1a_2), b \equiv (b_1b_2)$ sia obliquo al piano principale π_1. Il piano α non passerà per la linea di terra, essendo a,b rette generiche.

Come è stato indicato si determini il ribaltamento $(t_2) \equiv l'$ della 2ª traccia di α; giova per questo servirsi del punto T_2 (2ª traccia di a) su t_2, giacchè allora congiungendo il punto (T_2) con T_1 si ha subito il ribaltamento (a) di a. Ora la nominata omologia affine ortogonale è perfettamente stabilita, avendo come asse t_1, ed l, l' o a_1, (a) come coppia di rette corrispondenti.

Per costruire la retta omologa di b_1, cioè il ribaltamento (b) di b, basta condurre per il punto b_1l la perpendicolare a t_1, quindi congiungere il punto (T_2'), sezione di questa perpendicolare con l', colla 1ª traccia T_1' di b. L'angolo α_x delle due

rette (a), (b) sul piano di rappresentazione è uguale all'angolo ab, cercato.

Osservazione: Se fosse domandato di costruire le bisettrici degli angoli di due rette incidenti, basterebbe, dopo aver ribaltato il piano delle due rette (come sopra), costruire le bisettrici dell'angolo α_x e del suo adiacente; l'omologia inversa di quella usata innanzi ci farà conoscere le prime proiezioni delle suddette bisettrici, e si otterranno quindi anche le seconde.

Problema 2.° — *Determinare l'angolo di due piani generici non paralleli.*

Segati i due piani con un piano perpendicolare alla loro retta comune, (§ 32 Probl. 2° e § 30 Probl. 2°) si determini (Probl. prec.) l'inclinazione delle due intersezioni.

Il caso particolare in cui uno dei due piani sia un piano principale, è stato considerato sopra. (Cfr. § 32, Probl. 6°).

Osservazione. Servendoci dell'osservazione fatta, relativamente al problema precedente, possiamo costruire anche i piani bisettori dei diedri formati da due piani qualunque. Invero, dopo avere determinato i rettilinei dei due diedri, costruiamo di quelli le bisettrici, poi i piani individuati da queste ultime e dallo spigolo comune dei due diedri adiacenti.

Il ribaltamento di un piano fornisce un'altro metodo per risolvere nel caso generale i seguenti problemi:

Determinare la perpendicolare per un punto ad una retta. (Si può trattare anche il caso in cui il punto sia sulla retta e sia assegnato un piano per la retta che debba contenere la perpendicolare cercata).

Determinare la distanza di un punto da una retta.

Determinare la larghezza di una striscia compresa fra due parallele.

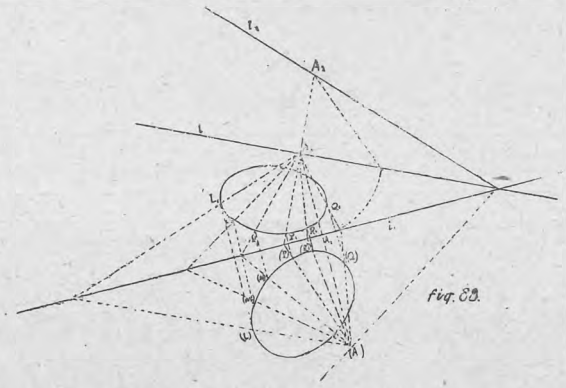
In tutti questi problemi che si riferiscono a figure di un piano, ove questo sia un piano generico α, si ribalterà sopra uno dei due piani principali. La costruzione dell'omologia affine, inversa da quella considerata, intercedente tra il piano ribaltato (α) e π_1 permette, ove occorra, di ottenere il raddrizzamento del piano (α), cioè la proiezione su π_1 della figura (di α) di cui è stato costruito il ribaltamento. Un esempio di questo metodo si è già visto nella determinazione delle bisettrici degli angoli di due rette incidenti. (Probl. 1°).

Quando si abbia una linea piana in un piano generico,

eseguendo il ribaltamento del piano della linea sopra un piano principale, si può costruire per punti il ribaltamento della linea che è una nuova linea omologica affine alla proiezione della data.

Tale metodo viene qui applicato nel seguente esempio:

Problema 3.° — *Determinare la vera forma e grandezza di una conica posta in un piano generico* (fig. 88).



Si ribalti il piano (t_1t_2), ad esempio sul primo piano principale, determinando il ribaltamento (A) di un punto $A \equiv (A_1A_2)$ dalla 2ª traccia. Nella omologia affine ortogonale che ha per asse t_1, ed A_1, (A) come coppia di punti omologhi, si costruiscano i corrispondenti di 5 punti della prima proiezione C' della data conica C; essi determinano la conica ribaltata.

Nella costruzione giova determinare insieme i corrispondenti di due punti di C' allineati con A_1; così si possono avere molto semplicemente quanti punti si vogliono dalla conica ribaltata (C), e se la C' sia tracciata gioverà costruire la (C) per punti in tal modo piuttosto che ricorrere alle note costruzioni della Geometria proiettiva, appena della conica (C) sieno determinati 5 punti.

A proposito della rappresentazione delle coniche giova osservare che:

La 1ª (o la 2ª) proiezione del centro di una conica è il centro della conica 1ª (o risp. 2ª) proiezione della data.

Ciò si può vedere, sia osservando la cosa nello spazio, sia sul piano di rappresentazione, dopo eseguito il ribaltamento della conica, perchè in due coniche omologiche affini i centri si corrispondono.

Parimenti:

La conica data nello spazio è un'ellisse, un'iperbole o una parabola, secondochè la sua proiezione (ortogonale) è risp. un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

Non accade, in generale, che gli assi di una conica C vengano proiettati (sopra uno dei piani principali non paralleli al piano di C) negli assi della conica proiezione C'; tuttavia questo fatto ha luogo se un asse della C è parallelo e l'altro quindi perpendicolare alla traccia del piano di C. Infatti, in tale ipotesi, le proiezioni degli assi di C sono ortogonali, e tanto basta per affermare che essi sono gli assi di C', perchè la proprietà che due diametri coniugati di C abbiano come proiezioni due diametri coniugati di C' sussiste per qualunque proiezione ortogonale (venendo il centro di C proiettato nel centro di C'); del resto l'osservazione può ripetersi invece considerando le due coniche omologiche affini C' e (C).

L'osservazione precedente permette di assegnare le condizioni perchè un'ellisse C', ad es. nel primo piano di proiezione, sia l'immagine di un cerchio giacente in un dato piano obliquo (t_1t_2).

Anzitutto occorre che gli assi della ellisse C' siano l'uno parallelo, l'altro ortogonale a t_1, poichè queste due rette per il centro di C' sono le proiezioni di due diametri ortogonali (quindi coniugati) del cerchio C. In secondo luogo le lunghezze dei due assi a',b' di C' debbono essere tali che i ribaltamenti (a), (b) dei segmenti obiettivi siano uguali.

Ora se a' è la proiezione dell'asse (segmento) parallelo a t_1, si ha evidentemente $(a) \equiv a'$; invece all'altro asse b' di C' ortogonale a t_1, corrisponde nell'omologia affine che nasce dal ribaltamento del piano (t_1t_2) il diametro (b) del cerchio (C), ribaltamento di C, ed il segmento b' sta a (b) nel rapporto (costante) dell'omologia affine (che è < 1).

Tenendo presente il significato di questo rapporto, si ha il

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un'ellisse del* 1.° *(o* 2°*) piano di proiezione, sia la* 1.ª *(o risp. la* 2ª*) proiezione di un cerchio giacente nel piano obliquo* $(t_1\,t_2)$*, è che l'asse maggiore dell'ellisse sia parallelo a* t_1 (o risp. a t_2) *ed il rapporto delle lunghezze dei due assi sia uguale al coseno dell'inclinazione del piano* $(t_1\,t_2)$ *sul piano di proiezione considerato.*

Questo teorema permette di determinare il cerchio giacente in un dato piano obliquo di cui è assegnato il centro O (me-

diante la sua prima proiezione O_1) ed il raggio r (fig. 89). Basta infatti assumere come prima proiezione del cerchio l'ellisse che ha per centro O_1, per asse maggiore un segmento $a \equiv 2r$ parallelo a t_1, per asse minore un segmento b che stia ad a nel

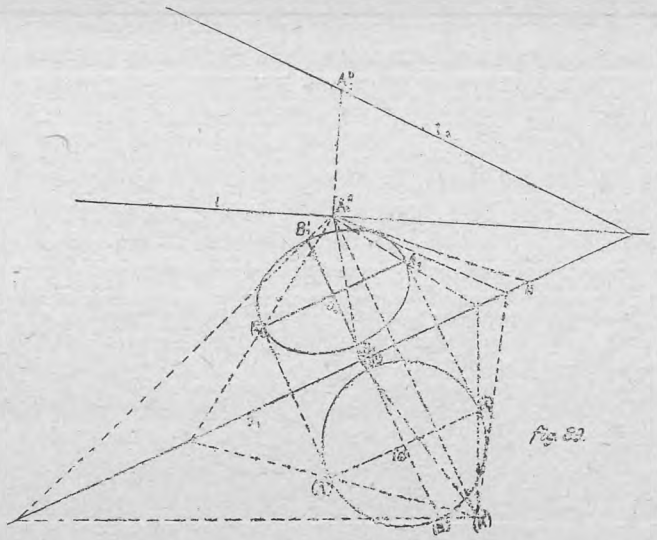


Fig. 89.

rapporto dato dal coseno dell'inclinazione del piano $(t_1\, t_2)$ sul primo piano principale.

Del resto, in questo caso, come in generale *quando si tratti di costruire in un dato piano obbliquo α una figura che soddisfi a date condizioni, si può usare del raddrizzamento del piano* cui abbiamo accennato, cioè della costruzione dell'omologia affine (inversa di quella considerata) intercedente tra il piano ribaltato (α) ed il 1° (o il 2°) piano principale.

§ 35 — **Figure giacenti in piani perpendicolari o paralleli ad un piano principale.** — Le questioni relative a una figura giacente in un piano α perpendicolare a uno solo dei piani principali si risolvono ancora col metodo precedentemente indicato, ribaltando il piano α sul piano principale, a cui il piano α è obliquo, ossendo data la proiezione della figura su questo piano principale.

Nel caso in cui il piano α sia perpendicolare alla linea di terra l, e quindi a ciascuno dei piani π_1 e π_2 (cioè α sia un

piano di profilo), una figura giacente in α non è più determinata da una sola delle due proiezioni: perciò il metodo esposto in questo Capitolo non è più applicabile. Tuttavia, se sono date le due proiezioni della figura, anche in questo caso speciale si può facilmente effettuare il ribaltamento del piano α sopra uno qualunque dei piani π_1 e π_2. Infatti, essendo $A \equiv (A_1 A_2)$ un punto di α, per averne il ribaltamento (A), p. e. sul piano π_1, basta ruotare α intorno alla sua prima traccia t_1 facendogli descrivere (in uno dei due versi possibili) un diedro retto; allora il punto A (non appartenente alla t_1) descrive un quadrante sulla circonferenza di centro A_1 e di raggio uguale alla prima quota AA_1 nel piano per A parallelo a π_2, quindi (A) appartiene alla retta per A_1 parallela alla linea di terra l e dista da A_1 di un segmento uguale ad $AA_1 \equiv A_0 A_2$ ove $A_0 \equiv l t_1$.

Applicando questo metodo è facile costruire le tracce di una retta AB giacente in un piano di profilo, essendo note le due proiezioni di ciascuno dei punti A, B (cfr. § 27 n. 2 e § 30 Problema 1°). Lasciamo allo studioso di eseguire la costruzione.

Se il piano α è p. e. parallelo a π_1 e quindi perpendicolare a π_2, si osserverà che *ogni figura del piano α è uguale alla sua proiezione (ad essa parallela) su π_1*. Tutti i problemi relativi alle figure del piano α si possono quindi in tal caso risolvere senz'altro operando sulle figure proiezioni (uguali alle obiettive).

CAPITOLO VI.

Cambiamento del sistema delle proiezioni ortogonali.

§ 36. — **Spostamento dei piani principali.** — Nelle questioni che abbiamo risoluto relativamente alla rappresentazione delle figure col metodo delle proiezioni ortogonali, è stata esclusa la considerazione di elementi in una speciale posizione relativamente ai piani principali, per la quale le costruzioni indicate cadevano in difetto; ed abbiamo accennato come in tali casi si ricorresse alla considerazione di elementi ausiliarî. Daremo ora un metodo generale che oltre ad applicarsi alla risoluzione dei problemi in quei casi d'eccezione, si applica anche con vantaggio grafico, quando si tratti della rappresentazione di figure poste in posizione incomoda rispetto ai piani di riferimento, ed anche talvolta con vantaggio teorico, permettendo di riferire la figura a dei piani collegati con essa.

Questo metodo consiste nel *cambiamento del sistema di rappresentazione*, cioè nel *cambiamento dei piani principali di riferimento.*

Si presenta qui il seguente problema generale:

Data una figura φ *dello spazio mediante le sue proiezioni (ortogonali)* $\varphi_1\ \varphi_2$ *su due piani principali (ortogonali fra loro), si vuole la rappresentazione di essa mediante le sue proiezioni (ortogonali) sopra altri due piani* α, β *ortogonali fra loro, assunti come piani principali.*

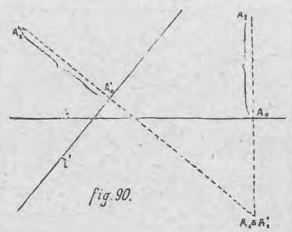
La questione teoricamente si risolve subito. Basta proiettare ortogonalmente la φ sui piani α, β e ribaltare α, β sopra un piano principale: ma l'esecuzione grafica di tali costruzioni sarebbe molto laboriosa.

Conviene perciò ricondurre il problema generale al seguente caso particolare:

Data una figura φ *rappresentata rispetto a due piani principali* π_1, π_2, *rappresentarla rispetto a due nuovi piani principali, uno dei quali coincida con uno dei precedenti (ad es.* π_1*) e l'altro sia ad esso ortogonale.*

Per individuare la nuova posizione π'_2 del 2° piano principale basterà dare (insieme alla linea di terra l del primo sistema di rappresentazione Σ) la nuova linea di terra l' del secondo sistema Σ'.

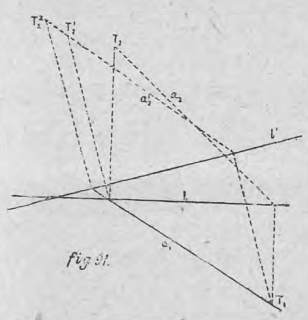
1.° Sia $A \equiv (A_1 A_2)$ un punto rappresentato nel sistema Σ; si vuole la sua nuova rappresentazione in Σ' (fig. 90).


fig. 90.

Anzitutto si noti che la 1ª proiezione del punto A non muta, quindi è $A'_1 \equiv A_1$. La nuova seconda proiezione A'_2 (in Σ') di A deve trovarsi sulla perpendicolare condotta per $A_1 \equiv A'_1$ ad l'; inoltre se poniamo $A_0 \equiv l.A_1 A_2$, $A'_0 \equiv l'.A'_1 A'_2$, la distanza del punto A dal primo piano di proiezione π_1 (comune nei sistemi Σ, Σ') è data ugualmente da $A_0 A_2$, $A'_0 A'_2$, quindi sarà $A_0 A_2 \equiv A'_0 A'_2$.

Con ciò si potrà determinare A'_2 appena sia fissato da quale banda del piano esso cade rispetto alla retta l'.

Ciò è in nostro arbitrio dipendendo dal fissare il senso del ribaltamento di π'_2; ma una volta fissata la 2ª proiezione A'_2 di un punto A, ogni altro punto $B \equiv (B_1 B_2)$ avrà la sua nuova 2ª proiezione B'_2 dalla stessa banda di A'_2 rispetto ad l' o da banda opposta, secondochè A_2, B_2 cadono o no dalla stessa banda di l.


fig. 91.

2.° Sia $a \equiv (a_1 a_2)$ una retta rappresentata nel sistema Σ, e siano T_1, T_2 le sue tracce; si vogliono trovare le sue tracce nel sistema Σ' (fig. 91).

Anzitutto si noti che la prima traccia T_1, intersezione di a con π_1, e così pure la 1ª proiezione a_1 di a, restano invariate. Col metodo indicato innanzi si determini la nuova

2^a proiezione T_2' del punto T_2 in Σ' e si ha così un punto appartenente alla nuova 2^a proiezione a'_2 della retta a; onde la retta a'_2 è determinata come congiungente di T_2' col piede della perpendicolare abbassata da T_1 sopra l' (escluso che T_2 cada su l). Allora l'intersezione della retta a'_2 colla perpendicolare ad l' nel punto $a_1 . l'$ è la nuova 2^a traccia T_{x_2} della retta a rappresentata nel sistema Σ'.

3.° Sia $\alpha \equiv (t_1 t_2)$ un piano rappresentato mediante le sue tracce nel sistema Σ; si cerchino le nuove traccie t'_1, t'_2 del piano a nel sistema Σ' (fig. 92).

Anzitutto si ha $t_1' \equiv t_1$. La nuova 2^a traccia t'_2 di a deve passare per il punto $t'_1 . l'$; occorre quindi determinare un altro punto di essa. A tal fine si noti che il punto $P_1 \equiv ll'$ è in entrambi i sistemi Σ, Σ' la prima proiezione di un punto P del piano α che si trova in entrambi i piani di riferimento π_2, π'_2 (cioè del punto d'intersezione del piano α colla perpendicolare in P_1 a π_1, supposta non appartenente ad α); la seconda proiezione P_2 di P in Σ si determina come intersezione di t_2 colla perpendicolare ad l in P_1. Allora la nuova 2^a proiezione P_2 di P (in Σ') si ottiene subito come è stato indicato (essa si trova sulla perpendicolare in P_1 ad l' distante da l' quanto P_2 da l). Dopo ciò la congiungente P_2' col punto $l' . t'_1$ è la nuova 2^a traccia t'_2 di a, che volevasi determinare.

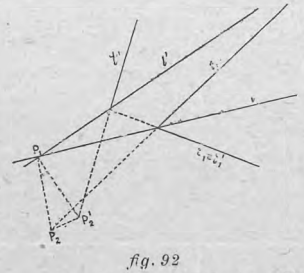


fig. 92

Nei casi accennati nel discorso, in cui tali costruzioni cadono in difetto, si cercheranno le nuove rappresentazioni in Σ di elementi ausiliarî (punti o rette) determinanti la retta o il piano che si vuol rappresentare in Σ'.

È poi chiaro che nei ragionamenti precedenti, si può scambiare l'ufficio dei piani π_1, π_2; supporre cioè di aver cambiato π_1 e lasciato fermo π_2 Si riguarderà allora π_2 come piano del disegno.

Ciò posto, si possono operare ora successivi cambiamenti dei piani principali, lasciando ogni volta fermo uno dei due piani, ciò che condurrà a risolvere la questione generale relativa al cambiamento del sistema di riferimento nel metodo delle proiezioni ortogonali.

Partendo p. e. dal sistema Σ, in cui π_1, π_2 sono i piani principali, e dove è rappresentata una figura φ, gli si sostituisca un sistema Σ' i cui piani principali sieno $\pi'_1 \equiv \pi_1$ e π_2'.

Dato il sistema Σ', ossia π'_2 mediante la nuova linea di terra l', di un punto $A \equiv (A_1 A_2)$ di φ rappresentato in Σ, si costruirà la 2.ª proiezione A'_2 in Σ' nel modo indicato (fig. 93). Ciò posto, al sistema Σ' se ne sostituirà un altro Σ'' cambiando il 1.° piano π_1 in un piano π''_1 e lasciando fermo $\pi'_2 \equiv \pi''_2$. Si dovrà quindi considerare il piano del disegno come 2.° piano di proiezioni in Σ' (ciò che equivale a supporre che la figura φ abbia ruotato di 90° attorno ad l') ed allora si individuerà il sistema Σ'' dandone su π_2'' ($\equiv \pi'_2$) la linea di terra l''; quindi si costruirà nel modo indicato la 1.ª proiezione A_1'' di A in Σ''. E così si continuerà finchè si giunga a sostituire al sistema Σ l'ultimo sistema proposto.

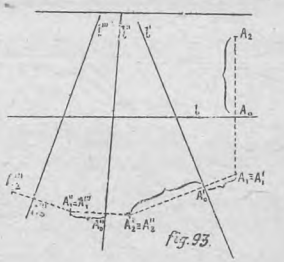


fig. 93

I successivi passaggi vengono rappresentati sul piano del disegno dalle successive linee di terra $l', l'', l'''...$; e le costruzioni da eseguire conducono alla determinazione di una poligonale che ha i successivi lati risp. perdendicolari alle linee di terra $l', l'', l'''...$; la genesi di questa poligonale è perfettamente nota, onde permette il trapasso, dalla rappresentazione di un punto nel 1.° sistema, alla rappresentazione nell'ultimo sistema e viceversa.

Si può ora risolvere il problema generale proposto, ossia si può nella rappresentazione di una data figura φ sostituire ad un sistema di rappresentazione Σ avente π_1, π_2 come piani principali, un altro sistema Σ' arbitrario, avente due piani dati principali π_1', π_2' qualunque.

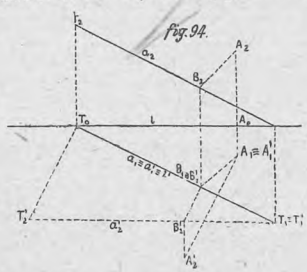
A tale scopo si costruisca un piano ausiliario Ω perpendicolare a π_1, π'_1 e si passi dal sistema Σ a quello Σ_1 che ha come piani π'_1, Ω, determinando la rappresentazione della φ e dei piani π'_1, π'_2 in questo sistema Σ_1. Si passi poi analogamente dal sistema Σ_1 ad un altro sistema Σ_2 avente come piani principali Ω, π_1, determinando nuovamente in questo la rappresentazione della figura φ e del piano π'_2. Infine dal sistema Σ_2 si passi al sitema Σ' proposto.

§ 37. — **Applicazioni.** — Come esempi della semplificazione

che può portare il cambiamento del sistema di riferimento nella soluzione grafica di alcuni problemi, sceglieremo i seguenti problemi:

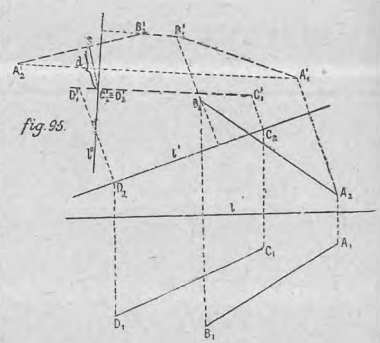
PROBLEMA 1.° — *Condurre per un punto dato la perpendicolare ad una retta data* (fig 94).

Sia $a \equiv (a_1 a_2)$ la retta data e $A \equiv (A_1 A_2)$ il punto dato fuori di essa, e supponiamo non posti in un piano (Aa) perpendicolare a π_1. Si cambi il 2.° piano principale τ_2 sostituendogli il piano π'_2 che proietta ortogonalmente la a su π_1 il quale piano ha per linea di terra a_1 e si determinino le coppie rappresentative $(a'_1 a'_2)$, $(A'_1 A'_2)$ della retta e del punto nel nuovo sistema di rappresentazione Σ'. Ora si noti che la perpendicolare AB condotta (nello spazio) da A su a si proietta ortogonalmente sul piano π'_2 nella perpendicolare $A'_2B'_2$ condotta da A'_2 su a'_2; la AB riesce così determinata potendosene costruire anche la 1ª proiezione $A_1'B_1'$ in Σ'. Questa è anche la 1ª proiezione A_1B_1 della retta AB nel dato sistema di rappresentazione Σ, e si otterrà subito la 2ª proiezione A_2B_2 della retta AB in Σ. Così il problema è risolto.



PROBLEMA 2.° — *Determinare la minima distanza fra due rette sghembe* (fig. 95).

Nel sistema primitivo $\Sigma \equiv (\pi_1 \pi_2)$ siano date le due rette mediante le loro immagini A_1B_1, A_2B_2; C_1D_1, C_2D_2. Cambiamo il quadro π_1 in un altro quadro π'_2 per modo che la nuova linea di terra l' sia la C_2D_2 e determiniamo (§ 36) le nuove prime immagini $A'_1B'_1$, $C'_1D'_1$ in questo secondo sistema Σ' ($\equiv \pi'_1 \pi_2$). Osserviamo che CD è contenuta in π'_1. Quindi cambiamo il piano π'_2 di guisa che la linea di terra l'' risulti perpendicolare a $C'_1D'_1$, e in questo terzo sistema Σ'' ($\equiv \pi'_1 \pi'_2$) costruiamo le nuove seconde immagini A'_2, B'_2, C'_2, D'_2. È chiaro che i punti C'_2, D'_2 sono coincidenti sulla linea di terra l'', poichè CD è contenuta in π'_1 e



di più è perpendicolare ad l'' (e quindi a π'_2). Fatte quindi queste trasformazioni, la minima distanza è subito trovata. Infatti la CD (essendo perpendicolare a π'_2) è parallela al piano proiettante AB su π'_2; allora il segmento C'_2S perpendicolare ad $A'_2B'_2$ è in vera grandezza la distanza che si voleva determinare.

OSSERVAZIONE. — Questo problema è già stato risolto nel § 82 dove si sono seguiti due metodi. Nel primo abbiamo determinato anche le immagini del segmento AB che ci dà la minima distanza; nel secondo invece si è abbandonata la determinazione delle suddette immagini. Ora si vede come volendo determinare la minima distanza semplicemente in vera grandezza, il metodo della trasformazione del sistema di proiezione sia il più spedito. Di questo problema daremo anche una quarta risoluzione (Cfr. § 39).

Come esercizio si applicherà il cambiamento di sistema di rappresentazione alla risoluzione del seguente problema:

Determinare la distanza di due piani paralleli fra loro.

Ad uno dei piani principali si sostituisca un piano perpendicolare ai due dati.

PROBLEMA 3.° — *Costruire i piani inclinati d'un certo angolo α sopra un piano dato π e passanti per una retta* r *di questo piano.*

Sia $\pi \equiv (t_1 t_2)$ il piano dato. Prendasi un piano ω perpendicolare a π_1 e π e quindi a t_1, e dal sistema di rappresentazione primitivo $\Sigma \equiv (\pi_1 \pi_2)$ si passi al sistema $\Sigma' \equiv (\pi_1 \omega)$ la cui linea di terra l' risulta perpendicolare a t_1; poi da questo sistema si passi al sistema $\Sigma'' \equiv (\pi \omega)$ la cui linea di terra è la traccia t_2' di π su ω (in Σ').

Si è così condotti al problema di determinare i piani che passano per una retta di uno dei due piani di rappresentazione e che formano con questo un certo angolo α. Questa questione è già stata da noi risoluta (§ 32. Oss. al Probl. 6.°).

OSSERVAZIONE. — Il problema precedente si può anche risolvere senza ricorrere al cambiamento del sistema di rappresentazione, servendoci invece del metodo del ribaltamento del piano. Le costruzioni da fare nello spazio sarebbero le seguenti:

1.° Condurre un piano qualunque ω perpendicolare alla retta r data sul piano π, in un punto M.

2.° Determinare l'intersezione h dei due piani ω e π e condurre per M sul piano ω le due rette m, n che formano con h l'angolo dato α.

3.° Costruire i piani individuati dalla retta r e da ciascuna delle due rette m,n.

Nel piano di rappresentazione, dopo aver determinato il piano ω perpendicolare ad r in M, si ribalti ω sul piano del quadro e si determinino i ribaltamenti (h), (M). Per (M) si conducano le rette (m), (n) facenti con (h) un angolo uguale ad α, e quindi, raddrizzando il piano, si determinino le prime (e poi anche le seconde) proiezioni di m, n; si costruiscano infine le tracce dei due piani che passano per r e contengono risp. le rette m, n. Con ciò la questione è pienamente risoluta.

§ 38. — **Costruzione dell'orologio solare.** — Abbiamo insistito sul problema 3° del § prec. anche pel fatto che esso è di pratica utilità. Anzi ne faremo direttamente un'applicazione alla *gnomonica*, cioè a quella parte della tecnica che insegna a costruire gli orologi solari a tempo vero.

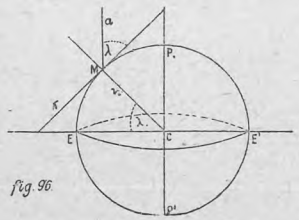


fig. 96

Tali orologi constano di un'asta (prismatica o cilindrica) detta anche *stilo*, la quale si fissa in un dato punto M parallelamente all'asse terrestre PP' (fig. 96). La terra si riguarda (senza incorrere in errori sensibili) come sferica e perciò la verticale n in ogni luogo dato concorre sempre nel punto C, centro della terra, e l'angolo λ che forma lo stilo col piano π dell'orizzonte (piano tangente alla sfera in M) è la latitudine del luogo. L'ombra di questo stilo proiettata dal sole su di un piano, ad esempio sul piano orizzontale del luogo, determina, colla sua variazione, l'ora. Però per renderci ragione di questo dobbiamo ancora fare le seguenti ipotesi, dalle quali non segue alcun errore sensibile:

a) il moto apparente del sole intorno alla terra è tale da potere ritenere che un punto di esso alla stessa ora si trovi sempre in un medesimo piano meridiano (pur essendo a differenti altezze sull'orizzonte) in modo cioè che l'ombra data dallo stilo ad una certa ora sia sempre la stessa;

b) i raggi solari che cadono sulla terra si possono riguardare come paralleli;

c) il moto del sole è uniforme, cosicchè si può supporre che esso giri attorno allo stilo descrivendo un arco di 15° all'ora. Segue che il piano determinato da un raggio solare e dallo stilo si moverà colla stessa legge descrivendo attorno a questo

stilo diedri di 15° l'ora ed avrà sempre per traccia l'ombra portata dallo stilo sul piano orizzontale.

Cosicchè in ultima analisi la costruzione degli orologi solari a tempo vero si riduce alla determinazione delle tracce sul piano dell'orizzonte che sceglieremo come primo piano (π_1) di proiezione e su un piano verticale (π_2) qualunque, dei piani passanti per lo stilo e formanti angoli di 15°, 30°, 45° col piano meridiano del luogo (piano che passa per l'asse terrestre e che contiene lo stilo). Siamo con ciò ricondotti al problema 3° del § prec.

Però la costruzione viene semplificata qualora, come abbiamo fatto nella fig. 97, si scelga come piano verticale (π_2) il piano

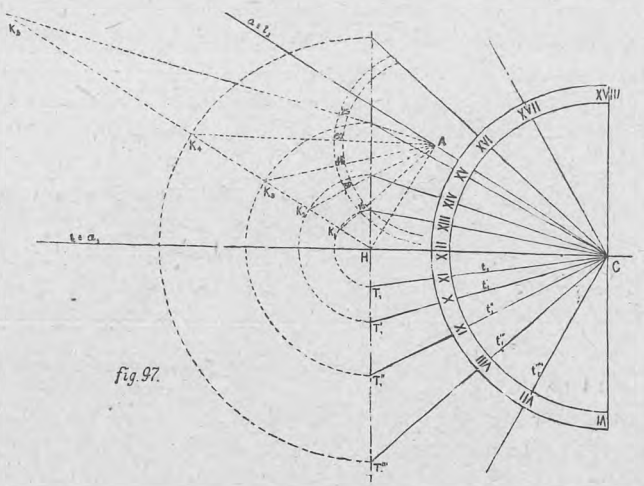


fig. 97.

meridiano del luogo; allora la seconda traccia di tutti questi piani è la retta a (stilo); le prime tracce si costruiscono col metodo già indicato (§ 32. Oss. al Probl. 6°).

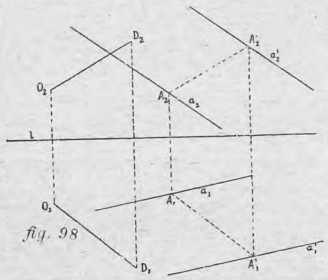
§ 39. — **Spostamento della figura obiettiva.** — Abbiamo veduto nel § 36 come si possa ottenere, mediante il cambiamento del sistema di proiezioni, di rappresentare la figura obiettiva in modo che la sua posizione rispetto al nuovo sistema riesca più vantaggiosa per la risoluzione di un problema. Ora faremo vedere come si possa raggiungere lo scopo movendo la figura obiettiva.

Ricordiamo anzitutto come, il movimento che porta una figura da una posizione primitiva in un'altra assegnata ad arbitrio, si possa sempre ridurre ad una *traslazione* e ad una

rotazione il cui asse è parallelo alla direzione del moto traslatorio (1).

Ci limiteremo tuttavia, per quanto riguarda le rotazioni della figura data, al caso più interessante per gli scopi pratici, in cui l'asse sia perpendicolare ad uno dei piani principali.

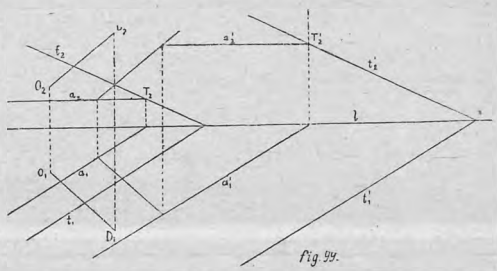
Cominciamo a studiare come si effettui la traslazione di punti, rette e piani. Sia $OD \equiv (O_1D_1, O_2D_2)$ il segmento che individua, in direzione e grandezza, il moto traslatorio.


fig. 98

Dato il punto $A \equiv (A_1A_2)$, la sua nuova posizione $A' \equiv (A'_1A'_2)$ si ottiene osservando che $A_1A'_1$ è un segmento equipollente ad O_1D_1 e che $A_2A'_2$ è un segmento equipollente a O_2D_2 (fig. 98).

Data una retta $a \equiv (a_1a_2)$, per eseguirne la traslazione basta notare che, ottenuta la nuova posizione A' di un suo punto A, occorre condurre per A' la parallela ad a (fig. 98).

Infine, dato un piano $\alpha \equiv (t_1t_2)$, si determini prima la nuova posizione a' di una sua retta, p. e. di una retta $a \equiv (a_1a_2)$ parallela a t_1 (fig. 99); allora la retta a' sarà parallela alla t'_1, 1ª traccia di α nella nuova posizione, e saranno anche risp. parallele le tracce t_1 e t'_1, t_2 e t'_2. Quindi costruita la T'_2, 2ª traccia di a'_1, si conduca per la T'_2 la t'_2 parallela a t_2 e per l'intersezione di t'_2 con l la t'_1 parallela a t_1.


fig. 99.

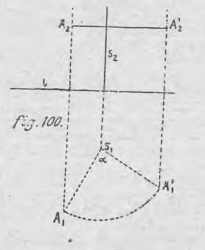
Con ciò si hanno tutte le costruzioni necessarie ad eseguire la traslazione di una figura qualunque.

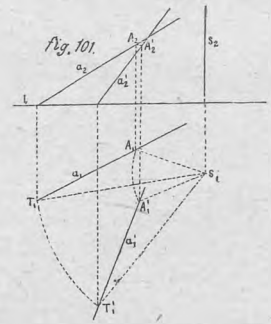
Passiamo ora a considerare la rotazione di punti, rette e piani attorno ad un asse s che sia perpendicolare ad es. a π_1. Sia α l'angolo di rotazione.

(1) Cit. « Lezioni di Geometria proiettiva » § 91 della 3ª edizione e § 98 della 4ª.

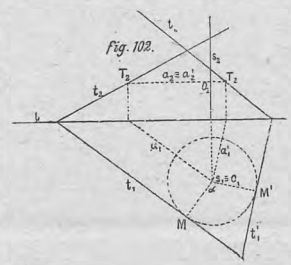
Dato il punto $A \equiv (A_1A_2)$, la nuova posizione $A' \equiv (A'_1A'_2)$ si ottiene come nella fig. 100 osservando che A descrive nel piano per esso parallelo a π_1 un arco di cerchio misurato dall'angolo α.

Data una retta $a \equiv (a_1a_2)$, per eseguirne la rotazione si trovi la nuova posizione di due dei suoi punti. Si potrà scegliere come uno di questi la prima traccia T_1 di a (fig. 101).


fig. 100.


fig. 101.

Dato il piano (t_1t_2), per trovare le sue nuove tracce t'_1 e t'_2 si determini, mediante la retta ausiliaria a parallela a π_1, il punto $O \equiv (O_1O_2)$ intersezione di s col piano (t_1t_2), quindi con centro in $O_1 \equiv s_1$ si descriva il cerchio tangente a t_1 in M (fig. 102). Costruito allora l'angolo $M'O_1M \equiv \alpha$, si conduca la tangente al nominato cerchio nel punto M'; questa sarà la t'_1. Per avere ora la t'_2 si osservi che la retta a ruota intorno al punto fisso O in un piano parallelo a π_1 e che quindi nella sua nuova posizione a' essa risulterà parallela alla traccia t'_1 del piano: perciò sarà a'_1 la parallela a t'_1 condotta per O_1 ed $a'_2 \equiv a_2$; ciò fatto, la t'_2 si ottiene congiungendo la 2ª traccia T'_2 di a' colla intersezione di t'_1 con l.


fig. 102.

Mediante queste costruzioni potremo determinare la nuova posizione di una qualunque figura che si faccia ruotare intorno ad un asse perpendicolare ad un piano principale.

Osservazione. — Data una retta generica, per renderla parallela p. e. al piano π_1, basta ruotarla intorno ad un asse perpendicolare a π_2; dopo ciò la retta si potrà rendere perpendicolare al piano π_2 con una rotazione intorno ad un asse per-

pendicolare a π_1. Dato invece un piano generico, esso si può rendere perpendicolare ad uno dei piani principali con una prima rotazione, quindi parallelo all'altro piano principale con una seconda rotazione.

Dopo ciò proponiamo i seguenti esercizî:

1) Trovare la distanza di un punto da una retta non passante per esso.

Con due rotazioni, come si è detto precedentemente, si sposti la figura costituita dal punto e dalla retta, per modo che quest'ultima risulti perpendicolare ad un piano principale. Conviene scegliere gli assi di rotazione pel punto.

2) Trovare la distanza di un punto da un piano che non passi per esso.

Si renda il piano perpendicolare ad uno dei piani principali.

3) Trovare la minima distanza di due rette sghembe.

Con due rotazioni si renda una delle due rette perpendicolari ad un piano principale.

4) Determinare gli angoli di due rette sghembe. Dopo aver reso una delle due rette perpendicolare p. e. al piano orrizzontale, si ruoti la 2ª retta intorno alla 1ª per modo che risulti parallela al piano verticale.

§ 40. — **Prospettiva di una figura.** — Un esame comparativo delle risoluzioni date dei principali problemi che si riferiscono alla rappresentazione di una figura col metodo della proiezione centrale, e col metodo delle proiezioni ortogonali, mostra come l'uso di ognuno dei due metodi presenti un vantaggio sull'altro rispetto alla trattazione di alcuni problemi, onde in molte questioni converrà di sostituire l'uso di un metodo a quello dell'altro. Nasce quindi il problema del cambiamento del sistema di rappresentazione passando dal metodo delle proiezioni ortogonali a quello della proiezione centrale, e viceversa.

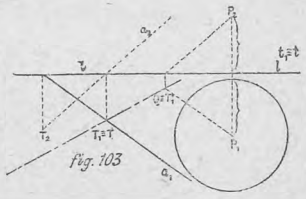
Un tale passaggio si riconduce sempre al caso particolare in cui uno dei piani principali, nella rappresentazione ortogonale, sia il quadro dell'altro sistema di proiezione e viceversa, dopo ciò occorrerà soltanto eventualmente mutare il centro e il quadro nel metodo della proiezione centrale (Cap. III), oppure i piani principali di riferimento nel metodo delle proiezioni ortogonali (§ 36).

Sorge quindi anzitutto il seguente problema:

Rappresentata una figura nel metodo delle proiezioni ortogonali rispetto a due piani principali π_1, π_2, si vuol costruirne la rappresentazione nel metodo della proiezione centrale, sul quadro π_1, rispetto ad un dato centro P. Ciò dicesi *costruire la prospettiva della figura.*

Anzitutto si noti che il centro P ha come 1ª proiezione (su π_1) il punto principale P_1 e che la sua 2ª proiezione P_2, posta sulla perpendicolare per P_1 alla linea di terra l, dista da l della lunghezza del raggio del circolo di distanza. Individuato così il centro di prospettiva $P \equiv (P_1P_2)$ e quindi il nuovo sistema Σ' di rappresentazione centrale rispetto all'antico Σ di proiezione ortogonale, si vuole:

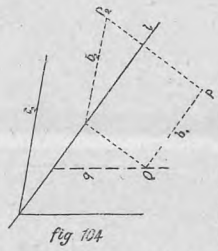
1.° Data una retta $a \equiv (a_1a_2)$, costruire la traccia T ed il punto di fuga Q in Σ' (fig. 103).


Fig. 103

Anzitutto T è la prima traccia T_1 della retta a (intersezione con π_1), la quale si determina nel modo noto. Il punto di fuga Q è la prima traccia della parallela condotta per P ad a. Questa parallela ha per proiezioni le parallele condotte risp. per P_1,P_2 ad a_1,a_2; e la sua traccia $T_1' \equiv Q$ si determina nel modo noto.

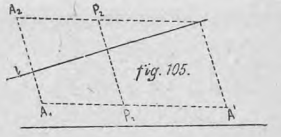
La retta $TQ \equiv a'$ è la proiezione di a su π_1 fatta da P (immagine di a in Σ').

2.° Dato un piano (t_1t_2), costruirne la traccia t e la retta di fuga q in Σ' (fig. 104).


fig. 104

Anzitutto si ha $t \equiv t_1$. La q è la 1ª traccia del piano condotto per P parallelamente a (t_1t_2). Per otternerla s'immagini condotta per P la parallela b alla 2ª traccia t_2 (§ 30 Probl. 10°). La 2ª proiezione b_2 di b è la parallela per P_2 a t_2; la 1ª proiezione b_1 di b è la parallela per P_1 alla linea di terra. Determinata la 1ª traccia Q di b, si ha la retta q conducendo per Q la parallela a t_1.

3.° Dato un punto $A \equiv (A_1A_2)$, costruire l'immagine A' di esso in Σ' (sua proiezione da P su π_1) (fig. 105). Occorre determinare la 1ª traccia della retta PA; questo punto è la cercata immagine A'.


fig. 105.

Ove si voglia la completa rappre-

sentazione di A in Σ', occorrerà aggiungere la rappresentazione di una retta per A.

Con uguale facilità si risolve il problema inverso, cioè il passaggio dal sistema Σ' a Σ.

Anzitutto il sistema Σ (di cui un piano principale, ad es. π_1, coincide col quadro) si individuerà fissando la linea di terra l, immagine di sè stessa sul quadro; e si assegneranno le proiezioni ortogonali P_1, P_2 in Σ del centro di prospettiva, notando ancora che P_1 è il punto principale, e P_2 dista da l della distanza principale d (fig. 106). Ciò posto, indichiamo le costruzioni fondamentali seguenti:

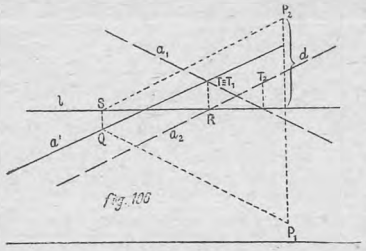


fig. 106

1.° Data una retta $a \equiv (TQ)$ rappresentata in Σ', per averne la rappresentazione $(a_1 a_2)$ in Σ si noterà che $T \equiv T_1$ è la prima traccia di a; la a_1 è la parallela per T alla retta $P_1 Q$; la a_2 è la parallela condotta per il piede R della perpendicolare abbassata da T su l, alla retta $P_2 S$ che congiunge P_2 e il piede S della perpendicolare per Q ad l.

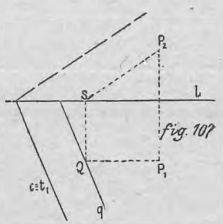


fig. 107

2.° Dato un piano $\alpha \equiv (tq)$ rappresentato in Σ' (fig. 107), per averne le tracce $t_1 t_2$ in Σ si noterà che $t \equiv t_1$ è la 1ª traccia di a, e che condotta per P_1 la parallela alla l a segare q in Q e abbassata da Q la perpendicolare QS su l, la seconda traccia t_2 è la parallela alla retta $P_2 S$ condotta pel punto tl.

3.° Dato un punto A di immagine A' (in Σ') individuato mediante una retta (TQ) (fig. 108), per ottenere le due proiezioni A_1, A_2 di A che lo rappresentino in Σ, si costruiranno le due proiezioni a_1, a_2 della retta (TQ); l'intersezione di $P_1 A'$ con a_1 sarà la 1ª proiezione A_1 di A, la 2ª proiezione A_2 si troverà su a_2 all'incontro colla perpendicolare condotta per A_1 alla linea di terra l.

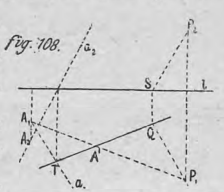


fig. 108

Con ciò è risoluto il problema del passaggio da un metodo all'altro di rappresentazione.

§ 41. — **Prospettiva parallela.** — Nel § prec. abbiamo risoluto il problema di costruire la prospettiva di una figura (rappresentata in un sistema di proiezioni ortogonali) assumendo *a distanza finita* il centro di prospettiva P. In questo § ci proponiamo di risolvere lo stesso problema supponendo P *improprio*. Sebbene in questo caso (§ 26) non si abbia più un sistema determinato di rappresentazione, questa particolare prospettiva detta *prospettiva parallela*, assume importanza per le sue applicazioni ad un caso semplice della *Teoria delle ombre*, cui più tardi accenneremo (§ 51).

E perciò di essa, brevemente, vogliamo occuparci.

Assumiamo un sistema di piani ortogonali π_1, π_2 e la direzione del punto improprio P, centro di prospettiva, mediante un raggio $r \equiv (r_1 r_2)$.

Risolviamo quindi i seguenti problemi:

Problema 1.° — *Dato un punto* $A \equiv (A_1 A_2)$, *costruire le prospettive parallele di* A *sopra i due piani di proiezione* π_1, π_2.

Basterà condurre per A la parallela a al raggio r (§ 30 Prob. 8°) e determinare le due traccie T'_a, T''_a, di a.

Problema 2.° — *Data una retta* $a \equiv (a_1 a_2)$, *costruire le prospettive parallele di* a *sopra i due piani di proiezione* π_1, π_2.

Si conduca per a un piano α parallelo al raggio r (§ 30, Prob. 9°); le due tracce $t'\alpha$, $t''\alpha$, di α risolvono il problema.

Problema 3.° — *Dato in un piano* $(t_1 t_2)$ *un poligono, costruire le prospettive parallele del poligono sopra i due piani di proiezione* π_1, π_2.

Basterà eseguire per ciascuno dei vertici del poligono la costruzione del Problema 1°. Ma si può anche seguire un'altra via osservando che, ad es., la prospettiva parallela sopra π, e la 1ª proiezione del poligono, sono figure affini, essendo asse di affinità la traccia t_1 e centro il punto improprio nella direzione di r_1. Perciò, costruita la prospettiva parallela di uno dei vertici secondo il Problema 1°, le prospettive dei rimanenti vertici del poligono si otterranno mediante la costruzione che si dà nella Geometria proiettiva Analogamente dicasi per la prospettiva parallela del poligono sopra il piano π_2.

Ploblema 4.° — *Costruire la prospettiva parallela di un punto* $A \equiv (A_1 A_2)$ *sopra un piano generico* $(t_1 t_2)$.

L'intersezione della parallela per A al raggio r col piano generico dato $(t_1 t_2)$ risolve il problema (§ 30 Probl. 5°).

Problema 5.° — *Costruire la prospettiva parallela di una retta generica* $a \equiv (a_1 a_2)$ *sopra un piano generico* $(t_1 t_2)$.

Si determini il piano passante per a e parallelo al raggio r

(§ 30 Prob. 9°), e si costruisca l'intersezione di questo piano col piano generico dato $(t_1 t_2)$ (§ 30 Probl. 2°).

Problema 6°. — *Costruire la prospettiva parallela di un poligono giacente in un piano generico* $\alpha \equiv (t_1 t_2)$, *sopra un piano generico* $\omega \equiv (t_1' t_2')$.

Basterebbe applicare ai singoli vertici del poligono dato la costruzione del Problema. Ma si può osservare che ad es. la 1ª proiezione del poligono dato e la 1ª proiezione della sua prospettiva parallela sopra il piano ω, sono figure affini, essendo asse di affinità la 1ª proiezione della intersezione dei due piani α ed ω e centro il punto improprio di r_1. Analogamente dicasi per le 2e proiezioni del poligono e della sua prospettiva parallela, le quali del resto, si ottengono per un'altra via (§ 29 Probl. 3°) quando si conoscano le 1e proiezioni.

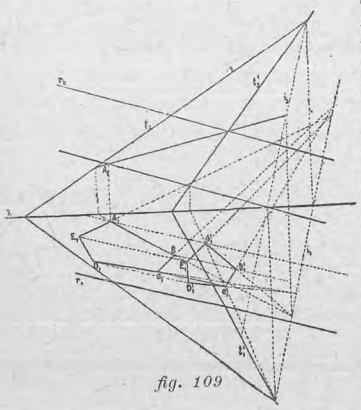


fig. 109

Nella fig. 109 diamo la costruzione della prospettiva parallela di un pentagono $ABCDE$ rappresentato mediante la sua 1ª proiezione $A_1B_1C_1D_1E_1$ ed il piano $\alpha \equiv (t_1 t_2)$ che lo contiene.

Osservazione. — Notiamo che le affinità che si presentano nei Problemi 3° e 6° divengono traslazioni nella direzione di r_1 (o di r_2), quando il piano del poligono sia parallelo al piano iconico su cui devesi costruire la prospettiva parallela.

Riferendoci al Problema 6° notiamo ancora che se si richiede di avere la prospettiva parallela della figura nella sua vera forma e grandezza, occorre eseguire, dopo la costruzione indicata, anche il ribaltamento del piano generico ω su cui si ha la prospettiva parallela (§ 33).

CAPITOLO VII.

Rappresentazione dei poliedri.

§ 42. — **Linea di contorno di un poliedro rispetto ad un punto esterno.** — Sia dato un poliedro *convesso*, cioè un poliedro che è situato tutto da una stessa banda rispetto a ciascuna delle sue facce.

Le rette che non appartengono a nessuna faccia del poliedro si possono dividere in tre categorie:

1) rette (*secanti*) che incontrano il poliedro in *due* punti distinti;

2) rette (*esterne*) che non lo incontrano;

3) rette (*tangenti*) che passano per un punto appartenente ad uno spigolo del poliedro (in particolare per un vertice di esso), ma non hanno ulteriori intersezioni col poliedro.

Fissiamo ora un punto O esterno al poliedro e non appartenente al piano di una faccia. Vediamo di determinare le rette per O, tangenti al poliedro.

Congiungendo O con un punto interno al poliedro si ottiene una retta secante a. Ogni piano condotto per a sega il poliedro secondo un poligono convesso, rispetto al quale il punto O risulta esterno. Da ciò si vede intanto che per O passano infinite rette tangenti al poliedro, situate due a due in un piano per a, cioè le tangenti ai poligoni, sezioni del poliedro coi nominati piani. Viceversa se t è una tangente al poliedro, passante per O, la t è una delle due tangenti al poligono sezione del poliedro col piano at.

I punti di contatto delle tangenti per O costituiscono una linea che si chiama *linea di contorno* del poliedro rispetto al punto O. Vediamo come sia formata questa linea.

Se t è una retta tangente al poliedro e T ne è il punto di contatto, il punto T, per l'ipotesi che abbiamo fatto su O, è un vertice del poligono sezione del poliedro col piano at; perciò T appartiene ad uno spigolo s_1 (e può anche essere un vertice) del poliedro. Se T non è un vertice del poliedro, il piano ts_1 non può avere oltre s_1 un'ulteriore intersezione con esso, altrimenti t sarebbe una secante; dunque ogni retta che congiunge O con un punto di s_1, risulta tangente. Il piano $\alpha \equiv ts_1$ — rispetto al quale il poliedro è situato tutto da una stessa banda — dicesi *piano tangente* al poliedro.

Indichiamo con A,B gli estremi dello spigolo s_1. Per B passano, oltre s_1, almeno altri due spigoli del poliedro, e questi rispetto al piano $\alpha \equiv ts_1$ saranno situati tutti nella regione che contiene il poliedro stesso. Allora se si ruota α intorno ad OB nel senso in cui la falda $(OB)A$ dovrebbe muoversi per descrivere la regione che non contiene il poliedro, il piano α in questo suo movimento verrà a passare *successivamente* pei nominati spigoli concorrenti in B. Se $s_2 \equiv BC$ è il primo spigolo che il piano α incontra, si vede che anche il piano $\beta \equiv Os_2$ risulta tangente al poliedro, e che per la OB non passano piani tangenti diversi da α,β.

Da queste osservazioni si deduce senz'altro che *la linea di contorno di un poliedro convesso rispetto ad un punto* O *è una spezzata chiusa, semplicemente connessa, cioè un poligono, in generale gobbo, i cui lati sono spigoli del poliedro.*

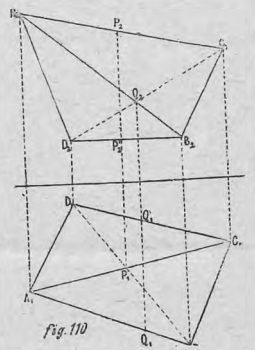
La linea di contorno è di grande importanza nella rappresentazione dei poliedri e nella Teoria delle ombre (cfr. § 51). Riguardo alla rappresentazione dei poliedri importa qui rilevare che la linea di contorno separa la superficie poliedrica in due regioni, una delle quali è interamente *visibile*, l'altra invece è *invisibile* dal punto P. La linea di contorno stessa è tutta visibile. Una faccia del poliedro (tolta al più una parte del suo contorno) appartiene *tutta* ad una delle due regioni; perciò per giudicare se una data faccia sia visibile od invisibile, basterà verificarlo per uno dei suoi punti interni.

Dalle precedenti considerazioni risulta pure che le tangenti ad un poliedro convesso condotte per O sono situate sulla superficie di un angolo solido *convesso*, il quale ha il vertice in O e le facce sui piani per O tangenti al poliedro; questo dicesi *angolo solido circoscritto al poliedro dal punto* O. Se si proietta il poliedro dal punto O sopra un piano π, le proiezioni delle facce risultano poligoni convessi, aventi a due a due in comune un lato. La linea di contorno rispetto al punto O viene proiettata su π in un poligono convesso (contorno dell'immagine) rispetto al quale risultano interne le proiezioni di tutti i punti del solido. Ogni spigolo visibile da O si proietta in un segmento visibile su π, e ogni spigolo invisibile si proietta in un segmento invisibile.

Osservazione 1.ª — Si noti che le stesse considerazioni valgono quando il punto O sia improprio. Perciò esse possono applicarsi al caso delle proiezioni ortogonali ove si supporrà costantemente il centro di vista all'infinito nella direzione dei raggi proiettanti.

Osservazione 2.ª — I risultati ottenuti in questo § sussistono anche se il punto O appartiene al piano di una faccia del poliedro. Basti qui osservare che in questo caso la faccia in questione va considerata come *invisibile* dal punto O, e che la parte del suo contorno compresa tra le due tangenti condotte da O alla faccia stessa e rivolta verso O, appartiene alla linea di contorno.

§ 43. — **Proiezioni ortogonali di un solido.** — Per applicare le regole generali, date innanzi, ad un caso semplicissimo, riesce utile rappresentare un tetraedro nel sistema delle proiezioni ortogonali. Supponiamo che esso cada tutto nella 1ª regione. Siano A_1,B_1,C_1,D_1; A_2,B_2,C_2,D_2, le proiezioni dei suoi vertici (fig. 110).


fig. 110

Anzitutto si osservi che, nel nostro caso, $A_1B_1C_1D_1$ è il contorno della prima immagine, e perciò i segmenti A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 sono visibili (dal punto all'infinito della verticale). Ora per decidere se A_1C_1, B_1D_1 siano visibili o no, facciamo le seguenti considerazioni:

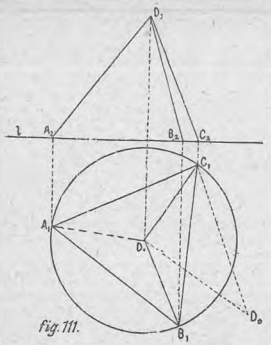
Il punto $P_1 \equiv A_1C_1 . B_1D_1$ è la prima immagine di due punti P e P', il primo appartenente ad AC, il secondo a BD. Di essi P (essendo il più distante da π_1) è visibile, mentre P' non lo è. Quindi A_1C_1 è visibile, B_1D_1 è invisibile.

Analoghe considerazioni possono ripetersi riguardo alla 2ª proiezione del tetraedro.

Da questo esempio si può risalire alla seguente regola generale.

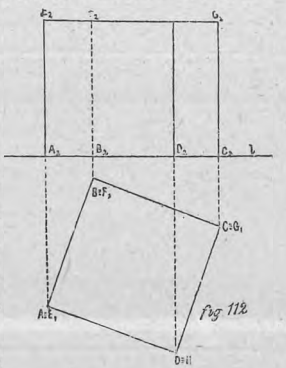
Se le proiezioni di due spigoli di un poliedro si traversano, uno dei due spigoli è visibile, l'altro no.

Nei successivi §§ daremo la rappresentazione nel sistema delle proiezioni ortogonali dei cinque poliedri regolari già noti dalla Geometria elementare.


Fig. 111.

§ 44. — **Tetraedro regolare.** — Per semplicità poniamo la faccia ABC del tetraedro regolare sul quadro π, (fig. 111). Evidentemente il 4° vertice D avrà per prima immagine D_1, il centro del cerchio circoscritto ad ABC, e la seconda immagine D_2 disterà dalla linea di terra di un segmento eguale al cateto D_1D_0 del triangolo rettangolo CD_1D_0 che ha per cateto $D_1C \equiv r$ raggio del circolo circoscritto, e per ipotenusa $CD_0 \equiv AB$, lato del triangolo equilatero dato. È poi facile decidere quali sono gli spigoli visibili e quali gli invisibili.

§ 45. — **Esaedro regolare o cubo.** — Anche in questo caso supponiamo di porre per semplicità una faccia $ABCD$ del solido sopra il quadro π, (fig. 112). Allora questa faccia $ABCD$ si proietta su π_1 in sè stessa, e su π_2 nella linea di terra, mentre la faccia superiore $EFGH$ si proietta su π_1 nella stessa faccia $ABCD$, e su π_2 nella retta parallela alla linea di terra e distante da questa della lunghezza del lato del quadrato $ABCD$; i lati AE, BF, CG, DH si proiettano su π_2 nei segmenti A_2E_2, B_2F_2, C_2G_2, D_2H_2 perpendicolari ad l.

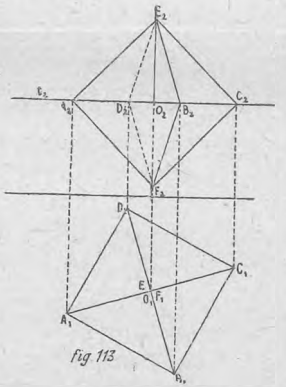

Fig. 112.

Si riconosce poi agevolmente quali spigoli sieno visibili, e quali no.

§ 46. — **Ottaedro regolare.** — In un piano ω si consideri un quadrato $ABCD$ e la perpendicolare ad esso pel centro del quadrato. Quindi si congiungano i vertici A,B,C,D, ed i punti E,F di questa perpendicolare distanti da ω del segmento uguale alla semidiagonale di $ABCD$. Il solido così ottenuto formato da otto triangoli equilateri è un *ottaedro regolare.*

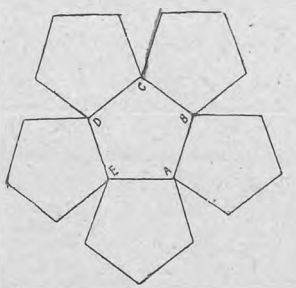
Per rappresentarlo, possiamo supporre, che il piano ω sia stato scelto parallelo al 1° piano di proiezione π_1 (fig. 113).

Allora la 1ª immagine $A_1B_1C_1D_1$ del quadrato $ABCD$ risulta uguale ad $ABCD$ stesso; E_1 ed F_1 (1ª proiezioni di E,F) coincidono nel centro O_1 di $A_1B_1C_1D_1$; la 2ª immagine $A_2B_2C_2D_2$ di $ABCD$ cade sulla 2ª traccia t_2 di ω; E_2,F_2 (2ª proiezioni di E,F) sono simmetrici rispetto a t_2 e distanti da t_2 di un segmento uguale ad O_1A_1 Quindi la seconda proiezione del solido è quella segnata nella figura, avendo distinti con le solite considerazioni gli spigoli visibili da quelli invisibili.


Fig. 113.

§ 47. — **Dodecaedro regolare.** — Il dodecaedro regolare si può costruire nel modo seguente.

Assunto in un piano un pentagono regolare $ABCDE$, sui cinque lati si costruiscono cinque pentagoni regolari uguali ad $ABCDE$; quindi tenendo fisse le rispettive basi $AB,BC,\ldots$ si rialzino questi cinque pentagoni in modo da ottenere cinque triedri regolari coi vertici in A,B,C,DE, (fig. 114). Si da luogo così ad una calotta poliedrica avente in un piano ρ parallelo alla base cinque vertici, e in un piano ρ' pure parallelo alla base e superiore a ρ altri cinque vertici.


Fig. 114.

Si costruisca un'eguale calotta partendo da un pentagono regolare $A'B'C'D'E'$ uguale al pentagono $ABCDE$. Questa seconda calotta, come è noto dalla Geometria elementare, può essere unita alla prima in guisa che le due calotte riunite vengono a formare un solido, cioè un *dodecaedro regolare.* I vertici del dodecaedro si trovano distribuiti in quattro pentagoni regolari posti in quattro piani paralleli $\omega,\rho,\rho',\omega'$; il pentagono inferiore e il superiore sono uguali tra loro, e parimenti sono uguali tra loro gli intermedi. Inoltre è chiaro che i centri dei cerchi circoscritti ai quattro pentagoni considerati stanno sopra una perpendicolare ai piani $\omega,\rho,\rho',\omega'$.

Ora per dare una semplice rappresentazione del dodecaedro nel sistema delle proiezioni ortogonali, poniamo la faccia $ABCDE$

su π_1. Si vede subito che i vertici del pentagono inferiore e quelli del pentagono superiore si proiettano su π_1 nei vertici di un decagono regolare inscritto nel cerchio circoscritto ad *ABCDE*.

Similmente i vertici dei due pentagoni intermedî si proiettano su π_1 nei vertici di un decagono regolare inscritto in un cerchio concentrico al precedente. Il raggio di questo cerchio si determina nel modo seguente:

Sia *BAFMG* il pentagono, faccia del dodecaedro, costruito precedentemente sul lato *AB* del pentagono base, e sia $BAF_0M_0G_0$ il suo ribaltamento su π_1, fatto intorno ad *AB* (fig. 115). Indicando con O_1 il centro del cerchio circoscritto al pentagono base *ABCDE*, è chiaro intanto che le 1ª proiezioni dei vertici del dodecaedro giacenti nel piano ρ sono situate risp. sui raggi $O_1A, O_1B,...$ Invero, se si considera ad es. lo spigolo *AF*, esso giace nel piano perpendicolare a π_1 e avente come 1ª traccia la retta O_1A, onde la 1ª proiezione F_1 di *F* è situata sul raggio O_1A. Ma essendo F_0 il ribaltamento di *F*, sappiamo (§ 33) che F_0F_1 è perpendicolare ad *AB*; perciò calata da *F* la perpendicolare F_0W ad *AB*, si ottiene $F_1 \equiv F_0W.O_1A$.

Ora da ciò risulta immediatamente che gli angoli acuti F_1F_0A ed F_0AF_1 sono uguali alla metà dell'angolo al centro di un decagono regolare (cioè sono angoli di 18°), e però $AF_1 \equiv F_0F_1$ è il lato del decagono regolare iscritto nel cerchio di raggio O_1A. Ne viene che il raggio del cerchio cercato, cioè O_1F_1 è uguale al raggio del cerchio circoscritto al pentagono base, aumentato di un segmento uguale alla sezione aurea di questo raggio.

Tanto basta per determinare la prima proiezione del dodecaedro regolare.

Ma giova ancora osservare che il centro M' del cerchio circoscritto al pentagono $BAF_0M_0G_0$, ribaltamento di *BAFMG*, coincide con M_1, 1ª proiezione di *M*, e però giace sul cerchio di raggio O_1F_1. Infatti il detto centro si trova nell'intersezione della perpendicolare F_1M' calata da F_1 ad AF_0 e della perpendicolare O_1M' condotta da O_1 ad *AB*; ora nel triangolo O_1F_1M' si hanno gli angoli $F_1O_1M' \equiv 36°$, $O_1F_1M' \equiv 72°$, e però $O_1M'F_1 \equiv 72°$, ond'è $O_1F_1 \equiv O_1M'$. Ciò dimostra che M' coincide con M_1.

Per determinare la 2ª proiezione è necessario conoscere le distanze dei quattro piani $\omega, \rho, \rho', \omega'$. Osservando che un triangolo avente per ipotenusa il lato del pentagono regolare iscritto in in un cerchio e un cateto uguale al lato dell'esagono regolare inscritto, ha l'altro cateto uguale al lato del decagono regolare inscritto nel medesimo cerchio, segue immediatamente che ω,ρ ed ω',ρ' distano fra loro di un segmento uguale al lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio circoscritto al pentagono base, mentre la distanza fra ρ e ρ' è uguale al lato del decagono regolare inscritto nello stesso cerchio.

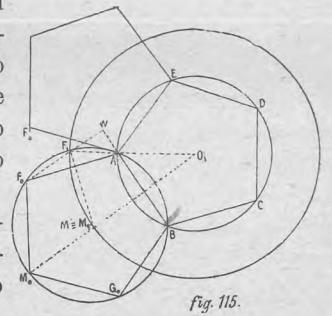
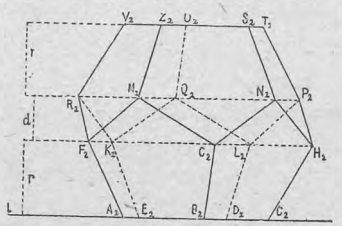


Fig. 115.

Invero (fig. 115) *AF* è proiettato in AF_1, lato del decagono regolare inscritto nel cerchio di raggio O_1A ed *MF* si proietta in M_1F_1 che per quello che si è notato poc'anzi, è uguale al lato dell'esagono regolare inscritto nello stesso cerchio.



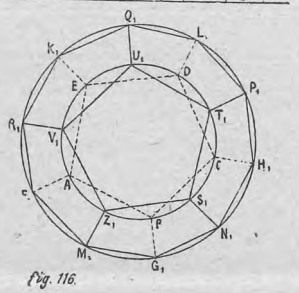


Fig. 116.

Stabilite queste relazioni di grandezza, riesce facile la rappresentazione del dodecaedro regolare nel modo sopra accennato (fig. 116).

48. — **Icosaedro regolare.** — Questo solido si costruisce nel modo seguente:

Sopra i lati di un pentagono regolare *ABCDE* si costruiscano tanti triangoli equilateri e si rialzino in modo che i loro vertici opposti ai lati del pentagono vengano a coincidere in un punto *F*, che in tale guisa diventa il vertice di una piramide pentagonale avente per base *ABCDE* (fig. 117).

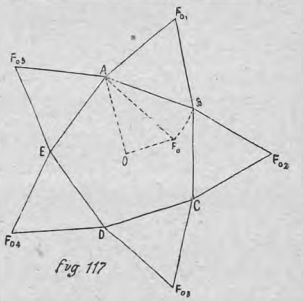
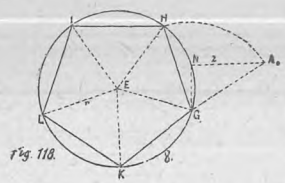


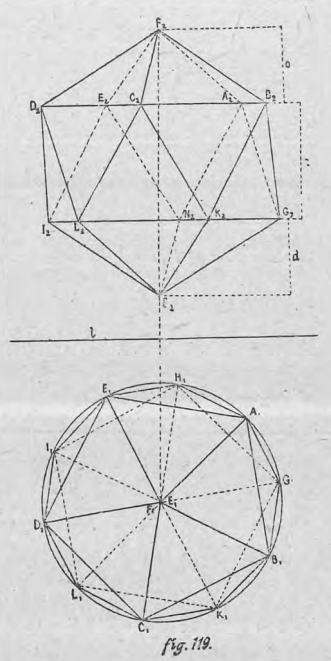
Fig. 117

Sia *O* il centro del cerchio γ circoscritto ad *ABCDE*. Nello spazio si ha il triangolo rettangolo *AOF* di cui nella figura si vede il ribaltamento AOF_0, effettuato attorno alla retta *AO*. Pel teorema citato nel prec. §, l'altezza *OF* della nominata piramide è uguale al lato del decagono regolare inscritto in γ.

Si costruisca ora una seconda piramide $E(GHILK)$ uguale alla precedente, e sia γ' il cerchio circoscritto alla sua base $GHILK$. S'immagini questa piramide capovolta, come nella fig. 118, e si costruisca GN lato del decagono inscritto in γ'. Nel piano di $GHILK$ si costruisca sopra GN il triangolo GNA_0 rettangolo in N ed avente il cateto A_0N uguale al raggio di γ'. Allora A_0G è il lato del pentagono regolare $GHILK$. Rialzando il triangolo GNA_0 intorno a GN in modo che A_0N risulti perpendicolare al piano del pentagono, il punto A_0 assume una certa posizione A; ed A è vertice di un triangolo equilatero AGH.


Fig. 118.

Triangoli analoghi a questo si possono costruire sopra tutti i lati del pentagono $GHILK$; essi avranno per vertici (analoghi ad A) certi punti (dello spazio) B,C,D,E. Questi vertici A,B,C,D,E formano evidentemente un pentagono $ABCDE$ eguale a $GHILK$ giacente in un piano parallelo al piano di questo pentagono. Per formare il solido non ci resta dunque altro che porre sopra il pentagono $ABCDE$ la piramide $F(ABCDE)$ che si era costruita fin da principio.


Fig. 119.

Fatte queste osservazioni, si vede che il modo più semplice di rappresentare l'icosaedro regolare, è quello di porre il pentagono $ABCDE$ (e quindi anche $GHILK$) in un piano parallelo per es. al 1° piano di proiezione (fig. 119).

La rappresentazione riesce così assai agevole.

§ 49. — **Intersezione di un poliedro con un piano.** — Quando un piano penetra nella regione interna di un poliedro, lo sega secondo un poligono che ha per vertici i punti di sezione del piano secante cogli spigoli del poliedro e per lati le intersezioni delle facce.

Se il poliedro è convesso, il poligono sezione è anch'esso convesso. Per determinare questo poligono sezione, o si costruiscono le intersezioni degli spigoli del poliedro col piano secante e si uniscono questi punti fra loro in modo che ogni congiungente sia in una faccia del solido, ovvero si determinano le rette intersezioni dei piani delle facce del poliedro col piano secante e si considerano i segmenti di queste rette compresi nelle facce suddette.

Applichiamo queste regole al caso in cui il poliedro sia una piramide od un prisma (convessi).

Si noti dapprima che quando un piano penetra nell'interno di una piramide, possono darsi due casi principali: o il piano dato risulta esterno al poligono base, o penetra nell'interno di questo poligono. Nel primo caso, il piano secante dà per sezione con la piramide un poligono i cui vertici sono tutti sugli spigoli della piramide uscenti dal vertice di essa; il poligono base e la sezione che si ottiene sono figure omologiche, essendo il vertice della piramide il centro dell'omologia. Nel secondo caso, due dei vertici del poligono sezione sono le intersezioni del piano secante col contorno del poligono base; i rimanenti si trovano sugli spigoli della piramide uscenti dal vertice, e precisamente su quelli che vanno ai punti del poligono base situati da parte opposta del piano secante rispetto al vertice della piramide (tutti dalla medesima parte della retta comune al piano secante e alla base della suddetta piramide).

Per il prisma possono presentarsi tre casi: o il piano secante risulta esterno a ciascun poligono base del solido, ed allora i vertici del poligono sezione si trovano tutti sugli spigoli laterali del prisma, e la sezione risulta omologica-affine rispetto a ciascuna base del solido, essendo il centro di omologia il punto all'infinito degli spigoli laterali; o il piano secante penetra nell'interno di una faccia base β, e gli altri vertici sono sugli spigoli laterali paralleli del prisma che vanno ai vertici della β, situati nell'una o nell'altra delle parti in cui la β è divisa dal piano secante; o infine il piano secante penetra nell'interno di ciascuna faccia base del prisma ed in questo caso può o no intersecare gli spigoli laterali del solido.

Sia nel caso del prisma che nel caso della piramide i punti sezione del piano secante con le rette illimitate che contengono gli spigoli laterali del prisma o gli spigoli uscenti dal vertice della piramide, costituiscono una figura omologica alla base del solido.

Problema. — *Data una piramide mediante le sue proiezioni* F_1 $(A_1B_1C_1D_1E_1)$, F_2 $(A_2B_2C_2D_2E_2)$ *e un piano* $\alpha \equiv (tq)$, *determinare la intersezione del piano con la piramide* (fig. 120).

Supponiamo per semplicità che la base *ABCDE* sia situata sul quadro π_1. Siccome il piano α e il quadro π_1 sono riferiti fra loro prospettivamente, essendo F il centro di prospettività, ne segue che *ABCDE* e il poligono sezione che vogliamo deter-

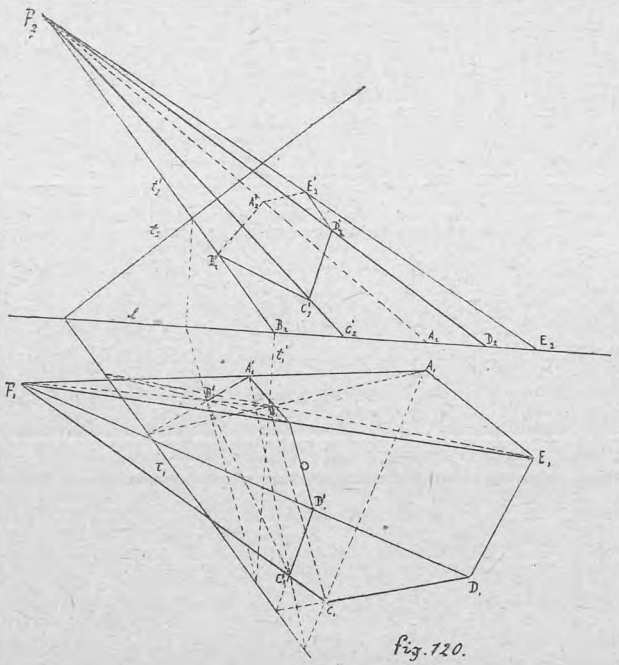


fig. 120.

minare sono figure omologiche; perciò saranno omologiche anche le loro proiezioni ortogonali su π_1. Dunque *ABCDE* (1ª immagine di sè stessa) e la 1ª immagine della sezione del piano α con la piramide sono figure omologiche nella omologia che ha per asse t_1 e per centro la 1ª immagine F_1 di F.

Naturalmente dapprima bisogna determinare una coppia di elementi omologhi. Perciò si costruisca per esempio la 1ª immagine B_1' della intersezione B' della FB con α e ciò mediante il piano ausiliario $(t'_1t'_2)$.

Trovata la 1ª immagine $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$, è facilmente determinata la 2ª immagine $A_2'B_2'C_2'D_2'E_2'$, giacchè A',B',C',D',E', sono punti degli spigoli laterali della piramide.

§ 50. — **Intersezione di due poliedri.** — La linea intersezione di due poliedri, è costituita da uno o da più poligoni (in generale gobbi); è vertice di un tale poligono ogni punto sezione di uno spigolo dell'un poliedro con una faccia dell'altro, compreso nell'interno di tale spigolo e di tale faccia; e ne è lato ogni segmento della retta comune ai piani di due facce appartenenti rispett. ai due solidi e compreso nei limiti delle facce suddette.

Se i poliedri sono convessi, il numero dei poligoni chiusi che costituiscono la linea di intersezione può essere uno o due.

Nel primo caso si dice che l'intersezione avviene per *sfaldamento*, nel secondo per *penetrazione*.

Per costruire graficamente la linea di intersezione di due poliedri dati che si intersecano, si può partire o dagli spigoli, o dalle facce di uno qualsiasi dei solidi dati.

Partendo dagli spigoli di uno dei poliedri, si determinano i punti d'incontro di tali spigoli (limitati ai vertici) coi singoli piani delle facce dell'altro, si considerano fra questi punti solo quelli compresi nell'interno delle facce del secondo poliedro e si uniscono fra loro in tutti i modi possibili due di tali punti che giacciano tanto in una faccia dell'un solido quanto in una faccia dell'altro. Si ha con ciò la linea di intersezione.

Partendo invece dalle facce del primo poliedro, si determinano le intersezioni dei piani di esse coi piani delle facce del secondo solido, e si considerano i segmenti di tali rette compresi nei limiti delle facce, ottenendo con ciò i lati della linea d'intersezione dei due poliedri.

Se i due solidi di cui si vuole l'intersezione sono due piramidi (che per semplicità supporremo convesse) si procede così: Per ciascun spigolo s di ognuna delle piramidi date e per la congiungente i vertici dei due solidi si conduce un piano. Se questo penetra nell'interno della piramide a cui non appartiene s, e sega il solido secondo un triangolo nel cui interno penetra la s, allora quello dei due punti di sezione della retta s col triangolo che è interno allo spigolo limitato s (se esiste) è un vertice della linea sezione cercata.

In ogni altro caso sullo spigolo s non si hanno vertici della linea sezione. Considerando tutti gli spigoli laterali s dei due solidi, si hanno i vertici della sezione situati su di essi, e infine considerando la intersezione del piano della base di ciascuno

dei solidi con l'altro solido, si hanno i vertici della linea di sezione situati sulle basi dei due solidi.

E la intersezione dei due solidi resta così determinata.

Le stesse considerazioni si ripetono (salvo lievi modificazioni di per sè stesse evidenti) nel caso che i due solidi di cui si cerca la sezione sieno una piramide e un prisma, o due prismi.

Nel risolvere graficamente il problema della intersezione di due solidi, bisogna considerare che un lato della linea d'intersezione è visibile se è comune a due facce visibili, altrimenti è invisibile.

Come applicazione si risolverà il seguente

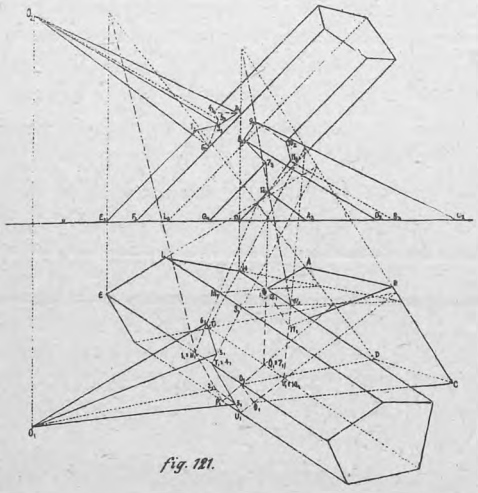


fig. 121.

PROBLEMA. — *Determinare l'intersezione di una piramide* O(ABCD) *con un prisma* EFGHL (fig. 121).

Poniamo per semplicità nel 1° piano di proiezione π_1 le basi del prisma e della piramide.

Determiniamo dapprima le intersezioni degli spigoli della piramide con le facce del prisma. A tal uopo si costruisce prima la intersezione *MNPQR* di una faccia, p. es. *OAD*, della piramide, col prisma, quindi si cercano le intersezioni degli spigoli *OA*, *OD* con *MNPQR*. Perciò si determinano anzitutto le tracce di *OAD*, si costruisce quindi l'immagine di $M_1N_1P_1Q_1R_1$ in modo analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, notando soltanto che in questo caso la omologia che ivi compariva è affine.

Fatto ciò si hanno immediatamente le intersezioni delle *OA*, *OD* col prisma. (Nel nostro caso su *OA* sono 6 e 12, su *OD* sono 2 e 8).

Analogamente si hanno le intersezioni di *OB*, *OC*, trovando prima *STUVW* intersezione di *OBC* col prima. (Nel nostro caso per *OB* sono 5 e 11, per *OC* sono 3 e 9). Si vede che i punti

M,*N*,*P*,*Q*,*R* ed *S*,*T*,*U*,*V*,*W* sono le intersezioni degli spigoli del prisma con le facce *OAD*, *OBC* della piramide; quindi non ci resta altro che trovare le intersezioni degli stessi spigoli con le altre due facce *OAB*, *OCD* della piramide, e ciò si fa come si fece per le altre sue facce, oppure si prendono detti spigoli e facce uno ad uno e se ne determinano le intersezioni. Nel nostro caso abbiamo ottenuto un'intersezione per penetrazione; tutti gli spigoli della piramide attraversano il prisma, e l'intersezione si compone dei due poligoni gobbi 1-6 e 7-12.

Nel procedimento tenuto non occorrerà sempre eseguire tutte le costruzioni, come è facile comprendere.

Trattandosi di poliedri convessi, al più due sole intersezioni dello spigolo d'un poliedro coi piani dell'altro cadranno entro le rispettive facce, e sono queste intersezioni soltanto che occorre determinare. Esse possono mancare (in corrispondenza a rette esterne al poliedro), ma se ve n'è una, ve n'è generalmente un'altra, sempre che la retta con cui seghiamo la superficie del secondo poliedro non si appoggi ad uno spigolo di essa.

OSSERVAZIONE. — Nella nostra figura, per rendere il disegno più chiaro, si sono omesse le costruzioni le quali del resto non sono che un'applicazione del problema del § precedente e del problema 5° del § 30.

Nella determinazione grafica del poligono gobbo, intersezione dei due poliedri, è utile partire da un suo vertice (intersezione di uno spigolo con una faccia dell'altro poliedro) e costruire successivamente un lato del poligono per quel vertice, l'ulteriore vertice su questo lato ecc.

Si fisserà specialmente l'attenzione al passaggio da una faccia all'altra del poliedro.

§ 51. — **Ombre dei poliedri.** — La rappresentazione dei poliedri nel metodo delle proiezioni ortogonali ci offre, mediante le due immagini sui piani di proiezione, un aiuto efficace per costruire una rappresentazione visiva adeguata dei solidi stessi. Tuttavia le esigenze della pratica sono in quest'ultimo riguardo assai maggiori; la rappresentazione dei soli elementi dei corpi geometrici spesso non soddisfa e si richiede anche la rappresentazione di alcune linee della superficie che facciano risaltare in modo chiaro gli *effetti di luce*. Lo studio di tali linee costituisce la *Teoria delle Ombre*. Noi ci limiteremo a pochi cenni e ad alcune applicazioni più comuni, considerando esclusivamente poliedri convessi.

Nel nostro studio ammetteremo sempre che la luce parta da un solo punto, *centro luminoso*, e che si propaghi in un mezzo omogeneo e quindi in linea retta. Allora se consideriamo un poliedro, possiamo osservare che gli infiniti raggi uscenti dal centro luminoso si dividono in tre categorie:

1) raggi esterni al poliedro;

2) raggi secanti il poliedro in due punti;

3) raggi tangenti al poliedro, cioè aventi colla superficie di esso un punto comune.

Questi ultimi raggi costituiscono l'*angolo solido circoscritto* al poliedro, dal centro luminoso (§ 42). I raggi della 1ª categoria sono esterni, e quelli della 2ª interni a questo angolo solido. I raggi della 2ª categoria costituiscono un fascio di luce che investe il poliedro e ne illumina quella parte della superficie che è rivolta verso il centro luminoso ed è limitata dalla linea di contorno del poliedro rispetto al centro luminoso (cfr. § 42). Ora, chiamando L il centro luminoso ed A un punto della regione illuminata anzidetta, non appartenente alla linea di contorno, la retta LA incontra il poliedro in un secondo punto B; questo punto, se il poliedro è *opaco*, cioè tale da non lasciar passare i raggi luminosi, rimane in ombra. Abbiamo dunque sulla superficie del poliedro due regioni, l'una costituita dai punti in luce (punti visibili da L), l'altra costituita dai punti in ombra (punti invisibili da L); una faccia qualunque del poliedro appartiene *tutta* all'una o all'altra delle due regioni, eccettuata al più una parte del suo contorno (cfr. § 42). Perciò, nella Teoria delle Ombre, la linea di contorno rispetto al centro luminoso dicesi anche *linea separatrice* dell'ombra propria del corpo; la superficie dell'angolo solido circoscritto al poliedro dal centro luminoso prende qui il nome di *involvente*.

Se si considera un piano α, tutto esterno al poliedro, e tale che ogni raggio interno all'involvente lo incontri in un punto giacente da banda opposta di L rispetto alle due intersezioni col poliedro, la traccia dell'involvente determina su α un poligono convesso, i cui punti interni (tracce delle rette per L interne all'involvente) rimangono in ombra, mentre tutti gli altri punti di α sono illuminati. Questo poligono chiamasi *ombra portata* del poliedro sopra il piano α, in opposizione alla regione di superficie ombreggiata del poliedro, la quale dicesi *ombra propria* del poliedro.

Osservazione. -- Si può anche considerare l'ombra portata di un poliedro sopra una superficie qualunque; se tale superficie è poliedrica, l'ombra portata su di essa è costituita da tante porzioni delle ombre portate sopra ciascun piano della superficie.

Nei problemi relativi alle ombre entra in considerazione principalmente la linea separatrice dell'ombra. Infatti, determinata questa linea, si avranno distinte le due regioni, illuminata ed ombreggiata, del corpo, e il problema di segnare l'ombra portata sopra una superficie piana (o poliedrica) si ridurrà a quello di costruire sopra questa superficie la prospettiva, rispetto al centro L, della linea separatrice (§ 40).

Riferiamoci al caso, più comunemente considerato, in cui L sia improprio, e quindi si abbiano raggi luminosi paralleli. L'involvente del poliedro sarà una superficie prismatica (convessa) e tutte le considerazioni fatte precedentemente per L proprio sussisteranno ancora (cfr. § 42 Oss. 1ª). Possiamo anche fissare che il poliedro sia tutto compreso nella 1ª delle quattro regioni in cui dividono lo spazio i piani π_1 e π_2 [1] e che abbia una faccia (*base*) sul 1° piano di proiezione π_1.

Ciò posto, consideriamo una faccia arbitraria f del poliedro, non parallela a π_1 e sia t la sua 1ª traccia. La base del poliedro cadrà tutta da una banda di essa. Si prenda ora sulla f un punto qualunque, ad es. un vertice V, e si determini per V la parallela m al raggio r. La 1ª traccia T'_m di m potrà essere o dalla banda di t ove trovasi la base del poliedro, o dalla banda opposta, o infine sulla t medesima.

Considerando i due diedri supplementari in cui rimane diviso lo spazio dal piano π_1 e dalla banda di piano limitata dalla t, che contiene la faccia f, vediamo che:

nel 1° caso il centro luminoso trovasi nel diedro supplementare di quello che contiene il poliedro; perciò la faccia f è in luce;

nel 2° caso il centro luminoso trovasi nel diedro che contiene il poliedro medesimo; perciò la faccia f è in ombra;

nel 3° caso il centro luminoso trovasi sul piano della

---

[1] Fatta questa ipotesi, dovremo pure ammettere (se i piani π_1,π_2 non sono trasparenti) che anche il centro luminoso si trovi nella 1ª regione. Allora se $r \equiv (r_1 r_2)$ è *il raggio* (§ 41) che fissa la direzione dei raggi luminosi, le tracce T'_r, T''_r di r cadranno sempre dalla medesima banda della linea di terra.

faccia f; in questo caso si può ammettere che la faccia stessa sia in ombra riguardandola come coperta da una parte del proprio contorno (Cfr. § 42 Oss. 2ª).

Se poi si considera una faccia del poliedro parallela a π_1, i due diedri anzidetti vengono sostituiti rispettivamente dalle due regioni dello spazio di cui l'una è compresa tra il piano π_1 e il piano della faccia e contiene il poliedro, l'altra è la regione superiore al piano della faccia considerata. Allora si vede che questa faccia è sempre in luce, supposto che il raggio non sia parallelo a π_1. E tenendo conto della posizione che occupa anche qui rispetto alla base la traccia della retta condotta per un punto della faccia parallelamente al raggio, si desume la seguente regola generale:

Dato un poliedro convesso (avente una faccia sul 1° piano di proiezione), *una faccia qualunque di esso sarà in luce o in ombra secondochè la parallela condotta per un punto della faccia al raggio luminoso, ha la sua 1ª traccia dalla stessa banda della base del poliedro rispetto alla traccia del piano contenente la faccia, oppure giace da banda opposta di essa o sulla traccia medesima.*

Con questa regola, dato un poliedro, potremo stabilire quali delle sue facce sieno in luce e quali in ombra, e segnare quindi la linea separatrice dell'ombra propria del poliedro. Però conviene tenere un procedimento rapido e semplice, e a tal uopo si potranno considerare insieme tutte le facce che concorrono in uno stesso vertice e considerare la retta parallela al raggio luminoso che passa per questo vertice. Inoltre se le facce che si considerano non sono adiacenti alla base del poliedro e se la costruzione delle 1ª tracce dei loro piani presentasse qualche difficoltà (ad es. cadessero fuori del foglio), sarà vantaggioso spostare parallelamente a sè stesso il piano π_1 portandolo in una posizione π_1' tale da tagliare tutte le facce considerate. Allora basterà riferirci a quella porzione del poliedro che rimane superiormente al piano π_1' ed applicare la regola precedente.

Costruita la linea separatrice dell'ombra propria del poliedro si potrà determinare l'ombra portata sopra una superficie poliedrica, in particolare sopra i piani di proiezione, costruendo, secondo il § 41, la prospettiva parallela della linea separatrice.

Possiamo quindi risolvere i seguenti problemi:

Problema 1.° — *Determinare (se esiste) l'ombra portata di un punto sopra un poliedro.*

Sia dato il poliedro $ABCDEFG$ e il punto P (fig. 122). Il problema di determinare l'ombra portata di P sopra il poliedro si riduce a quello di costruire le intersezioni della retta $m \equiv (m_1 m_2)$ passante per P e parallela al raggio $r \equiv (r_1 r_2)$, col poliedro dato. A tal fine si conduca per m un piano ω e si determini la sezione di ω col poliedro; i punti comuni ad m e alla detta sezione saranno le intersezioni di m col poliedro. Per avere una costruzione semplice si sceglie ω perpendicolare ad es. al piano π_1; allora la sezione di ω col poliedro si ottiene immediatamente. Nella nostra figura la sezione è il poligono $MNKHL$, la cui 1ª proiezione è il segmento ML di m_1 e la cui 2ª proiezione è il poligono $M_2N_2K_2H_2L_2$, avente in comune con m_2 i punti X_2, Y_2; questi punti X_2, Y_2 sono dunque le 2ª proiezioni delle intersezioni X, Y che si vogliono determinare, e basta quindi segnare ancora su m_1 le 1ª proiezioni X_1, Y_1.

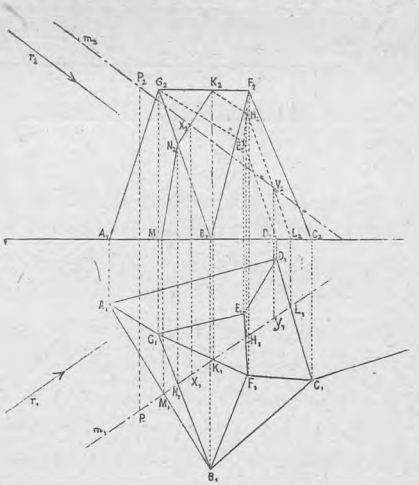


fig. 122

I punti X, Y vengono a mancare se la retta m è esterna all'involvente del poliedro, e il punto P non ha un'ombra portata sul poliedro. Quando invece X, Y esistono e sono distinti, la m è interna all'involvente del poliedro; allora anche senza aver tracciato la linea separatrice d'ombra propria del poliedro dato, si potrà riconoscere che uno dei due punti, ad es. X, cade nella regione illuminata, l'altro, Y, nella regione d'ombra propria del poliedro; e in questo caso X sarà l'ombra portata di P, purchè P cada su m da banda opposta di Y rispetto ad X. Infine X, Y coincideranno se la m è una generatrice dell'involvente, e allora il punto P non avrà un'ombra portata sopra il poliedro.

Osservazione. — Se il poliedro dato è una piramide (o un prisma) avente la base ad es. sul piano π_1 si sceglie come piano ω il piano passante per m e pel vertice della piramide (o risp. parallelo alle generatrici del prisma) (§ 30 Probl. 4° e 9°).

La sezione di ω col poliedro (ove esista) sarà allora data da due rette passanti pel vertice della piramide (o risp. da due generatrici del prisma) e aventi le loro 1ª tracce nelle intersezioni della base della piramide (o risp. del prisma) colla 1ª traccia di ω. Con ciò si ottiene una costruzione più spedita di quella generale.

PROBLEMA 2.° — *Costruire la linea separatrice d'ombra propria e l'ombra portata sui piani di proiezione di un poliedro (convesso).*

Sia dato il poliedro *FABCDEG* (fig. 123), tutto contenuto nella 1ª regione e non avente alcuna faccia sopra un piano di

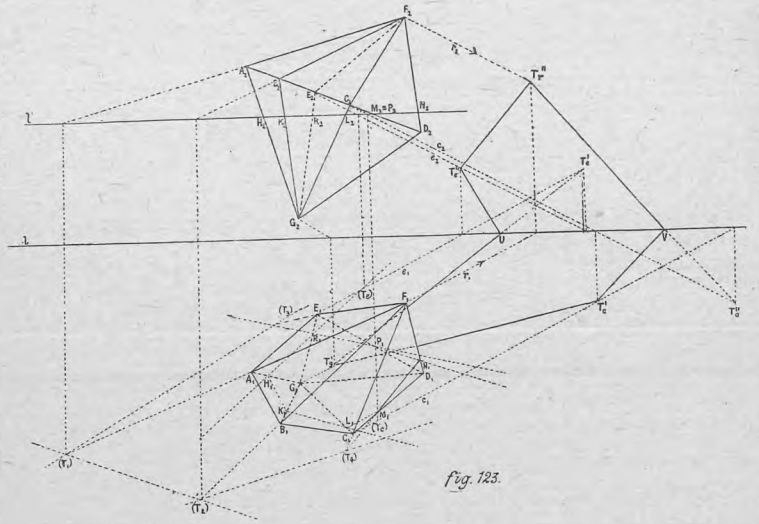


fig. 123.

proiezione. Per applicare il metodo generale suesposto dovremo considerare un piano ausiliario π_1' parallelo a π_1 che seghi il poliedro e riferirci dopo ciò soltanto a quella parte del poliedro che rimane al di sopra di π_1', e che avrà quindi come base su π_1' la nominata sezione. Ora, per fare questo nel modo più vantaggioso, converrà in primo luogo che nessuna faccia del poliedro rimanga *tutta* al di sotto di π_1' e in secondo luogo sarà opportuno di scegliere π_1' in tale posizione da incontrare il poliedro in un numero di facce possibilmente grande. Nel caso della nostra figura è vantaggioso fissare come 2ª traccia di π_1' una retta l' (parallela ad l) che seghi lo spigolo C_2D_2 in un punto interno ad esso. Quindi per determinare la linea separatrice dell'ombra propria del poliedro, occorre costruire

su π_1' la traccia del piano di ogni singola faccia del poliedro e le tracce delle rette aventi la direzione del centro luminoso e passanti per alcuni vertici del poliedro scelti opportunamente. Perciò possiamo procedere come segue.

Costruito il poligono $H_1K_1L_1M_1N_1P_1R_1$, 1ª proiezione della sezione di π_1' col poliedro, si considerino i vertici C ed E. La scelta di questi è motivata dalle ragioni seguenti: i detti punti sono al disopra di π_1', e giudicando dalla figura appariscono presumibilmente come vertici della linea separatrice, inoltre essendo i vertici di due angoloidi che non hanno facce in comune, potranno servire per un numero notevole di facce Scelti dunque C ed E, si conducano per essi le rette c, e, aventi la direzione del centro luminoso. Dopo ciò si desume dalla figura che le tracce su π_1' delle facce *GAB*,*GBC*,*GCD*,*FCD*,*FDE*, *GDE*,*GEA*, hanno come 1ª proiezioni rispettivamente le rette H_1K_1, K_1L_1, L_1M_1, M_1N_1, N_1P_1, P_1R_1, R_1H_1 Lasciando da parte *GAB* che non contiene nè C nè E, si osservino i punti (T_c) e (T_e) 1ª proiezioni delle tracce su π_1' di c e di e, e si veda ove giacciono tali punti rispetto al poligono $H_1K_1L_1M_1N_1P_1R_1$, e precisamente da quale banda delle K_1L_1, L_1M_1, M_1N_1 si trovi (T_c) e da quale banda delle N_1P_1, P_1R_1, R_1H_1 si trovi (T_e). Allora, ricorrendo alla regola generale stabilita nella discussione di questo §, si verrà a concludere che delle 6 facce contemplate, le *GBC* e *GEA* sono in luce, e le altre 4 in ombra; quindi appartengono alla linea separatrice gli spigoli *CG*,*GE*.

Ora osservando sempre la nostra figura, si vede che c'interessano a questo punto le facce *FBC*, *FAE*, di cui perciò è necessario conoscere le tracce su π_1'. Ma la 1ª proiezione della traccia di *FBC* passa per $(T_4) \equiv F_1C_1 \,.\, M_1N_1$ e pel punto (T_2), traccia di *FB*; similmente la 1ª proiezione della traccia di *FAE* passa per $(T_3) \equiv F_1E_1 \,.\, N_1P_1$ e pel punto (T_1), traccia di *FA*. Osservando (T_c) e la $(T_2)(T_4)$, e similmente (T_e) e la $(T_1)(T_3)$ si conclude che le due facce *FBC*, *FAE* sono in luce, quindi fanno parte della linea separatrice anche gli spigoli *EF*, *FC*. E siccome i quattro spigoli *CG*, *GE*, *EF*, *FC* danno una spezzata *chiusa*, si conclude che il poligono (gobbo) *CGEFC* dà *tutta* la linea separatrice dell'ombra propria del poliedro (cfr. § 42), e che sono quindi in luce anche le rimanenti due facce del poliedro, *FAB* e *GAB*.

La seconda parte del nostro problema si riduce quindi alla costruzione delle prospettive parallele della linea poligonale

separatrice $CGEFC$, sopra i due piani di proiezione π_1, π_2; costruzione che si effettua facilmente (§ 41 Probl. 2°).

Con ciò il problema proposto resta completamente risoluto.

Problema 3.° — *Costruire l'ombra portata di un poliedro sopra un piano generico.*

Nel caso generale di un poliedro convesso qualunque si costruisce anzitutto la linea separatrice d'ombra propria del poliedro secondo il problema precedente, quindi si costruiscono le prospettive parallele dei singoli vertici della linea separatrice sopra il piano dato (§ 41 Probl. 4°).

Considerando il caso più semplice di un prisma (obliquo) avente la base sul piano principale π_1 (fig. 124) e di un piano

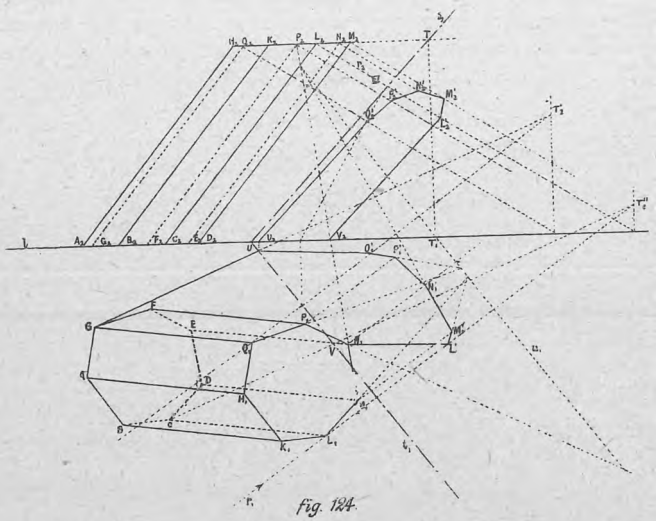


fig. 124

generico $(t_1 t_2)$ esterno al prisma, si può procedere come segue.

Dopo aver verificato che la linea separatrice dell'ombra propria è il poligono gobbo $CLMNPQGABC$, volendoci limitare a quella parte d'ombra portata su $(t_1 t_2)$ che rimane visibile, si cerchino i punti U,V in cui le ombre portate su π_1 degli spigoli GQ,CL incontrano rispettivamente la traccia t_1.

Questi, ove esistano, saranno intanto due punti dell'ombra portata sul piano $(t_1 t_2)$. Dopo ciò si costruisce la prospettiva parallela sopra $(t_1 t_2)$ della spezzata piana $LMNPQ$ trovandone le due immagini $L_1'M_1'N_1'P_1'Q_1'$ ed $L_2'M_2'N_2'P_2'Q_2'$ (§ 41 Probl. 6°) e si segnano i segmenti UQ_1', VL_1'; U_2Q_2', V_2L_2'.

Osservazione. — Se le ombre portate su π_1 degli spigoli GQ,CL non segano la t_1, converrà costruire completamente l'ombra portata su π_1 del prisma e considerarne le due intersezioni con t_1. Se però non esistessero tali intersezioni, il prisma non avrebbe un'ombra portata sulla parte $(t_1 t_2)$ compresa nella 1ª regione.

Problema 4.° — *Costruire l'ombra portata di un poliedro sopra un altro poliedro.*

Supponiamo che i due poliedri non s'intersechino; allora uno solo di essi potrà avere un'ombra portata sull'altro. Ora, perchè ciò avvenga è necessario che il primo poliedro sia interposto tra il centro luminoso e il secondo poliedro. Questa condizione si verifica ogni volta che le involventi dei due poliedri si attraversano.

Ma in tale ipotesi anche le tracce delle due involventi sopra un piano qualunque, ossia le ombre portate dei due poliedri, si attraversano necessariamente. Se allora sono date le ombre portate dei due poliedri, ad es. sopra il piano π_1, si potrà subito stabilire quale dei due poliedri abbia un'ombra portata sull'altro. E si potranno in oltre distinguere immediatamente gli spigoli della linea separatrice d'ombra propria del primo poliedro che hanno un'ombra portata sul secondo poliedro; infatti essi sono tutti quelli, le cui ombre portate cadono interamente o in parte entro l'ombra portata del secondo poliedro.

Riconosciuti questi spigoli, si condurrà per ciascuno di essi il piano parallelo al raggio luminoso e si determinerà la sezione di ognuno di questi piani con la parte illuminata del secondo poliedro.

Con questo procedimento abbiamo costruito l'ombra portata di una piramide P' sopra un poliedro P'', rappresentati nella fig. 125. Indicheremo qui brevemente la costruzione eseguita.

Anzitutto abbiamo determinato come nel Problema 2° le linee separatrici $SDABS$ di P' e $KPUTRMHK$ di P'', e costruite le ombre portate dei due poliedri su π_1. Ciò fatto, poichè SD,SB sono i soli spigoli della linea separatrice di P' le cui ombre portate DT_s' e BT_s' attraversano l'ombra portata di P'', abbiamo costruito le sezioni, con la parte illuminata di P'', dei due piani α,β passanti risp. per SD ed SB e paralleli al raggio luminoso r. La sezione di α è quella data dalla spezzata I II III IV, e la sezione di β è la spezzata V VI VII.

Come si vede dalla figura, l'ombra portata di P' sopra P'' è costituita da tre poligoni concorrenti nel vertice N di P''.

Le costruzioni indicate si riducono in sostanza all'applicazione del Problema 5° del § 41; notiamo soltanto che per trovare le intersezioni dei piani che vengono in considerazione, conviene talvolta introdurre degli elementi ausiliari (rette aventi la direzione del centro luminoso).

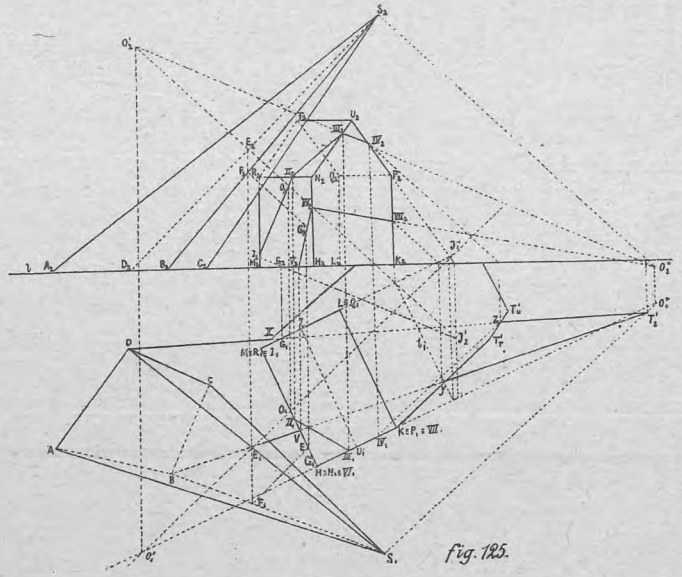


Fig. 125.

Osservazione. — Determinata la linea separatrice d'ombra propria e costruito il contorno dell'ombra portata di un poliedro, per ricavare gli effetti di luce che si riscontrano sul poliedro, dovremmo studiare ancora alcuni elementi della così detta *Teoria del chiaro-scuro*. I principî di questa teoria si riferiscono alla determinazione delle diverse intensità con cui i corpi appariscono illuminati ed ombreggiati nelle singole parti della loro superficie, e conducono a stabilire le regole secondo cui si debbono dare le tinte nel disegno allo scopo di ottenere una immagine dell'oggetto, la quale rispecchi in modo efficace i fenomeni luminosi che si presentano all'osservatore.

Noi non esporremo qui neppure i primi elementi di questa teoria che interessa piuttosto l'arte della pittura.

Basti notare che la diversa intensità con cui appariscono

illuminate ed ombreggiate le varie parti d'un oggetto, dipende da un doppio ordine di cause: in primo luogo dalla inclinazione dei raggi luminosi sulla superficie dell'oggetto; in secondo luogo dalla materia di cui l'oggetto è costituito, dalla politezza della sua superficie ecc.

Nel caso di un poliedro, si può valutare la quantità di luce ricevuta da una faccia piana, i raggi luminosi essendo paralleli; infatti tale *quantità di luce è proporzionale al seno dell'angolo che la faccia stessa fa coi raggi luminosi.*

Questa regola ci permette di determinare approssimativamente l'intensità di luce che presentano le facce illuminate d'un poliedro convesso, e stabilire quindi le tinte che conviene dare nel disegno, alle loro immagini.

CAPITOLO VIII.

Proiezioni assonometriche.

§ 52. — **Assonometria ortogonale. Triangolo fondamentale.** — Data una figura mediante le sue proiezioni ortogonali, il problema di costruirne la prospettiva parallela si può risolvere come abbiamo indicato nel § 41. Il medesimo problema si può anche risolvere con un altro metodo, che conduce alla così detta *rappresentazione assonometrica (o assonometria)*, impiegata con vantaggio nella Cristallografia e nel disegno delle macchine.

Dei due casi che l'assonometria può presentare, secondochè la prospettiva parallela è ortogonale od obliqua al quadro π, tratteremo qui il primo, relativo all'*assonometria ortogonale.* Dell' assonometria obliqua daremo poi un rapido cenno.

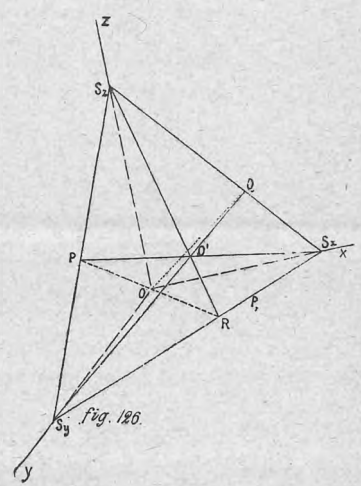


fig. 126.

La figura data F sia riferita a *tre* piani due a due ortogonali ($\pi_1 \equiv XOY$, $\pi_2 \equiv XOZ$, $\pi_3 \equiv YOZ$) costituenti dunque un triedro trirettangolo di vertice (*origine*) O. Questi piani possono essere riguardati come i *piani principali* di un *sistema di* **Monge** (con tre piani principali), e dànno anche luogo ad un *sistema Cartesiano*, avente come *assi* gli spigoli OX, OY, OZ del triedro. Il quadro π si assume sempre in modo che tagli gli

assi OX, OY, OZ risp. in tre punti S_x, S_y, S_z, giacenti ciascuno dalla banda delle coordinate positive. I punti S_x, S_y, S_z si chiamano le *tracce assonometriche* degli assi. Essi sono i vertici di un triangolo del quadro, che noi chiameremo *triangolo fondamentale* e che dicesi anche *triangolo delle tracce del quadro* (fig. 126).

La proiezione (ortogonale) F' della data figura F sul quadro si dirà la sua *proiezione assonometrica*. Accanto ad essa si dovranno considerare le proiezioni ortogonali di F sopra i piani principali π_1, π_2, π_3, le quali si denotano con F_1, F_2, F_3, rispettivamente. Tali proiezioni ortogonali non possono essere assunte tutte ad arbitrio. Per individuare F bastano infatti due di esse, la terza restando quindi determinata. Riferendoci p. e. al caso di un punto P (fig. 127), le P_1, P_2, P_3, debbono soddisfare alla condizione di giacere a due a due in un piano ortogonale ai due piani principali ai quali esse appartengono.

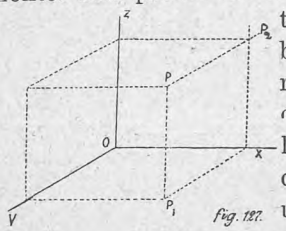


fig. 127.

Passiamo ora a studiare le proprietà di cui gode il triangolo fondamentale e le relazioni che sussistono fra esso e il triedro dei piani principali.

Anzitutto si ha il

Teorema 1.° — *Il triangolo fondamentale è sempre acutangolo*; *le sue altezze sono le proiezioni assonometriche degli assi, e il punto delle altezze (interno al triangolo fondamentale) è la proiezione assonometrica dell' origine.*

La prima proprietà risulta dal fatto che ciascuno degli angoli del triangolo $S_x\,S_y\,S_z$, sezione di un diedro retto, ha i suoi lati da una medesima parte del piano condotto pel vertice di esso normalmente allo spigolo del diedro.

Si vede poi facilmente che le proiezioni assonometriche degli assi OX, OY, OZ, risultano risp. perpendicolari ai lati S_yS_z, S_xS_z, S_xS_y del triangolo fondamentale: onde risulta stabilito il teorema.

Osservazione. — È importante notare che viceversa: *Ogni triangolo acutangolo*, $S_x\,S_y\,S_z$, *dato sul quadro si può riguardare come sezione di un determinato triedro trirettangolo il cui vertice* O *cade da una banda del quadro, e perciò come triangolo fondamentale di un sistema assonometrico.*

Infatti il punto O da cui debbono vedersi i segmenti $S_x\,S_y$, $S_x\,S_z$, $S_y\,S_z$, sotto angolo retto, è comune alle tre sfere aventi come diametri i citati segmenti, e resta così determinato, data la banda in cui esso cade rispetto al quadro.

È poi notevole che se al triangolo dato $S_x\,S_y\,S_z$ se ne sostituisce un altro omotetico, prendendo come centro d'omotetia il punto delle altezze, gli assi subiscono una traslazione normale al quadro, la quale lascia quindi invariate le proiezioni assonometriche dei punti dello spazio e non muta gli elementi metrici del sistema, cioè le inclinazioni degli assi sul quadro, e gli angoli che formano a due a due le loro proiezioni assonometriche.

Teorema 2.° — *Le inclinazioni degli assi sul quadro sono angoli acuti, e la somma di due qualunque di esse è ancora un angolo acuto.*

Indicando risp. con α, β, γ le inclinazioni degli assi OX, OY, OZ sul quadro π (ossia gli angoli che gli assi formano con le rispettive proiezioni assonometriche), e considerando p. e. il triedro $O(O'\,S_x\,S_y)$, si ha, per un teorema di Geometria elementare:

$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) > 90°,$$

onde

$$\alpha + \beta < 90°.$$

Analogamente si ottengono le relazioni:

$$\alpha + \gamma < 90°, \qquad \beta + \gamma < 90°.$$

Teorema 3.° — *Le proiezioni assonometriche delle parti positive degli assi formano a due a due tre angoli convessi ottusi (la cui somma è di quattro retti).*

Indichiamo, d'ora innanzi, con P, Q, R i piedi delle altezze del triangolo fondamentale relative ai lati $S_y\,S_z$, $S_x\,S_z$, $S_x\,S_y$, e con ξ, η, ζ rispettivamente gli angoli convessi $S_yO'S_z$, $S_xO'S_z$, $S_xO'S_y$, ai quali si riferisce il nostro teorema. Allora considerando p. e. il quadrangolo $S_xRO'Q$ rettangolo in R e in Q, si deduce che l'angolo ξ è maggiore di un retto, poichè l'angolo QS_xR del triangolo fondamentale è acuto (Teorema 1.°).

Analogamente si dimostra che sono ottusi gli angoli η e ζ.

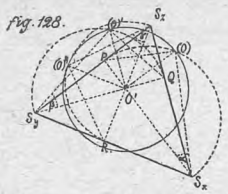
Si hanno da ciò anche le relazioni:

$$180° < \xi + \eta < 270°$$
$$180° < \xi + \zeta < 270°$$
$$180° < \eta + \zeta < 270°.$$

Teorema 4.° — *Il triangolo fondamentale è autoconiugato nell' antipolarità relativa al cerchio del quadro, avente come*

centro il punto delle altezze e raggio uguale alla distanza dell'origine dal quadro.

Per dimostrare questo teorema si osservi (fig. 126) che i triangoli POS_x, QOS_y, ROS_z sono rettangoli in O e che OO' è la perpendicolare comune calata da O sui lati opposti; allora descrivendo sul quadro il nominato cerchio e ribaltando sul quadro i detti triangoli risp. intorno alle loro tracce, si vede senz'altro (fig. 128) che ogni vertice del triangolo fondamentale è l'antipolo del lato opposto (§ 17).



Notiamo che la costruzione eseguita nella figura serve anche a trovare graficamente gli angoli α, β, γ, quando sia dato il triangolo fondamentale.

Osservazione. — Due casi potranno qui presentarsi; cioè il cerchio fondamentale per l'antipolarità potrà segare tutti e tre i lati, oppure due soli di essi.

Un esempio del 1° caso (che non ha riscontro per un triangolo autoconiugato nella polarità rispetto ad una conica) ci è fornito dal triangolo equilatero che è autoconiugato nell'antipolarità definita dal cerchio del suo piano avente il centro nel punto delle altezze e raggio uguale alla media geometrica dei due segmenti in cui il detto punto divide l'altezza del triangolo.

Il 2° caso si presenta tutte le volte che un vertice del triangolo autoconiugato è interno al cerchio fondamentale.

§ 53. — **Rapporti d'accorciamento. Scale assonometriche.** — Si chiamano *rapporti d'accorciamento o di riduzione,* i coseni degli angoli α, β, γ che gli assi formano con le loro proiezioni assonometriche; questi rapporti si indicano rispettivamente con λ, μ, ν. Essi sono sempre positivi (§ prec. Teorema 1°) e soddisfano alla relazione.

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2 \tag{1}$$

che si deduce subito dalla

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma = 1. \tag{2}$$

Da ciò si vede intanto che i rapporti d'accorciamento non

sono fra loro indipendenti; e ricordando il Teorema 2° del § prec. si hanno anche le relazioni

$$\lambda^2 < \mu^2 + \nu^2, \quad \mu^2 < \lambda^2 + \nu^2, \quad \nu^2 < \lambda^2 + \mu^2. \tag{4}$$

Se p, q, r sono tre numeri proporzionali a λ, μ, ν, essi dovranno soddisfare a relazioni analoghe alle (3), e si avrà

$$\lambda : p = \mu : q = \nu : r,$$

onde per la (1) si ricava

$$\lambda = p\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \mu = q\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \tag{4}$$

$$\upsilon = r\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^3}},$$

dove tutti i radicali vanno presi col segno positivo.

Indichiamo ora con l, m, n risp. le proiezioni assonometriche di tre segmenti portati risp. sopra gli assi OX, OY, OZ e tutti uguali all'unità di misura u. Avremo allora

$$\lambda = \frac{l}{u}, \quad \mu = \frac{m}{u}, \quad \nu = \frac{n}{u},$$

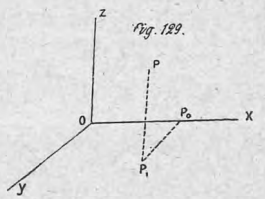
da cui per le (3) si deduce

$$l^2 < m^2 + n^2, \quad m^2 < l^2 + n^2, \quad n^2 < l^2 + m^2, \tag{5}$$

ed inoltre per la (1)

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2u^2. \tag{6}$$

I segmenti l, m, n si potranno sempre costruire graficamente quando sia dato il triangolo fondamentale $S_x S_y S_z$ e assegnata l'unità di misura u. Basterà infatti costruire le inclinazioni α, β, γ degli assi sopra il quadro, come nella fig. 128 (Cfr. la dimostrazione del Teorema 4° del prec. §), quindi portare u sopra un lato di ciascuno di questi tre angoli e farne la proiezione ortogonale sopra l'altro lato.



Dopo ciò, si potranno costruire sopra le proiezioni assonometriche $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ degli assi i punti che sono le proiezioni

assonometriche di quelli che si ottengono sugli assi OX, OY, OZ portandovi successivamente l'unità u a partire dall'origine O. Si avranno così le tre *scale assonometriche delle coordinate*, scale che debbono sempre accompagnare il disegno (fig. 130).

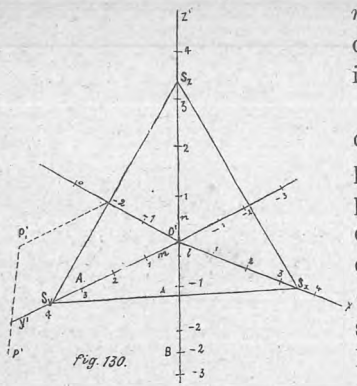


Fig. 130.

Le scale assonometriche delle coordinate servono a costruire la proiezione assonometrica di ogni punto P di cui si conoscano le coordinate x, y, z. Per vedere come si possa eseguire questa costruzione, osserviamo che la spezzata OP_0P_1P che si ottiene calando da P la perpendicolare PP_1 a π_1 e da P_1 la perpendicolare P_1P_0 ad OX (fig. 129), ha i tre lati OP_0, P_0P_1, P_1P risp. paralleli agli assi OX, OY, OZ e però le proiezioni assonometriche di questi segmenti saranno risp. parallele alle proiezioni assonometriche degli assi; inoltre siccome segmenti uguali e paralleli hanno proiezioni (ortogonali od oblique) uguali, ne viene che se si conoscono le lunghezze dei singoli lati della spezzata OP_0P_1P (cioè le coordinate di P), si potranno determinare anche le lunghezze delle loro proiezioni assonometriche ricorrendo alle scale assonometriche delle coordinate. Se dunque le coordinate di un punto P sono ad es. $x = -2$, $y = 3$, $z = -2{,}5$, per avere la proiezione assonometrica P' di P si procederà nel modo seguente (fig. 130). Si consideri su $O'X'$ il segmento $\overline{O'P'_0} \equiv -2l$, proiezione assonometrica del lato OP_0 della nominata spezzata, quindi a partire da P'_0 si tiri il segmento $P'_0P'_1$ equipollente al segmento $O'A \equiv 3m$ di $O'Y'$, e a partire da P'_1 si segni il segmento P'_1P' equipollente al segmento $O'B \equiv -2{,}5n$ di $O'Z'$; $P'_0P'_1$ e P'_1P' sono risp. le proiezioni assonometriche dei rimanenti due lati P_0P_1 e P_1P della spezzata, e però P' la cercata proiezione assonometrica del punto P.

In tal guisa se si conoscono, mediante le loro coordinate cartesiane, tanti punti di una figura quanti bastano per individuarla, si potranno costruire le proiezioni assonometriche di quei punti e dopo ciò costruire sul quadro la proiezione assonometrica della figura stessa.

Osservazione. — Se le scale assonometriche delle coordinate non fossero segnate nel disegno, ma si conoscessero i rapporti d'accorciamento λ, μ, ν, si potrebbe ottenere la proiezione assonometrica della spezzata OP_0P_1P notando che si ha

$$a_1 = a\lambda \qquad b_1 = b\mu \qquad c_1 = c\nu \ ,$$

ove a,b,c sono le coordinate di P, ed a_1,b_1,c_1 le lunghezze (in valore e segno) dei segmenti $O'P'_0$, $P'_0P'_1$, P'_1P' che si vogliono costruire.

§ 54. — **I problemi fondamentali dell'assonometria.** — Abbiamo veduto quali sieno gli elementi di un sistema di proiezioni assonometriche ed abbiamo esposte alcune relazioni importanti a cui essi debbono soddisfare. Ora ci possiamo domandare quali e quanti di questi elementi occorrono e bastano per avere un sistema ben determinato di proiezioni assonometriche. A tale quesito risponde la risoluzione dei problemi fondamentali dell'assonometria che esponiamo nel presente §.

Abbiamo già osservato che, dato un triangolo acutangolo $S_xS_yS_z$, si può assumere indifferentemente come triangolo fondamentale questo triangolo o un altro omotetico ad esso (con centro d'omotetia nel punto delle altezze) e con ciò resteranno individuati in modo unico e determinato tutti gli elementi del sistema di proiezioni assonometriche (§ 52). Per dimostrare dunque che alcuni elementi dati bastano a determinare il sistema occorrerà provare soltanto che con essi il triangolo fondamentale resta completamente definito all'infuori della nominata omotetia.

Ciò premesso, passiamo ad esaminare i singoli problemi:

Problema 1.° — *Dati due degli angoli* ξ, η, ζ, *costruire gli angoli* α, β, γ.

Osserviamo anzitutto che i due angoli dati, p. e. ξ ed η, debbono essere ottusi e dare una somma minore di tre retti; inoltre l'angolo ζ resta da essi determinato (§ 52 Teorema 3°). Allora si fissi sul quadro (foglio del disegno) il punto O' e intorno ad O' si costruiscano i tre angoli $\xi \equiv Y'O'Z'$, $\eta \equiv X'O'Z'$, $\zeta \equiv X'O'Y'$ (fig. 131); quindi, scelto sul raggio $O'X'$ (che è la banda positiva di $O'X'$) un punto S_x (proprio e diverso da O'), si abbassino da esso le perpendicolari S_xS_y ed S_xS_z risp. alle rette $O'Z'$ ed

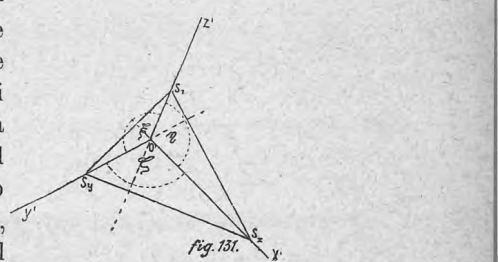


Fig. 131.

$O'Y'$; il triangolo $S_xS_yS_z$ avrà il punto delle altezze in O' e soddisferà evidentemente alle condizioni volute dal Teorema 1° del § 52. Perciò $S_xS_yS_z$ si può assumere come triangolo fondamentale, e così anche ogni altro triangolo costruito in modo analogo, giacchè due siffatti triangoli si corrispondono sempre in una omotetia di centro O', punto delle loro altezze.

Resta così provato che, dati due degli angoli ξ, η, ζ (ossia assegnate sul quadro π le proiezioni assonometriche degli assi secondo le condizioni volute dal Teorema 3° del § 52), tutti gli altri elementi saranno ben determinati. Per la effettiva costruzione grafica degli angoli α, β, γ si ricorre, dopo aver tracciato un triangolo fondamentale, alla solita costruzione della fig. 128.

Problema 2. — *Dati due degli angoli* α, β, γ, *costruire gli angoli* ξ, η, ζ.

Siano dati p. e. gli angoli α, β; essi debbono essere tali che sia $\alpha+\beta<90°$ (§ 52 Teorema 2°). Allora l'angolo γ risulta determinato stante la relazione (1) del prec. §.

Ora per costruire un triangolo fondamentale si fissi anzitutto sul quadro π il punto O' e la $O'X'$, proiezione assonometrica dell'asse OX; inoltre si segni arbitrariamente sulla parte positiva di $O'X'$ il punto S_x, proprio e diverso da O' (fig. 132). Dopo ciò la distanza OO' dell'origine dal quadro riesce determinata, essendo essa uguale al cateto $O'(O)$ opposto all'angolo α nel triangolo rettangolo che ha l'altro cateto uguale ad $O'S_x$ e l'angolo acuto adiacente a questo cateto uguale ad α. Costruito dunque $O'(O)$, si descriva con centro in O' e raggio $O'(O)$ un cerchio; il triangolo fondamentale che si vuole costruire sarà autoconiugato nell'antipolarità relativa a questo cerchio (§ 52 Teorema 4°). Essendo S_x uno dei vertici del triangolo, l'antipolare s_x di S_x sarà la retta del lato opposto ad S_x.

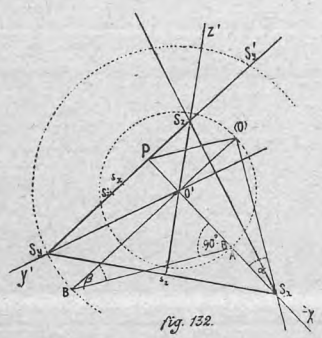


fig. 132.

Per determinare ora il vertice S_y si costruisca anzitutto il triangolo $A\,O'B$ rettangolo in O' e avente il cateto AO' uguale ad OO' e l'angolo in A uguale al complementare di β; allora tutte le rette per O inclinate sul quadro dell'angolo β avranno le loro tracce assonometriche sul cerchio di centro O' e di

raggio $O'B$ (§ 8); quindi anche il vertice S_y, traccia assonometrica dell'asse OY, sarà su questo cerchio. Ora si osservi che essendo $\alpha+\beta<90°$, sarà $\beta<90°-\alpha\equiv S_xP(O)$, e quindi $O'B>O'P$. Ne viene che il cerchio d'inclinazione β incontra la s_x in due punti reali diversi da P. Ciascuno di questi due punti S_y, S_y' può essere assunto arbitrariamente come traccia assonometrica dell'asse OY, ma tale indeterminazione viene tolta se si fissa la posizione di S_y rispetto alla $O'X'$.

Fissiamo il punto S_y e costruiamone l'antipolare s_y che è la perpendicolare ad $O'S_y$ condotta da S_x; si ha allora $S_z\equiv s_xs_y$. Notiamo che se si fissa invece S_y, si ottiene in luogo di S_z il punto S_z' simmetrico di S_z rispetto alla $O'X'$, e i due triangoli $S_xS_yS_z$ ed $S_xS'_yS'_z$ sono inversamente congruenti (cioè corrispondenti nella simmetria ortogonale che ha per asse la $O'X'$).

Il triangolo $S_xS_yS_z$ può essere assunto come fondamentale, ed è facile vedere che variando la posizione di S_z si otterrebbero sempre, col procedimento suesposto, triangoli ometetici ad $S_xS_yS_z$, essendo O' centro di omotetia.

Dunque al variare di S_x rimangono fisse le proiezioni assonometriche degli assi, $O'X', O'Y', O'Z'$ e le loro inclinazioni ξ,η,ζ che risultano così determinate in modo unico.

Problema 3° — *Dati tre segmenti* l',m',n' *proporzionali ai segmenti* l,m,n, *costruire gli angoli* α,β,γ (*ed i segmenti* l, m, n).

Notiamo anzitutto che i tre segmenti l', m', n' non potranno essere assunti in modo del tutto arbitrario stante le relazioni (5) del prec. §, per le quali ciascuno dei tre segmenti l', m', n' deve essere minore dell'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti gli altri due.

Ricordando ora la relazione (6) del prec. §

$$l^2+m^2+n^2=2u^2,$$

si avrà la relazione

$$a)\qquad l'^2+m'^2+n'^2=2u'^2,$$

essendo

$$b)\qquad \frac{u'}{u}=\frac{l'}{l}=\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n}.$$

Questa ci permette di risolvere graficamente il problema proposto, nel modo seguente:

Si costruisca il triangolo ABC rettangolo in B (fig. 133) ed avente per cateti $l'\equiv AB, m'\equiv BC$; quindi s'innalzi in C la

perpendicolare ad AC e sia $CD = n'$; infine si costruisca la semicirconferenza di diametro AD ed il suo punto medio E. Dico essere $DE = u'$.

Infatti abbiamo

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 = 2\overline{DE}^2,$$

ossia

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 2\overline{DE}^2;$$

dunque per la relazione $a)$ si ha $DE \equiv u'$.

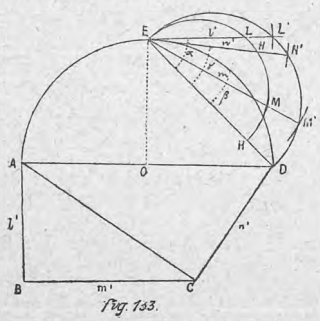


Fig. 133.

Ciò posto, si osservi che $DE \equiv u'$, per la restrizione posta dianzi riguardo ai segmenti l',m',n', è certamente maggiore di ciascuno di questi segmenti; quindi se si descrive la semicirconferenza di diametro DE, si potranno costruire tre corde di questa semicirconferenza, EL', EM', EN' risp. uguali ad l',m',n'. Gli angoli acuti che queste corde formano con la DE sono rispettivamente gli angoli α,β,γ, poichè per le precedenti relazioni $b)$ abbiamo:

$$\frac{EL'}{DE} = \frac{l}{u} = \cos\alpha, \quad \frac{EM'}{DE} = \frac{m}{u} = \cos\beta, \quad \frac{EN'}{DE} = \frac{n}{u} = \cos\gamma.$$

Infine per ottenere i segmenti l,m,n, si porti sulla DE a partire da E l'unità di misura $u \equiv EH$ e si segni la semicirconferenza di diametro EH; questa incontra le rette EL', EM', EN' in tre punti L,M,N, e sarà $EL = l$, $EM = m$, $EN = n$.

Osservazione 1.ª — La risoluzione che abbiamo dato dell'ultimo problema dimostra da sè che gli angoli α,β,γ (e per conseguenza anche ξ,η,ζ) vengono individuati in modo unico e determinato da tre segmenti l',m',n', proporzionali ad l,m,n, (proiezioni assonometriche dell'unità u portata risp. sui tre assi), o ciò che è lo stesso da tre numeri p,q,r proporzionali ai rapporti di accorciamento λ,μ,ν (cfr. prec. §).

Ma ciò si può vedere anche dalle formule che dànno gli angoli α,β,γ espressi in funzione di l,m,n, formule che risolvono il problema *numericamente*. Riferendoci alle relazioni dedotte nel prec. §, notiamo che dalla (6) si deducono immediatamente:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2l^2}{l^2+m^2+n^2}}; \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{2m^2}{l^2+m^2+n^2}};$$

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{2n^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

Tenendo conto di queste formule si deducono dalla (2) le seguenti:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{-l^2+m^2+n^2}{l^2+m^2+n^2}}; \quad \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{l^2-m^2+n^2}{l^2+m^2+n^2}};$$

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{\frac{l^2+m^2-n^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

E dividendo queste ultime per le prime:

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{-l^2+m^2+n^2}{2l^2}}; \quad tg\,\beta = \sqrt{\frac{l^2-m^2+n^2}{2m^2}};$$

$$tg\,\gamma = \sqrt{\frac{l^2+m^2-n^2}{2n^2}},$$

dove tutti i radicali vanno presi col segno positivo.

Tornerà utile osservare che anche gli angoli ξ,η,ζ si sogliono dare in funzione di l,m,n. Le relative formule sono le seguenti:

$$\cos\xi = -\frac{1}{2mn}\sqrt{(l^2-m^2+n^2)\,(l^2+m^2-n^2)}$$

$$\cos\eta = -\frac{1}{2ln}\sqrt{(l^2+m^2-n^2)\,(-l^2+m^2+n^2)}$$

$$\cos\zeta = -\frac{1}{2lm}\sqrt{(-l^2+m^2+n^2)\,(l^2-m^2+n^2)}.$$

Esse si deducono tenendo conto delle precedenti ed in base alle relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\cos\xi &= -tg\,\beta.\,tg\,\gamma\\ \cos\eta &= -tg\,\gamma.\,tg\,\alpha\\ \cos\zeta &= -tg\,\alpha.\,tg\,\beta\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Se in queste dividiamo il prodotto di due per la rimanente, nei tre modi possibili, si hanno ancora le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha &= \sqrt{-\frac{\cos\eta\cos\zeta}{\cos\xi}} \\ tg\,\beta &= \sqrt{-\frac{\cos\xi\cos\zeta}{\cos\eta}} \\ tg\,\gamma &= \sqrt{-\frac{\cos\xi\cos\eta}{\cos\zeta}} \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Questi ultimi due gruppi di formule (A) e (B) sono importanti, perchè servono a risolvere *numericamente* i due primi problemi che abbiamo risoluto in questo paragrafo con metodo grafico. Una facile discussione di tali formule confermerebbe quello che abbiamo già veduto nella risoluzione grafica dei due problemi, cioè che soddisfatte per i dati le condizioni volute dai teoremi stabiliti nel § 52, i due problemi ammettono ciascuno una soluzione determinata.

Osservazione 2.ª — Semplici considerazioni geometriche, nonchè le formule dianzi esposte, provano che se in una qualunque delle quattro terne

$$\lambda\mu\nu, \qquad lmn, \qquad \alpha\beta\gamma, \qquad \xi\eta\zeta$$

si hanno due (o tre) elementi uguali, anche i corrispondenti elementi delle tre terne sono uguali.

Se gli elementi di ciascuna terna sono uguali, la proiezione assonometrica dicesi *isometrica*. In questo caso il *triangolo fondamentale* è *equilatero*, poichè si ha $\xi = \eta = \zeta = 120°$.

Se sono uguali soltanto due elementi in ciascuna terna, la proiezione assonometrica si chiama *monodimetrica*. In questo caso il *triangolo fondamentale* è *isoscele*.

Infine se tutti gli elementi sono disuguali, la proiezione assonometrica si dice *trimetrica*, o anche *anisometrica*. In quest'ultimo caso il *triangolo fondamentale è scaleno*.

Notiamo che talvolta può esser utile adottare la proiezione isometrica o quella monodimetrica in luogo della trimetrica, specialmente quando i problemi si risolvano numericamente; ma in molti altri casi può essere più conveniente adottare la trimetrica, quando specialmente si richieda di avere un'immagine chiara della figura.

§ 55. — **Rappresentazione delle figure mediante le loro immagini. Rappresentazione del punto.** — In principio di questo Capitolo abbiamo notato che i tre piani di riferimento

$$\pi_1 \equiv XOY, \qquad \pi_2 \equiv XOZ, \qquad \pi_3 \equiv YOZ$$

possono riguardarsi indifferentemente come costituenti un sistema Cartesiano, in cui i punti dello spazio sono dati mediante le loro coordinate, o come un sistema di **Monge**, ove i punti dello spazio sono dati dalle loro proiezioni ortogonali sui piani π_1, π_2, π_3. Nel § 53 abbiamo già veduto come si costruisce la proiezione assonometrica di una figura data dalle coordinate dei punti che la individuano. Ora ci proponiamo di vedere come si possa ottenere con procedimenti puramente grafici un metodo di rappresentazione nel senso della Geometria descrittiva, cioè un metodo di determinazione delle figure in posizione, forma e grandezza mediante un disegno eseguito sul piano del quadro. Esporremo brevemente soltanto i principî essenziali di questo metodo e risolveremo in relazione ad esso alcuni problemi importanti.

Il foglio del disegno rappresenta il quadro π delle proiezioni assonometriche, cosicchè tali proiezioni si otterranno sul foglio del disegno nella loro vera forma e grandezza. Supporremo sempre di avere tracciato sul quadro il triangolo fondamentale che, come sappiamo definisce completamente il sistema dei piani π_1, π_2, π_3 (ove si fissi inoltre la posizione dell'origine O di tale sistema rispetto al quadro π), e che può essere costruito prefissando alcuni dati, come si è visto nel § prec.

Un punto generico P dà, sul quadro, una proiezione assonometrica P', che è la proiezione ortogonale del punto stesso su π; inoltre le proiezioni assonometriche P_1', P_2', P_3' delle sue proiezioni ortogonali P_1, P_2, P_3 sui tre piani π_1, π_2, π_3. Le proiezioni P_1', P_2', P_3' si chiamano risp. *prima*, *seconda* e *terza* proiezione di P.

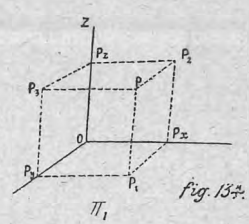


fig. 134.

Per vedere quale relazione passi tra le quattro proiezioni P', P'_1, P_2', P_3' di P, si consideri (fig. 134) il parallelepipedo OP che dicesi *parallelepipedo proiettante relativo al punto* P, e se ne

costruisca la proiezione assonometrica (fig. 135). Per fissare le idee supponiamo di conoscere come date le proiezioni P' e P_1'. Allora $P'P_1'$, proiezione assonometrica dello spigolo PP_1, sarà parallela ad $O'Z'$. Il punto P_x', proiezione assonometrica di P_x, si avrà conducendo per P_1' la parallela ad $O'Y'$ fino ad incontrare $O'X'$; dopo ciò si ottiene P_2' come intersezione delle rette parallele risp. ad $O'Z'$ ed $O'Y'$ condotte per P_x' e P'. In modo analogo si cercherà P_3' trovando prima P_y' e P_z', proiezioni assonometriche di P_y e P_z.

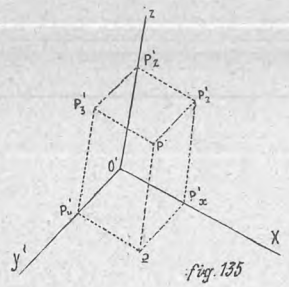


fig. 135

Questo procedimento dimostra che data la proiezione P' e una delle P_1', P_2', P_3', si costruiscono le altre due; ed è facile vedere che date due delle P_1', P_2', P_3', si costruiscono la rimanente e la P'. Soltanto bisogna notare che nel primo caso le proiezioni date stanno sopra una retta parallela ad $O'Z'$, $O'Y'$ oppure $O'X'$ (secondo che è data la P_1', P_2' o la P_3'); nel secondo caso, p. es. date le P_1', P_2', la parallela ad $O'Y'$ per P_1', e la parallela ad $O'Z'$ per P_2' debbono incontrarsi in un punto P_x' di $O'X'$; e similmente dicasi se sono date invece le P_1', P_3' o le P_2', P_3'.

In conclusione, date in modo conveniente due delle quattro proiezioni P', P_1', P_2', P_3' di P, le altre due sono determinate e si possono trovare costruendo la proiezione assonometrica del parallelepipedo proiettante relativo a P. Notiamo che ordinariamente si dànno P' e P_1', sopra una retta parallela ad $O'Z'$.

Se il punto P cade su qualcuno dei piani π, π_2, π_3, o sopra un asse, il parallelepipedo proiettante relativo a P vien sostituito da un rettangolo o risp. da un segmento di cui si costruisce facilmente la proiezione assonometrica.

Osservazione. — Che il punto P resti individuato in modo unico dalle sue proiezioni P' e P_1', si può vedere anche in altro modo. Si consideri infatti il piano ω che passa per $P'P_1'$, ed è perpendicolare al quadro π; tale piano contiene la perpendicolare p al quadro nel punto P', e la perpendicolare q al quadro nel punto P_1'. Ora si osservi che ω essendo parallelo ad OZ (poichè $P'P_1'$ è parallela ad $O'Z'$), è perpendicolare a π_1 e quindi contiene anche la retta a perpendicolare a π_1 nel punto P_1 in cui la q incontra π_1. Allora il punto $P \equiv pa$ è il punto che ha le proiezioni P', P_1'.

§ 56. — **Rappresentazione del piano.** — Chiameremo brevemente *tracce* (1ª, 2ª e 3ª) di un piano generico α e indicheremo risp. con s_1, s_2, s_3 le proiezioni assonometriche delle tracce che il piano α ha sui piani coordinati; e diremo *traccia assonometrica* del piano α e denoteremo con s la sua intersezione col quadro.

Se il piano α sega i tre assi OX, OY, OZ, le sue tracce s_1, s_2, s_3 si tagliano due a due in tre punti A_x', A_y', A_z' situati risp. su $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (fig. 136). Se il piano α è parallelo p. e. all'asse OZ, e quindi perpendicolare a π_1, le tracce s_2, s_3 risultano parallele ad $O'Z'$ (fig. 137); se esso passa p. e. per l'asse OZ, si avrà $s_2 \equiv s_3 \equiv O'Z'$ (fig. 138); infine se è parallelo p. e. a π_1, e quindi ortogonale ad OZ, le s_2, s_3 saranno risp. parallele ad $O'X'$ e ad $O'Y'$ e s'incontreranno in un punto A_z' di $O'Z'$, mentre s_1 mancherà (sarà la retta impropria del quadro π) (fig. 139).

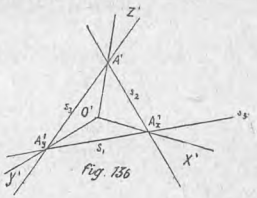


fig. 136

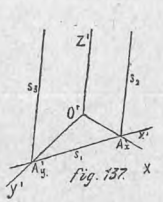


fig. 137

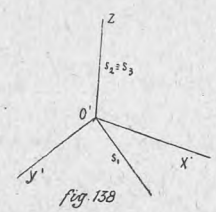


fig. 138

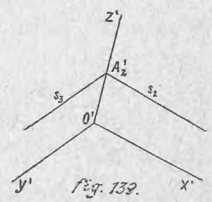


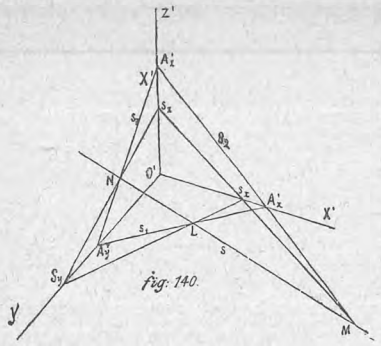
fig. 139

Consideriamo ora un piano generico α e sia $A_x' A_y' A_z'$ il triangolo che ha per lati le tracce s_1, s_2, s_3 di α (fig. 140). Sussiste il seguente

Teorema. — *Il triangolo che ha per lati le tracce di un piano generico e il triangolo fondamentale del sistema delle proiezioni assonometriche sono omologici; il centro di tale omologia è la proiezione assonometrica dell'origine degli assi, e l'asse dell'omologia è la traccia assonometrica del piano dato.*

Infatti, le congiungenti i vertici omologhi dei due triangoli $A_x' A_y' A'z$, $S_x S_y S_z$ passano per O', quindi i due triangoli sono omologici ed il centro di tale omologia è O'. L'asse dell'omologia è la retta che contiene i tre punti $L \equiv A_x' A_y' \cdot S_x S_y$, $M \equiv A_x' A_z' \cdot S_x S_z$, $N \equiv A_y' A_z' \cdot S_y S_z$; occorre provare che questa retta è la traccia assonometrica s del piano dato. Ora ciò si vede subito, perchè L, M, N sono punti comuni al piano dato e al quadro π; invero, per provare ad es. che L è tale, si osservi

che S_xS_y appartiene a π_1 e che la traccia su π_1 del piano dato ha con S_xS_y un'intersezione che ha per proiezione assonometrica L e quindi non può differire da L. Così il teorema rimane stabilito.



Osservazione. — Se il piano dato è in una posizione particolare, e quindi il triangolo $A_x'A_y'A_z'$ non esiste più (o possiede elementi impropri), i punti L, M, N saranno situati ancora sulla s, traccia assonometrica del piano dato. Ciò risulta senz'altro dalla precedente dimostrazione. Nel caso particolare che $A_x'A_y'A_z'$ risulti omotetico ad $S_xS_yS_z$, i punti L, M, N e la s riescono impropri, e il piano dato è parallelo al quadro π. (Cfr. § 52).

Il prec. Teorema permette di dedurre il seguente

Corollario. — *Date due delle quattro tracce* s, s_1, s_2, s_3, *di un piano (colle condizioni date dal prec. Teorema), le altre due restano perfettamente determinate.*

Infatti, date due delle s_1, s_2, s_3, il triangolo $A_x'A_y'A_z'$ risulta determinato e per avere la s basta costruire l'asse dell'omologia che intercede tra $A_x'A_y'A_z'$, $S_xS_yS_z$; date invece s ed una delle s_1, s_2, s_3, si ha sul quadro una omologia ben determinata avente come centro O' e asse s. e in cui si corrispondono un lato di $S_xS_yS_z$ e il lato dato di $A_x'A_y'A_z'$; le rette omologhe degli altri due lati di $S_xS_yS_z$ dànno le tracce che si cercano.

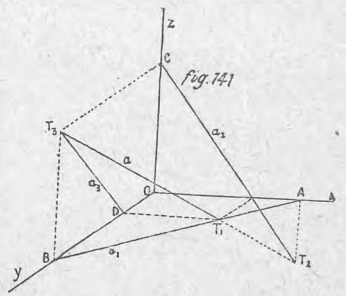
§ 57. — **Rappresentazione della retta.** — Una retta generica a, come ogni figura dello spazio, avrà sul quadro π le sue tre proiezioni a_1', a_2', a_3' e la proiezione assonometrica a'. Date arbitrariamente sul quadro π due rette come proiezioni di una retta a, questa rimane perfettamente individuata, e se ne potranno costruire le rimanenti due proiezioni.

Oltre alle nominate proiezioni si hanno da considerare della retta a le intersezioni coi piani coordinati, le quali proiezioni sul quadro dànno tre punti S_1, S_2, S_3 detti brevemente *1ª, 2ª e 3ª traccia*, e l'intersezione S col quadro π, la quale dicesi *traccia assonometrica* della retta. È ovvio che una retta

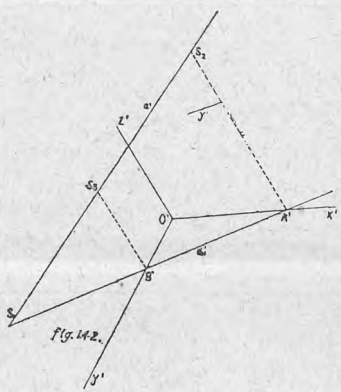
è perfettamente individuata da due delle tracce assunte ad arbitrio.

Tra le proiezioni a', a_1', a_2', a_3', e le tracce S, S_1, S_2, S_3, esiste evidentemente questo legame:

Tutte le tracce della retta sono situate sulla proiezione assonometrica della retta e ogni proiezione della retta passa per la traccia omonima. Si osservi inoltre che ciascuna delle proiezioni a_1', a_2', a_3' ha due intersezioni con le proiezioni assonometriche degli assi che individuano il piano principale contenente la rispettiva retta obiettiva (proiezione ortogonale di a), e queste intersezioni sono tali che le parallele condotte per esse alla proiezione assonometrica del terzo asse, incontrano a' secondo due dei punti S_1, S_2, S_3. Così p. e. la a_1' incontra $O'X'$ ed $O'Y'$ risp. in A', B'; e la parallela ad $O'Z'$ condotta per A' incontra a' in S_2, la parallela per B' incontra a' in S_3 (fig. 142).



Tutto ciò si vede dalla semplice ispezione della fig. 141, dove abbiamo indicato con T_1, T_2, T_3 le tracce di a e con a_1, a_2, a_3 le sue proiezioni ortogonali sui piani coordinati.



Consideriamo ancora la rappresentazione della retta, quando sia in posizione eccezionale rispetto al quadro o al triedro dei piani coordinati, limitandoci ad enunciare i fatti e lasciando le facili dimostrazioni al lettore.

Se la retta a giace sul quadro, la S è indeterminata; S_1, S_2, S_3 sono risp. le intersezioni di a coi lati del triangolo fondamentale.

Se la retta a è perpendicolare al quadro, si ha $a' \equiv S \equiv S_1 \equiv S_2 \equiv S_3$ e le a_1', a_2', a_3' passano tutte pel punto S.

Se la retta a giace nel piano π_1, si ha $a_1' \equiv a'$, $a_2' \equiv O'X'$ $a_3' \equiv O'Y'$, ed S giace sul lato S_xS_y del triangolo fondamentale.

Se la retta a è perpendicolare a π_1, sarà $a_1' \equiv S_1$; a', a_2' e a_3'

risulteranno parallele a $O'Z'$, quindi S_2 ed S_3 coincideranno nel punto improprio di a'; S sarà un punto proprio.

Se la retta a è parallela a π_1, la a_1' risulta parallela alla a', quindi S_1 coincide col punto improprio di a'.

Infine se la retta a passa per l'origine O degli assi, si ha $O' \equiv S_1 \equiv S_2 \equiv S_3$ e le a', a_1', a_2', a_3' passano tutte per O'.

In ciò che si è detto sono espresse le condizioni *necessarie* e *sufficienti* perchè la retta a sia nella posizione particolare considerata.

Per completare quanto abbiamo esposto intorno alla rappresentazione della retta, dobbiamo risolvere ancora i due problemi seguenti:

Problema 1° — *Data una retta generica* a *mediante la sua 1ª proiezione* a_1' *e la sua proiezione assonometrica* a', *costruire le tracce e le rimanenti due proiezioni della retta* (fig. 143).

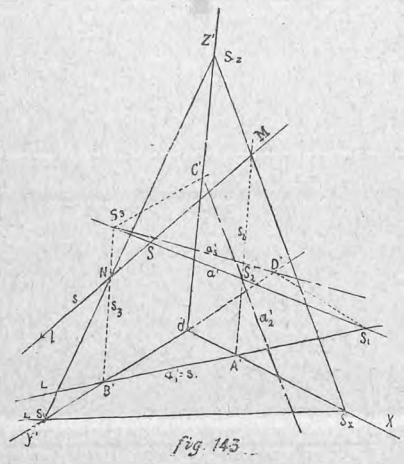


fig. 143

Ricordando il legame che esiste tra le proiezioni e le tracce della retta a, cominciamo col determinare le tracce S_1, S_2, S_3; esse si ottengono immediatamente. Infatti si ha $S_1 \equiv a'a_1'$, mentre S_2 ed S_3 sono risp. le intersezioni della a' con le parallele ad $O'Z'$ condotte risp. per $A' \equiv O'X' \cdot a_1'$ e $B' \equiv O'Y' \cdot a_1'$. Per costruire ora la a_2', si osservi che essa deve passare per S_2 e pel punto O' intersezione di $O'Z'$ con la parallela ad $O'Y'$ condotta per S_3 e pel punto D' intersezione di $O'Y'$ con la parallela ad $O'X'$ condotta per S_1.

Per determinare infine la traccia assonometrica S della retta a, si consideri il piano α che proietta a sul piano principale π_1; le tracce assonometriche S,s della retta a e del piano α si appartengono, quindi sarà $S \equiv s \cdot a'$. Ora, per trovare la s, si osservi che il piano α ha come tracce le rette $a_1' \equiv s_1$, $A'S_2 \equiv s_2$, $B'S_3 \equiv s_3$; perciò s sarà la retta che congiunge i punti $M \equiv s_2 \cdot S_xS_z$ ed $N \equiv s_3 \cdot S_yS_z$ (cfr. § prec.).

Così il problema è completamente risolto.

Osservazione. — Potrebbe darsi che la s risultasse parallela o coincidente con la a'; nel 1° caso la a sarebbe parallela al quadro, nel 2° giacerebbe nel quadro.

Problema 2°. — *Date due tracce della retta generica* a, *costruire le rimanenti due tracce e le proiezioni della retta.*

Distinguiamo due casi:

1.° caso: Sieno date due delle tracce S_1, S_2, S_3, p. e. S_2 ed S_3. — Allora si ha $a' \equiv S_2S_3$, ed $a_1' \equiv A'B'$, dove A' è l'intersezione di $O'X'$ colla parallela ad $O'Z'$ condotta per S_2 e B' l'intersezione di $O'Y'$ colla parallela ad $O'Z'$ condotta per S_3 (fig. 143). Siamo così ricondotti al prec. problema.

2.° caso: Sieno date S ed S_2. — Intanto si ha $a' \equiv SS_2$ (fig. 143). Per costruire a_1' si determini il punto A' intersezione di $O'X'$ con la parallela ad $O'Z'$ condotta per S_2; sarà A' un punto di a_1'. Per avere un secondo punto di a_1' si congiunga il punto $M \equiv A'S_2 \cdot S_xS_z$ con S e si determini il punto $L \equiv MS \cdot S_xS_y$; la a_1' passerà per L (cfr. problema prec.). Così siamo ricondotti al caso del prec. problema.

§ 58. — **Problemi grafici.** — I problemi grafici relativi agli elementi fondamentali si risolvono nella assonometria senza alcuna difficoltà, quando si tengano presenti le risoluzioni date per essi nel metodo delle proiezioni ortogonali. Ci limiteremo in proposito ad uno solo come esempio.

Problema. — *Determinare l'intersezione* M *di un piano generico* α *con una retta generica* a.

Il piano sia dato mediante le sue tracce s_1, s_2 (ed s_3), la retta mediante la sua proiezione assonometrica a', e la sua 1ª proiezione a_1' (fig. 144). Si consideri il piano μ proiettante a sul piano π_1; questo piano μ ha per 1ª traccia la $t_1 \equiv a_1'$ e per 2ª traccia la retta t_2 parallela ad $O'Z'$ condotta pel punto $C' \equiv O'X' \cdot a_1'$.

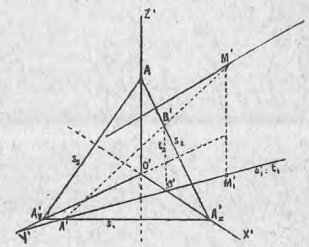
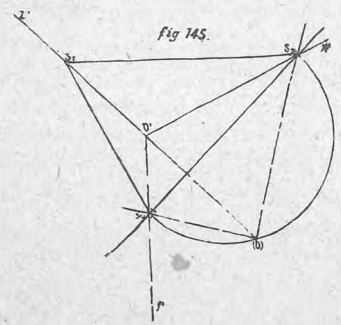


fig. 144.

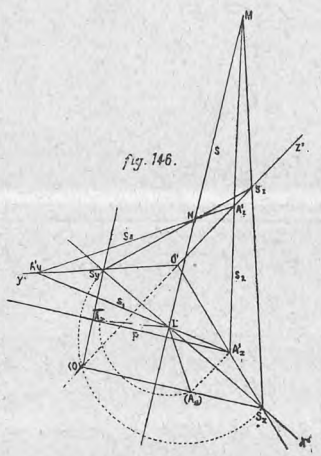
Essendo ora $A' \equiv t_1 \cdot s_1$, $B' \equiv t_2 \cdot s_2$, sarà $A'B'$ la proiezione assonometrica dell'intersezione di α con μ, e quindi $M' \equiv A'B' \cdot a'$ la proiezione assonometrica dell'intersezione M di a con α. Per avere ora la 1ª proiezione M_1' di M, basta proiettare M' sopra a_1' parallelamente ad $O'Z'$. Così M è completamente determinato.

§ 59. — **Problemi metrici. Ribaltamento.** — I problemi in cui entrano considerazioni metriche, e in cui si tratta specialmente di determinare la vera forma e grandezza di figure piane, si risolvono anche nell'assonometria mediante il *ribaltamento del piano* sopra il quadro π (cfr. §§ 11, 14 e 33). Vediamo dunque come si ottenga qui il ribaltamento sul quadro di un piano principale e di un piano generico dato.

Volendo p. e. ribaltare sul quadro il piano π_1 intorno alla sua traccia assonometrica S_xS_y, si osservi che il ribaltamento (O) dell'origine sarà situato sulla retta $O'Z'$ e sulla semicirconferenza di diametro S_xS_y, onde (O) rimane così perfettamente determinato quando sia fissato il senso della rotazione (fig. 145). Per costruire ora il ribaltamento (M) di un qualsiasi punto M di π_1, dato mediante la sua proiezione assonometrica M' (coincidente con la 1ª proiezione M_1'), basta notare che le proiezioni assonometriche dei punti di π_1 e i ribaltamenti di questi punti si corrispondono nell'affinità omologica ortogonale del quadro, avente come asse S_xS_y. Tale affinità resta completamente individuata dalla coppia O', (O).


fig. 145.

Vediamo ora come si ottenga il ribaltamento sul quadro di un piano generico, dato mediante le sue tracce s_1, s_2, s_3, intorno alla sua traccia assonometrica s che sappiamo costruire (§ 56). Facciamo anzitutto il ribaltamento di uno dei vertici del triangolo $A_xA_yA_z$ secondo cui il piano dato sega il triedro dei piani principali, p. e. di A_x (fig. 146). Si osservi perciò che il ribaltamento $\overline{A_x}$ sarà situato sulla perpendicolare p condotta da A_x' alla s; quindi si noti che il segmento LA_x, dove $L \equiv s \cdot s_1$, avrà per ribaltamento $L\overline{A_x}$, giacchè L rimane fermo. Ora, per

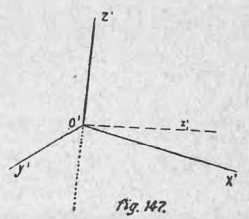

fig. 146.

avere la vera grandezza di LA_x si ribalti il piano π_1, come nel caso precedente, e costruito (A_x) omologo di A_x' in questo ribaltamento, si congiunga L con (A_x). Siccome L rimane fermo anche in questo secondo ribaltamento, sarà $L(A_x)$ la vera grandezza di LA_x. Ciò fatto, con centro in L e raggio $L(A_x)$ si descriva un cerchio; questo incontrerà certamente, come si vede subito, la retta p in due punti; tali punti saranno i ribaltamenti di A_x nei due sensi possibili. La corrispondenza che intercede in questo caso tra le proiezioni assonometriche dei punti del piano dato ed i loro ribaltamenti è l'affinità omologica ortogonale avente come asse la s. Tale affinità è perfettamente determinata dalla coppia A_x', A_x.

§ 60. — **Condizioni di perpendicolarità.** — Troviamo infine la condizione cui debbono soddisfare due rette giacenti in un piano principale, perchè sieno perpendicolari tra loro.

Tale condizione si riduce evidentemente a quella che le direzioni delle loro proiezioni assonometriche si corrispondano nell'involuzione che si ottiene sulla retta impropria del quadro π, proiettando su π l'involuzione assoluta del piano principale cui appartengono le due rette.

Per fissare le idee, si consideri il piano π_1; l'involuzione assoluta di questo piano si può individuare mediante la coppia di assi ortogonali OX, OY e un'altra coppia di rette ortogonali per O, che qui sceglieremo in modo conveniente. A tal uopo si consideri il piano ω passante per OZ e perpendicolare al quadro π; tale piano ω sega π_1 secondo una retta z ed ha come traccia assonometrica la $O'Z \equiv z_1$. Sia z' la retta per O perpendicolare a z nel piano π_1, e z_1 la proiezione assonometrica di z'. Allora l'involuzione assoluta di π_1 individuata dalle coppie OX, OY e z, z' viene proiettata sul quadro nella involuzione individuata dalle coppie $O'X'$,$O'Y'$, e $z'_1 \equiv O'Z'$,z_1, (fig. 147). Dico che $O'Z'$ e z'_1 sono ancora ortogonali; invero essendo z' perpendicolare ad OZ e a z sarà anche perpendicolare ad $\omega \equiv OZ \cdot z$. Ma allora z_1' proiezione assonometrica di z' e $z_1 \equiv O'Z'$ traccia assonometrica di ω, sono perpendicolari tra loro.


fig. 147.

Possiamo dunque enunciare il

Teorema. — *Date due rette* a, b *di un piano principale me-*

diante le loro proiezioni assonometriche a′, b′, *la condizione necessaria e sufficiente perchè* a, b *sieno ortogonali, è che le direzioni delle* a′, b′ *sieno coniugate nell'involuzione* I′, *individuata sulla retta impropria del quadro dalle proiezioni assonometriche dei due assi giacenti nel nominato piano principale e dalla coppia costituita dalla proiezione assonometrica del terzo asse e dalla perpendicolare a questa proiezione.*

Come applicazione possiamo risolvere il seguente

Problema. — *Date le proiezioni assonometriche* A′ *ed* a′ *di un punto* A *e di una retta* a *del piano* π_1, *condurre per* A *la perpendicolare ad* a.

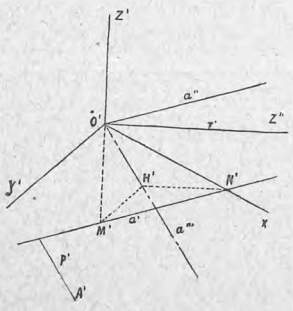


Fig. 148

Secondo il prec. Teorema, condotta la $O'Z''$ perpendicolare ad $O'Z'$, e per O' la a'' parallela ad a', bisognerebbe costruire il raggio a''' coniugato di a'' nell'involuzione I' in cui si corrispondono $O'X'$, $O'Y'$ ed $O'Z'$, $O'Z''$, quindi condurre per A' la parallela al raggio a''' (fig. 148).

Ma una costruzione più elegante si può avere nel modo seguente:

Se nel piano π_1 si considerano le rette OX, a e la z, traccia del piano ω che proietta OZ sul quadro π, si ha un triangolo di vertici O, M, N; sia H il punto delle altezze di OMN (fig. 148). Ora O, M, N hanno come proiezioni assonometriche rispettivamente:

$$O', \quad M' \equiv O'Z' \cdot a', \quad N' \equiv O'X' \cdot a';$$

e la proiezione assonometrica H' di H sarà, pel prec. Teorema, il punto d'incontro della parallela ad $O'Y'$ condotta per M' e della perpendicolare ad $O'Z'$ condotta per N'. Ma allora $O'H'$ è la proiezione assonometrica della OH perpendicolare ad a, cioè si ha $a''' \equiv O'H'$. Trovato così a''' si conduca, come s'è detto, per A' la p' parallela ad a'''.

Osservazione. — Se a passa per O la prec. costruzione cade in difetto; allora basta considerare una retta b parallela ad a e costruire la perpendicolare a b. Se poi a fosse parallela ad OX, OY, oppure alla z, traccia di ω, la direzione coniugata di quella di a' sarebbe risp. quella di $O'Y'$, $O'X'$ o di $O'Z''$.

Non tratteremo altri problemi metrici, che potranno svolgersi per esercizio (1). Dedurremo soltanto come corollario del prec. teorema, *la condizione di perpendicolarità tra piano e retta.* Questa condizione si ottiene ricordando che un piano α ed una retta r sono perpendicolari tra loro se le tracce di α e le proiezioni di r sopra due piani non paralleli e non aventi l'intersezione parallela ad α, sono reciprocamente ortogonali. Pertanto deduciamo il

Teorema. — *Dato nello spazio un piano* α *ed una retta* r *ortogonali fra loro, la traccia assonometrica di* α *e la proiezione di* r *saranno ortogonali, e la direzione di ciascuna delle tracce di* α *sarà coniugata alla direzione della proiezione omonima di* r *nella corrispondente involuzione* I′, *individuata come nel prec. Teorema. Viceversa, se tali condizioni sono soddisfatte* (e basterà in generale verificarlo per due sole tracce di α e per le due proiezioni omonime di r), *il piano* α *e la retta* r *saranno perpendicolari.*

Osservazione. — La condizione di perpendicolarità tra piano e retta si può esprimere anche sotto altra forma. Descritto il cerchio di centro O' e raggio OO' (fig. 128) si conducano per O una retta ed un piano risp. paralleli alla retta data e al piano dato. La condizione necessaria e sufficiente perchè gli elementi dati sieno perpendicolari è che le tracce assonometriche degli elementi paralleli si corrispondano nell'antipolarità relativa al nominato cerchio (cfr. § 17).

§ 61. — **Assonometria obliqua.** — Nei precedenti §§ abbiamo trattato dell'assonometria ortogonale; diamo ora un brevissimo cenno delle modificazioni inerenti al caso dell'assonometria obliqua.

Anzitutto osserviamo che dato il triangolo fondamentale $S_xS_yS_z$ (acutangolo), si può fissare in modo arbitrario il punto O', proiezione assonometrica obliqua dell'origine O degli assi, giacchè con ciò si viene ad assegnare la direzione OO' dei raggi proiettanti. Quando O' coincida col punto delle altezze del triangolo fondamentale ricadiamo nell'assonometria ortogonale.

Dato nello spazio un segmento AB, la sua proiezione assonometrica obliqua $A'B'$ può essere minore, uguale o maggiore

(1) Si possono consultare i due lavori del Pelz pubblicati nei vol. 81 (1880) e 83 (1881) dei Sitzungsberichte dell'Accad. di Vienna nei quali l'autore espone risoluzioni assai eleganti di questa classe di problemi.

di AB. Se CD è un secondo segmento appartenente alla retta AB o ad una retta parallela ad AB, sussisterà la relazione

$$AB : A'B' = CD : C'D',$$

onde sarà $CD \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} C'D'$ secondo che è $AB \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} A'B'$.

Da queste osservazioni segue che, data l'unità di misura u, sulle proiezioni assonometriche oblique $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ degli assi OX, OY, OZ restano definite ancora tre scale assonometriche delle coordinate, e che costruite queste scale, si potrà determinare la proiezione assonometrica obliqua di un punto P individuato dalle sue coordinate, *con procedimento del tutto identico a quello tenuto nel* § 53.

La costruzione delle scale assonometriche delle coordinate si può eseguire nel modo seguente: riferendoci p. e. all'asse OX, si consideri nello spazio il triangolo $OO'S_x$ e se ne faccia il ribaltamento sul quadro intorno al lato $O'S_x$, traccia assonometrica del piano del triangolo (fig. 149). A tal uopo si costruisca il triangolo $O''SO_o'$ rettangolo in O'', dove O'' è il punto delle altezze di $S_xS_yS_z$, $O''S$ è il segmento perpendicolare ad $O'S_x$ condotto da O'' ed $O''O_o' \equiv O''O_o$ è la distanza di O dal quadro (§ 53); il ribaltamento (O) $O'S_x$ del triangolo $OO'S_x$ si ottiene quindi immediatamente, essendo (O) sulla $O''S$ e distante da S del segmento SO_o'. Ciò fatto, si porti sulla $(O)S_x$ il segmento $(O)U$ uguale all'unità u, e si proietti U sopra $O'S_x$ parallelamente ad $(O)O'$ in U'; sarà allora $O'U'$ l'unità u_1 della scala assonometrica sulla $O'X'$. Così la questione è risoluta. Analogamente si proceda per graduare le $O'Y'$, $O'Z'$, determinando le rispettive unità u_2, u_3.

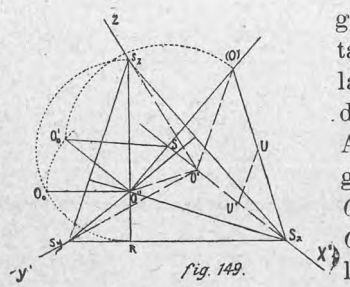


fig. 149.

Dalle osservazioni fatte innanzi possiamo ancora dedurre che i *rapporti d'accorciamento*

$$\lambda \equiv \frac{u_1}{u}, \quad \mu \equiv \frac{u_2}{u}, \quad \nu \equiv \frac{u_3}{u},$$

non sono più soggetti alla condizione di essere minori di 1, poichè, come si è notato, la proiezione obliqua di un segmento può essere uguale al segmento stesso, minore o anche maggiore di esso.

Nel § 54 abbiamo veduto che dati gli angoli ξ, η, ζ che le proiezioni assonometriche degli assi formano a due a due, il sistema di proiezioni assonometriche ortogonali resta perfettamente determinato. Nell'assonometria obliqua invece le proiezioni assonometriche $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ degli assi non sono più sufficienti a determinare il sistema, e si possono fissare ancora in modo arbitrario le scale assonometriche delle coordinate. Ciò risulta subito dal seguente

TEOREMA DI POHLKE. — *Tre segmenti di un piano uscenti da uno stesso punto* O' *ed aventi direzioni e lunghezze arbitrarie,* u_1, u_2, u_3 — *purchè non più di uno dei tre segmenti e non più di uno dei tre angoli da essi formati si riduca a zero — possono considerarsi come proiezione parallela di tre segmenti uguali, presi sopra tre assi fra loro a due a due ortogonali, la cui lunghezza* u *risulta pienamente determinata.*

Di questo importante teorema, dimostrato dal **Pohlke** nel 1853, si sono date più tardi varie dimostrazioni. Quella dello **Schwarz** [1] è la prima di carattere elementare. Ma noi non c'indugeremo qui a riportarla rimandando lo studioso al *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* di **Ch. Wiener** (pag. 448) [2].

Termineremo questo cenno notando che quanto abbiamo detto nei §§ 55-58 riguardo alla rappresentazione degli enti fondamentali ed ai problemi grafici che ad essi si riferiscono, può ripetersi pel caso dell'assonometria obliqua con qualche ovvia modificazione. Quanto ai problemi metrici, si ricorre pur qui egualmente al ribaltamento del piano ecc.

Come esercizio si possono risolvere nell'assonometria obliqua i problemi che abbiamo svolto nei §§ 57 e 58.

---

[1] *Journal von Crelle*, Bd. 63, Anno 1863.
[2] TEUBNER, Leipzig, 1884.

CAPITOLO IX.

Proiezioni quotate.

§ 62. — **Rappresentazione del punto.** — Riferiamoci ad un sistema di proiezioni ortogonali ove il 1° piano principale π si suppone, generalmente, orizzontale. La distanza di un punto P da π, cioè l'altezza del punto (presa positivamente o negativamente secondochè il punto è nella regione dello spazio superiore o inferiore al piano) dicesi la quota del punto (cfr. § 26).

Un punto proprio può venire rappresentato mediante la sua (1ª proiezione cioè la) proiezione ortogonale sul quadro (detto anche *piano di paragone*) e la relativa quota. Si ha allora il metodo di rappresentazione detto delle *proiezioni quotate*. Secondo l'uso si denota il punto P scrivendone la quota accanto al nome della sua proiezione; ad es.: $P \equiv (P'.\ 3)$ designa il punto che ha come proiezione P' e come quota 3.

I punti di egual quota stanno in un piano parallelo al piano di paragone.

Affinchè un sistema di proiezioni quotate resti perfettamente determinato, occorre assegnare la unità di misura, in grandezza vera, oppure ridotta secondo un dato rapporto; ciò significa dare la *scala del disegno*.

§ 63. — **Rappresentazione della retta.** — Una retta propria resta individuata quando sono date le proiezioni e le quote di due dei suoi punti; se le due proiezioni coincidono, la retta è verticale (perpendicolare al quadro); se coincidono le due quote, la retta è orizzontale (parallela al quadro). Dicesi *pendenza* p d'una retta la tangente trigonometrica dell'angolo α che essa fa col quadro; dicesi *intervallo* i di essa, la distanza tra le

proiezioni di due punti della retta le cui quote differiscono di una unità. Si ha allora facilmente $p \cdot i \equiv 1$ (fig. 150).

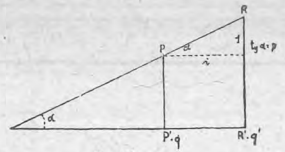


fig. 150.

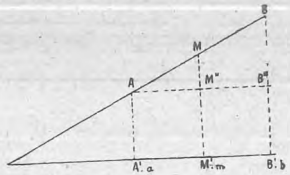


fig. 151.

Data una retta (obliqua) mediante le proiezioni e le quote di due dei suoi punti $A \equiv (A', a)$, $\equiv B\,(B', b)$, si consideri un altro punto $M \equiv (M', m)$ di essa (fig. 151); avremo facilmente

$$\frac{M'A'}{A'B'} = \frac{m - a}{b - a}.$$

Questa relazione ci permette di calcolare la quota del punto M data la sua proiezione, o di assegnare la proiezione del punto data la quota. La pendenza p della retta viene data in valore assoluto dalla relazione $p = \frac{b-a}{A'B'}$, come si desume pure facilmente dalla figura.

Sopra una data retta si considerino in particolare i punti che hanno come quote i numeri interi...-2,-1,0,1,2,3., le proiezioni succedentesi ad ugual distanza fra loro formano la così detta *scala di pendenza* della retta. Costruire la scala di pendenza di una retta dicesi *graduare la retta.*

Data una retta mediante due punti quotati, essa può essere graduata nel modo seguente. Poniamo p. e. che la retta a sia individuata dai punti $A \equiv (A'.\ \ 4{,}5)$ e $B \equiv (B'. - 6{,}7)$. Conduciamo per A la parallela ad $A'B'$ (la quale incontra la $B\ B'$) e attorno a questa retta facciamo ruotare (in un certo senso) il piano verticale, portando così il punto B in un nuovo punto B_1 avente la stessa quota di A. Possiamo determinare la proiezione B'_1 di B_1, osservando che essa si trova sulla perpendicolare c ad $A'\ B'$ in B', e dista da B' di $6{,}7 - 4{,}5$; giacchè valendoci della scala del disegno (fig. 152) si può costruire la lunghezza $(6{,}7 - 4{,}5)$ del segmento $B'B'_1$.

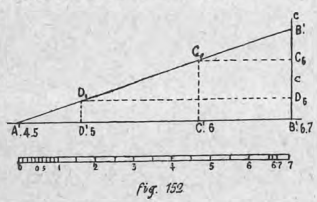


fig. 152.

Ora riportiamo su c a partire da B'_1 verso B' un segmento $0{,}7 = 6{,}7 - 6$, costruendo un nuovo

punto C_6; mandiamo per C_6 la parallela ad $A'B'$ ad incontrare $A'B_1'$, e dal punto C_1 d'intersezione caliamo la perpendicolare su $A'B'$, il cui piede sia C'. Il punto C' è l'immagine di un punto della retta obiettiva a quotato 6. Successivamente si può costruire su $A'B'$ il punto D' immagine del punto della retta quotato 5; perciò si prende su $B'B_1'$ il punto D_5 (dalla parte di B') alla distanza 1 da C_6, si manda per D_5 la parallela ad $A'B'$ fino a segare in D_1 la $A'B'_1$, e quindi per D_1 la perpendicolare ad $A'B'$ avente come piede D'.

Procedendo nello stesso modo si ottengono su $A'B'$ le immagini di tutti i punti della retta che hanno quote intere. E così la retta viene graduata.

Osservazione. — Mediante le scale di pendenza possiamo riconoscere il parallelismo di due rette giacchè appunto si ha come condizione necessaria e sufficiente per il parallelismo di due rette, che le loro proiezioni siano parallele e le scale di pendenza uguali e dirette nello stesso senso.

Così p. e. sono parallele le rette a, b rappresentate nella fig. 153 mediante le loro proiezioni graduate. L'incidenza di due rette in un punto proprio, si riconosce sul quadro osservando che le proiezioni delle due rette debbono incontrarsi in un punto avente la stessa quota tanto considerato su l'una retta, quanto su l'altra.

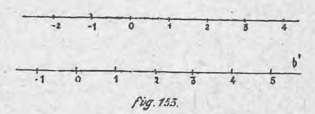


fig. 153.

§ 64. — **Rappresentazione del piano.** — Sia dato un piano α non parallelo al piano di paragone. Si considerino in α due fasci impropri di rette; quello delle rette orizzontali, dette *di livello,* e quello delle rette perpendicolari alla traccia di α che sono le rette di *massima pendenza* del piano stesso.

Un piano α, obliquo al quadro, viene rappresentato data una sua retta di massima pendenza, giacchè la sua traccia deve essere perpendicolare a questa retta. La retta di massima pendenza si determina mediante la sua proiezione graduata, che per evitare confusioni, si suole segnare nel disegno con un doppio tratto rettilineo.

Un piano obliquo si può dunque rappresentare mediante infinite scale di pendenza, e rette graduate tutte uguali e parallele fra loro; ciascuna di queste si dice una scala di pendenza del piano. Le rette di livello del piano hanno come

proiezioni le rette perpendicolari alle scale di pendenza; in particolare la traccia t del piano è la perpendicolare alla scala di pendenza contenente il punto di quota o (fig. 154).

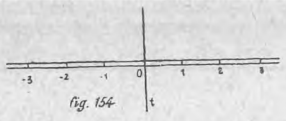


fig. 154.

Un piano verticale, cioè perpendicolare al quadro si può rappresentare dandone la traccia; un piano orizzontale mediante la quota. Noi lasceremo generalmente da parte questi due casi di rappresentazione eccezionale.

Osservazione 1.ª — La condizione di parallelismo di due piani obliqui è che le scale di pendenza di essi sieno parallele, uguali e dirette nel medesimo verso (fig. 155).

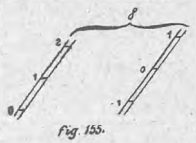


fig. 155.

Osservazione 2.ª — Dato un piano obliquo mediante una sua scala di pendenza s, si può determinare la quota di un punto rappresentato dalla sua proiezione A'. Basta infatti mandare per A' la perpendicolare ad s e misurare la quota del piede di essa (fig. 156).

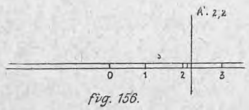


fig. 156.

§ 65. — **Problemi grafici.** — Senza svolgere diffusamente la risoluzione di tutti i principali problemi che si presentano nel metodo delle proiezioni quotate, ci limiteremo a dare qualche esempio.

Cominciamo da alcuni problemi grafici ed escludiamo sempre posizioni eccezionali degli elementi, che entrano in considerazione.

Problema 1.° — *Determinare la congiungente di due punti propri.*

La proiezione della retta è la congiungente le proiezioni dei due punti (supposte distinte) e può essere graduata come nel § 63.

Problema 2.° — *Condurre per un punto la parallela ad una retta data.*

La retta sia data mediante la sua scala di pendenza b', e si abbia il punto $A \equiv (A'.\ 2{,}5)$. Mandiamo per A' la parallela a' alla b', questa è la proiezione della retta da costruire; per graduarla costruiamo su b' il punto B' di quota 2,5 e mandiamo pei punti 0,1,2,3,.... le parallele $A'B'$ (fig. 157).

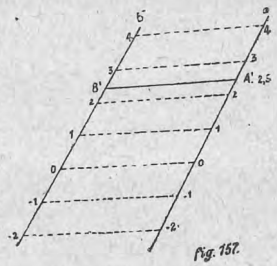
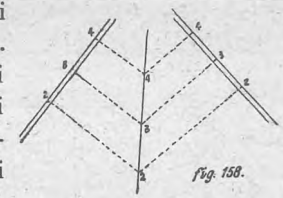


fig. 157.

Problema 3.° — *Determinare l'intersezione di due piani.*

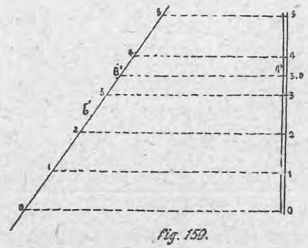
Si abbiano due piani (non paralleli fra loro ed obliqui al quadro) dati mediante due scale di pendenza non parallele. Immaginiamo di segare successivamente i due piani α, β coi piani orizzontali (paralleli al quadro) di quota 0,1,2,3,4... (fig. 158). Otteniamo così le rette di livello di α, β aventi come proiezioni tante perpendicolari alle scale di pendenza dei piani stessi. Le intersezioni di queste perpendicolari, corrispondenti a rette orizzontali di ugual quota, danno i punti comuni ai due piani. Si costruisce così non solo la proiezione della retta comune ad α, β ma anche la sua graduazione.


fig. 158.

Si considereranno per esercizio i casi particolari eccepiti.

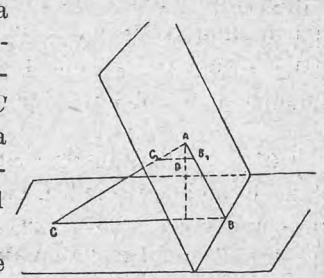
Problema 4.° — *Costruire il piano determinato da un punto e da una retta.*

Il punto dato sia $A \equiv (A'.\ 3{,}5)$ e la retta sia b, data mediante la sua scala di pendenza b' (fig. 159).


fig. 159.

Costruiamo su b il punto $B \equiv (B' \cdot 3{,}5)$, otterremo la retta orizzontale AB di quota 3,5 data mediante la sua proiezione $A'B'$. Allora possiamo assegnare la scala di pendenza del piano Ab, conducendo per A' la perpendicolare $A'B'$, e graduandola mediante le parallele ad AB condotte pei punti $1,2,3$... della retta b'.

§ 66. — **Condizione di perpendicolarità.** — Cerchiamo le condizioni di perpendicolarità di una retta e di un piano (obliquo al quadro). Anzitutto la traccia del piano deve essere perpendicolare alla proiezione della retta (cfr. § 32), quindi la scala di pendenza del piano e quella della retta devono essere parallele. Denotiamo con A il punto d'intersezione della retta e del piano, con C la traccia della retta data, con B la traccia della retta di massima pendenza del piano dato, passante per A (fig. 160).


fig. 160.

Conduciamo per A la verticale (perpendicolare al quadro), e su di

essa prendiamo il segmento $AD = 1$, quindi mandiamo pel punto D l'orizzontale nel piano ABC, ad incontrare AB, AC risp. nei punti B_1. e C_1. I segmenti $\overline{DB_1}$ e $\overline{DC_1}$ rappresentano in grandezza e direzione gli intervalli delle scale di pendenza delle due rette AB, AC (presi ambedue nel verso delle quote decrescenti); si vede dunque che gli intervalli di queste due scale hanno valori reciproci, ossia tra essi è media proporzionale l'unità (AD); inoltre le graduazioni delle due scale crescono in verso opposto.

Si ottengono così le seguenti *condizioni di perpendicolarità fra una retta e un piano obliquo:*

1) le scale di pendenza della retta e del piano sono parallele;

2) gli intervalli di queste scale hanno valori reciproci;

3) le graduazioni crescono in verso opposto.

Viceversa è facile vedere che queste condizioni necessarie sono anche sufficienti per la perpendicolarità di una retta e di un piano.

Applicando il teorema stabilito si possono risolvere facilmente col metodo delle proiezioni quotate i varî problemi che si presentano relativi a rette e piani perpendicolari.

Tratteremo come esempio il seguente:

Problema. — *Per un punto dato condurre la perpendicolare ad un piano dato (obliquo).*

Per il punto dato [sia p. e. $A \equiv (A' \cdot 2{,}5)$] si mandi la parallela alla scala di pendenza del piano; si avrà così la proiezione della retta cercata (fig. 161). Per graduarla si costruisca un triangolo rettangolo avente per altezza l'unità della scala del disegno, e tale che uno dei segmenti intercetti dall'altezza sull'ipotenusa sia l'intervallo della scala di pendenza del piano; l'altro segmento dell'ipotenusa ci darà l'intervallo della scala di pendenza della retta. La graduazione si effettuerà quindi agevolmente tenendo conto della quota del punto dato.

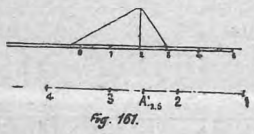


Fig. 161.

§ 67. — **Ribaltamento di un piano obliquo.** — Se un piano dato, obliquo al quadro, viene ribaltato intorno alla sua traccia t, perpendicolare alla scala di pendenza nel punto di quota o, si ha fra il quadro e il piano ribaltato un'omologia affine ortogonale (cfr. § 33) che ha come asse t. Per determinare questa

omologia basta costruire il ribaltamento di un punto A, dato mediante la sua proiezione A' (fig. 162). A tal fine si determini anzitutto la quota di A (che nella figura è 2), e quindi si costruisca un triangolo rettangolo $A_0 A_1 A'$ avente un cateto uguale a tale quota ed un altro cateto uguale alla distanza $(A'A_0)$ di A' da t; riportando sulla perpendicolare $A'A_0$ a t, la lunghezza A_1A_0 (nell'uno o nell'altro senso secondo il verso del ribaltamento eseguito), si otterrà il ribaltamento (A) del punto A.

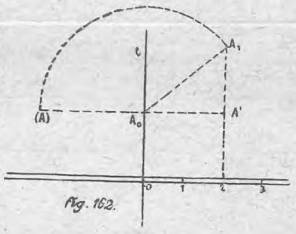


Fig. 162.

Mediante il ribaltamento dei piani e le relazioni di perpendicolarità fra rette e piani, si possono risolvere col metodo delle proiezioni quotate tutti i problemi metrici già risoluti cogli altri metodi di rappresentazione.

PARTE SECONDA

ELEMENTI DI UNA TEORIA

DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE.

CAPITOLO I.

Linee piane e coni

§ 1. — **Introduzione.** — Le nozioni di *linea curva* e di *superficie* costituiscono parte integrante del nostro concetto intuitivo dello spazio. Le curve e le superficie possono essere studiate sia valendosi immediatamente e continuamente dell'intuizione, sia traendo dall'intuizione alcuni dati e ragionando quindi esclusivamente su questi per via di deduzioni logiche. La seconda via appare preferibile dal punto di vista matematico (teorico), ma la prima ha il vantaggio di aprire più speditamente l'adito alle applicazioni, e però a quest'ultima via ci atterremo generalmente.

Ad essa nulla vi è da obiettare finchè ci si riferisce ad enti dati dall'intuizione o ad enti fisici che vengono mentalmente sostituiti (mediante l'appercezione) da enti intuitivi. Ma quando ci si riferisca ad enti definiti matematicamente, con generazione geometrica od analitica, occorre preventivamente esaminare se l'intuizione che ce ne formiamo corrisponda alla loro definizione matematica. È noto infatti che l'omissione di una tale cautela è stata spesso causa di errori.

§ 2. — **Linee piane.** — Il concetto intuitivo di linea scaturisce dal movimento di un punto. In particolare un punto che si muove nel piano, descrive una *linea* o *curva piana;* in ogni posizione del punto sulla linea, in un determinato istante il suo movimento ha una direzione; la retta uscente dal punto che ha questa direzione dicesi *tangente* alla linea nel punto (suo punto *di contatto*). In un punto generico della linea per cui il punto mobile generatore non sia passato due volte, vi è *una* tangente.

La tangente ad una linea (non retta) in un punto, apparisce come limite di una secante per esso, all'avvicinarsi indefinitamente dell'ulteriore punto d'intersezione al punto di contatto, perciò si dice che *la tangente congiunge due punti infinitamente vicini* della curva.

Correlativamente, nel piano il movimento di una retta genera un *inviluppo* (piano). Sopra ogni retta generica di esso vi è un punto che può riguardarsi come intersezione di *due rette infinitamente vicine* dell'inviluppo e dicesi *punto di contatto* di essa.

Nel piano:

Mentre un punto mobile descrive una linea (non retta) la sua tangente descrive un inviluppo. La linea è il luogo dei punti di contatto della rette dell'inviluppo.

Mentre una retta mobile descrive un inviluppo (non un fascio) il suo punto di contatto descrive una linea. L'inviluppo è l'insieme delle tangenti alla linea.

Si vede così che le due generazioni correlative delle curve (piane) e degli inviluppi corrispondono a considerare una curva piana come luogo dei suoi punti o come inviluppo delle sue tangenti.

La generazione indicata delle curve piane (come luogo o inviluppo) può dar luogo a delle *singolarità*. Enumeriamo qui le più semplici:

Se il punto mobile generatore della curva luogo C passa due (o più) volte per uno stesso punto del piano questo dicesi *punto doppio* (o *multiplo*) della curva. In generale nel passare per un tal punto, il punto

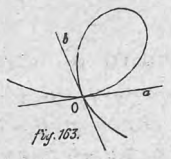


fig. 163.

mobile avrà ogni volta direzioni differenti e quindi nel punto doppio vi saranno in generale *due tangenti* distinte,

Se la tangente mobile generatrice della curva inviluppo C assume due (o più volte) una medesima posizione, essa dicesi *tangente doppia* (o *multipla*) della curva. In generale una tangente doppia avrà colla curva

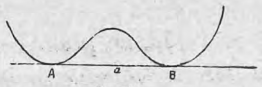


fig. 164.

due diversi *punti di contatto*, intersezioni della retta colle due tangenti della curva infinitamente vicine ad essa (fig. 164)

ognuna delle quali unisce il punto doppio O col punto infinitamente vicino ad uno dei rami della curva per O. Un punto doppio sifatto dicesi *nodo* (fig 163).

Si dirà doppio per la curva C anche un punto O nel quale il punto mobile cambi la direzione del movimento generatore di C (fig. 165); ivi in



fig. 165.



fig. 166.

generale vi sono pure due tangenti distinte, tranne se la direzione del movimento viene invertita in O, in quest'ultimo caso si ha per *O una cuspide o punto di regresso* (fig. 166).

Si dirà doppia per la curva C anche una tangente a, nella quale posizione la retta mobile generatrice di C cambi il modo del movimento in guisa che a abbia in generale due punti di contatto distinti, limite delle tangenti precedenti e delle successive (fig. 167); ma se il cambiamento è avvenuto in guisa che nella posizione a la tangente mobile abbia invertito soltanto il senso della sua rotazione (e quindi abbia un sol punto di contatto) ivi si ha una *tangente stazionaria o di inflessione* (fig. 168).

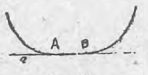


fig. 167

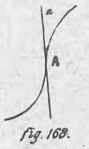


fig. 168.

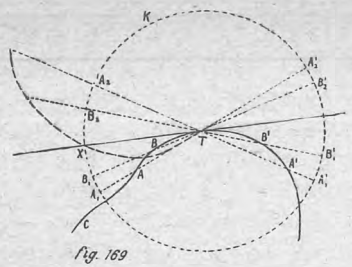
Il punto di contatto di una tangente d'inflessione alla C dicesi *fisso*. Questo si concepisce come un punto nel quale tre posizioni successive del punto mobile generatore di C sono in linea retta; correlativamente deve concepirsi la cuspide dell'inviluppo.

Quando è nota una generazione geometrica o analitica di una curva, siffatta (come avviene generalmente) che esista una tangente ad essa in ogni punto (fatta eccezione al più per qualche punto singolare) si potrà porre il problema di costruire questa tangente in un dato punto dipendentemente dalla definizione della curva. In modo correlativo si potrà domandare la costruzione del punto di contatto con una tangente.

Siffatti problemi sono p. e. risoluti nella Geometria proiettiva relativamente alle coniche.

Ma nelle applicazioni spesso avviene di dover determinare la tangente ad una curva in un punto o il punto di contatto di una tangente relativamente a curve date graficamente, delle quali non si possieda una legge di generazione che comporti

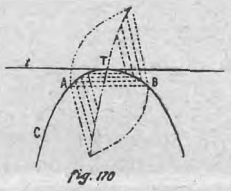
una soluzione facile e breve pei nominati problemi. Allora si ricorre a delle costruzioni grafiche approssimate che per la loro importanza debbono essere qui accennate.


fig. 169

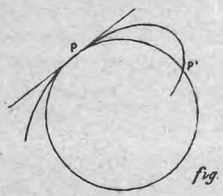
PROBLEMA 1.° — *Determinare la tangente in un punto semplice* T *ad una curva* C (fig. 169).

Si descriva un cerchio K di centro T, e per T si conducano delle rette, alcune delle quali seghino la C in vicinanza di T nei punti A, B.... da una parte di T, le altre seghino la C pure in vicinanza di T nei punti A', B',... dall'altra parte. Siano A_1, B_1 e A_2, B_2 le intersezioni di TA, TB e TA', TB' con K da una parte; A'_1, B'_1 e A'_2, B'_2 le intersezioni di K con TA', TB' e TA, TB dall'altra parte. Sulle rette TA_1, TB_1... a partire da A_1, B_1 si riportino verso T le lunghezze TA, TB ecc.; sulle rette TA_2, TB_2... a partire da A_2, B_2 si riportino le lunghezze TA', TB' da parte opposta di T, e gli estremi dei segmenti per tal modo determinati si uniscano graficamente con un tratto continuo. La linea così costruita (detta *curva degli errori*) sega il cerchio K in un punto X della tangente in T a C; l'altra intersezione della nominata tangente con K si costruirebbe analogamente dall'altra parte.

PROBLEMA 2.° — *Determinare il punto di contatto di una tangente semplice* t *d una data curva* C (fig. 170).


fig. 170

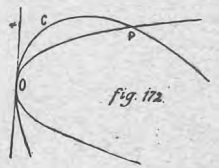
Si tirino delle secanti della C parallele assai vicine alla t; per gli estremi A, B di ciascuna, si tirino dei segmenti paralleli in senso opposto uguali (o proporzionali) alla lunghezza della corda AB; la linea (degli errori) che passa per gli estremi di tali segmenti sega la C nel cercato punto di contatto T della t.


fig. 171

Data una linea piana C, possiamo considerare un circolo che la tocchi in un suo punto generico P e determinato dall'ulteriore passaggio per un altro punto P' della linea (fig. 171). Se si fa avvicinare indefinitamente P' a P su C, il detto circolo assume una posizione limite ben determinata che costituisce il *cerchio osculatore* in P a C, cerchio che ha in P *tre punti infinitamente vicini* colla curva (contatto tripunto). Il centro di questo cerchio si dice centro di *curvatura della linea*; esso si trova sulla normale in P alla tangente a C, ossia alla linea C. Se P è un flesso di C, il cerchio osculatore si riduce alla tangente d'inflessione.

Se C non è un cerchio, il luogo dei centri di curvatura di C costituisce una linea C' che dicesi l'evoluta di C; mentre C dicesi *l'evolvente* di C'. Si può dimostrare che mentre un filo avvolto su C' il cui estremo sia su C, si avvolge o si svolge su C', il suo estremo descrive la evolvente C; da ciò i nomi di evolvente e di evoluta.

L'intuizione ci fornisce ancora molte altre proprietà delle linee su cui non ci tratterremo. Così p. es. in ogni punto O di una linea piana C, vi è una *parabola osculatrice* di vertice O, limite delle parabole di vertice O tangenti in O a C e passanti per un altro punto P di C che si avvicini infinitamente ad O (fig. 172); questa parabola osculatrice ha in O un contatto tripunto colla C, ed ha lo stesso cerchio osculatore. Similmente si potrebbero considerare altre curve aventi in un punto della C un contatto 4-punto, 5-punto ecc.


fig. 172

§ 3. — **Linee piane analitiche.** — Considerazioni che qui non possiamo sviluppare portano ad ammettere che un tratto convenientemente limitato di una linea piana intuitiva nell'intorno di ogni punto generico (semplice) si possa rappresentare analiticamente (p. e. in coordinate cartesiane) con una equazione

$$y = f(x)$$

dove f è una funzione di x (in un determinato intervallo), sviluppabile in serie di **Taylor** a partire da un qualunque punto x_0 della linea.

Viceversa si può anche verificare che l'equazione $y = f(x)$ dove $f(x)$ è una funzione sviluppabile in serie di **Taylor** in un determinato intervallo (funzione analitica) rappresenta sempre una linea che gode di tutti gli ordinarî attributi intuitivi. Così per esempio supponendo che il punto x_0 cada nell'origine ($x_0 = o$), la curva rappresentata dà uno sviluppo (di **Maclaurin**):

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . \text{[dove } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(o)\text{]},$$

ha nel punto origine O una tangente determinata $y = a_1 x$, e parimente ha in O una parabola osculatrice:

$$x = a_1 x + a_2 x^2,$$

e quindi un cerchio osculatore ecc.

L'osservazione precedente si può enunciare così;

Ogni tratto convenientemente limitato di una linea intuitiva si può riguardare come una (porzione di) linea analitica e viceversa.

Allorchè una linea venga definita analiticamenta mediante una funzione analitica $y = f(x)$, si possono considerare anche *punti immaginari* e *rami immaginari* della curva (punti di cui le coordinate complesse soddisfano all'equazione della curva e rami di punti immaginari). Infatti la funzione $f(x)$ data da una serie di **Taylor** si può considerare come definita, entro un cerchio di convergenza, anche per valori complessi di x.

La teoria delle funzioni analitiche permette anche — e noi ci limitiamo ad accennare la cosa — di estendere con legge determinata (*continuazione analitica*) la funzione $f(x)$, mediante serie atte a rappresentarla. Così si ottiene in casi molto generali di definire la funzione $f(x)$ per tutti i valori reali o complessi della x.

Conseguentemente *ogni linea analitica può essere resa completa* considerando come facenti parte di essa tutti i punti reali e complessi di cui le coordinate soddisfano alla relativa equazione.

Le cose dette innanzi per le linee intuitive in ordine alle loro singolarità debbono ora essere completate relativamente alle linee analitiche (complete).

Invero si potranno avere dei punti multipli di una linea pei quali la linea passi con rami (tutti o alcuni) immaginari.

Ma se per definire la linea siamo partiti da un'equazione a coefficienti reali, la linea si comporrà in generale di rami reali e di rami immaginari a coppie coniugati (cioè costituiti di punti immaginari coniugati), e i rami immaginari della linea passanti per un punto reale dovranno essere a coppie coniugati.

Così una linea reale può presentare tre specie di punti doppi reali: il nodo e la cuspide che abbiamo considerato,

ed il *punto isolato*, cioè un punto reale della linea pel quale passano due rami immaginari coniugati di essa (in cui vi sono due tangenti immaginarie coniugate) (fig. 173).

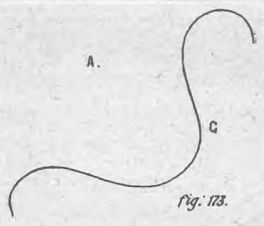


fig. 173.

Il punto isolato di una linea si può riguardare come una curva chiusa infinitesima (per esempio come un cerchio infinitesimo) facente parte dell'intera linea.

Sotto questo aspetto i punti isolati si possono presentare geometricamente nelle linee considerate come sezioni piane di una superficie. Si consideri ad es. la superficie di rotazione di cui s (fig. 174) rappresenta una sezione fatta con un piano passante per l'asse o; vi sono dei piani (a), perpendicolari ad o, che la segano secondo una curva formata da due cerchi l'uno interno all'altro, e come limite si hanno dei piani tangenti (a') che segano la superficie secondo una linea composta di un cerchio e di un punto isolato (punto di contatto).

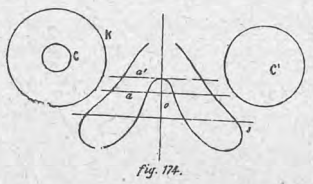


fig. 174.

È ovvio che tutte le cose ora dette per le linee, considerate come luogo di punti, si ripetono dualmente per gli inviluppi delle tangenti.

Le linee analitiche sono anche inviluppi analitici di tangenti.

Oltre le tangenti doppie con due contatti reali e le tangenti di flesso, le linee reali possono presentare delle *tangenti isolate* aventi due contatti immaginari coniugati ecc.

§ 4. — **Curve piane algebriche.** — Fra le curve (piane) analitiche compariscono come più semplici le *curve algebriche* (piane) date da un'equazione algebrica $f(xy) = o$ relativa ad un sistema di coordinate cartesiane, la quale equazione si può trasformare in un'altra omogenea relativa a coordinate trilineari $f(x_1 x_2 x_3) = o$; col simbolo f abbiamo designato qui, nei due casi, un polinomio di un certo grado n (omogeneo nel 2° caso).

Il numero n dicesi *l'ordine della curva.*

Parleremo di *curve date da un'equazione a coefficienti reali.*

Ricordiamo dalla Geometria analitica alcune nozioni relative a tali curve.

Una curva algebrica d'ordine n dicesi *irriducibile* se non vi è alcuna curva d'ordine minore di n facente parte di essa.

Una curva algebrica irriducibile d'ordine n *ha* n *punti comuni con ogni retta del suo piano*; quesi punti possono essere tuttavia reali o no, e in quest'ultimo caso a coppie immaginari coniugati; essi possono anche coincidere a gruppi. Se due delle intersezioni di una retta colla curva coincidono in un punto, la retta è tangente alla curva.

Due curve degli ordini rispettivi m, n *hanno in comune* mn *punti, contando debitamente le soluzioni multiple* (Teorema di **Bézout**). Nel conto figura in generale per *rs intersezioni* un punto comune alle due curve che sia *multiplo secondo r* per l'una, e *secondo s* per l'altra.

In ogni punto $(x_1x_2x_3)$ della curva $f(x_1x_2x_3) = o$ vi è una tangente.

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} y_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} y_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} y_3 = o$$

tranne se

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{\delta f}{\delta x_3} = o\,.$$

In questo caso il punto è doppio (o multiplo secondo $m > 2$) per la curva, giacchè ogni retta per esso è da considerarsi come una tangente avente in esso riunite due (o $m > 2$) intersezioni colla curva.

In un punto doppio vi sono due rette osculatrici aventi un contatto tripunto colla curva; sono le tangenti ai due rami della curva pel punto doppio. Queste tangenti sono reali e distinte pel nodo, coincidenti per la cuspide, immaginarie coniugate per il punto.

Poniamo che la curva

$$f(x_1x_2x_3) = o$$

abbia come punto doppio il punto $(o\ o\ 1)$. L'equazione della curva sviluppata per le potenze crescenti di x_1, x_2 si presenta sotto la forma

$$f = Ax_3^n + (B_1x_1 + B_2x_2)\, x_3^{n-1} + \\ + (C_1x_1^2 + 2\,C_2\,x_1x_2 + C_3x_2^2)\, x_2^{n-2} + \ldots.$$

Ora deve essere:

$$f = \frac{\delta f}{\delta x_1} = \frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{\delta f}{\delta x_3} = o \text{ per } x_1 = x_2 = o,\ x_3 = 1,$$

ossia $f(o\ o\ 1) = A = o$,

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = B_1 = o \text{ per } x_1 = x_2 = o,\ x_3 = 1$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_2} = B_2 = o \text{ per } x_1 = x_2 = o,\ x_3 = 1$$

Le condizioni perchè la curva abbia il punto $(o\ o\ 1)$ come doppio, sono dunque espresse da

$$A = B_1 = B_2 = o.$$

Dico che le rette osculatrici sono rappresentate complessivamente dall'equazione

$$C_1x_1^2 + 2C_2x_1x_2 + C_3x_2^2 = o$$

ossia, indicando con $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}, -\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ le radici dell'equazione

$$C_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2C_2\frac{x_1}{x_2} + C_3 = o,$$

dall'equazione:

$$(\lambda_1x_1 + \mu_1x_2)\ (\lambda_2x_1 + \mu_2x_2) = o.$$

Infatti segando la curva $f = o$ colla retta

$$\lambda_1x_1 + \mu_1x_2 = o$$

[o analogamente colla $\lambda_2x_1 + \mu_2x_2 = o$] si ha da risolvere rispetto ad x_1, x_2, x_3 il sistema delle due equazioni omogenee

$$\begin{cases} f = (\lambda_1x_1 + \mu_1x_2)\ (\lambda_2x_1 + \mu_2x_2)\, x_3^{n-2} + \ldots. = o \\ \lambda_1x_1 + \mu_1x_2 = o \end{cases}$$

che ammette le soluzioni triple $x_1 = x_2 = o\ \ x_3 = 1$, come si vede notando che l'equazione resultante, ottenuta p. e. coll'eliminazione di x_2, contiene soltanto termini di grado ≥ 3 in x_1. Si conclude quindi che quelle rette hanno in quel punto riunite tre intersezioni colla curva.

Si vede dunque che il punto $(o\,o\,1)$ sarà per la curva $f = o$

1) un nodo, se $C_2^2 - C_1C_3 > o$
2) una cuspide, se $C_2^2 - C_1C_3 = o$
3) un punto isolato, se $C_2^2 - C_1C_3 < o$.

In particolare se si ha contemporaneamente

$$C_1 = C_2 = C_3 = o,$$

allora quel punto è triplo, poichè qualunque retta passante per esso ha un contatto tripunto colla curva; pel punto triplo P (fig. 175) passano tre rami della curva dei quali uno almeno deve essere reale. In tal caso vi saranno da considerare le rette passanti per quel punto ed aventi colla curva un contatto quadripunto; ma noi non insisteremo su questo.

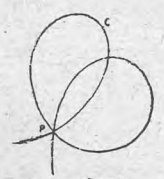


Fig. 175

Le tangenti ad una curva algebrica formano un *inviluppo algebrico* rappresentato dall'*equazione tangenziale*; da tale inviluppo s'intendono però tolti i fasci di rette (tangenti) aventi il centro nei punti multipli della curva; il grado dell'equazione tangenziale di una curva dicesi la *classe della curva.*

Per ogni punto del piano passano m *tangenti (reali o no) ad una curva di classe* m, *irriducibile.*

§ 5. — **Le prime due formule di Plücker.** — Ci proponiamo ora di valutare la classe di una curva di dato ordine n.

Scriviamo l'equazione della curva in coordinate omogenee, e sia:

$$f(x_1x_2x_3) = o.$$

L'equazione della tangente alla curva in un suo punto $(x_1x_2x_3)$ è

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}y_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}y_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3}y_3 = o$$

dove le y sono le coordinate correnti. Consideriamo una tangente alla curva passante per un punto $(y_1'y_2'y_3')$ fissato nel piano; le coordinate del suo punto di contatto $x_1x_2x_3$, verificano le equazioni:

(1) $$f(x_1x_2x_3) = o$$

(2) $$\frac{\delta f}{\delta x_1}y_1' + \frac{\delta f}{\delta x_2}y_2' + \frac{\delta f}{\delta x_3}y_3' = o$$

Le (1), (2) rappresentano due curve degli ordini n, $n-1$ (la curva data, e la curva (prima) polare del punto $(y'y_2'y_3')$ le quali (come si è detto precedentemente) hanno $n(n-1)$ punti comuni, contando debitamente le soluzioni multiple.

Dunque per il punto $(y_1y_2y_3)$ passano in generale $n(n-1)$ tangenti alla curva $f = o$, ossia una curva generale dell'ordine n è di classe $n(n-1)$.

Tuttavia questo numero dev'essere diminuito nei casi cui andiamo ad accennare. Le soluzioni comuni multiple delle due equazioni (1), (2) possono dipendere dalla particolare posizione del punto $(y_1'y_2'y_3')$, o possono invece essere fisse; in quest'ultimo caso, che andiamo a dilucidare, è da diminuire la classe della curva. Le soluzioni fisse comuni alle equazioni (1), (2) (fisse al variare delle y) si presentano allorchè le 4 equazioni

$$f = o,\quad \frac{\delta f}{\delta x_1} = o,\quad \frac{\delta f}{\delta x_2} = o,\quad \frac{\delta f}{\delta x_3} = o,\ (^1)$$

ammettono soluzioni comuni, e sono date appunto da queste soluzioni, alle quali corrispondono, come sappiamo, punti doppi (o multipli) della curva. Esse non dànno dunque propriamente delle tangenti all'inviluppo che consideriamo, ma delle rette dei fasci aventi il centro in un punto *multiplo* della curva, fasci che (come è stato detto) si staccano dall'inviluppo nominato.

Dunque i punti doppi (o multipli) d'una curva di ordine n, ne diminuiscono la classe. Precisamente se consideriamo il caso del punto doppio a tangenti distinte (reali o no), vediamo che la curva

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}y_1' + \frac{\delta f}{\delta x_2}y_2' + \frac{\delta f}{\delta x_3}y_3' = o,$$

polare di un qualsiasi punto $(y_1'y_2'y_3')$ del piano, passa per il punto doppio della $f = o$ ed ha ivi riunite due intersezioni

---

(1) Osserviamo che le soluzioni comuni alle tre equazioni

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = o,\quad \frac{\delta f}{\delta x_2} = o,\quad \frac{\delta f}{\delta x_3} = o,$$

sono necessariamente anche soluzioni della equazione $f = O$ della curva data. Ciò risulta dal noto teorema di EULERO sulle funzioni omogenee.

colla medesima, sicchè ogni punto doppio della $f = o$ porta in generale una diminuzione di *due* nella classe.

Se però il punto doppio è una cuspide, verificheremo che la curva

$$\varphi = \frac{\delta f}{\delta x_1} y_1' + \frac{\delta f}{\delta x_2} y_2' + \frac{\delta f}{\delta x_3} y_3' = o$$

oltre a passare per esso, tocca ivi la $f = o$ (ossia tocca la tangente cuspidale), e però la diminuzione portata nella classe da una cuspide è *tre* anzichè *due,* salvo casi di ulteriore specializzazione corrispondenti a cuspidi straordinarie che escludiamo dalle nostre considerazioni.

Per compiere la verifica, pongasi che la $f = o$ abbia una cuspide nel punto $(o\ o\ 1)$, onde si avrà (ordinando per le potenze decrescenti di x_3):

$$f = (\lambda x_1 + \mu x_2)^2 x_3^{n-2} + \ldots.$$

e

$$\varphi = \{ 2\lambda(\lambda x_1 + \mu x_2) x_3^{n-2} + \ldots. \} y_1' +$$
$$+ \{ 2\mu(\lambda x_1 + \mu x_2) x_2^{n-2} + \ldots. \} y_2' +$$
$$+ \{ (n-2)(\lambda x_1 + \mu x_2)^2 x_3^{n-3} + \ldots. \} y_3' = o.$$

Si vede allora che la curva $\varphi = o$ passa per il punto $(o\ o\ 1)$ ed ha ivi come tangente la retta

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = o,$$

giacchè il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \varphi = o \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = o \end{cases}$$

ammette le soluzioni doppie $x_1 = x_2 = o$, $x_3 = 1$.

Dunque se abbiamo una curva dell'ordine n dotata di δ punti doppi a tangenti distinte e di K cuspidi ordinarie (e non di punti multipli più elevati) la classe della curva è:

$$\alpha) \qquad m = n(n-1) - 2\delta - 3K.$$

A questo risultato possiamo associare il risultato correlativo.

Indicando con τ il numero delle tangenti doppie (a contatti distinti) e con i il numero delle tangenti di flesso della data curva (supposta priva di singolarità tangenziali più elevate) si avrà la formula:

$$\beta) \qquad n = m(m-1) - 2\tau - 3i.$$



Le formule $\alpha)$ e $\beta)$ costituiscono le *prime due formule* di **Plücker** che legano i caratteri elementari (ordine, classe, numero dei punti doppi e delle cuspidi, numero delle tangenti doppie e delle tangenti di flesso) d'una curva piana non possedente singolarità più elevate.

Esse mostrano che la curva generale dell'ordine n, non dotata di punti doppi ha invece un certo numero di tangenti doppie o di flesso. Spiegano così il paradosso che si presenta appena stabilito che la curva generale d'ordine n è di classe $m = n(n-1)$, giacchè applicando alla stessa curva la formula correlativa si potrebbe pretendere di trovare $n = m(m-1)$. La ragione del paradosso sta in ciò che la curva generale d'ordine n non costituisce un inviluppo *generale* di classe $n(n-1)$; e che tale inviluppo non sia generale ce lo prova appunto (oltre un conto di costanti) la presenza di tangenti doppie o di flesso della curva.

Come esempio applichiamo le formule di **Plücker** $\alpha)$, $\beta)$ alle curve C_3 del 3° ordine, dette anche *cubiche*, le quali (come è facile vedere) non possono mai possedere singolarità più elevate dei punti doppi e delle tangenti doppie. Tenendo conto del fatto che in questo caso non possono esistere tangenti doppie a contatti distinti, poichè tali rette avrebbero 4 intersezioni (riunite in due coppie) colla curva, avremo i casi rappresentati dalla seguente tabella.

La possibilità effettiva di questi casi potrebbe essere ulteriormente stabilita.

C_3 *generali:*

$$n = 3 \qquad \delta = o \qquad K = o$$
$$m = 6 \qquad \tau = o \qquad i = 9,$$

C_3 *con un punto doppio (a tangenti distinte):*

$$n = 3 \qquad \delta = 1 \qquad K = o$$
$$m = 4 \qquad \tau = o \qquad i = 3,$$

C_3 *con una cuspide:*

$$n = 3 \qquad \delta = o \qquad K = 1$$
$$m = 3 \qquad \tau = o \qquad i = 1.$$

Altri casi non sono possibili (esclusa la riducibilità della curva) perchè una C_3 dotata di due punti doppi si spezzerebbe dovendo contenere la retta che congiunge i due punti.

§ 6. — **Condizioni che determinano una curva algebrica.** — Cerchiamo ora le condizioni che individuano una curva algebrica piana d'ordine n.

Se l'equazione

$$f(x_1x_2x_3) = o$$

deve essere soddisfatta dalle coordinate $(x_1'x_2'x_3')$ di un punto dato, si ha un'equazione di condizione:

$$f(x_1'x_2'x_3') = a_1x'_1{}^n + a_2x'_2{}^n + a_3x'_3{}^n + \\ + 2a_{12}x'_1x'_2x'_3{}^{n-2} + \ldots = o,$$

che è lineare omogenea nei coefficienti di f; ciò si può esprimere dicendo che il passaggio di una curva d'ordine n per un punto dato, impone alla curva una *condizione lineare.*

I coefficienti di f essendo riguardati come incognite, ed il loro numero essendo $\frac{n(n+3)}{2}+1$, si avrà che:

Vi è sempre una curva di ordine n *ed in generale una sola, passante per* $\frac{n(n+3)}{2}$ *punti arbitrariamente scelti nel piano.*

Un corollario del teorema è il seguente:

Una curva irriducibile d'ordine n *non può avere più di* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *punti doppi.*

Suppongasi invero che una curva algebrica C, d'ordine n, abbia $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ punti doppi. Per essi e per $n-3$ punti semplici di C vi è una curva d'ordine $n-2$, la quale ha con C

$$(n-1)(n-2)+2+n-3 = n(n-2)+1$$

intersezioni e perciò ha comune con C tutta una parte d'ordine $\leq n-2$, onde la C è riducibile.

Ritornando al Teorema generale osserviamo che se i punti dati sono in posizione particolare per modo che le $\frac{n(n+3)}{2}$ equazioni lineari tra i coefficienti di f non riescano tutte indipendenti, per i detti punti passeranno infinite curve d'ordine n anzichè una sola.

Possiamo citare in proposito qualche esempio notevole:

1) Si considerino due curve generali C_n d'ordine $n>2$:

$$f = o, \qquad \varphi = o.$$

Esse hanno (pel Teorema di **Bézout**) n^2 punti comuni; e questi punti (le cui coordinate annullano f e φ) appartengono alle infinite curve

$$\lambda f + \mu\varphi = o.$$

Ora fra i nominati n^2 punti se ne prendano $\frac{n(n+3)}{2}$; sieno $A_1, A_2, \ldots A_{\frac{n(n+3)}{2}}$ e si cerchino le curve d'ordine n che passano per essi. Di queste curve ve n'è un numero infinito, anzichè una sola. Ciò vuol dire che le equazioni (lineari) di condizione esprimenti il passaggio di *una* curva d'ordine n per i punti $A_1, A_2 \ldots$, non sono tutte indipendenti; una di esse si può sopprimere essendo una conseguenza delle rimanenti. In altre parole tutte le curve d'ordine n che passano per gli $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti $A_1A_2 \ldots A_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ passano di conseguenza anche per $A_{\frac{n(n+3)}{2}}$, e così anche per gli altri $n^2 - \frac{n(n+3)}{2}$ punti del gruppo comune ad $f=o$ e a $\varphi = o$.

2) Consideriamo l'esempio precedente nel caso di $n=3$ ($n^2=9$, $\frac{n(n+3)}{2}=9$). Presi nel piano arbitrariamente 8 punti: $A_1, A_2, \ldots A_8$, si possono determinare due C_3 che passino per essi, dando di ciascuna un nono punto (in posizione generale rispetto ai primi 8). Ora queste C_3 avranno comune un punto A_9, e (per quanto si è detto sopra) *tutte le* C_3 *che passano per gli* 8 *punti* $A_1, A_2, \ldots A_8$, *passano di conseguenza anche per il punto* A_9, il quale perciò non dipende dalla scelta delle due C_3 considerate, ma dalla posizione degli 8 punti $A_1, A_2, \ldots A_8$.

3) Riferiamoci ad un caso particolare del precedente.

Sia data nel piano una cubica C_3 e consideriamo due flessi A, B di essa; sieno a, b, le tangenti di flesso (fig. 176). Determiniamo l'ulteriore intersezione C della retta AB colla cubica, e sia c la tangente alla cubica stessa in C.

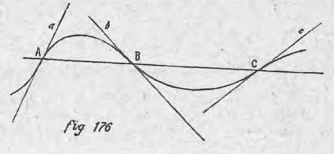


fig 176

La data C_3 e la retta AB contata 3 volte ($\overline{AB^3}$) costituiscono due cubiche che hanno comuni i punti A, B, C contati ciascuno tre volte. Le tre rette a, b, c costituiscono insieme una

cubica che passa 3 volte per il flesso A, 3 volte per il flesso B, e almeno due volte pel punto C. Si può dunque riguardare la cubica abc come passante per 8 punti comuni a C_3 e ad $\overline{AB}^3$; il nono punto comune ad a, b, c e a C_3, ossia l'ulteriore punto d'incontro di C_3 con c, dovrà dunque appartenere alla retta AB e quindi dovrà cadere ancora in C; ciò significa che C è un flesso (come A, B).

Così si ottiene l'importante

Teorema. — *La retta che unisce due flessi di una cubica piana incontra la cubica in un altro flesso.*

Osservazione. — Questo Teorema stabilisce la proprietà fondamentale della *configurazione dei 9 flessi* di una cubica generale. Devesi notare però che fra questi flessi non ve n'è mai più di *tre reali.*

Il Teorema precedente conduce poi al

Corollario. — *Una cubica dotata di un punto doppio ha i 3 flessi in linea retta.*

Infatti la congiungente due flessi deve incontrare la cubica nel 3° flesso.

Ritornando ora alle condizioni che determinano una curva piana d'ordine n, cerchiamo quante condizioni vengano imposte da un punto doppio assegnato.

Facendo una trasformazione di coordinate, si può far sì che il punto dato venga ad avere come coordinate $x_1 = x_2 = o, x_3 = 1$, allora le condizioni perchè la curva

$$f = Ax_3^n + (B_1x_1 + B_2x_2)x_3^{n-1} + \\ + (C_1x_1^2 + 2C_2x_1x_2 + C_3x_2^2)x_3^{n-2} + \ldots = o.$$

abbia come punto doppio il punto $(o\ o\ 1)$ sono espresse dall'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado o, 1 in x_1, x_2 $(A = B_1 = B_2 = o)$. Dunque *assegnare un punto doppio di una curva di ordine* n *equivale ad imporre 3 condizioni lineari* a cui i coefficienti dell'equazione della curva debbono soddisfare. Se si vuole che il punto doppio assegnato sia una cuspide, fatta la trasformazione precedente, si trova, oltre le tre relazioni lineari $A = B_1 = B_2 = o$, anche la relazione quadratica $C_2^2 - C_1C_3 = o$; dunque *una cuspide assegnata equivale a quattro condizioni non tutte lineari.*

§ 7. — **La terza formula di Plücker.** — La questione delle condizioni che una singolarità data impone ad una curva, si

presenta sotto un aspetto diverso se s'impone ad una curva di possedere un punto doppio o una cuspide, di cui la posizione non sia assegnata a priori. Allora disponendosi delle coordinate di questo punto, con cui si può soddisfare a due equazioni, si hanno due condizioni di meno. Ciò si vede anche direttamente; infatti la condizione perchè una curva $f = o$ d'ordine n, abbia un punto doppio, di cui la posizione non è assegnata, si esprime annullando il discriminante di f, cioè annullando la resultante delle equazioni $\frac{\delta f}{\delta x_1} = o, \frac{\delta f}{\delta x_2} = o, \frac{\delta f}{\delta x_3} = o$. Si osservi che si ottiene così una condizione *non lineare.* Occorre aggiungere una condizione ulteriore perchè il punto doppio di cui f risulta dotata, sia una cuspide.

Le cose dette innanzi si possono tradurre per dualità. Se si considerano nel piano tutte le curve inviluppo di data classe m, ogni tangente assegnata impone alla curva una condizione lineare, sicchè $\frac{m(m+3)}{2}$ *tangenti in posizione generale determinano una curva di classe* m; una tangente doppia *assegnata* impone tre condizioni lineari e la presenza di una tangente doppia, di cui non è fissata la posizione, impone una condizione (non lineare); una tangente di flesso impone quattro condizioni o due (in ogni caso non lineari) secondochè è fissata o no la sua posizione nel piano.

Ora contiamo il numero delle costanti arbitrarie che entrano nella determinazione di una curva C_n d'ordine n dotata di δ punti doppi e di K cuspidi (di cui non è assegnata la posizione). Si trova che il numero è:

$$\frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2K.$$

Similmente il numero per le curve C_m di classe m, dotate di τ tangenti doppie e di i flessi, è

$$\frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2i.$$

Se dunque supponiamo che le curve C_n d'ordine n dotate di δ punti doppi e K cuspidi abbiano classe m, τ tangenti doppie ed i flessi, dovremo trovare che il numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la determinazione di una C_n è eguale

al numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la determinazione di una C_m. Otterremo così *la terza formula* di **Plücker**:

$$\gamma) \qquad \frac{n(n+3)}{2} - \delta - 2K = \frac{m(m+3)}{2} - \tau - 2i,$$

che lega l'ordine, la classe, i numeri dei punti doppi, delle cuspidi ordinarie, delle tangenti doppie e dei flessi (ordinari) di una curva piana, dotata soltanto di queste singolarità più semplici.

La deduzione sintetica precedente (che si sostituisce ad un calcolo un po' laborioso) appartiene al CREMONA. Tuttavia essa non può tenersi come rigorosa se non si dimostri che l'imposizione ad una curva d'ordine n di δ nodi e K cuspidi (e analogamente quella di τ tangenti doppie ed i tangenti di flesso per una curva di classe m) dà luogo sempre a $\delta + K$ (o rispettivamente a $\tau + i$) condizioni indipendenti.

Ma dalle formule α), β) del § 5 combinate colla γ) si possono ricavare p. e. i valori di K ed i per mezzo degli altri caratteri della curva. Si ottengono così le formule correlative:

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8K$$
$$K = 3m(m-2) - 6\tau - 8i,$$

le quali sono suscettibili di una semplice dimostrazione mediante il *principio di continuità* di PONCELET. Si dimostrerà, per esempio, la prima formula, nel modo che rapidamente accenniamo.

Anzitutto si prova che « se una curva f (dipendente da parametri arbitrari) acquista un punto doppio o una cuspide in un punto O (origine delle coordinate), il numero i dei suoi flessi diminuisce rispettivamente di 6 o di 8 ». A tale scopo scrivendo l'equazione di f, ordinata per potenze crescenti, si riconoscerà che i flessi di f, *vicini* ad o, dipendono solo dal complesso dei termini di grado ≤ 3 che figurano in f, cioè sono - a meno di infinitesimi d'ordine superiore - i flessi dalla *cubica approssimante* rappresentata dal loro annullamento: se f acquista un nodo o una cuspide, ciò porta un'analoga singolarità per l'anzidetta cubica, e quindi la diminuzione di 6 o di 8 nel numero dei flessi.

Ora, per valutare il numero dei flessi d'una curva d'ordine n, basterà farla *degenerare in coniche e cubiche*, contando i flessi che si perdono per l'acquisto di punti doppi, intersezioni di due coniche o cubiche componenti. Per esempio, degenerando

la quartica in due coniche secantisi in 4 punti (doppi per la curva complessiva) si avrà, in generale, per $n = 4$:

$$i = 6 \cdot 4 = 24,$$

e quindi in tutti i casi

$$i = 24 - 6\delta - 8K.$$

E, degenerando la quintica in una conica e in una cubica (fornita di 9 flessi), si avrà, in generale, per $n = 5$:

$$i = 6 \cdot 2 \cdot 3 + 9 = 45,$$

e quindi in tutti i casi

$$i = 45 - 6\delta - 8K.$$

In modo analogo si procede per tutte le curve d'ordine $n > 5$ (pari o dispari) facendole degenerare in $\frac{n}{2}$ coniche o in $\frac{n-3}{2}$ coniche ed una cubica).

Le formule di **Plücker** permettono anche di calcolare m, τ, e i dati n, δ e K.

Combinando le α), β), γ), si ottiene pure la relazione

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - K = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \tau - i.$$

Il valore comune dei due membri dell'eguaglianza dicesi *genere* della curva e si designa con p.

Risulta da ciò che abbiamo osservato nel § prec., che il *genere di una curva irriducibile vale*

$$p \geq o.$$

L'importanza del genere stà in ciò che questo *carattere è invariabile per ogni trasformazione birazionale della curva;* valé a dire se due curve si corrispondono punto per punto in una corrispondenza biunivoca, per modo che si passi dalle coordinate di un punto dell'una a quelle del punto omologo sull'altra, con una sostituzione razionale, le due curve hanno lo stesso genere.

La dimostrazione di questo teorema fondamentale esce per altro dai limiti imposti a queste Lezioni.

Rivolgiamoci ora ad applicare le formule di **Plücker**, prendendo come esempio la curva del 4° ordine (*quartica*).

E raccogliamo nella seguente tabella i caratteri calcolati colle formule $\alpha), \beta), \gamma)$, di una quartica dotata soltanto di singolarità elementari:

$p=3$	$n=4$	$\delta=o$	$K=o$
	$m=12$	$\tau=28$	$i=24$
$p=2$	$n=4$	$\delta=1$	$K=o$
	$m=10$	$\tau=16$	$i=18$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=o$	$K=1$
	$m=9$	$\tau=10$	$i=16$
$p=1$	$n=4$	$\delta=2$	$K=o$
	$m=8$	$\tau=8$	$i=12$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=1$	$K=1$
	$m=7$	$\tau=4$	$i=10$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=o$	$K=2$
	$m=6$	$\tau=1$	$i=8$
$=o$	$n=4$	$\delta=3$	$K=o$
	$m=6$	$\tau=4$	$i=6$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=2$	$K=1$
	$m=5$	$\tau=2$	$i=4$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=1$	$K=2$
	$m=4$	$\tau=1$	$i=2$
	oppure:		
	$n=4$	$\delta=o$	$K=3$
	$m=3$	$\tau=1$	$i=o$.

Osservazione. — Le formule di **Plücker**, che abbiamo stabilite, legano fra loro le singolarità elementari di una curva non possedente singolarità più elevate. Considerazioni, che qui non possiamo sviluppare, permettono di riguardare ogni punto multiplo come la riunione di un certo numero di punti doppi (a tangenti distinte) e di cuspidi, e così ogni tangente multipla come la riunione di più tangenti doppie e di flessi; allora le formule di **Plücker** vengono estese alle curve dotate di singolarità comunque elevate.

Ci limiteremo a questo proposito a citare l'esempio semplice relativo ad un punto r-plo a tangenti distinte. Un tale *punto r-plo* deve riguardarsi *equivalente ad* $\frac{r(r-1)}{2}$ *punti doppi*,

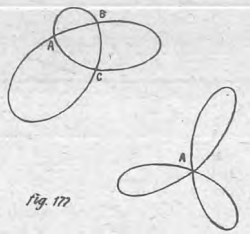


fig. m

giacchè per esso passano r rami della curva che dànno luogo ad $\frac{r(r-1)}{2}$ coppie; la figura 177 mostra appunto il caso di un punto triplo A che nasce in una curva variabile dotata di 3 punti doppi, dalla riunione di essi.

§ 8. — **Curve notevoli algebriche e trascendenti.** — Terminiamo questo Capitolo annoverando come esempî alcune notevoli curve algebriche e non algebriche (cioè *trascendenti*):

(Esempî di curve algebriche)

1) Le *parabole cubiche* di **Newton**, tutte comprese nell'equazione

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

relativa ad assi cartesiani obliqui o ortogonali.

L'equazione in coordinate omogenee di una di queste curve si ottiene ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3},$$

ed è quindi

$$x_3 x_2^2 = a x_1^3 + b x_1^2 x_3 + c x_1 x_3^2 + d x_3^3.$$

Essa mostra che la curva ha come tangente di flesso la retta impropria

$$x_3 = o\,.$$

Relativamente alla loro forma, le parabole cubiche dànno luogo a vari casi, che si possono discutere, seguendo il metodo consueto della Geometria analitica, in ordine ai valori delle 3 radici λ, μ, ν, dell'equazione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = o\,.$$

Ci limiteremo in proposito ad un rapido cenno, e riferendoci nelle figure al caso in cui l'equazione si interpreti rispetto ad assi ortogonali.

a) Si ha la *parabola campaniforme con ovale o curva*

digrammatica (fig. 178) quando λ, μ, ν sono tutte e tre reali e diseguali.

b) Si ha invece la *parabola campaniforme senza ovale*, se due delle predette radici sono immaginarie coniugate (fig. 179).

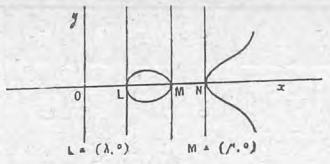


fig. 178

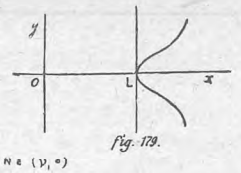


fig. 179.

c) Se le tre radici λ, μ, ν sono reali e due di esse eguali tra loro ($\lambda = \mu$), si ha la *parabola campaniforme puntata* (dotata di punto isolato) o la *parabola nodata* (fig. 180) secondochè $\lambda < \nu$ o $\lambda > \nu$.

d) Infine se le tre radici λ, μ, ν sono reali e tutte e tre eguali si ha la *parabola cuspidata* (fig. 181).

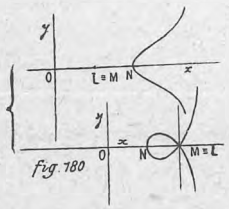


fig. 180

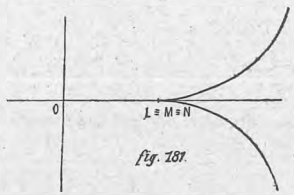


fig. 181.

Osservazione. — Dalle parabole cubiche si deducono per proiezione o con trasformazione omografica tutte le possibili cubiche piane, e si acquista così una nozione della forma. Ad un ramo della parabola corrispondono (metricamente parlando) due rami della cubica proiezione (ricollegati all'infinito), quando il suddetto ramo è segato in due punti dalla retta limite.

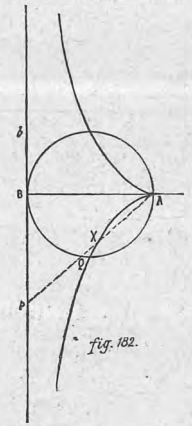


fig. 182.

2) La *cissoide di Diocle* è una particolare curva del 3° ordine la quale si può generare nel seguente modo (fig. 182).

Si abbia un cerchio ed un punto A di esso (*origine*); sia B il punto del cerchio opposto ad A, e b la tangente in esso. Condotta per A una trasversale qualunque, la quale seghi la b in un punto P, ed il cerchio in un punto Q, si prenda a partire da A nel verso AP un segmento $AX = PQ$. Il luogo del punto X è una cissoide.

La fig. 182 mostra che la curva ha una cuspide in A (tangente cuspidale AB) ed ha come asintoto la retta b.

L'equazione della cissoide si può porre sotto la forma

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

essendo r il raggio del cerchio fondamentale. Risulta dall'equazione, che la cissoide passa per i punti ciclici del piano, e che il suo asintoto b è tangente di flesso.

La cissoide serve utilmente nella risoluzione del problema della trisezione dell'angolo (1).

3) La *lemniscata di* **Bernouilli** è una quartica, luogo dei punti tali che il prodotto delle loro distanze da due punti fissi (*fuochi*) eguaglia il quadrato della metà della distanza di essi.

La forma della curva è ad 8, come mostra la fig. 183. Essa ha due assi di simmetria ortogonali, uno dei quali è l'asse focale, incontrantisi nel nodo, che è centro di simmetria.

La sua equazione riferita agli assi è

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

La lemniscata di **Bernouilli** si può costruire per punti nel seguente modo:

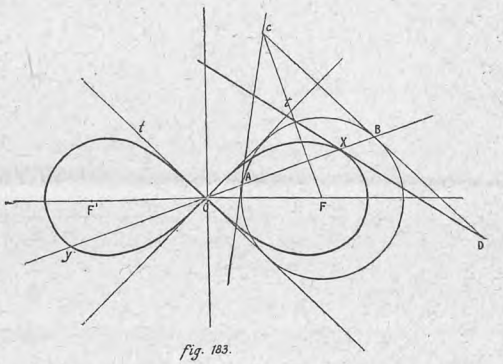


fig. 183.

Sia O il nodo e t, t' due rette per esso, inclinate di 45° sugli assi. Preso uno dei fuochi, F, come centro, si descriva un cerchio tangente a t, t'. Si mandi quindi per O una retta arbitraria, secante il cerchio suddetto in A, B; riportando il segmento AB sulla secante stessa a partire da O, nell'uno e nell'altro senso, si ottengono due punti X, Y della lemniscata.

---

(1) Per una esposizione di tale costruzione si può confrontare l'articolo di A. Conti inserito nei collectanea di F. Enriques vol. II. — Bologna, Zanichelli 1914.

Volendo la tangente alla curva nel punto X basta condurre in A e B le tangenti al cerchio sopranominato, determinare il loro punto d'incontro C, prendere $BD = BC$ e congiungere D con X (fig. 183).

La lemniscata di **Bernouilli** si lascia definire in modo metrico-proiettivo rispetto ai punti ciclici, come segue.

Si noti anzitutto che:

1) essa passa doppiamente pei punti ciclici, segati sulla retta all'infinito dalla coppia delle rette isotrope $x^2 + y^2 = o$,

2) le tangenti principali del suo nodo (posto nell'origine O) sono tangenti di flesso pei rami della curva,

3) codeste tangenti, sono perpendicolari, cioè separano armonicamente le rette isotrope.

Ora, imponendo ad una quartica di passare doppiamente pei punti ciclici del piano e per un punto proprio o, si danno 9 condizioni lineari, e volendo che la curva possegga in o due date tangenti principali che abbiano contatto tripunto coi relativi rami si aggiungono $2 + 2 = 4$ condizioni, parimenti lineari. Dopo cioè la quartica (in cui entrano 14 parametri essenziali) riesce determinata a meno di un'omotetia di centro O. Si deduce che:

La lemniscata di Bernouilli è caratterizzata dalle proprietà di passare doppiamente per i punti ciclici del piano, e di avere, in un punto proprio, un nodo in cui le tangenti principali sono ortogonali e sono tangenti d'inflessione dei rami della curva.

Osservazione. — Si può considerare una famiglia generale di *lemniscate* definite come curve del 4° ordine a forma di 8 (cioè dotate di un nodo con due tangenti principali d'inflessione pei relativi rami) che passano doppiamente pei punti ciclici. La generalizzazione, rispetto alla lemniscata di Bernouilli, consiste nel lasciar cadere la condizione di ortogonalità delle tangenti principali del nodo. Rimane tuttavia la proprietà della curva di possedere le bisettrici degli angoli delle suddette tangenti principali, come assi di simmetria ortogonale.

4) La *curva di Gerono* che pure viene designata col nome di *lemniscata*, non appartiene tuttavia alla famiglia delle quartiche passanti doppiamente pei punti ciclici, che si è innanzi definita. Infatti l'equazione della curva, riferita agli assi è:

$$4a^2 (x^2 + y^2) = (x^2 + 2y^2)^2.$$

Tuttavia questa curva ha ancora la forma di 8, e — alla vista — differisce dalla lemniscata di Bernouilli solo per ciò che le parti esterne dell'8 sono meno incurvate in confronto alla quartica predetta.

L'equazione della curva di Gerono si può far derivare da quella del cerchio $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, cambiando x in $\sqrt{x^3 + y^3}$. Ciò conduce ad una notevole costruzione per punti della nostra curva.

Si prenda un cerchio di diametro a, tangente nel centro O all'asse y (fig. 184). Da un punto qualunque A di questo cerchio si conduca la perpendicolare AB sull'asse stesso, indi si prendano, sulla AB, da una parte e dall'altra di B, i segmenti $BX = BY = OA$. I punti X, Y appartengono alla lemniscata.

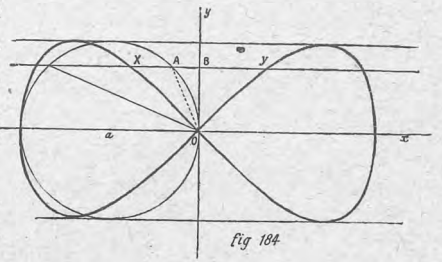


fig 184

5) La *curva di Cassini* è un'altra generalizzazione della lemniscata di Bernouilli. Essa è definita come « luogo dei punti le cui distanze da due fuochi danno un prodotto costante, diverso dal quadrato della metà della loro distanza ». Se il detto

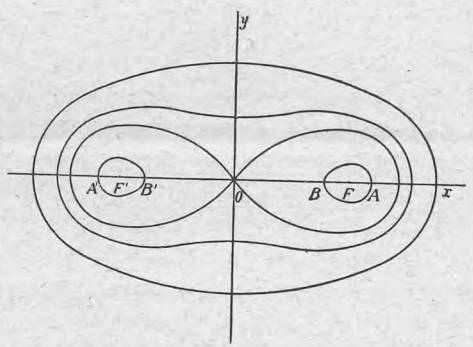


fig. 184 bis.

prodotto supera questo quadrato, la curva si compone di un solo ramo, ovale, ovvero ovale schiacciato, nel caso contrario la curva consta di *due ovuli*. In ogni caso si ha simmetria rispetto

a due assi ortogonali, e l'equazione della curva riferita a questi assume la forma:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 = a^4,$$

che, per $a = c$, si riduce all'equazione scritta innanzi per la lemniscata di Bernouilli.

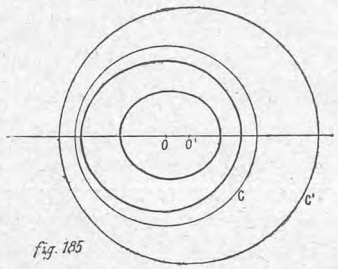


fig. 185

6) Gli *ovuli di* **Cartesio** formati di due ovali, costituiscono il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due cerchi dati C, C', non concentrici, sono in un rapporto costante (fig. 185).

Essi compongono una quartica algebricamente irriducibile.

7) La *conchiglia di* **Pascal**, è una quartica generata dalla costruzione seguente:

Si abbia un cerchio di raggio r e si scelga un punto O su di esso; quindi sopra una qualsiasi retta per O secante in A il cerchio dato si prendano i due segmenti $AB = AC = a$, essendo a un segmento assegnato di lunghezza costante. Il luogo dei punti B, C è la conchiglia di **Pascal** (fig. 186).

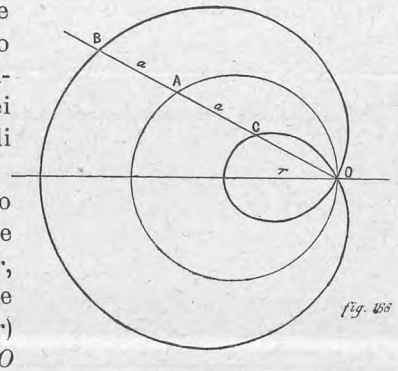


fig. 186

La curva ha in O un punto doppio: e questo è un nodo se $a < 2r$, una cuspide se $a = 2r$, un punto isolato se $a > 2r$. Le due rette osculatrici in O ($a < 2r$) si ottengono congiungendo O coi punti in cui il cerchio generatore è segato da un cerchio di centro O e di raggio a.

L'equazione della curva si può porre sotto la forma:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = a^2(x^2 + y^2);$$

dalla quale appare che la curva stessa ha anche due cuspidi (immaginarie) nei punti ciclici del piano. Le relative tangenti cuspidali s'incontrano nel centro del cerchio generatore.

8) La *cardioide* è caso particolare della conchiglia di **Pascal**, corrispondente all'ipotesi $a = 2r$.

Ha una cuspide nel punto O (fig. 187).

8) La *concoide di* **Nicomede** è la curva generata nel seguente modo:

Si fissi una retta p e un punto P *(polo)* fuori di essa; quindi si mandi per P un raggio qualsiasi ad incontrare p in un punto A, e su questo raggio a partire da A si prendano, dall'una e dall'altra parte, i segmenti $AB = AC = h$, essendo h un segmento di lunghezza costante assegnato.

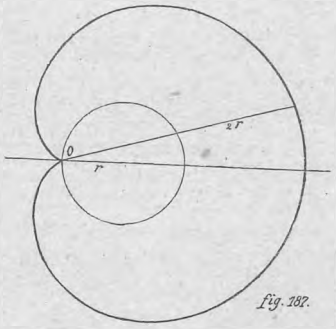


fig. 187

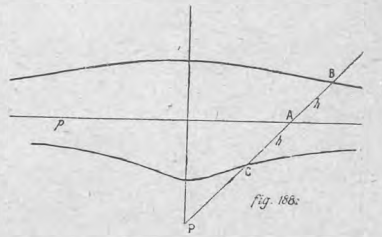


fig. 188

Il luogo dei punti B, C costituisce la concoide. È una quartica, algebricamente irriducibile, composta di due rami (fig. 188); ha una cuspide all'infinito e come tangente cuspidale la p.

Questa curva (come la cissoide) serve utilmente per la risoluzione del problema della trisezione dell'angolo (1).

(Esempi di curve trascendenti)

9) La *spirale logaritmica* è la curva che in coordinate polari ha l'equazione

$$\rho = e^{k\varphi}.$$

Si costruisce per punti facendo variare in progressione aritmetica agli angoli che un raggio variabile per il centro (origine) fa con un raggio fisso, e staccando sul raggio mobile, a partire dal centro, segmenti succedentisi in progressione geometrica.

---

(1) Cfr. l'articolo cit. di A. Conti.

La curva si avvolge per un verso sempre più strettamente intorno all'origine, mentre per l'altro verso le sue spire si allargano all'infinito (fig. 189).

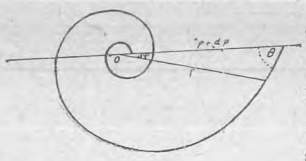


fig. 189

La spirale logaritmica si può anche definire come la curva che taglia i raggi di un fascio sotto angolo costante (non retto); è quindi facile costruire la tangente alla curva in un punto, quando sia data la tangente ad essa in un altro punto qualsiasi.

Si può dimostrare la proprietà sopra accennata nel modo seguente:

Indicando con θ l'angolo sotto cui la spirale taglia un raggio del fascio col centro nell'origine, con φ l'argomento e con ρ il corrispondente raggio vettore del punto, diamo a φ un incremento infinitesimo $d\varphi$ e quindi a ρ un conseguente incremento $d\rho$. Il triangolo infinitesimo con un vertice nell'origine e due vertici nei punti successivi, segnati dalla spirale (fig. 189), ci dà

$$\frac{\rho}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\rho + d\rho}{\operatorname{sen}(\pi - \theta - d\varphi)} = \frac{\rho + d\rho}{\operatorname{sen}(\theta + d\varphi)}.$$

Dalla quale eguaglianza, tenendo conto che (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore)

$$\operatorname{sen}(\theta + d\varphi) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \cdot d\varphi$$

e che

$$d\rho = k\rho \cdot d\varphi,$$

si deduce

$$\operatorname{cotg}\theta = k.$$

Questa formula mostra appunto che θ è costante (indipendente da ρ) e ne assegna il valore espresso pel parametro k della curva.

Il rapporto delle distanze dall'origine di due intersezioni successive della spirale con un raggio per l'origine suddetta è costante, e viene espresso da

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{e^{k(\varphi + 2\pi)}}{e^{k\varphi}} = e^{2k\pi}.$$

Si ha quindi come espressione dell'angolo θ anche la seguente:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\rho'}{\rho}.$$

10) La *spirale d'* **Archimede** è la curva data, in coordinate polari, dall'equazione $\rho = k\varphi$ $(o \leq \varphi \leq +\infty, k > o)$.

Essa è definita dalla proporzionalità dei raggi vettori ρ agli angoli φ. In base a tale proporzionalità si può costruire per punti facendo variare in progressione aritmetica gli angoli e i raggi.

La curva (fig. 190) passa per l'origine ed ha ivi come tangente il raggio $\varphi = o$. Al crescere di φ si ottengono spire sempre più larghe della curva.

Le distanze dall'origine di due intersezioni successive della spirale con un raggio per l'origine suddetta, hanno una differenza costante, $\rho' - \rho = 2k\pi$, detta il *passo* della spirale.

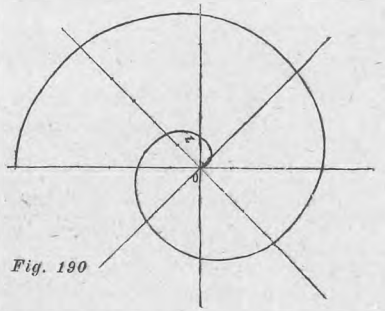


Fig. 190

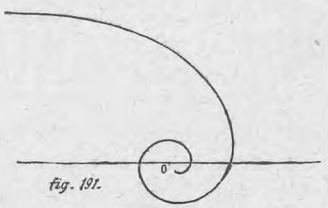


fig. 191.

11) La *spirale iperbolica* è data, in coordinate polari, dall'equazione

$$\rho\varphi = k;$$

ammette come asintoto la retta $\varphi = o$ (fig. 191).

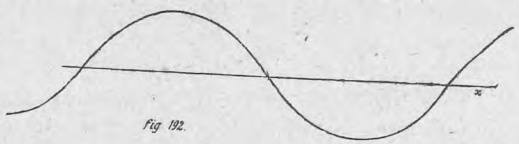


fig 192.

12) La *sinusoide*, è la curva

$$y = k \operatorname{sen} x$$

rappresentata dalla fig. 192.

13) La *cicloide* è la curva generata da un punto di un cerchio che ruzzola sopra una retta (fig. 193).

La velocità di progressione traslatoria del centro del cerchio si suppone costante. Il caso più semplice è quello in cui, dopo un giro, la progressione del cerchio sia $2\pi r$ (essendo r il raggio del cerchio stesso). Ma, se il ruzzolamento è combinato con una spinta di traslazione (nell'uno o nell'altro verso), la progressione del cerchio sarà per ogni giro, maggiore o minore di $2\pi r$. La cicloide si dirà *allungata* nel 1° caso, e *accorciata* nel secondo.

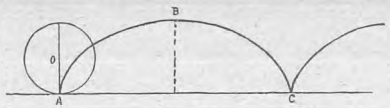


fig. 193.

14) La *trattrice* è la curva per cui il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto ed una retta fissa ha lunghezza costante.

Ha come asintoto la retta suddetta (fig. 194), e presenta una cuspide nel punto per cui passa la tangente perpendicolare all'asintoto. La tangente cuspidale è asse di simmetria della curva.

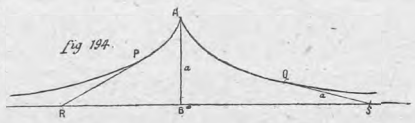


fig. 194.

15) La *catenaria* è la curva secondo cui si dispone un filo omogeneo flessibile ed inestendibile soggetto alla gravità (fig. 195). Scegliendo come asse delle x la retta orizzontale detta *direttrice*, e come asse delle y l'asse di simmetria della curva, l'equazione della catenaria si pone sotto la forma

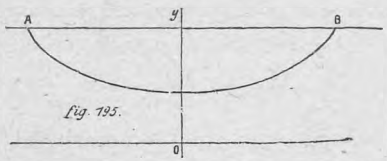


fig. 195.

$$y = k \cos h \frac{x}{k}.$$

§ 9. — **Coni.** — La figura correlativa nello spazio di una linea piana dicesi *cono*.

Il cono si può anche definire come la *figura proiezione di una linea piana* da un punto, detto il *vertice*, esterno al piano di essa.

Un cono si può riguardare in due modi correlativi fra loro nella stella: come *luogo di rette* (*generatrici*) e come *inviluppo di piani tangenti* (piani determinati da due generatrici infinitamente vicine). Nello spazio il cono appare come una *superficie* luogo dei punti delle sue generatrici. Il cono proiettante una linea piana analitica si può rappresentare mediante una equazione analitica in coordinate di rette ecc.

Un cono può avere delle singolarità, sia come luogo, sia come inviluppo; le più semplici di tali singolarità sono:

la generatrice doppia, in particolare *la generatrice cuspidale*.

il piano tangente doppio, in particolare *il piano tangente di flesso*.

Le linee sezioni piane di un cono hanno un punto doppio, o una cuspide, nel punto intersezione colla generatrice doppia o rispettivamente cuspidale.

Le linee sezioni piane di un cono hanno come tangente doppia o di flesso, la intersezione col piano tangente doppio o rispettivamente di flesso.

Due qualunque sezioni piane di un cono (non passanti pel vertice) sono prospettive e quindi godono delle stesse proprietà proiettive.

Un cono è segato da un piano pel vertice secondo un gruppo di generatrici ecc.

Un cono proiezione d'una curva piana algebrica d'ordine n e di classe m dicesi un *cono algebrico d'ordine n* e di classe m; se la curva è irriducibile, il cono è del pari irriducibile.

L'ordine di un cono algebrico irriducibile è il numero delle generatrici intersezioni del cono con un piano pel vertice.

La classe di un cono algebrico irriducibile è il numero dei piani tangenti al cono passanti per una retta contenente il vertice.

Il cono (superficie) d'ordine n è segato da una retta non passante pel vertice in n punti.

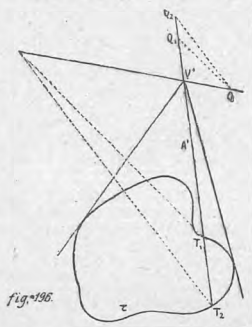
Valgono pei coni algebrici formule analoghe alle formule di **Plücker** α), β), γ) date per le linee piane.

§ 10. — **Rappresentazione dei coni nel metodo delle proiezioni centrali.** — Un cono si può rappresentare in uno qualunque dei sistemi di rappresentazione, individuando il vertice ed una sua sezione piana.

Riferiamoci p. es. al metodo delle proiezioni centrali. Supponiamo che il vertice V del cono sia fuori del quadro e non coincida col centro di proiezione O. Per rappresentare il cono daremo, accanto al suo vertice $V \equiv (V' - TQ)$, la linea τ, *traccia* del cono, sezione di esso col quadro. Il cono viene così perfettamente rappresentato. Le proiezioni dei punti del cono possono

coprire l'intero piano, oppure alcune regioni angolari racchiuse da tangenti condotte da V' alla τ, che insieme costituiscono l'immagine del *contorno apparente* del cono veduto dal punto O.

Se si immagina che il punto O sia luminoso, le regioni del quadro entro cui cadono le proiezioni dei punti del cono saranno le *regioni d'ombra*; con questo nome appunto si suole spesso distinguerle. Un punto A' della regione d'ombra portata dal cono, è immagine di uno o più punti del cono che si possono individuare facilmente.

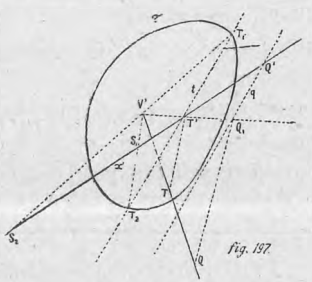

fig. 196.

Si unisca V' con A' e si considerino i punti d'intersezione di questa congiungente colla linea τ; sieno (riferendoci al caso della fig. 196) T_1, T_2.

Conduciamo per Q le parallele alle TT_1, TT_2 ad incontrare la retta $V'A'$ risp. in Q_1, Q_2. Il punto A' è in questo caso la proiezione di due punti del cono che si trovano sulle generatrici (T_1Q_1) e (T_2Q_2) di esso; così i punti obiettivi di A' restano individuati.

Problema 1.° — *Determinare le intersezioni di un cono con una retta che lo seghi, non passante per il vertice.*

Si determini il piano α individuato dalla retta $a \equiv (a'.T'Q')$ e dal vertice V del cono e se ne assegni la traccia t; questa (nelle nostre ipotesi) incontra in qualche punto la traccia τ del cono (nella fig. 197 in T_1, T_2); ciascuno di questi punti è la traccia di una generatrice del cono giacente nel piano α, della quale generatrice si può determinare l'intersezione colla retta data a; i punti così determinati su a sono le cercate intersezioni di essa col cono.

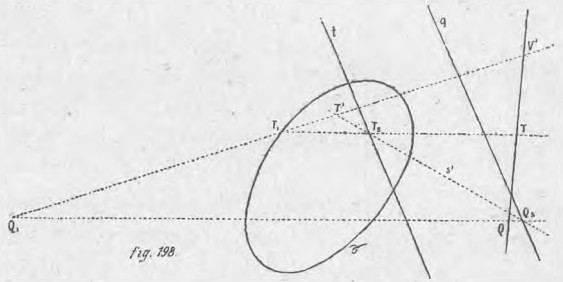

fig. 197

La fig. 197 mostra eseguite le costruzioni.

Problema 2.° — *Determinare la sezione di un cono con un piano non passante per il vertice.*

Sia il cono rappresentato come innanzi mediante gli elementi $V \equiv (V' - TQ)$ (vertice) e τ (traccia). Sia (tq) il piano secante (piano proprio ordinario). La traccia τ del cono e la sezione C col piano (tq) sono linee prospettive (centro di prospettività V). La proiezione C' di C fatta da O riesce dunque

omologica alla τ, essendo V' il centro dell'omologia e t l'asse Ciò posto, per individuare l'omologia in cui la C' corrisponde alla τ, basta assegnare il punto della C' corrispondente ad un dato punto T_1 di τ (fuori di t). A tal uopo si costruirà il punto di fuga Q_1 della generatrice VT_1 del cono, e si segherà tale retta col piano (tq) (fig. 198); si otterrà così il punto T' (di C')


fig. 198

corrispondente a T_1 nell'omologia nominata. Così la C' potrà costruirsi per punti.

Osservazione 1.ª — Se invece dell'immagine C' della C si volesse il ribaltamento (C) eseguito attorno a t, non occorrerebbe costruire prima C'; basta notare che la (C) è pure omologica alla τ (asse d'omologia t).

Osservazione 2.ª — Vogliasi l'immagine della sezione del cono col piano all'infinito, ossia la linea di fuga X del cono. Si deve allora cercare la curva corrispondente alla τ nella omotetia intercedente sul quadro fra le tracce e gli elementi di fuga delle rette e dei piani per V.

Nella rappresentazione del cono si può impiegare altrettanto bene la linea di fuga X in luogo della traccia purchè il vertice V non sia all'infinito, cioè non si tratti di un cilindro.

Problema 3.° — *Determinare l'intersezione di due coni.*

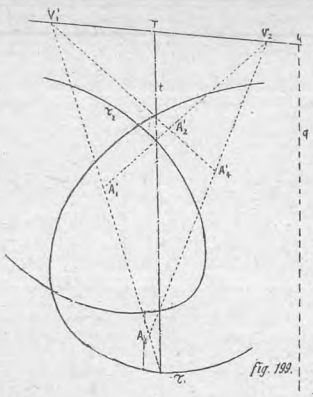
Due coni hanno generalmente comune una linea gobba (non piana) loro intersezione. L'immagine di essa può costruirsi per punti facendo uso del *metodo dei piani secanti ausiliarî* che nella sua espressione più generale consiste in questo:

Si consideri una serie di piani secanti, ed in ciascuno si determinino i punti comuni alle intersezioni dei due coni; si costruisce così, per punti, la linea gobba cercata.

Quanto alla scelta dei piani secanti ausiliarî, conviene generalmente scegliere i piani passanti per i vertici dei due coni.

Riferiamoci ad un caso concreto che serva di esempio.

Si abbiano, dunque, due coni rappresentati mediante gli elementi $V_1 \equiv (V_1' - TQ)$; $V_2 \equiv (V_2' - TQ)$ e τ_1, τ_2 (vedi fig. 199): conviene prendere come retta ausiliaria per completare la rappresentazione di V_1, V_2 la congiungente i due punti. Conduciamo un piano ausiliario per V_1V_2 e seghiamo con esso i due coni; si avranno in generale (scelto il piano convenientemente) alcune generatrici del 1° cono ed alcune del 2° che s'interseche-ranno le une colle altre in tutti i modi possibili, dando luogo ad un gruppo di punti della linea intersezione dei due coni. E così essa si può generare tutta per punti assai vicini. Nella fig. 199 è stato condotto un piano ausiliario (tq) e si sono costruiti i punti A_1', A_2', A_3', A_4' immagini delle 4 intersezioni di esso colla linea comune ai due coni.



§ 11. — **Coni e cilindri nel metodo delle proiezioni ortogonali.** — È agevole risolvere i problemi precedenti riferendosi al metodo delle proiezioni ortogonali. Non entreremo in particolari, ma daremo alcune avvertenze generali e qualche esempio.

Dato un cono il cui vertice V non sia su nessuno dei due piani principali, le sue tracce τ_1, τ_2, su questi piani sono curve prospettive, essendo V centro di prospettività. Allorchè il piano π_2 si ribalta su π_1 attorno alla linea di terra l, i cui punti restano fissi nella rotazione, si ottengono come 1ª traccia τ_1 e 2ª traccia τ_2 (ribaltata) del cono, due linee omologiche, essendo asse di omologia la linea di terra.

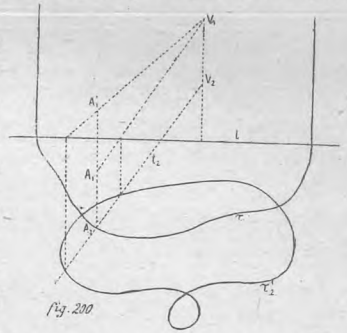
Dato il vertice $V \equiv (V_1V_2)$ ed una delle tracce τ_1, si può costruire l'altra colle note costruzioni dell'omologia. Una delle due tracce si riduce ad un gruppo di generatrici se si tratta di un cono col vertice all'infinito, cioè di un *cilindro parallelo* (ossia colle generatrici parallele) ad uno dei piani principali.

Trattiamo come esempio il seguente:

Problema. — *Determinare l'intersezione di un cono con un cilindro.*

Con un conveniente cambiamento portiamo uno (il 1°) dei piani principali ad essere parallelo al cilindro, e l'altro (il 2°) ortogonale. La 1ª traccia τ_1 consterà di un certo numero di generatrici (nella figura 200 sono due) perpendicolari alla linea di terra l. La 2ª traccia τ_2 passerà per i punti comuni alla τ_1 e alla l.

Rappresentiamo ora il cono mediante la 2ª traccia τ_2' e il vertice $V \equiv (V_1V_2)$ fuori del 2° piano di proiezione. I piani ausiliarî che dobbiamo considerare sono i piani per V paralleli al cilindro; le seconde tracce di questi piani passano per V_2. Si consideri uno di questi piani e sia t_2 la 2ª traccia che incontri τ_2 in un punto A_2. Riferendoci al caso concreto rappresentato nella fig. 200, si vede che in A_2 cadono le seconde proiezioni dei due punti appartenenti al piano considerato, comuni al cono ed al cilindro, cioè dei punti intersezioni della generatrice del cilindro che passa per A_2 colle due generatrici del cono che hanno come 2ª proiezione la t_2. È facile costruire le prime proiezioni dei due punti nominati tenendo conto del fatto che la prima proiezione della 2ª traccia è la l; la fig. 200 mostra eseguita la costruzione.



Esercizi:

1) Determinare l'intersezione di un cono di rotazione e di un cilindro la cui sezione normale sia una spirale logaritmica.

2) Determinare l'intersezione di un cono circolare retto (le cui generatrici sono inclinate di 45° sull'asse) con un cilindro circolare contenente come generatrice l'asse del cono.

Si scelgano come piani principali un piano parallelo agli assi del cono e del cilindro e un piano perpendicolare al primo e parallelo agli assi.

Si ricorre qui utilmente per la costruzione a una serie di piani ausiliarî di profilo, i quali segano il cono e il cilindro secondo due circoli.

Si osservi che la proiezione della curva sopra il piano degli assi (che può assumersi come orizzontale) è una parabola.

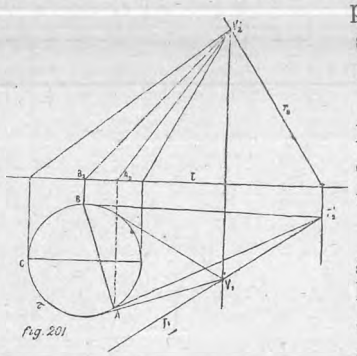
La proiezione verticale è una lemniscata di Gerono.

§ 12. — **Ombre dei coni e dei cilindri.**

Problema. — *Determinare l'ombra portata di un cono sopra un piano principale, supposto il centro luminoso a distanza infinita.*

Napoli 12 novembre 1910.

Supponiamo, per semplicità, che la base del cono sia la sua traccia τ sul piano π_1, sul quale vogliamo determinare l'ombra portata del cono e che il cono stesso sia tutto contenuto nella 1ª regione (fig. 201).


fig. 201

Supponiamo ancora, per fissare le idee, che si tratti di un cono quadrico prendendo come traccia τ un circolo.

Notiamo anzitutto che le cose generali dette nel § 51 della Prima Parte relativamente alle ombre dei poliedri convessi valgono anche pei coni e cilindri, soltanto la linea separatrice d'ombra propria si dovrà qui determinare per altra via.

Riferendoci al caso della fig. 201 si costruisca la 1ª traccia T_r' della retta r passante pel vertice V del cono ed avente la direzione del centro luminoso. Il punto T_r' è l'ombra portata di V. Ora, essendo $T_r'A$, $T_r'B$ le due tangenti a τ condotte da T_r' (supposto esterno a τ), dico che le generatrici del cono passanti risp. pei punti di contatto A, B dànno, unitamente all'arco ACB di τ (situato da banda opposta di T_r' rispetto alla retta AB), la linea separatrice d'ombra propria del cono, ed è quindi $T_r'ACBT_r'$ l'ombra portata che si vuol determinare. Infatti, basta perciò osservare che (nello spazio) ciascuno dei due piani VAT_r' e VBT_r' è tangente al cono e passa pel centro luminoso (contenente la retta r); onde l'involvente del cono risulta essere la superficie cilindrica che ha per 1ª traccia la suddetta linea $T_r'ACBT_r'$ e le cui generatrici hanno la direzione del centro luminoso.

Nel caso, precedentemente escluso, in cui T_r' non sia esterno a τ, la superficie conica è tutta in luce se T_r' è interno a τ; ed ha invece una sola generatrice in ombra, cioè la VT_r', se T_r' cade su τ.

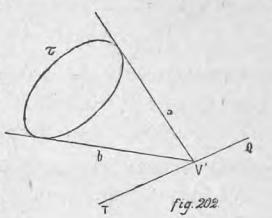
Se il vertice V è improprio, cioè se il cono è un cilindro, per costruire i due piani tangenti ad esso e passanti pel centro luminoso, si costruirà anzitutto la 1ª traccia t del piano ω che passa per una generatrice arbitraria del cilindro ed è parallelo alla retta r che serve ad individuare la direzione del centro luminoso (§ 30 Probl. 9). I piani tangenti al cilindro che si

vogliono costruire, saranno paralleli ad ω e però le loro 1.e tracce t_x e t_y parallele a t. Queste tracce t_x, t_y saranno dunque le due tangenti a τ parallele a t.

Osservazione. — Nel § 51 della Parte Prima abbiamo osservato che la regione in luce di un corpo è illuminata con una intensità che varia in proporzione diretta al coseno dell'angolo che il raggio luminoso forma colla normale alla superficie nel punto considerato. Se teniamo conto di questa legge, prescindendo da altre cause fisiche modificatrici, si vede che tutti i punti di una stessa generatrice del cono (o del cilindro) sono illuminati con la medesima intensità. Le linee di una superficie che riflettono la luce da ogni loro punto con uguale intensità si chiamano *isofote*; tali sono dunque le generatrici del cono (e del cilindro).

Esiste, come si vede facilmente, una generatrice che ha la *massima chiarezza*; essa occupa sulla regione illuminata una posizione intermediaria rispetto alle due generatrici che dànno la linea separatrice, e a partire da essa si ha, nei due versi, una graduale diminuzione d'intensità di luce.

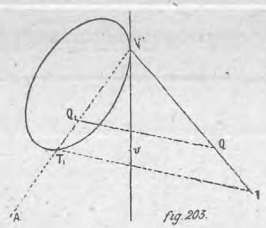
§ 13. — **Coni di 2° grado — Assi — Sezioni circolari.** — Le cose che abbiamo detto innanzi per tutti i coni, si applicano naturalmente come caso particolare ai coni algebrici, e in particolare ai coni di 2° grado (*coni quadrici*). Qui però si possono dare facilmente quelle maggiori determinazioni che per la generalità della questione non possono esser date in modo da abbracciare tutti i casi possibili. Così p. es. se si considera la rappresentazione di un cono quadrico nel metodo delle proiezioni centrali, la traccia τ di esso sarà una conica. La proiezione V' del vertice sarà esterna a τ, sopra τ, o interna a τ secondochè il centro di proiezione O (supposto distinto dal vertice) è esterno al cono, sul cono o interno ad esso.


fig. 202

Nel primo caso la regione d'ombra è la regione angolare delle tangenti (a, b) per V' alla τ, abbraccianti la conica (fig. 202). Le immagini delle sezioni piane del cono sono coniche (omologiche a τ, centro V', quindi) bitangenti alle rette a, b.

Se il centro di proiezioni O è sul cono o interno ad esso, le proiezioni dei punti del cono ricoprono l'intero quadro. Il

primo caso è sopratutto interessante. Esaminiamolo più da vicino. L'immagine V' del vertice $V \equiv (V' - TQ)$ appartiene alla conica traccia τ (fig. 203). Ogni punto A' del quadro che non stia sulla v tangente a τ in V' è immagine di *un* punto del cono diverso da O; si può subito assegnare questo punto A obiettivo di A' determinando la generatrice VA che ha per immagine $V'A'$, la traccia T_1 nella ulteriore intersezione con τ, ed è incidente alla TQ. (La costruzione del punto di fuga Q_1 di questa retta è eseguita nella fig. 203).



Viceversa, ogni punto del cono quadrico che non stia sulla generatrice VO ha una immagine sul quadro che non sta su v. Tutti i punti della generatrice VO del cono quadrico, diversi da O, hanno per immagine il punto (*fondamentale*) V'. Tutti i punti della retta (*fondamentale*) v del quadro si possono riguardare come immagini del centro di proiezione O.

Esaminiamo quali sono le immagini delle sezioni piane del cono.

Le sezioni piane del cono non passanti pel vertice hanno come immagini sul quadro le coniche passanti per il punto fondamentale V' *che toccano in esso la retta fondamentale* v, *e viceversa.*

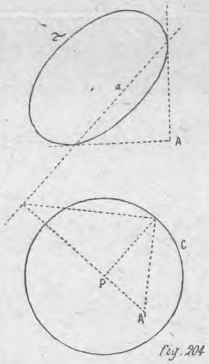
Invero la proiezione di una conica C, sezione piana del cono, è una conica C' per V', e poichè la C tocca una retta sezione del suo piano col piano tangente secondo VO, toccherà la traccia v di questo piano.

Viceversa una conica C' passante per V' e tangente a v è sempre l'immagine di una conica C, sezione piana del cono; lo si può vedere considerando 3 punti di C' ed i punti obiettivi sul cono; il piano di questi 3 punti obiettivi sega il cono secondo una conica la cui immagine è appunto C'.

Un caso particolarissimo di rappresentazione dei coni è quello in cui il vertice sia il centro di proiezione. Tutte le proiezioni dei punti del cono cadono allora sulla traccia. Questo modo di rappresentazione degenere è utile per risolvere relativamente ai coni, il problema della determinazione degli assi e delle sezioni circolari, problema che andiamo a trattare.

Sia τ la conica traccia. Se A è un punto del quadro, il raggio OA ha come piano polare rispetto al cono il piano Oa proiettante la polare a di A rispetto a τ. Se OA è un asse, ciò

vuol dire che OA è perpendicolare al piano Oa, ossia che a è l'antipolare di A rispetto al circolo di distanza C. Dunque per determinare gli assi del cono quadrico si dovrà procedere così:



Preso un punto qualsiasi A (fig. 204), se ne costruisca la polare a rispetto alla conica τ, e di a si costruisca l'antipolo A' rispetto a C; fra i punti A, A' viene ad intercedere una omografia (prodotto delle due polarità eseguite).

I punti uniti dell'omografia dànno gli assi del cono quadrico. Il cono stesso è di rotazione se l'indicata omografia è una omologia.

Determiniamo ora le sezioni piane circolari di un cono.

Escludasi il caso ovvio del cono di rotazione. Si hanno allora tre assi del cono. Sieno A_1, A_2, A_3 le loro tracce.

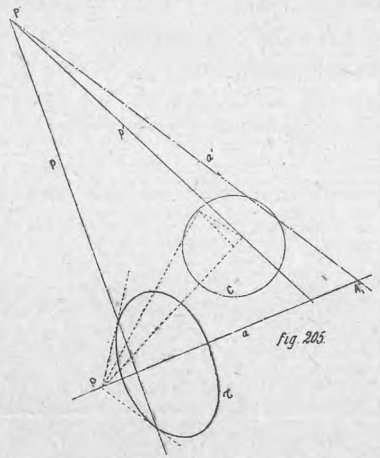
Nelle lezioni di Geometria proiettiva [1] si fa vedere come si ottengano le tracce dei piani di sezione circolare col piano all'infinito. Ricordiamo che, indicando con T la polarità rispetto alla conica sezione del cono col piano all'infinito e con π la polarità assoluta sul piano all'infinito, si definisce *luogo corrispondente* di una retta a il luogo dei punti coniugati dei punti di a simultaneamente in T e in π; si sa che tale luogo è una conica non degenere se a non passa per A_1, A_2 o A_3. Ciò posto, si deduce che le tracce dei piani di sezione circolare debbono passare per uno dei punti A_1, A_2, A_3 poichè su esse la involuzione di punti coniugati in T coincide con la involuzione dei punti coniugati in π (involuzione che ha come punti doppî, immaginari, i *punti ciclici*), vale a dire tali rette *fanno parte* del proprio luogo corrispondente, il quale perciò è una conica degenere. Per determinare queste rette si considerano le involuzioni di rette coniugate (di cui l'una appartiene al luogo corrispondente dell'altra) nei fasci di centro A_1, A_2, A_3, e si trova che una sola di queste involuzioni è iperbolica, onde si conclude che due sono le rette su cui coincidono le involuzioni di punti coniugati in T e in π, cioè i raggi doppî di questa involuzione.

---

(1) Cit. « Lezioni di Geometria proiettiva » § 82.

Riguardiamo ora il quadro come proiezione (da O) del piano all'infinito e ripetiamo quindi sul quadro le costruzioni eseguite nel piano all'infinito. La polarità T si proietta sul quadro nella polarità rispetto alla traccia τ, e la polarità assoluta π si proietta nella antipolarità rispetto al circolo di distanza. Il problema si riduce così a determinare le rette di fuga dei cercati piani di sezione circolare del cono.

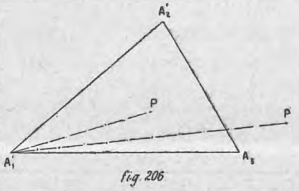
Queste rette passeranno per uno dei 3 punti A_1, A_2, A_3.


fig. 205.

Consideriamone uno, p. es. A_1' (fig. 205) e conduciamo una qualsiasi retta a per A_1'. Un punto qualsiasi P di a ha una polare p rispetto a τ ed una antipolare p' rispetto al circolo di distanza, che s'incontrano in un punto P'.

La retta $a' \equiv A_1' P'$ è coniugata di a nella involuzione del fascio di centro A_1'. E d'altra parte un'altra coppia dell'involuzione stessa è data da $A_1'A_2'$, $A_1'A_3'$.

Ora siccome i punti P, P appartengono a due diverse regioni triangolari $A_1'\ A_2'\ A_3'$, essi verranno proiettati da *uno* dei tre vertici del triangolo secondo due raggi che non separano i lati concorrenti in quel vertice, e così l'involuzione per esso sarà iperbolica (fig. 206).


fig. 206

Le rette doppie di questa involuzione iperbolica sono le rette di fuga dei piani di sezione circolare del cono.

Quando si tratti di un cono quadrico col vertice improprio, cioè di un cilindro, il problema di determinare il suo asse e le sue sezioni circolari si risolve opportunamente e con grande semplicità riferendo il cilindro stesso ad un sistema di proiezioni ortogonali.

Risolviamo appunto, almeno in un caso particolare, il problema di costruire le *sezioni circolari di un cilindro ellittico.*

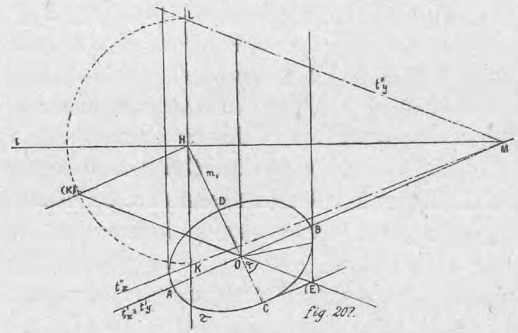
Ricordiamo che ogni cilindro ellittico, non di rotazione, viene segato secondo circoli dai piani di *due* giaciture ben determinate. Queste giaciture contengono la direzione dell'asse

maggiore della sezione normale del cilindro; quindi un piano di sezione circolare è perpendicolare al piano di simmetria che passa per l'asse minore della nominata sezione normale.

Si ha poi che l'inclinazione dell'asse del cilindro sopra un piano di sezione circolare è l'angolo il cui seno è uguale al rapporto del semi-asse minore al semi-asse maggiore della sezione normale.

Ciò premesso, per trovare le giaciture dei piani di sezione circolare di un cilindro ellittico rappresentato in un sistema di piani ortogonali, si può procedere nel modo seguente:

Supponiamo il piano π_1 normale al cilindro ellittico dato, il che si può sempre ottenere con un cambiamento dei piani di riferimento. La traccia τ del cilindro π_1 abbia il centro in O (traccia dell'asse del cilindro) e siano AB l'asse maggiore, CD l'asse minore di τ (fig. 207). Costruito allora l'angolo α, tale


fig. 207.

che sia $\cos\alpha = CO : BO$, il nostro problema si riduce a quello di costruire per AB i due piani inclinati su π_1 di un angolo α (Parte Prima § 32 Probl. 6 Oss.). Nella fig 207 sono eseguite le costruzioni; i piani cercati sono $(t_x't_x'')$ e $(t_y't_y'')$.

Notiamo che se il cilindro è obliquo ai piani π_1, π_2, il problema si risolve coi medesimi principii e senza ricorrere ad un cambiamento del sistema di proiezioni, eseguendo invece il ribaltamento (sul piano π_1) di una sezione normale del cilindro e quindi il raddrizzamento di essa. Questa costruzione si svolga per esercizio.

§ 14. — **Sviluppo del cono e del cilindro.** - Sia dato un cono K, adagiato sopra un piano tangente lungo una generatrice a, e sia V il vertice del cono. Immaginiamo di far ruzzolare il cono K sul piano tenendo fisso V fino ad adagiarlo

secondo un'altra generatrice di contatto b. La superficie del cono verrà distesa, o, come si dice, *sviluppata* sopra la regione angolare ab. Ogni porzione della superficie conica limitata da due generatrici a, b, può svilupparsi in tal guisa sopra una regione angolare piana la quale può anche coprire più volte l'intero piano. Solo è da avvertire che ogniqualvolta s'incontra una generatrice di flesso si deve invertire il senso di ruzzolamento del cono K che passa allora da una banda all'altra del piano. Trattandosi di un cono materiale, per cui il piano sarebbe impenetrabile, occorrerebbe tagliare il cono lungo le generatrici di flesso e sviluppare l'una di seguito all'altra le porzioni di superficie conica ottenute. Ma limitiamoci pure ad una porzione di cono convenientemente piccola.

Nello sviluppo di essa ogni linea, od arco di linea appartenente alla superficie del cono si distenderà sopra un arco di linea piana AB, di uguale lunghezza. Infine ogni figura posta sopra la superficie del cono si distenderà sopra una superficie piana che, considerata sulla superficie, astraendo dai rapporti col rimanente spazio, godrà delle stesse proprietà della primitiva (uguaglianza di angoli e di linee).

Considerando in questo senso la *Geometria sopra la superficie,* si potrà dire che la *Geometria sopra la superficie conica è equivalente alla Geometria sopra la regione piana che ne rappresenta lo sviluppo.*

A questo proposito occorre però un'avvertenza.

L'identità della Geometria sulla superficie conica e sul piano, si ha soltanto limitandoci espressamente, come s'è avvertito, a regioni assai piccole della superficie; la limitazione dev'esser tale che fra la superficie conica ed il suo sviluppo interceda una corrispondenza *biunivoca* senza eccezione.

Una eccezione nasce, p. es., quando si tratti di un cono chiuso e si prosegua il ruzzolamento del cono fino alla generatrice di partenza a in guisa da sviluppare tutta la superficie conica sopra una regione angolare piana; allora le figure poste sulla superficie del cono che attraversano la generatrice a, vengono tagliate nello sviluppo, e ad ogni punto di a corrispondono sul piano due punti.

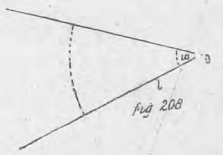
Può anche darsi che lo sviluppo di un cono venga a ricoprire più volte una stessa regione piana, e manchi in questo senso la univocità della corrispondenza.

Lo sviluppo di un cono, fatta attenzione alle eccezion

menzionate, permette di risolvere sul piano tutti i problemi della Geometria sulla superficie conica.

Vogliansi p. es. sul cono le linee, denominate *geodetiche*, che segnano la minima distanza fra due punti assai vicini sopra la superficie; dovremo cercare, sul piano dello sviluppo, le linee che godono della analoga proprietà, e queste sono le rette. Riavvolgendo il piano sul cono, le rette forniranno dunque le geodetiche sul cono.

Applichiamo le cose dette al cono di rotazione. Il suo sviluppo completo sopra un piano è dato da un angolo avente un certo vertice O (fig. 208); la porzione di superficie conica compresa tra il vertice ed una sezione (circolare) normale all'asse, viene sviluppata sopra un settore circolare; in altre parole, gli archi di circolo di centro O, limitati ai lati dell'angolo, dànno lo sviluppo delle sezioni del cono normali all'asse.



Si voglia calcolare l'ampiezza ω dell'angolo che dà lo sviluppo del cono. Essa vien data dalla lunghezza dell'arco di cerchio di raggio l col centro in O, intercetto dai lati dell'angolo. Per valutarla occorre dunque valutare la lunghezza del circolo C sezione del cono con un piano normale all'asse che incontri le generatrici alla distanza l dal vertice (distanza che poniamo uguale ad 1).

Sia α l'angolo generatore del cono, e indichiamo con r il raggio del nominato circolo C, si ha:

$$r = \operatorname{sen}\alpha;$$

quindi la lunghezza di C è $2\pi\operatorname{sen}\alpha$;

$$\omega = 2\pi\operatorname{sen}\alpha.$$

Si vede così che lo sviluppo del cono di rotazione è un angolo sempre minore di quattro angoli retti, eccetto il caso in cui il cono si riduca ad un piano, essendo retto l'angolo generatore.

Si abbia un cono di rotazione rappresentato in un metodo di rappresentazione; si può avere allora facilmente l'ampiezza α dell'angolo generatore del cono (semi-apertura del cono); basta evalutare l'angolo di una generatrice coll'asse.

Ricorrendo allo sviluppo del cono si considera un piano tangente al cono lungo una generatrice a e su di esso pren-

dendo la detta generatrice come un lato, ed il vertice nel vertice O del cono, si costruirà l'angolo di ampiezza

$$\omega = 2\pi \operatorname{sen}\alpha,$$

che rappresenta lo sviluppo del cono. Volendo la posizione B' assunta da un punto B del cono dopo lo sviluppo (o viceversa) si osserva che questo punto B' si trova, nel piano dello sviluppo, sul circolo di centro O, avente per raggio la distanza r del punto B dal vertice del cono; inoltre la retta OB' fa colla generatrice di contatto a un angolo β che può valutarsi facilmente (fig. 209).

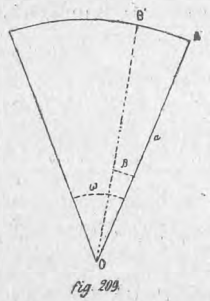


fig. 209.

Infatti $\frac{2\pi\beta}{\omega}$ è l'angolo di cui ha ruotato la generatrice a del cono, nel movimento generatore di questo, per assumere la posizione OB.

Le costruzioni inverse permettono di determinare per punti le linee del cono che vengono sviluppate secondo date linee nel piano di sviluppo; in particolare le geodetiche, che vengono sviluppate secondo segmenti rettilinei.

Consideriamo ora il caso del cilindro.

In modo analogo al caso del cono (interviene qui soltanto il fatto che il vertice del cono è all'infinito), lo sviluppo si ottiene col ruzzolamento sopra un piano tangente, ed è dato (ove si tratti di un cilindro chiuso, di cui una sezione piana abbia una lunghezza finita) da una striscia (parte di piano compresa tra due rette parallele). Se il cilindro è di rotazione ed r il suo raggio (raggio del circolo, sua sezione normale), la larghezza della striscia che ne dà lo sviluppo è $2\pi r$ (fig. 210). La porzione della superficie cilindrica compresa tra due sezioni, circolari, normali si sviluppa sopra un rettangolo.

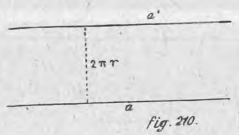


fig. 210.

§ 15. — **L'elica.** — La geodetica del cilindro dicesi *elica*. Sieno A, B due punti mediante i quali l'elica è determinata, e A', B' le posizioni assunte dai due punti dopo lo sviluppo del cilindro (fig. 211). L'elica determinata dai punti A, B sul cilindro viene rappresentata nello sviluppo dal segmento rettilineo $A'B'$. Questo segmento rappresenta sempre un arco

d'elica, tranne in due casi particolari che escluderemo nel seguito, cioè quando è parallelo o perpendicolare alla generatrice di partenza a, nei quali casi rappresenta risp. una retta o un circolo. Nello sviluppo del cilindro, dato dalla striscia compresa fra i lati a, a', le generatrici vengono a disporsi secondo rette parallele ad a, a'; perciò ogni segmento rettilineo che traversi la striscia le incontra sotto un agolo costante.

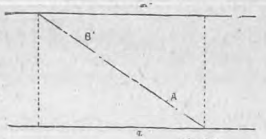


fig. 211.

Questa proprietà continua a sussistere se si torna ad avvolgere la striscia sul cilindro, quindi:

L'elica ha una inclinazione costante sulle generatrici del cilindro.

Per acquistare un'idea precisa della forma dell'elica, si consideri il rettangolo limitato da a, a' di cui $A'B'$ (prolungato) è una diagonale; riavvolgendo questo rettangolo sul cilindro si ha la porzione di superficie cilindrica compresa fra due sezioni normali; la diagonale considerata dà un'elica sul cilindro, e i due punti estremi di essa vengono a porsi sopra una stessa generatrice del cilindro. Se s'immagina di compiere il riavvolgimento del rettangolo sul cilindro con un moto uniforme, abbiamo dell'elica la seguente generazione meccanica:

L'elica è la linea descritta da un punto soggetto a due moti uniformi, uno di traslazione parallelo ad un asse, l'altro di rotazione attorno a quest'asse.

Con questa generazione l'elica si può proseguire anche al di là del punto in cui torna ad incontrare una stessa generatrice; ogni arco dell'elica i cui estremi sono due intersezioni consecutive di una stessa generatrice coll'elica, dicesi *giro dell'elica*.

Tutti i giri dell'elica sono uguali fra loro, poichè si sovrappongono con un movimento (elicoidale) generatore dell'elica. Dicesi *passo dell'elica* il segmento di generatrice compreso fra gli estremi di un giro; *raggio* r *dell'elica* il raggio del cilindro a cui appartiene, infine dicesi *inclinazione* α *dell'elica* l'angolo costante che essa (cioè la sua tangente in un punto) fa col piano normale alle generatrici del cilindro. Tra queste tre quantità sussiste la relazione la quale lega i cateti ed un angolo acuto del triangolo rettangolo che rappresenta la metà dello sviluppo della superficie cilindrica compresa tra due sezioni normali racchiudenti un giro dell'elica (fig. 212).

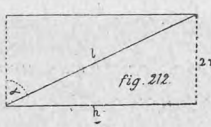


fig. 212.

Problema. — *Costruire per punti un'elica che abbia un dato raggio* r *e un dato passo* h.

Ci riferiamo alla determinazione di essa mediante la sua rappresentazione in un sistema di proiezioni ortogonali (fig. 213).

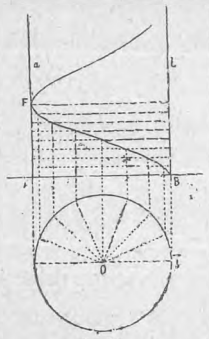


fig 213.

Prendiamo il primo piano di proiezione normale all'asse dell'elica, onde la prima proiezione dell'elica è un cerchio C di raggio r, traccia del cilindro che la contiene. I due piani di profilo tangenti al detto cilindro hanno risp. come traccia (1ª e 2ª) i lati a, b, di una striscia (perpendicolare ad l) che racchiude le seconde proiezioni dei punti del cilindro e quindi dell'elica. Si supponga per semplicità di avere assunta la linea di terra l parallela al raggio OT del circolo C che unisce la traccia T dell'elica nel 1° piano di proiezione con O. Sia AB il segmento intercetto dalle rette a, b, sulla l. Sopra uno dei lati a della striscia che contiene le seconde proiezioni del cilindro si riporti un segmento $AF = \frac{h}{2}$ (avente la lunghezza uguale alla metà del passo dell'elica).

Si divida quindi il segmento AF in $2n$ parti uguali e si conducano per i punti di divisione le parallele ad l; si divida pure nel medesimo numero di parti uguali una delle semicirconferenze di C aventi l'estremo T e pei punti di divisione si conducano le perpendicolari ad l: queste incontrano ordinatamente le nominate parallele ad l in punti della 2ª proiezione di un'elica di raggio r e passo h, avente in T la sua traccia sul piano di rappresentazione; una tale elica può così essere costruita per punti assai vicini, se si prende n assai grande.

La costruzione indicata si fonda sulla generazione meccanica dell'elica che abbiamo assegnata.

Osservazione. — *La proiezione ortogonale dell'elica sopra un piano parallelo all'asse è una sinusoide.*

Esercizi. — 1) Costruire la *prospettiva parallela obliqua dell'elica sopra un piano normale all'asse.*

Questa curva è una *cicloide.*

2) Costruire la *prospettiva dell'elica sopra un piano normale all'asse, da un centro proprio preso sull'asse.*

Questa curva è una *spirale iperbolica.*

CAPITOLO II.

Linee gobbe e sviluppabili.

§ 16. — **Linee gobbe.** Nel precedente Capitolo siamo già stati condotti alla considerazione di *linee gobbe*, cioè di linee generate dal moto di un punto che non rimane costantemente in un piano. Ci si sono presentate linee gobbe come intersezioni di due coni, e come geodetiche sopra superficie coniche, p. es. l'elica, geodetica del cilindro.

Una linea gobba viene proiettata sopra un piano da un punto che non le appartiene, secondo un cono. Tenendo presente ciò che è stato detto in ordine alla rappresentazione analitica delle linee piane (intuitive) convenientemente limitate, la precedente osservazione serve come punto di partenza ad una definizione analitica delle linee gobbe intuitive.

Volendo rappresentare analiticamente una linea gobba C, o un suo tratto convenientemente limitato (e che può quindi supporsi senza punti all'infinito), si assuma un sistema di coordinate cartesiane x, y, z coll'origine in un punto generico O di C, e si considerino i due cilindri proiettanti la linea C dai punti all'infinito degli assi y ed x. Le equazioni di tali cilindri vengono date dalle equazioni delle proiezioni C_1, C_2 di C risp. sui piani $y = o$ ed $x = o$, onde essendo C convenientemente limitata, possono assumersi sotto la forma:

$$(1) \qquad x = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots; \quad y = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

Viceversa due equazioni della forma (1), dove i secondi membri sono serie di **Maclaurin** convergenti in un certo intervallo, rappresentano una linea dello spazio, in generale gobba, passante per l'origine; si può provare che tale linea viene

proiettata da un punto qualunque fuori di essa secondo un cono rappresentabile analiticamente, secondo è stato detto nel § 5.

Se poi si proiettano i punti della linea, anzichè da un punto esterno, da un punto di essa, p. e. da O, le rette proiettanti appartengono ancora ad un cono, purchè della linea non facciano parte dei segmenti rettilinei per O (ciò che può escludersi).

Le generatrici del cono proiettante da O i punti di C contengono oltre O un altro punto (almeno uno) di C e però diconsi corde di C; ma vi è in generale nel cono *una* generatrice che è limite di una corda variabile di cui l'ulteriore punto d'incontro con C si avvicini indefinitamente ad O; questa si dice la *tangente a C in O*; la tangente a C può riguardarsi come una corda che unisce due punti infinitamente vicini di C.

Allorchè C viene proiettata da un punto esterno sopra un piano in una curva C', la tangente a C in un punto O ha per immagine la tangente a C' nel punto O' proiezione di O.

Dunque se la C è rappresentata analiticamente mediante le equazioni (1), la sua tangente in O ha come proiezione sul piano $y = o$ la tangente alla sua 1.ª proiezione C_1 in O, cioè la retta $x = a_1 z$; e come proiezione sul piano $x = o$ la tangente alla sua 2.ª proiezione C_2 in O, ossia la retta $y = b_1 z$; perciò le equazioni della tangente a C in O sono

$$x = a_1 z, \quad y = b_1 z. \tag{2}$$

Tutti i piani passanti per la tangente a C in O debbono riguardarsi come aventi comuni con C due punti infinitamente vicini, riuniti in O, che si trovano sulla detta tangente.

Un piano per l'origine ha un'equazione della forma:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = o;$$

se esso deve contenere la retta (2) tangente a C in O, la sua equazione deve essere soddisfatta ponendo

$$x = a_1, \quad y = b_1, \quad z = 1,$$

e però si deve avere

$$\gamma = -(a_1\alpha + b_1\beta),$$

ossia l'equazione di un piano per la retta (2) è:

$$\alpha x + \beta y = (a_1\alpha + b_1\beta)\, z.$$

Se in questa si sostituiscono per x, y le loro espressioni date dalle formole (1) si ottiene l'equazione in z:

$$\alpha(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) + \beta(b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) = (a_1\alpha + b_1\beta)\, z,$$

ossia,

$$\alpha(a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) + \beta(b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) = o,$$

equazione da cui dipende la determinazione dei punti d'incontro del piano considerato colla linea C; questa equazione ha come radice doppia (ed in generale non tripla) $z = o$.

Fra i nominati piani

$$\alpha x + \beta y = (a_1\alpha + b_1\beta)\, z$$

ve n'è in generale *uno* che deve riguardarsi come avente tre intersezioni con C riunite in O, e dicesi il *piano osculatore* a C in O; l'equazione di questo piano si ottiene disponendo del rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ in guisa che l'espressione

$$\alpha(a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) + \beta(b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)$$

cominci colla potenza z^3 anzichè con z^2, dunque ponendo:

$$\alpha a_2 + \beta b_2 = o.$$

Tale condizione si soddisfa ove si prenda:

$$\alpha = b_2 \qquad \beta = -a_2,$$

e quindi l'equazione del piano osculatore in O alla curva C è:

$$b_2 x - a_2 y = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, z.$$

Il piano osculatore in O risulta determinato se non è

$$a_2 = b_2 = o;$$

se $a_2 = b_2 = o$, la tangente in O a C è una *tangente di flesso* avente tre punti infinitamente vicini comuni a C; questo fatto costituisce una particolarità del punto O, se la C non contiene segmenti rettilinei.

Osservazione 1.ª — In un punto generico di una linea non contenente tratti rettilinei vi è *una* tangente ed *un* piano osculatore. Il piano osculatore è fisso per tutti i punti di una linea piana, coincidendo col piano della linea.

Una linea gobba può avere dei punti singolari presentanti eccezione ai fatti generali sopra enunciati. Così una linea gobba può avere dei punti doppî o multipli per cui passino due o più rami, ciascuno dotato di una tangente in quel punto. Quando si proietti una linea gobba da un punto esterno, risultano multiple pel cono proiettante le generatrici che proiettano i punti multipli della linea. Oltre a queste il detto cono ha come rette multiple quelle che incontrano la linea in più di un punto.

Osservazione 2.ª — Anche delle linee gobbe si possono considerare punti o rami immaginarî, come delle linee piane.

§ 17. — **Sviluppabili.** — Un piano che si muova nello spazio genera una *sviluppabile*, figura correlativa della *linea*.

Una sviluppabile può rappresentarsi analiticamente con due equazioni, analoghe alle (1) del prec. §, in coordinate di piani.

Data una linea gobba C, mentre un punto si muove e la descrive, il piano osculatore a C genera una sviluppabile, la così detta *sviluppabile circoscritta* a C; è stato già notato (§ prec.) che il piano osculatore in un punto ad una linea piana resta fisso al variare del punto, coincidendo col piano della linea.

Considerando una sviluppabile come ente correlativo di una linea, possiamo definire le *generatrici* della sviluppabile e i *punti di contatto dei suoi piani* in opposizione alle tangenti della linea e ai piani osculatori nei punti di esso.

Riguarderemo, appunto, una generatrice di una sviluppabile come la intersezione di due piani infinitamente vicini di essa (ossia come limite ecc.), ed il punto di contatto di un piano della sviluppabile come il punto d'incontro di quel piano con gli altri due della sviluppabile ad esso infinitamente vicini.

Mentre un piano si muove descrivendo una sviluppabile, il suo punto di contatto in generale si muove descrivendo una *linea*, detta *spigolo di regresso* della sviluppabile.

La definizione di spigolo di regresso di una sviluppabile va contrapposta per dualità a quella di sviluppabile circoscritta ad una linea.

Il fatto enunciato dianzi subisce eccezione soltanto nel caso che tutti i piani della sviluppabile passino per uno stesso punto, nel qual caso la sviluppabile è un *cono inviluppo*; invero in questo caso lo spigolo di regresso si riduce al solo vertice del cono.

Questa eccezione compare appunto come correlativa di quella che si presenta nella definizione della sviluppabile circoscritta ad una linea, poichè in questa definizione si escludono le linee piane (enti correlativi dei coni inviluppo).

Si abbia una linea gobba C; abbiamo detto che mentre un punto M si muove descrivendola, il piano μ osculatore a C in M descrive la sviluppabile S circoscritta a C. Ora notiamo che come μ è piano osculatore a C in M, così M è punto di contatto di μ nella sviluppabile S. Ce ne possiamo convincere colla seguente considerazione (sostituibile con un ragionamento in forma rigorosa):

Sieno 1, 2, 3, 4, 5 punti consecutivi, infinitamente vicini di C; il piano osculatore nel punto 1 è 1 2 3, il piano osculatore in 2 è 2 3 4, quello osculatore in 3 è 3 4 5; il punto 3 è dunque il punto d'intersezione di quei 3 piani infinitamente vicini della sviluppabile S, e ciò prova appunto l'asserto.

Per rendere rigoroso il precedente ragionamento, basta considerare 1 2 3 4 5.... come un poligono gobbo variabile inscritto nella linea C, poligono di cui cresce il numero dei lati, e decresce la grandezza di questi (in modo comparabile) in guisa d'avere per limite la linea C.

Da ciò che abbiamo detto segue che, se S è la sviluppabile circoscritta alla linea gobba C, la linea C è lo spigolo di regresso della sviluppabile S.

Segue ancora che le tangenti a C sono pure le generatrici della sviluppabile S, giacchè una di queste rette, p. e. la 2 3 congiungente due punti infinitamente vicini di C, è anche la sezione dei suoi due piani osculatori infinitamente vicini 1 2 3, 2 3 4.

Concludiamo, riassumendo, che una linea gobba dà luogo alla considerazione di 3 enti:

1) *la linea stessa riguardata come luogo dei suoi punti;*

1) *la sviluppabile circoscritta dei suoi piani osculatori, sviluppabile di cui la linea è spigolo di regresso*;

3) *la rigata delle tangenti alla linea, o, ciò che è lo stesso, la rigata costituita dalle generatrici della sviluppabile circoscritta* (rigata sviluppabile).

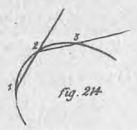
Gli enti 1) e 2) sono l'uno correlativo dell'altro, l'ente 3) è correlativo di se stesso.

Osservazione. — Una retta che si muova nello spazio genera sempre una rigata, ma questa rigata non può sempre riguardarsi come la rigata delle tangenti ad un linea o delle generatrici

di una sviluppabile, ossia, per usare di una consueta locuzione, come una *rigata sviluppabile.*

La condizione perchè ciò avvenga può essere espressa dicendo che:

Una rigata è sviluppabile se in essa due qualsiansi generatrici infinitamente vicine sono incidenti.

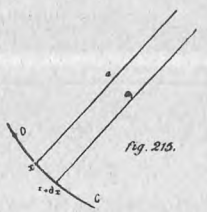

fig. 214.

Infatti se 1, 2, 3 sono tre punti (consecutivi) infinitamente vicini di una linea, le tangenti (consecutive) 1 2, 2 3 di essa hanno comune il punto 2, e giacciono nel piano osculatore 1 2 3 (fig. 214).

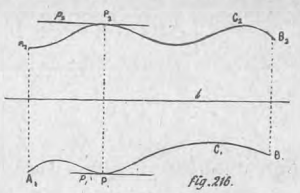
Viceversa, se in una rigata due qualunque generatrici infinitamente vicine sono incidenti e non passano tutte per un punto, cioè la rigata non è un cono, il luogo dei punti d'incontro di una generatrice variabile colla generatrice infinitamente vicina, è una linea di cui ciascuna generatrice contiene due punti infinitamente vicini, cioè il punto d'incontro colla generatrice precedente e colla successiva, quindi le generatrici della rigata sono tutte tangenti ad una linea; correlativamente esse sono le generatrici di una sviluppabile, cioè della sviluppabile circoscritta alla linea, se non giacciono tutte in un piano.

È appena necessario avvertire che le locuzioni di punti e rette infinitamente vicini usate nel discorso precedente stanno a sostituire relazioni di limite, aventi un significato rigoroso usato solo in quella forma.

Volendo dunque esprimere col calcolo la condizione perchè una rigata sia sviluppabile si dovrebbe enunciare il fatto seguente: si facciano corrispondere le generatrici della rigata ai valori di una variabile x, prendendo p. e. una linea sezione piana C della rigata e facendo corrispondere ogni generatrice a della rigata alla misura dell'arco compreso fra il punto d'incontro di a con C ed un punto fisso O di C (fig. 215); ciò posto si valuti la minima distanza λ fra una qualsiasi generatrice x ed una generatrice assai vicina $x + dx$; mentre dx tende a zero, λ tende a zero ed è una quantità infinitesima d'ordine superiore a dx.


fig. 215.

§ 18 — **Rappresentazione delle linee gobbe e delle sviluppabili.** — Una linea gobba C può rappresentarsi in uno qualunque dei sistemi di rappresentazione che abbiamo studiato. Nel metodo delle proiezioni ortogonali essa viene rappresentata mediante le sue proiezioni C_1, C_2, sui piani principali. (Si è avuto occasione di dare incidentalmente una sifatta rappresentazione per l'elica). Volendo la tangente p in un punto $P \equiv (P_1P_2)$ della C, basta condurre per P_1 la tangente p_1 a C_1, per P_2 la tangente p_2 a C_2; si ha allora $p \equiv (p_1p_2)$ (fig. 216). La rigata delle tangenti a C viene rappresentata mediante i due inviluppi delle tangenti a C_1, C_2, proiezioni di essa; due coppie di tangenti omologhe infinitamente vicine sono le proiezioni di due tangenti a C infinitamente vicine, tra loro incidenti, perchè i punti di contatto con C_1 e con C_2 di due tangenti omologhe sono sopra una perpendicolare alla linea di terra. Ciò dà, sul piano rappresentativo, la condizione perchè due inviluppi riferiti tra loro siano le proiezioni di una rigata sviluppabile.


fig. 216.

La sviluppabile circoscritta a C viene rappresentata mediante due inviluppi, sue tracce sui piani principali; le curve inviluppate sono i luoghi delle tracce delle tangenti alla C rispetto ai due piani principali. Tali curve K_1, K_2 possono costruirsi per punti determinando le tracce di molte tangenti alla C abbastanza vicine tra loro, ed unendo con un tratto continuo queste tracce. La costruzione della tangente a K_1 in un punto (tangente che deve incontrare sulla linea di terra la tangente omologa di K_2) permette di determinare il piano osculatore alla C passante per una data tangente, ossia il piano osculatore a C in un dato punto. La sviluppabile circoscritta alla curva C viene adunque determinata dai due inviluppi K_1, K_2 (inviluppi delle tracce dei piani della sviluppabile) riferiti tra loro in modo che due tangenti omologhe s'incontrino sulla linea di terra.

Per rappresentare una linea gobba C nel metodo delle proiezioni centrali non basta darne l'immagine C' nel quadro, ma occorre ancora aver rappresentata una retta per ogni punto della C. Per ottenere questo nel modo più semplice, s'immaginerà la C proiettata da un punto T del quadro, il quale sarà la traccia di ciascun raggio proiettante (generatrice del cono proiettante); basterà quindi assegnare la linea dei punti di fuga K del cono proiettante C da T (fig. 217).

Questa linea di fuga K e la C' risultano riferite tra loro, due punti omologhi essendo allineati con T.

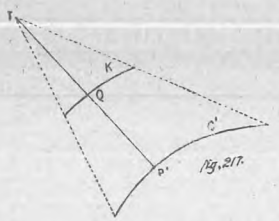


fig. 217.

Mediante queste due linee C' e K, la C è rappresentata completamente; un punto di C, per es. P, ha la proiezione P' su C' e la retta TP passante per esso viene rappresentata dalla traccia T e dal punto di fuga Q intersezione di TP' con K; soltanto occorrerebbe spezzare in più parti corrispondenti le linee C' e K, ove fossero incontrate in più punti dai raggi T sul quadro.

Si noti ancora che la C' basta da sola a rappresentare completamente la C, quando sia data una superficie contenente la C e segata in un sol punto dai raggi pel centro di proiezione (ad es. una sfera passante pel detto centro).

Osservazione. — In sostanza si vede che una linea gobba, quando non sia già data un'altra superficie per essa, viene generalmente rappresentata come intersezione di due coni, i quali nel caso della proiezione ortogonale vengono sostituiti da due cilindri.

§ 19. — **Elicoide sviluppabile.** — Riprendiamo la rappresentazione dell'elica (§ 15) per applicare su questo esempio le cose dette innanzi.

La sviluppabile circoscritta all'elica prende il nome di *elicoide sviluppabile*. L'asse dell'elica si dirà anche *asse dell'elicoide*.

Ci proponiamo ora di risolvere il seguente

Problema. — *Determinare la traccia di un elicoide sviluppabile sopra un piano normale all'asse.*

Sia E l'elicoide, e l'elica suo spigolo di regresso, C il cerchio proiezione ortogonale di e sul piano che si considera, T la traccia di e sul piano stesso. Consideriamo un punto A del 1° giro dell'elica al disopra o al disotto del piano di rappresentazione, e sia A_1 la sua proiezione su questo (fig. 218). Immaginiamo di sviluppare il cilindro che contiene e sul piano tangente lungo la generatrice AA_1, il quale piano ha per traccia t_1 tangente a C in A_1. Nello sviluppo la e si estende sopra la tangente ad e in A ed il punto T (traccia di e) viene a porsi sulla t_1 ad una distanza da A_1 uguale alla lunghezza dell'arco TA_1 di C, sviluppato sulla t_1; se dunque si riporta su t_1 un segmento A_1T_1 uguale a quella lunghezza (ed in un senso conveniente), T_1 è la traccia della tangente ad e in A. Il senso in cui deve essere riportata su t_1 la lunghezza dell'arco TA_1 di C dipende dal considerare la porzione di elica e superiore o inferiore al piano di rappresentazione e dal senso dell'elica e (senso di moto rotatorio che insieme alla traslazione parallela dell'asse genera e).

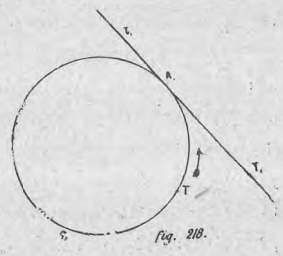


fig. 218.

La costruzione indicata che può essere proseguita al di là del primo giro dell'elica e tanto per la porzione di essa superiore al piano quanto per l'inferiore, mostra che:

La traccia dell'elicoide sviluppabile in un piano normale all'asse è l'evolvente del cerchio, proiezione, sul piano, dell'elica, spigolo di regresso.

Volendo rappresentare completamente un elicoide sviluppabile E col metodo delle proiezioni ortogonali, si assumerà come 1° piano di proiezione un piano normale all'asse, e si traccerà su questo il cerchio (1ª proiezione dell'elica e spigolo di regresso di E; quindi si costruirà l'evolvente di C, a partire dalla traccia T di e, nell'uno e nell'altro senso.

Occorre poi dare il passo dell'elica e ed il suo senso e costruirne quindi la seconda proiezione. Allora volendo costruire la generatrice dell'elicoide per un punto $A = (A_1A_2)$ dell'elica e, si procederà nel seguente modo: Si assumerà come prima proiezione di questa generatrice la tangente in A_1 al cerchio C, come prima traccia T_1 l'incontro di questa coll'n° giro dell'evolvente di C, se A appartiene all'n° giro dell'elica a partire da T, e precisamente con quel ramo dell'evolvente che corrisponde alla porzione dell'elica (ascendente o discendente) che contiene A; infine si unirà A_2 col piede della perpendicolare condotta da T_1 sulla linea di terra, e si avrà così la 2ª proiezione della generatrice cercata di E (tangente in A ad e).

Si svolgerà la costruzione per esercizio.

§ 20. — **Sviluppo di una superficie sviluppabile.** — Una rigata sviluppabile, generata dalle tangenti ad una curva gobba, può considerarsi come luogo dei punti di queste rette ed appare allora come una *superficie sviluppabile*.

Abbiamo detto che ad una tale rigata compete la proprietà

peculiare che due rette infinitamente vicine sono incidenti. Da ciò segue che la superficie si può intuitivamente considerare come generata dal movimento di una piccolissima striscia piana angolare racchiusa da due tangenti consecutive dello spigolo di regresso, ossia come limite di una particolare superficie poliedrica avente come spigoli le generatrici della sviluppabile.

Immaginando di disporre le nominate striscie angolari successivamente sul piano in modo che due consecutive abbiano un lato in comune, si verrà a considerare la data superficie come deformata senza estensione in guisa da poter essere adagiata sul piano; si otterrà per tal modo il così detto *sviluppo* della superficie sviluppabile sopra un piano (fig. 219).



fig. 219.

Abbiamo già notato (§ 14) la possibilità di un tale sviluppo pei coni (particolari superficie sviluppabili); in quel caso lo sviluppo si otteneva col ruzzolamento su un piano tangente. Ed è anche qui un ruzzolamento, inteso in un senso più generale, l'operazione che permette di ottenere lo sviluppo di una superficie sviluppabile. Del resto tutte le considerazioni ivi svolte trovano qui la loro estensione.

Si acquista un'idea chiara dello sviluppo di una superficie sviluppabile, pensando che la superficie stessa sia costituita come da un foglio flessibile e inestendibile, che può per semplice flessione essere adagiato sopra un piano, o, per essere più esatti, pensando la superficie costituita da più fogli (regioni superficiali) separatamente adagiabili sul piano, giacchè *le considerazioni sullo sviluppo si riferiscono sempre a regioni superficiali limitate.*

Mediante lo sviluppo *la Geometria sopra le superficie sviluppabili si riduce alla Geometria sul piano*; in particolare si possono trovare le geodetiche di tali superficie partendo dalle rette del piano.

Ci proponiamo appunto di riconoscere per tal modo una proprietà caratteristica delle geodetiche sopra una superficie sviluppabile, che verrà poi estesa alle geodetiche di una superficie qualunque.

Premettiamo il seguente lemma:

Data sopra una superficie sviluppabile Σ *una linea qualunque* l, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè ad un punto* A *di* l *corrisponda, nello sviluppo di* Σ *sul piano, un flesso della curva trasformata* l, *è che il piano osculatore in* A *ad* l *sia normale alla superficie nel punto* A.

Per dimostrare questa proprietà indichiamo con A, B, C tre punti consecutivi di l; con t_1, t_2, t_3 le tre generatrici di Σ rispettivamente per A, B, C. Se il punto A dà luogo ad un flesso di l, vuol dire che gli elementi infinitesimi consecutivi AB, BC di l dopo la trasformazione si dispongono in linea retta; ma perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che le tangenti AB, BC della l formino colla t_2, da parti opposte, angoli opposti uguali, poichè tali angoli debbono rimanere inalterati nello sviluppo di Σ. Ora, se le nominate tangenti AB, BC di l, sono ugualmente inclinate sulla t_2, esse potranno essere riguardate come due generatrici infinitamente vicine di un cono di rotazione che ha per asse t_2; di qui segue che il piano ABC, tangente al nominato cono lungo la generatrice AB, risulta normale al piano $AB \cdot t_2 \equiv t_1 t_2$ tangente a Σ in A.

Il ragionamento è facilmente invertibile, sicchè la condizione espressa nell'enunciato appare, appunto come abbiam detto, non solo necessaria ma anche sufficiente.

Dal lemma or ora stabilito si deduce quindi il teorema che avevamo in vista:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una linea tracciata sopra una superficie sviluppabile sia una geodetica, è che in ogni punto di essa il piano osculatore sia normale alla superficie.

Imperocchè una tal linea viene sviluppata secondo una linea di cui tutti i punti sono flessi, cioè secondo una retta, e viceversa.

Vista l'utilità dello sviluppo sopra un piano della superficie si può domandare quali siano le superficie per cui un tale sviluppo è possibile. La risposta è che la superficie (cui spettano, per ipotesi, tutti gli ordinari attributi intuitivi) deve potersi pensare come costituita da una successione di striscie piane infinitamente piccole, e quindi deve essere una rigata sviluppabile circoscritta ad una linea gobba o un cono. Per un'altra superficie, per una sfera ad es., lo sviluppo sopra un piano non è possibile.

Le cose dette sui coni illustrano già con esempî la considerazione dello sviluppo di una superficie. Aggiungeremo a questi l'esempio relativo all'elicoide sviluppabile.

§ 21. — **Sviluppo dell'elicoide sviluppabile.** — Le più belle proprietà dell'elicoide sviluppabile, che esso ha in comune

cogli altri elicoidi, dipendono dal fatto che può scorrere su sè stesso con un *movimento elicoidale* dello spazio. Tale movimento si può comporre di due moti uniformi, uno di rotazione attorno all'asse, l'altro di traslazione parallela al medesimo; il rapporto della velocità dei due moti è $\frac{2\pi r}{h}$, essendo r il raggio ed h il passo dell'elica e spigolo di regresso.

In un tale movimento tutti i punti dell'elicoide E descrivono delle eliche giacenti su E, e parallele ad e, in ognuna delle quali il passo è costante. I raggi di queste eliche sono tanto più grandi quanto più lontano è il punto mobile generatore dal punto di contatto con e della generatrice di E che passa per esso. Il movimento elicoidale che sovrappone E a sè stesso, si può considerare come derivante dalla ripetizione di un *moto elicoidale infinitesimo* che trasforma ogni figura tracciata sulla superficie E in una figura eguale (su E) infinitamente vicina alla prima; s'intende con questo che il nominato moto elicoidale viene perfettamente definito nella sua continuazione, appena sia fissato in un istante piccolo quanto si vuole.

La proprietà dell'elicoide E di sovrapporsi a sè stesso per un movimento elicoidale infinitesimo dello spazio, e quindi per un movimento continuo che nasce ripetendo quel movimento elementare, non è una proprietà inerente alla Geometria sopra la superficie E, nel senso ristretto, ossia non permane in generale ove la E venga deformata considerandola come una superficie flessibile, inestendibile. In tal caso il movimento elementare che sovrappone E a sè stesso corrisponde però ad una trasformazione infinitesima della superficie, la quale trasformazione della superficie deformata in sè stessa ha la proprietà peculiare di conservare le distanze geodetiche sulla superficie; essa viene generata ancora da uno strisciamento nel quale ogni porzione di superficie muta in generale di forma.

Si supponga di avere sviluppato l'elicoide E sul piano. Allora al moto (elicoidale) elementare che sovrappone E a sè stesso, corrisponderà uno strisciamento del piano su sè stesso che sovrappone a sè stesso lo sviluppo di E, e la linea sviluppata di e. Questo è un effettivo moto che trasforma ogni figura del piano in una figura uguale, e che, appunto perchè infinitesimo, può considerarsi come definito dallo stato iniziale e finale del piano.

La sviluppata di e e le linee sviluppate delle eliche parallele ad e su E, sono le linee del piano che segnano le traiettorie dei punti di esso nel movimento; sono dunque linee che vengono sovrapposte a sè stesse da un movimento elementare del piano.

Ora questo movimento elementare (come ogni movimento del piano nel quale si faccia attenzione soltanto allo stato iniziale e finale) è in generale una rotazione del piano attorno ad un punto. La sviluppata di e è dunque un cerchio C generato in quel moto rotatorio da un punto della linea. Parimente sono cerchi, concentrici a quello, le linee sviluppate delle eliche parallele ad e descritte dai punti di E nel moto elicoidale considerato.

Le generatrici dell'elica vengono a dare, dopo lo sviluppo, le rette tangenti al cerchio C, e quindi lo sviluppo dell'elicoide ricopre (infinite volte) la regione di piano esterna a C.

Si potrebbe dubitare che in particolare il moto elementare considerato nel piano si riducesse ad una traslazione, e quindi l'elica e venisse a svilupparsi sopra una retta invece che sopra un cerchio.

Questo dubbio si esclude facilmente osservando che il movimento elicoidale non sovrappone le generatrici dell'elicoide a sè stesse.

Concludiamo dunque col seguente

TEOREMA. — *Sviluppando sopra un piano un elicoide sviluppabile, lo sviluppo ricopre infinite volte la regione del piano esterna ad un circolo (sviluppo dell'elica spigolo di regresso).*

CAPITOLO III.

Curve algebriche gobbe.
Cubica e Quartica di 1.ª specie.

§ 22. — **Curve algebriche gobbe.** — Una curva dello spazio si dice *algebrica* quando viene proiettata da ogni punto dello spazio, che non le appartiene, secondo un cono algebrico. È facile vedere che le generatrici di questo cono proiettante incontrano generalmente in un sol punto la C, evitando posizioni particolari del vertice; ciò si esprime dicendo che la curva viene proiettata *semplicemente* da un punto generico.

Una curva algebrica si dice *irriducibile* se è irriducibile il cono che la proietta semplicemente da ogni punto generico. Se una curva algebrica C dello spazio viene proiettata da un punto A, fuori di essa, secondo un cono riducibile

$$K = K_1 + K_2,$$

costituito di due parti distinte, possiamo distinguere le due parti di C (C_1 e C_2) appartenenti risp. ai due coni K_1, K_2, e si può provare che ciascuna di queste parti viene proiettata da ogni altro punto secondo un cono algebrico, e quindi costituisce una curva algebrica. Segue di qui che una curva algebrica dello spazio è irriducibile se vien proiettata semplicemente secondo un cono irriducibile da un qualsiasi punto particolare fuori di essa.

Il cono che la proietta da un altro punto esterno è allora irriducibile, o consta di un cono contato più volte (*cono multiplo*).

Una curva algebrica dello spazio che non sia piana, si dice *gobba*. Considerando curve gobbe escluderemo che di esse faccia parte qualunque componente piana.

Sia C una curva algebrica gobba ed A un punto fuori di essa. Si proietti C da A e si consideri il cono algebrico proiettante K. Esso avrà un certo ordine n.

Una retta a del cono K che si appoggi in due punti A, B alla curva C è una generatrice doppia di K, giacchè vi sono per a due falde del cono e due piani che le toccano, proiettanti le tangenti a C risp. in A, B.

Più generalmente è r-pla pel cono K una retta che si appoggi in r punti a C. Nel caso particolare in cui sopra *ogni* generatrice di K vi sieno r punti di C, il cono K si dovrà dunque riguardare come un cono d'ordine $\frac{n}{r}$ contato r volte, cioè come un cono r-plo.

Si prenda ora un altro punto B fuori di C e da esso pure si proietti la curva C; si avrà un altro cono X. Supponiamo che la retta AB non incontri C; allora essa non è una generatrice di nessuno dei due coni K, X. Un piano per la AB incontra la curva C in tanti punti quante sono le rette che li proiettano risp. da A e B, ossia quante sono le generatrici di ciascuno dei due coni K, X in quel piano (computate, come si è avvertito, le generatrici proiettanti $r > 1$ punti di C come r-ple); il detto numero è dunque l'ordine di ciascuno dei due coni.

Dunque il cono X ha lo stesso ordine n di K. Vale a dire l'ordine del cono proiettante la curva C da un punto fuori di essa, non varia al variare del punto.

Veramente avevamo escluso che i punti A, B si trovassero sopra una retta incontrante C, ma questa restrizione può ora esser tolta, introducendo la considerazione di un punto ausiliario P (fuori dei coni K, X), giacchè si ha allora che i coni K, X hanno lo stesso ordine del cono proiettante da P la C.

L'ordine del cono proiettante C da un punto qualsiasi fuori di essa si dirà *l'ordine della curva gobba C*. Osservando che un piano per A incontra C in tanti punti quante sono le generatrici di K in esso, ne deduciamo:

Una curva gobba algebrica d'ordine n *è incontrata da un piano qualsiasi in* n *punti di cui alcuni possono coincidere.*

Si vede di qui, in particolare, che *l'ordine di una curva algebrica gobba irriducibile è* ≥ 3; poichè una curva d'ordine 2 è tutta contenuta nel piano che ne congiunge tre punti arbitrari.

Se due (o più) intersezioni della curva con un piano α sono riunite in un punto A, si dice che *il piano è tangente in A alla curva.*

Proiettando la curva da un punto P (fuori di essa) appartenente al piano α (tangente in A) si ottiene un cono che ha due rette sezioni col piano α riunite in PA, e però è tangente al cono.

Sia data una curva gobba algebrica irriducibile C, di ordine n. Il cono K che la proietta da un punto A fuori di essa, è un cono irriducibile di ordine n, o è costituito di un cono di ordine $\frac{n}{r}$ (le cui generatrici incontrano in $r > 1$ punti la C), contato r volte.

È chiaro che in un piano vi può essere al più un numero finito di punti allineati con tante coppie di intersezioni di C, e quindi in un piano vi può essere al più un numero finito di punti (fuori di C) dai quali C venga proiettata secondo un cono multiplo.

Consideriamo ora un punto A in C. Proiettando da A tutti i punti di C, si ottiene, come è facile vedere, un cono algebrico irriducibile o costituito da una parte multipla. Le generatrici del cono sono rette congiungenti due punti di C, ossia *corde* di C; sono anzi *tutte* le corde di C che passano per A.

Valutiamo l'ordine del cono che proietta da un punto A di C la curva C. Si supponga per questo che A sia un punto semplice di C, vale a dire che un piano α per A incontri in generale C in altri $n - 1$ punti fuori di A.

Nel piano di α vi sono allora $n - 1$ corde di C per A, ossia $n - 1$ generatrici del suddetto cono (computate debitamente le multiple). Dunque il cono stesso ha l'ordine $n - 1$.

Il cono proiettante C da un punto P è invece d'ordine $n - r$ ($r > 1$) se P è un punto r-plo per C, vale a dire se ogni piano per P ha ivi riunite r intersezioni colla curva.

Si potrebbe dimostrare che se ogni punto della P è r-plo ($r > 1$), la curva C è riducibile e composta di una parte (d'ordine $\frac{n}{r}$) contata r volte; se C è irriducibile, ciò non può avvenire, anzi la curva (come una sua proiezione piana) ha al più un numero finito di punti multipli.

Infine è da osservare che anche i punti semplici della curva irriducibile C, dai quali essa può venir proiettata secondo un cono multiplo, sono (se esistono) in numero finito, ed omettiamo anche qui la dimostrazione.

Sieno A, B due punti semplici della curva algebrica gobba C, supposta irriducibile d'ordine n; supponiamo ancora che il cono d'ordine $n-1$ proiettante la C da B sia irriducibile. Ogni generatrice di questo secondo cono di vertice B sega C in un punto P il quale vien proiettato da A secondo una generatrice AP del primo cono. Si faccia scorrere P sulla curva C e avvicinare ad A; allora nella corrispondenza ottenuta fra le generatrici dei due coni, alla generatrice BA del cono di vertice B viene a corrispondere una generatrice a del cono di vertice A, che è la *tangente in A* della curva C; questa appare così definita come una corda di C congiungente due punti coincidenti in A.

È superfluo avvertire che il procedimento di passaggio al limite, che qui in sostanza compare, si può applicare senza scrupoli portando a derivare funzioni algebriche.

Ogni piano per la retta a ha due intersezioni (almeno) con C, riunite in A.

La tangente nel punto semplice A è sempre unica e determinata; in un punto doppio o multiplo non è più determinata; ma lasciamo da parte questo caso.

Fra i piani che passano per la tangente a in un punto semplice A della curva C, ve n'è in generale *uno* tangente al cono proiettante C da A, il quale ha tre intersezioni con C riunite in A; questo piano è il *piano osculatore* in A a C, e si può riguardare come un piano congiungente A con altri due punti *infinitamente vicini*; esso può essere indeterminato se la a ha tre intersezioni riunite in A con C, ossia se A è un flesso; ciò può solo avvenire per punti particolari di C.

I piani osculatori alla curva algebrica gobba C formano una *sviluppabile algebrica* (circoscritta a C); diremo *classe* di questa sviluppabile e della curva C, il numero dei piani di essa che passano per un punto generico dello spazio, numero che è indipendente dalla posizione del punto ed ha significato correlativo a quello dell'ordine.

Diremo *rango* della curva C il *grado della sviluppabile circoscritta* a C, cioè il numero delle tangenti a C (generatrici di essa) che si appoggiano ad una retta generica; questo numero (come si vede facilmente) riesce pure indipendente dalla posizione della retta ed esprime: da un lato la classe del cono circoscritto a C da un punto esterno, cioè il numero dei piani tangenti a C che passano per una retta generica dello spazio;

dall'altro lato (correlativamente) l'ordine della curva sezione della rigata sviluppabile circoscritta a C con un piano non appartenente ad essa, cioè il numero delle intersezioni della rigata con una retta generica.

Infine un altro carattere importante di C entra pure in considerazione: il numero delle corde di C che passano per un punto generico dello spazio, cioè il *numero dei punti doppî apparenti* di C e, correlativamente, il numero delle rette intersezioni di due piani osculatori a C che giacciono in un piano generico.

Il numero dei punti doppî apparenti di C è anche il numero delle generatrici doppie del cono ciscoscritto a C da un punto P generico, ed anche questo numero non varia colla posizione di P. Qui si può osservare che essendo evitate particolari posizioni di P, cioè appunto essendo P generico, il detto cono ha solo delle generatrici doppie e non generatrici di singolarità più elevata.

I caratteri menzionati della curva C, ed altri che si potrebbero similmente considerare, si rispecchiano nei caratteri della sua proiezione C' fatta da un punto generico P sopra un piano π; così l'ordine di C è l'ordine di C', mentre il rango di C è la classe di C'; la classe di C è il numero dei flessi di C', giacchè un piano osculatore a C per P dà appunto una tangente di flesso per C'; il numero dei punti doppî apparenti di C è appunto il numero dei punti doppî di C' ecc. Così si trovano fra questi caratteri le relazioni espresse dalle formule di **Plücker**, e si può studiare la curva C mediante la sua proiezione C'.

È ciò che faremo appunto nei successivi paragrafi riferendoci a qualche caso particolare.

Intanto ci varremo della considerazione della curva piana, ottenuta proiettando una curva algebrica gobba, da un punto esterno, per dimostrare che:

Il rango d'una curva algebrica gobba, irriducibile, d'ordine n, *è* $\geq 2\,(n-1)$.

Si designi ancora con C la curva gobba.

Per dimostrare la cosa occorre far vedere che la classe della proiezione C' di C, fatta da un punto generico O dello spazio, è appunto $\geq 2\,(n-1)$. Ora, il punto O non appartenendo alla sviluppabile circoscritta a C, la C' sarà priva di cuspidi ed avrà soltanto un certo numero δ di punti doppî.

La classe di C' sarà quindi

$$m = n\ (n-1) - 2\delta.$$

Ma poichè C' è irriducibile, come C, sarà

$$\delta \leq \frac{(n-1)\ (n-2)}{2},$$

e perciò

$$m \geq 2\ (n-1).$$

Osservazione. — Si trova precisamente:

$$m = 2(n-1) + 2p$$

essendo p ($\geq o$) il genere di C', che si chiama anche *genere della curva gobba C.*

La diseguaglianza stabilita, essendo $n \geq 3$, mostra in particolare che il minimo rango d'una curva algebrica gobba è 4, e che questo valore si raggiunge per la cubica gobba.

Dunque *il grado d'una rigata sviluppabile algebrica è* ≥ 4, *ed il minimo grado appartiene alla sviluppabile circoscritta ad una cubica.*

§ 23. — **Cubica gobba. Generalità.** — Andiamo a studiare particolarmente le curve gobbe algebriche del 3.° ordine, dette anche *cubiche gobbe.* Indicheremo queste curve con C_3.

Consideriamo cubiche gobbe irriducibili reali.

Il cono K *dei raggi proiettanti da un punto* A *della cubica gli altri punti di essa è un cono quadrico.*

Questo cono quadrico è irriducibile come la C_3, e però non ha rette doppie. D'altronde ciò risulta dall'osservazione che nessuna retta può avere tre punti comuni colla C_3, altrimenti un piano congiungente la retta con un altro punto di C_3, segherebbe la C_3 in 4 punti.

Fra le rette del detto cono K (corde della cubica) le quali incontrano in due punti la cubica C_3, ve n'è *una* che ha le due intersezioni colla C_3 riunite in A; questa è la tangente alla cubica in A, che si può riguardare come il raggio proiettante da A il punto di essa infinitamente vicino ad A.

Consideriamo sulla cubica C_3 due punti qualsiansi A, B. I coni quadrici proiettanti la C_3 da A, B hanno comune la curva C_3 e la generatrice AB; l'insieme della C_3 e della retta AB costituisce una curva del 4.° ordine, che è la intersezione completa dei due coni quadrici.

Dei due nominati coni quadrici di vertici A, B il primo ha come piano tangente, secondo AB, quello che proietta da A la tangente in B; il secondo cono ha come piano tangente, secondo BA, quello che proietta da B la tangente in A; questi due piani tangenti sono certo diversi, se no si avrebbero in un piano due tangenti e quindi quattro punti (a coppie coincidenti) di C_3.

Viceversa, se si considerano due coni quadrici di vertici A, B aventi comune la generatrice AB e non aventi in essa lo stesso piano tangente (cioè non toccantisi in quella generatrice), la loro intersezione completa si compone della retta AB contata una volta, e di una ulteriore curva del 3.° ordine passante per A, B, la quale riesce necessariamente gobba e irriducibile se, come si suppone, i detti coni sono irriducibili. Invero la intersezione completa di due coni quadrici è una curva del 4.° ordine, avendo comuni con un piano generico i 4 punti in cui si segano le due coniche, sezioni dei due coni.

Abbiamo dunque della cubica gobba la seguente definizione:

La cubica gobba è l'ulteriore intersezione di due coni quadrici aventi una generatrice comune non di contatto; essa può considerarsi in infiniti modi come la intersezione di due coni siffatti aventi i vertici in due suoi punti qualsiansi.

Corollario. — *Vi è una curva gobba (irriducibile) determinata passante per sei punti dello spazio, di cui quattro qualunque non sono in un piano.*

Sieno A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 i sei punti dati. Proiettando da A_1 i cinque punti A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e da A_2 i cinque punti A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 si ottengono per ciascuno dei due punti A_1, A_2 cinque rette determinanti un cono quadrico. I due coni quadrici così costruiti hanno comune la generatrice A_1A_2 e si segano ulteriormente secondo una curva del 3.° ordine che passa per A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, la quale si può vedere essere irriducibile se 4 qualunque dei 6 punti dati non giacciono in un piano. D'altra parte una curva gobba passante per A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 è comune ai due coni quadrici sopra considerati, perciò la cubica gobba passante per i 6 punti è unica.

Un piano (reale) ha sempre (almeno) un punto reale comune con una cubica gobba (reale) C_3.

Per distinguere i vari casi che possono presentarsi relativamente alle intersezioni di un piano colla cubica C_3, potremo

dunque supporre il piano già condotto per un punto (reale) A della C_3. Ora un piano α per A può dar luogo ai seguenti casi:

1) α è esterno al cono quadrico proiettante da A la C_3; allora α ha colla C_3 un punto comune reale, cioè il punto A (ed altri due punti immaginari coniugati):

2) α è tangente al nominato cono quadrico:

a) secondo una generatrice diversa dalla tangente in A a C_3;

b) o secondo la tangente in A a C_3;

nel caso 2) *a*) il piano α contiene su quella generatrice (oltre A) un altro punto B della cubica C_3, e contiene la tangente in B a C_3, tanto che si può dire che esso sega C_3 in 3 punti di cui due riuniti in B, ossia che incontra C_3 in A e le è tangente in B;

nel caso 2) *b*) il piano α si deve considerare come avente tre intersezioni con C_3 riunite in A, ossia è il piano osculatore a C_3 in A;

3) α è secante rispetto al cono quadrico proiettante C_3 da A:

a) secondo due generatrici diverse dalla tangente in A;

b) o secondo due generatrici una delle quali è la tangente a alla C_3 in A;

nel caso 3) *a*) il piano α contiene su ciascuna di quelle due generatrici un altro punto C_3 (oltre A) e quindi sega C_3 in 3 punti (reali e distinti);

nel caso 3) *b*) il piano α incontra C_3 in B e le è tangente in A.

Dunque *rispetto ad una cubica gobba (reale) esistono 4 specie di piani:*

1) piani che la segano in un solo punto reale e in due punti immaginari coniugati;

2) piani *tangenti* ad essa in un punto e che l'incontrano in un altro punto;

3) piani *osculatori* che hanno con essa un contatto tripunto;

4) piani che la segano in tre punti reali e distinti.

Abbiamo inoltre veduto come si distinguono i piani delle varie specie condotti per un punto della cubica.

Le varie forme che una cubica gobba può presentare sotto l'aspetto metrico, dipendono dalla particolarità del piano all'infinito di appartenere all'una o all'altra delle specie di piani nominate.

Abbiamo dunque, a seconda della loro forma, 4 specie di cubiche gobbe C_4:

1) *L'ellisse gobba*, quando la C_3 ha un sol punto reale all'infinito; la tangente in esso dicesi *asintoto*, e il piano osculatore in esso *piano asintotico* della C_3.

2) *L'iperbole parabolica*, quando la C_3 è tangente al piano all'infinito;

3) *La parabola gobba*, quando il piano all'infinito è osculatore rispetto alla C_3;

4) *L'iperbole gobba*, quando la C_3 sega il piano all'infinito in 3 punti distinti; si hanno in questo caso 3 asintoti e 3 piani asintotici della C_3.

§ 24. — **Proiezione piana di una cubica gobba. — Corde della cubica.** — Rappresentiamo la cubica gobba sopra un piano nel metodo delle proiezioni centrali, e mostriamo come si risolvono sul quadro i principali problemi grafici che si presentano, relativamente ad essa.

Anzitutto ci conviene di acquistare un'idea della forma della cubica gobba, e ciò si ottiene costruendo per punti, assai vicini, la sua immagine sul quadro.

Qui sarà indicato come tale costruzione per punti possa ottenersi; dopo faremo alcune osservazioni che potranno essere confermate dalla esecuzione del relativo disegno.

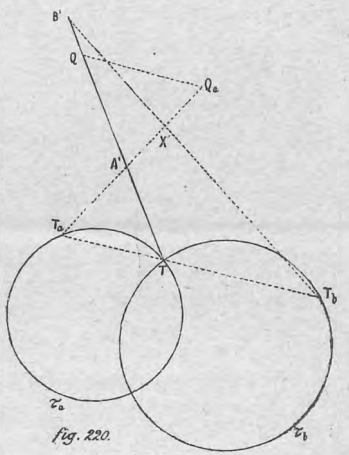


fig. 220.

Sia data una cubica gobba C_3 non passante pel centro di proiezione, e su di essa due punti A, B fuori del quadro; li daremo assegnando sul quadro le loro immagini A', B' e la retta (TQ) che li congiunge (fig. 220).

Si considerino i coni quadrici K_A, K_B proiettanti la C_3 risp. da A, B; sieno τ_a, τ_b le loro tracce; queste sono due coniche, non tangenti fra loro, passanti per T, le quali possono essere assunte ad arbitrio per individuare la C_3 (fig. 220). La C_3 è intersezione ulteriore (oltre la retta AB) dei coni K_A, K_B. La sua proiezione C_3' sul quadro si costruirà per punti nel modo seguente:

Prendiamo risp. su τ_a, τ_b due punti T_a, T_b allineati con T; essi sono le tracce di due generatrici dei coni quadrici K_A, K_B che si incontrano in un punto X della cubica gobba.

Per avere l'immagine X' di X basta intersecare le immagini $A'T_a$, $B'T_b$ delle generatrici AT_a, BT_b. Il punto X riesce determinato perchè si può subito costruire il punto di fuga di una retta per esso, precisamente di una generatrice di uno dei due coni. Nella fig. 220 il punto di fuga Q_a è quello della generatrice AX.

Variando T_a su τ_a, e corrispondentemente T_b su τ_b, X' varia descrivendo l'immagine della cubica gobba.

Questa determina completamente la cubica perchè per ogni punto è data una retta (anzi sono date per esso le due generatrici dei due coni).

Si possono ora risolvere le questioni di costruire:

1) *La tangente in* A *alla cubica* (*o similmente in* B).

Invero la tangente a in A ha per immagine la $a' \equiv A'T_a$ e per traccia T_a; essendo T_a l'intersezione ulteriore della conica τ_a colla tangente in T a τ_b. Avendosi su a' un punto noto A' (della TQ) si ottiene subito il punto di fuga Q_a di a (fig. 221).

2) *Il piano* α *osculatore alla cubica gobba in* A.

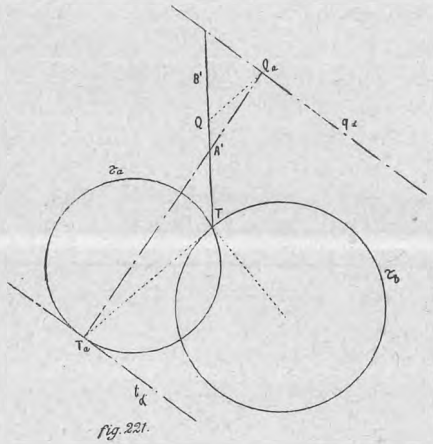


fig. 221.

Invero questo piano passa per $a \equiv (T_aQ_a)$ ed è tangente al cono quadrico K_A, quindi ha per traccia t_α la tangente in T_a alla conica τ_a; la retta di fuga q_α del piano α è la parallela a t per Q_a (fig. 221).

Ricerchiamo ora se la proiezione piana della cubica gobba C_3 ha punti doppi.

Premettiamo la seguente osservazione:

Sia X' un punto della C_3'. Proiettiamo X' da A' e indichiamo con A_1, A_2 i due punti (in generale distinti) intersezioni della $X'A'$ colla conica τ_a (fig. 222). Proiettiamo quindi A_1, A_2 da T sulla conica τ_b rispettivamente in B_1, B_2.

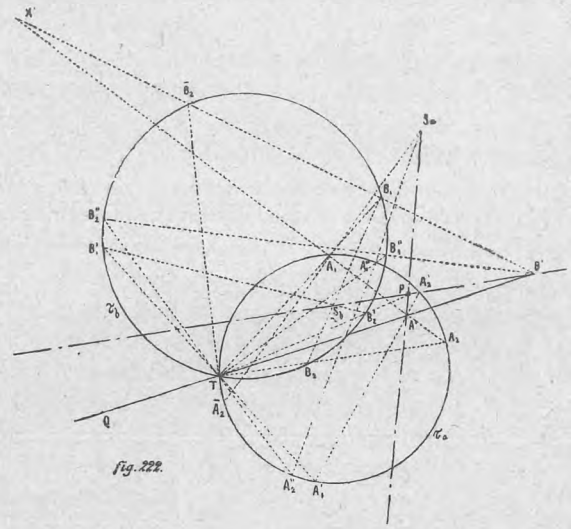


fig. 222.

Fra le generatrici AA_1, AA_2 del cono K_A, ve n'è una, p. es. la AA_1, che contiene il punto X di C_3 avente per immagine X'; e così fra le generatrici BB_1, BB_2 ve n'è una, p. es. la BB_1, contenente X; il punto B_1 si trova allora sulla retta $B'X'$. Se X' deve essere l'immagine (oltre che di X) di un 2.° punto della C_3 (ossia se X' deve essere un punto doppio P della C_3'), questo punto sarà proiettato da A, B rispettivamente in A_2, B_2 e perciò anche il punto B_2 si troverà sulla retta $B'X'$, vale a dire coinciderà col punto B_2 intersezione di $B'X'$ con τ_b fuori di B_1.

Facciamo variare X' su C_3'. Le coppie analoghe ad A_1A_2 variano sulla conica τ_a descrivendo l'involuzione che ha come centro di collineazione A'. Le coppie analoghe a B_1B_2 descrivono contemporaneamente una involuzione sulla conica τ_b, la quale si ottiene proiettando da T su τ_b la nominata involuzione che avrà un certo centro di collineazione S_b (diverso da B_1). Allorchè X' venga a prendere la posizione di un punto

doppio P di C_3', il raggio $B'P$ segherà la conica τ_b in una coppia di punti, corrispondenti nella detta involuzione, ossia allineati con S_b.

Troviamo dunque che esiste un punto doppio P di C_3', e ne diamo la costruzione effettiva.

Si consideri su τ_b l'involuzione che ha come centro di collineazione A' e da T la si proietti su τ_b: di questa involuzione su τ_b si costruisca il centro di collineazione S_b e si unisca S_b con B'; procedendo in modo inverso si proietti da T su τ_b l'involuzione di τ_b che ha come centro B' e si determini il suo centro S_a, quindi si unisca S_a con A' (fig. 222). Le rette S_aA' ed S_bB' s'incontrano in un punto P che è doppio per C_3'. Infatti il punto P è proiezione di due punti P_1, P_2 di C_3, che corrispondono alle due intersezioni di τ_a con S_aA' (ugualmente alle intersezioni di τ_b con S_bB'). Questi due punti potranno essere reali e distinti ed allora P sarà un nodo, o coincidenti e P sarà una cuspide, o immaginari e P sarà un punto isolato.

Resta così stabilito il

Teorema. — *La proiezione piana della cubica gobba da un punto esterno* O *ha sempre un punto doppio che corrisponde ad una corda della cubica, passante per* O*; questa corda può tuttavia incontrare la curva in due punti reali, nel qual caso dicesi corda propria, oppure può essere una tangente, o può segare la curva in punti immaginari coniugati, nel qual caso dicesi corda impropria o ideale.*

In altre parole, *la cubica gobba ha un punto doppio apparente.*

Osservazione 1ª. — Se, come nella fig. 222, la S_bB' sega τ_b in due punti reali (ossia pel centro di proiezione passa una corda propria della cubica) la costruzione del punto doppio di C_3' si può abbreviare notando che i due punti comuni a τ_b ed S_bB' vengono proiettati da T su τ_a in due punti allineati con A' e con S_a, onde non importa costruire S_a.

Per disporre la figura in modo che P risulti certo un nodo di C_3' basta prendere B' interno a τ_b o A' interno a τ_a, sebbene non sia necessario che una di queste due condizioni si verifichi (fig. 223).

Osservazione 2ª. — La forma della proiezione piana C_3' ci aiuta a concepire quella della cubica gobba C_3.

Supponiamo p. e. di riferirci al caso in cui pel centro di proiezione O passi una corda propria di C_3, e quindi C_3' abbia un nodo.

Il piano parallelo anteriore segherà C_3 in un punto reale e in due punti immaginari coniugati, oppure in tre punti reali e

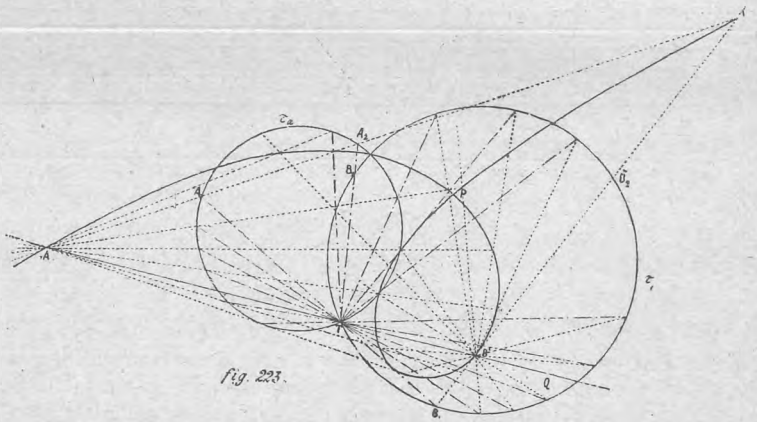


fig. 223.

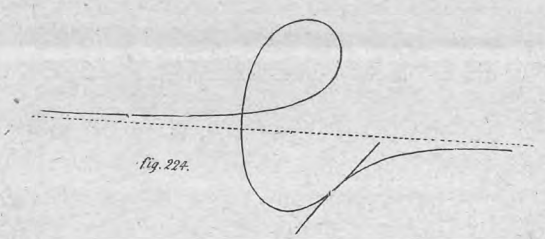
distinti, o sarà tangente alla curva in un punto e la segherà in un altro, o finalmente le sarà osculatore.

Corrispondentemente ai primi tre casi si ottengono per C_3' le forme rappresentate risp. dalle fig. 224, 225, 226; nel 1° caso e nel 3° C_3' ha *un* asintoto, nel 2° ne ha *tre*.

La C_3' rappresenta, come si vede, un flesso reale; prendendo la tangente di flesso come retta di fuga di un piano (tq), la C_3' appare come la immagine di una parabola nodata di questo piano (§ 8).

Nel caso in cui il piano parallelo anteriore osculi la C_3, la C_3' è essa stessa una parabola nodata.

In un modo analogo a quello tenuto innanzi si possono


fig. 224.

discutere le forme di C_3', quando la corda di C_3 per O sia impropria o sia una tangente.

Queste forme si deducono per proiezione, dalle parabole campaniformi puntate e dalle parabole cuspidate.

Ma queste considerazioni non ci dicono ancora nulla relativamente alla natura metrica della cubica C_3.

Conviene perciò considerare le coniche di fuga χ_1, χ_2 dei

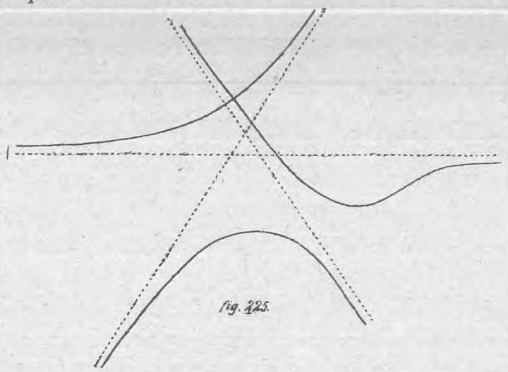


fig. 225.

due coni segantisi secondo C_3. Esse hanno comune anzitutto il punto di fuga Q della generatrice appartenente ai due coni. E poichè in Q non si toccano, possono presentare 4 casi che cor-

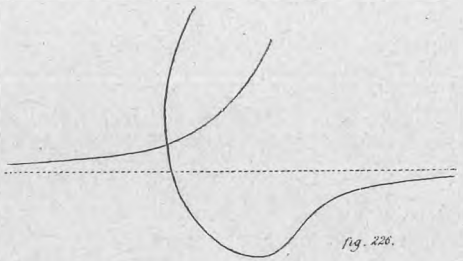


fig. 226.

rispondono ordinatamente all' ellisse gobba, all' iperbole gobba, all' iperbole parabolica, e alla parabola gobba; questi casi sono rappresentati dalle fig. 227, 228, 229, 230.

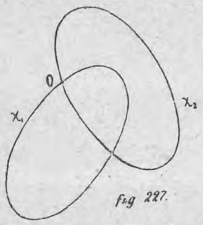


fig 227.

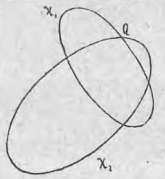


fig. 228.

Se si considera una proiezione piana ortogonale della cubica C_3 fatta p. e. dal punto all' infinito d' una corda propria,

si ottengono risp. le tre forme di C_3' innanzi considerate nelle fig. 224, 225, 226, e la parabola nodata.

Si vede così che la ellisse gobba si compone d' un solo ramo; l' iperbole gobba di tre; l' iperbole parabolica di due; la

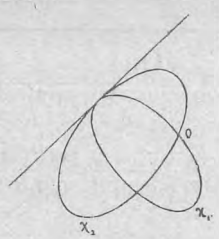


fig. 229.

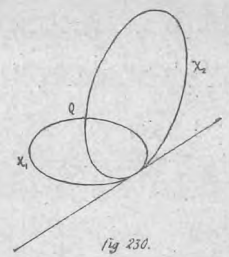


fig 230.

parabola gobba di uno solo. Ma in ogni caso i rami, metricamente distinti, si riattaccano all' infinito, sicchè la cubica gobba considerata sotto l' aspetto grafico, è sempre composta di un solo ramo, come già risulta chiaro dal fatto che la proiezione piana fatta da un punto di essa è una conica.

§ 25. — **Sviluppabile circoscritta ad una cubica gobba.** — Dallo studio della proiezione piana C_3' di una cubica gobba C_3, possiamo trarre alcune importanti proprietà di C_3. Abbiamo visto che C_3' ha un punto doppio, il quale sarà una cuspide soltanto nel caso che il centro di proiezione O si trovi sopra una tangente a C_3, ossia appartenga alla rigata sviluppabile circoscritta a C_3; dunque, se O è generico avremo per le formule di **Plücker** (cfr. § 5) che C_3' ha la classe 4 e 3 flessi, da cui si ricava (cfr. § 23):

La sviluppabile circoscritta ad una cubica gobba ha la classe 3 e il grado 4, ossia la cubica gobba è di rango 4 e di classe 3. Il genere della cubica vale $p = 0$.

La cubica gobba ha tre piani osculatori per un punto generico O dello spazio, e quindi è correlativa della sua sviluppabile circoscritta.

Si può anche vedere (osservando C_3') che i suddetti piani osculatori sono tutti e tre reali se il punto O si trova sopra una corda impropria; uno reale e due immaginari coniugati se O è su una corda propria.

Ora possiamo dimostrare l' importante

Teorema. — *Il punto* P *comune a tre piani osculatori* α, β, γ

di una cubica gobba, appartiene al piano determinato dai punti di contatto di α, β, γ, *e viceversa (correlativamente).*

Si proietti la cubica C_3 da P sopra un piano π in C_3'. I tre piani α, β, γ hanno come tracce in π le tre tangenti di flesso di C_3' ed i loro punti di contatto A, B, C hanno come proiezioni i tre flessi A', B', C' di C_3'.

Ora i tre flessi A', B', C' di C_3' sono in linea retta (§ 6), quindi il piano dei tre punti A, B, C (che non possono mai essere in linea retta) passa per P.

Osservazione. — Ad ogni punto P si può far corrispondere il piano π, *piano polare*, determinato dai punti di contatto di C_3 coi piani α, β, γ passanti per P e viceversa. Questa corrispondenza biunivoca è tale che ai punti del piano π corrispondono piani passanti per P, ossia è una *correlazione involutoria* dello spazio che si chiama *sistema nullo.*

Riferiamoci alla rappresentazione di una cubica gobba C_3 in proiezione centrale (§ 24), e sia C_3' l'immagine di C_3. La rigata sviluppabile circoscritta a C_3 riesce rappresentata dall'inviluppo delle tangenti a C_3'; la curva ω traccia di questa rigata è il luogo delle tracce di queste rette che sono subito costruibili essendo data per ciascuna retta la rappresentazione completa del punto di contatto con C_3.

Le tangenti ad ω sono le tracce dei piani osculatori a C_3. Come il cono circoscritto a C_3 da un punto generico ha tre piani d'inflessione (i tre piani della sviluppabile ciscoscritta), così una sezione piana della rigata sviluppabile circoscritta a C_3 (ed in particolare la ω) avrà tre cuspidi nei punti di intersezione con C_3. Le cuspidi della ω cadono dunque nei punti, tracce di C_3, che sono le ulteriori intersezioni di C_3 fuori di T. La loro costruzione costituisce un problema di 3° grado.

Come esercizio dopo aver costruita C_3', si può costruire per punti la curva ω e si possono risolvere svariati problemi di costruzione usando delle semplificazioni consentite dai teoremi sopra stabiliti.

§ 26. — **Quartiche di 1ª specie.** — Abbiamo considerato l'intersezione di due coni quadrici nel caso in cui essa è costituita da una retta e da una cubica, andiamo ora a considerare il caso in cui la detta intersezione è irriducibile. Consideriamo dunque la curva (gobba) del 4° ordine, irriducibile, intersezione completa di due coni quadrici K_1, K_2; questa curva C_4 dicesi *quartica di prima specie.*

Si può rappresentare C_4 sul piano nel sistema delle proiezioni centrali, e costruire per punti la sua immagine seguendo il modo indicato nel § 10 Probl. 3°; supponendo il centro di proiezione O esterno a C_4, l'immagine di C_4 sarà una curva del 4° ordine C_4'. La costruzione per punti di C_4' si ottiene, come è stato detto, segando i due coni K_1, K_2 di vertici P_1, P_2 con piani ausiliarî passanti per la retta P_1, P_2, e determinando in ogni piano i punti comuni alle generatrici (reali) dei due coni che gli appartengono.

Relativamente alla forma della quartica C_4 si possono fare le seguenti osservazioni:

Consideriamo le tracce τ_1, τ_2 dei due coni sul quadro (non contenente P_1P_2). Supponiamo che il vertice di uno dei due coni non appartenga all'altro; allora T non appartiene nè a τ_1 nè a τ_2. Supponiamo inoltre che i due coni non si tocchino, cioè non abbiano un punto comune collo stesso piano tangente (punto doppio per C_4). Si possono distinguere i seguenti casi:

1° Il punto T è interno ad ambedue le coniche τ_1, τ_2 (fig. 231). Allora un piano qualunque per la retta P_1P_2 ha come traccia

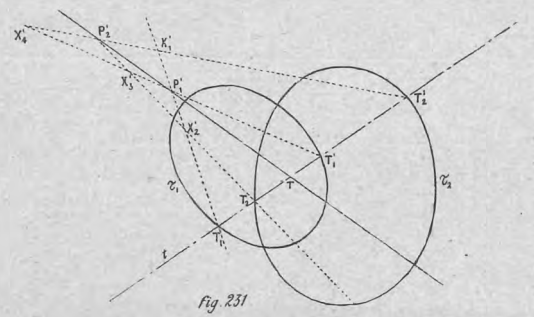


fig. 231

una retta t per T segante τ_1, τ_2 (risp. in T_1, T_1', e T_2, T_2') e quindi incontra i coni K_1, K_2 ciascuno secondo due generatrici reali; perciò in ogni piano per P_1P_2 vi sono 4 punti reali (in generale distinti) di C_4.

Ciascuno dei due coni è incontrato da ogni generatrice dell'altro, ossia *i due coni si penetrano scambievolmente.* Allora si può riconoscere che la quartica reale C_4, considerata sotto l'aspetto grafico, *si compone di due rami distinti.* Infatti, facendo ruotare di due angoli retti il piano considerato per P_1P_2, ossia la sua traccia t attorno a T, mentre si scambiano i punti T_1 e T_1', si scambiano contemporaneamente i due punti T_2 e T_2', onde i

punti $X_2 \equiv (P_1T_1 \cdot P_2T_2)$ e $X_4 \equiv (P_1T_1' \cdot P_2T_2')$ descrivono un ramo di C_4 distinto da quello descritto dai punti $X_1 \equiv (P_1T_1 \cdot P_2T_2')$ e $X_3 \equiv (P_1T_1' \cdot P_2T_2)$.

2° Il punto T è esterno ad una delle due coniche, p. es. a τ_1, ed interno all'altra (fig. 232). Allora si hanno due posi-

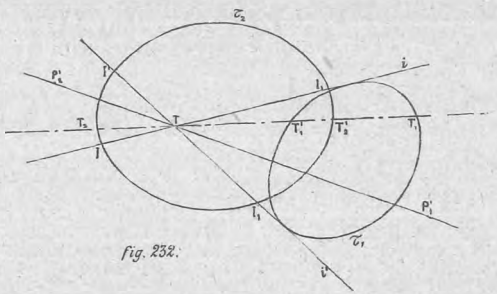


fig. 232.

zioni limiti i, i' della retta t per T, che racchiudono un angolo di rette t secanti τ_1 (in T_1 e T_1'), le quali rette segano anche τ_2 (in T_2 e T_2'). Tutte le generatrici del cono K_1 segano il cono K_2, mentre esistono generatrici di K_2 che non segano K_1, ossia *il primo cono penetra nell'altro*. Si può riconoscere che anche in questo caso la curva C_4 si compone di due rami distinti; uno di essi appartiene alle generatrici di K_2 la cui traccia T_2' varia su τ_2 in un arco avente per estremi due punti I, I' di i, i', e l'altro appartiene alle generatrici di K_2 la cui traccia T_2' varia su τ_2 in un arco i cui estremi sono le ulteriori intersezioni I_1, I_1' di τ_2 risp. con i, i'.

3° Il punto T è esterno ad ambedue le coniche τ_1 e τ_2. Allora consideriamo le tangenti i_1, i_1' condotte da T a τ_1 e le tangenti i_2, i_2' condotte da T a τ_2; le prime racchiudono un angolo di secanti τ_1 e le seconde un angolo di secanti τ_2.

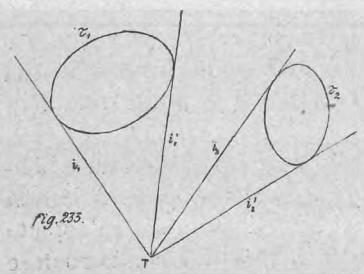


fig. 233.

Se questi due angoli non hanno rette comuni (fig. 233), *i due coni non hanno punti comuni*, ossia l'intersezione C_4 è immaginaria. Se essi hanno un lato comune (fig. 234, 235) *i due coni si toccano in un punto*, e ciò dà luogo a due casi che per semplicità escludiamo.

Se uno dei due angoli nominati p. es. quello di i_1, i_1' è contenuto nell'altro e non vi sono lati comuni (fig. 236), il cono K_1

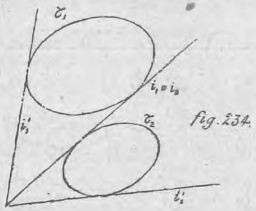


fig. 234.

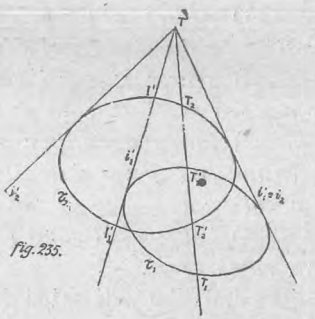


fig. 235.

penetra in K_2 e come nel caso 2) si conclude che C_4 è composta di due rami distinti.

Finalmente se i due angoli nominati hanno una parte comune, senza che uno di essi sia contenuto nell'altro (fig. 237), vi sono alcune generatrici di ciascuno dei due coni che segano l'altro ed alcune generatrici che non lo segano, cioè ognuno

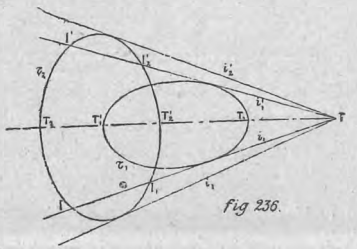


fig 236.

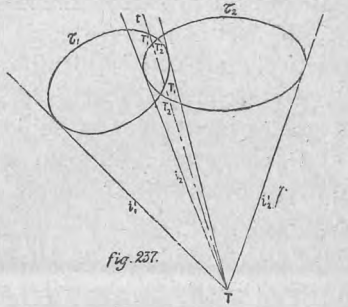


fig. 237.

dei due coni strappa un pezzo dell'altro, ossia produce una lacerazione penetrante parzialmente nell'altro; l'intersezione avviene per *sfaldamento* (Cfr. Parte Prima § 50). In questo caso si vede che la intersezione C_4 di K_1, K_2 è costituita da un sol ramo, che si ottiene al variare di t attorno a T, entro l'angolo i_1i_2, parte comune dei due angoli i_1i_1' e i_2i_2' in cui sono iscritte τ_1 e τ_2. Infatti le intersezioni T_1, T_1' di t con τ_1 possono scambiarsi fra loro, scambiandosi o no le intersezioni T_2, T_2' di t con τ_2 al variare di t entro il detto angolo i_1i_2.

Concludiamo così:

Due coni quadrici che non si tocchino, possono presentare l'uno rispetto all'altro 4 casi diversi:

1) *mutua penetrazione; allora l'intersezione* C_4 *di essi è costituita da due rami distinti;*

2) *penetrazione di uno di essi nell'altro; l'intersezione* C_4 *è ancora costituita da due rami;*

3) *lacerazione per sfaldamento (ciascuno dei due coni strappa un pezzo dall'altro); l'intersezione* C_4 *è costituita da un sol ramo;*

4) *i due coni sono l'uno esterno all'altro, ossia* C_4 *non ha rami reali.*

I rami di C_4 di cui si discorre nell'enunciato precedente sono pensati dal punto di vista grafico della Geometria proiettiva. Dal punto di vista metrico un ramo può venire separato in due rami riattaccantisi all'infinito; così p. es. una conica piana è una curva sempre costituita da un solo ramo sotto l'aspetto grafico, mentre sotto l'aspetto metrico appare costituita da due rami o da uno solo secondochè essa è o no una iperbole.

Volendo ricercare la forma di C_4 dal punto di vista metrico, occorre considerare i punti all'infinito di essa, i quali sono dati sul quadro dalle intersezioni delle due coniche di fuga di K_1, K_2, ed esaminare come ogni ramo di C_4 venga separato in parti riattaccantisi all'infinito.

Tralascieremo questa analisi che si compie in modo analogo a quello tenuto per la cubica gobba.

Osserveremo piuttosto come alla nozione della forma di una quartica di 1ª specie C_4 priva di punti doppi, si arrivi anche considerando che *la proiezione piana della* C_4 *da un suo punto* O, *è una cubica* C_3' *senza punti doppi.* Infatti per O non potrebbe passare una retta secante C_4 in altri due punti, giacchè essa giacerebbe per intero sui due coni quadrici di cui C_4 è l'intersezione.

Già conosciamo le forme di una C_3' (considerata come proiezione di una parabola newtoniana con ovale o senza) e sappiamo che essa può essere composta, sotto l'aspetto grafico, di uno o di due rami. In ciò trova appunto un riscontro la conclusione tratta dai precedenti ragionamenti intorno alla forma di C_4.

§ 27. — **Corde della quartica.** — Ritornando alla rappresentazione di C_4 ci proponiamo ora di vedere se per il centro di proiezione O (esterno a C_4) passino corde di C_4 o, ciò che è lo stesso, se C_4' abbia dei punti doppi. *Escludiamo che la* C_4 *abbia punti doppi*, ipotesi particolare che sarà discussa in seguito.

Supponiamo che per O passi una corda di C_4, la quale incontri C_4 nei punti A, B (reali o no), e consideriamo il punto O' coniugato armonico di O rispetto ad A, B. Questo punto è coniugato di O rispetto ai due coni quadrici K_1, K_2 che determinano C_4, ossia appartiene ai due piani polari di O rispetto a K_1, K_2 [1]; esso sta dunque sulla retta p, intersezione dei detti piani; i quali sono certo distinti se, come supporremo, O occupa una posizione generica nello spazio. Segue di qui che le corde di C_4 passanti per O, stanno nel piano Op. Ora vedremo che pel punto O nel piano Op vi sono sempre due corde di C_4 reali o no, e nel primo caso seganti C_4 in punti reali o no (cioè proprie o improprie).

Consideriamo le due coniche C_1, C_2 sezioni di K_1, K_2 col piano Op (fig. 238); il punto O ha la stessa polare p rispetto ad esse. Ora si prenda per O una retta qualsiasi h e si cerchi il luogo corrispondente ad h rispetto a C_1, C_2 [2], cioè il luogo del punto coniugato ad un punto di h tanto rispetto a C_1 quanto rispetto a C_2. Questo luogo è costituito dalla retta p, polare di O, e da una retta h' per O. Ora la corrispondenza fra le coppie di rette h, h' per O, è un'involuzione I che ammette due rette doppie (reali o no) r, s; ciascuna di queste rette è coniugata a sè stessa, e quindi è sostegno di una medesima involuzione di punti coniugati rispetto a C_1, C_2, ossia incontra C_1, C_2 negli stessi punti (reali o no).

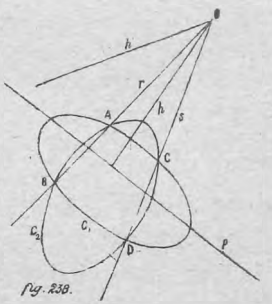


fig. 238.

Dunque r, s (e queste due rette soltanto) sono corde di C_4 passanti per O.

Concludiamo così:

Per un punto generico dello spazio passano due corde (reali o no) di una quartica di prima specie senza punti doppi, ossia la quartica ha due punti doppi apparenti.

---

[1] Cfr. cit. « Lezioni di Geometria proiettiva », § 81.

[2] Cfr. cit. « Lezioni di Geometria proiettiva », § 82.

Indichiamo con τ_1, τ_2 le tracce rispettive dei coni K_1, K_2 e con P_1', P_2' le immagini dei loro vertici (fig. 239). Cominciamo dal costruire la retta p' immagine di p, contenente i due punti doppi di C_4'. Il piano α_1 polare del centro di proiezione O rispetto a K_1 ha come traccia t_1 la polare di P_1' rispetto a τ_1; ana-

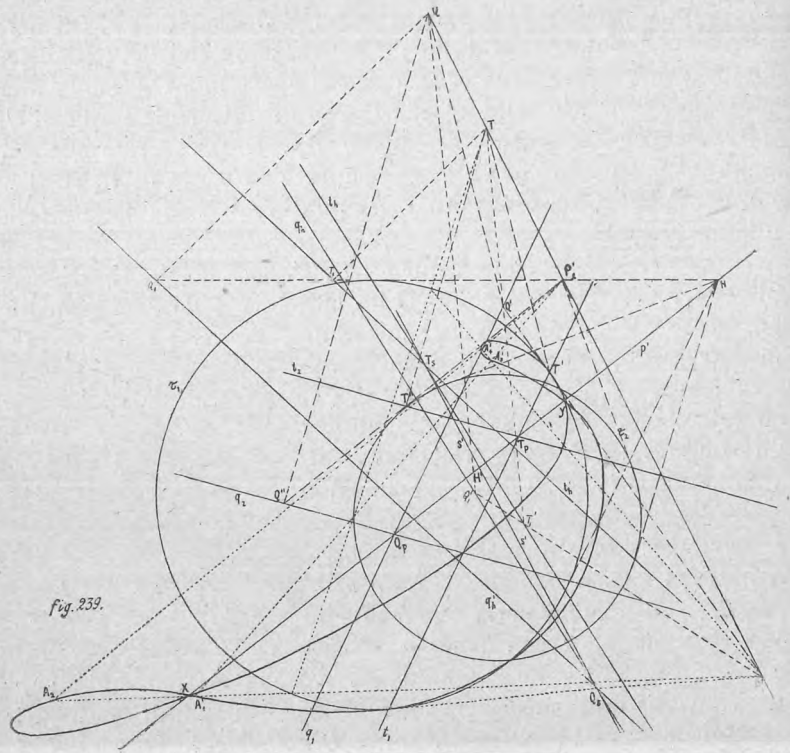


Fig. 239.

logamente il piano α_2 polare di O rispetto a K_2 ha come traccia t_2 la polare di P_2 rispetto a τ_2. Le t_1, t_2 si segano nel punto T_p traccia di p.

La rappresentazione di p si può completare costruendo il suo punto di fuga Q_p intersezione delle rette di fuga q_1, q_2 dei piani nominati; queste rette di fuga si costruiscono (come nella fig. 239) osservando che i detti piani polari di O passano rispettivamente per P_1, P_2. Ciò posto si possono determinare sopra $p \equiv T_p Q_p$ i punti doppi di C_4, come punti doppi dell'involuzione I' segata su p' dalle coppie di rette coniugate h,h' del fascio Op. Per costruire questa involuzione I' (sezione di I)

prendasi su p' un punto H e si considerino i piani ρ_1, ρ_2 polari di H rispetto ai coni K_1, K_2; i detti piani s'incontrano secondo una retta s che contiene il punto coniugato di H rispetto alle due coniche sezioni di K_1, K_2 col piano Op, il quale appartiene alla retta h' coniugata ad $OH \equiv h$ in I. Questo punto ha come immagine il punto H' intersezione di p' coll'immagine s' di s; H' è il coniugato di H nell'involuzione I' che si vuole determinare su p'. La fig. 239 mostra eseguita la costruzione di H'. [I piani ρ_1, ρ_2, polari di H rispetto ai due coni K_1 e K_2 sono rispettivamente $(t_h\, q_h)$ e $(t_{h'}\, q_{h'})$]. I punti doppi X e Y si possono determinare con le note costruzioni della Geometria proiettiva mediante un'altra coppia dell'involuzione I'. Nella figura è pure indicata la costruzione di quattro punti A_1', A_2', A_3', A_4' di C_4, immagini delle intersezioni di C_4 con un piano per la retta $P_1 P_2 \equiv (TQ)$ (§ 10 Problema 3.°). Nel nostro caso la quartica si compone di un solo ramo, e la immagine costruita per punti ha due nodi.

Osservazione. — Il centro di proiezione O non appartenendo ad una tangente di C_4, i punti doppi di C_4', supposti reali, non saranno cuspidi. Applicando allora a C_4' le formule di **Plücker**, troveremo che la sua classe è 8, e il numero dei suoi flessi è 12, sicchè potremo concludere:

La sviluppabile circoscritta ad una quartica di 1ª specie C_4, *senza punti doppi, è di classe 12 e di grado 8, ossia la* C_4' *è di classe 12 e di rango 8. Il genere della* C_4 *vale* $p = 1$.

Si vedrà inoltre che la proiezione piana C_4' della nominata C_4 ha 8 tangenti doppie, ossia che per un punto generico dello spazio passano 8 *piani bitangenti* della C_4.

§ 28. — **Casi particolari di una quartica di 1ª specie.** — Accenniamo infine brevemente ai casi particolari più notevoli che la quartica di 1ª specie può presentare. Se i due coni si toccano in un punto (A) o se il vertice (A) di uno di essi sta sulla superficie dell'altro, la quartica intersezione C_4 ha un punto doppio, e quindi la proiezione piana C_4' di essa ha 3 punti doppi (l'immagine di A e le tracce di due corde passanti pel centro di proiezione).

Con disposizioni particolari si può ottenere che la suddetta proiezione sia una *lemniscata*, ove si faccia in modo che il punto doppio della C_4 sia un nodo e le due corde di essa pel centro di proiezione sieno rette congiungenti i punti ciclici del piano di proiezione. Si è dato un esempio di ciò nel § 11.

Se i due coni si toccano in due punti, la C_4 ha due punti doppi e si spezza in due coniche; infatti la proiezione piana C_4' fatta da un punto generico, ha 4 punti doppi e contiene quindi la conica che passa per questi e per un altro punto di essa, sicchè si spezza in due coniche, onde è spezzata anche la C_4.

Se i due coni contengono ciascuno il vertice dell'altro, hanno una generatrice comune, e l'intersezione ulteriore è una cubica C_3 che può a sua volta degenerare in una retta e in una conica con un punto comune, ove i due coni si tocchino secondo la sunnominata generatrice.

Nel caso generale la C_3 e la generatrice comune costituiscono una C_4 con due punti doppi.

Osservazione. — Si presenta qui un nuovo modo di trovare il punto doppio apparente d'una cubica gobba C_3 (Cfr. § 24).

Riguardando la C_3 insieme ad una sua corda r come costituenti una quartica C_4 degenere, la proiezione di essa, C_4', sarà pure degenere e si comporrà della proiezione C_3' di C_3, e di quella r' di r. Ora la C_4' avrà due punti doppi A', B' immagini dei punti doppi di C_4 (comuni a C_3 e ad r), e due punti doppi apparenti E', D'. Uno di questi ultimi punti E', sarà la 3ª intersezione di r' e C_3', già secantisi in A', B'; e rappresenterà una retta pel centro di proiezione, incidente ad r e a C_3. L'altro punto, D', sarà il punto doppio apparente di C_3'.

CAPITOLO IV.

Le Quadriche.

§ 29. — **Generalità intorno alle superficie.** — Il concetto intuitivo di *superficie* nasce dal movimento di una linea variabile di forma con una certa legge. Parlando di una superficie, escludiamo che essa sia piana o composta di pezzi piani.

Sopra una superficie si possono immaginare infinite linee, ed infiniti sono i modi con cui la superficie può immaginarsi generata da una linea variabile sopra di essa. In particolare tutti i punti di una superficie che sono comuni ad un piano condotto per un suo punto compongono in generale una o più linee; la linea (eventualmente composta) luogo dei punti comuni ad una superficie e ad un piano costituisce la *sezione piana* della superficie.

Così una superficie può sempre immaginarsi generata dal movimento d'una linea variabile piana passante per uno o anche per due suoi punti generici fissati.

Una retta dicesi *tangente* ad una superficie in un suo punto A allorchè può riguardarsi come limite di una secante variabile, congiungente il punto A ad un altro punto della superficie che si avvicini indefinitamente ad A. Si esprime ciò brevemente dicendo che una tangente congiunge *due punti infinitamente vicini* della superficie.

Una retta tangente ad una linea tracciata sopra una superficie, è tangente alla superficie.

Una linea sezione piana fatta con un piano passante per una retta tangente ad una superficie, è tangente a questa retta.

Come caso particolare può avvenire che una retta tangente ad una superficie F abbia un contatto r-punto ($r > 2$) con una

sezione piana di F per la retta stessa; allora essa si deve riguardare come avente r intersezioni infinitamente vicine con F, riunite nel suo punto di contatto, e però essa avrà un contatto r-punto con ogni sezione piana di F per esso; una tal retta si dice avere un *contatto r-punto con F*.

Se in un punto A di una superficie F si considerano due tangenti a_1, a_2 (le tangenti a due linee per A sulla F), il piano $\alpha \equiv (a_1 a_2)$ sega la superficie secondo una linea C che ha in A due tangenti e però ha ivi un punto doppio (almeno); per il punto A possono passare due effettivi rami della C (non escluso che essi coincidano) o nessuno. Nel 2.° caso il punto A appare come un punto isolato della C e può anche riguardarsi come un cerchio infinitesimo, facente parte della C. Non è escluso che la linea C si riduca al solo punto isolato, come p. es. nel caso della sfera.

Tutte le rette per A nel piano α sono ivi tangenti alla C e quindi alla superficie F.

Suppongasi che vi sia in A una tangente a alla F non giacente nel piano α.

In un piano qualsiasi β condotto per a vi è una sezione piana della F la quale ammette due tangenti, la a e la retta intersezione di β col piano α; la sezione del piano β con F ha dunque in A un punto doppio e però tutte le rette giacenti in β per A le sono ivi tangenti, ed in conseguenza sono tangenti alla F; siccome β è un piano qualunque per a, ne segue che ogni retta per A è ivi tangente alla superficie F, ossia ha ivi riunite (almeno) due intersezioni (infinitamente vicine) con F. In tal caso si dice che il punto A è un *punto doppio* di F.

Se si pensa ad un foglio che attraversi sè stesso lungo una certa linea, si acquista l'idea di una superficie avente due falde passanti per una linea; tutti i punti di questa linea sono doppi per la superficie.

E si possono immaginare due specie di curve doppie per una superficie: *curve nodali,* e *curve cuspidali.* La sezione piana generica della superficie ha un nodo in ogni punto d'incontro con una curva nodale, ed una cuspide nell'incontro con una curva cuspidale.

Ma anche in altro modo può presentarsi un punto doppio (*conico*) di una superficie; infatti se pensiamo ad un cono flessibile e lo deformiamo incurvandone le generatrici, acquistiamo l'idea di una superficie dotata di un punto doppio (o multiplo)

nell'intorno del quale la superficie stessa presenta una forma conica.

Le rette aventi un contatto tripunto colle sezioni piane d'una superficie F per un punto doppio A, ossia aventi un contatto tripunto con F, formano in generale un cono quadrico (*osculatore*).

Ma questo cono si spezza *in due piani osculatori* per ogni punto d'una linea doppia (nodale) comune a due falde della superficie; i suddetti piani osculatori sono i piani tangenti alle due falde nominate. Nel caso particolare della linea cuspidale, i piani osculatori coincidono in uno solo, avendosi allora il contatto delle due falde superficiali lungo tutta la linea.

Se tutte le rette per A avessero ivi un contatto tripunto con F, A sarebbe *triplo* per F e si avrebbe in generale in A un cono *osculatore* di 3° ordine irriducibile, o no, come luogo delle rette aventi ivi un contatto quadri-punto con F ecc.

Ma lasciando da parte l'esame dei punti doppi, o multipli, di una superficie, riassumiamo ciò che si è visto relativamente ad un punto *semplice* (non doppio):

Le tangenti in un punto semplice A *ad una superficie* F *stanno in un piano determinato che gode della proprietà caratteristica di segare la* F *secondo una linea avente in* A *un punto doppio*; questo piano dicesi *il piano tangente ad* F *in* A.

In generale le tangenti alla superficie F in un punto semplice A hanno ivi un semplice contatto con F, cioè non hanno un contatto tripunto; ma questo caso non è da escludere: se esso si presenta vuol dire che il pianto tangente ad F in A sega la F secondo una linea avente in A un punto triplo (almeno).

Però il fatto menzionato è dà riguardare come una *singolarità* del punto A di F.

Invero se la F non contiene dei pezzi piani non è possibile che ciò si verifichi per tutti i suoi punti o per tutti i punti di una sua regione superficiale; ciò potrebbe dimostrarsi assurdo osservando che una (regione di) superficie, la quale fosse segata da ogni piano tangente secondo una curva avente un punto triplo nel punto di contatto, avrebbe un flesso, cioè delle rette (o segmenti di rette) e quindi sarebbe piana.

Dunque data una superficie F che non contenga pezzi piani, il piano π tangente ad essa in un punto generico A la sega secondo una linea dotata ivi di un punto doppio (non triplo).

Se si cercano le rette per A aventi un contatto tripunto con F, queste debbono giacere in π, ed avere un contatto tripunto colla sezione piana di π, ossia debbono essere osculatrici alla nominata linea; vi sono dunque per A al più due rette aventi con F un contatto tripunto; esse prendono il nome di *tangenti principali* ad F in A.

Volendo esaminare i varî casi che possono presentarsi circa la loro esistenza, siamo condotti a distinguere le varie specie di punti doppi che la sezione di F col piano tangente π può avere in A. Per la detta sezione il punto A può essere:

1) un punto isolato, ed allora A dicesi un punto *ellittico* della F; per A non passano tangenti principali di F (osculatrici, ossia tangenti ai rami della linea per A);

2) una cuspide, ed allora A dicesi un punto *parabolico* di F; per A vi è una retta osculatrice alla linea (i due rami per A avendo la stessa tangente), cioè per A vi è una tangente principale della F;

3) un nodo pel quale passino due rami a tangenti distinte della linea; allora A dicesi un punto *iperbolico* di F e per esso passano due rette osculatrici alla nominata linea sezione di π, cioè due tangenti principali di F.

Generalmente sopra una superficie vi sono punti di tutte e tre le specie (ellittici, iperbolici, parabolici) ed anzi i punti iperbolici e gli ellittici formano due regioni separate da una linea di punti parabolici. Si hanno però superficie tutte costituite di punti ellittici, come l'ellissoide, l'iperboloide ellittico, o tutte di punti iperbolici come le quadriche rigate (dove le tangenti principali sono le generatrici), o tutte di punti parabolici come i coni, e più in generale le sviluppabili aventi in ciascun punto una tangente principale che è la generatrice per esso; vedremo poi come le superficie a punti parabolici siano soltanto le sviluppabili.

La figura che corrisponde per dualità ad una superficie luogo di punti, è un *inviluppo doppio* di piani generato dal movimento di una *sviluppabile* che si mova nello spazio cambiando anche di forma secondo una legge determinata; in modo correlativo al piano tangente in un punto di una superficie, si può considerare il punto di contatto di un piano dell'inviluppo.

Una superficie può considerarsi in generale come un inviluppo doppio costituito dai suoi piani tangenti. Va soltanto

eccepito il caso in cui la superficie sia toccata da ogni piano tangente secondo una linea (di contatto), nei punti della quale si abbia sempre lo stesso piano tangente alla superficie, giacchè allora i piani tangenti alla superficie costituiscono una semplice infinità, ossia possono considerarsi come le successive posizioni di un piano tangente mobile di cui il punto di contatto descriva una qualsiasi linea, tracciata sopra la superficie, che non sia la linea di contatto di un piano tangente.

In questo caso i piani tangenti alla superficie costituiscono dunque non un inviluppo doppio, ma una sviluppabile. Allora è facile persuadersi che la superficie è la rigata costituita dalle generatrici della sviluppabile. Invero consideriamo due piani tangenti infinitamente vicini α, β della superficie; il piano α tocca la superficie stessa in tutti i punti di una linea C; ogni punto di O è comune ad α e al piano tangente infinitamente vicino β; perciò la linea di contatto C è la generatrice della sviluppabile dei piani tangenti, comune ai piani α,β.

Possiamo dunque ritenere che i piani tangenti ad una superficie formino sempre un inviluppo doppio, tutte le volte che la superficie stessa non è una rigata sviluppabile (o un piano).

Fra tutte le superficie, le superficie (rigate) sviluppabili si distinguono appunto per la proprietà caratteristica che il piano tangente in un punto generico è tangente in tutti i punti di una linea, cioè della generatrice della sviluppabile che passa per esso; infatti come un punto di una linea (piana o gobba) può riguardarsi come comune a due tangenti infinitamente vicine, così un piano di una sviluppabile può riguardarsi come contenente due generatrici infinitamente vicine della sviluppabile, quindi un piano della sviluppabile sega la rigata delle generatrici secondo una linea che contiene la generatrice di contatto come retta doppia (tutta costituita di punti doppi).

Come i punti di una superficie che giacciono in un piano formano in generale una linea, si ha correlativamente che i piani tangenti di una superficie non sviluppabile, passanti per un punto dello spazio, formano in generale un cono che dicesi il *cono circoscritto* dal punto alla superficie; le generatrici di questo sono le tangenti condotte dal punto alla superficie; queste tangenti possono naturalmente giacere tutte in un piano (in modo correlativo al caso in cui la sezione piana di una superficie si riduce a un punto) solo quando il punto, da

cui sono condotte, giaccia sulla superficie, e si ha sempre il cono circoscritto alla superficie. Soltanto se questa è sviluppabile, il cono circoscritto si ridurrebbe ad un numero finito di piani.

S'intende che il cono circoscritto da un punto alla superficie può anche essere composto da più coni, come correlativamente la linea sezione di un piano ecc.

Il luogo dei punti di contatto delle generatrici del cono circoscritto da un punto ad una superficie dicesi il *contorno apparente* della superficie rispetto a quel punto preso come *centro di vista*. Questo luogo può anche essere composto di più linee. In generale ciascuna di queste linee separa una porzione della superficie in due regioni di *punti visibili* e *invisibili*, rispetto al centro di vista, e la proiezione della linea suddetta, dal nominato centro sopra un piano, forma il *contorno dell'ombra portata* dalla superficie sul piano ove il centro sia un punto luminoso. (Cfr. Parte Prima §§ 42 e 51).

§ 30. — **Superficie algebriche.** — Fra le superficie sono degne di particolare studio le *superficie algebriche*, date da un'equazione $f(xyz) = o$, in coordinate cartesiane od $f(x_1x_2x_3x_4) = o$, in coordinate omogenee, dove f può supporsi un polinomio (omogeneo nel 2.° caso) di un certo grado n; n dicesi l'*ordine* della superficie.

Per queste superficie si possono considerare insieme ai punti reali anche *punti immaginari*. Si possono considerare *punti doppi isolati* pei quali il cono osculatore sia immaginario o spezzato in due piani immaginari ecc.

Nondimeno considereremo sempre superficie date da un'equazione a coefficienti reali; e nel trattare questioni di realità supporremo anche che esse contengano delle falde reali a cui ci riferiremo.

Ricorderemo dalla Geometria analitica le seguenti nozioni:

Una superficie algebrica d'ordine n dicesi *irriducibile* se non vi è alcuna superficie algebrica d'ordine $< n$ facente parte di essa. Una superficie algebrica irriducibile d'ordine n ha comune con ogni piano dello spazio una curva algebrica d'ordine n (reale o no), la quale, tuttavia, può essere riducibile.

La superficie ha comune con ogni retta, che non giaccia su di essa, n punti che possono essere in parte reali ed in parte immaginari (coniugati a coppie), e possono a gruppi coincidere o, come si dice, cadere infinitamente vicini.

Tutte le nozioni poste prima in generale per le superficie, cioè le nozioni di rette e piani tangenti, rette osculatrici e la conseguente distinzione dei punti generici in punti *ellittici*, *iperbolici* e *parabolici*, trovano in particolare la loro applicazione alle superficie algebriche.

La superficie algebrica che ha come equazione omogenea

$$f(x_1x_2x_3x_4) = o\,,$$

ha come piano tangente nel punto $(x_1'x_2'x_3'x_4')$ il piano

$$\frac{\delta f}{\delta x'_1}y_1 + \frac{\delta f}{\delta x'_2}y_2 + \frac{\delta f}{\delta x'_3}y_3 + \frac{\delta f}{\delta x'_4}y_4 = o.$$

Questo piano è indeterminato se

$$\frac{\delta f}{\delta x'_1} = \frac{\delta f}{\delta x'_2} = \frac{\delta f}{\delta x'_3} = \frac{\delta f}{\delta x'_4} = o\,,$$

ed in tal caso il punto $(x'_1x'_2x'_3x'_4)$ è doppio (almeno) per la superficie.

In generale una superficie algebrica non ha punti doppi. Perchè abbia un punto doppio, occorre che si annulli il *discriminante* della sua equazione $f = o$, ossia la resultante delle equazioni

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = o, \frac{\delta f}{\delta x_2} = o, \frac{\delta f}{\delta x_3} = o, \frac{\delta f}{\delta x_4} = o.$$

che sono quattro equazioni omogenee a quattro incognite, in generale incompatibili.

La figura correlativa di una superficie algebrica pensata come *luogo* di punti è un *inviluppo doppio algebrico*, dato da un'equazione algebrica fra le coordinate di piani.

L'inviluppo dei piani tangenti ad una superficie algebrica è un inviluppo doppio algebrico, semprechè la superficie in questione non sia sviluppabile, e così correlativamente, i piani d'un inviluppo doppio algebrico sono tangenti ad una superficie algebrica, oppure (sono i piani passanti per le) tangenti ad una curva algebrica.

Si trae di qui che data una superficie algebrica non sviluppabile, i piani tangenti ad essa per un punto dello spazio

formano un cono inviluppo algebrico (irriducibile o no) di cui la classe ha un valore costante m; m dicesi la *classe della superficie,* ed è anche il numero dei piani tangenti alla superficie passanti per una retta generica.

L'intersezione di due superficie algebriche:

$$f(xyz) = o, \qquad \varphi(xyz) = o,$$

degli ordini m, n è in generale una curva gobba algebrica di ordine mn; questa può essere riducibile in parti, ciascuna delle quali non sia *intersezione completa* di due superficie algebriche. L'esempio più semplice di una curva gobba algebrica, che non è intersezione completa di due superficie, è offerto dalla cubica gobba e in generale dalle curve gobbe il cui ordine è un numero primo p, che non può dunque porsi sotto la forma $p = mn$ (con $m > 1, n > 1$).

Una curva gobba algebrica dell'ordine n ha con una superficie d'ordine m, mn *intersezioni.* Ciò si dimostra facendo variare con continuità la superficie fino a che si decomponga in m piani; il numero delle intersezioni, non potendo variare in modo continuo, per la sua natura di numero intero, resta fisso, ed è quindi, come si è detto, mn.

Nella valutazione del numero precedente è bene inteso per altro che si deve aver riguardo non soltanto ai punti immaginari, che comparissero tra le nominate intersezioni, ma anche al dovuto conteggio dei punti che figurassero come intersezioni multiple, per particolari condizioni di contatto o per molteplicità della curva e della superficie ecc.

§ 31. — **Quadriche. Quadriche ellittiche ed iperboliche.** — Diconsi *quadriche* (quadriche - luogo di punti) le superficie algebriche, irriducibili di 2° ordine.

Considereremo sempre quadriche *reali.*

Una quadrica avente un punto doppio A *è un cono quadrico.*

Infatti congiungendo il punto doppio della quadrica coi punti di una sezione piana (di 2° ordine) si hanno rette che avendo tre intersezioni colla superficie le appartengono interamente; queste rette generano tutta la superficie e costituiscono appunto un cono quadrico.

La condizione perchè una quadrica

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, x_k = o \qquad (i = 1, 2, 3, 4, \qquad k = 1, 2, 3, 4)$$

sia un cono, è dunque quella stessa richiesta, perchè essa abbia un punto doppio, ossia è data dall'annullarsi del discriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = o.$$

Un cono si riguarderà come una *quadrica specializzata.*

Escludiamo i coni quadrici dalle successive considerazioni. Allora tutti i punti di una quadrica sono semplici. Una retta che non appartenga alla quadrica la sega in due punti; secondochè questi sono reali e distinti, reali o coincidenti, o immaginari (coniugati), la retta dicesi *secante, tangente* o *esterna* alla quadrica.

Un piano sega una quadrica secondo una linea di 2° ordine, dunque secondo una conica che può anche spezzarsi.

Tele conica, sezione di un piano, si spezza allora (ed allora soltanto) quando ha un punto doppio, ossia quando il suo piano è tangente alla quadrica. La conica sezione di un piano non tangente colla quadrica può essere reale o immaginaria; il piano dicesi risp. *secante* o *esterno* nei due casi. Un piano condotto per un punto della quadrica Q, riesce secante o tangente, e però vi sono sempre piani secanti e tangenti rispetto a Q; non sempre invece piani esterni, mancando questi per le quadriche contenenti infinite rette, che si presenteranno tra poco.

In un piano secante vi sono rette esterne, tangenti e secanti.

In un piano esterno solo rette esterne.

Per un punto qualsiasi della quadrica vi è un fascio di rette tangenti in esso, rette che appartengono al piano tangente alla quadrica nel punto stesso.

Nel fascio vi sono due tangenti principali.

Una tangente principale alla quadrica ha con essa tre intersezioni (coincidenti), dunque appartiene alla quadrica. Per un punto della quadrica passano due tangenti principali, dunque due rette giacenti sulla quadrica; ma queste rette (generatrici) possono essere immaginarie (coniugate).

Un piano passante per un punto della quadrica e non contenente una delle due generatrici per esso (supposte reali) è secante. Dunque esistono sempre piani tangenti e secanti rispetto ad una quadrica reale.

Vediamo se le due generatrici di una quadrica Q passanti per un punto P possono coincidere in una retta p.

In tale ipotesi il piano π tangente in P sega la Q secondo due rette coincidenti in p, e quindi è tangente a Q in tutti i punti di p. Consideriamo un qualsiasi piano α contenente p ed un punto S di Q esterno a p; questo piano α sega Q secondo una conica che si spezza in p ed in un'altra retta p'; la p' incontra p in un punto M pel quale vi sono due piani tangenti, cioè il piano π e il piano pp', dunque M è doppio per Q e Q è un cono di vertice M.

Viceversa si ha che per ogni punto di un cono quadrico passa una generatrice.

Possiamo esprimere il risultato ottenuto dicendo che una quadrica che non sia un cono, ha soltanto punti iperbolici od ellittici, mentre il cono ha tutti i suoi punti (semplici) parabolici.

Si supponga ora che la quadrica Q abbia un punto iperbolico P; sieno a, b due generatrici di Q per P. Un qualsiasi punto di a o b (non essendo parabolico) è iperbolico per Q. Si prenda infatti un punto (reale) M di Q fuori di a, b. Il piano Ma sega Q secondo una conica che si spezza in a ed in un' altra retta reale a' per M (incidente ad a); e similmente si dica per Mb. Si conclude che tutti i punti di Q sono iperbolici, cioè, che per ciascun punto N di essa passano due rette reali a', b' di Q incidenti risp. ad a, b.

Se infine la quadrica Q contiene un punto ellittico, per esclusione si deduce che tutti i suoi punti saranno ellittici. Sicchè infine possiamo enunciare il

Teorema. — *Una quadrica reale ha tutti i suoi punti iperbolici, o tutti ellittici, o tutti parabolici, ed in quest' ultimo caso è un cono.*

Una quadrica, non specializzata, si dirà *ellittica o iperbolica* (*rigata*) secondochè i suoi punti sono ellittici o iperbolici.

Sopra una quadrica Q, iperbolica, a partire da due generatrici a, b di essa per un punto, si possono distinguere due sistemi di generatrici reali: il sistema α delle generatrici incidenti ad a, ed il sistema β delle generatrici incidenti a b; per un punto di Q passa una generatrice di un sistema e una dell'altro. Dico che due generatrici dello stesso sistema sono sghembe, e che due generatrici di sistema diverso s'incontrano.

Sieno a', a'' due generatrici di Q, p. es. incidenti ad a. Esse sono sghembe, altrimenti il piano $aa'a''$ segherebbe Q secondo tre rette, costituenti complessivamente un curva di 3° ordine.

Sieno invece a', b' due generatrici di diverso sistema su Q, appartenenti la prima al sistema α, la seconda al sistema β; e consideriamo il punto B in cui la b' interseca la b. Il piano Ba' sega Q secondo due rette (incidenti), una delle quali è la a', l'altra è una delle due generatrici b, b' di Q passanti per B; ora poichè b ed a' non sono incidenti, si deduce l'incidenza di a', b' che volevasi dimostrare.

Resta quindi stabilito che la distinzione tra i due sistemi di generatrici della quadrica Q, ottenuta partendo da una coppia di generatrici incidenti a, b, riesce indipendente dalla particolare scelta della suddetta coppia. Tutte le generatrici di un sistema si possono ottenere costruendo le infinite rette incidenti a tre rette qualsiansi (*direttrici*) dell'altro sistema.

Ora si può anche stabilire che:

Le generatrici g_1, g_2, g_3, g_4.... *d'un sistema della quadrica* Q, *segano due rette (direttrici)* d_1, d_2 *dell' altro sistema secondo punteggiate proiettive.*

Infatti presa una terza direttrice d_3 nel sistema di d_1, d_2, le punteggiate d_1, d_2, in quanto si pensino come corrispondenti i punti di esse sezioni delle generatrici g_1, g_2, g_3, g_4...., appariscono come sezioni del fascio di piani che ha come asse d_3.

Correlativamente, le generatrici g_1, g_2, g_3, g_4.... *di un sistema della quadrica* Q *sono le intersezioni dei piani omologhi di due fasci proiettivi di piani aventi come assi due direttrici* d_1, d_2.

Questi teoremi sono anche invertibili cioè:

Le rette congiungenti i punti omologhi di due punteggiate proiettive sghembe d_1, d_2 *costituiscono le generatrici d' un sistema d' una quadrica rigata di cui* d_1, d_2 *sono direttrici.*

Le rette intersezioni dei piani omologhi di due fasci proiettivi cogli assi sghembi d_1, d_2 *costituiscono le generatrici d' un sistema d' una quadrica rigata di cui* d_1, d_2 *sono direttrici.*

Questi enunciati si dimostrano facilmente scrivendo la equazione della superficie luogo delle rette nominate, oppure osservando (per riferici all'enunciato a destra), che l'intersezione della superficie stessa con un piano generico è una conica generata dai fasci proiettivi di raggi, sezioni dei fasci di piani d_1, d_2.

Infine osserviamo che:

I piani tangenti alla quadrica rigata Q *nei punti di una generatrice, p. e.* d_1, *costituiscono un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.*

Infatti i detti piani segati con d_2 dànno luogo ad una punteggiata proiettiva a d_1 (1).

Osservazione. — Ove si faccia astrazione dalla realità, tutto ciò che è stato detto per una quadrica iperbolica, si può ripetere per una quadrica ellittica, quindi si hanno ancora su questa due sistemi di generatrici, che sono però immaginarie; per ogni punto passa una generatrice d'un sistema e una dell'altro; due generatrici sono sghembe o incidenti secondochè appartengono allo stesso o a diverso sistema, ma in questo secondo caso il punto d'intersezione è reale soltanto se le due generatrici immaginarie sono coniugate.

§ 32. — **Polarità**. — Due *punti A, B* si dicono *coniugati rispetto ad una quadrica Q*, quando separano armonicamente le due intersezioni (reali o immaginarie coniugate) della loro congiungente colla quadrica.

Questa definizione, in senso stretto, non è più applicabile se la congiungente AB riesce tangente alla quadrica Q, e, tanto meno, se essa appartiene interamente a Q; ma nel primo caso si deve ritenere (per ragioni di continuità) che A, B sieno punti coniugati se uno di essi appartiene a Q, chiamando dunque coniugati un punto A di Q e un punto di una tangente a Q in A; nel secondo caso, che è da riguardare come caso particolare del primo, i due punti (punti di una medesima generatrice di Q) sono sempre da ritenere come coniugati rispetto a Q.

Segue dalla definizione generale che:

Due punti coniugati rispetto ad una quadrica Q *sono coniugati rispetto alla conica (eventualmente degenere) sezione di* Q *con un qualunque piano passante per i due punti, e viceversa.*

Riferiamoci sempre ad una quadrica Q *non specializzata*. Si consideri un qualunque punto A, e si cerchi il luogo dei punti coniugati di A rispetto alla quadrica Q.

Questo luogo ha comune, con ogni piano per A, una retta, cioè la polare di A rispetto alla sezione del detto piano; essa contiene dunque infinite rette. Due rette sifatte a, b s'incontrano nel punto, coniugato di A, appartenente alla retta comune ai due piani Aa, Ab; perciò tutte le rette nominate sono a due a due incidenti e non passano per un punto. Esse giacciono

(1) Cfr. cit. « Lezioni di Geometria proiettiva » § 22.

dunque in un piano, che costituisce il luogo dei punti coniugati di A.

Concludiamo pertanto:

Il luogo dei punti coniugati di un punto A *rispetto ad una quadrica è un piano* α, che prende il nome di *piano polare* di A. *Il piano polare di un punto della quadrica è il piano tangente in esso, alla superficie.*

Siccome la relazione di due punti coniugati rispetto a Q è reciproca, così:

Se il piano polare del punto A *passa per un punto* B, *il piano polare di* B *passa per* A.

Consideriamo ora una retta p, e su di essa due punti A, B. I loro piani polari α, β s'intersecano secondo una retta p', ogni punto della quale è coniugato ad A e B. Or dunque il piano polare di un qualsiasi punto di p' passerà per A e B, ossia conterrà p. E quindi si vede che un punto qualunque di p e un punto qualunque di p' sono coniugati; tutti i piani polari dei punti di una delle due rette, passano per l'altra.

Riassumendo, concludiamo pertanto:

I piani polari dei punti di una retta p, *rispetto ad una quadrica, passano per un'altra retta* p' *che si dice polare della prima.*

La p' *contiene i poli della retta* p, *rispetto alle coniche sezioni dei piani secanti condotti per* p.

La relazione di due rette polari è reciproca e consiste in questo, che un punto qualunque dell'una retta e un punto qualunque dell'altra sono coniugati.

Le generatrici di una quadrica sono polari di sè stesse.

Consideriamo infine i piani polari dei punti di un piano α rispetto a Q; tre di essi si segano in un punto A, coniugato ad ogni punto di α, pel quale dunque passano tutti i piani polari nominati. Il punto A ha come piano polare α.

I piani polari dei punti di un piano α, *rispetto ad una quadrica, passano tutti per un punto* (detto il *polo* di α) *che ha come piano polare* α.

Queste proprietà ci mostrano che la polarità rispetto ad una quadrica, stabilisce tra punti e piani una corrispondenza biunivoca che è una *correlazione involutoria*.

Osservazione. — Nel caso eccepito in cui la quadrica Q fosse un cono, la correlazione menzionata (polarità rispetto al cono) *degenera*; ogni punto ha come piano polare un piano pel vertice del cono, ed ogni piano per questo vertice è polare dei

punti d'una retta pel vertice (*polare* del punto) (1); mentre ad un piano generico corrisponde come polo il vertice del cono, coniugato di tutti i punti dello spazio.

Ma, lasciando ancora da parte i coni, poichè la polarità rispetto ad una quadrica è una correlazione, avremo che:

Una punteggiata p *è proiettiva al fascio dei piani polari* (passanti per la retta p', polare di p).

Un piano è proiettivo alla stella dei piani polari.

Un fascio di rette è proiettivo al fascio delle rette polari.

In particolare ogni tangente alla quadrica in un punto A, ha come polare una tangente per A (punto coniugato di sè stesso) che dicesi *coniugata* alla prima, e perciò si ottiene in un fascio di tangenti una corrispondenza proiettiva fra le tangenti coniugate; siccome poi due tangenti coniugate si corrispondono in doppio modo, si ha:

Le coppie di tangenti coniugate in un punto della quadrica formano una involuzione (involuzione delle tangenti coniugate).

Questa involuzione ha come rette doppie le generatrici della quadrica uscenti dal punto (ciascuna generatrice resultando per definizione polare di sè stessa), e perciò è *iperbolica* se la quadrica è rigata, *ellittica* nel caso opposto.

Osservazione 1.ª — Pel cono quadrico l'involuzione delle tangenti coniugate in un punto (diverso dal vertice) risulta *parabolica* o *degenere*, ogni tangente essendo coniugata alla generatrice che passa per il punto.

Osservazione 2.ª — Abbiam visto che ad ogni quadrica corrisponde una polarità, cioè una correlazione involutoria, rispetto a cui la quadrica stessa risulta definita come luogo dei punti coniugati di sè stessi, cioè appartenenti al proprio piano polare. Ora si può proporre la questione inversa di studiare quale sia, in generale, il luogo dei punti coniugati di sè stessi in una polarità (correlazione involutoria) dello spazio. Tale problema porta ad una *classificazione delle polarità dello spazio*, a cui brevemente accenniamo:

1) In primo luogo può darsi che una polarità π contenga un punto A non appartenente al proprio piano polare α; allora si ottiene in α una polarità subordinata di π, e prendendo un triangolo BCD coniugato in questa si ottiene un *tetraedro* $ABCD$ *coniugato* rispetto a π, cioè un tetraedro in cui ad ogni vertice corrisponde come polare la faccia opposta.

(1) Cfr. cit. « Lezioni di Geometria proiettiva » § 81.

Ogni correlazione dello spazio in cui ai vertici di un tetraedro corrispondono le facce opposte è una polarità, come si dimostra facilmente.

Si ottiene così una *prima specie* di *polarità spaziali, dotate di tetraedri coniugati,* ed analoghe alle polarità del piano.

Le polarità di questa prima specie si distinguono in *due classi: polarità uniformi* in cui nessun punto (reale) è coniugato di sè stesso, e *polarità che ammettono una quadrica fondamentale* (reale) luogo di punti coniugati di sè stessi.

Si possono distinguere le polarità delle due classi partendo da un tetraedro coniugato e considerando un punto O e un piano ω corrispondenti, elementi che (supposti in posizione generale) determinano la polarità. Se il piano ω è esterno alla regione tetraedrale che contiene O, la polarità è uniforme; se all'opposto ω penetra nella regione nominata, esistono dei punti coniugati di sè stessi. In questo 2° caso designato con P uno di tali punti, si considerino le rette per P non appartenenti al piano polare di P; su ciascuna retta le coppie di punti coniugati nella polarità formano una involuzione, che ammette, oltre P, un secondo punto doppio P' coniugato di sè stesso; al variare della retta per P, il punto P' descrive una superficie incontrata da ogni retta in due punti, cioè una quadrica fondamentale per la polarità.

2) In 2° luogo si ottiene una *seconda specie di polarità dello spazio* (*sistema nullo*) supponendo che ogni punto appartenga al proprio piano polare.

Queste polarità, rispetto a cui ogni punto è coniugato di sè stesso, non hanno riscontro nelle polarità del piano (ove l'ipotesi analoga conduce ad una polarità *degenere*).

Noi abbiamo avuto esempio di siffatte polarità o sistemi nulli, considerando la polarità rispetto ad una cubica gobba (§ 25).

§ 33. — **Classe delle quadriche. — Cono circoscritto.** — La osservazione che una quadrica può definirsi come superficie fondamentale per una polarità di prima specie, la quale è correlativa di sè stessa, mostra che *la quadrica è un ente correlativo di sè stesso,* cioè ad una proprietà grafica della quadrica, riguardata come *luogo di punti*, deve corrispondere una proprietà correlativa dell'*inviluppo dei suoi piani tangenti*. Pertanto que-

sto inviluppo sarà di *classe due*, cioè verrà rappresentato da una equazione di secondo grado in coordinate di piani, ossia vi saranno per una retta generica due piani tangenti alla quadrica ecc.

A queste proprietà si arriva anche direttamente, nel modo più semplice, colle considerazioni che seguono:

Data una retta p ed una quadrica Q (non specializzata), i piani tangenti a Q per p (reali o no) sono i piani proiettanti da p le intersezioni di Q colla polare p' di p.

Infatti ogni piano per p ha il suo polo su p', e quindi anche il polo di un piano tangente a Q per p, cioè il punto di contatto di un tal piano deve appartenere a p'.

Ne risulta, come si è detto, che *la quadrica è di classe due*, ed anche che le sole rette dello spazio per cui passano infiniti piani tangenti a Q sono le (eventuali) generatrici della quadrica, ciascuna delle quali ha come polare sè stessa.

Osservazione. — Il cono quadrico, eccepito dalle nostre considerazioni, potrebbe riguardarsi di *classe zero.*

Ora rispetto alla quadrica Q (non cono) otterremo una partizione delle rette dello spazio, secondo il criterio correlativo a quello che ci ha portato a distinguere le rette secanti, tangenti ed esterne.

Si avranno infatti:

α) rette per cui passano *due* piani reali tangenti a Q;

β) rette per cui ne passa uno solo;

γ) rette per cui non passono piani reali tangenti a Q;

Una retta appartenente ad una delle 3 categorie α), β), γ) ha come polare risp. una retta secante, tangente od esterna, e viceversa.

E quindi:

Per una tangente alla quadrica vi è un solo piano tangente ad essa (che tocca la quadrica nel punto di contatto) *e viceversa.*

Essendo la quadrica Q (eccepito il caso del cono) di classe due, avremo che *i piani tangenti a* Q *passanti per un punto* P *inviluppperanno un cono quadrico* (*cono circoscritto a* Q *dal punto*), *le cui generatrici saranno le rette tangenti a* Q *per* P.

Vi saranno tuttavia da distinguere 3 casi: se il suddetto cono è reale e non degenere, il punto P si dice *esterno* a Q: se esso è affatto immaginario, di guisa che per P non vi sono piani tangenti a Q, il punto P si dice *interno*: infine il cono circoscritto degenera in due fasci di piani, reali o immaginari coniugati, i cui assi sono generatrici di Q, se P è sulla quadrica.

Un punto è esterno o interno rispetto alla quadrica secondochè il suo piano polare è secante o esterno rispetto ad essa.

Infatti il cono circoscritto dal punto P alla quadrica Q è il cono proiettante, da P, la conica sezione del piano polare di P stesso.

Si vede dunque che, come vi sono sempre piani secanti rispetto ad una quadrica, così vi sono sempre punti esterni. Mancano invece i punti interni (come i piani esterni) per le quadriche rigate, da ogni punto uscendo infiniti piani tangenti, proiettanti le infinite generatrici.

Una *retta* e un *piano* si dicono *coniugati* rispetto ad una quadrica, se il piano contiene la polare della retta (e la retta il polo del piano).

Le rette e i piani coniugati che passano per un punto si corrispondono in una polarità della stella, che ammette come cono fondamentale il cono circoscritto dal punto alla quadrica, e perciò è una polarità uniforme se il punto nominato è interno.

Le rette uscenti da un punto P esterno alla quadrica Q appartengono a due piani tangenti se sono esterne rispetto al cono circoscritto da P, e non appartengono a piani tangenti se sono interne.

Invece per le rette uscenti da un punto interno non passano mai piani tangenti a Q.

Possiamo ora paragonare le due partizioni delle rette dello spazio ottenute rispetto ad una quadrica Q, concepita come luogo e come inviluppo.

Che cosa potrà dirsi intorno alla reale esistenza dei piani tangenti a Q, per una retta secante o esterna?

Occorre distinguere i due casi in cui si tratti rispettivamente di

1) *Quadriche iperboliche* (*rigate*).

Allora per una retta secante passano due piani tangenti (*reali*); *per una retta esterna non ne passano.*

Sia Q una quadrica rigata. Sia p una retta non tangente a Q; essa sega Q in due punti A, B. Un piano tangente a Q per p deve segare Q secondo due rette (incidenti), una delle quali passa per A e una per B. Ora per A passano due generatrici a_1, a_2 di Q, e per B due altre generatrici b_1, b_2; sarà p. es. b_1 incidente ad a_1, b_2 ad a_2. Segue di qui che per p si hanno due piani tangenti a Q; essi sono il piano $\alpha = a_1 b_1$ ed il piano $\alpha_2 = a_2 b_2$.

Il ragionamento precedente ci dice che se p è tangente a Q, per p passa un piano tangente a Q, quello tangente a Q nel suo punto di contatto; si può dire che ci sono in questo caso per p due piani tangenti a Q coincidenti.

La costruzione indicata prova che i due piani tangenti a Q per una retta secante p sono in questo caso reali.

D'altra parte una retta p non tangente a Q che giaccia in un piano tangente α è certo secante perchè sega le due generatrici di Q nel piano α, quindi per una retta esterna non vi sono piani (reali) tangenti a Q.

2) *Quadriche ellittiche.*

Allora per una retta secante non passano piani tangenti (reali); per una retta esterna passano due piani tangenti (reali).

In primo luogo è chiaro che per una retta secante non passano piani tangenti alla quadrica Q; basta infatti notare che una retta p non tangente, la quale giaccia in un piano α tangente a Q, è esterna a Q; invero α ha in comune con Q soltanto un punto A pel quale p non passa.

In secondo luogo si consideri una retta p esterna alla quadrica (ellittica) Q e si conduca per essa un piano α secante Q secondo una conica C. Si prenda su p un punto A (esterno a C) e per A si conduca una retta p' secante C: il cono circoscritto da A a Q sega il piano α secondo le due tangenti per A a C; p e p' separano queste tangenti nel fascio A, e però l'una di esse è esterna e l'altra interna al cono circoscritto da A a Q; ma per p' (secante Q) non passano piani tangenti a Q, dunque p' è interna al detto cono circoscritto e p esterna; ne segue che per p passano due piani tangenti (al detto cono circoscritto, cioè) alla quadrica Q.

Le proprietà dimostrate portano che:

Rispetto ad una quadrica rigata la polare di una retta secante è secante, e la polare di una retta esterna è esterna.

Rispetto ad una quadrica ellittica la polare di una retta secante è esterna e viceversa.

§ 34. — **Quadriche rigate**. — Dobbiamo ora occuparci partitamente delle due specie di quadriche rigate e non rigate, cioè iperboliche ed ellittiche, secondo cui si distinguono le quadriche non specializzate.

Abbiamo già osservato che:

Rispetto ad una quadrica rigata:

ogni piano non tangente è secante.

Invero un piano qualsiasi sega sempre le rette (reali) della quadrica in infiniti punti reali.

ogni punto che non le appartenga è esterno.

Invero per un punto qualsiasi passano infiniti piani (tangenti) proiettanti le generatrici (reali) della quadrica.

Non esistono dunque rispetto ad una quadrica rigata piani esterni, nè punti interni.

Nondimeno la quadrica rigata divide lo spazio in due regioni di punti (e correlativamente in due regioni di piani) che vengono separate dalla superficie.

Invero, si prenda una retta p esterna alla quadrica Q. Ogni piano per p sega Q secondo una conica non degenere, e il piano resta diviso in due regioni di punti, interni ed esterni, la regione esterna contenendo p. Ora, al variare del suddetto piano per p, le due regioni di esso, separate dalla conica sezione considerata, descrivono due regioni spaziali separate dalla superficie Q. Una di queste contiene p, e l'altra la sua polare p'. Le due regioni del resto non si distinguono, l'una dall'altra, per alcuna proprietà *grafica*, giacchè la conica sezione di un piano per p' contiene una regione di punti interni che al variare del piano per p' descrive la regione spaziale contenente p.

Data una quadrica rigata, noi potremo distinguere sotto l'aspetto metrico due casi:

1) Il piano all'infinito è secante. Allora la quadrica dicesi *iperboloide iperbolico* o *rigato*. I piani tangenti nei punti all'infinito dell'iperboloide formano un cono quadrico irriducibile, detto *cono asintotico,* il cui vertice (polo del piano all'infinito) dicesi *centro* dell'iperboloide.

2) Il piano all'infinito è tangente. Allora la quadrica dicesi *paraboloide iperbolico*. Vi sono (per ciascun punto) due piani paralleli risp. alle generatrici dei due sistemi di esso.

Le rette del piano all'infinito possono essere secanti, esterne o tangenti rispetto all'iperboloide, secanti o tangenti rispetto al paraboloide. Da ciò segue che:

Le sezioni piane non degeneri dell'iperboloide (rigato) possono essere ellissi, iperbole o parabole; quelle del paraboloide (rigato) soltanto iperbole o parabole.

Abbiamo già notato come una quadrica rigata separi lo spazio in due regioni. Riferendoci al caso dell'iperboloide vediamo ora come esse si distinguano sotto l'aspetto metrico. Infatti una

delle due regioni contiene quella parte del piano all'infinito che è interna alla conica segata sopra di esso dall'iperboloide; l'altra la parte esterna.

E poichè partendo da una retta all'infinito p, esterna all'iperboloide, tutti i piani, paralleli, per p segano l'iperboloide secondo ellissi, si vede che *l'iperboloide rigato ha forma tubulare*, venendo generato (in infiniti modi) da un'ellisse variabile; la regione dello spazio non contenente p è quella a cui appartengono i punti interni delle ellissi generatrici. Tra le infinite generazioni dell'iperboloide che si ottengono nel modo anzidetto ve n'è una particolarmente notevole, a cui brevemente accenneremo.

Occorre perciò ricordare rapidamente alcune proprietà metriche dell'iperboloide.

Le polari delle rette all'infinito, dette *diametri* della quadrica, passano per il centro di essa che è un punto proprio nel caso dell'iperboloide. Ogni diametro è il luogo dei centri delle coniche segate dai piani paralleli (*coniugati*) passanti per la polare del diametro.

La corrispondenza fra i diametri ed i piani coniugati pel centro (*piani diametrali*) di un iperboloide rigato è la *polarità rispetto al cono asintotico*. In questa polarità vi sono generalmente *tre diametri perpendicolari al proprio piano coniugato*, che sono gli assi del cono asintotico e si chiamano pure *assi dell'iperboloide*.

Di questi assi uno (l'*asse principale*) è esterno al suddetto cono e all'iperboloide, gli altri due sono secanti.

È da notare il caso particolare dell'*iperboloide rotondo*, generato dalla rotazione di un'iperbole attorno all'asse non trasverso, che è asse principale dell'iperboloide; in questo caso il cono asintotico è di rotazione, e si hanno infiniti assi ortogonali all'asse principale.

Ritornando al caso generale, vediamo che i piani ortogonali all'asse principale (*piani principali*) segano l'iperboloide secondo ellissi i cui centri stanno sull'asse, mentre i piani ortogonali agli altri due assi dànno sezioni iperboliche. Per tal modo l'iperboloide rigato viene generato da un'ellisse variabile di forma che si sposta conservando la direzione dei suoi assi, ortogonalmente all'asse principale, luogo dei centri dell'ellisse generatrice.

Tra le nominate ellissi generatrici è *minima* quella segata dal piano diametrale (*principale*) ortogonale all'asse principale; essa vien detta *ellisse di gola*.

Noteremo infine come i piani seganti il cono asintotico di un iperboloide secondo circoli (§ 13), seghino sull'iperboloide stesso due fasci di circoli paralleli. Infatti la conica sezione di uno, α, dei piani nominati, determina sulla retta all'infinito di esso la stessa involuzione di punti coniugati che determina la conica sezione dell'iperboloide, e del cono asintotico, col piano all'infinito; dunque la medesima involuzione determinata su quella retta dalla sezione (circolare) di α col suddetto cono, cioè la involuzione assoluta. Soltanto nel caso dell'iperboloide rotondo si ha un solo fascio di sezioni circolari ortogonali all'asse principale; fra queste si trova il *circolo di gola*.

§ 35. — **Quadriche ellittiche.** — Sia Q una quadrica ellittica e C una conica reale sezione di essa con un piano secante. Un punto di questo piano interno a C è interno alla quadrica Q; infatti se per esso passasse un piano tangente a Q (questo incontrando il piano di C secondo una retta secante C e Q) si avrebbe per una secante un piano tangente a Q, mentre, essendo Q ellittica, un tal piano non esiste (§ 33).

Enunciando insieme il fatto correlativo si ha:

Rispetto ad una quadrica ellittica esistono piani esterni e *punti interni*.

Osservazione. — Preso un punto A non appartenente ad una quadrica Q, si consideri per A un piano α secante secondo una conica C. Al variare di α (e di C) il punto resta sempre esterno o sempre interno a Q se Q è ellittica; invece se Q è rigata vi sono dei piani α per cui A è esterno a C (quelli secanti il cono circoscritto) e dei piani α per cui A riesce interno a C (quelli esterni al detto cono).

Sotto l'aspetto metrico una quadrica ellittica può dar luogo ai seguenti casi:

1) Il piano all'infinito è secante. La quadrica prende il nome di *iperboloide non rigato a due falde* o *ellittico* (per opposizione all'iperboloide rigato detto anche ad *una falda* o *iperbolico*). Le sezioni piane sono iperbole, ellissi e parabole.

È facile vedere che la superficie consta in questo caso di due falde che cadono da banda opposta d'un piano esterno. Il polo del piano all'infinito (*centro*) è un punto esterno, vertice di un cono circoscritto reale (*cono asintotico*).

Un esempio particolare è dato dall'iperboloide ellittico di rotazione (*rotondo*), generato dalla rotazione d'una iperbole attorno all'asse trasverso.

2) Il piano all'infinito è esterno. La quadrica prende il nome di *ellissoide*. Il polo del piano all'infinito (*centro*) è interno ad essa. Le sezioni piane non degeneri sono ellissi. La superficie è in questo caso finita, cioè racchiudibile in un tetraedro finito costituito da 4 piani esterni.

Un esempio particolare è dato dall'ellissoide di rotazione generato dalla rotazione di un'ellisse attorno ad un asse. Come ulteriore caso particolare si ha la *sfera*.

3) Il piano all'infinito è tangente.

La quadrica prende il nome di *paraboloide non rigato od ellittico* (per contrapposto al paraboloide rigato od iperbolico). Le sezioni piane (reali) non degeneri della superficie sono soltanto ellissi o parabole.

Un esempio è dato dal paraboloide di rotazione, generato dalla rotazione d'una parabola attorno all'asse.

Per le quadriche ellittiche, come per le rigate, si possono definire i *diametri*, come polari delle rette all'infinito e luogo dei centri delle sezioni dei piani, paralleli, *coniugati*; e gli *assi* come diametri ortogonali ai piani coniugati.

Tutti i diametri passano pel centro, che è un punto proprio per l'iperboloide e per l'ellissoide. E per questo centro, supposto proprio, si ha una *polarità in cui si corrispondono i diametri e i piani diametrali coniugati*, che, per l'iperboloide, è la polarità rispetto al cono asintotico.

Si avranno dunque anche per l'iperboloide ellittico *tre assi* e *tre piani diametrali principali*, cioè quelli del suo cono asintotico, o infiniti assi nel caso particolare dell'iperboloide rotondo. Di questi assi uno solo (*asse principale*) riuscirà secante in due punti detti *vertici*; ed i piani ortogonali ad esso, nei punti esterni al segmento limitato dai vertici, segheranno l'iperboloide secondo ellissi.

L'iperboloide ellittico ammetterà pure generalmente *due* fasci paralleli di piani di sezione circolare, quelli appunto che segano secondo circoli il cono asintotico.

Si avranno quindi *4 ombelichi o punti circolari*, cioè 4 punti dove l'involuzione delle tangenti coniugate è quella degli angoli retti; questi saranno i punti di contatto dei piani tangenti paralleli a quelli di sezione circolare.

Nel caso dell'iperboloide rotondo si ha un solo fascio di piani di sezione circolare, ortogonali all'asse di rotazione e due ombelichi.

In quanto al paraboloide ellittico, tutti i suoi diametri sono paralleli, ed uno di essi (*asse*) è ortogonale ai piani coniugati.

Si hanno poi due fasci paralleli di sezioni circolari, la cui determinazione si potrebbe ottenere in modo analogo a quello che conduce alle sezioni circolari di un cilindro ellittico, costruendo, nel piano all'infinito, le due rette sulle quali l'involuzione delle tangenti coniugate nel punto all'infinito del paraboloide viene segata secondo l'involuzione assoluta.

Si avranno anche nel paraboloide 4 ombelichi.

Rivolgiamoci ora all'ellissoide.

In questo caso il *centro* è *interno* ed ogni piano per esso riesce secante. La polarità fra diametri e piani diametrali coniugati pel centro è uniforme, ammettendo come cono fondamentale il cono asintotico immaginario.

Il prodotto di questa polarità e della polarità ortogonale della stella che ha centro nel centro dell'ellissoide, è un'omografia, ed ogni raggio unito di questa è un asse dell'ellissoide. Siccome un'omografia della stella ha certo qualche raggio unito, vi sarà dunque almeno un asse a dell'ellissoide; ma il piano ortogonale ad a sega l'ellissoide secondo un'ellisse, i cui assi b, c saranno pure assi dell'ellissoide.

Dunque l'*ellissoide ha generalmente tre assi*; ne ha *infiniti*, un asse e quelli ortogonali di un fascio, nel caso particolare dell'*ellissoide di rotazione*: per la sfera poi tutti i diametri sono assi.

Osservazione. — La sfera si può definire come quella quadrica che subordina sul piano all'infinito la polarità assoluta, ossia che contiene il *cerchio immaginario* (detto *assoluto*) fondamentale per la suddetta polarità.

Riferendoci al caso generale, l'ellissoide determina sui tre assi risp. tre segmenti, i cui estremi sono i *vertici* della quadrica; le lunghezze dei *tre assi* sono *disuguali*, salvo il caso dell'ellissoide di rotazione.

Anche l'ellissoide ammette delle sezioni circolari, ma queste non si possono più determinare (come per gli iperboloidi) ricorrendo al cono asintotico, che è immaginario.

Se un piano sega l'ellissoide secondo un circolo, lo stesso avviene per ogni altro piano secante ad esso parallelo; infatti

due sezioni parallele determinano sulla retta all' infinito la medesima involuzione di punti coniugati (i cui punti doppî sono le intersezioni immaginarie della retta coll' ellissoide), e questa deve essere l' involuzione assoluta affinchè le sezioni nominate sieno circoli.

La ricerca delle sezioni circolari è così ricondotta a quella delle rette all' infinito di tali piani, le quali vengono caratterizzate dalla seguente proprietà: su di esse l' involuzione dei punti coniugati rispetto all' ellissoide è l' involuzione assoluta.

Ora considerando nel piano all' infinito la polarità uniforme π determinata dall' ellissoide e la polarità assoluta Ω (pure uniforme), si tratta dunque di cercare le rette sopra cui le due polarità π, Ω subordinano la medesima involuzione di punti coniugati.

È lo stesso problema da cui abbiam visto dipendere la ricerca delle sezioni circolari del cono quadrico (e degli iperboloidi), solo che si tratta qui di due polarità uniformi (con conica fondamentale immaginaria) anzichè di una polarità uniforme (la assoluta) e di una non uniforme (cioè con conica fondamentale reale). E la risoluzione del problema nel caso attuale è fondamentalmente la stessa.

Si considerino i tre punti all' infinito degli assi dell' ellissoide (supponendo per generalità che esso non sia di rotazione); sono i tre punti A, B, C aventi la medesima polare rispetto a π e ad Ω. Una retta p condotta per uno, ad es. A, di questi punti, ammette una retta *coniugata* per A stesso, luogo dei punti coniugati ai punti di p tanto rispetto a π quanto ad Ω. E si ottiene così nel fascio A un' involuzione di rette coniugate, in cui si corrispondono in particolare i due lati AB, AC del triangolo ABC (fig. 240).

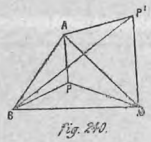


fig. 240.

Ora proiettando da A, B, C due punti P, P' del piano, coniugati rispetto a π e ad Ω (e perciò appartenenti a due diverse regioni triangolari ABC), si hanno tre coppie risp. per A, B, C, una delle quali non separa i lati del triangolo pel corrispondente vertice. Questo vertice è centro d' una involuzione iperbolica i cui raggi doppî sono le rette all' infinito dei piani di sezione circolare dell' ellissoide.

Concludiamo pertanto che l' *ellissoide* (come le altre quadriche a centro) *ammette due fasci paralleli di piani di sezione circolare*, i quali sono paralleli ad uno degli assi. Questo asse, come facilmente si comprende, è l' *asse medio* fra i tre supposti di disuguale lunghezza.

Se due degli assi sono uguali si hanno, come si è detto, infiniti assi e l' ellissoide è di rotazione; allora le sezioni circolari sono ortogonali all' asse di rotazione, il quale alla sua volta è ortogonale al piano dei due assi uguali.

Come caso particolare si noti che la sfera ha tutte le sezioni piane circolari.

Osservazione. — L' ellissoide ha in generale 4 ombelichi, o punti circolari, sezioni dei diametri coniugati ai piani di sezione circolare.

L' ellissoide di rotazione ha due ombelichi.

Per la sfera tutti i punti sono ombelichi.

§ 36. — **Condizioni che individuano una quadrica.** — Se una quadrica $f(xyz) = o$ deve passare per un punto $(x_1y_1z_1)$, deve essere soddisfatta dai coefficienti di f una equazione lineare ed omogenea. Questi coefficienti sono dieci; dunque:

Vi è in generale una quadrica determinata che passa per 9 punti dello spazio.

Questa quadrica può essere un cono o spezzarsi in due piani per posizioni particolari dei 9 punti. Ugualmente per posizioni particolari dei 9 punti le condizioni di passaggio di una quadrica per essi possono non riuscire tutte indipendenti, sicchè si abbiano infinite quadriche passanti per i 9 punti.

Ecco qualche esempio in proposito:

Se una quadrica deve contenere tre punti di una retta, essa deve contenere di conseguenza tutti i punti della retta. Se una quadrica deve contenere 5 punti di una conica, essa deve contenere di conseguenza tutti i punti della conica.

Consideriamo una curva del 4.° ordine irriducibile C_4, intersezione completa di due quadriche

$$f_1(xyz) = o, \qquad f_2(xyz) = o.$$

Ogni quadrica la cui equazione è della forma

$$f(xyz) = \lambda f_1(xyz) + \mu f_2(xyz) = o,$$

contiene tutti i punti di C_4 (le cui coordinate annullando f_1 e f_2 annullano anche f). Il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ può determinarsi in modo che i coefficienti di f soddisfino ad una condizione lineare esprimente

il passaggio della quadrica per un altro punto assegnato fuori di C_4, sicchè:

Vi è una quadrica determinata passante per la quartica intersezione di due quadriche date e contenente un altro punto assegnato fuori di essa.

Si vede così che le condizioni perchè f contenga C_4 sono espresse dal passaggio di f per 8 punti generici della C_4 stessa. Tuttavia se si scelgono su C_4 8 punti in posizione particolare, intersezioni di C_4 con una quadrica $f_3 = o$ che non contenga C_4, è chiaro che gli 8 punti stanno sopra tutte le quadriche

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = o,$$

le quali per $\nu = o$ non contengono C_4; ciò mostra che, in questo caso, le condizioni perchè una quadrica passi per 7 punti, fra gli 8 assegnati, traggono di conseguenza che essa passi anche per l'ottavo.

Un caso particolare di quello considerato innanzi si ha quando (essendo p. es. la $f_2 = o$ spezzata in due piani) la C_4 sia riducibile, cioè composta con due coniche C_1, C_2 poste in piani diversi ed aventi due punti comuni A, B.

Scegliamo sopra ciascuna delle due coniche altri 3 punti. Vi sono infinite quadriche passanti per i 6 punti scelti e per A, B; queste contengono le due coniche; per un punto dello spazio vi è *una* di queste quadriche; se il punto è preso fuori dei piani di C_1, C_2 la quadrica è irriducibile, ma (in casi particolari) può essere un cono. Dunque:

Vi è una quadrica irriducibile determinata, che passa per due coniche giacenti in piani diversi ed aventi due punti comuni (reali o no) e che contiene inoltre un punto fuori dei piani delle due coniche.

Come caso limite (secondo il principio di continuità) si ha:

Vi è una quadrica irriducibile determinata che passa per una data conica e per un punto fuori del suo piano e che ha un dato cono quadrico circoscritto secondo questa conica.

Possiamo dimostrare rigorosamente quest'ultimo enunciato nel seguente modo:

Sia C la data conica e P il vertice del cono circoscritto assegnato (cono proiettante C da P); sia A l'ulteriore punto fuori del piano di C, per cui la quadrica Q (da costruire) deve passare.

Se A è sul cono PC, la quadrica Q è questo cono.

Escludiamo che A appartenga al cono proiettante C da P.

Consideriamo un piano generico α_1 per la retta PA; α_1 sega C in due punti M_1, N_1; la sezione della quadrica Q (se tale quadrica da costruire esiste) deve essere la conica C_1 che passa per A e tocca in M_1, N_1 le rette PM_1, PN_1 (fig. 241)

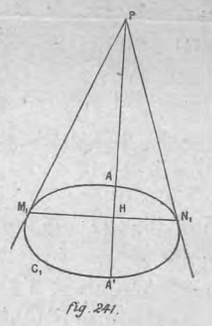


fig. 241.

Facciamo variare il piano per PA, facendogli assumere un'altra posizione α_2; la detta conica assumerà corrispondentemente un'altra posizione (e forma) C_2; le coniche C_1, C_2 passeranno per il punto A e per il coniugato armonico A' di A rispetto a P ed al punto

$$H \equiv PA \cdot M_1N_1.$$

Vi è una quadrica Q che passa per C_1, C_2 e per un altro punto di C (oltre M_1, N_1 e gli altri due punti omologhi M_2, N_2). La quadrica Q contiene le coniche C, C_1, C_2; essa passa per A ed ha inoltre 4 piani tangenti in 4 punti (M_1, N_1, M_2, N_2) di C, piani intersecantisi in P; essa ha quindi P come polo del piano di C.

Siffatta quadrica soddisfa dunque alle condizioni imposte ed è evidentemente l'unica che vi soddisfi.

§ 37. — **Rappresentazione generale d'una quadrica nel metodo delle proiezioni centrali.** — Occupiamoci ora della rappresentazione delle quadriche nel metodo delle proiezioni centrali.

Assumiamo il centro di proiezione O esterno alla data quadrica Q (cioè, se Q è rigata, in un punto qualunque non appartenente a Q). Sia τ il quadro, cioè un qualunque piano (non passante per O) che potremo supporre secante, o tangente, o esterno a Q (quest'ultimo caso però soltanto se Q non è rigata).

Si consideri il cono circoscritto da O alla quadrica Q, sia K la conica di contatto, K' la sua immagine sul quadro π, sezione del cono OK. La conica K dicesi *contorno apparente* della quadrica Q veduta dal punto O. Secondo il § precedente la quadrica Q è pienamente determinata dati il contorno apparente K ed un suo punto P.

La K è data dalla relativa immagine K' quando è fissato il suo piano (tq), polare di O. E il punto P verrà rappresentato mediante la sua immagine P' ed una retta $[TQ]$ per esso.

La conica K' divide il piano π in due regioni di punti

risp. interni ed esterni ad essa conica; le immagini dei punti di Q cadono in una sola di queste due regioni, sono cioè punti esterni a K' o su K' se la quadrica è rigata, ed invece punti interni a K' o su K' se la Q non è rigata; infatti nei due casi si ha risp, che le rette per O secanti Q sono risp. esterne od interne al cono circoscritto OK, giacchè nel 1.° caso vi sono, per una di queste rette, due piani tangenti (reali) a Q, nel 2.°, no (§ 33).

Se dunque s'immagina che O sia un punto luminoso e la quadrica Q sia opaca, delle due regioni in cui K' divide il quadro, una (quella costituita dalle immagini dei punti di Q) sarà all'ombra, l'altra sarà illuminata. Un punto del quadro π nella regione d'ombra, e non su K', è immagine di due punti di Q.

Le coniche C sezioni piane della quadrica Q hanno per immagine C' sul piano π, delle coniche che sono tutte esterne o tutte interne alla immagine K' del contorno apparente, ma hanno due punti comuni con essa (reali e distinti o coincidenti, o immaginarî coniugati), proiezioni dei punti di Q comuni a C, K cioè dei punti sezioni di Q colla retta comune ai piani di C e di K.

Un punto A' comune ad una C' e alla K' è proiezione di un punto A di Q ed è sempre un punto di contatto delle C', K', giacchè il piano tangente in A alla Q passa per O e sega π secondo una retta che è ugualmente l'immagine della tangente in A a C e a K, e però riesce tangente a C', K' in A'.

Viceversa una conica C' di π appartenente alla regione ombreggiata dalla quadrica Q e bitangente alla conica K' è sempre l'immagine di due coniche, sezioni piane di Q. Invero siano A', B' i punti di contatto di C', K' (immagini risp. dei punti A, B di K') e sia H' un altro qualsiasi punto di C' immagine di due punti H_1, H_2 di Q; ciascuno dei piani H_1AB, H_2AB sega Q secondo una conica la cui proiezione su π passa per H' e tocca K' in A', B', quindi coincide con C'.

Come caso particolare si desume che:

Se la quadrica è rigata, le sue generatrici hanno per immagini su π le tangenti alla conica K' *e viceversa.*

Invero una generatrice di Q incontra il piano del contorno apparente K e quindi la stessa conica K in un certo punto P, ed il piano tangente a Q in P (piano passante per O) è il piano della tangente a K e della generatrice nominata: per conseguenza l'immagine della generatrice nominata è una retta che

tocca K' nel punto P' proiezione di P. Viceversa una tangente a K' è l'immagine delle due generatrici di Q giacenti nel piano (tangente a Q e) proiettante la nominata tangente da O.

Andiamo ora a risolvere alcuni problemi costruttivi che si presentano nella rappresentazione delle quadriche data innanzi. Per semplificare le costruzioni stesse supponiamo di avere eseguito (eventualmente) un cambiamento del quadro, ossia un ribaltamento in guisa che il piano della conica contorno apparente sia il quadro stesso; questa conica è allora proiezione di sè stessa e costituisce la conica traccia della quadrica Q (sezione del quadro). Indichiamo tale conica con τ. Diamo inoltre un punto $P \equiv (P' - T_1Q_1)$ della quadrica Q, fuori di τ.

Occorre distinguere i due casi in cui P' è esterno o interno a τ. Nel 1.° caso la Q è rigata, nel secondo no.

Risolviamo per ambedue i casi i seguenti problemi:

Problema 1.° — *Determinare i due punti della quadrica* Q *aventi una data immagine (nella regione d'ombra).*

1.° Caso. — La quadrica sia rigata (fig. 242).

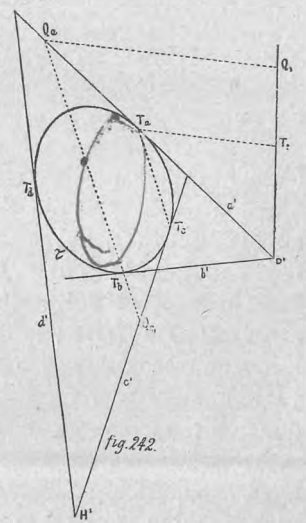


fig. 242.

Conduciamo anzitutto le tangenti per P' alla conica τ, immagini delle generatrici a, b di Q passanti per P; le rette a, b riescono determinate dalle loro rispettive immagini a', b' e dalle loro tracce T_a, T_b punti di contatto di esse con τ; i loro punti di fuga possono subito costruirsi perchè esse concorrono in P colla retta (T_1Q_1).

Sia dato un qualunque punto H' esterno a τ; esso è l'immagine di due punti H_1, H_2 su Q; conduciamo per esso le due tangenti c', d' alla τ; ciascuna di esse, p. e. la c' è l'immagine di due generatrici (c_1, c_2) su Q, risp. passanti per H_1, H_2; queste generatrici hanno come tracce T'_c, T_d i punti di contatto risp. di c', d' con τ. Le due generatrici appartengono a un diverso sistema di Q. Designando p. es., con c_1 quella che incontra la generatrice a (obiettiva di a' per P), la c_1 viene subito determinata dal fatto che se ne conosce la immagine c', la traccia T_c e che essa è incidente alla a; il suo punto di fuga Q_c riesce determinato come nella fig. 242.

Allora il punto H_1 obiettivo di H' riesce determinato mediante la retta $(T_c Q_c)$ passante per esso.

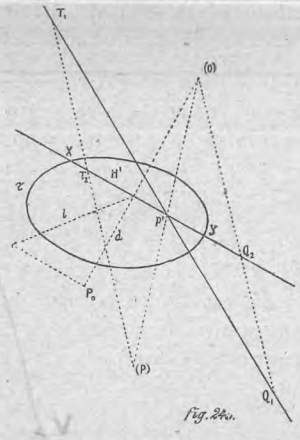


fig. 243.

Analogamente si avrà il punto H_2, mediante la rappresentazione della retta c_2, col tener conto del fatto che essa è incidente a b anzichè ad a.

2.° Caso. — La quadrica sia ellittica (fig. 243).

Sia dato un punto H' interno a τ, immagine di due punti H_1, H_2 della quadrica Q. Per determinare H_1 e H_2 occorre determinare la conica sezione del piano

$$PH_1H_2 \equiv OP'H' ,$$

la quale riesce determinata dal passare per P e dal toccare le rette OX, OY nei due punti X, Y sezioni di τ colla retta $P'H'$, quindi si dovranno costruire le intersezioni (H_1, H_2) di questa conica colla retta OH'.

Si può procedere alle costruzioni effettive indicate nel seguente modo:

Si ribalti il piano $OP'H'$ attorno a $P'H'$ determinando il ribaltamento (O) del centro di proiezione O. Si costruisca quindi il ribaltamento (P) di P. Dopo ciò si costruiscano le intersezioni della retta $(O)H'$ colla conica passante per (P) e tangente in X, Y alle rette $(O)X$, $(O)Y$; le due intersezioni (H_1), (H_2), la cui determinazione costituisce un noto problema di 2.° grado, sono i i ribaltamenti dei punti H_1, H_2 di cui H' è l'immagine; questi due punti riescono per tal modo determinati.

Osservazione. — Per eseguire il ribaltamento di P attorno a $P'H'$ conviene considerare la retta $P'H'$ stessa come l'immagine di una retta per P nel piano $OP'H'$, assumendo come traccia T_2 e come punto di fuga Q_2 di questa retta risp. le intersezioni di $P'H'$ con due rette parallele arbitrarie condotte per T_1, Q_1; in particolare come retta condotta per Q_1 può assumersi la $(O)Q_1$, allora (P) è l'intersezione di $(O)P'$ colla parallela per T_1 alla $(O)Q_1$.

Problema 2.° — *Determinare la sezione di una quadrica* Q *con un piano secante.*

1.° Caso. — La Q sia rigata (fig. 244).

Basta allora segare il piano (tq) con tutte le generatrici

di Q e basta anche considerare quelle di un sistema incidenti ad una data generatrice. Nella fig. 244 si è appunto determinato il punto X, intersezione del piano (tq) colla generatrice $(T'Q')$.

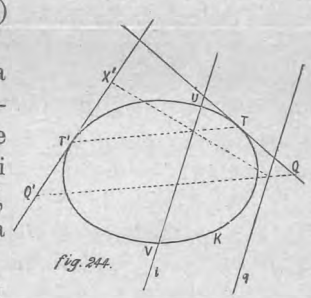


fig. 244.

La conica C', immagine della sezione di (tq) con Q resta determinata da 5 punti. Ma se t è secante di K, la C deve passare per i punti di sezione U,V ed ivi toccare la K, onde dato il solo punto X la detta conica C' resta individuata.

Lo stesso può dirsi anche se i due punti U,V sono immaginarî coniugati, considerando la involuzione dei punti coniugati rispetto a C' che viene data su t come per K, e tenuto pure conto del fatto che t ha lo stesso polo rispetto a K e C'.

Se il piano (tq) riesce tangente a Q, la C' riesce composta dalle due tangenti a K' nei punti U,V, che in questo caso sono certo reali.

Come caso particolare del problema precedente si può segare Q col piano all'infinito. L'immagine (*conica di fuga*) è il luogo dei punti di fuga delle generatrici, e nel caso dell'iperboloide, viene descritta interamente dai punti di fuga delle generatrici di un sistema.

Perchè la Q sia un paraboloide, la conica di fuga deve essere composta di due tangenti nei punti all'infinito di K, onde K deve essere un'iperbole (conforme al resultato del § 34 perchè l'ipotesi che K fosse una parabola porterebbe che il polo O del suo piano fosse all'infinito).

Di qui si deduce che *se la* K *è un'iperbole, essa è il contorno apparente di un paraboloide rigato avente come coppia di fuga la coppia degli asintoti.*

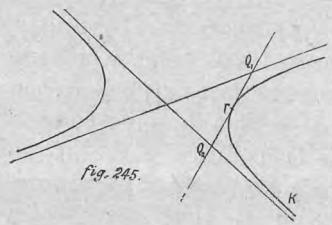


fig. 245.

Il paraboloide resta determinato fissando come punto di fuga di una generatrice, data da una tangente a K, uno dei due punti Q_1, Q_2 in cui la detta tangente incontra gli asintoti di K (fig. 245). La scelta di uno dei punti Q_1, Q_2 corrisponde alla scelta di una delle due generatrici del paraboloide aventi la stessa immagine.

2.° Caso. — La Q sia ellittica (fig. 246).

Sia dato il piano (tq) del quale si vuole determinare, se esiste, l'intersezione con Q.

Sia T' il polo di t rispetto alla traccia K di Q. Se T' è esterno a K, la t è secante e quindi il piano (tq) è certo secante rispetto a Q. In ogni caso si mandi per T' una retta s' secante rispetto a K e sia p. es., quella che passa pel punto P'. Si consideri la s' come la traccia del piano proiettante Os', il quale sega (tq) secondo la retta $s \equiv (T_1'Q_1')$. Col metodo tenuto nel problema precedente si determini la conica sezione di Os' con Q, assegnandone il ribaltamento, e si seghi questa conica con s

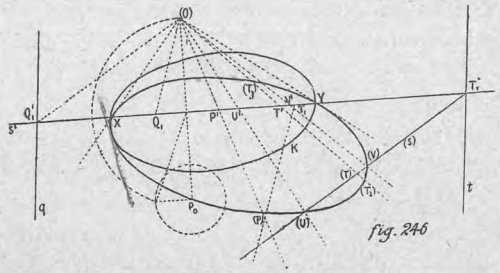


fig. 246

(supposto possibile) assegnando i punti di sezione U,V mediante i loro ribaltamenti (U), (V).

Questi sono due punti della sezione di (tq) con Q ed analogamente se ne possono determinare altri.

Ma la conica sezione che si vuol costruire sarà determinata appena ne è dato un punto ed è costruibile se questo punto, ad es. (U), è reale, poichè essa è tangente alla traccia K nei due punti (reali o no) intersezioni di essa con t.

Ora è chiaro che i punti U e V possono mancare soltanto se il piano (tq) è esterno a Q, mentre coincidono nel punto di contatto se (tq) è tangente. Infatti se (tq) è secante, il punto T (obiettivo di T') polo di t rispetto alla conica sezione, è interno ad essa se T' è interno a K, esterno se T' è esterno a K, ma in ogni caso la s riesce secante per la conica sezione, come s' per K (giacchè le tangenti per T alla conica sezione hanno come proiezioni le tangenti a K per T').

Dunque con la costruzione indicata si riesce sempre a determinare quanti punti si vogliono della conica sezione di (tq) supposta esistente.

L'immagine di questa conica tocca (eventualmente) K nei punti che essa ha in comune con t.

Osservazione 1.ª — Se t è esterna a K, unico caso in cui il piano (tq) può essere esterno a Q, il punto (T) cadrà in uno dei due segmenti determinati da (T_2), (T_3), e così T in uno dei due segmenti T_2T_3.

Il detto segmento sarà quello che non contiene (O) se (tq) è secante e viceversa. Volendo che la quadrica Q riesca tangente al piano (tq) bisogna fissare il punto P obiettivo di P' in guisa che (P) cada in una delle due intersezioni di $(O)P'$ colla conica tangente in X,Y ad OX, OY e passante per (T) (fig. 247).

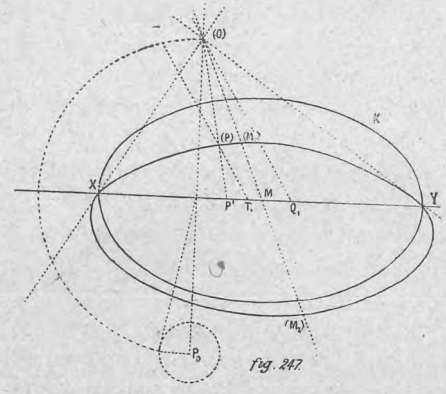


fig. 247

Osservazione 2.ª — Il piano all'infinito è certo secante e quindi Q è un iperboloide a due falde se K è un'iperbole o una parabola (giacchè il polo del quadro non è all'infinito). Se la K è un'ellisse, Q può essere un iperboloide, un paraboloide (ellittico) o un'ellissoide. Si può giudicare a quale specie di quadriche appartenga Q costruendo i due punti M_1, M_2 che hanno l'immagine nel centro M di K e guardando se il punto all'infinito di OM cade nel segmento M_1M_2 contenente O oppure no.

Costruiti i ribaltamenti (M_1), (M_2) di M_1, M_2 (attorno alla retta MP'), si avrà dunque che Q è un ellissoide se (come nella fig. 247) (O) è esterno al segmento finito $(M_1)(M_2)$.

Se O è interno al detto segmento, Q è un *iperboloide a due falde.*

Finalmente perchè Q riesca un paraboloide bisogna che il punto P obiettivo di P' sia determinato in guisa che uno dei

punti (M_1) o (M_2) (e quindi M_1 o M_2) sia all'infinito (fig. 248) e quindi la conica per (P) tangente in X, Y ad OX, OY sia una parabola il cui asse risulti parallelo ad $(O)M$.

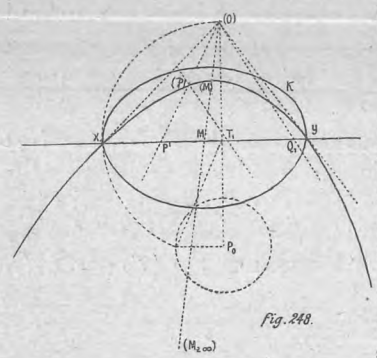


fig. 248.

§ 38. — **Rappresentazione di una quadrica nel metodo delle proiezioni ortogonali.** — La rappresentazione generale di una quadrica, per proiezione centrale da un punto esterno, conduce a varî casi particolari notevoli. Così ad es. se, nel caso degli iperboloidi, si assume come centro di proiezione il centro della quadrica, e si assume come quadro un piano qualunque che non passi pel detto centro, si ha su questo piano una rappresentazione notevole dove la considerazione della *conica di fuga*, sezione del cono asintotico, surroga quella della conica traccia a cui ci siamo riferiti nel precedente §. Tutto procede analogamente, essendo così riportata sul quadro la rappresentazione della quadrica fatta sul piano all'infinito, polare del centro.

La rappresentazione accennata serve ad es. a costruire le sezioni circolari di un iperboloide, riportandoci alla risoluzione del problema analogo pel cono asintotico (§ 13).

Come caso particolare della rappresentazione generale considerata nel prec. §, si può anche studiare la rappresentazione di una quadrica nel metodo di **Monge**.

Sceglieremo come esempî due casi: la rappresentazione di un iperboloide rigato, e quella di un ellissoide, risolvendo per quest'ultimo caso il problema di determinare le sezioni circolari della quadrica.

Cominciamo dall'iperboloide rigato.

Prendiamo come primo piano di proiezione quello dell'ellisse di gola, polare del punto all'infinito dell'asse principale (centro di proiezione). Come secondo piano un piano per uno degli assi dell'ellisse nominata, o, più generalmente, un piano parallelo al suddetto asse (fig. 249).

La traccia dell'iperboloide nel 1° piano è l'ellisse di gola χ, le cui tangenti sono le prime proiezioni delle generatrici dell'iperboloide, nel 2° piano è un'iperbole x i cui vertici A_2, B_2 posti sulla linea di terra l, sono le 2ª proiezioni dei due vertici di χ posti sull'asse di χ parallelo ad l.

Si determinano facilmente le 1ª proiezioni delle ellissi sezioni dell'iperboloide coi piani ortogonali all'asse principale.

Sono ellissi tutte concentriche a χ ed esterne ad essa, determinanti sulla retta all'infinito la medesima involuzione dei punti coniugati; i punti doppî, immaginarî coniugati di questa, sono punti di contatto per le nominate ellissi.

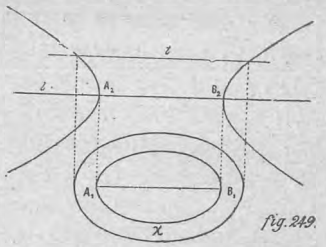


fig. 249.

La costruzione delle suddette ellissi che sono eguali alle obiettive, giova a far acquistare in modo adeguato la nozione della forma dell'iperboloide rappresentato.

Consideriamo ora un ellissoide che venga proiettato ortogonalmente sopra due (α,β) dei suoi piani diametrali principali o più generalmente su due piani α', β' paralleli ai nominati.

La sezione dell'ellissoide col piano α dà come 1ª proiezione un'ellisse χ eguale all'obiettiva, come 2ª proiezione un segmento (A_2B_2) parallelo ad un asse (A_1B_1) di χ e alla linea di terra. La sezione del piano β dà come 1ª proiezione A_1B_1 e come 2ª un'ellisse ρ di asse A_2B_2. I tre assi dell'ellissoide sono rappresentati, in vera lunghezza nella fig. 250 da A_1B_1, C_1D_1, E_2F_2. Il centro ha come 1ª proiezione il centro O_1 di χ, come 2ª il centro O_2 di ρ.

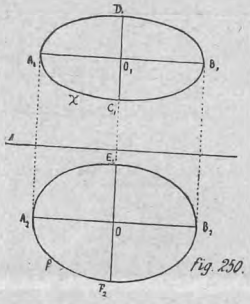


fig. 250.

Le sezioni piane dell'ellissoide per uno degli assi si determinano facilmente. Ad es. quelle segnate dai piani per l'asse la cui proiezione è A_1B_1, sono proiettate sul 1° piano in ellissi tangenti a χ in A_1,B_1, omologiche affini a χ.

Proponiamoci ora il

Problema. — *Determinare le sezioni circolari dell'ellissoide.*

E supponiamo ad es. che l'asse medio dell'ellissoide sia perpendicolare al 1° piano di proiezione, sia cioè rappresentato in 2ª proiezione da E_2F_2.

Richiamando ciò che si è detto nel § 35, cerchiamo di proiettare sul 1° piano di proiezione, dal centro O dell'ellissoide

le due polarità π ed Ω ivi considerate nel piano all'infinito, per eseguire sul quadro le costruzioni indicate.

La polarità (assoluta) Ω si trasporta nell'antipolarità (Ω') rispetto al circolo C di centro O_1, il cui raggio è la distanza di O_2 dalla linea di terra, cioè l'altezza di O sul quadro.

Per determinare la polarità π', proiezione di π, osserviamo anzitutto che in essa si ha un triangolo coniugato (comune a Ω') i cui vertici sono O_1 e i punti all'infinito degli assi A_1B_1, C_1D_1. Per determinare π' basta dunque assegnare la polare p di un punto P, che non appartenga ad un lato del predetto triangolo. Ciò si ottiene considerando le tracce di un diametro e del piano diametrale coniugato dell'ellissoide per O; e, dato il diametro OP, si può ottenere il piano diametrale coniugato, costruendo le coniche sezioni dei piani per OP e per due assi e, relativamente a queste, i due diametri coniugati ad OP, le cui tracce determinano appunto p.

Si costruisca quindi l'antipolare p' di P rispetto al cerchio C; sarà P' coniugato a P rispetto a π' e ad Ω'.

Avendo supposto che l'asse medio dell'ellissoide sia quello perpendicolare, in O_1, al 1° piano di proiezione, le 1ª tracce dei piani di sezione circolare pel centro passeranno per O_1. Queste tracce saranno i raggi doppî dell'involuzione di centro O_1 in cui si corrispondono O_1P, O_1P', e le proiezioni dei due assi, maggiore e minore dell'ellissoide; tale involuzione è iperbolica appunto perchè esistono, nelle condizioni poste, i cercati piani di sezione circolare.

Ora ottenute, mediante le loro tracce, le sezioni circolari per l'asse medio dell'ellissoide, si avranno subito tutte le sezioni circolari di esso, che sono parallele alle nominate.

Il problema proposto è dunque risoluto.

Esercizio. — Determinare la sezione di un paraboloide iperbolico con un piano verticale qualsiasi.

Si prendano come piani di proiezione i due piani diametrali principali per l'asse, assegnando quindi le due *parabole principali* della superficie.

§ 39. — **Rappresentazione dell'iperboloide passante per il centro di proiezione.** — Anzichè assumere il centro di proiezione O esterno ad una data quadrica Q che si voglia rappresentare, ove la Q non sia rigata, il detto centro può esser preso internamente ad essa. In questo caso ogni punto del quadro riesce immagine di due punti di Q.

Più notevole è il caso particolare, che può considerarsi relativamente ad ogni specie di quadriche, in cui il centro O venga preso sulla quadrica Q, giacchè allora ogni punto del quadro fuori della traccia del piano tangente in O è l'immagine di un punto di Q. Studieremo più da vicino la rappresentazione così ottenuta in due casi:

1) per le quadriche rigate,
2) per la sfera.

Cominciamo a studiare il caso delle quadriche rigate che, per brevità, denominiamo nel seguito iperboloidi, riguardando i paraboloidi come caso particolare.

Poniamo dunque il centro di proiezione O sopra un dato iperboloide e rappresentiamo l'iperboloide nel metodo della proiezione centrale sopra un piano π (non passante pel centro di proiezione).

Ogni retta per O, non giacente nel piano tangente, incontra l'iperboloide in un punto fuori di O, quindi ogni punto di π, non appartenente alla retta sezione di π col piano tangente in O, è immagine di un punto dell'iperboloide, diverso da O.

Per O passano due generatrici a, b che incontrano π risp. in due punti (*fondamentali*) A, B, ognuno dei quali è immagine dei punti di una retta; le generatrici che incontrano a (appartenenti al sistema di b) hanno per immagini sul quadro, rette per A; viceversa, una retta per A diversa dalla AB, rappresenta una generatrice dell'iperboloide incidente ad a (ulteriore sezione di un piano per a) e analogamente si dica di una retta per B.

Le immagini delle coniche, sezioni piane irriducibili dell'iperboloide per O, sono rette di π non passanti per A nè per B, ciascuna di tali coniche venendo proiettata dal suo punto O sopra la retta immagine.

Le immagini delle coniche C, sezioni piane dell'iperboloide non passanti per O, sono coniche passanti per i punti fondamentali A, B, giacchè ogni conica C incontra ciascuna delle due rette a, b in un punto fuori di O, che viene proiettato risp. in A, B.

Viceversa ogni conica del piano π passante pei punti fondamentali A, B è immagine di una conica dell'iperboloide.

Infatti sia C la curva sull'iperboloide avente per immagine una conica C' per A, B; si consideri il piano determinato da tre punti generici di C e la conica sua sezione coll'iperboloide; essa deve coincidere colla linea C perchè l'immagine di

tale conica sezione, su π, è una conica passante per A, B ed avente altri tre punti comuni con C', ossia è la C'.

Intendendo di includere tra le coniche per A, B anche quelle degeneri, si può enunciare il

TEOREMA. — *Le immagini delle sezioni piane dell'iperboloide sono le coniche del quadro passanti per i punti fondamentali; viceversa, ognuna di tali coniche è immagine di una sezione piana dell'iperboloide.*

Tra le sezioni piane dell'iperboloide due sono specialmente notevoli, cioè la *traccia* dell'iperboloide (sua sezione) sul quadro, e la conica all'infinito dell'iperboloide, la cui immagine sul quadro π costituisce la *conica di fuga*. La traccia è il luogo delle tracce delle generatrici dell'iperboloide, la conica di fuga è la sezione del quadro π col cono dei raggi paralleli per O alle generatrici dell'iperboloide, ed è non degenere se si tratta di un iperboloide propriamente detto, invece è costituita da due rette (una passante per A, l'altra per B) se si tratta di un paraboloide, cioè se il piano all'infinito è tangente alla quadrica.

Una conica del quadro pei punti fondamentali A, B è l'immagine di un'iperbole, di una parabola, o d'un'ellisse, sezione piana dell'iperboloide, secondo che incontra la conica di fuga oltre che in A, B, in due punti, in un sol punto o in nessuno. Per chiarezza si deve avvertire che, se la data conica tocca quella di fuga ad es. in A, questo punto deve allora computarsi come un'intersezione fuori di A. In base alla precedente osservazione si può esaminare la natura delle sezioni piane dell'iperboloide passante per O.

Dico che:

Una quadrica rigata passante pel centro di proiezione è perfettamente rappresentata sul quadro data la sua conica traccia τ, *i punti fondamentali* A, B *su di essa, ed un punto proprio* Q (*fuori della* AB) *della linea di fuga* χ; *viceversa tali elementi rappresentativi possono essere assunti ad arbitrio sotto le enunciate condizioni.*

Detto O il centro di proiezione, l'iperboloide che è rappresentato sul quadro mediante gli elementi fissati (se esiste) contiene come generatrici, le rette

$$a \equiv OA, \qquad b \equiv OB,$$

e contiene pure la generatrice $g \equiv (TQ)$, la cui immagine è la retta AQ e la cui traccia T è l'ulteriore intersezione di AQ colla conica τ; la g e la b sono generatrici del medesimo sistema (fig. 251).

Ora esiste ed è ben determinato un iperboloide (o paraboloide) passante per la conica τ e per le rette b, g, giacchè esso viene generato come luogo delle intersezioni dei piani omologhi dei due fasci proiettivi di assi b, g proiettanti i punti della conica τ. Si può far vedere che tale iperboloide contiene anche la retta a e quindi viene rappresentato sul quadro nel modo dato; invero nella rappresentazione di esso sul quadro, uno dei punti fondamentali è B, l'altro deve appartenere alla retta AQ (ed alla τ), e non potendo cadere in T se questo è distinto da A, deve essere il punto A.

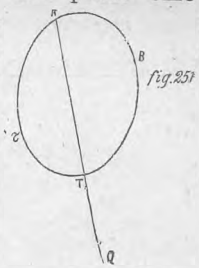


fig. 251

Si noti che se τ è un'iperbole, ed A, B, sono punti proprî, la conica di fuga χ dell'iperboloide rappresentato nel detto modo è l'iperbole (eventualmente degenere) cogli asintoti paralleli a quelli di τ, passante per A, B, Q.

Rappresentato sul quadro un iperboloide nel modo indicato, si possono facilmente determinare le generatrici dell'iperboloide passanti per un punto P di data immagine P', e così determinare anche il punto. Si voglia p. es. la generatrice per P appartenente al sistema rappresentato dal fascio A. Si determini l'ulteriore intersezione T della retta BQ colla conica τ, e così l'ulteriore intersezione T_1 della AP' con τ; la generatrice cercata ha per traccia T_1 e per punto di fuga l'intersezione Q_1 di AP' colla parallela per Q alla TT_1. Ciò permette di ottenere la rappresentazione di quante si vogliono generatrici (di un sistema o dell'altro) dell'iperboloide, e quanti si vogliono punti della conica di fuga χ, passante per i punti A, B, Q (fig. 252).

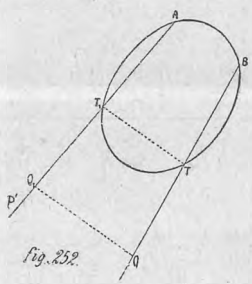


fig. 252

Ne segue la completa rappresentazione dei punti dell'iperboloide dati per l'immagine, ed anche la determinazione del piano tangente all'iperboloide in un punto (piano delle due generatrici per esso).

Dopo ciò possiamo risolvere i seguenti problemi di costruzione.

PROBLEMA 1° — *Determinare la conica intersezione dell'iperboloide con un piano (conica che è degenere se il piano è tangente).*

Si seghi il piano con tre generatrici dell'iperboloide e si determinino le immagini C', D', E' dei punti sezioni; l'immagine della intersezione del piano coll'iperboloide è la conica $(ABC'D'E')$. Nella fig. 253 sono stati determinati tre punti siffatti C', D', E', essendo (t,q) il piano segante.

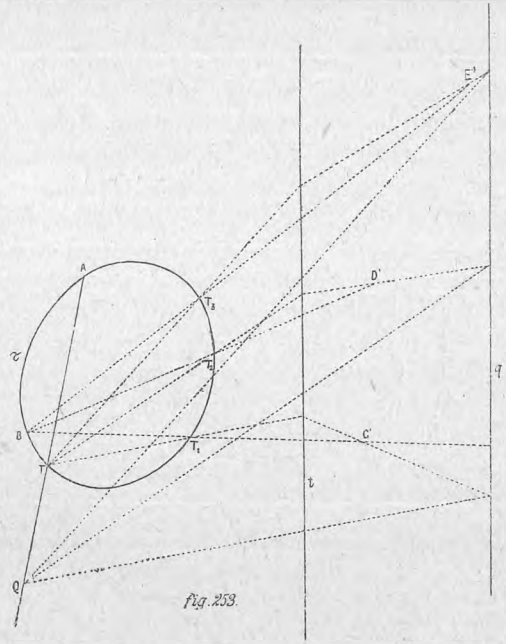


fig. 253.

Se si vuole la vera grandezza della conica in questione, basta ribaltare sul quadro il piano (tq).

Problema 2° — *Determinare (ove esistano) le intersezioni di una retta coll' iperboloide.*

Per la retta si conduca un piano e se ne determini la conica sezione, quindi si determinino i punti comuni alla retta e alla conica; questi (ove esistano) hanno per immagini le intersezioni dell'immagine della retta coll'immagine della conica.

Di qui si deduca come esercizio la soluzione del problema: *Determinare (ove esistano) le rette incidenti a 4 rette date sghembe.*

Problema 3° — *Determinare il cono circoscritto da un punto* P *all' iperboloide (il quale cono degenera in due fasci se il punto è sull' iperboloide).*

Si supponga P fuori del quadro.

Il cono circoscritto dal punto P all'iperboloide è quello inviluppato dai piani proiettanti da P le generatrici dell'iperboloide.

Dunque la sua traccia (che insieme al vertice, supposto fuori del quadro, serve a definirlo) è la conica inviluppata dalle tracce di quei piani tangenti all'iperboloide che passano per il punto; si determinino dunque le tracce di cinque piani proiettanti da P cinque generatrici dell'iperboloide, e resterà definita (come inviluppo) la conica che ha queste cinque rette come tangenti, cioè la traccia del cono quadrico circoscritto da P all'iperboloide; come due di queste tangenti possono assumersi le rette proiettanti A, B dall'immagine P' di P (supposto P' distinto da A, B).

Nella fig. 254 si vedono costruite le t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 che sono le cinque tangenti che determinano la traccia del cono circo-

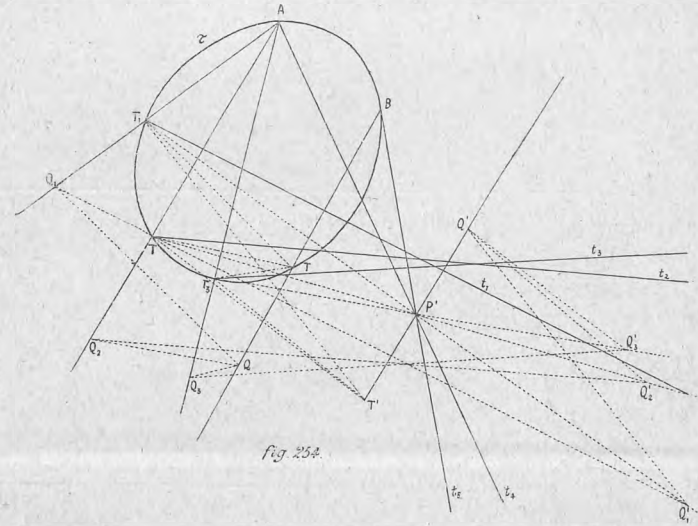


fig. 254.

scritto da P all'iperboloide. Il punto P è dato dall'immagine P' e dalla retta $(T'Q')$ che passa per esso.

Dalla precedente risoluzione si trae la costruzione dei piani tangenti per una retta (secante) all'iperboloide.

Come caso particolare notevole della rappresentazione considerata innanzi, si può studiare la *rappresentazione del paraboloide rigato nel metodo di* **Monge**, assumendo il 1° piano di proiezione normale all'asse (e ai diametri) della quadrica.

Considereremo il caso particolare notevole in cui i due *piani direttori* (paralleli alle generatrici dei due sistemi) sieno *ortogonali*.

La 1ª traccia del paraboloide sarà quindi un'iperbole equilatera.

I piani direttori saranno i piani perpendicolari al 1° piano di proiezione, le cui tracce sono gli asintoti della suddetta iperbole.

Riferendoci a questa rappresentazione risolviamo il seguente

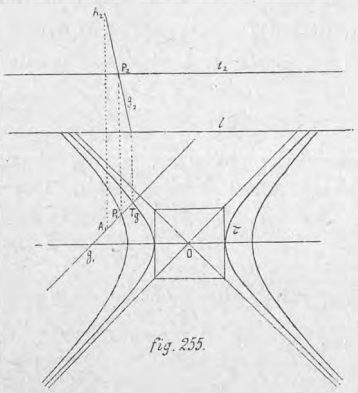


fig. 255.

PROBLEMA. — *Determinare le sezioni piane del paraboloide coi piani normali all' asse.*

La risoluzione viene rappresentata dalla fig. 255. — Le sezioni costruite sono tante iperbole equilatere coi medesimi asintoti della traccia.

§ 40. — **Proiezione stereografica delle quadriche ellittiche e in particolare della sfera.** — Ciò che è stato detto intorno alla rappresentazione piana dell' iperboloide passante per il centro di proiezione si può applicare anche al caso delle quadriche ellittiche; purchè si tenga conto che, in questo caso, i due punti fondamentali sono immaginarî coniugati, circostanza modificante le proprietà della rappresentazione sotto l' aspetto della realtà, e modificante quindi le costruzioni grafiche.

Riferiamoci al caso in cui il centro di proiezione O sia un punto circolare della quadrica, e il quadro sia parallelo al piano tangente in esso; è il caso della *proiezione stereografica*.

Allora le due generatrici (immaginarie) della quadrica per O sono le rette doppie dell' involuzione degli angoli retti, nel fascio delle tangenti, e segano il quadro nei due punti ciclici A, B. Le immagini delle sezioni piane della quadrica sono i detti punti ciclici, fondamentali per la rappresentazione, ossia:

Le immagini delle sezioni piane della quadrica sul piano iconico sono i cerchi di esso.

In ciascun punto P della quadrica vi è la involuzione delle tangenti coniugate, la quale viene proiettata sul quadro in una involuzione del fascio che ha come centro l' immagine P' di P. Le rette doppie di questa involuzione sono le immagini delle

due generatrici della quadrica per P, ossia le rette $P'A$, $P'B$ proiettanti da P' i due punti ciclici. Ciò significa che l' involuzione delle tangenti coniugate in P viene proiettata sul quadro nella involuzione degli angoli retti per P'.

Questa osservazione ci permette di trovare il centro del cerchio immagine della sezione della quadrica con un piano μ.

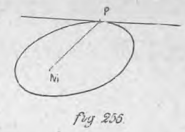


fig. 256.

Sia M il polo di μ (fig. 256).

Per un punto P qualsiasi appartenente alla conica sezione di μ, sono tangenti coniugate la tangente alla suddetta conica e la retta PM; perciò le proiezioni di queste due rette sono ortogonali.

Dunque le rette uscenti dal punto M', proiezione sul quadro di M, incontrano ortogonalmente il cerchio immagine della conica considerata, ossia:

Il cerchio immagine di una sezione piana della quadrica ha come centro l' immagine del polo del piano secante.

Come caso particolare consideriamo la *proiezione stereografica della sfera.* È la proiezione della sfera da un punto di essa sopra un piano parallelo al piano tangente nel centro di proiezione; la condizione che il suddetto centro sia un punto circolare essendo già soddisfatta per tutti i punti della sfera.

Siccome ora due tangenti coniugate alla sfera sono ortogonali, ne viene che due tangenti ortogonali per un punto sono proiettate in due rette ortogonali; per conseguenza il fascio delle tangenti in un punto e il fascio delle proiezioni sono congruenti, sicchè:

L' angolo di due tangenti o di due linee tracciate sulla sfera in un punto della sfera, è proiettato sul quadro in un angolo eguale.

Per questa proprietà la proiezione stereografica della sfera si dice *isogonale* o *conforme*; mentre essa è pur detta *omociclica* perchè ogni cerchio (sezione piana della sfera) viene proiettato in un cerchio.

Passiamo ora ad indicare la risoluzione grafica dei primi problemi che si presentano nello studio della proiezione stereografica della sfera.

Assumasi, p. es., il quadro passante pel centro della sfera in guisa che il circolo di distanza sia la *traccia* della sfera sul quadro. Fissata così la rappresentazione stereografica della sfera proponiamoci, come esempî, la risoluzione dei seguenti problemi:

Problema 1.° — *Dato un punto proprio del quadro, assegnare il punto della sfera di cui esso è l'immagine.*

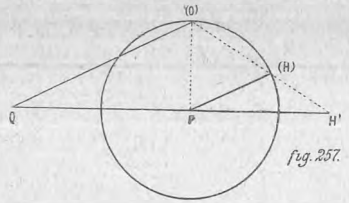


fig. 257.

Sia H' un punto proprio del quadro; esso è l'immagine di un punto H della sfera (fig. 257). Supponiamo H' diverso da P, centro della sfera, e quindi H diverso dal punto della sfera opposto al centro di proiezione. Dobbiamo assegnare per H una retta. Consideriamo PH che ha come immagine PH' e come traccia P; il suo ribaltamento attorno a PH' è la retta $P(H)$ che unisce il punto P coll'intersezione (H) di $(O)H'$ e del cerchio di distanza; quindi il punto di fuga Q è l'intersezione di PH' colla parallela per (O) alla P (H).

Problema 2.° — *Determinare il circolo del quadro immagine del circolo massimo sezione di un dato piano pel centro della sfera.*

Si fissi un qualunque piano (tq) pel centro P della sfera; si vuole determinare l'intersezione K colla sfera (fig. 258).

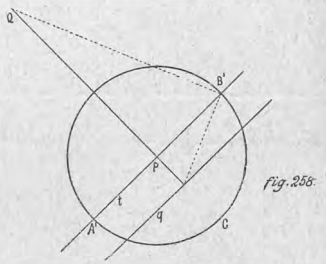


fig. 258.

Anzitutto la retta t è un diametro del circolo di distanza C; il circolo K' immagine di K passa pei due estremi del detto diametro (sezioni di t con C); inoltre esso ha per centro l'antipolo Q di q rispetto a C che è la proiezione del vertice (improprio) del cilindro circoscritto alla sfera, secondo il circolo massimo K. Se il piano (tq) passa per il centro di proiezione O, q coincide con t e Q va all'infinito; K' diventa la retta t.

La proprietà caratteristica dei circoli immagini dei circoli massimi della sfera, è evidentemente quella d'incontrare C nei punti estremi di un diametro.

Problema 3.° — *Determinare la sezione della sfera con un piano non passante per il centro di essa.*

Se il piano dato (tq) passa per O, l'immagine della sezione K di esso colla sfera è la t; escludiamo questo caso.

Per il punto principale P si conduca un qualunque piano $(t'q')$ perpendicolare al dato (tq) (non passante per O) e di questo si determini l'intersezione θ colla sfera (Probl. 1.°) assegnando il

circolo immagine θ' (fig. 259). I due punti in cui θ' incontra l'immagine s' della retta s sezione di (tq) col piano perpendicolare condotto ad s per P, sono le immagini di due punti del circolo K sezione di (tq), ossia appartengono al circolo K' immagine di K, supposto che il piano (tq) seghi la sfera; se in questi due punti si conducono le tangenti a θ', esse s'incontrano nel centro del circolo K' (immagine del vertice del cono circoscritto alla sfera secondo K); il circolo K' resta così determinato.

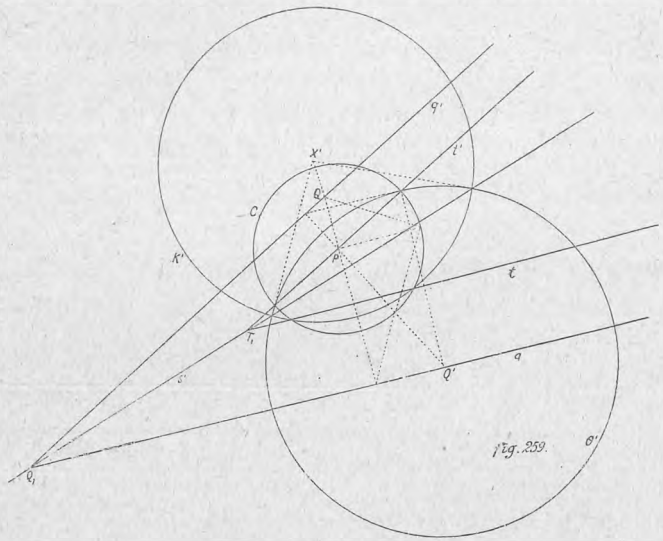


fig. 259.

Problema 4.° — *Determinare il cono circoscritto alla sfera che ha il vertice in un dato punto esterno ad essa.*

Basta determinare il cerchio di contatto di un tale cono (contorno apparente della sfera vista dal punto).

Perciò si conduca un piano passante pel dato punto A e pel centro P della sfera (ma non per O) e si determini il circolo massimo, sezione di esso colla sfera; quindi si conducano le tangenti per A a tal circolo. Il circolo immagine del contorno apparente della sfera vista da A, è quello che passa per le immagini dei due punti di contatto delle nominate tangenti ed ha per centro l'immagine A' di A.

Esercizî:

1) Dato un circolo del quadro, determinare il piano la cui sezione colla sfera ha come immagine il detto circolo

2) Determinare l'asse radicale di due circoli e il punto di egual potenza rispetto a tre circoli del quadro, in base alla risoluzione del precedente problema.

3) Costruire i circoli del quadro che tagliano ortogonalmente i circoli d'un fascio.

(Sulla sfera i circoli ortogonali ai circoli d'un fascio compongono un secondo fascio il cui asse è polare dell'asse del primo).

4) Costruire la corrispondenza subordinata sopra la sfera da un'omologia armonica trasformante la sfera in sè stessa, cioè avente come centro e piano un punto ed un piano polari rispetto alla sfera.

(Tale corrispondenza è rappresentata sul quadro dall'*inversione rispetto al cerchio*, immagine della sezione del piano di omologia).

§ 41. — **La lossodromica sferica.** — Si assumano sopra una sfera due punti opposti (*poli*) e si considerino i circoli (*meridiani*) sezioni dei piani per essi.

Le curve che tagliano i meridiani sotto un angolo costante (compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$) si dicono *lossodromiche.*

La lossodromica (immaginata da **Nonio** nel 1492) è una curva importante nella navigazione perchè, riguardando la terra come sferica, si può dire che un bastimento, il quale si muova in modo che la bussola non cambi direzione, descrive una lossodromica.

La proiezione stereografica di una lossodromica fatta da uno dei poli è una spirale logaritmica.

Infatti in tale rappresentazione i meridiani hanno come immagini i raggi d'un fascio, e la proiezione della lossodromica è una curva secante i nominati raggi sotto angolo costante (Cfr. § 8).

Riferendoci alla rappresentazione stereografica del § prec. (ove il quadro è il piano dell'*equatore*) si può risolvere il

Problema — *Costruire la lossodromica della sfera che passa per un punto ed ha ivi una data tangente.*

Immaginiamo per semplicità che il punto dato A appartenga al circolo di distanza C (equatore) e limitiamoci a costruire una porzione della lossodromica inferiore al quadro (fig. 260).

Consideriamo una serie di circoli concentrici interni a C, i cui raggi decrescono in progressione geometrica, e seghiamoli risp. coi raggi uscenti dal centro P e facenti con PA degli angoli procedenti in progressione aritmetica.

I punti d'intersezione si trovano sopra una spirale logaritmica, immagine di una lossodromica passante per A.

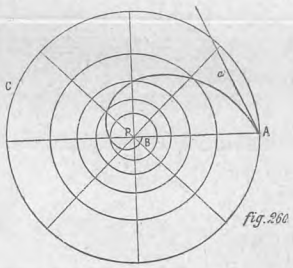


fig. 260

Ora il rapporto fra le ragioni delle due nominate progressioni deve essere determinato in guisa che la tangente in A alla lossodromica sia la retta a, di cui è assegnata la proiezione a'.

A tal fine si consideri il primo punto (B) della spirale (dopo A) in cui la curva (fatto un giro) torna ad incontrare il raggio PA.

Il rapporto $\frac{PB}{PA}$ si calcola dato l'angolo di PA colla tangente a' della spirale, come si è visto nel § 8. Di qui si ricava la determinazione proposta.

Esercizi:

1) Costruire la lossodromica che congiunge due punti assegnati della sfera.

2) Costruire la proiezione ortogonale sul quadro di una lossodromica.

§ 42. — **Curve algebriche appartenenti ad una quadrica.** — Abbiamo studiato la rappresentazione delle quadriche colla proiezione centrale in ordine alla risoluzione dei più notevoli problemi di costruzione a cui esse dànno luogo.

Dall'anzidetta rappresentazione delle quadriche si può anche desumere lo studio teorico delle curve tracciate sopra una quadrica.

Diamone un cenno. E prescindiamo dapprima da ogni questione di realità, trattando quindi simultaneamente le varie specie di quadriche. Consideriamo dunque la quadrica come rigata, prendendo in considerazione le sue generatrici immaginarie se essa è ellittica.

Sia Q una quadrica non specializzata ed O il centro di proiezione sopra di essa. Ogni punto del quadro è immagine di un punto della quadrica e viceversa; fanno eccezione solo:

a) sul quadro: i due punti fondamentali A, B (reali e

distinti o immaginarî coniugati) ciascuno dei quali è immagine di tutti i punti di una generatrice per O;

b) sulla quadrica: il centro di proiezione O a cui corrispondono sul quadro tutti i punti della retta AB.

Vogliamo ora determinare tutte le curve algebriche di ordine n appartenenti alla quadrica Q.

Sia C_n una tal curva. Possiamo escludere che C_n passi pel centro di proiezione O.

La proiezione di C_n sul quadro è una curva algebrica di ordine n, C_n'.

La C_n incontra il piano tangente in O in n punti; di questi n punti un certo numero p si troverà sopra una generatrice a di Q per O ed altri $n - p = q$ si troveranno sull'altra generatrice b. La C_n' avrà in conseguenza un punto p-plo nel punto fondamentale A sezione di a e un punto q-plo in B.

Dunque:

Le immagini (sul quadro) delle curve d'ordine n *appartenenti alla quadrica e non passanti pel centro di proiezione sono curve di ordine* n *aventi un punto* p-*plo e un punto* q-*plo risp. nei due punti fondamentali* (n = p + q).

Viceversa:

Una curva d'ordine n *del quadro avente come* p-*plo e* q-*plo risp. i due punti fondamentali* (n = p + q) *è immagine d'una curva d'ordine* n *della quadrica non passante pel centro di proiezione, la quale sega le generatrici dell'un sistema in* p *punti e quelle dell'altro in* q *punti.*

Sia C_n' una tal curva sul quadro; il cono d'ordine n che la proietta da O sega Q secondo una curva d'ordine $2n$; ma è facile vedere che da questa si stacca la curva d'ordine $n = p + q$ composta della retta a (proiettante il punto p-plo) contata p volte e della b contata q volte, onde la residua intersezione del cono con Q è una curva C_n d'ordine n non passante per O che ha C_n' come immagine.

Che sia n l'ordine di questa curva C avente per immagine C_n' può anche dedursi dalla considerazione che C_n' incontra le coniche per A, B in $2n - (p + q) = n$ punti (variabili) fuori di A, B e quindi la curva C ha n punti comuni con una sezione piana di Q, ossia ha n punti comuni con un piano.

L'esistenza di curve piane d'ordine n aventi due dati punti come multipli risp. secondo p, q ($n = p + q$) può essere provata scrivendone l'effettiva equazione; esclusi (per $n > 1$) i valori

$p = o, p = n$, le curve siffatte sono generalmente irriducibili. Resta dunque dimostrata l'esistenza di $n - 1$ *famiglie* o *sistemi di curve irriducibili d'ordine* $n > 1$ sulla quadrica, corrispondenti ai valori $p = 1, 2, 3 \ldots n - 1$; mentre ai valori $p = o, p = n$ corrispondono gruppi di n generatrici di un sistema (C_n' essendo in tal caso composta di n rette per un punto fondamentale).

Sotto l'aspetto della realità bisogna distinguere i due casi delle quadriche iperboliche ed ellittiche.

Nel primo caso le $n - 1$ famiglie di curve irriducibili di ordine n (> 1) e le due famiglie (cioè i due sistemi) di rette (n = 1) hanno una esistenza reale. Nel 2.° caso non si hanno curve reali che per n pari, e queste formano una sola famiglia ($p = \frac{n}{2}$, $q = \frac{n}{2}$) perchè le loro immagini debbono avere le stesse molteplicità nei due punti fondamentali che sono immaginarî coniugati.

Osservazione 1.ª — Lasciando da parte la questione di realità (o limitandosi al caso degl'iperboloidi se si vuole riferirsi ad enti reali) notiamo che le curve C_n di una famiglia, che possiamo indicare con $[p, q]$ ($n = p + q$), sono caratterizzate dal fatto d'incontrare in p punti le generatrici di un sistema, in q quelle dell'altro.

Osservazione 2.ª — Le curve dell'ordine n del quadro che hanno nei punti fondamentali molteplicità r, s, dove $r + s < n$, sono le immagini di curve della quadrica d'ordine $2n - (r + s)$ aventi in O una molteplicità $n - (r + s)$.

Osservazione 3.ª — Le curve d'ordine $2n$ che sono intersezioni complete della quadrica con una superficie d'ordine n incontrano le generatrici dei due sistemi in n punti e perciò hanno come immagini sul quadro curve d'ordine $2n$ aventi in A ed in B due punti n-pli.

Viceversa si può verificare che ogni curva d'ordine $2n$ del quadro, avente in A ed in B due punti n-pli, è l'immagine di una curva intersezione completa di Q con una superficie di ordine n.

Esempî. — Troviamo sulla quadrica Q le curve irriducibili C_n dei primi ordini:

$n = 1$; si hanno su Q due sistemi di rette date sul quadro dai due fasci A, B;

$n = 2$; vi è su Q un sistema di coniche rappresentato dalle coniche per A e per B;

$n = 3$; si hanno su Q due sistemi di cubiche gobbe C_3 rappresentati da cubiche piane (C_3'), aventi come doppio uno dei punti A, B e passanti semplicemente per l'altro;

$n = 4$; si hanno tre sistemi di curve (gobbe) irriducibili del 4.° ordine, C_4 (quartiche), rappresentate da quartiche piane (C_4'), aventi in A e B due punti doppî, o da quartiche piane aventi un punto triplo in uno dei punti A e B e passanti semplicemente per l'altro. Una quartica piana C_4' avente in A, B due punti doppî (imponenti ciascuno tre condizioni) è determinata dalla condizione di passare per altri otto punti generici A_1', A_2',... A_8' del piano (§ 6); essa è l'immagine della quartica C_4 intersezione completa di Q con un'altra quadrica passante pei punti obiettivi A_1, A_2,.... A_8. Si osservino per esercizio le degenerazioni delle C_4' allorchè le C_4 passano pel centro di proiezione.

§ 43. — **La quartica di prima specie come intersezione di due quadriche.** — L'intersezione di due quadriche

$$f_1(xyz) = o, \qquad f_2(xyz) = o,$$

è una quartica C_4, in generale irriducibile, per cui passano le infinite quadriche

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 = o$$

(Cfr. § 36).

Annullando il discriminante di f si ottiene un'equazione del 4.° grado, omogenea in λ, μ, la quale permette di determinare in 4 modi il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, in guisa che la quadrica $f = o$ risulti un cono (Cfr. § 31).

Dunque:

La quartica intersezione di due quadriche appartiene in generale a 4 coni quadrici: essa può dunque riguardarsi come intersezione di due coni quadrici, ossia è una quartica di prima specie (§ 26).

Tuttavia i coni passanti per C_4 possono essere tutti immaginarî; non però due di essi possono coincidere se non vi è contatto fra le due quadriche.

Nel caso accennato non sono più applicabili le considerazioni sulla forma di C_4 stabilite nei §§ 26 e 27. Occorre perciò studiare brevemente quale sia la *forma di una quartica di prima specie* C_4, *quando per essa non passano coni reali.*

I 4 coni immaginarî che passano per C_4 sono, a coppie,

immaginarî coniugati; congiungendo i vertici A, A_1 e A', A_1', immaginarî coniugati, appartenenti ai coni di ciascuna coppia, si hanno due rette reali p, p', polari l'una dell'altra rispetto alle quadriche contenenti C_4.

Ora due quadriche Q, Q' per C_4 vengono segate, ad es. da p, secondo due coppie di punti reali P, P_1 e P', P_1', che si separano, giacchè la coppia dei punti A, A coniugati rispetto ad ambedue le quadriche è costituita da punti immaginarî.

Similmente p' è secante rispetto alle due quadriche.

Si conclude intanto che le quadriche per C_4, rispetto a cui esistono due rette polari ambedue secanti, sono rigate.

Ora un piano per p sega Q e Q', secondo due coniche K e K' rispetto alle quali p ha il medesimo polo. Siccome p sega le K e K' rispettivamente secondo le coppie $P\ P_1$ e $P'\ P_1'$ che si separano, si deduce che le nominate coniche hanno comuni *due* punti reali, X e Y, allineati col polo di p, intersezione di p', e separati armonicamente da esso e dalla p. Infatti le due coniche, avendo ciascuna un punto interno e un punto esterno all'altra si segano almeno in due punti, e non possono avere quattro intersezioni senza che si trovi un triangolo coniugato comune di cui due vertici (reali) appartenenti a p, darebbero A e A_1.

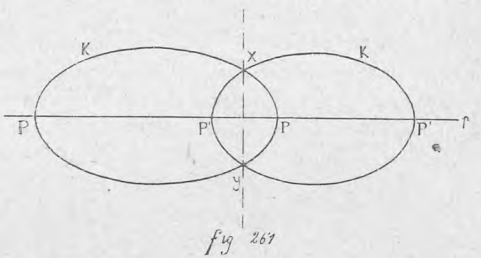


fig 261

Ora ciò che si è detto dei piani contenenti p vale altresì per i piani contenenti p', e d'altronde le osservazioni fatte portano che la coppia di punti segata su C_4 da un piano per p, si trovi anche in un piano per p', e reciprocamente.

Ciò posto si faccia – occorrendo - una trasformazione omografica dello spazio, di guisa che la retta p' vada all'infinito, p. es. secondo la giacitura ortogonale a p. La fig. 261 rappresenta appunto, in questa ipotesi, la sezione di Q e Q' con un piano per p. Quando questo piano, ruotando intorno all'asse p, compie un semigiro (di due angoli retti) i due semipiani opposti rispetto a p si scambiano fra loro. Quindi si è tratti a prima vista, a dire che anche i punti X e Y, simmetrici rispetto a p, vengono per tale rotazione scambiati fra loro. Ma non è così; e un esame approfondito mostra invece che ciascuno dei due

punti X e Y ritorna in se stesso. A questa conclusione si arriva osservando che vi è *una* posizione del piano per p, in corrispondenza alla quale i due punti X e Y vanno nel piano all'infinito (contenente p'), secondo due direzioni simmetriche rispetto a p. Ora quando il piano per p traversa questa posizione, i punti X e Y non continuano a muoversi nel proprio semipiano, bensì passano nell'opposto.

Bisogna dunque che, quando il piano per p è ritornato - dopo un semigiro - in se stesso, i detti punti X e Y non vengano scambiati, ma ritornino ciascuno parimente in se stesso. Ciò significa che *la quartica C_4 si compone di due rami distinti*, descritti separatamente da X e Y.

Osservazione. — Si può vedere che questa quartica C_4, composta di due rami, differisce da quella analoga ottenuta come intersezione di due coni (§ 26), per la circostanza che i suoi rami sono *linee impari* (incontrate da ogni piano in un punto o in un numero dispari di punti), laddove quella si compone di due *linee pari* (incontrate da ogni piano in un numero pari o in zero punti).

Riferiamoci ora ad un sistema di proiezioni centrali e consideriamo la rappresentazione di una C_4 di prima specie, allorchè essa è data come intersezione di due quadriche non specializzate, limitandoci a trattare brevemente un caso particolare.

Si abbiano due quadriche rigate S, S' che non contengono il centro di proiezione O, il quale è dunque esterno ad esse.

Per rappresentare le due quadriche assumeremo come date le coniche K, K', contorni apparenti di S, S' (rispetto ad O) e i piani di esse (tq) e $(t'q')$. Supponiamo inoltre dati i punti di fuga Q, Q' di due generatrici risp. di S, S' (fig. 262).

Con ciò le quadriche S, S' sono ben determinate secondo il § 37. Potremo subito determinare le tracce T, T' delle generatrici fissate di S, S' le cui immagini toccano risp. K, K' tenendo conto del punto che esse hanno comune risp. col piano (tq) o con $(t'q')$.

La costruzione per punti dell'immagine della quartica C_4 intersezione di S, S' si può ottenere ricorrendo al metodo dei piani secanti ausiliari. Possiamo scegliere come tali i piani che passano per la generatrice $g_1 \equiv (TQ)$ di S. Allora procederemo nel modo seguente:

Mandiamo per g_1 un piano qualsiasi $(t_1 q_1)$, determiniamo l'ulteriore generatrice in cui esso sega la quadrica S e consideriamo la conica, sua intersezione colla quadrica S', quindi cerchiamo i punti comuni alla retta e alla conica nominata. L'ulteriore generatrice g_2 sezione di $(t_1 q_1)$ con S, si ottiene facilmente osservando che la retta comune a (tq) e $(t_1 q_1)$ sega K in due punti, uno dei quali è il punto di contatto M' della TQ immagine di g_1 e l'altro è il punto di contatto N' dell'immagine g_2' di g_2.

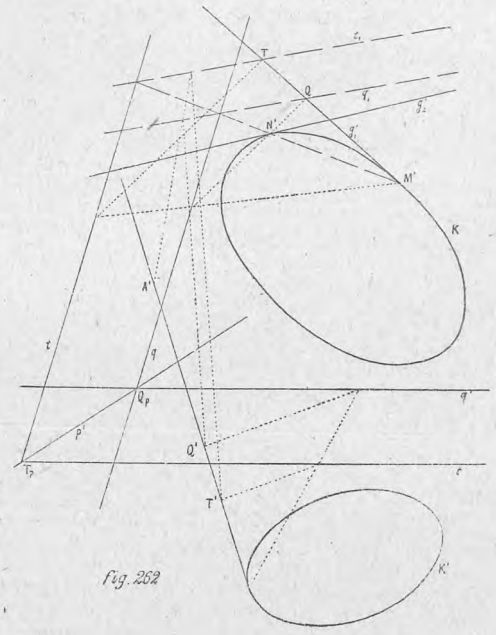


fig. 262

La conica intersezione di $(t_1 q_1)$ con S_1 si determina segando cinque generatrici di K' e costruendo, col noto procedimento che si dà in Geometria proiettiva, la conica passante pei cinque punti d'intersezione. Nella figura 262 è costruita l'intersezione $A \equiv (A' - T'Q')$ di una generatrice $(T'Q')$ di S' col piano $(t_1 q_1)$.

Dovendosi ripetere la costruzione per altri piani condotti per (TQ) giova determinare le intersezioni (supposte reali) della (TQ) con S', le quali possono sostituire due dei cinque punti nominati.

Collo stesso ragionamento del § 27 si trova che le due corde di C_4 passanti pel centro di proiezione O (che supponiamo in posizione generica rispetto a C_4) giacciono nel piano che proietta da O l'intersezione p dei piani polari di O rispetto ad S, S'.

L'immagine p' di p, sulla quale si trovano i due punti doppi (reali o no) della proiezione C_4' di C_4, è dunque la retta $T_p Q_p$ dove $T_p \equiv tt'$ e $Q_p \equiv qq'$. La determinazione effettiva di questi punti doppî si ottiene assegnando su p' un'involuzione in modo del tutto analogo a quello tenuto nel citato § 27.

Casi particolari. — L'intersezione C_4 di due quadriche ha un punto doppio se le due quadriche si toccano.

L'intersezione di due quadriche bitangenti ha due punti doppi e perciò si spezza (§ 28) in due coniche o in una retta ed una cubica la quale a sua volta degenera se vi sono ulteriori contatti delle due quadriche.

Se due quadriche hanno comune una conica e si toccano in tre punti di questa, esse hanno il medesimo cono circoscritto lungo la conica che costituisce allora (contata due volte) tutta l'intersezione delle due superfici; si dice, in tal caso, che le quadriche si *raccordano* lungo la conica.

Esercizi. — Riferendosi al metodo di **Monge,** determinare:

1) L'intersezione di una sfera con un cilindro parabolico orizzontale tangente ad essa, nell'ipotesi che il piano principale (perpendicolare alla linea di terra) del cilindro passi per il centro della sfera e contenga il punto di contatto (punto più alto della sfera).

Si supponga che vi sia mutua penetrazione delle due superficie nel punto di contatto di guisa che esso risulti un nodo per la quartica intersezione. La proiezione orizzontale della *quartica* è una *lemniscata* (visibile interamente o in parte secondo che la quartica è tutta contenuta nell'emisfero superiore o si estende anche all'emisfero inferiore).

2) L'intersezione di una sfera e di un cono retto di rotazione di cui l'asse è verticale; si supponga una delle generatrici del cono tangente alla sfera ed il vertice del cono sia nel punto di contatto.

La proiezione orizzontale della curva à una *cardioide.*

§ 44. — **Quartiche di seconda specie.** — Possiamo ora classificare in modo completo le quartiche gobbe partendo dall'osservazione che:

Ogni quartica irriducibile appartiene ad una quadrica almeno.

Questa osservazione si dimostra nel seguente modo:

Una quadrica Q che passi per 9 punti d'una quartica C_4 contiene interamente C_4, e perciò C_4 sta sopra una quadrica almeno.

D'altra parte sappiamo che sopra una quadrica Q vi sono due specie di quartiche C_4 (§ 42):

1) Quartiche che segano in due punti le generatrici (reali o no) di Q, le quali si ottengono come intersezioni complete di Q con un'altra quadrica e sono comuni per conseguenza ad infinite quadriche; queste sono le quartiche di prima specie;

2) Quartiche (distribuite in due sistemi) che segano le generatrici di un sistema in tre punti e quelle dell'altro in un punto; queste quartiche, reali soltanto sopra una quadrica rigata, non appartengono ad altre quadriche; esse diconsi *quartiche di seconda specie.*

Mentre le C_4 di prima specie hanno due punti doppi apparenti e sono di rango 8, le C_4 di seconda specie hanno tre punti doppi apparenti e sono quindi di rango 6.

Il genere vale $p = 1$ per le prime quartiche (senza punti doppi) e $p = o$ per le seconde. Tutto ciò può desumersi dalla circostanza che la proiezione della C_4 di seconda specie fatta da un punto di Q ha un punto 3-plo, equivalente a tre punti doppi.

Volendo acquistare un'idea della forma delle quartiche di prima e di seconda specie e delle differenze fra di esse, giova considerare e paragonare le loro *proiezioni fatte da un punto della curva.*

Per la C_4 di prima specie la proiezione (§ 22) è una *cubica senza punti doppi*, mentre per la C_4 di seconda specie la suddetta proiezione è una *cubica con un punto doppio.*

Ciò si riconosce considerando la (o una) quadrica contenente C_4 e guardando alla rappresentazione di essa ottenuta per proiezione dal dato centro.

Segue di qui in particolare che la *quartica di seconda specie* è sempre costituita, graficamente parlando, di *un solo ramo.*

La quartica di seconda specie non essendo, come abbiam detto, intersezione di due quadriche, non può neppure ottenersi come intersezione completa di due superficie algebriche. Più tardi impareremo a determinarla e a rappresentarla come intersezione parziale di una quadrica e di una rigata cubica.

CAPITOLO V.

Proprietà generali delle superficie.

§ 45. — **Rappresentazione analitica delle superficie.** — Nel § 29 abbiamo ragionato sopra le superficie desumendo alcune loro proprietà dall'intuizione; queste proprietà non sono le sole che l'intuizione attribuisce alle superficie, ma se si suppone che le linee sezioni piane di una superficie sieno rappresentabili analiticamente, come è detto nel § 3, si è condotti ad una definizione matematica delle superficie mediante la rappresentazione analitica di una regione di esse in un intorno, convenientemente limitato, di ciascun punto generico.

Suppongasi anzitutto di assumere una terna di assi cartesiani ortogonali di riferimento, ponendo l'origine delle coordinate in un punto generico O della data superficie F, in modo che l'asse z non sia tangente ad F, e suppongasi ancora che la F sia limitata in modo che le perpendicolari al piano $z = o$, i cui piedi cadono entro una certa area A, la incontrino in un sol punto; la F sarà rappresentata da un'equazione $z = z(xy)$ ove $z(xy)$ è una funzione di x, y in A.

Poichè abbiamo escluso che l'asse z sia tangente alla F, un qualsiasi piano $ax = by$ per l'asse z sega la F secondo una linea avente sempre in O un punto semplice, linea che al variare del piano genera la superficie F.

La nominata linea sezione di F col piano $ax = by$ viene rappresentata dall'equazione $z = z(xy)$ ove $x = bt$, $y = at$.

Dato un piano per l'asse z, i coefficienti a, b vengono dati a meno di un fattore; si può disporre di questo in modo che a, b sieno i coseni degli angoli che il detto piano fa risp. cogli assi x, y; allora z, t rappresentano coordinate cartesiane orto-

gonali in quel piano, e per ciò che si è ammesso intorno alla rappresentazione analitica delle linee, la funzione $z = z(t)$, composta mediante x, y, è sviluppabile in una serie di **Maclaurin** convergente in un certo intervallo.

Ciò vale dunque anche se a, b vengono moltiplicati per un fattore costante.

Ciò vale pure comunque muti il rapporto $\frac{b}{a}$. Ora *ammettiamo* che le differenti serie $z(t)$, ottenute facendo variare $\frac{b}{a}$, abbiano un *intervallo di convergenza comune*; ne deduciamo che la funzione $z = z(xy)$ è sviluppabile in serie di **Maclaurin** procedente per le potenze di x, y, ossia otteniamo come equazione della superficie F, in un conveniente intorno dell'origine, una equazione della forma:

$$z = a_1 x + a_2 y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots.$$

dove la serie del 2° membro converge in un certo campo (xy).

Possiamo assumere una siffatta rappresentazione analitica come definizione delle superficie convenientemente limitate nell'intorno d'un punto generico; è poi facile dimostrare che data una tale rappresentazione analitica per l'intorno di un certo punto, si ottiene una analoga rappresentazione per l'intorno di un altro punto generico della superficie.

Osservazione. — La anzidetta definizione analitica d'una superficie permette di considerare (ove occorra) anche punti immaginarî, come già abbiamo fatto nel caso particolare delle superficie algebriche e in particolare delle quadriche.

Quando si ponga a fondamento la precedente definizione analitica delle superficie, si possono dedurre come teoremi tutte le proprietà intuitive che comunemente vengono ad esse attribuite.

Anzitutto si ritrova che tutte le tangenti ad F nel punto (origine) O stanno in un piano che è:

$$z = a_1 x + a_2 y.$$

Questo piano (che è il piano tangente ad F in O) sega F secondo una linea C la cui proiezione ortogonale C', sul piano $z = o$, ha per equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots = o,$$

dunque secondo una linea che ha come doppio il punto $O \equiv (oo)$; per conseguenza anche la C ha in O un punto doppio.

Le rette osculatrici alla C in O hanno come proiezioni ortogonali sul piano $z = o$ le rette osculatrici alla linea C'; l'equazione complessiva di queste rette è dunque

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = o.$$

Infatti indicata con μ una radice di questa equazione in $\frac{y}{x}$, e posto $y = \mu x$ nell'equazione di C', si ha una equazione che ammette $z = o$ come radice tripla. Di qui segue che il punto C doppio per C' e per C,

1) è un nodo se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > o$,
2) è una cuspide se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = o$,
3) è un punto isolato se $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < o$,

e corrispondentemente deve dirsi un punto *iperbolico*, o *parabolico*, o *ellittico* per la superficie F (§ 29).

In ciò si suppone escluso che sia

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = o,$$

nel qual caso il piano tangente in O ad F segherebbe la F secondo una linea dotata ivi di un punto triplo; abbiamo già avvertito che ciò non accade se O è un punto generico di F, ed F non comprende delle regioni piane.

§ 46. — **Paraboloidi osculatori.** — L'equazione di una superficie F nell'intorno di un punto generico O, assunto come origine delle coordinate cartesiane ortogonali (escluso che l'asse z sia tangente ad F), è stata data sotto la forma

$$z = a_1 x + a_2 y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots.$$

Se s'indica con $\varphi_n(xy)$ il polinomio omogeneo di grado n costituito dai termini di grado n della serie del 2° membro, la detta equazione si scrive

$$z = \varphi_1(xy) + \varphi_2(xy) + \ldots + \varphi_n(xy) + \ldots.$$

Supponiamo eseguita una rotazione degli assi coordinati attorno all'origine O in guisa che il piano $z = o$ sia divenuto il piano tangente in O e quindi l'asse z sia la *normale* ad F nel punto stesso; allora poichè l'equazione del piano tangente

è $\varphi_1(xy) = o$, dovrà aversi identicamente $\varphi_1(xy) = o$, e l'equazione di F sarà:

$$(1) \qquad z = \varphi_2(xy) + \varphi_3(xy) + ... \varphi_n(xy) + ...$$

Seghiamo la F col piano $ax = by$, cioè con un piano (*normale*) qualsiasi passante per la normale z; la linea sezione viene rappresentata dalla stessa equazione

$$z = \varphi_2(xy) + \varphi_3(xy) + ... \varphi_n(xy) + ...$$

dove si ponga

$$x = bt, \qquad y = at.$$

L'equazione

$$z = \varphi_2(xy),$$

ove si ponga

$$x = bt, \qquad y = at,$$

rappresenta dunque la parabola di 2° ordine, col vertice in O, osculatrice alla nominata linea sezione normale di F (Cfr. § 3).

Se facciamo variare il rapporto $\frac{b}{a}$, il luogo di tutte le parabole analoghe è la superficie di 2° ordine

$$z = \varphi_2(xy) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Le sezioni di questa superficie quadrica coi piani per l'asse z sono parabole di asse z, tangenti nel punto all'infinito del detto asse, e però la quadrica stessa è tangente al piano all'infinito in quel punto, ossia è un paraboloide.

Solo è da avvertire che viene qui incluso tra i paraboloidi di 2° ordine anche il cilindro parabolico (che può considerarsi come un *paraboloide specializzato* o *degenere*) e si avrà appunto questo caso se

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22} = o,$$

come sarà indicato più avanti.

Possiamo dunque enunciare il resultato:

Data una superficie F *ed un punto generico* O, *le parabole col vertice in* O *osculatrici alle linee sezioni normali di* F, *appartengono tutte ad un paraboloide di vertice* O *che ha come asse la normale ad* F *in* O; *questo paraboloide dicesi paraboloide* (di 2.° ordine) *osculatore ad* F *in* O.

Abbiamo trovato come equazione del suddetto paraboloide P

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Il piano $z = o$, tangente (ad F e) a P, sega P secondo la coppia di rette:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = o;$$

le due rette così rappresentate sono reali e distinte se

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22} > o,$$

reali e coincidenti se

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22} = o,$$

immaginarie coniugate se

$$a^2_{12} - a_{11}a_{22} < o;$$

corrispondentemente P ha in O un punto iperbolico, parabolico o ellittico, e quindi è un paraboloide iperbolico, un cono, o un paraboloide ellittico (§§ 31, 34, 35).

Se P è un cono, dovendo esser tangente al piano all'infinito esso è un cilindro, e precisamente un cilindro parabolico. Dunque:

Il paraboloide di 2° *ordine* P *osculatore in un punto generico* O *ad una superficie è:*

1) *un paraboloide iperbolico se* O *è un punto iperbolico di* F,
2) *un cilindro parabolico se* O *è un punto parabolico di* F,
3) *un paraboloide ellittico se* O *è un punto ellittico di* F.

Le generatrici dell'iperboloide P nel 1° caso o la generatrice del cilindro P nel 2°, costituiscono le rette osculatrici in O ad F, poichè appunto sono le rette rappresentate complessivamente dall'equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y_2 = o \qquad (z = o).$$

Seghiamo il paraboloide P osculatore ad F nel punto O con un piano qualsiasi, non tangente, per O, (non è detto che si tratti di un piano passante per la normale z); sia

$$z = \alpha x + \beta y$$

l'equazione di questo piano. La sezione di P è la linea

$$\alpha x + \beta y = \varphi_2(xy).$$

La sezione del piano stesso con F è la linea

$$\alpha x + \beta y = \varphi_2(xy) + \varphi_3(xy) + ...$$

I punti comuni alle due linee hanno coordinate x, y soddisfacenti all'equazione

$$\varphi_3(xy) + ... = o,$$

e poichè questa equazione comincia coi termini di 3° grado in x, y, il punto

$$x = y = o \qquad (z = o)$$

compare tre volte come intersezione delle due linee; in altre parole:

Due qualsiansi sezioni piane *non* tangenti di F e di P per O *hanno ivi un contatto tripunto.*

Ciò si può esprimere anche nel seguente modo:

Si chiami 1 il punto O, 2 un punto infinitamente vicino al punto O su F, 3 un punto infinitamente vicino al punto 2 su F. Allora i punti 1, 2, 3 debbono riguardarsi come appartenenti anche a P.

Si deve considerare come piano tangente ad F nel punto 2 il piano che contiene tutti i punti 3 infinitamente vicini a 2 su F. Allora quanto si è detto innanzi, si può esprimere coll'enunciato:

La superficie F *e il paraboloide di* 2° *ordine* P, *osculatore ad essa nel punto* O, *hanno lo stesso piano tangente non solo nel punto* O, *ma anche in tutti i punti infinitamente vicini ad* O.

Si suole anche esprimere lo stesso fatto introducendo la locuzione di *intorno di* 2° *ordine* di O su F, a significare l'insieme di tutti i punti 2, 3 infinitamente vicini ad 1; si dice che F e P hanno in comune l'intorno di 2° ordine.

§ 47. — **Involuzione delle tangenti coniugate.** — Due *tangenti ad una superficie* F in un punto generico O si dicono *coniugate* se sono coniugate, cioè polari, rispetto al paraboloide di 2° ordine P osculatore ad F in O. Se P è un cilindro parabolico, cioè *se* O *è un punto parabolico* di F, ogni tangente in O, diversa dalla generatrice del cilindro, ha come coniugata questa generatrice, ossia le *coppie di tangenti coniugate costituiscono una involuzione degenere* (parabolica) che ha come (unica) retta doppia la generatrice tangente principale, (retta comune a tutte le coppie dell'involuzione degenere). Se P non è un cilindro, ossia O *non è un punto parabolico* di F, *le coppie di tangenti coniugate* ad F (e a P) in O, *formano una involuzione* (*involuzione delle tangenti coniugate*) di cui le *rette doppie*, se esistono, sono le generatrici di P per O cioè le *tangenti principali* della superficie nel punto (§ 29); questa *involuzione* è dunque *iperbolica* o *ellittica* secondo che il punto O di F è *iperbolico* o *ellittico.*

Una tangente ad F (e a P) in O si può considerare come una retta contenente due punti infinitamente vicini 1, 2 di F (e di P); la polare della retta 12 si può riguardare come l'intersezione dei due piani polari di 1, 2, ossia dei piani tangenti a P nei punti 1, 2; ma questi due piani sono tangenti anche ad F (§ prec.), quindi si può dire che:

Se due tangenti della superficie F *nel punto* O *sono coniugate, ciascuna si può riguardare come l'intersezione dei due piani tangenti ad* F *nel punto* O *e nel punto infinitamente vicino ad* O *che essa contiene.*

§ 48. — **Asintotiche.** — Benchè, partendo dalla rappresentazione analitica d'una superficie nell'intorno di un punto generico, si potesse procedere nel suo studio senza più far uso dell'intuizione, col calcolo differenziale e integrale, noi continueremo a valerci dell'intuizione. E faremo anzi uso frequente di considerazioni infinitesimali sintetiche che, come abbiamo più volte avvertito, sarebbero sostituibili con rigorosi procedimenti di limite.

Si dicono *asintotiche*, sopra una superficie F, le linee le cui tangenti sono tutte tangenti principali di F. Se su F ci si muove a partire da un punto iperbolico o parabolico, seguendo sempre la direzione di una tangente principale, si descrive un'asintotica. Vi sono dunque su F *due* asintotiche per ogni punto iperbolico, nessuna per un punto ellittico.

Per quanto concerne l'esistenza delle asintotiche per un punto parabolico sono da distinguere varî casi.

Se ci si muove sopra F, a partire da un punto della sua linea parabolica seguendo la direzione della tangente principale, si penetrerà generalmente nella regione iperbolica della superficie, e si avranno quindi per il punto parabolico *due asintotiche tangenti.*

Ma se avvenga che la linea parabolica sia, essa stessa, una asintotica, ogni punto della suddetta linea apparterrà ad *una sola asintotica.*

Se finalmente la superficie F è tutta costituita di punti parabolici, ogni punto appartiene ad *un' asintotica.*

Riferendoci a quest' ultimo caso, moviamoci sopra la superficie F lungo un'asintotica. Passando da un punto 1 ad un punto infinitamente vicino 2, il piano tangente nel punto 2 passa per tutti i punti infinitamente vicini ad 1 (perchè la 12 è coniugata a tutte le tangenti in 1), dunque è lo stesso piano tangente ad F in 1; in conseguenza il piano tangente ad F in un punto non muta muovendo il punto lungo un'asintotica. Si ha dunque una semplice infinità di piani tangenti ad F.

Riferendoci all'osservazione del § 29 relativamente alle superficie sviluppabili, da questo ragionamento d'indole intuitiva si trae che:

Una superficie tutta costituita di punti parabolici è una superficie sviluppabile. Viceversa una superficie sviluppabile ha tutti i punti parabolici; perchè ogni piano tangente la sega secondo una generatrice contata due volte (e una eventuale linea residua). Le asintotiche di una sviluppabile sono le generatrici di essa.

Si abbia sopra una superficie F, non sviluppabile, un fascio di linee, cioè un sistema tale che si possa delimitare una regione di F per ciascun punto della quale passi *una* linea del sistema. Preso un punto qualunque P di F (in tale regione) vi è in generale per esso *una* tangente coniugata a quella della tangente alla linea del fascio; se si costringe P a muoversi avendo come direzione del movimento in ogni punto quella coniugata alla tangente alla linea del fascio che passa per esso, si dà luogo ad una linea che dicesi *coniugata* a quelle del fascio; tutte le linee coniugate a quelle del fascio costituiscono generalmente un fascio; la relazione fra i due fasci è reciproca.

La indicata costruzione delle linee coniugate ad un fascio su F presuppone che in un punto generico di F vi sia *una* tangente coniugata a quella della linea nel punto; essa cadrebbe dunque in difetto per le superficie sviluppabili, quando le linee del fascio fossero le asintotiche (generatrici), e solo in questo caso.

Concludiamo:

Sopra una superficie F *non sviluppabile, ad ogni fascio di linee viene associato un fascio di linee coniugate* (in una regione limitata di F); *proprietà caratteristica delle due linee appartenenti risp. ai due fasci e passanti per un punto, è di avere in esso le tangenti coniugate. La relazione tra due fasci di linee coniugate è reciproca.*

Sopra una superficie sviluppabile ad ogni fascio di linee diverse dalle generatrici è associato come fascio di linee coniugate quello delle generatrici.

Conseguenza immediata della definizione di fasci di linee coniugate è la seguente:

Sopra una superficie a punti iperbolici, convenientemente limitata, le asintotiche costituiscono due fasci di linee coniugate di sè stesse.

Osservazione. — La limitazione della superficie deve esser tale che le asintotiche su di essa si possano effettivamente separare in due sistemi (fasci) tali che per ogni punto passi una linea di un sistema e una dell' altro. Considerando una regione più estesa di superficie F potrebbe mancare la possibilità di una tale separazione; cioè potrebbe accadere il seguente fatto: Sia P un punto di F e a, b le due asintotiche per P; facciamo descrivere a P su F una linea chiusa fino a tornare in P e consideriamo le successive posizioni delle asintotiche pel punto mobile P che si riattaccano per continuità alle iniziali a, b; può accadere che a movimento compiuto l' asintotica a nella posizione finale si trovi scambiata colla b. È chiaro che se ciò accade non vi è più modo di distinguere (in tutta la regione superficiale considerata) le asintotiche di un sistema da quelle dell' altro.

Tuttavia si può considerare la possibilità di limitare convenientemente una regione di superficie F (senza punti singolari) dove non accada il fatto accennato.

Insieme all'enunciato precedente sussiste anche l'inverso. Cioè:

Un fascio di linee coniugate di sè stesse è un fascio di asintotiche.

Ora sopra una superficie F si consideri un' asintotica C, e sieno 1, 2, 3, 4, 5.... punti infinitamente vicini consecutivi su di essa. La tangente 12 è coniugata di sè stessa, quindi il piano tangente ad F nel punto 2 passa per 1; ma esso contiene d' altra parte la tangente 23 alla linea C nel punto 2, quindi il piano 123 osculatore alla C è il piano tangente ad F nel punto 2; così sono tangenti ad F i piani 234, 345.... Cioè si ha:

Un' asintotica d' una superficie F *ha come piano osculatore in ogni punto il piano tangente alla* F. *Viceversa tale proprietà è caratteristica per le asintotiche*, come si ha invertendo la considerazione precedente.

§ 49. — **Linee di curvatura.** — Esistono sopra una superficie F delle linee la cui tangente sia ortogonale in ciascun punto alla tangente coniugata?

Vedremo che esistono sempre (in una regione limitata di F) due fasci (almeno) di linee siffatte; queste linee si chiameranno *linee di curvatura* della superficie.

Consideriamo l'involuzione delle tangenti in un punto generico di F; essa possiede sempre due rette coniugate ortogonalmente (anche se è degenere), e due soltanto se la detta involuzione non è quella degli angoli retti. In quest'ultimo caso il punto si dice un *punto circolare* o *ombelico* della superficie; il paraboloide osculatore è di rotazione e il punto di contatto (vertice) è pure esso un ombelico (§ 46).

Suppongasi che i punti generici della F non siano ombelichi e si sia delimitata una regione di F entro cui non ne cadono. Facciamo muovere un punto su F (in questa regione) in modo che in ciascuna posizione la direzione del moto sia ortogonale alla direzione coniugata; il punto descriverà una linea di curvatura della superficie F.

In una regione convenientemente limitata di F (non contenente ombelichi) avremo dunque due fasci di linee di curvatura; le linee di un fascio sono coniugate a quelle dell'altro e sono tagliate ortogonalmente ad esse.

Se poi la F ha tutti i suoi punti circolari, ogni linea su F è linea di curvatura. Vedremo tra poco quando ciò possa accadere.

Noteremo prima un'altra proprietà caratteristica delle linee di curvatura sopra una superficie F.

Sia C una linea di curvatura di F ed 1, 2 due punti consecutivi di C. Il piano tangente ad F nel punto 2 sega il piano tangente in 1 secondo una retta a (per 2) perpendicolare alla 12; la normale ad F nel punto 1 è la normale al piano (tangente) $1.a$, e perciò è normale alla retta (sghemba) a; la normale ad F nel punto 2 è normale alla a (tangente nel punto 2); dunque le due normali ad F nei punti 1, 2 giacciono ambedue nel piano perpendicolare ad a condotto nel punto 1. Ossia abbiamo che le normali alla F in due punti infinitamente vicini di una linea di curvatura sono incidenti. Per l'osservazione del § 17 ciò significa che la rigata delle normali ad F nei punti d'una linea di curvatura C è una rigata sviluppabile.

Invertendo il ragionamento precedente si vede che se le normali ad F in due punti infinitamente vicini 1, 2 s'incontrano, esse determinano un piano perpendicolare alla tangente coniugata della 12 e perciò questa tangente è perpendicolare alla 12; se questo avviene per due qualsiansi punti infinitamente vicini

(1, 2) d'una linea C, la C è (per definizione) una linea di curvatura.

Dunque la proprietà innanzi trovata delle linee di curvatura (cioè le normali ad F nei punti d'una tal linea formano una sviluppabile) è una proprietà caratteristica per dette linee.

Suppongasi ora che F abbia tutti i suoi punti circolari, e quindi ogni linea su F sia linea di curvatura.

Sieno P, P' due punti qualunque di F e p la normale in P ad F. Si consideri il piano pP' e la sua sezione C con F. Movendosi un punto su C da P a P', la normale in esso ad F incontra sempre la normale precedente, e poichè la p è nel piano pP' essa giace sempre in questo piano; dunque (giacciono in quel piano e però) s'incontrano le normali ad F in due punti qualunque P, P'. Ora poichè tutte le normali ad F s'incontrano a due a due e non giacciono in uno stesso piano, esse passano tutte per uno stesso punto.

D'altra parte è facile provare col calcolo e può anche considerarsi come una verità intuitiva che le superficie che tagliano ortogonalmente i raggi d'una stella (ossia la superficie di cui le normali passano per un punto) sono sferiche; invero si può notare anzitutto che la sfera gode di tale proprietà e poi che una superficie la quale tagli ortogonalmente i raggi d'una stella riesce costruibile (con approssimazione grande quanto si vuole) per piani tangenti, appena ne è dato un punto, donde segue che essa è una sfera o una regione di sfera.

Concludiamo dunque che:

Una superficie di cui tutte le linee sono linee di curvatura (ossia avente tutti i punti circolari) *è sferica.*

E riassumendo i resultati precedenti si ha:

Sopra una superficie che non sia sferica vi sono sempre delle linee di curvatura che (in una regione limitata) costituiscono due fasci di linee coniugate ortogonali.

Le linee di curvatura d'una superficie sono caratterizzate:

1) *dal fatto di segare ortogonalmente in ciascun punto la direzione coniugata;*

2) *dal fatto che le normali alla superficie nei punti di esse costituiscono rigate sviluppabili.*

Abbiamo detto che le tangenti alle linee di curvatura in un punto non circolare d'una superficie sono le rette coniugate ortogonali nell'involuzione delle tangenti coniugate: se il punto è iperbolico (o parabolico) questa involuzione è iperbolica (o

risp. parabolica) ed ha come raggi doppî le tangenti alle asintotiche per il punto.

Ora in una involuzione iperbolica le rette coniugate ortogonali bisecano gli angoli delle rette doppie; in un'involuzione parabolica una di tali rette è la retta doppia (coniugata a tutte le altre). Dunque:

Sopra una superficie (non sferica) le linee di curvatura passanti per un punto iperbolico bisecano gli angoli delle asintotiche per esso. Quelle passanti per un punto parabolico sono l'una tangente e l'altra normale all'asintotica per il punto.

Osservazione. — In particolare si deduce:

Se sopra una superficie vi è un fascio di linee di curvatura che sono contemporaneamente asintotiche, i due fasci di asintotiche coincidono e però la superficie è sviluppabile e le dette linee sono le generatrici di essa.

§ 50. — **Curvature principali d'una superficie in un punto.** — Fra le sezioni piane normali in un punto generico non circolare d'una superficie hanno uno speciale interesse le sezioni tangenti alle linee di curvatura, dette *sezioni principali.*

Sia P un punto generico non parabolico d'una superficie F e φ il paraboloide osculatore ad F in P avente l'asse p normale ad F.

Ogni sezione piana di φ normale a p è una conica C avente il centro A su p e per esso una involuzione di diametri coniugati, sezione dell'involuzione dei piani coniugati per p; due diametri coniugati di C (per A) sono dunque proiezioni di due tangenti coniugate di φ (o di F) per P; in particolare gli assi di C sono paralleli alle tangenti delle linee di curvatura di F per P, e però i piani proiettanti da P gli assi di C dànno le sezioni principali di F.

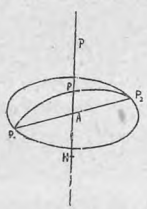


fig. 263.

Supponiamo che il piano della C sia infinitamente vicino a P e consideriamo dapprima il caso in cui C sia un'ellisse, cioè φ sia un paraboloide ellittico (P un punto ellittico di F) (fig. 263). Un piano per p sega C secondo due punti P_1, P_2 (estremi di un diametro) che appartengono alla sezione di F, per modo che il cerchio osculatore alla detta conica sezione di F è quello che passa per P, P_1, P_2. Questo cerchio ha il centro H su p sempre dalla stessa parte del piano tangente e tanto più lontano da P quanto

più grande è l'angolo P_1PP_2, ossia quanto è più lungo il diametro P_1P_2 dell'ellisse; vi sono dunque generalmente due sezioni piane di F per P in cui il raggio di curvatura PH assume risp. un valore massimo e minimo, e sono le sezioni passanti per gli assi di C, ossia le sezioni principali di F in P; soltanto se C è un cerchio, ossia se P è un ombelico, tutte le sezioni piane per P hanno la stessa curvatura.

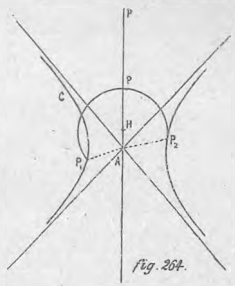


fig. 264.

Supponiamo ora che P sia un punto iperbolico e quindi C un'iperbole. Si conduca per p un piano secante C in due punti P_1, P_2 (estremi di un diametro reale) (fig. 264); la sezione piana di F ha un circolo osculatore passante per P, P_1, P_2, il cui raggio (raggio di curvatura della sezione) è minimo quando il piano per p contiene l'asse principale dell'iperbole C, e diventa infinito quando il piano per p contenga un asintoto. Seguitando la rotazione del piano intorno a p in guisa che esso venga a segare il piano di C secondo un diametro ideale dell'iperbole, il piano non incontra più C (fig. 265). Ciò dipende dal fatto che la sezione piana della F (e il suo centro di curvatura) passa dall'altra parte del piano tangente; bisogna allora considerare un piano normale a p infinitamente vicino a P dall'altra parte del piano di C; detta C' l'iperbole sezione di questo con φ (iperbole che ha gli asintoti paralleli a quelli di C, ma giace nell'altro diedro compreso dai piani per p e per le tangenti principali ad F), il piano secante incontrerà la C' in due punti P_1, P_2 estremi d'un diametro di C'; il cerchio osculatore alla sezione di F sarà tanto minore quanto minore diventa la distanza P_1P_2. Si hanno dunque in questo caso due sezioni piane per p aventi il raggio di curvatura minimo in valore assoluto; sono quelle fatte coi piani proiettanti da p gli assi delle coniche C, C', ossia le sezioni principali di F in P; i raggi di curvatura delle altre sezioni per p sono sempre compresi fra questi due. Si può attribuire un segno al raggio di curvatura di una sezione di F per p, fissando come positivo un lato della normale p; allora i due suddetti raggi di curvatura, minimi

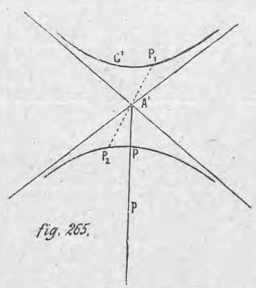


fig. 265.

in valore assoluto, hanno segno opposto; ciò sta a denotare che i centri di curvatura delle rispettive sezioni piane di F stanno da banda opposta del piano tangente in P.

Supponiamo ora che P sia un punto parabolico della superficie F; allora φ è un cilindro parabolico, ed un piano normale a p (parallelo al piano tangente in P) lo sega secondo una coppia di rette parallele (fig. 266). Suppongasi che tale piano secante sia infinitamente vicino a P, e sia a, b la coppia di generatrici (infinitamente vicine) di φ che esso contiene. Si consideri al solito un piano per p e sieno P_1, P_2 le sue intersezioni con a, b; il cerchio osculatore alla sezione di F passa per P, P_1, P_2; esso è dunque minimo se il piano per p è perpendicolare alle a, b, ed è infinito se il detto piano è parallelo ad a, b; il raggio di curvatura della sezione di F ha dunque un minimo ed un massimo dello stesso segno, ma il massimo è infinito.

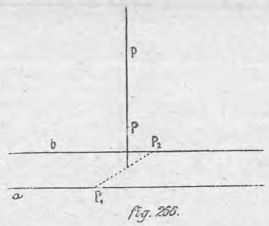


fig. 266.

Se si conviene di fissare un lato positivo per la normale ad una superficie F, in ogni punto appartenente ad una regione opportunamente limitata, e si valuta il segno del raggio di curvatura d'una sezione normale di F secondo il lato della normale cui appartiene il centro di curvatura di questa sezione, i resultati ottenuti possono riassumersi nell'enunciato:

In un punto generico, non circolare, d'una superficie le sezioni normali hanno raggi di curvatura variabili al variare del piano secante per la normale.

1) *Se il punto è iperbolico, i detti raggi di curvatura variano di segno, mentre il piano secante passa dall'uno all'altro dei diedri proiettanti le tangenti alle asintotiche dalla normale alla superficie; le sezioni principali nel punto hanno i raggi di curvatura di segno opposto, minimi in valore assoluto.*

2) *Se il punto è ellittico o parabolico, i detti raggi di curvatura hanno tutti lo stesso segno e sono compresi fra i raggi di curvatura delle sezioni principali; uno di questi è infinito se il punto è parabolico.*

I raggi di curvatura delle sezioni principali d'una superficie in un punto (o il raggio di ciascuna sezione normale se il punto è circolare) diconsi *raggi di curvatura principale della superficie nel punto*; questi sono dunque disuguali, almeno in segno, se il punto non è circolare.

Le inverse dei raggi di curvatura principale in un punto generico d'una superficie diconsi *curvature principali della superficie nel punto*; il loro prodotto dicesi curvatura o *curvatura totale*. Se il punto è un ombelico, la curvatura è l'inversa del quadrato del raggio della sfera osculatrice. Una sfera ha dunque la curvatura costante in ogni punto (uguale all'inversa del quadrato del raggio).

Per ciò che si è detto innanzi si deduce:

La curvatura d'una superficie in un punto è positiva, nulla, o negativa, secondochè il punto è ellittico, parabolico o iperbolico.

Spetta a **Gauss** di aver rilevato tutta l'importanza del considerare la curvatura d'una superficie; questa importanza è specialmente dipendente dal fatto che tale curvatura rimane inalterata in ogni flessione senza estensione della superficie, per modo che due superfici *applicabili* l'una sull'altra con una tale flessione hanno nei punti corrispondenti la stessa curvatura.

Non potendo dare qui la dimostrazione del teorema di **Gauss**, ci limiteremo ad osservare anzitutto come apparisca intuitivo che in una flessione senza estensione di una superficie le due curvature principali variano in modo opposto.

Basta invero considerare una flessione della superficie F che lasci fermo il punto P, il piano tangente in esso e i piani di sezione principale; allora possiamo guardare, insieme alla deformazione di F, anche a quella del paraboloide φ osculatore ad F in P e vediamo che mentre aumenta la curvatura di una delle parabole principali diminuisce quella dell'altra e viceversa.

Inoltre, se ci riferiamo per semplicità al caso di un punto ellittico e consideriamo l'ellisse sezione di φ con un piano α normale all'asse, vediamo che l'area di essa è proporzionale al prodotto dei due assi, e se il piano è infinitamente vicino al punto di contatto diviene proporzionale al prodotto delle due curvature; ma, d'altra parte, l'area di questa ellisse tende a divenire eguale a quella della superficie limitata su φ (o su F) dalla sezione dello stesso piano α, e quest'ultima è un elemento invariabile per una flessione senza estensione della superficie.

Valgano queste considerazioni (benchè limitate ad un sol caso) a far comprendere intuitivamente la verità del teorema di **Gauss**:

La curvatura di una superficie in un punto non varia per una flessione senza estensione della superficie.

In particolare segue dal teorema di **Gauss** che *una superficie applicabile sul piano deve avere tutti i punti parabolici ed essere una rigata sviluppabile* (di qui anzi il nome di sviluppabile).

§ 51. — **Geodetiche.** — Abbiamo denominato *geodetica* sopra una superficie una linea che in ogni regione limitata intorno ad un suo punto generico dà l'arco di lunghezza minima fra quelli che congiungono due suoi punti arbitrarî sopra la superficie.

Per due punti assai vicini di una superficie passa in generale *una* geodetica. Vediamo di stabilire la seguente proprietà caratteristica delle geodetiche:

Le geodetiche sopra una superficie sono le linee aventi in ciascun punto il piano osculatore normale alla superficie.

Diamo la seguente dimostrazione intuitiva:

Sia C una curva geodetica della superficie F.

Consideriamo la superficie sviluppabile generata dai piani tangenti ad F nei punti di C. Essa può riguardarsi come avente comune con F una striscia infinitesima aderente a C. Ora, poichè C è geodetica su tale striscia, segue che il piano osculatore a C in ciascun punto è normale alla striscia stessa e quindi ad F (§ 20).

CAPITOLO VI.

Le superficie rigate.

§ 52. — **Preliminari.** — Fra le superficie formano una classe vasta e notevole quelle generate dal movimento di una curva immutabile di forma. Tra queste compariscono prime le *rigate* generate dal moto di una retta. Fra le rigate abbiamo già incontrato le rigate sviluppabili (§ 17). Le rigate non sviluppabili diconsi *gobbe*. Ogni punto della retta (*generatrice*) mobile descrive una curva (*direttrice*) che incontra ogni generatrice di una rigata in un punto.

Il piano tangente ad una superficie rigata in un punto semplice contiene la generatrice per il punto, che è una tangente principale. In generale vi è per ogni punto una seconda tangente principale (essendo il punto iperbolico); soltanto per le rigate sviluppabili ogni punto è parabolico, cioè la generatrice per un punto è sempre l'unica tangente principale.

Sopra una rigata le generatrici costituiscono sempre un fascio di asintotiche (che sono anche geodetiche); vi è in generale un *secondo fascio di asintotiche*, escluso il caso delle rigate sviluppabili.

Se la retta mobile che genera la rigata passa due o più volte per un medesimo punto, si ha un *punto doppio* o *multiplo* per la superficie. In particolare se la retta mobile ripassa due o più volte per una medesima posizione, si ha una *generatrice doppia* o *multipla* della rigata.

All'infuori di questo caso la rigata potrà avere una *curva doppia* o *multipla*, secante le generatrici (in uno o più punti), per la quale passeranno due o più falde della superficie. Supponendo, p. es., che si abbia una curva doppia C, per ogni

punto A di C si avranno in generale due generatrici b, c e due piani osculatori (contenenti fasci di rette con contatto tripunto) proiettanti le nominate generatrici b, c dalla retta a, tangente in A a C. Infatti la sezione della superficie con uno, ab, dei piani suddetti, avrà due punti doppî riuniti in A su a e conterrà la b, sicchè il punto A sarà triplo per essa; la curva stessa spezzandosi in b ed in una residua linea avente in A un punto doppio ed a come retta osculatrice.

Ciò che si è detto vale *nel caso generale di una rigata doppia*, nel qual caso *la curva doppia* C *è una curva nodale.*

Nel caso particolare in cui le due generatrici b, c uscenti da un punto generico A della curva doppia C sieno infinitamente vicine, la *curva* C è *cuspidale* e la *rigata è sviluppabile*, poichè in essa due qualunque generatrici infinitamente vicine sono incidenti. Si può aggiungere che allora la *curva cuspidale* C *è lo spigolo di regresso della sviluppabile* e quindi le b, c coincidono colla tangente a a C ed il piano osculatore in A alla superficie coincide col piano osculatore alla curva C.

Osservazione 1.ª — Le cuspidi della curva, sezione piana di una superficie sviluppabile, si presentano in modo correlativo ai piani d'inflessione del cono proiettante la curva da un punto esterno, che sono i piani osculatori alla curva per il punto.

Questa osservazione è stata già fatta a proposito della sviluppabile circoscritta ad una cubica (§ 25).

Osservazione 2.ª — Si avverta che una rigata sviluppabile possiederà in generale oltre la curva cuspidale C, che ne costituisce lo spigolo di regresso, anche una curva nodale, pei punti della quale passeranno due tangenti a C; e ciò vedremo più precisamente nel caso delle rigate sviluppabili algebriche.

Si avverta ancora che il caso in cui le b, c sieno infinitamente vicine, considerato nel ragionamento precedente, non è il solo caso in cui la C riesca una curva cuspidale. Così può darsi che una rigata (gobba) abbia una retta cuspidale C ed una delle due generatrici b, c uscenti da un punto qualunque di essa sia infinitamente vicina ad essa.

§ 53. — **Iperboloidi osculatori.** — Si abbia una rigata gobba F e si considerino tre generatrici infinitamente vicine di essa 1, 2, 3. Appunto perchè la F non è sviluppabile, le 1, 2, 3 sono in generale sghembe tra loro. Esse sono dunque le direttrici di una

rigata quadrica Q (iperboloide o in particolare paraboloide) *osculatrice* ad F secondo la generatrice 1, tale cioè che due qualsiansi sezioni piane di Q e di F sono osculatrici nel punto che esse hanno in comune colla retta 1.

Il piano tangente alla F in un punto della 1 è anche il piano tangente alla Q; d'altra parte sappiamo che i piani tangenti ad un iperboloide nei punti di una generatrice formano un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto; concludiamo dunque che la stessa proprietà si estende alla rigata gobba F, ossia perveniamo al seguente

Teorema. — *I piani tangenti ad una rigata gobba nei punti di una generatrice generica formano un fascio, avente per asse la nominata generatrice, proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.*

Questa proprietà viene utilizzata nella costruzione dei piani tangenti ad una rigata.

Dalla considerazione degli iperboloidi osculatori ad una rigata F segue anche il

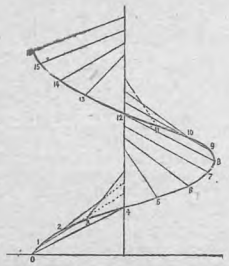
Teorema di **P. Serret.** — *Sopra una rigata gobba le asintotiche del 2.° fascio segano due generatrici generiche secondo punteggiate proiettive.*

Infatti le tangenti principali (diverse dalla 1) nei punti della generatrice 1 di F sono le direttrici dell'iperboloide osculatore Q innanzi considerato; ora queste direttrici, e perciò anche le dette tangenti principali, e le asintotiche del 2.° fascio segano le rette 1, 2 secondo punteggiate proiettive; analogamente le asintotiche di F (del 2° fascio) segheranno secondo punteggiate proiettive le generatrici infinitamente vicine 2, 3 ecc., onde segheranno secondo punteggiate proiettive anche due generatrici generiche di F.

§ 54. — **Classificazione delle rigate secondo le loro curve direttrici.** — Una rigata come insieme di rette è una figura correlativa di sè stessa; essa può concepirsi come superficie luogo dei punti delle sue rette o correlativamente come inviluppo doppio dei piani per le sue rette. Da questa considerazione nascono due modi correlativi di fissare la generazione di una rigata col movimento di una sua generatrice; secondochè si determina il moto di questa retta in modo che si appoggi a tre linee direttrici della rigata o, correlativamente, appartenga ai piani di tre sviluppabili direttrici di essa (sviluppabili aventi un piano per ogni generatrice).

Date ad arbitrio tre curve C_1, C_2, C_3 nello spazio, è possibile in generale muovere una retta in modo che si appoggi sempre alle tre curve in guisa da generare una rigata di cui C_1, C_2, C_3 sieno direttrici e correlativamente.

Se vi è un punto comune a due delle tre curve, dalla rigata si stacca il cono che proietta da quel punto la terza; se vi è un punto comune a tutte e tre le curve, non sono più soltanto le generatrici d'una rigata che si appoggiano alle tre curve, ma anche tutte le rette di una stella ecc.



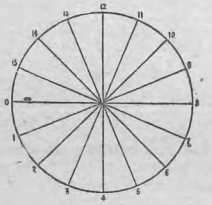


fig. 267.

La nominata generazione delle superficie rigate dà luogo a dei casi particolari notevoli:

1) Una delle direttrici della rigata è una retta (luogo di punti o asse di un fascio di piani).

A questo tipo di rigate appartiene l'*elicoide gobbo a cono direttore* (superficie della *vite a filetto triangolare*); questa è la rigata che ha per direttrici un'elica, l'asse dell'elica e il cerchio all'infinito di un cono di rotazione avente per asse l'asse dell'elica (fig. 267). In altre parole, il nominato elicoide è generato dalle rette che passano pei punti d'elica ed incontrano sotto un dato angolo (non retto) l'asse dell'elica.

Per ogni punto dell'elica (linea doppia per la rigata) passano due generatrici della rigata. Infatti considerando un punto dell'elica e per esso il piano passante per l'asse dell'elica, questo piano ha col cerchio all'infinito due punti in comune.

Un altro esempio di una rigata di questo tipo è la superficie della *volta a sbieco*, che ha come direttrici due circoli uguali in piani paralleli e la normale d ai piani di essi condotta pel punto medio M del segmento congiungente i centri dei due circoli, segmento che deve supporsi distinto dalla d (fig. 268). Per avere la superficie della volta a sbieco si deve però esclu-

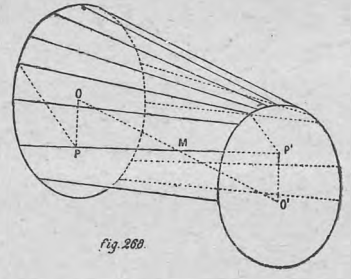
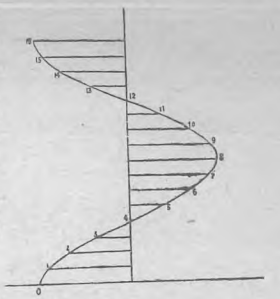


fig. 268.

dere il cono proiettante da M i due cerchi, che pure nasce colla medesima generazione.

2) La rigata ha due rette sghembe come direttrici.

Appartiene a questo tipo l'*elicoide a piano direttore* (superficie della *vite a filetto rettangolare*) generato dalle rette condotte pei punti di un'elica che si appoggiano ortogonalmente all'asse; le tre direttrici sono l'elica, l'asse e la retta all'infinito dei piani perpendicolari all'asse (fig. 269).



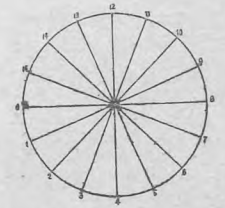


fig. 269.

3) La rigata ha come direttrici tre rette sghembe (due a due).

Questa è la *rigata quadrica*, cioè un iperboloide o un paraboloide.

§ 55. — **Rigate algebriche.** — Una rigata può essere in particolare (una superficie) *algebrica.*

Si può vedere subito che l'*ordine di una rigata algebrica è uguale alla sua classe.*

Infatti si consideri una rigata algebrica F ed una retta (generica) a; se la a incontra la F in n punti, vi sono n generatrici di F incidenti ad a; allora n (ordine) è anche il numero (classe) dei piani tangenti ad F passanti per a, poichè ognuno di questi piani contiene una generatrice di F; anzi si può dire che:

Il *grado di una rigata algebrica* (*ossia l'ordine o la classe di essa*) *è il numero delle sue generatrici incidenti ad una retta generica.*

Quando una rigata sia definita da tre curve direttrici algebriche C_1, C_2, C_3 essa è certo algebrica ed il suo grado può valutarsi facilmente. Indichiamo con m, n, p gli ordini risp. delle direttrici C_1, C_2, C_3 e denotiamo con x il grado della rigata. Dico che si ha: $x = 2mnp$.

Per dimostrarlo bisogna far vedere che esistono $2mnp$ rette incidenti alle curve C_1, C_2, C_3 e ad una retta generica a.

Vediamo dapprima che la formula precedente sussiste quando due delle tre curve direttrici, per es. C_1, C_2, sieno rette ($n = m = 1$); infatti in tal caso le rette incidenti ad a, C_1, C_2 formano un iperboloide il quale ha in comune $2p$ punti colla curva C_3 d'ordine p.

Supponiamo ora che una sola delle tre direttrici, p. es. la C_1, sia una retta ($n = 1$). Poichè le rette incidenti ad a, C_1, C_2 for-

mano una superficie d'ordine $2m$, la quale avrà $2mp$ intersezioni colla curva C_3 d'ordine p, ci saranno appunto $2mp$ rette incidenti ad a, C_1, C_2, C_3, e però $2mp$ sarà il grado della rigata avente come direttrici la retta C_1 e due curve C_2, C_3 degli ordini rispettivi m, p.

Finalmente supponiamo che C_1, C_2, C_3 sieno tre curve degli ordini n, m, p. Allora poichè le rette incidenti ad a, C_1, C_2 formano una superficie d'ordine $2nm$ la quale avrà $2nmp$ intersezioni colla curva C_3 d'ordine p, tante saranno appunto le rette incidenti ad a, C_1, C_2, C_3, ossia il grado della rigata che ha per direttrici C_1, C_2, C_3 sarà appunto $x = 2nmp$.

A proposito di questa formula generale occorre però una avvertenza. Supponendo le C_1, C_2, C_3 irriducibili e non aventi a due a due punti comuni, la rigata che ha per direttrici C_1, C_2, C_3 sarà in generale irriducibile ed avrà il grado $x = 2nmp$.

Ma pure mantenendo l'irriducibilità di C_1, C_2, C_3 la rigata potrebbe spezzarsi avendosi qualche punto comune a due delle tre direttrici; così se, p. es., O è un punto comune alle C_1, C_2, il cono (d'ordine p) che proietta da O la C_3 si stacca dalla rigata; nasce poi un'indeterminazione se O è comune anche alla C_3, giacchè allora tutte le rette della stella O sono incidenti a C_1, C_2, C_3.

Ora (lasciando da parte quest'ultimo caso) quando un punto O è comune a due curve direttrici, p. es. a C_1, C_2, si conviene di non riguardare il cono proiettante C_3 da O come facente parte della rigata definita dalle tre direttrici; perciò il grado di questa rigata si abbassa per ogni punto comune a due delle curve, e precisamente si abbassa di p per ogni punto (semplice) comune alle C_1, C_2 ecc.

Escludendo ulteriori particolarizzazioni enunceremo dunque il Teorema generale:

Sieno C_1, C_2, C_3 *tre curve algebriche irriducibili degli ordini* m, n, p *e vi sieno*:

r *punti semplici comuni a* C_1, C_2 (*e non a* C_3),

s *punti semplici comuni a* C_1, C_3,

t *punti semplici comuni a* C_2, C_3;

la rigata definita dalle tre curve direttrici C_1, C_2, C_3 *ha il grado* $x = 2nmp - rp - sm - tn$.

E potremo anche aggiungere:

La curva C_1 *è multipla d'ordine* $mp - t$ *per la rigata* ecc.

Infatti per ogni punto generico della C_1 passano mp rette

incidenti a C_2, C_3, intersezioni dei coni (d'ordine risp. m, p) che proiettano le due curve, ma le t rette che congiungono i punti comuni alle C_2, C_3 (secondo la nostra convenzione) non debbono computarsi come facenti parte della rigata definita dalle direttrici C_1, C_2, C_3.

Esempî. — Riprendiamo l'esempio considerato innanzi (§ 53) della superficie della volta a sbieco. Le tre direttrici sono: due circoli C_1, C_2 in piani paralleli, aventi dunque comuni i punti ciclici dei loro piani (punti doppî dell'involuzione assoluta), ed infine la retta $d \equiv C_3$ non avente punti comuni coi due circoli.

Avremo dunque: $n = m = 2$, $p = 1$,

$$r = 2, \quad s = t = o,$$

e perciò $x = 6$ sarà il grado della rigata definita dalle tre direttrici C_1, C_2, C_3. Staccando da questa rigata il cono quadrico proiettante i due circoli dal punto medio della d, si ottiene che: *la superficie rigata della volta a sbieco ha il grado* 4; *inoltre essa ha come retta doppia la* d ($\equiv C_3$) *e passa semplicemente pei due circoli* C_1, C_2. Si verifichi ciò per esercizio.

Proponiamo ancora come esercizio la discussione dei seguenti esempî:

Si prendano in esame le rigate a due direttrici rettilinee (sghembe) che ammettono come terza direttrice una conica. Sieno $d_1 \equiv C_1$, $d_2 \equiv C_2$ le due direttrici rettilinee, $C = C_3$ la direttrice conica.

Se le tre curve non hanno a due a due punti comuni, la rigata definita da esse ha il grado $x = 4$ ed *ha come rette doppie* d_1, d_2, *mentre passa semplicemente per la conica* C.

Se invece la C si appoggia (in un punto) ad una delle direttrici rettilinee, p. es. alla d_2, ma non si appoggia all'altra, il grado della rigata è $x = 3$ e la rigata *ha come retta doppia la* d_2 *mentre passa semplicemente per* d_1 *e* C.

Se d_1, d_2 si appoggiano ciascuna in un punto alla C_1, la rigata è una quadrica passante semplicemente per le tre direttrici.

Si possono moltiplicare gli esempî prendendo come curve direttrici rette, coniche, cubiche gobbe ecc.

Termineremo dando della formola stabilita una elegante applicazione.

Si tratta di determinare *quante rette appartengono* ad una *superficie generale del 3° ordine* F.

Consideriamo le quattro cubiche C_1, C_2, C_3, C_4 sezioni piane generiche di F. Ogni retta che stia su F incontra in un punto il piano di C_1, e quindi la C_1 stessa, ed analogamente incontra in un punto le C_2, C_3, C_4; i quattro punti che la retta ha comune colle quattro curve sono distinti, perchè, ad es., per un punto comune a C_1, C_2 (che è punto generico di F) non passano rette giacenti su F se la F non è rigata. Viceversa una retta che incontri C_1, C_2, C_3, C_4 in quattro punti distinti sta sulla superficie cubica F, avendo con essa quattro punti comuni.

Ora consideriamo le tre cubiche C_1, C_2, C_3 e determiniamo il grado della rigata di cui esse sono direttrici, togliendo i coni che proiettano C_3 da un punto comune a C_1, C_2 ecc. Osservando che due cubiche C, sezioni piane di F, hanno comuni tre punti, cioè le intersezioni di F colla retta comune ai due piani, troveremo che la detta rigata ha il grado

$$2.27 - 27 = 27,$$

e che ha come 6-ple le cubiche C_1, C_2, C_3.

Ora la C_4 sega la rigata precedente in

$$27.3 = 81$$

punti, ma siccome ogni punto comune a C_4 e a C_1 o a C_2 o a C_3 assorbe sei intersezioni, così restano

$$81 - 6.9 = 27,$$

punti di C_4, per ciascuno dei quali passa una generatrice della detta rigata che si appoggia in punti distinti alle quattro cubiche C_1, C_2, C_3, C_4.

Concludiamo così:

La superficie generale del 3.° ordine contiene ventisette rette.

In casi particolari questo numero può ridursi, avendosi soluzioni multiple del problema, mentre esso diventa infinito nel caso delle superficie cubiche rigate (la particolarità di questo caso risulta dal teorema del § seguente).

§ 56. — **Curva doppia delle rigate algebriche.** — Si abbia una rigata algebrica F di grado $n > 2$ non sviluppabile e sia a una sua generatrice semplice. Si consideri il piano tangente ad F in un punto generico A di a; questo piano contiene a e sega F secondo una residua curva C_{n-1} d'ordine $n-1$ che passa per A e sega a in altri $n-2$ punti P_1, P_2, P_3.... P_{n-2}.

Ora consideriamo un punto che si muova descrivendo la curva C_{n-1} a partire dalla posizione A; e consideriamo il movimento della generatrice della rigata che passa pel suddetto punto mobile.

Quando il punto mobile viene ad occupare la posizione P_1 (o P_2 ecc.), la generatrice per P_1 a cui si è condotti deve differire dalla a, altrimenti la a (posizione occupata due volte da una generatrice mobile descrivente la rigata) sarebbe una generatrice *doppia* della rigata stessa.

Pertanto i punti P_1, P_2,.... P_{n-2} sono punti appartenenti a due generatrici della rigata e quindi punti doppî per essa.

Concludiamo così:

Ogni rigata algebrica gobba di grado $n > 2$ *ha in generale una curva doppia che incontra le generatrici della rigata in* $n-2$ *punti; la quale curva doppia può tuttavia ridursi a più curve multiple di ordini* s_1, s_2,... *secanti le generatrici in* h_1, h_2,.... *punti, ove*

$$h_1 (s_1 - 1) + h_2 (s_2 - 1) + ... = n - 2.$$

Un corollario del teorema è il seguente:

Ogni rigata (gobba) cubica ha una retta doppia.

Infatti essa deve essere dotata di una curva doppia e questa curva non può essere che una retta, altrimenti tutte le corde di essa giacerebbero sopra la superficie.

Viceversa si ha che:

Ogni superficie cubica con una retta doppia è rigata, essendo segata dai piani per la retta doppia secondo rette.

Un secondo corollario si riferisce alla determinazione delle varie specie di curve che possono essere doppie per una rigata del 4.° grado.

Lasciando da parte le sviluppabili, per le quali già sappiamo esservi una cubica cuspidale, una rigata del 4.° grado avrà in generale una curva doppia secante in due punti le generatrici.

Questa curva dovrà esser gobba e perciò avrà l'ordine non minore di tre, all'infuori del caso in cui essa si spezzi in due rette.

D'altronde una superficie del 4.° ordine irriducibile non può avere una curva doppia d'ordine > 3, perchè le sezioni piane di essa non possono avere più di tre punti doppî senza spezzarsi, e la riducibilità di tutte le sezioni piane porterebbe di conseguenza la riducibilità della superficie. Vediamo dunque che sono possibili i seguenti casi:

a) La curva doppia è una cubica gobba.

b) La curva doppia si compone di una retta e di una conica eventualmente degenere) aventi comune il punto in cui la retta incontra il piano della conica. Questo caso rientra dunque in *a*) supponendo degenere la cubica ivi considerata.

c) La curva doppia si compone di due rette sghembe, distinte e infinitamente vicine.

Le ipotesi precedenti corrispondono a rigate del 4.° grado effettivamente esistenti.

In primo luogo si prova, scrivendone l'equazione, l'effettiva esistenza di superficie del 4.° ordine dotate delle suddette curve doppie. In secondo luogo si riconosce che una superficie del 4.° ordine dotata di una curva doppia siffatta C è una rigata; giacchè per ogni punto di una sezione piana passa una retta la quale si appoggia alla cubica o alla coppia di rette C, in due punti, e quindi ha cinque intersezioni colla superficie, e però giace interamente sopra di essa.

Ai casi innanzi considerati deve poi aggiungersi il caso delle rigate del 4.° ordine dotate di curve multiple, di molteplicità > 2. Si riconosce subito che il solo caso possibile è quello in cui la superficie abbia una retta tripla, e ciò partendo dalla osservazione che una retta congiungente due punti tripli o un punto triplo e un punto doppio di una superficie del 4.° ordine appartiene interamente alla superficie.

Viceversa ogni superficie del 4.° ordine con retta tripla è rigata, perchè i piani per la retta tripla la segano ulteriormente secondo rette.

Concludiamo così:

Le superficie rigate del 4.° grado, i coni esclusi, avuto riguardo alla loro curva doppia o multipla, si possono classificare secondo tre tipi:

1) *superficie con cubica gobba doppia, eventualmente degenere (fra le quali vi sono le sviluppabili nel caso che la curva sia irriducibile cuspidale);*

2) *superficie con due rette direttrici doppie, sghembe fra loro, distinte o infinitamente vicine;*

3) *superficie con retta tripla.*

La proprietà stabilita circa l'esistenza di una curva doppia delle rigate algebriche gobbe sussiste anche, con qualche modificazione, per le sviluppabili.

Una rigata sviluppabile algebrica di grado n (non minore di 4) *che non sia un cono, possiede, oltre la curva cuspidale, suo spigolo di regresso, una curva doppia, nodale, secante le generatrici in* n — 4 *punti.*

Infatti il piano tangente, secondo una generatrice a, sega la superficie secondo una curva residua d'ordine $n-2$ tangente ad a nel punto in cui essa tocca lo spigolo di regresso, la qual curva sega dunque a in altri $n-4$ punti. Per ognuno di questi passa una seconda generatrice della rigata, sicchè i suddetti punti sono doppî per la rigata stessa.

Come esempî si possono considerare: la rigata sviluppabile circoscritta alla cubica gobba che ha il grado $n=4$ e non ha ulteriore curva nodale e la rigata sviluppabile circoscritta ad una quartica di 2.ª specie, la quale ha il grado 6, e risulta dotata di una curva nodale bisecante le generatrici, che si dimostra essere del 6.° ordine ecc.

§ 57. — **Rappresentazione delle rigate.** — Per rappresentare una rigata in uno qualunque dei sistemi di rappresentazione che abbiamo studiato, basterà rappresentare le rette generatrici di essa.

Nel metodo delle proiezioni ortogonali queste rette saranno date dalle loro prime e seconde proiezioni costituenti due linee-inviluppi K_1, K_2, che sono tra loro in corrispondenza biunivoca (almeno limitandoci a considerare una porzione convenientemente limitata della superficie rigata).

Date K_1, K_2 e la corrispondenza tra le tangenti di queste curve si possono costruire per punti le curve τ_1, τ_2, tracce della rigata nei due piani principali, le quali costituiscono due curve direttrici della rigata. Una 3.ª curva direttrice, utile a determinarsi, è l'intersezione della rigata col piano bisettore α del 2.° diedro dei piani principali, la quale curva ha la stessa 1.ª e 2.ª proiezione C; la C è il luogo dei punti comuni alle due proiezioni a_1, a_2 delle generatrici della rigata. Date le curve inviluppi K_1, K_2 e la curva C, 1.ª e 2.ª proiezione della curva intersezione della rigata col piano α (colle opportune limitazioni), resta assegnata graficamente la corrispondenza che intercede fra K_1, K_2 per modo che data la prima proiezione x_1 di una generatrice si può costruire la 2.ª proiezione x_2 (fig. 270).

Più generalmente si può assegnare graficamente la corrispondenza tra K_1, K_2 mediante un'altra qualsiasi curva diret-

trice di cui sieno date le proiezioni C_1 e C_2 osservando che le prime e le seconde proiezioni di una generatrice della rigata

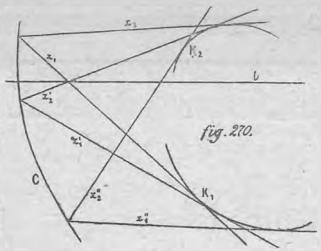


fig. 270.

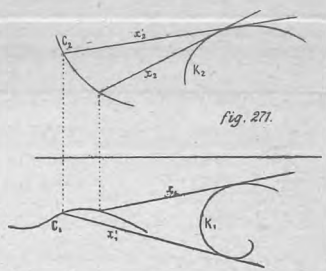


fig. 271.

incontrano C_1 e C_2 in punti che si trovano sopra una perpendicolare alla linea di terra (fig. 271).

Ora si risolvono facilmente i seguenti problemi:

Problema 1.° — *Costruire i punti della rigata che hanno una data 1.ª (o 2.ª) proiezione.*

Data la 1.ª proiezione P_1 di un punto della rigata si condurranno per P_1 le tangenti dell'inviluppo K_1; esse sono altrettante prime proiezioni di generatrici della rigata che hanno come seconde proiezioni le tangenti omologhe di K_2, e su ciascuna di queste ultime e sulla perpendicolare per P_1 alla linea di terra si troverà un punto che è la 2.ª proiezione di un punto della rigata di cui la 1.ª proiezione è in P_1.

Problema 2.° — *Determinare le intersezioni piane della rigata.*

Esse potranno costruirsi per punti determinando le intersezioni del piano secante colle generatrici.

Problema 3.° — *Determinare il piano tangente alla rigata in un punto.*

Si seghi la rigata con un piano pel punto e si costruisca la tangente in esso alla curva sezione; questa colla generatrice pel punto dà il piano tangente cercato.

Costruiti i piani tangenti in tre punti di una generatrice, si può costruire il piano tangente in un altro punto di essa usufruendo della già stabilita proiettività fra i piani tangenti nei punti d'una generatrice e i punti di contatto (§ 52).

Problema 4.° — *Determinare il cono circoscritto ad una rigata da un punto* P.

Si proiettino dal punto P le generatrici della rigata e si avrà come inviluppo il cono cercato.

La linea di contatto del cono colla rigata, costituente il

contorno apparente della superficie veduta dal punto, si può costruire conducendo in ogni piano per P le tangenti alla sezione della rigata; essa è il luogo dei punti di contatto di queste tangenti.

La medesima linea può anche costruirsi determinando in ogni piano tangente per P il punto comune alla generatrice della rigata e alla residua curva sezione, all'infuori dei punti doppî (eventuali) che appartengono alla generatrice suddetta.

Problema 5.° — *Determinare in un punto la 2.ª tangente principale della rigata (diversa dalla generatrice).*

Si seghi la rigata col piano tangente nel punto e si conduca in esso la tangente alla curva sezione residua della generatrice. Di qui si deduce la costruzione per punti dell'asintotica della rigata passante per un dato punto.

Si possono risolvere per esercizio i problemi sopra nominati nel caso semplicissimo in cui la rigata possiede due direttrici rettilinee ortogonali s, r. Prendendo i due piani principali ortogonalmente ad esse e passanti risp. per esse o ad esse paralleli si avranno come inviluppi K_1, K_2 costituiti dalle proiezioni delle generatrici, due fasci di raggi coi centri S_1, R_2 sulla linea di terra o sopra una parallela, e si dovrà ancora assegnare una curva direttrice C. Si potranno speditamente eseguire le costruzioni di cui sopra abbiamo fatto cenno, in particolare costruire per punti le tracce della rigata ecc.

Nella costruzione delle asintotiche, dopo averne costruita una per punti, potremo usufruire del teorema di **P. Serret,** grazie al quale le prime proiezioni di esse (e analogamente si dica per le seconde) risultano curve omologiche essendo centro di omologia S_1 ed asse la 1.ª proiezione r_1 della direttrice r; basta invero osservare che le rette r, s sono due asintotiche della rigata e per ciò due altre asintotiche qualunque incontrano ogni generatrice in due punti, che formano un birapporto costante colle intersezioni di r, s.

Ci si può riferire, come ad esempio concreto, al caso di un elicoide a piano direttore (§ 54).

Si prenda il primo piano principale π_1 normale all'asse dell'elica, la cui traccia designeremo con S_1 (la sua 2.ª proiezione s_2 è normale alla linea di terra); la direttrice rettilinea all'infinito è la retta all'infinito $r \equiv r_1$ del piano π_1 mentre la sua 2.ª traccia (e proiezione) è il punto all'infinito R_2 della parallela per S_1 alla linea di terra; infine si dia l'elica diret-

trice C di cui si suppongono costruite le due proiezioni C_1 e C_2 (fig. 272). Si noti che se l'elica non viene limitata, ogni retta x_1 per S_1 riesce proiezione di infinite generatrici dell'elicoide, le cui seconde proiezioni x_2, x_2'.... sono tutte parallele alla linea di terra. Se si vuole avere tra i fasci S_1, R_2 una corrispondenza biunivoca, basta invece limitarsi a considerare un arco di elica (rappresentato nella fig. 272 dagli archi A_1B_1 di C_1 e A_2B_2 di C_2) e limitarsi quindi a considerare la porzione corrispondente dell'elicoide.

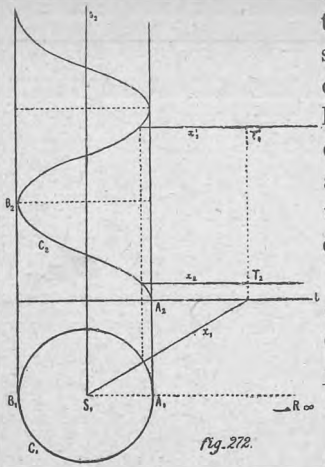


fig. 272.

Volendo determinare le *asintotiche dell' elicoide* E, basterà osservare che queste *sono le eliche descritte dai punti della superficie nel movimento elicoidale che la sovrappone a sè stessa*.

Invero si consideri una di queste eliche, p. es. la C, assunta come direttrice per definire E; in un punto P di C si ha come piano tangente ad E il piano della (generatrice) perpendicolare p all'asse s condotta per P e della tangente a C in P; questo piano è osculatore all'elica C perchè, essendo l'elica geodetica del cilindro che la contiene, il piano osculatore a C in P passa per la normale p al detto cilindro (§ 20).

Le prime proiezioni (orizzontali) delle asintotiche dell'elicoide E saranno dunque i cerchi concentrici di centro S_1 (i quali sono omotetici rispetto al detto centro); le seconde proiezioni sono sinusoidi e si potranno ottenere direttamente colla costruzione del § 15 o come curve omologiche affini della C_2 (asse dell'omologia s_2 e centro R_2).

Si possono ancora determinare facilmente le *linee di curvatura* di E tenendo presente che le linee di curvatura per un punto bisecano l'angolo delle asintotiche passanti per esso (§ 49). Si osservi che le *prime proiezioni* delle dette linee di curvatura sono curve incontranti sotto l'angolo costante le rette del fascio S_1 e perciò sono *spirali logaritmiche*.

Un secondo esempio interessante è offerto dalla rappresentazione di un elicoide gobbo a cono direttore.

Le costruzioni relative a questo caso (intorno a cui proporremo qualche esercizio) riescono agevolate dal seguente

Teorema. — *La traccia di un elicoide gobbo a cono direttore, in un piano normale all' asse, è una spirale di* **Archimede.**

Tale proprietà si dimostra facilmente osservando che mentre una generatrice dell'elicoide si sposta nel suo moto elicoidale, la sua traccia in un piano normale all'asse, supposto p. es. orizzontale, si allontana dalla traccia dell'asse proporzionalmente al tratto di cui si è elevato il punto d'incontro della generatrice suddetta coll'asse; e contemporaneamente il raggio vettore ruota attorno alla traccia dell'asse stesso di un angolo proporzionale a quello di cui ha ruotato la generatrice e quindi proporzionale al tratto sopra nominato.

Esercizî:

1) Rappresentare un elicoide gobbo a cono direttore di cui sieno dati l'asse, un'elica direttrice ed una generatrice. Costruire la traccia di esso nel piano orizzontale (assunto ortogonale all'asse).

2) Determinare la sezione dell'elicoide stesso con un piano qualunque.

3) Determinare il contorno apparente del suddetto elicoide veduto da un punto all'infinito in una direzione qualsiasi.

4) Determinare l'intersezione dell'elicoide con un cilindro avente come generatrice l'asse dell'elicoide.

Si ricorra ai piani ausiliarî per l'asse stesso.

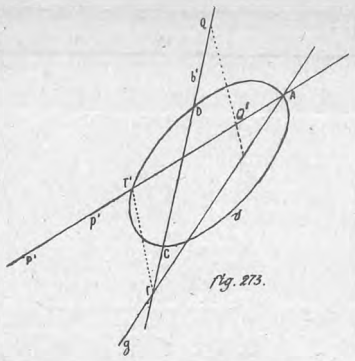
§ 58. — **La rigata cubica.** — Le cose dette intorno alla rappresentazione di una rigata col metodo delle proiezioni ortogonali si ripetono analogamente, colle debite modificazioni, pel caso in cui si riferisca invece ad un sistema di proiezioni centrali.

Studieremo brevemente con questo metodo la rappresentazione di una superficie rigata del 3.° grado (*rigata cubica*).

Sappiamo che la rigata cubica F ha una retta (direttrice) doppia a (§ 56). In generale, cioè se la retta a è nodale, per un punto A di a passano due generatrici della rigata distinte da a, le quali determinano un piano secante la F secondo un'altra retta b che non incontra a. La b non può variare variando A su a perchè altrimenti si avrebbe su F un altro sistema di rette diverse dalle generatrici e la rigata ammettendo due diverse generazioni rettilinee sarebbe quadrica; la b è dunque una retta (semplice) direttrice di F. Dunque:

La rigata cubica generale ha, oltre la retta direttrice dop-

pia a, *un' altra direttrice semplice* b *sghemba alla prima*. Nel caso particolare della *rigata* di **Cayley**, b è infinitamente vicina ad a, che è una retta cuspidale per la superficie.



Escludendo il caso particolare della rigata di **Cayley** potremo rappresentare la rigata cubica F nel modo seguente (fig. 273):

Prendiamo il centro di proiezione O sulla direttrice doppia a, che sarà dunque rappresentata mediante la traccia A; prendiamo il quadro passante per una generatrice g di F e quindi intersecante ulteriormente la F secondo una conica direttrice τ (che fa parte della traccia) passante per A; diamo finalmente la retta direttrice $b \equiv (TQ)$ la cui traccia T deve appartenere alla g e non alla conica τ.

La F resta così determinata mediante le tre direttrici a, b, τ e poichè la retta a ha un punto comune colla conica τ, essa risulta di grado 3 (§ 54).

Le generatrici di F hanno come proiezioni le rette per A e le tracce su τ; i loro punti di fuga si determinano tenendo conto che esse sono incidenti a $b \equiv (TQ)$. La generatrice di F che sta nel quadro è la $g \equiv AT$.

Un punto P' del quadro è immagine di *un* punto di F, che resta determinato mediante la generatrice, la cui proiezione è $p' \equiv AP'$; fanno eccezione soltanto i *due punti fondamentali* C, D intersezioni di τ con b', che sono le tracce delle due generatrici c, d di F passanti per O.

Si può intersecare la F con un piano, determinando le intersezioni col piano delle sue generatrici.

Le immagini delle sezioni piane di F *non passanti per* O *sono cubiche piane passanti doppiamente per* A *e semplicemente per i punti fondamentali* C, D.

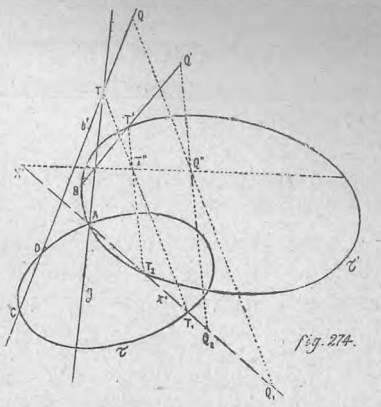
Osservazione. — Le immagini delle asintotiche di F sono tante curve omologiche, centro di omologia A ed asse la retta b' immagine della direttrice b.

Risolviamo ora i seguenti problemi:

Problema 1.° — *Determinare l' intersezione della rigata cubica* F *con una quadrica* S *passante per la direttrice doppia* a.

Supponiamo la F rappresentata nel modo precedentemente detto.

La quadrica S verrà rappresentata come nel § 37. Indicheremo con τ' la sua traccia, la quale passa per A che è uno dei suoi punti fondamentali; con B l'altro punto fondamentale (fig. 274).



Per completare la rappresentazione di S sarà dato il punto di fuga Q' di una generatrice p.

L'intersezione di F, S può costruirsi per punti segando le due superficie coi piani ausiliarî passanti per la retta a e trovando in ciascuno il punto comune alle generatrici sezioni.

Nella fig. 274 si è considerato un piano per a la cui traccia x' è ugualmente la proiezione di una generatrice (T_1Q_1) di F e di una generatrice (T_2Q_2) di S, sezioni risp. di F, S col detto piano. L'immagine X' del punto X, comune alle due generatrici considerate, si ottiene facilmente segando x' colla proiezione della retta comune a due piani passanti risp. per (T_1Q_1) e (T_2Q_2).

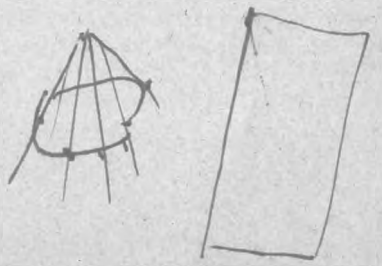
L'intersezione di F, S è una quartica segata in un punto variabile dai piani per a, di cui a è quindi una trisecante. Si tratta dunque di una *quartica di seconda specie* (§ 44), la cui proiezione sul quadro (se essa non passa per O) è una quartica piana avente in A un punto triplo.

Problema 2.° — *Determinare il contorno apparente della rigata cubica veduta da un punto esterno.*

Il cono circoscritto alla rigata da un punto P è inviluppato dai piani che da P proiettano le generatrice della rigata e costituito dalle rette per P tangenti alla superficie; ora, poichè le sezioni piane di questa superficie sono di classe 4, il suddetto cono avrà l'ordine 4. $n(n-1) = 3(3-1) = 4$

Pertanto anche il contorno apparente della superficie veduta da P è una curva C del 4.° ordine, poichè proiettando C da un punto esterno P si ottiene un cono del 4.° ordine.

Siccome poi la C sega le generatrici della rigata cubica in un punto, essa ha tre punti sulla direttrice doppia a ed è quindi una quartica di seconda specie.



La C appartiene dunque ad una quadrica che passa per la direttrice doppia a della rigata cubica.

Si può determinare questa quadrica costruendo in ogni piano per P la conica sezione di essa, che deve contenere il punto comune al detto piano e ad a e i quattro punti di contatto delle tangenti condotte da P alla cubica sezione della rigata (punti della C).

Il problema si riconduce quindi facilmente a quello innanzi risoluto.

Esercizî:

1) Determinare il contorno dell'ombra portata da una rigata cubica sopra il quadro, il punto luminoso essendo improprio ed esterno alla superficie.

2) Determinare il contorno apparente di una rigata cubica veduta da un punto semplice della superficie.

3) Rappresentare, nel metodo delle proiezioni centrali, una rigata cubica passante semplicemente per il centro di proiezione.

Determinare in tale rappresentazione il punto che ha una data immagine e la immagine di una sezione piana.

Giova qui osservare che il contorno apparente della superficie veduta dal centro di proiezione si proietta in una conica e le immagini delle generatrici sono le tangenti a questa conica.

CAPITOLO VII.

Le superficie di rotazione.

§ 59. — **Definizioni — Esempî.** — Una classe notevole di superficie è quella delle *superficie di rotazione*, generata dalla rotazione di una curva invariabile di forma attorno ad un *asse*.

Tutti i punti della curva generatrice descrivono circoli in piani ortogonali all'asse e col centro sull'asse. La superficie di rotazione può anche riguardarsi come il luogo dei circoli giacenti in piani ortogonali all'asse e aventi il centro sull'asse, che si appoggiano ad una curva generatrice. Tali circoli diconsi i *paralleli della superficie.*

Ogni piano secante, ortogonale all'asse di una superficie di rotazione, sega la superficie secondo un certo numero di paralleli, uno dei quali può anche ridursi ad un punto dell'asse ove il piano sia tangente alla superficie (Cfr. § 3).

Dicesi *meridiano* di una superficie di rotazione ogni sezione piana di essa il cui piano passi per l'asse. Come curva generatrice della superficie può assumersi un meridiano. Tutti i meridiani sono uguali fra loro. Ogni curva meridiana è simmetrica rispetto all'asse di rotazione perchè si sovrappone a se stessa dopo la rotazione di due angoli retti del suo piano attorno all'asse.

Consideriamo degli esempî di superficie di rotazione:

1) Come curva generatrice si prenda una retta incidente all'asse; la superficie di rotazione è allora un cono circolare.

I paralleli sono circoli, sezioni normali all'asse del cono; i meridiani sono le coppie di rette generatrici nei piani per l'asse.

2) Come curva generatrice si prenda una retta b sghemba all'asse a.

Si consideri la minima distanza fra le rette a, b e sieno A, B i punti in cui la retta, che segna questa distanza, si appoggia alle a, b. Facendo ruotare b attorno ad a, B descrive un circolo (di gola) di centro A e raggio AB, giacenti nel piano ortogonale in A ad a; le generatrici della rigata così generata sono inclinate di uno stesso angolo $\alpha < \frac{\pi}{2}$ sul piano ω del detto circolo e giacciono in piani tangenti al circolo e ortogonali al piano di esso.

Insieme alla b si può considerare per B un'altra retta c giacente pure nel piano ortogonale a quello del circolo di gola e tangente al circolo, inclinata pure dell'angolo α sul piano ω. Nella rotazione attorno ad a la c genera ancora (come si vede facilmente) la stessa superficie F generata dalla b; quindi alla superficie F appartengono i due sistemi di rette generatrici. Inoltre le generatrici di un sistema (b) incontrano tutte quelle dell'altro (c), ed invece quelle di uno stesso sistema sono sghembe fra loro; di qui segue che la superficie F è un iperboloide.

Dunque:

La superficie generata dalla rotazione di una retta attorno ad un asse sghembo è un iperboloide di rotazione (*ad una falda*).

I meridiani di esso sono iperbole aventi per asse ideale l'asse di rotazione.

L'ultima parte dell'enunciato segue dal considerare che, le coniche sezioni piane dell'iperboloide per l'asse di rotazione sono simmetriche rispetto a quest'asse ed hanno come punti all'infinito quelli delle generatrici passanti per i punti del circolo di gola che sono estremi del diametro perpendicolare al piano secante, quindi sono iperbole; è poi chiaro che rotando un'iperbole attorno all'asse principale si genera una superficie (iperboloide a due falde) che non contiene rette, onde le iperbole meridiane dell'iperboloide rigato di rotazione hanno l'asse di rotazione come asse ideale.

3) Come curva generatrice si assuma una conica (meridiana) di cui uno degli assi è l'asse di rotazione.

Se la conica meridiana è un'iperbole e l'asse di rotazione è il suo asse ideale, si ha l'*iperboloide ad una falda* di rotazione già considerato.

Oltre a questo caso vi sono da considerare i seguenti:

a) l'asse di rotazione sia l'asse principale della conica; si generano così (secondochè la conica meridiana è un'iperbole, un'ellisse o una parabola) l'*iperboloide di rotazione a due falde*, *l'ellissoide di rotazione (allungato) ed il paraboloide di rotazione ellittico.*

b) la curva meridiana sia un'ellisse e l'asse di rotazione sia l'asse minore. Si genera l'*ellissoide di rotazione accorciato.*

Come caso particolare di ambedue i nominati ellissoidi si ha la sfera.

4) Si assuma come curva generatrice un cerchio giacente in un piano per l'asse ma non avente il centro su di esso. La superficie di rotazione generata dicesi *toro* ed ha la forma della superficie di un anello se l'asse non incontra il cerchio generatore.

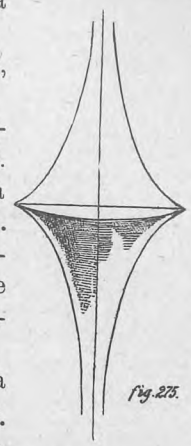


fig. 275.

I meridiani del toro sono coppie di circoli, simmetriche rispetto all'asse.

Il toro è una superficie algebrica del 4.° ordine, di cui faremo più tardi uu breve studio.

5) Si assuma come curva generatrice una trattrice e come asse di rotazione il suo asintoto.

Si genera così una superficie detta *pseudosfera* (fig. 275) che ha la proprietà peculiare di avere nei suoi punti curvatura costante negativa.

6) Si assuma come curva generatrice una catenaria che ruoti attorno alla sua retta direttrice.

Nasce una superficie di rotazione che assomiglia per la forma tubolare all'iperboloide ad una falda, salvo che la sezione circolare del tubo allontanandosi dal minimo cerchio (di gola) va crescendo molto più rapidamente. La superficie considerata dicesi *catenoide.*

§ 60. — **Proprietà generali.** — Per un punto di una superficie di rotazione passa un parallelo ed un meridiano; le tangenti nel punto a queste due curve determinano il piano tangente nel punto alla superficie. Di queste due curve una giace nel piano α per l'asse, l'altra nel piano β normale all'asse per il punto, e la tangente a questa 2.ª curva (circolo parallelo) riesce normale al diametro del circolo nel piano β e quindi al piano α stesso; perciò sussiste il

Teorema — *Il piano tangente in un punto (semplice) ad una superficie di rotazione è normale al piano meridiano che passa pel punto.*

Si ha inoltre:

In un punto semplice, intersezione della superficie coll'asse, il piano tangente è normale all'asse. Se la curva meridiana incontra l'asse in un punto, non ortogonalmente, questo punto é doppio per la superficie, ed il cono osculatore in esso è il cono di rotazione generato dalla tangente al meridiano.

Dal precedente teorema generale segue:

I piani tangenti ad una superficie di rotazione nei punti di una curva meridiana inviluppano un cilindro (cilindro circoscritto alla superficie secondo la curva) che ha la nominata curva come sezione normale.

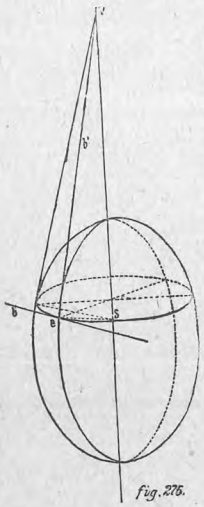


fig. 276.

Si considerino le tangenti alle curve meridiane nei punti di un circolo parallelo, esse formano il cono di rotazione V generato dalla rotazione di una di esse attorno all'asse a, la quale sia fatta ruotare insieme alla curva meridiana (fig. 276).

Il piano tangente alla superficie in un punto B è determinato dalla tangente b' in B alla curva meridiana del piano Ba e dalla retta b tangente in B al circolo parallelo per B (supposto B fuori di a); questo piano è quindi anche il piano tangente al cono di rotazione V, luogo delle tangenti alle curve meridiane nei punti del circolo parallelo che passa per B.

Dunque:

I piani tangenti ad una superficie di rotazione nei punti di un parallelo inviluppano un cono di rotazione, cono dei raggi proiettanti il detto circolo parallelo da un punto dell'asse.

Questo cono dicesi *cono circoscritto alla superficie di rotazione lungo un parallelo.*

Consideriamo le normali alla superficie di rotazione nei punti di un meridiano; esse giacciono tutte nel piano del meridiano e formano quindi una sviluppabile (piana).

Consideriamo invece le normali alla superficie nei punti di un parallelo; la normale in ciascun punto giace nel piano del meridiano ed è perpendicolare alla tangente al meridiano; le dette normali incontrano l'asse in un punto fisso S (fig. 276) e costituiscono un cono di rotazione (attorno all'asse) col vertice in quel punto (cono che taglia ortogonalmente il cono circoscritto secondo il parallelo); si può dunque dire che anche le normali alla superficie lungo un parallelo formano una sviluppabile (cono).

Di qui, tenendo presente il § 49, si deduce:

Sopra una superficie di rotazione (non sferica) i due fasci di linee di curvatura sono costituiti dai meridiani e dai paralleli.

Osservazione — Volendo distinguere per una superficie di rotazione i punti iperbolici ed ellittici basta considerare la curva meridiana. Una porzione di essa che volga all'asse la sua convessità (come nella fig. 277 la porzione AB, $A'B'$) genera, rotando, una superficie a punti iperbolici; una porzione che volga all'asse stesso la concavità (come nella fig. 277 CB, $C'B'$, AD, $A'D'$) genera all'opposto una superficie a punti ellittici; e la linea di separazione fra le due regioni di punti ellittici ed iperbolici, cioè la *linea parabolica* della superficie di rotazione, è *costituita* in generale *dai circoli paralleli che sono luogo dei flessi delle curve meridiane e da quelli che sono luogo dei punti non di inflessione ma in cui la tangente al meridiano è ortogonale all'asse.* Nel caso della fig. 277 la linea parabolica della superficie di rotazione di cui è dato il meridiano, è costituita dai due circoli paralleli per B, B' e per A, A'.

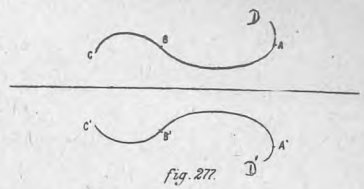


fig. 277.

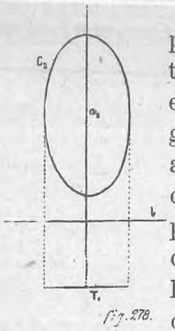
§ 61. — **Rappresentazione.** — Per rappresentare nel modo più semplice una superficie di rotazione, riferiamoci ad un sistema di proiezione ortogonale col primo piano di riferimento perpendicolare all'asse di rotazione.

Si fissi allora la rappresentazione dell'asse mediante la sua prima traccia (prima proiezione) $T_1 = a_1$ e la sua seconda proiezione a_2 (perpendicolare alla linea di terra l); inoltre si rappresenti la 2.ª proiezione della meridiana C parallela al secondo piano di proiezione mediante la sua seconda proiezione C_2 (fig. 278); questa linea C_2 (simmetrica rispetto ad a_2) è uguale alla curva obiettiva C; la prima proiezione di C è composta da uno o più segmenti paralleli ad l per T_1 (finiti od infiniti).

La curva C dicesi *curva meridiana principale* della rappresentazione.

Tali dati individuano perfettamente una superficie di rotazione Σ. Ogni circolo parallelo di Σ ha come prima proiezione un circolo di centro T_1 uguale al dato e come seconda proie-

zione una corda della C_2 parallela ad l e di una lunghezza uguale al diametro del circolo.


fig. 278.

Invece una curva meridiana C' di Σ ha come prima proiezione uno o più segmenti sulla prima traccia del suo piano, ossia sopra una retta per T_1, e come seconda proiezione C' una curva omologica affine che ha per asse a_2, per centro il punto all'infinito della perpendicolare ad a_2, e rimane determinata dalla corrispondenza delle seconde proiezioni di due punti, rispettivamente su C, C', di un circolo parallelo di Σ. Il rapporto dell'omologia affine nominata è il coseno dell'inclinazione del piano meridiano di C' su quello di C_2, ossia sul secondo piano di proiezione.

Coi paralleli e meridiani della superficie Σ restano individuati nella rappresentazione indicata anche i coni e i cilindri circoscritti alla superficie secondo essi.

Il contorno apparente della superficie Σ veduta dal punto all'infinito della perpendicolare al secondo piano di proiezione è evidentemente la curva meridiana principale C di cui è stata data la seconda proiezione C_2. Il contorno apparente della superficie Σ veduta dal punto all'infinito dell'asse si compone di un certo numero di circoli paralleli che vengono proiettati in vera grandezza sul primo piano di proiezione: un tal circolo ha come diametro la lunghezza della corda, parallela ad l, che congiunge i punti di contatto di due tangenti di C_2, simmetriche rispetto ad a_2 e perpendicolari ad l.

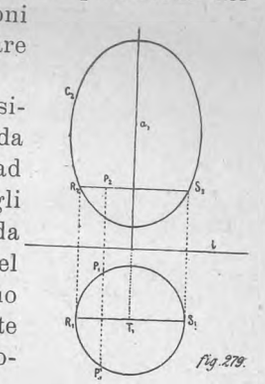
§ 62. — **Problemi.** — Rappresentata una superficie Σ di rotazione nel modo indicato nel precedente paragrafo, ci proponiamo di risolvere rispetto ad essa i seguenti quesiti:

Problema 1.° — *Determinare i punti della superficie* Σ *(ove esistano) che hanno una data seconda proiezione* P_2.

Per P_2 si conduca la parallela alla linea di terra l. I punti in cui tale parallela incontra la C_2 si distribuiscono in coppie R_2S_2.... simmetriche rispetto ad a_2; il segmento finito R_2S_2 determinato da una tale coppia è la seconda proiezione di un circolo parallelo di Σ avente un diametro RS, parallelo al secondo piano di proiezione, uguale ad R_2S_2 (fig. 279).

Questo circolo si proietta sul primo piano di proiezione in un circolo uguale, avente per diametro la proiezione R_1S_1 di RS

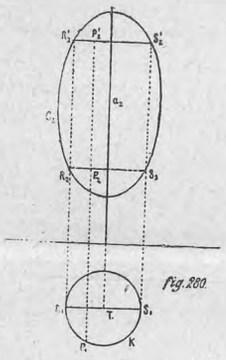
e su tale circolo proiezione si trovano le prime proiezioni dei punti di Σ appartenenti al cerchio parallelo obiettivo ed aventi P_2 come seconda proiezione; le prime proiezioni dei nominati punti sono dunque le intersezioni del circolo del quadro colla perpendicolare per P_2 ad l.


fig. 279.

Scaturisce di qui la condizione per l'esistenza di punti di Σ aventi come seconda proiezione P_2; occorre che P_2 sia interno ad un segmento finito parallelo ad l, avente gli estremi sulla curva C_2. Si vede così, a seconda della forma di C_2, quali sono le regioni del secondo piano di proiezione su cui si trovano le seconde proiezioni dei punti di Σ e quante volte vengono ricoperte tali regioni dalle nominate proiezioni.

Problema 2.° — *Determinare (ove esistano) i punti della superficie* Σ *che hanno una data prima proiezione* P_1.

Si userà la costruzione inversa della precedente. Si descriva il cerchio K di centro T_1 (traccia dell'asse a) che passa per P_1; esso è la prima proiezione di ogni circolo parallelo passante per un punto obbiettivo di P_1; la seconda proiezione di un tale circolo è una corda di C_2 parallela ad l, simmetrica rispetto ad a_2 e di lunghezza uguale al diametro del circolo descritto (fig. 280).


fig. 280.

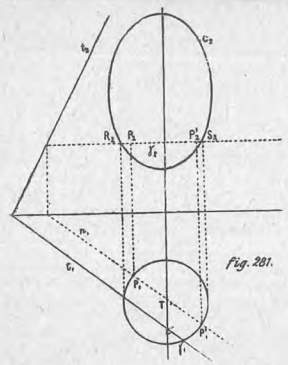
Si conduca dunque il diametro di K parallelo ad l e pei suoi punti estremi R_1, S_1 si conducano le perpendicolari ad l ad incontrare C_2; i punti d'incontro, ove esistano, si distribuiscono in coppie simmetriche rispetto ad a_2; se R_2S_2 è una tale coppia, il segmento R_2S_2 viene segato dalla perpendicolare per P_1 in un punto P_2 che è la seconda proiezione di un punto della superficie di rotazione Σ avente P_1 come prima proiezione.

Problema 3.° — *Determinare l'intersezione della superficie* Σ *con un piano secante.*

La costruzione di tale intersezione si ottiene per punti mediante un sistema di piani ausiliari secanti la superficie Σ; come piani ausiliari si assumono i paralleli o i meridiani.

Riferiamoci alla soluzione del problema in cui si assumono i paralleli (fig. 281).

Si descrivano con centro in T_1 tanti circoli concentrici di diametro minore della massima corda di C_2 parallela ad l, e in corrispondenza a ciascuno di essi, che è immagine (almeno) di un parallelo di Σ, si costruisca la corda di C_2 che di questo parallelo è la 2.ª proiezione; occorre segare il dato piano (t_1t_2) con ciascuno dei circoli paralleli così rappresentati sul piano.



Sia γ_1 la 1.ª proiezione e $\gamma_2 \equiv R_2S_2$ la corda di C_2, 2.ª proiezione di uno di questi circoli paralleli. Anzitutto si determini la rettta $r \equiv (r_1r_2)$ comune al piano (t_1t_2) ed al piano di γ parallelo al primo piano di proiezione; si ha che r_2 coincide con γ_2 mentre la 2.ª traccia di r è il punto r_2t_2 e quindi si costruisce subito la r_1 parallela a t_1.

Ove la r_1 incontri il circolo γ_1, i punti d'incontro (nella figura P_1, P_1') sono le prime proiezioni dei punti comuni al circolo γ e al piano (t_1t_2). Ripetendo l'operazione, considerando un numero assai grande di circoli paralleli di Σ vicini tra loro, si ottiene la costruzione per punti della 1.ª e quindi anche della 2.ª proiezione della linea sezione del piano (t_1t_2) colla superficie.

Problema 4.° — *Costruire il piano tangente alla superficie di rotazione Σ in un dato punto* P.

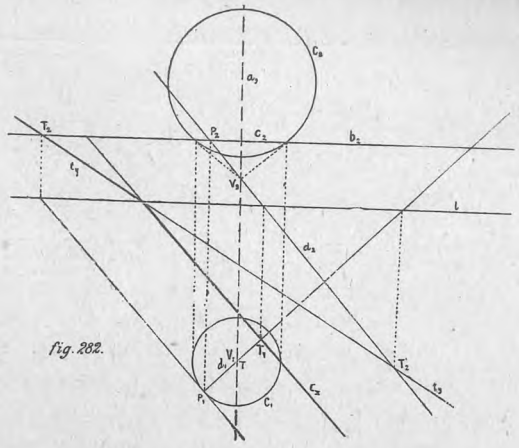
Sia $P \equiv (P_1P_2)$; determiniamo la 1.ª e 2.ª proiezione del parallelo C di Σ che passa per P. Immaginiamo di condurre in P la tangente al circolo parallelo C; la prima proiezione di tale tangente b è la retta b_1 tangente in P_1 al circolo C_1 1.ª proiezione del parallelo; la 2.ª proiezione b_2 di b è la retta per P_2 parallela alla linea di terra contenente la 2.ª proiezione C_2 del parallelo (fig. 282).

Negli estremi della corda di C_2, 2.ª proiezione di C, si conducano le tangenti alla 2.ª proiezione della linea meridiana principale; esse s'incontrano su a_2, 2.ª proiezione dell'asse a, in un punto V_2, 2.ª proiezione del vertice del cono circoscritto a Σ secondo il parallelo C.

Allora la retta $d_2 \equiv P_2V_2$ è la 2.ª proiezione della tangente d in P al meridiano di Σ che passa per esso; la 1.ª proiezione d_1 di tale tangente è il raggio P_1T_1 del circolo C_1; il piano (t_xt_y) determinato dalle rette

$$b = (b_1b_2), \quad d \equiv (d_1d_2),$$

è il piano tangente in P alla superficie Σ.



Problema 5.° — *Rappresentare l'iperboloide di rotazione Σ generato dalla rotazione di una retta data attorno ad un asse.*

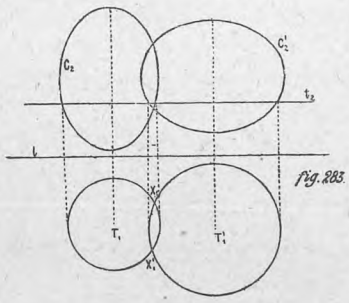
Si assuma il primo piano di proiezione perpendicolare all'asse a, il quale viene quindi rappresentato dalla sua traccia T nel primo piano di proiezione e dalla sua 2.ª proiezione a_2 (perpendicolare ad l). La sezione meridiana principale di Σ è una iperbole, di cui a è l'asse ideale. Data la generatrice $b \equiv (b_1b_2)$ dell'iperboloide Σ è facile determinare, mediante la 2.ª proiezione, l'iperbole meridiana principale costruendone quanti punti si vogliono. Invero si consideri un punto qualunque della b ed il parallelo che passa per esso; di tale cerchio si possono determinare i punti d'intersezione col piano meridiano principale (parallelo al secondo piano di proiezione); si hanno così due punti che appartengono all'iperbole meridiana. La costruzione della 2.ª proiezione dell'iperbole meridiana principale Σ (uguale all'obiettiva) può essere agevolata notando che tale iperbole ha come asse principale a e che l'angolo degli asintoti con a_2 è l'inclinazione della retta b su a.

Problema 6.° — *Determinare le intersezioni di una retta* $b \equiv (b_1b_2)$ *con una superficie di rotazione Σ.*

Se la b è incidente all'asse a di Σ, il problema si riduce a determinare le intersezioni di b colla sezione meridiana del piano ab. Escludiamo questo caso.

Si costruisca allora l'iperbole meridiana principale generata dalla rotazione di b attorno ad a, e di tale iperbole si determinino le intersezioni colla sezione meridiana principale di Σ; i punti d'intersezione dànno luogo a circoli paralleli che compongono l'intersezione di Σ coll'iperboloide; la retta b si appoggia in un punto ad ognuno di tali circoli, ed un tal punto è un punto comune a b e a Σ; esso si determina come intersezione della retta b col piano del circolo, che è il piano normale ad a pel punto.

Problema 7.° — *Determinare l'intersezione di due superficie di rotazione aventi gli assi paralleli.*



Si assumano come piani ausiliari i piani ortogonali agli assi ed in ciascuno si determinino le intersezioni dei circoli paralleli delle due superficie. Nella fig. 283 sono determinate le prime proiezioni X_1, X_1' dei punti comuni a due superficie di rotazione aventi gli assi paralleli, che si trovano in un piano perpendicolare ai due assi, la cui seconda traccia è t_2.

Esercizî:

1) determinare l'intersezione di due ellissoidi di rotazione cogli assi verticali i cui centri sono in uno stesso piano orizzontale.

2) Determinare l'intersezione di un ellissoide e di un paraboloide di rotazione cogli assi verticali.

3) Determinare la quartica intersezione di due coni di rivoluzione, diseguali, cogli assi verticali. La proiezione orizzontale della quartica è costituita da due *ovuli* di **Cartesio**. La proiezione verticale di essa è una parabola.

4) Un'ellisse posta in un piano inclinato di 45°, il cui asse minore sia orizzontale, ruoti attorno ad un asse verticale passante per un estremo dell'asse minore. Determinare il meridiano della superficie di rotazione così generata.

Si supponga che la proiezione orizzontale dell'ellisse sia un circolo.

La curva meridiana da determinare è allora una *lemniscata di* **Gerono**.

§ 63. — **Il toro**. — Abbiamo definito il *toro* (*circolare*) come la superficie generata dalla rotazione di un cerchio attorno ad una retta del suo piano non passante pel centro.

Il toro è una *superficie algebrica del 4.° ordine*; algebrica come ogni superficie generata dalla rotazione di una curva algebrica; del 4.° ordine, perchè ogni piano per l'asse (retta non appartenente alla superficie) lo incontra secondo due cerchi simmetrici componenti insieme una curva del 4.° ordine.

Il toro ha come linea doppia il cerchio immaginario costituente l'assoluto, cioè il cerchio all'infinito delle sfere. Tale proprietà si riconosce nel seguente modo:

In primo luogo il toro contiene il suddetto cerchio, che è luogo dei punti ciclici dei suoi circoli generatori, e non ha altra intersezione col piano all'infinito, che perciò può riguardarsi come tangente alla superficie in tutti i punti del cerchio stesso.

In secondo luogo ogni piano per l'asse sega il toro secondo una curva (composta di due circoli) che ha come punti doppî i nominati punti ciclici, sicchè in ognuno di questi punti vi sono due piani che possono riguardarsi come tangenti, cioè il piano considerato per l'asse e il piano all'infinito; dal che si conclude appunto che il cerchio assoluto è tutto costituito di punti doppî pel toro.

Relativamente alla *forma del toro* giova distinguere tre casi:

1) Il cerchio generatore sega l'asse. Allora i due punti di sezione sono doppî (isolati) per la superficie, la quale attraversa sè stessa in quei punti; si possono quindi distinguere due falde del toro: una esterna, generata dall'arco maggiore del cerchio mobile; l'altra interna, generata dall'arco minore.

2) Il cerchio generatore è tangente all'asse. Il punto di contatto è un punto doppio in cui il cono osculatore è spezzato nei due piani (immaginarî coniugati) per l'asse, tangenti al cerchio assoluto.

3) Il cerchio generatore non ha punti comuni coll'asse. La superficie non ha punti doppî reali e la sua forma è quella di un *anello circolare*.

A quest'ultimo caso ci riferiremo nel seguito.

Si possono distinguere sopra l'anello le due regioni di punti iperbolici ed ellittici divise dalla linea parabolica.

Il piano che contiene il centro del circolo generatore ed è perpendicolare all'asse, sega l'anello secondo due circoli paralleli, i cui diametri sono rappresentati nella fig. 284 da AA', BB'; questi due circoli sono il parallelo minimo, detto *cerchio di gola*, ed il massimo. Variando il piano secante, ortogonale all'asse, si ottengono in esso due circoli paralleli, di cui l'uno cresce e l'altro decresce, e finalmente si hanno due piani simmetrici rispetto al piano del cerchio di gola, la cui sezione coll'anello è costituita da un solo circolo parallelo; si trovano così due piani tangenti, ciascuno lungo un circolo, che separano i piani ortogonali all'asse secanti l'anello dai non secanti.

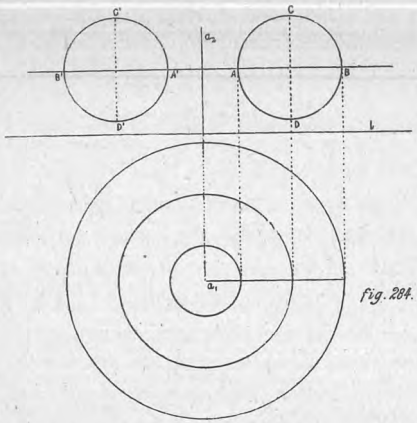


fig. 284.

I due circoli di contatto dei nominati piani tangenti costituiscono la linea parabolica dell'anello; essi separano, sulla superficie, la regione dei *punti iperbolici interni* al cilindro contenente i suddetti circoli e la regione dei punti ellittici *esterni* al medesimo.

Un piano sega l'anello secondo una quartica che da **Perseo** fu chiamata *spirica*, la quale ha come punti doppî i punti ciclici del piano stesso; la quartica riceve varie forme particolari a seconda della posizione del piano secante.

Così per esempio:

La sezione dell'anello con un piano tangente in un punto del cerchio di gola è una lemniscata.

Osservazione. — Nel caso particolare in cui il cerchio di gola sia eguale al cerchio generatore, la sezione del piano tangente in un punto del cerchio di gola è una *lemniscata* di **Bernouilli.**

La sezione dell'anello con un piano bitangente si compone di due circoli.

Infatti tale sezione è una quartica dotata di quattro punti doppî e perciò spezzata in due coniche passanti pei punti ciclici, cioè in due circoli.

Rappresentato l'anello secondo il metodo generale del § 61 si risolvano i seguenti

Esercizî:

1) Determinare la sezione dell'anello con un piano verticale che penetri nel cerchio di gola.

2) Determinare la lemniscata sezione dell'anello con un piano tangente in un punto del cerchio di gola.

3) Determinare la sezione dell'anello con un piano verticale, secante, esterno al cerchio di gola.

4) Determinare l'intersezione dell'anello con una sfera tangente in un punto P del cerchio di gola.

Si assuma il piano verticale parallelo al piano tangente all'anello nel punto P.

La proiezione della curva su di esso è una *lemniscata.*

La proiezione orizzontale è un *arco di parabola.*

5) Determinare l'ombra portata dall'anello sul piano orizzontale, essendo il punto luminoso all'infinito in una direzione qualsiasi.

6) Determinare l'intersezione dell'anello con un cilindro circolare retto passante per un suo cerchio meridiano.

CAPITOLO VIII.

Gli elicoidi.

§ 64. — **Proprietà fondamentali.** — Si chiamano, in generale, *elicoidi* le superficie generate dal movimento elicoidale di una linea invariabile di forma, cioè descritte da una linea soggetta simultaneamente ad un moto di rotazione attorno ad un asse (*asse dell' elicoide*) e ad un moto di traslazione parallela all' asse stesso, con velocità uniformi o in un determinato rapporto.

Appartengono a questa famiglia gli elicoidi rigati considerati nei §§ 19 e 21.

Vi rientrano pure, come casi particolari (elicoidi improprî), le superficie di rotazione ed i cilindri (superficie di traslazione) corrispondenti al caso in cui uno dei due moti che compongono il moto (elicoidale) della linea generatrice, sia nullo.

Nel caso generale i punti della linea generatrice descrivono tante eliche aventi il medesimo asse e il medesimo passo.

Gli elicoidi traggono le loro proprietà dal fatto che sono superficie sovrapponentisi a sè stesse per un moto continuo dello spazio, il quale è definito nella sua continuazione appena è dato per un tratto comunque piccolo, cioè nasce dalla ripetizione di un movimento infinitesimo.

Il suddetto movimento è elicoidale e trasporta una qualunque linea segante le eliche dell' elicoide in una *serie di linee generatrici* della superficie, tutte eguali fra loro.

Gli elicoidi sono le sole superficie dotate della suesposta proprietà fondamentale, ossia:

Ogni superficie che si sovrapponga a sè stessa per un movimento infinitesimo dello spazio, appartiene alla famiglia degli elicoidi.

Infatti un movimento infinitesimo dello spazio essendo definito soltanto dal passaggio da uno stato iniziale ad uno stato

finale, può sempre riguardarsi come un movimento elicoidale, oppure (in particolare) come una rotazione o una traslazione [1]; sicchè, considerando questi ultimi due casi come rientranti nel primo, la superficie si sovrappone a sè stessa per un moto elicoidale infinitesimo, e quindi anche pel moto elicoidale continuo generato dalla ripetizione di quello. In questo movimento una linea qualsiasi, tracciata sopra la superficie, descrive la superficie stessa, la quale è dunque un elicoide, *c. d. d.*

§ 65. — **Teorema di Bour.** — Si abbia un elicoide proprio. Consideriamo una qualunque serie di linee generatrici di esso e sieno g, g_1 due di queste linee. Sieno poi e, e' due eliche della superficie incontrate da g, g_1 risp. nei punti G, G_1 e G', G_1'.

Si può esprimere facilmente il rapporto degli archi (*omologhi*) GG_1, GG_1' delle due eliche, intercetti fra le due linee generatrici sopra nominate.

Basta osservare a tal fine che i suddetti archi sono fra loro come i giri delle rispettive eliche e quindi (designando con r, r' i raggi di esse e con h il loro passo) nel rapporto

$$\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}} : \sqrt{r'^2+\frac{h^2}{4\pi}}\,.$$

Il che invero si rende evidente immaginando sviluppati i cilindri che contengono le due eliche.

Fra le linee generatrici di un elicoide possiamo considerare in particolare le *traiettorie ortogonali delle sue eliche.* Se invero ci si muove sull'elicoide tenendo come direzione in ogni punto quella ortogonale all'elica che passa pel punto stesso, si descrive una curva ortogonale al fascio delle eliche la quale, per effetto del movimento elicoidale, viene trasportata in una serie di linee generatrici, tutte egualmente ortogonali al nominato fascio.

Or dunque avremo che « gli archi di due eliche d'un elicoide intercetti fra due traiettorie ortogonali del loro fascio sono fra loro nel rapporto

$$\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}} : \sqrt{r'^2+\frac{h^2}{4\pi^2}},$$

designando r, r' i raggi ed h il comune passo delle due eliche ».

---

[1] Cfr. cit. Lezioni di « Geometria proiettiva », § 91.

Queste premesse permettono di dimostrare l'importante

Teorema di **Bour.** — *Con una flessione senza estensione della superficie, ogni elicoide si può applicare sopra una superficie di rotazione, sovrapponendo una regione convenientemente limitata dell'elicoide ad una regione convenientemente limitata della superficie di rotazione.*

Limitiamo una regione dell'elicoide compresa fra due eliche e, e' e due traiettorie ortogonali g, g_1 del fascio delle eliche sufficientemente vicine.

Costruiamo poi in un piano una curva c, i cui punti corrispondano biunivocamente ai punti di g, per modo che la distanza di ogni punto P di c da una retta a del piano sia uguale a

$$\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}},$$

designando con r il raggio dell'elicoide che passa pel punto di g omologo a P, e per modo ancora che gli archi corrispondenti di c e g sieno eguali.

Si può ottenere della curva c una costruzione per punti approssimata quanto si vuole, riguardando la g come composta di piccolissimi tratti rettilinei rigidi articolati negli estremi ed eseguendo una flessione di questa spezzata, portandola ad es. in un piano per l'asse a dell'elicoide in modo che i vertici di essa abbiano da a le distanze volute.

Ciò posto consideriamo la superficie di rotazione attorno ad a, che ha come meridiano la c. Tra questa superficie (o meglio fra una porzione di essa compresa fra c ed un altro meridiano) e la regione dell'elicoide considerata, si può porre una corrispondenza biunivoca per modo che ai punti di c corrispondano i punti omologhi di g e agli archi dei circoli paralleli uscenti dai punti di c corrispondano archi eguali delle eliche uscenti dai punti corrispondenti di g. È chiaro come in tale corrispondenza alle linee generatrici dell'elicoide, traiettorie ortogonali delle eliche, corrispondano i meridiani della superficie di rotazione, poichè gli archi dei paralleli di questa, compresi fra i meridiani, sono proporzionali alle distanze dei punti di c dall'asse a.

Si ottiene dunque fra l'elicoide e la superficie di rotazione una corrispondenza, dove alle eliche e alle loro traiettorie ortogonali corrispondono risp. i paralleli ed i meridiani, per modo che gli archi corrispondenti per le linee omologhe dei due fasci sono eguali.

Siffatta corrispondenza è quindi tale che ad ogni arco di linea tracciato sopra una delle sue superficie corrisponde un arco eguale sull' altra; imperocchè ogni arco di linea su di essa può considerarsi formato di piccolissimi elementi rettilinei ognuno dei quali sia l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente come lati due elementi rettilinei appartenenti a due linee ortogonali uscenti da un punto sopra la superficie stessa.

La corrispondenza fra l' elicoide e la superficie di rotazione si può dunque considerare come nascente dall' applicazione dell' una superficie sull' altra; e così resta stabilito il teorema enunciato.

Osservazione. -- L' elicoide viene applicato sopra la superficie di rotazione costruita in modo che ogni giro d' elica si distende per intero sopra un circolo parallelo.

Proseguendo l' applicazione, l' elicoide ricopre infinite volte la superficie di rotazione.

§ 66. — **Rappresentazione degli elicoidi e in particolare del serpentino.** — La rappresentazione piana di un elicoide si riattacca a quanto abbiamo detto intorno alla rappresentazione dell' elica; e del resto abbiamo già considerato in proposito alcuni esempi concernenti gli elicoidi rigati.

Assunto l' asse dell' elicoide verticale, le proiezioni orizzontali delle sue eliche sono tanti circoli concentrici; le proiezioni verticali tante sinusoidi omologiche affini.

Per individuare l' elicoide si può dare la sua traccia nel quadro oppure il suo *profilo meridiano principale*, cioè la sezione di esso con un piano per l' asse, parallelo al secondo piano di proiezione.

Le altre sezioni piane orizzontali della superficie sono linee le cui prime proiezioni sono tutte eguali alla nominata curva traccia, e si ottengono da questa con una rotazione attorno al punto che è traccia dell' asse.

Queste poche avvertenze possono bastare pel caso generale.

A complemento di esse rimandiamo anzitutto agli esempî già dati degli elicoidi rigati (§§ 19 e 21) ed aggiungiamo come esempio nuovo un cenno della rappresentazione del *serpentino.*

Il serpentino è la superficie inviluppo di una sfera di raggio costante, il cui centro si muove sopra un' elica (*elica centrale*).

Si suppone il raggio della sfera minore di quello dell' elica.

Il serpentino può ritenersi generato dal movimento elicoidale

di un cerchio posto in un piano ortogonale all' elica e col centro sull' elica.

Data l' elica centrale ed il cerchio generatore del serpentino, la superficie è perfettamente individuata.

Rappresenteremo l' elica centrale e nel modo consueto, mediante le sue due proiezioni e_1, e_2 (§ 15) e daremo il cerchio generatore K che ha come centro la traccia T dell' elica stessa, mediante la sua 1.ª proiezione K_1. Questa è un' ellisse di centro T, il cui asse maggiore è perpendicolare al cerchio e_1 ed è un diametro del cerchio generatore K; l' asse minore di K_1 sta al maggiore nel rapporto dato dal coseno dell' inclinazione di K sul piano orizzontale, cioè dal seno della inclinazione sul piano stesso di una tangente all' elica (fig. 285).

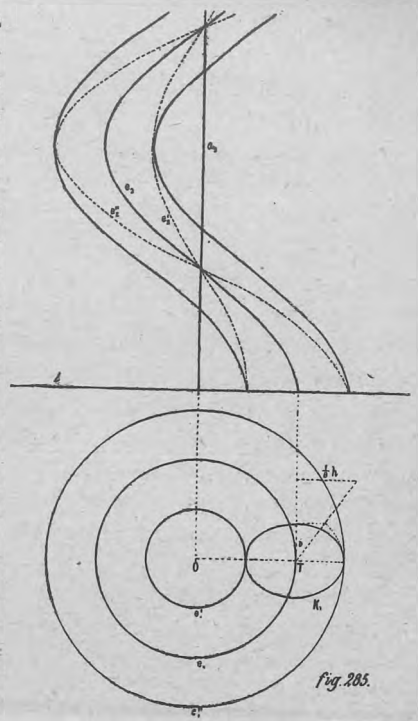


fig. 285.

Facendo rotare l' ellisse K_1 attorno al centro O del cerchio e_1 si ottengono tutte le proiezioni orizzontali dei cerchi generatori del serpentino. Esse riempiono l' anello compreso tra due circoli concentrici costituenti insieme il *contorno dell' ombra portata dal serpentino sul piano orizzontale*, ove si abbia un centro luminoso all' infinito nella direzione verticale.

Tutti i cerchi di centro O compresi nell' anello suddetto sono le 1.ª proiezioni delle eliche del serpentino; le 2.ª proiezioni di esse sono tante sinusoidi le quali si possono dedurre da e_2 con un' omologia affine ortogonale rispetto all' asse a_2 di essa, combinata con una traslazione parallela ad a_2.

I due cerchi di centro O che limitano il sopra nominato anello, sono le proiezioni orizzontali di due eliche costituenti insieme il contorno apparente del serpentino, veduto dal punto all' infinito della verticale.

Le 2.ª proiezioni dei cerchi generatori del serpentino sono

pure tante ellissi; i centri di queste si trovano sulla 2.ª proiezione e_2 dell'elica centrale; i loro assi maggiori sono perpendicolari ad e_2 ed eguali ai diametri dei cerchi generatori. Gli estremi dei suddetti assi maggiori descrivono quindi due *linee parallele* alla sinusoide e_2, le quali limitano la striscia entro cui cadono le 2.e proiezioni dei punti del serpentino, cioè compongono il *contorno dell' ombra portata dal serpentino sul piano verticale,* quando sia dato un punto luminoso all' infinito nella direzione ortogonale al detto piano.

Ciò che si è detto è sufficiente per risolvere i problemi fondamentali di costruzione relativi al serpentino, intorno a cui proporremo alcuni esercizî. Ma poichè si ricorre spesso con vantaggio alla considerazione delle tracce dei piani generatori, le costruzioni riesciranno semplificate dalla conoscenza dell' inviluppo di esse; e basterà limitarsi alle tracce orizzontali, poichè trattandosi di piani di cui è costante l' inclinazione sul piano orizzontale, per ciascuno di essi si costruirà immediatamente la 2.ª traccia, data la 1.ª.

Ora si ha in proposito il seguente

Teorema. — *I piedi delle perpendicolari condotte dal punto* O, *traccia dell' asse, sopra le traccie orizzontali dei piani dei circoli generatori del serpentino, descrivono attorno ad* O *una spirale di* **Archimede.**

Questa proprietà si dimostra osservando che la nominata curva è la traccia di un elicoide rigato a cono direttore, le cui generatrici sono le intersezioni dei piani dei cerchi generatori del serpentino coi piani ortogonali ad essi per l' asse (Cfr. § 54).

Dopo ciò proponiamo intorno al serpentino e agli elicoidi in genere i seguenti esercizî:

1) Determinare la traccia del serpentino nel piano orizzontale.

Per ciò basta determinare il luogo delle tracce (nel primo piano) delle eliche del serpentino.

2) Determinare il profilo meridiano principale del serpentino.

Esso è costituito dalle due curve simmetriche rispetto alla 2.ª proiezione a_2 dell' asse, che costituisce il luogo dei punti più distanti da a_2 appartenenti alle 1.e proiezioni delle eliche del serpentino.

3) Determinare l' intersezione del serpentino con un piano qualunque.

Si possono assumere come piani ausiliarî i piani orizzontali, oppure i piani dei circoli generatori.

4) Determinare l' intersezione del serpentino con una sfera qualunque.

5) Determinare l' intersezione di due serpentini collo stesso asse, le cui eliche centrali abbiano il medesimo passo.

La curva (ove esista) si compone di eliche.

6) Determinare il profilo meridiano principale dell' elicoide la cui traccia nel piano orizzontale (ortogonale all' asse) è un cerchio.

7) Determinare la traccia orizzontale dell' elicoide il cui profilo meridiano si compone di circoli, i centri dei quali sono sopra l' asse e si succedono a distanze costanti.

8) Costruire la curva meridiana di una superficie di rotazione sopra cui possa applicarsi un dato elicoide gobbo a piano direttore.

Una tale curva è una *catenaria.*

Si può costruire per punti come è indicato al § 65, notando che sopra il nostro elicoide le traiettorie ortogonali delle eliche sono le generatrici.

CAPITOLO IX.

Dei monoidi e della superficie cubica.

§ 67. — **I monoidi e la loro rappresentazione piana.** — Dopo avere studiato alcune classi di superficie particolari, in relazione a talune più notevoli generazioni, rivolgiamoci a considerare brevemente qualche superficie algebrica, che dalla sua stessa natura algebrica trae le proprietà fondamentali. E scegliamo all'uopo gli esempî in cui si manifesta più utile la rappresentazione piana della superficie.

Si dicono *monoidi* le superficie algebriche d'ordine n (>2) dotate di un punto $(n-1)$-plo.

Le quadriche ($n=2$) si possono pure riguardare come particolari superficie di questa famiglia.

Se F è un monoide d'ordine n, ed O il suo punto $(n-1)$-plo, conviene rappresentare F sul piano mediante una proiezione centrale fatta da O. Questa rappresentazione ha invero la notevole proprietà di essere *biunivoca*, cioè di stabilire una corrispondenza in cui, ad ogni punto generico A di F corrisponde *un* punto (immagine) A' del piano rappresentativo π, e viceversa ad ogni punto A' di π corrisponde *un* punto (obiettivo) A di F, cioè *la* intersezione che il raggio OA' ha con F, fuori del punto $(n-1)$-plo O.

Le formule della corrispondenza essendo, per la natura della costruzione, algebriche, saranno, stante la univocità, razionali, in ambo i sensi; cioè la corrispondenza fra F e π sarà *birazionale*.

Dunque, ponendo che F sia rappresentata dall'equazione

$$f(xyz)=o$$

e designando con u, v le coordinate dei punti del piano π, si avranno relazioni del tipo

$$x = \varphi_1 (uv), \qquad y = \varphi_2 (uv), \qquad z = \varphi_3 (uv),$$

che unite alla $f(xyz) = o$, potranno essere invertite ottenendo:

$$u = \psi_1 (xyz), \qquad v = \psi_2 (xyz);$$

le φ e le ψ rappresentano qui delle funzioni razionali.

Tali formule del resto hanno una semplicissima espressione nel caso (a cui ci si può sempre ridurre con una omografia spaziale) in cui il punto $(n-1)$-plo di F, sia il punto improprio dell'asse z. Perciocchè allora la equazione f è lineare in z, ossia ha la forma

$$f(xyz) = f_1 (xy) \cdot z + f_2 (xy) = o,$$

sicchè basta porre

$$x = u, \; y = v, \; z = -\frac{f_2 (uv)}{f_1 (uv)} \qquad (u = x, \; v = y),$$

per ottenere la rappresentazione piana sopra indicata.

Ma anche prescindendo dalla sua effettiva espressione analitica, ed in forza del suo carattere birazionale, la rappresentazione piana di un monoide F d'ordine n (ottenuta per proiezione dal punto $[n-1]$-plo) permette di studiare le curve tracciate sopra la superficie, e ciò analogamente a quello che abbiam visto nel caso particolare della rappresentazione piana delle quadriche.

Conviene anzitutto mettere in luce i *punti fondamentali* o eccezionali della rappresentazione.

Su F non vi è altro punto fondamentale che il centro O di proiezione. Eseguire la proiezione di O da O stesso non ha alcun senso, ma seguendo la legge della continuità possiamo cercare che cosa corrisponda al punto O sul piano π nel modo seguente:

I punti infinitamente vicini ad O, su F, sono proiettati da O secondo le rette osculatrici (con contatto n-punto) generatrici d'un cono d'odine $n-1$ col vertice O. Questo cono sega il quadro π, secondo una curva (*fondamentale*) C_{n-1} d'ordine $n-1$, che può riguardarsi come corrispondente al punto O.

Ora la C_{n-1} e la traccia C_n di F nel piano π, avranno (mettendoci nel caso generale) $n(n-1)$ intersezioni; ed ognuno di questi punti verrà proiettato da O secondo una retta che,

avendo in O un contatto n-punto e un'ulteriore intersezione con F, apparterrà interamente alla superficie F.

Vi sono dunque, per O, $n(n-1)$ rette giacenti sul monoide (supposto *generale*) che corrispondono ad altrettanti *punti fondamentali del piano* π *situati sulla curva fondamentale* C_{n-1}.

È poi chiaro che a π non appartengono altri punti fondamentali, giacchè un punto siffatto deve esser traccia di una retta per O giacente su F e quindi appartenere alla C_{n-1}, traccia del cono osculatore in O, ed in pari tempo alla C_n.

Osservazione — In casi particolari le $n(n-1)$ rette del monoide F per O possono diventare in parte infinitamente vicine fra loro, o venir surrogate da un minor numero di *rette multiple* per la superficie. Così se p. e. la C_{n-1} e la C_n avessero comune un punto doppio A (che assorbe 4 intersezioni delle due curve), la retta OA riescirebbe doppia per il monoide ecc.

Noi lasceremo da parte l'esame di questi casi particolari. Supporremo dunque di riferirci a *monoidi generali* con $n(n-1)$ rette distinte pel punto $(n-1)$-plo.

Le proprietà caratteristiche della rappresentazione piana indicata del monoide sono contenute nel seguente

Teorema. — *Le immagini delle sezioni piane del monoide sono le curve d'ordine* n *passanti per gli* n (n − 1) *punti fondamentali.*

La dimostrazione del teorema è ovvia.

Anzitutto si vede che ogni sezione piana C di F, d'ordine n, ha come proiezione C', da O, una curva dello stesso ordine. In secondo luogo, siccome C incontra ciascuna delle $n(n-1)$ rette di F per O, C' passerà per i punti fondamentali, tracce di queste rette. Infine si può notare che le curve d'ordine n, d'un piano, le quali hanno colla curva fissa C_{n-1} le medesime $n(n-1)$ intersezioni della traccia C_n di F, compongono un sistema lineare ∞^3, cioè riescono determinate dalla condizione di passare per 3 punti assegnati nel piano, e perciò ognuna di esse può riguardarsi come la proiezione di una ben individuata sezione piana di F.

L'asserzione che le suddette curve formino un sistema lineare ∞^3, si giustifica osservando che esse possono rappresentarsi coll'equazione.

$$(ax + by + c) \; \varphi_{n-1} + d\varphi_n = o,$$

dove

$$\varphi_{n-1} = o, \qquad \varphi_n = o,$$

sieno risp. le equazioni di C_{n-1}, C_n, ed a, b, c, d delle costanti (contenute omogeneamente nella nostra equazione).

Osservazione. — Le immagini delle sezioni piane di F hanno a due a due n^2 intersezioni, di cui $n(n-1)$ cadono nei punti fondamentali; le rimanenti n (*intersezioni variabili*) sono le immagini degli n punti segati da F sulla retta comune ai piani delle due curve obiettive.

§ 68. — **La superficie cubica con un punto doppio.** — Il teorema stabilito permette di studiare agevolmente, come abbiamo fatto per le quadriche al § 42, le curve tracciate sopra un monoide d'ordine n.

Ci riferiremo come esempio, al caso $n = 3$.

Considereremo dunque la rappresentazione piana di una superficie cubica F_3 dotata di un punto doppio; rappresentazione ottenuta per proiezione dal suddetto punto doppio.

Quì le immagini delle sezioni piane sono cubiche passanti per i 6 punti fondamentali, posti sopra una conica.

Nel *caso generale* i detti punti saranno distinti, e la conica per essi irriducibile. Ci metteremo in queste ipotesi.

Proponiamoci di vedere anzitutto *quante rette appartengono alla superficie* F_3.

Anzitutto si trovano le 6 *rette* passanti pel punto doppio O, e rappresentate dai punti fondamentali del quadro.

Ogni altra retta di F_3, non passante per O, ha come proiezione una retta del quadro, la quale deve avere *una* intersezione *variabile* colle cubiche immagini delle sezioni piane di F_3, e perciò deve contenere due punti fondamentali. Ora si hanno $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ *rette* del quadro che congiungono a due a due i 6 punti fondamentali; a queste rette corrispondono sopra F_3 altrettante curve segate dai piani in un punto, cioè altrettante rette.

In tutto si hanno dunque 21 *rette sopra la superficie cubica con punto doppio.*

Osservazione. — Abbiamo veduto nel § 55 che la superficie cubica generale (la quale è priva di punti doppî) contiene 27 rette. Risulta dunque per la presenza di un punto doppio la diminuzione di 6 nel numero delle rette; più tardi spiegheremo la ragione di questa diminuzione.

Passiamo ora a vedere come si possano determinare in generale tutte le *curve irriducibili* C_m *d'ordine* $m\,(>1)$ *appartenenti alla nostra* F_3.

Le immagini delle C_m, sul quadro, saranno curve irriducibili C'_m dello stesso ordine, oppure curve d'ordine inferiore, secondochè corrispondono a C_m non passanti per O, o invece a C_m contenenti O.

Le C'_m immagini di curve C_m di F_3 non passanti per O, dovendo avere m intersezioni *variabili* colle cubiche per i 6 punti fondamentali, avranno colle suddette cubiche $2m$ intersezioni fisse cadenti nei nominati punti fondamentali.

Perciò designando con

$$h_1,\ h_2,\ \ldots .\ h_6 \quad (0 \leq h_i \leq m-1)$$

le molteplicità di una C'_m in questi punti, si avrà la relazione

$$\sum_1^6 h_i = 2m.$$

La discussione di questa equazione di analisi indeterminata, permetterà di assegnare tutte le curve C'_m del quadro che sono immagini di curve d'ordine m sopra F_3, non passanti pel centro di proiezione, avuto riguardo però alla *effettiva esistenza* e alla *irriducibilità* delle C'_m.

In modo analogo si troveranno le curve di F_3 passanti pel punto doppio. Le curve C_m passanti un certo numero $s\ (\geq 1)$ di volte per il punto doppio O di F_3, avranno come proiezioni sul quadro curve C'_{m-s} d'ordine $m-s$, le cui molteplicità h_i nei punti fondamentali soddisferanno all'equazione

$$\sum_1^6 h_i = 2m - 3s.$$

Ciò risulta ancora dalla condizione che tali C'_{m-s} abbiamo m intersezioni *variabili* colle cubiche passanti per i 6 punti fondamentali.

Come esercizio applicheremo le cose dette al caso $m = 3$.

Si tratta dunque di ricercare tutti i *sistemi di cubiche appartenenti alla superficie* F_3.

Perciò occorre discutere in generale l'equazione di analisi indeterminata

$$\sum_1^6 h_i = 6 - 3s,$$

con $s = 0$, o $s > 0$.

Anzitutto ponendo $s = 0$, si avranno le soluzioni:

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = 1,$$
$$h_1 = 2, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = 1,$$

e le analoghe ottenute permutando le h.

E non sono possibili altre soluzioni corrispondenti a cubiche irriducibili, giacchè non possono aversi in tal caso due punti doppî, nè un punto triplo.

La prima soluzione ottenuta corrisponde al sistema delle cubiche sezioni piane di F_3.

Le altre corrispondono a $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ *sistemi di cubiche gobbe appartenenti ad* F_3 *e non passanti pel punto doppio*; ciascun sistema è rappresentato sul quadro da un *sistema lineare* ∞^2 di cubiche.

Se invece si pone $s = 1$, la nostra equazione fondamentale $\left(\sum_1^6 h_i = 3\right)$ dà le soluzioni

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1, \quad h_4 = h_5 = h_6 = 0,$$

e le analoghe ottenute permutando le h.

Si ottengono così $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 20$ *sistemi di cubiche gobbe sopra* F_3 *passanti pel punto doppio;* ciascuno è rappresentato sul quadro da un *sistema lineare* ∞^2 di coniche (passanti per tre fra i punti fondamentali).

Finalmente se si pone $s = 2$, si ottiene $(h_i = 0)$ il *sistema delle cubiche sezioni piane di* F_3 *pel punto doppio,* aventi come immagini le rette del quadro.

§ 69. — **La superficie di Steiner.** — Come secondo esempio notevole nella teoria dei monoidi, consideriamo la *superficie (irriducibile) del* 4.° *ordine dotata di tre rette doppie concorrenti in un punto triplo*; questa superficie è conosciuta col nome di *superficie romana di* **Steiner.**

L'effettiva esistenza di una tale superficie risulta facilmente scrivendo l'equazione di essa.

Riferendoci ad un sistema di coordinate cartesiane x, y, z è agevole esprimere le condizioni perchè una superficie del 4° ordine

$$f_4(xyz) = o,$$

passi doppiamente per gli assi x, y, z, e queste portano come conseguenza che l'origine sia un punto triplo.

Intanto se l'asse x deve essere una retta doppia per la $f_4 = o$, in ogni punto $(x\,o\,o)$ deve aversi

$$f_4 = o, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial z} = o.$$

Quindi devono mancare in f_4 i termini indipendenti y, z, ed i termini di 1° grado in y o in z.

Tenendo conto delle analoghe condizioni perchè gli assi y e z sieno rette doppie di $f_4 = o$, si trova dunque che il polinomio f_4 deve avere la forma

$$f_4 = ax^3yz + by^3xz + cz^3xy + dxyz.$$

Appare di qui che:

Esiste un sistema lineare ∞^3 *di superficie del* 4° *ordine passanti doppiamente per tre rette concorrenti in un punto, e non giacenti in un piano, e queste superficie hanno come punto triplo il punto comune alle tre rette doppie.*

Osservazione. — Se le tre rette doppie fossero date in un piano, la superficie necessariamente si spezzerebbe, distaccandosi il piano delle tre rette.

Studiamo ora la rappresentazione piana d'una superficie di **Steiner,** ottenuta per proiezione dal punto triplo O.

Il cono osculatore in O è dato dal triedro che ha come spigoli le rette doppie. Le immagini delle sezioni piane sono quartiche C'_4 aventi comuni tre punti doppî fondamentali A, B, C, cioè le tracce delle nominate rette doppie.

Trasformeremo ora la rappresentazione ottenuta facendo uso di una *trasformazione quadratica.*

Si può porre nel piano una siffatta trasformazione, operando nel seguente modo:

Si riferiscano proiettivamente i fasci di raggi A, B a due altri fasci A', B', in modo che al raggio $A'B'$ corrispondano risp. per A e B, i raggi AC e BC. Ad ogni punto P' (fuori della $A'B'$) riguardato come comune ai raggi $A'P'$, $B'P'$ facciamo corrispondere il punto P intersezione dei raggi omologhi per A, B.

Nasce così una corrispondenza biunivoca Ω_1 del piano (con eccezione), nella quale alle rette del piano corrispondono le coniche pei punti fondamentali A, B, C [1].

---

[1] Un esempio di tale corrispondenza si ottiene considerando i punti coniugati rispetto a due coniche (o a due polarità) aventi il triangolo ABC come triangolo coniugato comune. Cfr. le « Lezioni di Geometria proiettiva » § 8.

La corrispondenza inversa, tra P, P' ($\Omega \equiv \Omega_1^{-1}$) fa pure corrispondere alle rette delle coniche, e precisamente le coniche passanti per A',B' e per il punto C' intersezione dei due raggi risp. per A', B' omologhi ad A, B. Ai punti fondamentali A, B, C corrispondono risp. le rette $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, e ai punti (non fondamentali) delle rette (fondamentali) BC, AC, AB, corrispondono risp. i punti A', B' e C'.

Se ad un punto della superficie di **Steiner**, F_4, si fa corrispondere quel punto del piano π che è l'omologo della sua immagine nella trasformazione Ω, nasce ora una nuova *rappresentazione* biunivoca (e birazionale) della superficie sul quadro [1].

In questa nuova rappresentazione, alle sezioni piane della F_4, corrisponderanno sul quadro le curve trasformate delle C'_4 in Ω.

Ora le C_4' hanno come punti doppî i punti A, B, C e perciò segano le coniche per questi punti fondamentali in $(2 \cdot 4 - 6 =)$ 2 punti variabili. Siccome la Ω trasforma le suddette coniche nelle rette del piano, così le curve trasformate delle C'_4 saranno segate dalle rette del quadro in due punti e quindi saranno coniche.

Si ottiene dunque una rappresentazione piana della superficie di **Steiner** *dove alle sezioni piane della superficie corrispondono* ∞^3 *coniche* (componenti un sistema lineare). *Queste coniche non hanno punti fissi comuni*, giacchè le intersezioni variabili di due di esse debbono essere 4 come sono 4 i punti comuni alla superficie e ad una retta (cioè i punti comuni a due sezioni piane).

Osservazione. — Non vi sono qui punti fondamentali sul quadro. Ad ogni punto del quadro corrisponde *sempre* un sol punto della superficie. Viceversa ad ogni punto di questa corrisponde *un* punto del quadro, fatta eccezione per i punti delle rette doppie a ciascuno dei quali si può vedere che corrispondono *due* punti su una delle rette $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$, e pel punto triplo a cui corrispondono i *tre* punti A' B', C'.

La rappresentazione piana ottenuta per la superficie di **Steiner** mostra che:

Alla superficie appartengono ∞^2 *coniche, rappresentate dalle rette del quadro.*

---

[1] La parola rappresentazione è intesa qui in un senso più generale, giacchè si tratta di una corrispondenza ottenuta con una costruzione, che non è più una semplice proiezione come nei metodi proprî della Geometria descrittiva.

Imperocchè le curve che corrispondono sopra la superficie alle rette del piano, avranno due intersezioni con ogni piano, e perciò saranno coniche.

Si vede poi che sussiste l'importante

Teorema. — *La sezione della superficie di* **Steiner** *con un piano tangente si compone di due coniche per questo punto (secantisi inoltre nei tre punti sezioni del piano colle rette doppie).*

Infatti ad una tale sezione deve corrispondere sul quadro una conica dotata di un punto doppio, spezzata quindi in due rette.

Osservazione — L'importanza del teorema stabilito sta in ciò che esso fornisce una proprietà caratteristica della superficie di **Steiner**.

Infatti il **Kronecker** ha enunciato e il **Castelnuovo** ha dimostrato che:

Una superficie algebrica irriducibile non rigata, per la quale la sezione di ogni piano tangente sia una curva riducibile, è una superficie di **Steiner** [1].

Termineremo questo breve studio della superficie di **Steiner**, determinando la classe della superficie stessa riguardata come l'inviluppo dei suoi piani tangenti:

La superficie di **Steiner** *è di classe* 3.

Infatti nel fascio delle sue sezioni piane C_4 per una retta, vi sono tre sezioni (dotate di un punto doppio, semplice per la superficie e) spezzate in due coniche; queste si trovano considerando il fascio delle coniche del quadro (immagini delle suddette C_4) che passano pei 4 punti (base) corrispondenti alle intersezioni della retta colla superficie, nel quale fascio vi sono appunto tre coniche spezzate ciascuna in due rette, cioè le tre coppie di lati opposti del quadrangolo completo determinato dai 4 punti base.

Osservazione. — La superficie correlativa di una superficie di **Steiner** è dunque una superficie cubica. Si tratta però di una superficie cubica particolare, che, si può dimostrare, essere dotata di 4 punti doppî.

§ 70. — **La superficie cubica generale**. — Rivolgiamoci ora a studiare brevemente la superficie cubica generale senza punti doppî.

---

[1] Cfr. Castelnuovo « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ». Serie V., Vol. 3, pag. 59, (1894).

Rappresentiamo sul piano una superficie cubica F_3, assumendo il centro di proiezione O in un punto (semplice) di essa.

Ogni punto del quadro è in tal caso l'immagine di *due* punti di F_3, i quali possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginarî coniugati.

I punti del quadro che sono immagini di un sol punto di F_3, (ossia di due coincidenti) costituiscono la immagine del *contorno apparente* della superficie veduta da O.

Tale immagine è una curva C, la quale separa i punti del quadro che sono proiezioni di punti reali di F_3 da quelli che sono proiezioni di punti immaginarî.

Siccome in ogni piano per O vi sono 4 tangenti alla cubica sezione di F_3 (§ 5), così il cono circoscritto ad F_3 da O è del 4.° ordine e perciò l'*immagine* C *del contorno apparente di* F_3 *è una quartica* ($C \equiv C_4$) [1].

Le tangenti alla C_4 *sono le tracce dei piani tangenti ad* F_3 *pel centro di proiezione.*

La quartica C_4 *non ha punti doppî, se è priva di punti doppî la superficie cubica* F_3, *ed il centro* O *non appartiene ad una retta di essa.*

Infatti se la C_4 ha un punto doppio A, ed il raggio OA non appartiene ad F_3 e non è quindi bitangente ad essa, ogni cubica sezione di F_3 con un piano per OA ha un punto doppio su OA, il quale è doppio per la superficie.

Supponendo appunto che la F_3 non abbia punti doppî ed O non appartenga ad una retta di essa, potremo ora *determinare le rette giacenti sulla superficie cubica deducendole dalle tangenti doppie della quartica* C_4.

Osserviamo anzitutto che il piano tangente ad F_3 nel punto O, ha come traccia sul quadro una tangente doppia di C_4, i cui punti di contatto sono dati dalle due tangenti principali della superficie in O.

Ogni altra delle 28 tangenti doppie della C_4 (§ 7) è la traccia di un piano per O bitangente alla superficie, la cui sezione (cubica con due punti doppî) si spezza dunque in una conica (per O) e in una retta.

---

[1] Dalla discussione delle varie forme della quartica piana C_4 si può desumere lo studio della forma della superficie cubica F_3. Cfr. ZEUTHEN « Mathematische Annalen » Bd. VII, VIII.

Concludiamo così che:

La superficie cubica generale contiene 27 *rette (reali o no)* [1].

Questo risultato è stato già ottenuto per altra strada nel § 55.

OSSERVAZIONE. — Se la F_3 ha un punto doppio, supponendo sempre che O non stia sopra una retta della superficie, l'immagine C_4 del contorno apparente avrà *un* punto doppio.

Il numero delle tangenti doppie della C_4 si riduce quindi di 6 (§ 7).

E perciò diminuisce di 6 il numero delle rette contenute dalla superficie cubica, d'accordo col prec. § 69.

§ 71. — **Rappresentazione piana di Schläfly della superficie cubica.** — Le 27 rette di una superficie cubica generale F_3 non possono essere tutte a due a due incidenti, perchè più di tre di esse non possono stare in un piano, e tre di esse non giacenti in un piano non possono passare per un punto senza che questo sia doppio per la F_3.

Si possono dunque considerare sulla F_3 due rette sghembe; sieno p. e. a, b.

Allora si ottiene una rappresentazione biunivoca (birazionale) della F_3 sopra un piano π, colla seguente costruzione:

Per ogni punto P si conduca la retta p incidente ad a, b, e si prenda come immagine, P', di P, la traccia di p su π.

Ad ogni punto generico P' corrisponde così, sopra F_3, un punto (obiettivo) determinato, cioè l'ulteriore intersezione (fuori di a, b) della F_3 colla retta per P' incidente ad a, b.

Questa rappresentazione piana di **Schläfly**, di una superficie cubica, benchè più non rientri nei metodi di proiezione considerati innanzi, permette tuttavia di studiare le proprietà delle superficie e segnatamente i sistemi di curve algebriche tracciati sopra di essa.

La facilità che s'incontra in tale studio dipende dalla biunivocità (ciò che stante il carattere algebrico della costruzione equivale alla birazionalità) della rappresentazione stabilita.

Cominciamo a riconoscere quali sono, su π, le immagini delle sezioni piane di F_3.

---

[1] La configurazione di queste rette è in stretta relazione con quella delle 28 tangenti doppie della quartica piana C_4. Cfr. G. F. GEISER « Mathematische Annalen » Bd. I.

A tal fine dobbiamo determinare la traccia (su π) della rigata determinata dalle due direttrici rettilinee a, b e da una cubica C_3, sezione piana di F_3.

Siccome la C_3 ha un punto comune con a e uno con b, il grado della suddetta rigata sarà $2 \cdot 3 - 2 = 4$ (§ 55).

Dunque *le immagini delle cubiche sezioni piane di* F_3 *sono quartiche* C_4'.

Siccome poi la rigata considerata innanzi ha le rette a, b come rette doppie, così *le* C_4' *hanno come punti doppî le tracce* A, B *delle due rette fondamentali* a, b.

Queste tracce sono due *punti fondamentali,* a ciascuno dei quali corrisponde la retta a o b di cui esso è la traccia.

Oltre ad A, B *le* C_4' *hanno comuni altri* 5 *punti fissi, fondamentali, che sono le tracce di altrettante rette della superficie cubica incidenti ad* a, b.

Infatti due C_4' hanno fuori di A, B, $16 - 8 = 8$ intersezioni, e soltanto 3 di queste possono essere variabili, rappresentando i tre punti comuni alle due cubiche, sezioni piane di F_3, che corrispondono alle suddette C_4'; vi sono dunque 5 punti comuni a due C_4' ciascuno dei quali non rappresenta più un punto determinato di F_3, è quindi un punto (fondamentale) traccia di una retta, incidente ad a, b, che giace su F_3.

Come nel § prec., si ponga nel piano π una trasformazione quadratica Ω, scegliendo come punti fondamentali per la trasformazione, i due punti A, B, doppî per le C_4' ed uno D dei 5 punti semplici che esse hanno in comune.

Per effetto di tale trasformazione, alle coniche del piano per i punti fondamentali A, B, C corrisponderanno le rette del piano stesso.

Se ora ad ogni punto della superficie F_3 si fa corrispondere sul quadro π, quel punto che corrisponde in Ω alla sua immagine, si ottiene una *nuova rappresentazione* piana biunivoca (e birazionale) della superficie.

Cerchiamo quali sono in questa nuova rappresentazione le curve corrispondenti alle sezioni piane di F_3. Occorre perciò determinare le trasformate in Ω delle curve C_4.

Ora poichè queste segano le coniche per A, B, D in $2 \cdot 4 - (2 + 2 + 1) = 3$ punti variabili (fuori di A, B, D), così le curve che ad esse corrispondono in Ω, saranno segate dalle rette del piano in 3 punti, e perciò saranno curve del 3° ordine.

Queste cubiche avranno poi a comune 6 punti semplici, cioè i 4 punti che corrispondono ai punti semplici comuni alle C_4' all'infuori di D, e i 2 punti A, B i quali vengono a corrispondere risp. alle intersezioni delle C_4' colle rette BD, AD, (fuori di D, B, A).

Pertanto si ottiene una *rappresentazione piana della superficie cubica, dove le immagini delle sezioni piane di* F_3 *sono le cubiche* C_3 *passanti per* 6 *punti semplici (fondamentali).*

Osservazione. — Ad ognuno dei 6 punti fondamentali corrisponde sopra F_3 una retta. Ciò si può riconoscere, sia seguendo la costruzione che ci ha condotto alla rappresentazione che abbiamo in vista, sia osservando che l'intorno di un tal punto fondamentale P ha *un* punto sopra ogni C_3', sicchè il luogo dei punti che corrispondono ai punti del piano infinitamente vicini a P sarà una linea di F_3 segata dai piani in un punto, cioè una retta.

Se i 6 punti fondamentali comuni alla C_3' si trovano sopra una conica, è facile vedere come a questa curva (fondamentale) non avente intersezioni variabili colla C_3' corrisponda un punto doppio della superficie F_3, le sezioni piane di F_3 pel punto doppio venendo rappresentate dalle rette del quadro (che prese insieme alla suddetta conica costituiscono appunto delle C_3').

Si ricade in tal caso nella rappresentazione della F_3 ottenuta per proiezione dal punto doppio (§ 69).

Ritornando al caso generale, vediamo che le 21 rette della superficie cubica, all'infuori delle 6, rappresentate dai punti fondamentali, daranno come immagini sul quadro:

a) le 15 rette congiungenti a due a due i nominati 6 punti;

b) le 6 coniche determinate dai punti stessi presi a 5 a 5.

Infatti ciascuna di queste curve ha una sola intersezione variabile colle immagini C_3' delle sezioni piane di F_3.

Proponiamo quindi come esercizio la risoluzione dei seguenti problemi, concernenti la superficie cubica generale:

1) Determinare quante rette della superficie sono incidenti ad una di esse.

2) Determinare quanti triangoli si possono formare colle 27 rette della superficie.

3) Determinare quante sestuple di rette, a due a due sghembe, si possono formare colle 27 rette suddette.

4) Determinare tutti i sistemi di coniche o di cubiche gobbe appartenenti alla superficie.

§ 72. — **Esercizî sulla rappresentazione piana di alcune superficie del 4° ordine.** — Il metodo che ci ha condotti alla rappresentazione birazionale della superficie cubica generale sopra un piano, permette di ottenere una analoga rappresentazione piana di altre superficie algebriche. E noi proponiamo in proposito i seguenti esercizî:

Rappresentare birazionalmente sopra un piano:

1) la superficie rigata del 4° ordine dotata di una cubica gobba doppia;

2) la superficie del 4° ordine contenente una retta doppia ed una retta semplice, sghembe fra loro;

3) la superficie del 4° ordine contenente una conica doppia ed una semplice (avente colla conica un punto comune).

Si adopri nel 1° caso il sistema delle rette incidenti alla cubica doppia e ad una generatrice della rigata ecc.

In ciascun caso si determinino, nella rappresentazione ottenuta, le immagini delle sezioni piane.

INDICE

INDICE

PREFAZIONE . . . . . Pag. I
ELENCO DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE NOTEVOLI CONSIDERATE IN QUESTE LEZIONI. . . . . » VII

PARTE PRIMA

METODI DI RAPPRESENTAZIONE

Metodo delle proiezioni centrali

CAPITOLO I.

Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici.

§ 1. Rappresentazione della retta. . . . . Pag. 3
§ 2. Rappresentazione del piano . . . . . » 4
§ 3. Rappresentazione del punto . . . . . » 5
§ 4. Problemi grafici fondamentali . . . . . » 6
§ 5. Casi eccezionali di rappresentazione . . . . . » 12

CAPITOLO II.

Problemi metrici.

§ 6. Omotetia individuata da un punto dello spazio sul quadro . . . . . » 15
§ 7. Quote d'un punto . . . . . » 15
§ 8. Segmento intercetto sopra una retta dal quadro e dal piano parallelo anteriore. Inclinazione della retta sul quadro. . . . . » 17

§ 9. Regioni a cui appartengono i punti d'un piano . . . Pag. 18
§ 10. Striscia intercetta sopra un piano dal quadro e dal piano parallelo anteriore. Inclinazione del piano sul quadro . . . . . » 19
§ 11. Ribaltamento di un piano proiettante sul quadro. . . » 20
§ 12. Distanza di due punti . . . . . » 21
§ 13. Angoli di due rette . . . . . » 23
§ 14. Ribaltamento di un piano obliquo arbitrario sul quadro » 24
§ 15. Grandezza e forma di una figura piana . . . . . » 26
§ 16. Traslazione di una figura piana nello spazio . . . . » 28
§ 17. Antipolarità rispetto al circolo di distanza . . . . . » 29
§ 18. Problemi metrici in cui entra la considerazione di rette e piani perpendicolari . . . . . » 30
§ 19. Involuzione subordinata dall' antipolarità sopra una retta del quadro. Applicazioni . . . . . » 34

Capitolo III.

Cambiamento del sistema di proiezione centrale.

§ 20. Preliminari . . . . . » 40
§ 21. Spostamento del centro nel piano parallelo anteriore . » 41
§ 22. Spostamento del centro normalmente al quadro . . . » 42
§ 23. Spostamento arbitrario del centro. . . . . » 43
§ 24. Spostamento del quadro . . . . . » 44
§ 25. Spostamento di una figura rappresentata nel metodo delle proiezioni centrali . . . . . » 46

Metodo delle proiezioni ortogonali.

Capitolo IV.

Rappresentazione degli enti fondamentali. Problemi grafici.

§ 26. Generalità. Rappresentazione del punto . . . . . Pag. 49
§ 27. Rappresentazione della retta. . . . . » 52
§ 28. Rappresentazione del piano . . . . . » 55
§ 29. Rappresentazione degli elementi di un piano . . . . » 55
§ 30. Problemi grafici fondamentali . . . . . » 57

Capitolo V.

Problemi metrici.

§ 31. Distanza di due punti. Inclinazione di una retta sopra un piano principale. . . . . Pag. 63
§ 32. Rette e piani perpendicolari . . . . . » 64
§ 33. Ribaltamento di un piano generico. . . . . » 68
§ 34. Grandezza e forma di una figura piana . . . . . » 70
§ 35. Figure giacenti in piani perpendicolari e paralleli ad un piano principale. . . . . » 74

Capitolo VI.

Cambiamento del sistema delle proiezioni ortogonali.

§ 36. Spostamento dei piani principali. . . . . » 76
§ 37. Applicazioni . . . . . » 79
§ 38. Costruzione dell' orologio solare . . . . . » 82
§ 39. Spostamento della figura obiettiva . . . . . » 83
§ 40. Prospettiva di una figura . . . . . » 86
§ 41. Prospettiva parallela . . . . . » 88

Capitolo VII.

Rappresentazione dei poliedri.

§ 42. Linea di contorno di un poliedro rispetto ad un punto esterno . . . . . » 91
§ 43. Proiezioni ortogonali di un solido . . . . . » 93
§ 44. Tetraedro regolare . . . . . » 94
§ 45. Esaedro regolare o cubo . . . . . » 94
§ 46. Ottaedro regolare . . . . . » 94
§ 47. Dodecaedro regolare . . . . . » 95
§ 48. Icosaedro regolare . . . . . » 97
§ 49. Intersezione di un poliedro con un piano . . . . . » 98
§ 50. Intersezione di due poliedri. . . . . » 101
§ 51. Ombre di poliedri . . . . . » 103

Capitolo VIII.

Proiezioni assonometriche.

§ 52. Assonometria ortogonale. Triangolo fondamentale . . » 115
§ 53. Rapporti d'accorciamento. Scale assonometriche. . . » 118
§ 54. I problemi fondamentali dell' assonometria. . . . . » 121

§ 55. Rappresentazione delle figure mediante le loro immagini. Rappresentazione del punto . . . . . Pag. 127
§ 56. Rappresentazione del piano . . . . . » 129
§ 57. Rappresentazione della retta . . . . . » 130
§ 58. Problemi grafici . . . . . » 133
§ 59. Problemi metrici. Ribaltamento . . . . . » 134
§ 60. Condizioni di perpendicolarità . . . . . » 135
§ 61. Assonometria obliqua . . . . . » 137

Capitolo IX.

Proiezioni quotate.

§ 62. Rappresentazione del punto . . . . . » 141
§ 63. Rappresentazione della retta . . . . . » 141
§ 64. Rappresentazione del piano . . . . . » 143
§ 65. Problemi grafici. . . . . » 144
§ 66. Condizione di perpendicolarità . . . . . » 145
§ 67. Ribaltamento di un piano obliquo . . . . . » 146

PARTE SECONDA

ELEMENTI DI UNA TEORIA DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE

Capitolo I.

Linee piane e coni.

§ 1. Introduzione . . . . . Pag. 151
§ 2. Linee piane. . . . . » 151
§ 3. Linee piane analitiche. . . . . » 155
§ 4. Curve piane algebriche . . . . . » 157
§ 5. Le prime due formule di Plücker. . . . . » 160
§ 6. Condizioni che determinano una curva algebrica . . » 164
§ 7. La terza formula di Plücker. . . . . » 171
§ 8. Curve notevoli algebriche e trascendenti. . . . . » 171
§ 9. Coni . . . . . » 180
§ 10. Rappresentazione dei coni nel metodo delle proiezioni centrali . . . . . » 181

§ 11. Coni e cilindri nel metodo delle proiezioni ortogonali Pag. 184
§ 12. Ombre dei coni e dei cilindri . . . . . » 185
§ 13. Coni di 2° grado — Assi — Sezioni circolari. . . . » 187
§ 14. Sviluppo del cono e del cilindro. . . . . » 191
§ 15. L'elica. . . . . » 194

Capitolo II.

Linee gobbe e sviluppabili.

§ 16. Linee gobbe. . . . . » 197
§ 17. Sviluppabili. . . . . » 200
§ 18. Rappresentazione delle linee gobbe e delle sviluppabili . . . . . » 202
§ 19. Elicoide sviluppabile . . . . . » 204
§ 20. Sviluppo di una superficie sviluppabile . . . . . » 205
§ 21. Sviluppo dell'elicoide sviluppabile . . . . . » 207

Capitolo III.

Curve algebriche gobbe. Cubica e Quartica di 1ª specie.

§ 22. Curve algebriche gobbe . . . . . Pag. 211
§ 23. Cubica gobba. Generalità . . . . . » 216
§ 24. Proiezione piana di una cubica gobba. — Corde della cubica . . . . . » 219
§ 25. Sviluppabile circoscritta ad una cubica gobba. . . . » 225
§ 26. Quartiche di 1ª specie. . . . . » 226
§ 27. Corde della quartica . . . . . » 230
§ 28. Casi particolari di una quartica di 1ª specie . . . . » 233

Capitolo IV.

Le Quadriche.

§ 29. Generalità intorno alle superficie . . . . . » 235
§ 30. Superficie algebriche . . . . . » 240
§ 31. Quadriche. Quadriche ellittiche ed iperboliche . . . » 242
§ 32. Polarità . . . . . » 246
§ 33. Classe delle quadriche. Cono circoscritto . . . . . » 249

§ 34. Quadriche rigate . . . . . Pag. 252
§ 35. Quadriche ellittiche . . . . . » 255
§ 36. Condizioni che individuano una quadrica . . . . . » 259
§ 37. Rappresentazione generale di una quadrica nel metodo delle proiezioni centrali . . . . . » 261
§ 38. Rappresentazione di una quadrica nel metodo delle proiezioni ortogonali . . . . . » 268
§ 39. Rappresentazione dell'iperboloide passante per il centro di proiezione . . . . . » 270
§ 40. Proiezione stereografica delle quadriche ellittiche e in particolare della sfera . . . . . » 276
§ 41. La lossodromica sferica . . . . . » 280
§ 42. Curve algebriche appartenenti ad una quadrica . . . » 281
§ 43. La quartica di 1ª specie come intersezione di due quadriche . . . . . » 284
§ 44. Quartiche di 2ª specie . . . . . » 288

Capitolo V.

Proprietà generali delle superficie.

§ 45. Rappresentazione analitica delle superficie . . . . . » 291
§ 46. Paraboloidi osculatori . . . . . » 293
§ 47. Involuzione delle tangenti coniugate . . . . . » 296
§ 48. Asintotiche . . . . . » 297
§ 49. Linee di curvatura . . . . . » 299
§ 50. Curvature principali d'una superficie in un punto. . » 302
§ 51. Geodetiche . . . . . » 306

Capitolo VI.

Le superficie rigate.

§ 52. Preliminari . . . . . » 307
§ 53. Iperboloidi osculatori . . . . . » 308
§ 54. Classificazione delle rigate secondo le loro curve direttrici . . . . . » 309
§ 55. Rigate algebriche . . . . . » 311
§ 56. Curva doppia delle rigate algebriche . . . . . » 314
§ 57. Rappresentazione delle rigate . . . . . » 317
§ 58. La rigata cubica . . . . . » 321

Capitolo VII.

Le superficie di rotazione.

§ 59. Definizioni — Esempî . . . . . Pag. 325
§ 60. Proprietà generali . . . . . » 327
§ 61. Rappresentazione . . . . . » 329
§ 62. Problemi . . . . . » 330
§ 63. Il toro . . . . . » 335

Capitolo VIII.

Gli elicoidi.

§ 64. Proprietà fondamentali . . . . . » 339
§ 65. Teorema di Bour . . . . . » 340
§ 66. Rappresentazione degli elicoidi e in particolare del serpentino . . . . . » 342

Capitolo IX.

Dei monoidi e della superficie cubica.

§ 67. I monoidi e la loro rappresentazione piana . . . . . » 347
§ 68. La superficie cubica con un punto doppio . . . . . » 350
§ 69. La superficie di Steiner . . . . . » 352
§ 70. La superficie cubica generale . . . . . » 355
§ 71. Rappresentazione piana di Schlafly della superficie cubica . . . . . » 357
§ 72. Esercizî sulla rappresentazione piana di alcune superficie del 4° ordine . . . . . » 360



FINITO DI STAMPARE
IL GIORNO XV APRILE MCMXX
NEGLI STABILIMENTI POLIGRAFICI RIUNITI
IN BOLOGNA


NICOLA ZANICHELLI BOLOGNA
LABORAVI FIDENTER