Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sul teorema di esistenza per le funzioni algebriche

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XXV** (1921), pp. 89-91.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

L'Accademico Benedettino Prof. FEDERIGO ENRIQUES presenta la seguente sua Nota intitolata: **Sul teorema di esistenza per le funzioni algebriche.**

Nel terzo volume delle « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » a cui attendo colla collaborazione del dott. Oscar Chisini, e di cui spero condur presto a termine la pubblicazione, riprendo e completo le osservazioni sul teorema d'esistenza, contenute nella mia Nota « Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili » (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino vol. 47, 1912). Espongo qui i risultati ottenuti.

Esiste (almeno) *una curva algebrica irreducibile di genere p, rappresentata sopra una retta n-pla con* $2n + 2p - 2$ *punti di diramazione assegnati.*

Si verifica prima che le curve così rappresentate, birazionalmente distinte, sono - se esistono - in numero finito, quindi il teorema viene dedotto dal computo dei moduli (com'è accennato nella mia Nota citata) tenuto conto che la serie caratteristica del sistema continuo delle curve di ordine n con un dato numero

di punti doppi, porge almeno un massimo per la dimensione del sistema.

Dello stesso teorema si ottiene una dimostrazione diretta come segue. Si premette che la retta *n-pla* con $m = 2n + 2p - 2$ punti di diramazione $A_1\ A_2 \ldots A_m$ rappresenta certo una curva effettivamente esistente, almeno per posizioni particolari degli m punti. Ora la costruzione di una curva di genere p e d'ordine $n + h$, C_{n+h}, con un punto h-*plo* P e con

$$\frac{(n+h-1)\ (n+h-2)}{2} - \frac{h\,(h-1)}{2} - p$$

punti doppi, la quale debba toccare le m rette PA_i, costituisce un problema algebrico, che - per h assai alto - ammette certo soluzioni, e può rendersi determinato, mediante l'aggiunta di condizioni ulteriori, esprimenti - per esempio - il passaggio per dati punti semplici. Occorre dimostrare che, almeno una delle curve C_{n+h}, risolventi il detto problema, è *irreducibile*. Ciò si deduce dall'ipotesi che vi sia una C_{n+h} irreducibile, per posizioni particolari dei punti A_i, imperocchè questa irreducibilità significa che il corrispondente gruppo di monodromia della funzione corrispondente alla detta C_{n+h} è transitivo, ed allora, variando con continuità gli A_i, il gruppo resta sempre transitivo.

Questa riduzione per continuità, in relazione al teorema di Lüroth-Clebsch, conduce anche a dimostrare che:

Le classi di curve di genere p formano un sistema continuo.

Inoltre per questa via si è condotti pure a precisare il teorema d'esistenza, dimostrando che:

Esiste una funzione algebrica a n rami con dati punti di diramazione, che - in rapporto ad un dato

sistema di cappi uscenti da un punto - possiede date trasposizioni (o sostituzioni), il cui prodotto sia l' identità.

Questo è il contenuto algebrico del Teorema d' esistenza che Riemann ha stabilito per via trascendente.

Aggiungo la seguente osservazione, che mi sembra non priva di valore.

Il teorema che « le classi di curve (irreducibili) di genere p formano un unico sistema continuo » ammette una dimostrazione diretta, indipendente dalla riduzione delle riemanniane a fogli al tipo di Lüroth-Clebsch, secondo la via accennata nella mia Nota di Torino del 1912, che - nelle Lezioni - riprendo e sviluppo in forma strettamente rigorosa. Orbene, codesto teorema porge a sua volta una *nuova dimostrazione del teorema di Lüroth-Clebsch*, per cui questo appare tradurre il fatto che « ogni *riemanniana*, irreducibile di genere p, si *può ridurre, per deformazione continua, ad una iperellittica* dello stesso genere ».