Enriques, Federigo

Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche

Math. Annalen **LXXXV** (1922), pp. 195-199.

Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche.

Von

Federigo Enriques in Bologna.

1. Il principio di continuità di Poncelet ha, nella teoria delle funzioni algebriche, un' importanza che non deve essere ridotta — come spesso accade — alle sole questioni numerative. A questo criterio fondamentale sono ispirate le „Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche" di cui già ho pubblicato due volumi colla collaborazione del Dr. Oscar Chisini[1]), e di cui stiamo preparando il terzo, che si riferisce ad argomenti nuovamente svolti nei miei corsi universitari degli anni 1918—19 e 1919—20. Da questo volume traggo la presente Nota.

Già Nöther e Lindemann ebbero ad osservare che cosa diventino per (continuità le proposizioni fondamentali della geometria sopra una curv piana) f di genere p, quando questa, variando in dipendenza d' una parametro, acquisti nuovi punti multipli: si tratta qui di un' estensione alle curve non-aggiunte o virtualmente aggiunte dei teoremi relativi alle serie segate dalle ordinarie aggiunte[2]). Ma lo scopo di questa Nota è — in qualche modo — inverso. Si faccia variare la f, con moduli generali, in guisa che acquisti p punti doppi, e diventi quindi razionale. Allora la geometria sopra la curva di genere p — con moduli generali — si rispecchierà nella teoria delle serie lineari sopra la retta; vogliamo mostrare come si trovino così i teoremi fondamentali di quella geometria, per p qualunque. Questa via di dimostrazione ha, in principio, soltanto un *valore euristico*, e non vale la pena d' indugiarsi a trasformarla in un metodo rigoroso di prova. Per contro è interessante vedere come la degenerazione della curva di genere p in una retta, o in una curva di genere $< p$, offra il modo di stabilire rigorosamente alcuni punti delicati della dottrina generale, che non hanno ricevuto — mi sembra — un tratta-

[1]) Bologna, Zanichelli.

[2]) Cfr. l' Anhang F alle „Vorlesungen über algebraische Geometrie" di F. Severi (Leipzig, Teubner, 1921, pg. 247).

mento soddisfacente, ovvero lo hanno ricevuto soltanto per mezzo degli integrali abeliani.

2. Osserviamo anzitutto che, per mezzo della degenerazione anzidetta (acquisto di p nuovi punti doppi), *le g_n^r sopra una curva di genere p si riducono alle g_n^r sopra una retta dotate di p coppie neutre*, cioè presentanti una sola condizione ai gruppi di queste serie che debbano contenerla; le quali coppie — giova notarlo — possono assumersi ad arbitrio. In questo senso possiamo parlare di una *retta con p coppie* come di una *curva di genere virtuale p*.

Cio posto vediamo come i teoremi fondamentali della geometria sopra una curva si rispecchino semplicemente sopra una retta con p coppie.

1. Sopra la curva di genere p, ogni gruppo di n punti appartiene ad una determinata serie lineare completa g_n^r con $r \geqq n - p$.

Si tratta di mostrare che sopra la retta «esiste una determinata serie lineare g_n^r con $r = n - p$, contenente un dato gruppo G_n e possedente p coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$ $(i = 1, 2, \ldots p)$».

A tale scopo si osservi che la serie g_n^{n-1} completa, contenente un G_n e rispetto a cui è data una coppia neutra $A_1 A_2$, si costruisce combinando linearmente il G_n con la g_n^{n-2} che possiede — sulla retta — i punti fissi A_1 e A_2: quindi la nostra g_n^r completa con p coppie neutre, resta definita come intersezione di p g_n^{n-1}, per cui sarà in generale $r = n - p$ ed in ogni caso $r \geqq n - p$.

Corollario del teorema 1 sono le proposizioni relative alla somma e sottrazione delle serie, in particolare il teorema del resto, per cui la serie residua di un G_m rispetto ad una g_n^r è la medesima quando si sostituisce al G_m un gruppo equivalente.

2. Ogni g_n^r completa per cui $n > 2p - 2$ ha la dimensione $r = n - p$.

Riportandoci alla retta, si stacchino dalla g_n^r $p - 1$ coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$, per es. quelle per cui $i = 2, 3, \ldots, p$: con ciò la dimensione della serie residua sarà $r' \geqq r - (p - 1)$. Ma questa serie residua, d' ordine $n - (2p - 2)$, possiede la coppia neutra $A_{11} A_{12}$ e quindi è di dimensione $r' \leqq n - (2p - 2) - 1$: combinando le due diseguaglianze si deduce

$$r' \leqq n - p$$

e quindi, per il teorema 1,

$$r = n - p.$$

(Si noti che il caso $n = 2p - 1$ non fa eccezione nel ragionamento precedente, giacchè la serie residua cui si è condotti non può essere la g_1^1, essendo A_{11} ed A_{12} due punti distinti, ma deve ridursi ad una g_1^0, cioè ad un punto fisso.)

3. Esiste una determinata serie completa g_{2p-2}^{p-1}. Questa serie *cano-*

nica si ottiene — sopra la retta — combinando linearmente i p gruppi di $p-1$ coppie neutre.

Anzitutto si vede che i p gruppi definiti dalle coppie: $2, 3, \ldots, p$; $3, 4, \ldots, p, 1$; $1, 2, \ldots, p-1$, sono linearmente indipendenti; infatti i primi $p-1$ hanno commune la coppia p-ma; $A_{p1} A_{p2}$, che non appartiene all' ultimo gruppo. Resta così dimostrato che i nostri p gruppi definiscono effettivamente una serie g_{2p-2}^{p-1} ed è evidente che questa possiede le coppie $A_{i1} A_{i2}$ come coppie neutre, giacchè ciascuna di queste coppie è fissa per una g_{2p-2}^{p-2} contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}.

D' altra parte è chiaro che una serie lineare g_{2p-2}^{p-1} possedente le p coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$, contiene i gruppi formati da $p-1$ di queste coppie (importanti nel loro insieme $p-1$ condizioni) e quindi coincide con la serie lineare definita da questi gruppi: ciò significa l' unicità della serie g_{2p-2}^{p-1}, sopra la retta di genere virtuale p.

4. Ogni g_n^r completa con $r > n-p$ è contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} canonica, e precisamente ogni gruppo della g_n^r impone $n-r$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo (*Teorema di Riemann-Roch*).

Riport ndoci alla retta togliamo dalla nostra g_n^r r coppie neutre: otteniamo così un gruppo di $n-2r$ punti che impone ai gruppi canonici $n-2r$ condizioni; ma le r coppie neutre impongono a questi stessi gruppi r condizioni e perciò un gruppo particolare della g_n^r e quindi — per il teorema del resto — anche un gruppo qualunque di questa serie, impone $n-2$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo. Per ciò la g_n^r è certo contenuta nella $g_{2p\ 2}^{p-1}$, se $n-r \leqq p-1$.

3. La proposizione „*una curva di enere $p > 2$, a moduli generali, non possiede trasformazioni birazionali in sè stessa*", si considera di solito come evidente. Ma forse la cosa è evidente solo per $p = 3$ e per le curve piane *generali del proprio ordine.* Ad ogni modo il teorema si dimostra colla degenerazione di una curva di genere p in una retta, poichè sulla retta non esiste alcuna proiettività (non degenere o degenere) la quale lasci invariate tre o più coppie di punti, date ad arbitrio.

Lo stesso teorema si può anche stabilire per un' altra via che conduce ad un resultato più significativo.

Se una curva f possiede trasformazioni in sè, ad ogni g_n' di f (che non sia invariante) viene *associata* una g_n' (almeno), entro cui i gruppi dotati di punto doppio formano gli stessi birapporti. Ora si può chiedere se, sopra una f di genere p con moduli generali, avvenga di trovare g_n' associate ad una g_n' data, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi.

Assumasi, per semplicità di discorso, una g_n' non speciale: la f contiene un' infinità di g_n' analoghe, dipendente da $2n-p-2$ parametri; mentre i birapporti indipendenti formati dai $2n + 2p - 2$ gruppi d' una g_n con punto doppio sono $2n + 2p - 5$; perciò non esiste, in generale, su f una g'_n per cui codesti birapporti prendano valori assegnati: anzi la determinazione di una tale g'_n dipende da un sistema d' equazioni (superiore al numero delle incognite) che importa $3p - 3$ condizioni di compatibilità, cioè precisamente tante quanti sono i moduli, per $p > 1$. Ma se queste condizioni sono una volta soddisfatte, cioè se viene data una g'_n su f, non si può escludere a priori che ve ne sieno — di conseguenza — altre, associate, per cui i detti birapporti assumano gli stessi valori: tant' è vero che, per $p = 2$, le g'_n vengono appunto associate a coppie. Il conto di costanti dice solo che, già per $p = 2$, non si può avere che un *numero finito* di g'_n associate (cogli stessi birapporti).

Ora, se la f di moduli generali, ad es. per $p = 3$, contenesse — sempre — *più* g'_n associate, che cosa accadrebbe quando la f stessa si fa degenerare in una f di genere 2, con una coppia neutra (o più)? È chiaro che ad una g'_n data, che possegga la detta coppia neutra $A_1 A_2$, dovrebbe essere associata (almeno) un' altra g'_n *colla medesima coppia neutra*: ma ciò è assurdo perchè la coppia $A_1 A_2$ si può far variare per continuità su f, restando sempre neutra per la data g'_n!

Risulta dunque che *per $p > 2$, sopra una curva di genere p, non esiste in generale una seconda serie g'_n i cui gruppi dotati di punto doppio formino eguali birapporti a quelli analoghi di una serie data.*

Così viene rimosso un dubbio critico, che si affaccia nell' enumerazione delle classi di superficie di Riemann ad n fogli, definite da dati punti di diramazione: dove si può chiedere se due funzioni algebriche $x(u)$, $y(v)$, diramate per gli stessi valori di u e v, non possano trasformarsi birazionalmente l' una nell' altra per una sostituzione su x e u, senza che si abbia necessariamente $u = v$, e x funzione razionale di u, $y(u)$.

4. Insieme alla degenerazione di una curva di genere p in una di genere $p - 1$, conseguente all' acquisto di un nuovo punto doppio, conviene seguire la *degenerazione dei cicli della sua superficie di Riemann*. Da ciò si trae una dimostrazione geometrica del *teorema di Hurwitz sulle corrispondenze* $[m, n]$, cioè che „le corrispondenze appartenenti a curve di moduli generali sono sempre *a valenza*".

La dimostrazione (che non riferirò quì distesamente) si basa sopra il riconoscimento della „condizione topologica affinchè una serie ∞^1, s_n, di gruppi di n punti, appartenente ad una curva f, sia contenuta in una serie lineare g_n dello stesso ordine"; la qual condizione costituisce il *teorema d'Abel riguardato nel suo significato topologico.*

Si faccia muovere un gruppo G_n di s_n, sopra la superficie riemanniana f, in modo che esso ritorni in se stesso: una tale *circolazione* del G_n dà luogo ad un ciclo o ad una somma di cicli descritta dai punti del gruppo. Se la s_n è contenuta in una g_n lineare, codesta somma è sempre *omologa* ad un ciclo nullo (nel senso di Poincaré): quest' asserzione, di cui è facile la prova, costituisce il „teorema d' Abel topologico".

Il teorema d'Abel topologico inverso, „ogni s_n a circolazione nulla è contenuta in una g_n lineare", si può stabilire, come quì accenno, per le curve a moduli generali; il Dr. Chisini ne offrirà poi una dimostrazione valida per curve qualsiansi.

Io osservo anzitutto che il teorema di cui si discorre si verifica tosto sulle curve di genere $p = 1$, giacchè il punto residuo dei gruppi di s_n rispetto ad una fissata g^n_{n+1} resulta necessariamente fisso, potendo altrimente descrivere un ciclo non nullo. Dopo ciò estendo induttivamente il teorema da p a $p + 1$, col metodo di degenerazione. Se, sopra una f di genere $p = 2$, si suppone esistere una s_n a circolazione nulla non contenuta in una g_n lineare, si deduce anzitutto (per sottrazione da una g^n_{n+2} fissa) una serie ∞^1, s_2, a circolazione nulla, diversa dalla g'_2 di f e contenente una coppia arbitraria. Ora (essendo la f a moduli generali) si faccia degenerare la curva in una f di genere 1: la detta s_2 (o una parte di essa) dovrà divenire su f una g'_2, di cui potrà segnarsi ad arbitrio una coppia, e che — d' altra parte — dovrà ammettere come coppia neutra quella costituita dai due punti sovrapposti nel nuovo punto doppio di f: di qui l' assurdo. E analogamente si procederà da $p = 2$ a $p = 3$ ecc.

Il teorema stabilito permette di definire topologicamente, sopra una riemanniana f, le corrispondenze dotate di valenza γ, positiva o negativa: p. es., per γ positivo, occorre che, mentre un punto P descrive un ciclo C, i punti corrispondenti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ descrivano uno o più cicli la cui somma sia omologa a $-\gamma C$, diguisachè la somma de' cicli descritti dal gruppo

$$G_{n+\gamma} = \gamma P + P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_n$$

risulti omologa a zero. Quindi il metodo di degenerazione (da p a $p-1$), mercè un' analisi accurata, permette di dimostrare completamente il citato teorema d'Hurwitz: „Le corrispondenze singolari (non dotate di valenza) appartengono soltanto a curve con moduli particolari." Per studiare tali corrispondenze singolari, il metodo di degenerazione non soccorre più; ma, quando sia dimostrato senza eccezione il teorema d'Abel topologico, si dedurrà ancora topologicamente il resultato — a cui Hurwitz e Severi arrivano cogli integrali abeliani — che vi è sempre un *numero finito di corrispondenze indipendenti*.

Bologna, Luglio 1921.

(Eingegangen am 2. 8. 1921.)