Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sulle equazioni algebriche $f(x, y) = 0$ che si risolvono parametricamente mediante due polinomi

Rend. Acc. Sci. Ist. Bologna **XXVI** (1922), pp. 137-139.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

L'Accademico Benedettino Prof. Federigo Enriques presenta la seguente sua Nota intitolata: **Sulle equazioni algebriche $f(xy) = 0$ che si risolvono parametricamente mediante due polinomi.**

La condizione perchè una curva algebrica $f(xy) = 0$ sia *razionale*, cioè risolubile parametricamente con funzioni razionali:

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)}$$

è — secondo Clebsch — che il genere p di f si annulli.

Ora tra le curve razionali si trovano in particolare *le* $f(xy) = 0$ *che ammettono una rappresentazione parametrica mediante polinomi*:

$$(1) \qquad x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t).$$

Queste curve *sono caratterizzate dalla condizione di possedere un solo punto all'infinito, origine di un unico ramo* lineare o superlineare.

Anzitutto è chiaro che la curva f rappresentata dalla (1) possiede un solo punto all'infinito, corrispondente a $t = \infty$, e che la f passa per questo punto improprio con un solo ramo, lineare o superlineare.

Reciprocamente, se una curva f di genere 0 possiede un solo punto all'infinito O, per cui passa con un solo ramo, quando si rappresenti f sopra una retta, ad O corrisponderà un sol punto O' che — mediante una sostituzione lineare — potrà portarsi all'infinito. Allora, riferendosi alla rappresentazione parametrica della f:

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)},$$

si vede che non dovranno esservi radici (finite) per $\varphi_3(t) = 0$, riducendosi dunque φ_3 ad una costante; in altre parole si avrà

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t). \qquad \text{c. d. d.}$$

Il teorema stabilito riconduce la *classificazione* delle curve $f(xy) = 0$ d'ordine n rappresentabili con polinomi, all'*analisi delle singolarità* dei rami superlineari: si avrà all'infinito un punto i-plo ($i < n$), origine di un ramo d'ordine i e di classe $n - i$, essendo tangente la retta all'infinito. Quindi, per ciascun valore di i, saranno possibili diverse singolarità, assorbenti un certo

numero $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p'$ di punti doppi; la curva f dovrà possedere inoltre p' (≥ 0) punti doppi propri o singolarità equivalenti.

Lo sviluppo di questa analisi costituirà un ottimo esercizio per lo studioso della teoria delle singolarità che ho sviluppato nel Vol. II delle mie « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni », redatte per cura del Dr. O. Chisini. Qui ci limitiamo al caso delle curve d'ordine $n = 3, 4$.

Per $n = 3$ le cubiche piane rappresentabili mediante due polinomi, si dividono in 2 tipi:

1) cubiche con un punto doppio proprio e una tangente di flesso all' infinito;

2) cubiche con una tangente cuspidale all' infinito.

Per $n = 4$ si hanno i seguenti tipi:

1) quartiche con tre punti doppi (o con un punto triplo) propri e con tangente quadripunta all' infinito;

2) quartiche con un punto doppio proprio e con una cuspide di seconda specie all' infinito, per cui la retta all' infinito è tangente;

3) quartiche con una cuspide di terza specie all' infinito, dove pure la retta all' infinito è tangente;

4) un ramo cuspidale del terz' ordine con tangente all' infinito.