Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo

Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione

Annali Mat. Pura Appl. (IV) **I** (1924), pp. 185-198.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione

Di Federigo Enriques (a Roma)

I. Introduzione.

In una Nota inserita nei « Comptes rendus » dell'Accademia di Parigi, nel 1912, ho annunciato un teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili; ma, qualche difficoltà d'ordine delicato nello sviluppo della dimostrazione avendomi fatto rimandare la pubblicazione della memoria diffusa che stavo preparando, altre occupazioni sopraggiunte mi hanno distolto fino ad oggi dall'argomento. Lo riprendo ora e preciso il teorema enunciato, fornendone la dimostrazione.

Per intendere lo spirito del problema e il senso del resultato che qui viene stabilito, conviene ricordare che, per proiezione da un punto O (che può essere esterno ovvero appartenere alla superficie con una certa molteplicità) una superficie data, F, viene rappresentata sopra un piano multiplo, d'un certo ordine n, con una certa curva diramazione C. La C è l'immagine della curva di contatto del cono circoscritto ad F da O, non computando in questo il cono che proietta la curva doppia di F, supposta non cuspidale.

L'ordine m di C si esprime in funzione del genere π delle curve sezioni di F coi piani per O e del numero delle intersezioni di F colle rette per O, che è l'*ordine* n *del piano multiplo*:

$$m = 2n + 2\pi - 2.$$

Ma la C non è una curva generale dell'ordine m. Anzi in corrispondenza ad una superficie F di moduli generali (dotata di curva doppia passante per O con una certa molteplicità e possedente un certo numero di punti tripli fuori di O), e del resto anche per una F proiettivamente generale nel proprio ordine, essa possiede un certo numero di nodi e di cuspidi: i nodi nascono, in generale, dalle bitangenti di F per O, e le cuspidi dalle rette per O aventi un contatto tripunto con F. In funzione di n e π, e del numero dei nodi e delle cuspidi di C, si esprimono con formule note di ZEUTHEN e NÖTHER [1] gl'invarianti aritmetici della superficie F.

Ora sorge la questione d'esistenza: quand'è che una curva piana C, dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi, può assumersi come curva di diramazione d'un piano multiplo n-plo?

Per rispondere, si assuma ad arbitrio una C, d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$, e si cerchi di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n-plo che abbia come curva di diramazione C: a tal uopo si costruirà una curva algebrica, K, che sia rappresentata sopra una retta n-pla, a, i cui punti diramazione son dati come intersezioni di a con C, e — facendo variare a in un fascio di rette, entro il piano di C — si considererà la superficie descritta da K. Se la K venisse razionalmente determinata in funzione della retta a, il luogo di essa costituirebbe evidentemente la cercata superficie F, riferita ad un piano n-plo che ha come curva di diramazione C. Ma, in generale, la K non verrà determinata razionalmente in funzione di a, anzi il gruppo dei punti diramazione che viene assunto su a determinerà un numero finito di curve algebriche, ossia di rette n-ple, birazionalmente distinte: le quali si scambieranno l'una nell'altra quando la retta a, variando nel suo fascio, ritorna alla posizione iniziale.

Or dunque l'analisi delle condizioni d'esistenza d'un piano n-plo che debba avere come curva di diramazione una data curva C, conduce

a) ad esaminare come variano e si scambiano fra loro le rette n-ple birazionalmente distinte determinate in corrispondenza ad una retta del piano di C, variabile in un fascio $y = tx$: perciò conviene riferirsi alle corrispondenti superficie di RIEMANN e al piano della variabile complessa che rappresenta il parametro t, nel quale piano occorre considerare i cammini chiusi elementari che rispondono alle tangenti semplici a C appartenenti al nostro fascio, ovvero alle rette che vanno ai nodi e alle cuspidi di C;

b) quindi ad enunciare le condizioni elementari d'invarianza della nominata retta n-pla;

c) infine a dimostrare che codeste condizioni d'invarianza, oltrechè necessarie, sono anche sufficienti a determinare *razionalmente una* curva variabile K, descrivente la domandata superficie F.

L'enunciato preciso del teorema d'esistenza si troverà al § V. Qui vogliamo rilevare esplicitamente un corollario importante, che fu da me avvertito fino dal 1912, cioè il seguente:

---

[1] Cfr. SEVERI: « Atti R. Accad. Torino », 37 (1902).

Dato nel piano un sistema continuo $\{C\}$ *di curve* C, *d'un certo ordine* $m = 2n + 2\pi - 2$, *dotate d'un certo numero di nodi e di cuspidi, se una* C *è curva di diramazione d'un piano n-plo, lo stesso accade per le altre curve del sistema* $\{C\}$.

II. Condizioni d'invarianza a cui soddisfano le rette n-ple di un piano n-plo.

Pongasi che la curva piana C — d'un certo ordine $m = 2n + 2\pi - 2$, e dotata d'un certo numero di nodi e di cuspidi — sia la curva di diramazione d'un piano multiplo d'ordine n, e così rappresenti una superficie F, che potremo ritenere proiettata sul detto piano, $z = 0$, dal punto all'infinito dell'asse z. Si consideri nel piano $z = 0$, un fascio generico di rette, e sia quello $y = tx$, che ha per centro l'origine delle coordinate $O = (000)$: dove si ammette, in particolare, che l'asse z seghi la superficie F in n punti distinti: 1, 2,.... n.

Vogliamo studiare come varia la riemanniana R_t, relativa ad una curva K_t, sezione di F con un piano $y = tx$, al variare del parametro t.

Distendiamo i valori complessi della variabile t sopra un piano τ, e consideriamo in questo un valore iniziale: $t = 0$. Avremo corrispondentemente una curva K_0

$$z = f(x_0) = \varphi_0(x)$$

che (nel linguaggio della geometria algebrica) deve ritenersi proiettata dal punto O all'infinito dell'asse z sopra una *retta* n-pla $y = 0$, i cui punti di diramazione sono le intersezioni

$$A_1, \quad A_2, \dots \quad A_m$$

di essa con C.

Ora, distendendo i valori complessi della x sopra un piano di Argand-Gauss, codesta retta n-pla appare come un piano su cui sono segnati l'origine O e gli n punti A_1, A_2,.... A_m, e la riemanniana R_0 riesce definita in rapporto ad un certo sistema di cappi

$$l_i = OA_i \qquad (i = 1, 2, \dots m),$$

cui risponderanno certe trasposizioni

$$S_i = (rs)$$

scambianti due rami r e s della

$$z = \varphi_0(x).$$

Ricordiamo che i cappi l possono scegliersi ad arbitrio ed assumersi anche in un ordine arbitrario, dopodichè la conoscenza della curva K_0 determina il sistema S_i, in confronto ad altri che darebbero luogo a curve birazionalmente diverse; diguisachè — quando occorra — due qualunque dei punti A_i potranno ritenersi corrispondere a cappi contigui, salvo il conseguente mutamento delle S_i.

Moviamoci nel piano τ, partendo da un punto $t=0$ e descrivendo un giro chiuso, γ, che vi ritorni: allora R_0 si prolungherà nella riemanniana variabile R_t; così vedremo, nel piano della variabile complessa x, moversi i punti A_i, e a questo movimento dovremo accompagnare una variazione dei cappi l_i di guisa che essi non vengano mai ad attraversarsi (il cammino di t supponendosi tale che i punti A_i rimangano sempre distinti).

Quando al termine del nostro movimento siamo ritornati al valore iniziale $t=0$, il gruppo dei punti A_i è ritornato in se stesso, subendo una certa permutazione

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ A_{\gamma_1} & A_{\gamma_2} & \dots & A_{\gamma_m} \end{pmatrix};$$

contemporaneamente i cappi l_i sono divenuti dei nuovi cappi l_{γ_i} conservando il loro ordine e le relative sostituzioni S_i, ma l'estremo di l_i non è più A_i bensì A_{γ_i}, e in ogni modo giova tener presente che anche un cappio che ritorni al medesimo estremo può aver cambiato essenzialmente di forma.

Tuttavia si possono riportare i cappi l_{γ_i} agli l_i; durante questa trasformazione i cappi dovranno attraversare dei punti A e quindi verranno mutate le sostituzioni S_i, e in definitiva ai punti A_i corrisponderanno certe nuove sostituzioni

$$S_i^{(\gamma)}.$$

Ora introduciamo l'ipotesi d'esistenza di F. Poichè al cammino chiuso γ risponde una variazione continua della curva K_t, sezione di F, che riporta la K_0 in se stessa, si deduce che: per qualunque cammino γ segnato nel piano della variabile complessa t, le due riemanniane che rispondono ai cappi l_i e rispettivamente alle sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sono equivalenti; nel nostro caso ciò importa che le sostituzioni S_i e $S_i^{(\gamma)}$ sieno non soltanto simili (cioè trasformate una dell'altra mediante una sostituzione che rappresenti un cambiamento di nome degli n valori $1, 2, \dots n$) bensì identiche, poichè le intersezioni di F con l'asse z sono rimaste ferme durante tutto il movimento.

Riassumeremo la condizione precedente dicendo che: per l'esistenza della superficie F la R_t deve soddisfare ad una *condizione d'invarianza*, la quale importa che *le sostituzioni di* R_t *relative ai punti* A_i *restino invariate per qualunque giro* γ *fatto nel piano* τ.

III. Riduzione della condizione d'invarianza a condizioni elementari.

Il significato della condizione d'invarianza di R_t, che abbiamo trovata nel precedente paragrafo, può venir precisato riducendo per continuità qualunque giro γ, entro il piano τ, ad una somma di cammini elementari (veri cappi nel detto piano) che racchiudono i punti critici in cui coincidono due punti A.

Questi *punti critici* sono *di tre specie*:

1) punti

$$T_1,\ T_2 \ldots . T_\mu$$

che rispondono alle tangenti semplici di C per O (la classe μ ha un valore che qui non importa calcolare);

2) punti

$$D_1,\ D_2 \ldots . D_\delta$$

che rispondono ai δ nodi di C e alle rette che li proiettano da O; e infine

3) punti

$$Q_1,\ Q_2 \ldots . Q_\chi$$

che rispondono alle χ cuspidi di C.

Conviene analizzare partitamente quale sia in generale l'effetto che producono sulle sostituzioni di R_0 i giri elementari delle tre specie.

Ma giova premettere un'osservazione comune ai tre casi.

Si consideri un punto critico, $t = t_c$, che sia un T o un D o un Q, e pongasi che in esso confluiscano due punti A_r e A_s. Per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ritenere che codesti due punti sieno due punti contigui, che potremo quindi indicare con A_1 e A_2. Però i corrispondenti cappi $l_1 = OA_1$ e $l_2 = OA_2$, possono dar luogo a due circostanze diverse che occorre tener presenti:

a) può accadere che l_1 e l_2, per $t = t_c$, diventino o possan farsi diventare *onestamente vicini*, cioè tendenti a confondersi senza includere alcun altro punto A o attraversare altri cappi,

b) all'opposto può accadere che l_1 e l_2, pure essendo contigui, non possano ritenersi come vicini, in modo da riunirsi in un solo cappio indipendente dai rimanenti.

Le *figure* 1 e 2 qui annesse illustrano questa circostanza nel caso elementare in cui fra l_1 e l_2 (già resi contigui) verrebbe a frapporsi un cappio l_i.

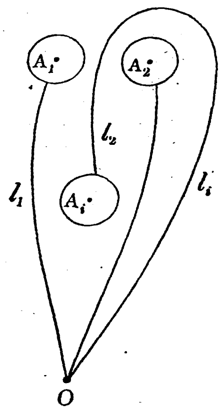

Fig. 1.

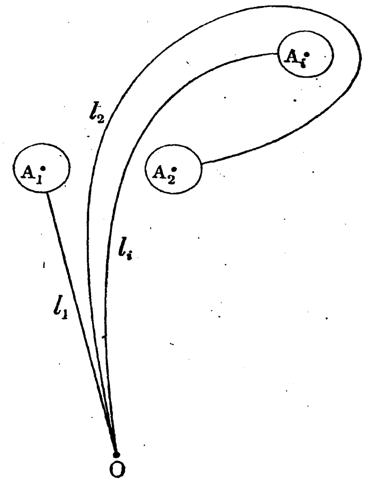

Fig. 2.

Ma, riferendoci per semplicità a questo caso elementare, possiamo dimostrare che, in ogni caso, una conveniente trasformazione dei cappi, permette di ridursi al caso in cui l_1 e l_2 diventino onestamente vicini.

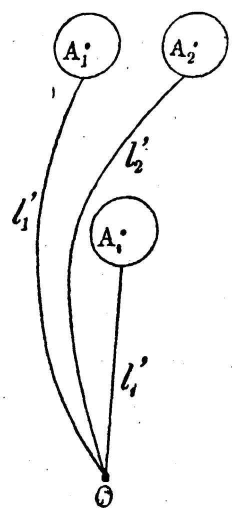

Fig. 1'.

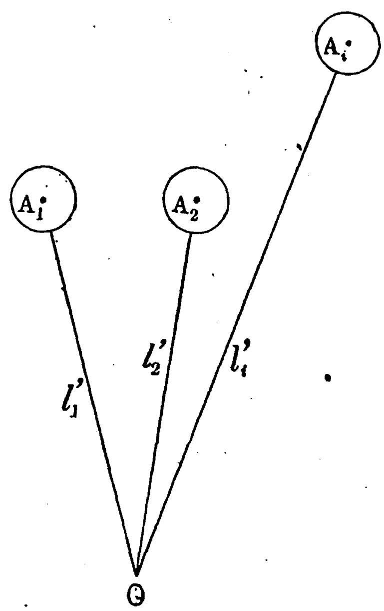

Fig. 2'.

A tal uopo si ricordi che in una riemanniana R, due qualsiansi cappi l_1, e
possono rendere contigui facendo uso di due modi di trasformazione esse
almente diversi: cioè tenendoli fermi e facendo che i cappi intermedi attr

versino A_r, e allora le sostituzioni S_r e S_s rimangono invariate, o invece movendo, per esempio l_r, in guisa che attraversi i punti di diramazione intermedi, ciò che ha per effetto di alterare la sostituzione S_r.

Orbene, nel nostro caso $r=1$, $s=2$, quando ci si avvicina al valore critico $t=t_c$, l_1 e l_2 possono essere resi contigui e onestamente vicini purchè si operi convenientemente coi due modi di trasformazione. Così la riduzione dalla figura 1) alla 1') o dalla 2) alla 2') si effettua in due tempi, portando anzitutto l_i ad essere intermedio fra l_1 e l_2, e poi movendo per esempio l_2 in guisa che attraversi A_i: si ottengono così i due cappi l_1' e l_2' onestamente vicini.

Dopo ciò passiamo a svolgere la nostra analisi, in rapporto alle tre specie di punti critici, T, D e Q.

1) Un punto T $(t=t_c)$ è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x=x_c$). E, per l'osservazione fatta innanzi, è sempre lecito ridursi al caso che i punti scambiati sieno contigui, e però indicabili con A_1 e A_2, e che i cappi contigui, $l_1=OA_1$ e $l_2=OA_2$, diventino onestamente vicini per $t=t_c$.

Adottando codesta ipotesi, studiamo l'effetto che ha sulle sostituzioni di R_0, un giro elementare intorno al nostro punto critico T. È chiaro che

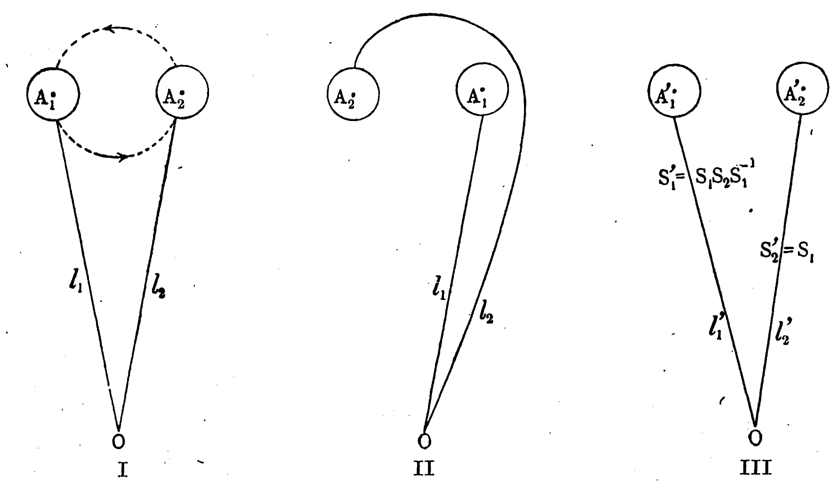

Fig. 3.

tale effetto si riduce a quello di un cerchio infinitesimo che circondi T, a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2, ognuno dei quali percorre uno dei due archi A_1A_2, indicati nella fig. 3, I: ciò è significato dalla relazione analitica

$$x-x_c=\lambda(t-t_c)^{\frac{1}{2}}+\dots.$$

Ebbene, osserviamo nella fig. 3 i tre disegni I, II, III, che rappresentano gli stati successivi della trasformazione, dove il passaggio dalla II alla III consiste nel trasportare l_2 dalla destra alla sinistra di l_1: vediamo così che le sostituzioni S_1 e S_2 si cambiano rispettivamente in

$$S_1' = S_1 S_2 S_1^{-1}$$
$$S_2' = S_1 .$$

E, frattanto, gli altri cappi l_3,.... non hanno subito alcun cambiamento.

Per il nostro scopo conviene esaminare successivamente le tre ipotesi che, a priori, si possono fare intorno alla natura degli scambi S_1 e S_2:

a) Gli scambi S_1 e S_2 sono uguali, e sia per esempio

$$S_1 = S_2 = (12).$$

In questa ipotesi

$$S_1' = S_1 , \quad S_2' = S_2 ,$$

cioè la nostra condizione d'invarianza è soddisfatta.

b) Gli scambi S_1 e S_2 sono diversi fra loro ma permutabili: e sia, per esempio

$$S_1 = (12), \qquad S_2 = (34).$$

In questa ipotesi resulterebbe

$$S_1' = S_2 = (34)$$
$$S_2' = S_1 = (12),$$

contrariamente alla nostra condizione d'invarianza. Dunque questa condizione *esclude il presentarsi dell'ipotesi b*) *rispetto ad un punto* T.

c) Gli scambi S_1 e S_2 non sieno permutabili e però sieno del tipo

$$S_1 = (12), \qquad S_2 = (23).$$

In questa ipotesi

$$S_1' = (13), \qquad S_2' = (12),$$

cioè S_1' e S_2' sono rispettivamente i trasformati di S_1 e S_2 mediante la sostituzione prodotto

$$S_2 S_1 = (123)^{-1}.$$

Ma questa conclusione è inconciliabile con la nostra *condizione d'invarianza* la quale *esclude* dunque *anche l'ipotesi c*).

Pertanto la condizione d'invarianza di R_0 significa che, *in corrispondenza ai punti* T, cioè alle tangenti semplici della curva di diramazione C, i *due punti contigui* (estremi di cappi onestamente vicini) *che ivi si scambiano, portano la medesima sostituzione sui rami della funzione* z.

2) Un punto D ($t = t_c$) è un punto critico apparente in cui confluiscono due punti A_1 e A_2 (vicini ad $x = x_c$) che possiamo ritenere contigui ed estremi di cappi onestamente vicini. Ora l'effetto di un giro elementare intorno a D si riduce a quello di un cerchio infinitesimo circondante D, a cui rispondono due cerchi descritti nello stesso senso dai punti A_1 e A_2, come è significato dagli sviluppi analitici

$$x_1 - x_c = \lambda_1(t - t_c) + \dots$$
$$x_2 - x_c = \lambda_2(t - t_c) + \dots,$$

dove x_1 e x_2 designano le coordinate di A_1 e A_2.

Sottraendo membro a membro si ha

$$x_1 - x_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_c) + \dots,$$

da cui risulta che la nostra trasformazione consiste nel far descrivere ad A_2 un cerchio intorno ad A_1. Ciò equivale a compiere successivamente due trasformazioni del tipo 1) (relative a punti T): infatti una trasformazione di quel tipo, dove si designano ancora con x_1 e x_2 le coordinate di A_1 e A_2, dà

$$x_1 - x_c = \lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots$$
$$x_2 - x_c = -\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

donde

$$x_1 - x_2 = 2\lambda(t - t_c)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

e però equivale alla rotazione di mezzo giro di A_2 intorno ad A_1. E, del resto, l'equivalenza d'un nodo di C a due tangenti è ben nota, secondo il principio di continuità.

Pertanto, senza bisogno di esaminare le figure di passaggio, si può qui affermare a priori che un giro elementare intorno a D porta S_1 e S_2 rispettivamente in

$$S_1' = S_2 S_1 S_2^{-1} \qquad S_2' = S_1 S_2 S_1^{-1}.$$

Ora si possono passare in rassegna le tre ipotesi *a*) *b*) *c*) considerate per i giri del tipo 1); e si arriva subito alla conclusione seguente: la *condizione d'invarianza* relativa alle sostituzioni di R_0 significa che, *in corrispondenza ai punti* D, cioè alle rette che vanno ai nodi della curva di diramazione C, i *due punti contigui* che ivi (onestamente) confluiscono portano *sostituzioni permutabili*, cioè sostituzioni identiche, come (12) (12), ovvero sostituzioni del tipo (12) e (34).

Ma conviene aggiungere che il caso delle *sostituzioni identiche* corrisponde a una particolarità della superficie F, $z = f(xy)$, cioè all'esistenza di un *punto doppio*, in generale *conico*

$$x = x_c, \quad y = t_c x_c, \quad z = f(x_c, t_c y_c).$$

3) Un punto Q $(t = t_c)$ è un punto di diramazione che scambia due punti A (vicini ad $x = x_c$), i quali possono ritenersi contigui ed estremi di cappi onestamente vicini, che verranno indicati con A_1 e A_2. Ora l'effetto di un giro elementare intorno a Q si riduce a quello d'un cerchio infinitesimo che circondi Q: a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2, ognuno dei quali percorre nello stesso senso tre archi successivi A_1A_2, come è significato dallo sviluppo

$$(x - x_c) = \lambda(t - t_c)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Pertanto, la trasformazione relativa a questo caso equivale al prodotto di tre trasformazioni del tipo 1): d'accordo col fatto che la cuspide assorbe tre tangenti infinitamente vicine.

Dopo ciò si vede senz'altro quale sia l'effetto di una trasformazione del tipo 3) nelle tre ipotesi *a*) *b*) *c*), che si presentano a priori possibili.

L'ipotesi *b*) in cui si abbiano sostituzioni permutabili non identiche è *scartata*. Dunque le *condizioni d'invarianza* per le sostituzioni di R significa che in *corrispondenza ai punti* Q, cioè alle rette che vanno alle cuspidi della curva di diramazione C, i *due punti contigui* che ivi si permutano portano sostituzioni identiche ovvero *sostituzioni concatenate*, cioè non permutabili del tipo (12) e (23).

Ma il caso delle *sostituzioni identiche* risponde all'esistenza di un *punto doppio* (*biplanare*) della superficie F.

IV. Ricapitolazione delle condizioni d'invarianza.

Innanzi di riassumere i resultati della nostra analisi, giova introdurre una conveniente nomenclatura, cui si accompagna un'osservazione essenziale per l'esatta comprensione dell'argomento.

Si considerino due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_t e — facendo variare t lungo un certo cammino descritto nel piano τ — si portino vicini ad un punto critico, che sia un T, o un D, o un Q; quindi si rendano contigui in modo che i relativi cappi diventino onestamente vicini (cfr. § III).

In seguito a questa trasformazione le sostituzioni relative ad A_r e A_s potranno divenire

identiche, come (12) e (12),
concatenate, come (12) e (23),
disgiunte, come (12) e (34):

nel primo caso diremo che nella riemanniana R_0 le *sostituzioni relative ad* A_r e A_s sono *identiche*, nel secondo e nel terzo che esse sono rispettivamente *concatenate* e *disgiunte, in rapporto al punto critico* t_c *e al cammino* che vi porta nel piano τ.

Ma, a giustificare questa definizione, conviene mostrare che: se le sostituzioni portate da due punti di diramazione A_r e A_s della riemanniana R_0 diventano identiche, concatenate o disgiunte, in relazione ad un cammino che vada a t_c, per una certa trasformazione dei cappi, altrettanto accade per qualunque altra trasformazione dei cappi (che renda sempre contigui e onestamente vicini l_r e l_s).

Infatti se l_r e l_s sono contigui e onestamente vicini, rispetto ad ogni trasformazione che li conservi tali, essi possono sostituirsi con un unico cappio l_{rs} che avvolga insieme A_r e A_s, ed allora, ogni qual volta l_{rs} traversi un punto di diramazione A_i, le relative sostituzioni S_r e S_s sono egualmente trasformate con S_i, e quindi rimangono, come all'inizio, concatenate o disgiunte.

Dopo ciò possiamo riassumere i resultati della nostra analisi nel seguente enunciato:

Sia C la curva di diramazione d'un piano n-plo, rappresentativo d'una superficie F e, nella riemanniana ad n fogli che risponde alla retta del fascio

$y = tx$ (da ritenere come retta n-pla i cui punti di diramazione sono le intersezioni $A_1 A_2 \dots A_m$ con C) si considerino *i due punti di diramazione* $\mathrm{A_r}$ *e* $\mathrm{A_s}$ *che vengono a confondersi in un punto critico* $\mathrm{t} = \mathrm{t_c}$: allora, *per qualunque cammino di* t *che vada al punto critico* $\mathrm{t_c}$, *le sostituzioni portate da* A_r e A_s dovranno essere

1) *identiche rispetto ad ogni punto* T, cioè ad una *tangente semplice* per $O = (00)$;

2) *disgiunte rispetto ad ogni punto* D, cioè ad ogni *nodo* di C, che non risponda ad un punto doppio (conico) della superficie F (ed invece identiche se D risponde ad un punto conico);

3) *concatenate rispetto ad ogni punto* Q, cioè ad ogni *cuspide* di C, che non risponda ad un punto doppio (biplanare) della superficie F (ed invece identiche se Q risponde ad un punto biplanare).

V. Teorema d'esistenza.

Il teorema enunciato nel precedente paragrafo s'inverte e si hanno quindi le condizioni, non più soltanto necessarie, ma altresì sufficienti, perchè la curva piana C sia curva di diramazione d'un piano n-plo.

Queste si possono enunciare dicendo che « fra le riemanniane ad n fogli R_t che si possono costruire sopra un raggio $y = tx$ variabile per un punto generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni con C, deve esservene una che rimanga invariata per qualsiasi giro chiuso del parametro complesso t ».

E spiegando poi tali condizioni d'invarianza, secondo l'analisi del precedente § IV, si avrà il *teorema d'esistenza*, nella forma che gli daremo a conclusione di questo paragrafo.

Cerchiamo intanto di dimostrare il nostro asserto: partendo dall'ipotesi d'invarianza della R, faremo vedere che essa permette di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n-plo, che abbia come curva di diramazione C.

Invero la nostra ipotesi porta che, in corrispondenza d'una retta a variabile per O ($y = tz$, $z = 0$), si possa costruire una famiglia di curve birazionalmente identiche, rappresentabili sopra una delle rette n-ple che hanno come punti di diramazione le intersezioni di a con C (che viene distinta fra le altre rette n-ple analoghe), la quale famiglia ritorna in se stessa quando a, variando comunque entro il fascio, ritorni alla posizione iniziale.

Ora codesta famiglia potrà essere proiettivamente realizzata mediante un sistema di curve K_{n+h}, d'un ordine $n+h$ abbastanza alto, giacenti nel piano verticale $y=tx$, e passanti h volte per il punto all'infinito dell'asse z; inoltre a K_{n+h} si potrà anche imporre di segare z in n punti $1, 2, \ldots n$, che rimangano fissi al variare di t. Aggiungendo condizioni complementari, si determinerà in tal guisa un numero finito s di K_{n+h}, ossia s funzioni algebriche $z=\varphi_t^{(i)}$:

$$z^{(1)}=\varphi_t^{(1)}(x),$$
$$z^{(2)}=\varphi_t^{(2)}(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$z^{(s)}=\varphi_t^{(s)}(x),$$

ciascuna ad n rami.

Quindi si determinerà razionalmente la funzione

$$z=\frac{1}{n}(z^{(1)}+z^{(2)}+\ldots+z^{(s)}),$$

che risponderà ad *una* K_{n+h}, passante ancora per i punti fissi $1, 2, \ldots n$.

Al variare del piano $y=tx$ nel fascio che ha per asse l'asse z, codesta K genererà una superficie F, che a priori potrà supporsi passare un certo numero r di volte per l'asse z, e quindi avere l'ordine $n+h+r$. Per proiezione dal punto all'infinito dell'asse z questa F riesce rappresentata sul piano n-plo che ha come curva di diramazione C.

L'affermazione precedente solleva soltanto il dubbio critico che, in corrispondenza a particolari piani del nostro fascio, la K_{n+h} — che si mantiene sempre *algebricamente irreducibile* almeno finchè la traccia del piano non diventi tangente (propriamente o impropriamente) a C — possa *degenerare proiettivamente* in una curva multipla, cui vada sommato l'asse z e forse qualche altra retta parallela ad esso: ciò che porterebbe a completare la curva di diramazione del piano n-plo rappresentativo di F, aggiungendovi delle rette per O. Ma questo dubbio si può escludere osservando che, per h abbastanza alto, la degenerazione proiettiva di una delle nostre K_{n+h} esige più che *una* condizione ([1]), dimodochè la costruzione può farsi in modo che non si presenti la circostanza sfavorevole sopra accennata.

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema d'esistenza, come segue:

Teorema d'esistenza. Sia C una curva piana (posta nel piano $z=0$), d'un certo ordine pari $m=2n+2\pi-2$, dotata d'un certo numero di nodi

([1]) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* L. 5, § 33, Vol. III, pag. 363.

e di cuspidi, che ci proponiamo di assumere come curva di diramazione d'una funzione algebrica di due variabili $z = f(xy)$. La *condizione d'esistenza* di questa funzione è che:

fra le riemanniane R_t determinate sopra un raggio, a, variabile nel fascio di centro generico $O = (000)$, prendendo come punti di diramazione le intersezioni $A_1 A_2 \ldots A_m$ con C, ve ne sia una tale che:

per ogni giro elementare descritto dal parametro complesso t, *le sostituzioni relative a due* qualunque *punti* di diramazione, *che vadano a coincidere nel punto di contatto d'una tangente, sieno identiche rispetto a questo*;

le sostituzioni relative a due punti che vadano a coincidere in un *nodo* sieno, in relazione a questo, *disgiunte*;

ed infine quelle di due punti che vadano a coincidere in una *cuspide*, sieno, in relazione ad essa, *concatenate.*

Ora questo enunciato si può semplificare osservando che tutti i giri elementari, descrivibili da t — nel suo piano τ — intorno ai punti critici già designati con T e D e Q, si lasciano comporre mercè un sistema primitivo di cappi che circondino codesti punti. Infatti se, per esempio, si giri attorno ad un certo punto T mediante due cammini che avvolgano un punto Q, la condizione d'invarianza di R_t essendo soddisfatta per il primo cammino in rapporto al T e poi anche per il cappio che avvolge il Q in rapporto al Q, ne segue che essa verrà soddisfatta anche per il secondo cammino rispetto al T. Così dunque potremo enunciare il

Teorema d'esistenza nella forma semplificata. *Affinchè la curva piana* C *possa assumersi come curva di diramazione d'un piano n-plo, basta che le sostituzioni relative ai punti di diramazione di una* R_t *sieno rispettivamente identiche, disgiunte o concatenate in relazione alle tangenti semplici o ai nodi o alle cuspidi di* C, *per un certo sistema di giri elementari o cappi avvolgenti quei punti critici, nel piano della variabile complessa* t.

Ottobre 1923.