
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sulle singolarità algebriche

Rend. Sem. Mat. Univ. Roma (II) I (1924), pp. 31-37.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

*promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali*

Seduta 5^a — 17 marzo 1923.

CONFERENZA DEL PROF. FEDERIGO ENRIQUES

Sulle singolarità algebriche.

Il problema delle singolarità delle funzioni algebriche o algebroidi ha un significato generale in ordine alla veduta di continuità che domina l'intero sviluppo delle Matematiche.

In molti problemi accade di considerare funzioni o enti che dipendono in qualche maniera da un gruppo di r punti G , assegnabili arbitrariamente nel piano o nello spazio, e vi è luogo a ricercare che cosa accada nel caso singolare in cui i punti di G vengono a coincidere. Non si può dare una risposta generale a questa domanda, pur supponendo che il detto caso possa venire determinato come caso limite del caso generale. Infatti diversi esempi — quali possono trarsi dalla considerazione delle curve di *Klein-Lie*, traiettorie di un gruppo semplicemente infinito d'omografie, ovvero dagli integrali abeliani di seconda specie che si ottengono come limiti d'integrali di terza specie elementari — conducono a risposte essenzialmente diverse. Ma si possono fare, tuttavia, alcune riflessioni d'ordine generale intorno alla questione preliminare che qui si presenta: dove si tratta di caratterizzare i diversi modi secondo cui i punti del gruppo G possono venire a coincidere. Invero:

1) può darsi che gli r punti di G vengano a coincidere in un *punto multiplo*, O , che resulti indipendente dal modo di concorso dei punti di G : si ha così un caso che può designarsi come *amorfo*, di cui offre esempio la considerazione del gruppo delle omografie piane in cui due punti uniti si avvicinano al terzo O , secondo direzioni distinte (poichè tali omografie sono omologie speciali di centro O);

2) ma può darsi invece che il caso limite, che si tratta di caratterizzare, dipenda essenzialmente dal modo del passaggio al limite, sicchè il punto O , in cui concorrono i punti di G , debba essere ritenuto, non già come un punto multiplo, bensì come la riunione di *punti infinita-*

mente vicini: così accade nel caso che i tre punti uniti d'un'omografia vengano a coincidere muovendosi per esempio sopra un cerchio, poichè il gruppo delle omografie limiti varia al variare di questo. Il caso di cui qui si tratta potrebbe designarsi, per opposizione al precedente, come caso *crystallino*.

Ma, in generale, si avrà — in qualche modo — la sovrapposizione dei due casi, amorfo e cristallino, vale a dire che converrà decomporre il passaggio al limite, ritenendo che i punti di G si distribuiscano in più gruppi G_1, G_2, \dots , concorrenti in punti multipli, che diventano infinitamente vicini in una maniera determinata: e nasce qui il problema di caratterizzare in generale questa maniera, che significa appunto *definire* in generale i punti infinitamente vicini.

Il problema delle singolarità delle curve algebriche (nel piano o nello spazio, a tre o più dimensioni) si può riguardare come il problema tipico dell'ordine di questioni sopra indicato. Tantochè, dopo avere studiato convenientemente questo problema, vi è luogo a vedere come ad esso si lascino ricondurre altri problemi, in cui giuoca l'avvicinamento di più punti, e che in passato non si era pensato di riguardare sotto tale aspetto: per esempio il problema degli elementi uniti delle omografie negli spazi ad n dimensioni (connesso alla classica teoria delle forme bilineari e dei divisori elementari di *Weierstrass*).

L'oratore richiama, a larghi tratti, le origini della teoria delle singolarità algebriche, nella scuola di *Newton*, a cui risale il diagramma che permette di separare i rami d'una curva, nell'intorno dell'origine, distinguendo gli ordini d'infinitesimo dei vari termini dell'equazione. E dice come questo metodo si sia sviluppato da *De Gua* e *Cramer*, anche in rapporto alla geometria assintotica delle curve; in particolare ricorda come da *Cramer* sieno state caratterizzate le singolarità dei rami reali: flesso con curvatura nulla o infinita, cuspide con curvatura infinita o nulla (i cui archi sono separati o no dalla tangente), ogiva e punto in cui la curva rimane tutta da una parte della tangente ed ha curvatura infinita.

Ricorda poi come nella stessa scuola di *Newton* sia sorto il problema della rappresentazione analitica dei rami mediante serie di potenze (*Taylor* e *Mac-Laurin*), che attraverso *Lagrange*, *Cauchy* e *Puiseux* ha ricevuto una risposta precisa e generale, nel campo delle variabili complesse.

Agli sviluppi di Puiseux si legano gli studi proseguiti da *Smith* e *Halphen* in ordine al problema delle *molteplicità d'intersezioni* di due curve o rami di curva. Ma un'idea essenzialmente nuova è stata qui introdotta da *Max Noether*, di cui l'oratore rammenta la recente perdita, rievocando l'impulso fecondo che egli dette alla geometria algebrica e gli stretti legami che lo avvinsero alla scuola italiana. A Noether appartiene l'idea di riguardare ogni singolarità di una curva come la riunione di punti multipli infinitamente vicini, che si riducono a punti propri mercè successive trasformazioni quadratiche del piano.

Nel pensiero dei più prossimi interpreti e chiarificatori della dottrina di Noether, la trasformazione quadratica riduttrice porge la vera *definizione* dei *punti infinitamente vicini*, che così appaiono in una luce puramente *convenzionale*. Invece l'oratore è partito dall'idea di attribuire ai punti infinitamente vicini un *massimo di realtà* e di figurarli nella loro successione, tutti insieme presenti in uno schema, che indichi, non solo le loro molteplicità, sì anche le loro *posizioni*. Da questo punto di vista i risultati di *Noether* e in specie il rapporto fra gli sviluppi di *Puiseux*, *Smith*, *Halphen* e il concetto dei punti infinitamente vicini, gli è apparso in una luce nuova.

L'oratore descrive più precisamente lo *schema grafico* in cui egli figura i punti multipli successivi di un ramo e spiega ciò che conferisce *realtà analitica* al detto schema: i punti infinitamente vicini, al pari dei punti propri, vengono determinati mediante coordinate, che tuttavia possono essere finite o infinite, e il passaggio di una curva con certe molteplicità per punti siffatti si traduce in *condizioni differenziali* che appaiono come limite delle analoghe condizioni di passaggio per punti propri. Il caso in cui si presentano punti infinitamente vicini che dipendono da coordinate infinite (corrispondente ai rami superlineari), dà luogo a definire i *punti satelliti* connessi ad un dato punto improprio; e l'oratore spiega l'importanza di questo concetto.

Ora il problema di scrivere le anzidette condizioni differenziali appartiene ad un capitolo del calcolo differenziale a cui si dà poco sviluppo nelle esposizioni ordinarie, e che tuttavia è essenziale, per esempio, ove si voglia una trattazione assolutamente generale delle questioni di massimo e minimo delle funzioni di più variabili. L'oratore spiega anzitutto la forma sotto cui conviene dare l'espressione generale delle derivate di una funzione implicita o di una funzione composta, rilevando

l'analogia collo sviluppo della potenza di un polinomio. Partendo da questa formula, si scrivono - nel modo più semplice - le condizioni differenziali che caratterizzano il passaggio di una curva $f(x, y) = 0$ per punti $O, O_1, O_2 \dots$ succedentisi sopra un ramo lineare, nei quali s'impongano alla curva certe molteplicità $r, r_1, r_2 \dots$; giacchè si tratta di annullare identicamente:

1) sopra le rette (o curve) per $O \equiv (0, 0)$ i differenziali $d^i f$ per $i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$;

2) sopra le parabole per O, O_1 , $\left(x = y = 0, \frac{dy}{dx} = y'\right)$ i differenziali:

$$d^i f \quad \text{per} \quad i = r, r + 1, \dots, r + r_1 - 1;$$

3) sopra le parabole per O, O_1, O_2 (cioè per $x = y = 0, \frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$) i differenziali:

$$d^i f \quad \text{per} \quad i = r + r_1, r + r_1 + 1, \dots, r + r_1 + r_2 - 1 \text{ ecc.}$$

A tale scopo si ponga:

$$\Delta_{m+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_m} \right)$$

con

$$y_i = \frac{d^i y}{dx^i};$$

avremo la derivata totale:

$$\frac{d^m f}{dx^m} = \Delta_m \dots \Delta_2 \Delta_1 f = \Delta_m^m f.$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \Delta_2^{r+s} f = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} \Delta_2^{r+s} f = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial^{n-1}}{\partial y_2^{n-1}} \Delta_2^{r+s} f = 0 \\
 \Delta_2^{r+s+1} f = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial^{n-2}}{\partial y_2^{n-2}} \Delta_2^{r+s+1} f = 0, \\
 \dots \\
 \dots \\
 \Delta_2^{r+s+n-1} f = 0
 \end{array} \right\} O_2^n$$

(x = y = 0, \quad y_1 = y', \quad y_2 = y'')

Dopo ciò si può passare al caso dei punti succedentisi su rami non lineari, e quindi dei punti satelliti, in due modi diversi:

1) o cercando le condizioni limiti a cui si riducono le precedenti quando qualcuna delle derivate successive y'' , $y''' \dots$ diventi infinita;

2) ovvero scrivendo la rappresentazione parametrica dei rami superlineari sotto la forma di Puiseux e annullando identicamente i differenziali della funzione composta $d^i f$ sopra i rami che passano per i punti infinitamente vicini di cui si tratta.

I due metodi conducono, com'è naturale, al medesimo risultato, purchè il passaggio al limite si decomponga in più passaggi successivi, convenientemente fatti, quando si vogliono considerare le condizioni offerte alla curva f da più punti successivi, satelliti d'un medesimo.

L'oratore si ferma quindi ad illustrare il secondo metodo, riferendosi al caso più semplice e caratteristico in cui si tratta delle condizioni di passaggio d'una curva per un gruppo di punti satelliti d'un punto O_1 ($y' = 0$) infinitamente vicino all'origine; e spiega come esso conduca a separare in gruppi secondo un certo *diagramma delle partizioni triangolari* il sistema delle condizioni esprimenti che $y' = 0$ è radice multipla di $\Delta_1^r f$, $\Delta_1^{r+1} f \dots \Delta_1^{r+s-1} f$, con ordini di molteplicità assegnati.

Questi ordini vengono figurati sopra orizzontali successive da tanti gruppi di punti incolonnati: nel caso che la curva debba passare soltanto per O_1 e non per punti satelliti, le molteplicità sono:

$$s, \quad s_1 = s - 1, \quad s_2 = s - 2, \dots,$$

e quindi il sistema dei punti porge semplicemente la figura d'un triangolo; quando invece si tratti del passaggio per O_1 e per un punto satellite O_{11} , con eguale molteplicità s , gli ordini anzidetti sono:

$$2s, \quad 2s - 2, \quad 2s - 4, \dots,$$

sicchè i relativi gruppi di punti si distribuiscono in due triangoli equivalenti, ciascuno dei quali ne comprende $\frac{s(s+1)}{2}$ ecc.

Ma è impossibile riassumere la conferenza che è stata, essa stessa, il riassunto delle teorie esposte nel 2° volume delle « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche » di *F. Enriques* e *O. Chisini*. L'oratore accenna soltanto ai complementi successivi che siffatte teorie hanno ricevuto per opera del Dottor Chisini.
