
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sur la théorie des équations et des fonctions
algébriques d'après; l'école géométrique
italienne

Enseign. Math. **XXIII** (1924), pp. 309-322.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 - Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS
ET DES FONCTIONS ALGÈBRIQUES
D'APRÈS L'ÉCOLE GÉOMÉTRIQUE ITALIENNE¹

PAR

Federigo ENRIQUES (Rome).

1. — Lorsqu'on parle de géométrie, il n'est pas rare de rencontrer une certaine méfiance parmi des mathématiciens qui n'ont pas oublié la rivalité qui existait autrefois entre l'école des analystes et celle des géomètres, lorsque la pureté de la méthode, analytique ou synthétique, semblait constituer l'idéal de la science.

On aime à croire quelquefois que cette rivalité est terminée par la simple mort de l'une des deux écoles rivales, et précisément de l'école géométrique, puisque les fins que celle-ci poursuivait — soit la description de figures remarquables, leurs générations ou transformations, etc. — ont perdu en grande partie de leur intérêt pour les mathématiques contemporaines. Aussi celui qui vient vous entretenir aujourd'hui de questions géométriques, risque d'être écouté un peu comme un survivant, qui vous parlerait de problèmes déjà dépassés par la pensée scientifique.

Il est vrai, Messieurs, je suis bien loin de le nier, que certaines manières d'envisager les problèmes de la géométrie — tant au point de vue de la méthode qu'au point de vue des buts que se proposaient les chercheurs — ont actuellement perdu dans une large mesure leur attrait. D'autre part, dans le domaine algébrique qui formera l'objet de ma conférence, l'emploi constant de l'imaginaire, ainsi que l'introduction d'un nombre de dimensions supérieur à trois, ôtent à la science de l'espace son sens visuel ordinaire, de façon qu'elle reste seulement un *langage*

¹ Conférence faite à la réunion du printemps de la Société mathématique suisse, tenue à Lugano, le 22 avril 1924.

imaginatif, propre à exprimer des faits qui appartiennent à l'analyse. Enfin, si vous le voulez, je puis bien admettre que la voie du progrès dans nos idées géométriques est semée de quelques cadavres. Mais, ici, comme toujours, la mort a joué le rôle qui lui revient par sa nature, dans l'évolution de la vie; je veux dire qu'elle n'est que l'aspect négatif d'une transformation profonde qui a réussi à renouveler l'esprit de la science. Et cette évolution est bien ce qui constitue la véritable justification historique de l'opposition entre analystes et géomètres que je rappelais tout à l'heure. A ce point de vue l'effort même des puristes a joué un rôle important, en amenant une adaptation mutuelle de deux ordres de concepts, qui se rattachent à des formes différentes de l'intuition mathématique.

C'est ainsi que Darboux a pu dire qu'au dernier siècle le développement autonome de la géométrie — qui, après l'introduction des coordonnées et l'invention du calcul infinitésimal, était devenue un champ ouvert à l'application de l'analyse — a contribué *dans une large mesure au renouvellement de la science mathématique toute entière, en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde.*

2. — C'est au domaine des équations et des fonctions algébriques que s'est attachée particulièrement l'école des géomètres italiens et il est juste de reconnaître ici que leur conception géométrique de ces problèmes a élargi et transformé la position classique des problèmes de l'algèbre.

Cette influence de la conception géométrique se montre déjà dans la considération du cas du système *déterminé*, qu'on ramène traditionnellement au cas type d'une équation unique, renfermant une seule inconnue. En effet, d'une manière générale, le traitement de problèmes où il s'agit de déterminer algébriquement un nombre fini d'objets, nous met en présence d'un certain nombre n d'équations compatibles entre $m \leq n$ inconnues, et le plus souvent il est pratiquement impossible d'effectuer les opérations d'élimination qui devraient réduire le système à une équation unique.

Pour le géomètre, il n'y a aucune difficulté à raisonner, par

exemple, sur un nombre fini de points qui constituent un groupe G , donné par les intersections de courbes planes ou de surfaces dans l'espace, ou même de variétés à plusieurs dimensions. et cela sans qu'il ait à former l'équation résultante dont on peut faire dépendre la détermination de G . Et il n'a pas besoin de développements de calcul pour comprendre que tout ce que l'on dit des fonctions symétriques ou des groupes de substitutions sur les racines de cette résultante, s'étend de suite aux fonctions symétriques ou aux groupes de substitutions définis par rapport aux points de G .

Mais la considération générale du système d'équations déterminé donne lieu à des problèmes que celui qui se rapporterait constamment à une équation unique ne pourrait même pas soupçonner, en premier lieu déjà au problème du calcul du nombre des solutions, qui est le degré de la résultante. Les exemples les plus simples tirés de la géométrie montrent la difficulté de cette recherche. Que l'on se propose, par exemple, d'évaluer le nombre des droites appartenant à une surface cubique générale, f_3 ; ce nombre est, comme on le sait, égal à 27, mais en écrivant les conditions pour qu'une droite appartienne à f_3 , on obtient d'abord une équation d'ordre 81, dont il faut écarter une partie des solutions: la géométrie nous montre aisément les raisons de la mise à l'écart de ces solutions.

En d'autres cas, la considération d'un système d'équations rencontre des difficultés que l'on ne sait pas vaincre d'une manière directe, mais devant lesquelles l'intuition géométrique nous aide d'une façon indirecte en transformant le problème par une vision de continuité. Pour citer un exemple très simple, supposons qu'il s'agisse de trouver les équations réductibles qui appartiennent à un système linéaire d'équations quadratiques

$$\lambda_1 f_1(xyz) + \lambda_2 f_2(xyz) + \lambda_3 f_3(xyz) + \lambda_4 f_4(xyz) = 0 .$$

Il suffit de remarquer que, par une variation continue des coefficients, ce système se réduit à celui des surfaces de second ordre passant par six points 1, 2, 3, 4, 5, 6. On voit alors qu'il y a dix couples de plans analogues au couple 1, 2; 3, 4; 5, 6 et renfermant les six points, et on conclut que le problème général proposé admet également dix solutions.

C'est là le *principe* bien connu de la *conservation du nombre*, qui se dégage du principe de continuité de PONCELET, et qui est devenu par l'œuvre de mathématiciens tels que DE JONQUIÈRES, CREMONA, CAYLEY, ZEUTHEN et SCHUBERT, la base d'une méthode systématique de recherche. Je n'insisterai pas sur les développements que cette méthode a reçus dans l'école italienne, en particulier par les travaux de SEGRE, CASTELNUOVO, PIERI, SEVERI, etc. ¹; je me bornerai seulement à rappeler que, parmi les résultats obtenus, il y a aussi la détermination rigoureuse des conditions de validité du principe en question, dont quelques-unes seulement avaient été reconnues par ZEUTHEN et SCHUBERT.

3. — Le cas du système déterminé auquel se rapportent les considérations qui précèdent, n'est qu'un cas particulier dans la théorie générale des systèmes d'équations renfermant plusieurs inconnues. Or c'est dans cette théorie générale que la conception géométrique déploie encore davantage ses effets, tant au point de vue de la position des problèmes qu'au point de vue de leur résolution.

A un système d'équations quelconque correspond une variété algébrique, qui en général sera composée de plusieurs parties irréductibles. Chacune de celles-ci pourra être ramenée par une transformation, qui équivaut à une projection, à une variété d'un certain nombre n de dimensions appartenant à un espace de $n + 1$ dimensions, et qui sera représentée par une équation unique entre $n + 1$ variables.

Les systèmes d'équations ou les équations entre plusieurs variables, amènent à des problèmes généraux de deux ordres:

1^o les problèmes qui touchent à la résolution d'une équation donnée, où il s'agit d'exprimer une partie des inconnues au moyen des autres ou même toutes les inconnues au moyen de paramètres arbitraires;

2^o les questions d'existence où il s'agit de discuter, de différentes façons, les conditions d'existence de fonctions algé-

¹ Comparez par ex.: ENRIQUES-CHISINI: «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e della funzioni algebriche», 1^o 3 Cap. 4. Vol. II. Bologna, Zanichelli, 1918.

briques que l'on assujettit à des conditions particulières, par exemple, à avoir des singularités données, etc.

Je parlerai d'abord de quelques problèmes de résolution, en commençant par le cas le plus simple où il y a une seule variable indépendante. C'est le cas d'une courbe, qu'il est indifférent de supposer plane ou gauche et appartenant à un espace d'un nombre quelconque n de dimensions. L'équation ou le système d'équations correspondant seront résolus de la façon la plus simple, si l'on réussit à exprimer les n inconnues (liées par $n - 1$ équations indépendantes) par des fonctions rationnelles d'une variable indépendante. La question de résolution rationnelle qui se pose ainsi, trouve une réponse dans le théorème de CLEBSCH d'après lequel *les courbes unicursales sont caractérisées par le fait que leur genre p est égal à 0*. Le genre d'une courbe est défini, comme on le sait, par de simples caractères algébriques.

De même les conditions pour qu'une équation $f(x, y) = 0$ puisse être résolue par des fonctions elliptiques d'un paramètre, s'expriment en posant le genre $p = 1$; cette condition répond aussi à la transformabilité de $f(x, y) = 0$ en une équation du troisième ordre ou à sa résolubilité par des fonctions rationnelles d'un paramètre et d'une racine carrée, portant sur un polynôme du quatrième degré de ce paramètre.

D'une manière générale les problèmes de résolution des équations algébriques $f(x, y) = 0$, conduisent à la classification des courbes par rapport aux transformations birationnelles et aux types normaux de RIEMANN ou de BRILL et NÖTHER. On trouve que chaque classe est déterminée par la valeur du genre et par certaines constantes caractéristiques qu'on appelle les *modules* de la classe; pour $p > 1$, leur nombre est $3p - 3$.

4. — Passons du cas des courbes à celui des surfaces, et rappelons d'abord, très sommairement, comment la notion du genre s'étend à ce cas d'après NÖTHER et ZEUTHEN, sans nous arrêter d'ailleurs sur les développements que la théorie des invariants a reçu grâce à l'école italienne ¹. En désignant par f une

¹ Cf. CASTELNUOVO et ENRIQUES: « Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus ». Encyclopädie der Math. Wissenschaften, III, C. 6 b.

surface d'un certain ordre n , on forme des *polynômes adjoints* d'ordre $n - 4$, φ_{n-4} , qui s'annulent sur la courbe double de f . Le nombre de ces polynômes adjoints linéairement indépendants, nombre qui a une signification invariante par rapport aux transformations bi-rationnelles, est ce que l'on appelle le *genre géométrique* de f . On le désigne ordinairement par p_g . D'autre part, sous certaines hypothèses, on obtient une expression virtuelle de ce même nombre, formée au moyen des caractères de la courbe double de f , et qui fournit dans tous les cas un invariant de f . On a ainsi le *genre numérique* p_a . Enfin à côté de p_g et de p_a , on considère encore le genre linéaire $p^{(1)}$, qui est donné par le genre des courbes découpées sur f par les φ_{n-4} .

Pour une surface rationnelle on a: $p_g = p_a = 0$. Mais ces conditions nécessaires ne suffisent pas à déterminer la classe des surfaces rationnelles. En effet, une circonstance est à remarquer, qui a son analogie dans la théorie des nombres idéaux. Il peut arriver que pour une surface f , d'ordre n , les surfaces adjointes φ_{n-4} manquent, tandis qu'il existe des surfaces *biadjointes* d'ordre $2n - 8$, passant doublement par la courbe double de f . Le système découpé sur f par ces Φ_{2n-8} se présente alors comme le double d'un système canonique qui n'existe pas, et il conduit également à des invariants de f . Le nombre des Φ_{2n-8} linéairement indépendantes est un caractère de f que j'ai appelé le *bigenre* ou genre d'ordre 2, P_2 ou P , et on a

$$P \cong p_g .$$

Pour une surface rationnelle on a toujours

$$P = 0 ,$$

mais réciproquement le bigenre ne s'annule pas nécessairement avec le genre p_g ou p_a . C'est ainsi, par exemple, que pour la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre on a $p_a = p_g = 0$, tandis que le bigenre $P = 1$. Par contre M. CASTELNUOVO a démontré que les conditions de rationalité d'une surface se ramènent à annuler en même temps le genre, géométrique et numérique, et le bigenre; elles se réduisent d'ailleurs à $p_a = P = 0$.

Un problème plus général, qui renferme celui des surfaces

rationnelles, est celui de la détermination des surfaces $f(xyz) = 0$, représentables paramétriquement par des fonctions rationnelles d'un paramètre et algébriques d'un autre, c'est-à-dire des surfaces que l'on ramène par une transformation birationnelle au type du cylindre $\varphi(uv) = 0$. Pour résoudre ce problème, la considération du bigenre ne suffit plus; il est nécessaire d'introduire encore des genres d'ordre supérieur ou plurigenres P_3 , P_4 , Et alors, résultat remarquablement simple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface puisse être ramenée au type du cylindre sont simplement $P_4 = P_6 = 0$.

Les genres d'ordre supérieur ou plurigenres jouent aussi un rôle dans le problème général de la classification des surfaces, à côté des genres p_a et p_g , et du genre linéaire $p^{(1)}$. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on parvienne à définir ainsi toutes les familles de surfaces, ou de classes de surfaces, dépendant de paramètres ou modules arbitraires. A ce sujet il faut s'attendre à des complications qui n'ont pas leur analogue dans la théorie des courbes. Je me bornerai à vous en donner un exemple. Tandis que les surfaces pour lesquelles $p_a = P_3 = P_5 = \dots = 0$, $P_2 = P_4 = \dots = 1$, se ramènent à la famille des surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, au contraire les surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, $p_a = P_i = 1$, donnent lieu à une infinité de familles distinctes, renfermant chacune 19 modules. La première de ces familles est constituée par les surfaces du quatrième ordre, la seconde par les surfaces du sixième ordre passant doublement par une courbe du même ordre qui appartient à une quadrique, etc.

5. — Les quelques exemples que je viens de citer, et d'autres analogues sur lesquels je ne m'arrêterai pas, montrent que les questions algébriques se rattachent étroitement aux questions de nombres; dans un sens élargi, elles constituent le même domaine du discret, où il semble difficile d'apercevoir *a priori* l'unité d'une loi. Et pourtant, dans un autre sens très fécond, c'est bien la loi de continuité qui règne dans ce domaine; cette même loi que nous avons reconnue sous une forme particulière dans le principe d'*invariance du nombre*, et qu'il faut découvrir partout sous des apparences contradictoires. En effet, si les

problèmes de classification amènent à différentier des familles de courbes ou de surfaces qui répondent à des caractères entiers et renferment chacune une infinité continue de classes, le passage d'une famille à d'autres est toujours possible d'une façon continue, bien qu'il soit nécessaire de passer par des cas de dégénérescence, qui n'offrent au premier abord que l'aspect de la discontinuité.

Il y a d'ailleurs plusieurs manières d'envisager la continuité du monde algébrique. Celle qui est immédiatement suggérée par ce qui précède, est la *continuité fonctionnelle*. En cet ordre d'idées, après avoir établi que la famille des courbes de genre p ($= 1, 2, 3 \dots$) renferme une infinité continue de classes qui, pour des valeurs singulières des modules, comprend les courbes de genre $p - 1$, on tâche de ramener l'étude des fonctions de genre p au cas plus simple de $p = 0$. On arrive alors à reconnaître qu'en effet les propositions fondamentales pour p quelconque se réfléchissent dans ce cas particulier, où il s'agit de considérer tout simplement les fonctions rationnelles d'une variable, par rapport à p couples de points de niveau que l'on doit supposer donnés d'avance¹.

6. — Si l'état actuel de la théorie ne nous permet pas encore d'atteindre à une vue analogue concernant les surfaces, l'exemple des courbes montre néanmoins que l'intuition géométrique, par ce qu'elle a de dynamique, nous aide à percevoir la persistance de propriétés qui semblent s'évanouir aux yeux de l'analyste.

C'est ainsi que la continuité se laisse découvrir directement dans la genèse des singularités. Tandis que l'enseignement ordinaire de l'analyse insiste sur les exceptions que présentent pour une fonction algébrique $y = f(x)$ ses points singuliers, c'est-à-dire les pôles et les points de ramification, où la fonction elle-même ou sa dérivée deviennent infinies, la géométrie nous apprend au contraire à relier ces exceptions aux points où la fonction est régulière. D'abord le pôle n'est qu'un point de la droite (x) auquel correspond le point à l'infini de la droite y , qui, pour la géométrie projective ne se distingue en rien des

¹ Cf. Enriques, *Math. Annalen*, t. 85.

autres points de la droite. Pour ce qui est d'un point de ramification, dans le cas le plus simple, ce n'est qu'un point de la courbe où la tangente devient parallèle à l'axe des y .

D'autre part on obtient des points singuliers plus élevés par la superposition de plusieurs points de ramification simples: deux points de ramification qui viennent se superposer, engendrent un point de ramification d'ordre supérieur (correspondant à un cycle de troisième ordre) ou bien un point double de la courbe algébrique, qui est un point critique apparent pour deux branches de la fonction algébrique. Mais en ce dernier cas encore, si un nouveau point de ramification s'approche du point double, les deux branches se fondent en une seule de second ordre, ayant un point de ramification.

L'étude des points singuliers des courbes ou des fonctions algébriques, étendue aux cas les plus élevés, constitue une théorie à laquelle ont travaillé, après PUISEUX, HALPHEN et NÖTHER, et qui a progressé ces derniers temps grâce à l'école géométrique italienne. Cette étude a conduit à développer d'une manière systématique un chapitre du calcul différentiel, se rattachant à l'école de NEWTON, qui est généralement un peu négligé. On est arrivé à se familiariser avec des passages à la limite qu'on réussit à exprimer par un schéma graphique, de sorte que l'on a l'impression de toucher du doigt à des points infiniment voisins et à des dérivées infinies d'ordres différents.

En réalité le schéma graphique ne fait qu'exprimer la génération de la singularité, d'après une loi de continuité, qui se traduit par des conditions différentielles tout à fait précises. Aussi, obtient-on, à plusieurs points de vue, un véritable complément de la théorie des cycles de Puiseux. Tandis que les substitutions considérées par Puiseux ne suffisent pas à déterminer la nature du point singulier, on réussit cette détermination en donnant à chaque cycle d'ordre n un exposant, qui peut dépasser n , et qui résulte, entièrement défini, de la loi de continuité. Ce dernier résultat a été établi tout récemment par M. CHISINI.

7. — Cette vue féconde qui consiste à chercher le continu dans le discontinu, porte aussi des contributions importantes

à des questions d'algèbre qui touchent de plus près à l'arithmétique. C'est ainsi que M. B. LEVI, après POINCARÉ, a éclairé par des méthodes géométriques le problème des solutions rationnelles d'une équation cubique renfermant deux inconnues.

A cet ordre d'idées se rattache aussi le problème de la détermination de l'équation ou la courbe d'ordre minimum à laquelle on peut ramener une courbe f de genre p donné, par une transformation birationnelle à coefficients rationnels dans le domaine des coefficients de f . Pour $p = 0$, Nöther a montré que f peut toujours être réduite par une telle transformation à une équation de second ordre (représentant une conique) et d'après des théorèmes arithmétiques connus, de LAGRANGE et LEGENDRE, on est assuré qu'il est en général impossible de pousser la réduction jusqu'à une équation du premier ordre. Autrement dit, la résolution paramétrique rationnelle de f exige l'introduction d'une irrationalité quadratique. Il suffit d'ailleurs de remarquer qu'il est impossible de résoudre en nombres entiers non nuls l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 .$$

Qu'en est-il maintenant pour $p = 1$? Si on opère avec des transformations rationnelles, en laissant tomber la condition que les coefficients de la transformation soient aussi rationnels, on sait que f peut être ramenée à une cubique. On est d'autant plus étonné de trouver que, si l'on s'astreint à employer des transformations à coefficients rationnels, *il est en général impossible d'abaisser l'ordre d'une équation f de genre $p = 1$.*

On parvient à ce résultat inattendu en transportant la question du domaine arithmétique à celui des fonctions algébriques. Par une variation des paramètres, les f produisent un système de courbes analogues du même genre 1, et il s'agit de trouver les lignes qui les rencontrent en un nombre de points minimum. Le théorème énoncé revient d'ailleurs à dire que « la résolution paramétrique d'une équation de genre 1, $f(xy) = 0$, par des fonctions elliptiques, introduit une irrationalité à laquelle s'ajoute encore une irrationalité quadratique par rapport aux coefficients, dont le degré est en général celui de f . »

En passant au cas de $p > 1$, et en employant toujours des

transformations à coefficients rationnels, on réussit au contraire à réduire toute courbe de genre p à un type d'ordre donné.

Cet ordre est en général $2p - 2$ pour $p > 2$, e $p + 2$ pour $p = 2$ pour le cas hyperelliptique. Ainsi par exemple, *par une transformation rationnelle à coefficients rationnels toute courbe de genre 2 peut être changée en une courbe d'ordre 6, tandis qu'il faut ajouter aux coefficients une irrationalité quadratique pour l'abaisser au 4^{me} ordre, etc.*

Dans tous ces cas, l'impossibilité d'une réduction ultérieure, affirmée par les propositions que nous venons d'énoncer, se réduit toujours à la non-existence de courbes algébriques découpant en un certain nombre de points les courbes de genre p qui constituent un système construit de façon convenable. C'est ainsi que l'introduction du continu vient éclairer des questions d'irrationalité, qui se posent d'abord sur le terrain de l'arithmétique.

8. — Au commencement de cette conférence, je vous disais que les équations et les fonctions algébriques nous amènent d'une part à des questions de résolution et d'autre part à des questions d'existence. A cet égard la géométrie apporte à l'analyse une contribution des plus précieuses. Car on ne saurait exagérer la valeur des exemples qui éclairent les questions de classification des surfaces, et que je vous rappelais tout à l'heure. Si la conception du bigenre a pu être développée d'une manière fructueuse, c'est que la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, nous fournissait à cet égard un exemple simple et instructif. De même, si on a pu supposer l'existence des familles infinies de surfaces de genres 1, que l'on est parvenu à établir ensuite au moyen des fonctions hyperelliptiques, c'est que l'intersection de deux variétés d'ordre respectif 2 et 3 dans l'espace à quatre dimensions, nous a amené d'abord à considérer une famille de surfaces de genre 1 distincte de celle des surfaces du quatrième ordre.

Ces considérations sont évidentes. Il est nécessaire de les compléter en montrant que *par la construction d'exemples particuliers on réussit souvent à résoudre des questions d'existence dans un sens tout à fait général.*

Jé m'efforcerais d'expliquer ce point essentiel en me rapportant au théorème classique de Riemann, qui concerne l'existence des fonctions algébriques dont on se donne de façon arbitraire les points de ramification. On sait quelles difficultés se rattachent à la démonstration de ce théorème, en s'appuyant sur le principe de Dirichlet.

Or on peut établir le théorème de Riemann par une voie algébriquo-géométrique, qui est extrêmement simple et suggestive¹.

Il faut d'abord se rapporter à la proposition élémentaire — que j'ai établie d'une autre façon en 1912 — d'après laquelle, en supposant $n > 2p - 2$, il existe au moins une fonction algébrique irréductible de degré n , qui possède m points de ramification arbitraires. On passera aux moindres valeurs de n , et également au cas de points de ramification multiples, par le rapprochement indéfini de couples de points de ramification. Il est aisé ensuite de compléter le théorème de Riemann, pour ce qui se rapporte au choix des substitutions sur les branches en correspondance avec les points singuliers (d'après une simple remarque de M. SEVERI, moyennant la réduction bien connue des surfaces de Riemann au type de Lüroth-Clebsch).

Le problème élémentaire que nous venons de poser se ramène à la construction d'une courbe d'un certain ordre $n + h$, ayant un point multiple d'ordre h , tangente à m droites issues de ce point, et ayant ailleurs un certain nombre de points doubles. Il est aisé de prouver qu'il y a autant de paramètres qu'il en faut pour qu'on puisse satisfaire aux conditions demandées; il faut par contre établir que parmi les courbes qu'on construit ainsi, il y en a qui sont irréductibles. Or cela est évident *a priori* dans les cas où le problème d'existence se trouve résolu, par exemple, dans le cas hyperelliptique, qui correspond à un choix particulier du groupe G des m points de ramification. Mais si la courbe hyperelliptique, que l'on obtient par les conditions posées peut être considérée comme limite d'une courbe C correspondant à un choix tout à fait général du groupe G , le prin-

¹ J'ai indiqué cette démonstration dans une note de l'Académie de Bologne (17 avril 1921) et elle se trouve développée à la p. 361 du Vol. III de mes Leçons citées au n° 2.

cipe de continuité nous assure que cette même courbe C sera irréductible. En tenant compte en plus de quelques détails, cette considération suffit à établir notre théorème.

9. — Je terminerai mon exposé en disant quelques mots de l'extension du théorème d'existence aux fonctions algébriques de deux variables indépendantes. La question se pose ici d'une manière nouvelle. Une fonction $z = f(x, y)$ d'un certain degré n , possède une courbe de ramification $F(x, y) = 0$, d'un certain ordre m , qui aura en général un certain nombre de nœuds et de points de rebroussement, dépendant des caractères p_a et $p^{(1)}$ de la surface (xyz) . Mais cette courbe F ne saurait être donnée de façon arbitraire. Il s'agit donc de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire une courbe $F(x, y) = 0$ pour qu'elle soit la courbe de ramification d'une fonction algébrique de degré n , $z = f(x, y)$. Ces conditions se traduisent en des conditions élémentaires imposées aux tangentes menées d'un point (xy) à la courbe F et également aux nœuds et aux points de rebroussement de la courbe F . Ainsi la question posée reçoit une réponse, qui toutefois ne laisse pas de donner lieu à des difficultés dans les applications. Il en résulte par contre au moins une conséquence importante; c'est que, si une courbe F , ayant un certain nombre de nœuds et de points de rebroussement, satisfait aux conditions d'existence de la fonction f , ces conditions sont aussi satisfaites pour toutes les courbes du même ordre que F , qui possèdent le même nombre de nœuds et de points de rebroussement qu'elle, et qui appartiennent à une même suite continue renfermant F . Dans ce domaine, comme dans celui des courbes, on parvient ainsi à une vision de continuité qui promet d'être féconde pour le problème de la classification des surfaces.

10. — Messieurs, j'ai déjà parlé un peu longuement, et abusé peut-être de votre indulgence. Et cependant je suis loin de vous avoir donné un compte rendu, même sommaire, des recherches que l'école italienne a entreprises dans le domaine des équations et des fonctions algébriques, et qui relie en un lien intime et fécond le côté algébrique et le côté transcendant que présentent ces questions. Je me suis borné à vous expliquer par quelques

exemples quel est l'esprit qui domine ces recherches. Ainsi que je vous le disais en commençant, la géométrie s'est vidée pour nous de toute préoccupation de purisme, et même si vous le voulez, elle a disparu, comme discipline autonome, pour se fondre dans l'analyse. Mais par là-même, des intuitions et des méthodes que l'on avait cultivées avec soin en vue de buts particuliers, se sont rattachées au courant traditionnel de problèmes que le développement des mathématiques pose nécessairement à notre esprit. Si quelqu'un nous reproche de nous occuper de fonctions tout à fait particulières, en comparaison de celles qui surgissent des problèmes de la nature, je répondrai que le progrès de l'analyse paraît toujours résulter d'un contraste entre deux tendances de l'esprit mathématique, que l'on pourrait rattacher aisément au réalisme et au nominalisme du Moyen-Age. Nous nous efforçons d'une part de saisir une réalité extérieure qui s'impose à notre esprit et dépasse les cadres de nos constructions conceptuelles; d'autre part nous tâchons aussi de poursuivre le développement de ces constructions d'après les lois de notre propre esprit, qui pose d'abord le concept du nombre rationnel et des fonctions élémentaires. C'est par là que l'on est conduit aux fonctions algébriques et à celles qui en dérivent par des procédés bien définis, fonctions qui sont à peu près toutes celles que l'on peut regarder comme connues, et au sujet desquelles on peut poser des questions qualitatives. Je sais qu'entre les deux conceptions il y a un abîme, que le progrès a creusé de plus en plus; la réalité, en effet, que l'on s'était cru en état de ramener à la simplicité, qui est la loi de notre pensée, déborde des exigences de notre entendement.

Devons-nous en conclure qu'en excluant toute question qualitative, il faudra se confiner à une mathématique purement quantitative qui, pour atteindre au général, se réduira probablement à un calcul d'approximations ?

Je pose la question sans avoir la prétention de la résoudre. Je suis convaincu d'ailleurs que l'histoire de la science est plus libérale que n'importe quelle doctrine philosophique particulière, et que, si elle ouvre souvent des voies nouvelles, il est moins concevable qu'elle ferme celles que la pensée a parcouru pendant des siècles.
