
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO , CASTELNUOVO, G. AND SEVERI, F.

Max Noether

Math. Annalen **XCIII** (1924), pp. 161-181.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 - Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

Max Noether.

Von

G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi in Rom.

La Redazione di questa Rivista, ove sono apparsi i più bei lavori di Max Noether, ci ha rivolto l'invito di commemorare l'illustre matematico, le cui fondamentali ricerche nel campo della geometria algebrica hanno costituito il punto di partenza di molti nostri scritti. Abbiamo accolto di buon grado l'invito, lieti di poter rendere omaggio alla memoria dell'insigne scienziato che consideriamo come uno dei maggiori nostri Maestri.

Max Noether nacque il 24 settembre 1844 a Mannheim da una famiglia di commercianti¹). Una paralisi infantile che lo colpì a 14 anni e gli lasciò una gamba impedita ritardò alquanto i suoi studi. Nei primi tempi dopo l'assalto del male gli riusciva quasi impossibile il moto; egli dovè seguire corsi privati ed acquistò una larga cultura anche letteraria e storica. Migliorato poi in salute frequentò per un anno (1865—66) l'Osservatorio astronomico di Mannheim, per tre semestri l'Università di Heidelberg e poi nel 1868 e 1869 le Università di Gießen e Göttingen. Fu promosso nel 1868 ad Heidelberg senza dissertazione ed ottenne nella stessa Università l'abilitazione, nel novembre 1870, presentando come tesi uno dei suoi lavori più profondi „Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen“. Nominato straordinario all'Università di Erlangen nel 1875, vi fu promosso ordinario nel 1888 e rimase colà fino alla morte (13 dicembre 1921).

Durante gli studi superiori dovette il Noether meditare profondamente sui problemi che attrassero il suo interesse. Egli esce dall'Università, a 25 anni, nella piena maturità della mente. Con meraviglia noi vediamo

¹) Queste notizie biografiche ci furono gentilmente comunicate dalla figlia Signorina Dr. Emmy Noether che, seguendo le traccie paterne, si è resa nota ai matematici per importanti lavori di Algebra e di Analisi.

infatti apparire durante un decennio (1869—79) i suoi lavori più importanti. La stessa Memoria premiata sulle curve sghembe, compiuta nel 1881, contiene, come afferma l'autore, risultati che appartengono a quel fecondo periodo della sua attività scientifica. Certo il Noether ha continuato a lavorare fino al termine della sua vita. Ma le opere pubblicate dopo il 1880 rappresentano in gran parte perfezionamenti e complementi a sue ricerche anteriori o recano contributi a teorie già sviluppate da altri matematici.

Quei primi lavori, ai quali il nome del Noether resterà sempre legato, si connettono ad uno degli indirizzi coltivati dal Clebsch. Appare chiaro che di tutti i professori di cui ascoltò le lezioni (tra i quali il Kirchhoff che lo iniziò allo studio dell'opera di Riemann) fu il Clebsch che esercitò su di lui la massima influenza. Egli ne adottò il programma nel campo della geometria algebrica e si propose di proseguirlo. Ma pur nell'analogia dei problemi e nell'affinità dei metodi, si rivela tra i due eminenti matematici una notevole differenza. Il Clebsch, che adopera con somma abilità gli algoritmi della teoria dell'eliminazione e del calcolo simbolico, non si lascia, almeno in apparenza, guidare dalla intuizione geometrica, ma si sforza di interpretare geometricamente i risultati a cui gli sviluppi algebrici lo conducono. In questo indirizzo il Clebsch si accosta più ad Hesse che a Plücker, come giustamente viene affermato nella commemorazione di Clebsch redatta dai suoi discepoli, tra i quali il Nostro. A Plücker più che ad Hesse si riattacca invece il Noether. Anch'egli è sommo algebrista, ma dell'algebra lo interessano, non tanto l'algoritmo, quanto i problemi funzionali. Egli si sente attratto verso quella scuola dell'analisi qualitativa che in Abel e Riemann trova le sue manifestazioni più alte. E su di lui esercita pure una forte influenza un'altra scuola che con quella ha affinità più strette di ciò che uno sguardo superficiale potrebbe far credere: la scuola della geometria sintetica che da Poncelet, attraverso a Steiner, arriva a Chasles e Cremona. Le ricerche del Noether mirano principalmente a stabilire che un dato problema può risolversi con determinati mezzi; le particolarità della risoluzione passano in seconda linea. Questo sforzo di guardare sempre il contenuto qualitativo del problema più che gli aspetti contingenti delle formole, gli permette di affrontare questioni ardue con procedimenti che non sempre sarebbe agevole tradurre in regolari sviluppi di calcolo algebrico.

Accade talvolta che alla sua indagine sfuggano certi casi secondari di eccezione, o che nella trattazione di difficili problemi si applichino metodi delicati senza tutte le necessarie cautele. Ma la intuizione geometrica, che sempre lo guida, lo salva dagli errori, e l'opera, anche quando non è perfetta, e talora forse per questo, è ricca di suggestioni. Chi sa superare

le difficoltà che una prima lettura presenta, chi si sforza di chiarire i punti più oscuri o di interpretare rettamente o correggere certe affermazioni non sufficientemente precise, trova un largo compenso alla sua fatica e vede via via svelarsi l'edificio maestoso, di cui il Noether aveva scorto le grandi linee, anche se qualche particolare era rimasto in ombra. Per aver meditato profondamente sull'opera di lui a noi fu dato di poterla proseguire e portare in molti punti a compimento.

È tempo ormai che di questa opera discorriamo in modo più particolare. Parecchi lavori del Noether sono così strettamente collegati che una suddivisione per argomento può apparire artificiosa. Tuttavia per fissare un ordine a questa esposizione tratteremo successivamente del teorema fondamentale, della geometria sulle curve, della geometria sulle superficie, delle curve sghembe, delle trasformazioni birazionali, dell'analisi delle singolarità delle curve, dei lavori più strettamente analitici ed algebrici che si riferiscono agli integrali abeliani, e infine degli scritti minori.

Il Teorema fondamentale.

In problemi relativi alle curve algebriche o in questioni concernenti le funzioni algebriche e i loro integrali si era presentata la indagine delle condizioni cui deve soddisfare un polinomio g in x, y per potersi rappresentare come combinazione lineare $Af + B\varphi$ di due dati polinomi f e φ , essendo A e B polinomi da determinarsi. La risposta, limitata ai casi più semplici, si dava ricorrendo al conto delle costanti arbitrarie.

Il Noether fin dal 1869 si propose di trattare l'importante questione con procedimenti più rigorosi; ma nel primo lavoro „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens“ (Math. Ann. 2) poche righe son dedicate, incidentalmente, al soggetto. Egli vi ritorna *ex professo*, e lo approfondisce nella Nota „Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funkt.“ (Math. Ann. 6, 1872). Partendo dalla identità che esprime il risultante di f e φ come combinazione lineare dei due polinomi, egli prova che g può porsi sotto la forma $Af + B\varphi$ allora e solo allora che la funzione g/f in ogni punto della curva $\varphi = 0$ abbia il *carattere di una funzione intera* della x . In particolare se f e φ presentano in ogni punto P ad esse comune il *caso semplice*, ossia se il numero delle intersezioni assorbite da P è uguale al prodotto delle molteplicità rispettive r, s di f e φ in P , la condizione suddetta è soddisfatta se g passa per P colla molteplicità $r + s - 1$ almeno.

Sotto la forma più generale, quale risulta già dall'ultima Nota citata, il teorema in esame suona così: Condizione necessaria e sufficiente affinché sussista l'identità $g = Af + B\varphi$ è che, per ogni punto $P(x_0, y_0)$ comune alle due curve f, φ , esistano due serie di potenze intere A', B' , degli

argomenti $x - x_0$, $y - y_0$, convergenti nell'intorno di P , e tali che sia identicamente, fino ai termini di un ordine sufficientemente alto, $g = A'f + B'\varphi$.

Questa condizione fu poi semplificata grazie alle ricerche dello stesso Noether e di altri (Voss, Bertini), di guisa che il Noether nelle ultime Note dedicate all'argomento („Zum Fundamentalsatz ...“, Math. Ann. **34**, 1889; „Zum Beweise des Satzes ...“, Math. Ann. **40**, 1891) potè enunciare e dimostrare il teorema restando nel campo puramente algebrico col sostituire alle due serie sopra nominate due opportuni polinomi A' , B' . Notevole, nella prima di queste due Note, l'osservazione che l'enunciato del caso semplice sopra accennato si estende anche all'ipotesi di punti infinitamente vicini comuni alle due curve, considerando questi punti come se fossero distinti.

Il teorema di cui stiamo parlando, per l'importanza che presenta nello sviluppo della teoria delle funzioni algebriche, fu dal Noether stesso chiamato *Fundamentalsatz*. Esso diede luogo a numerose ricerche sia per estenderlo a funzioni con più variabili, sia per semplificarne la dimostrazione. L'interesse notevole di esso apparisce anche dal punto di vista funzionale, quando si osservi che il teorema stesso permette facilmente di caratterizzare le funzioni razionali del punto x , y di una curva che restano finite a distanza finita²⁾.

Geometria sulle curve.

Abbiamo già detto che il Noether fino dai primi suoi lavori si è proposto di sviluppare e condurre a compimento il programma di Clebsch nel campo della geometria algebrica. È opportuno chiarire quale fosse questo programma e quali complementi essenziali il Noether vi abbia recato.

È noto come la lettura delle classiche Memorie di Riemann sulle funzioni algebriche e i loro integrali abbia spinto il Clebsch, dal 1863 in poi, a cercare interpretazioni e conseguenze interessanti il campo delle curve algebriche. Da queste ricerche è risultata in particolare l'opportunità di classificare le curve secondo il *genere*, carattere che il Riemann aveva trovato in base a considerazioni topologiche o trascendenti, e che il Clebsch definisce in base a caratteri proiettivi della curva. La uguaglianza del genere di due curve in corrispondenza birazionale è un teorema puramente algebrico che conveniva dimostrare per via algebrica, fondandosi esclusivamente sulle proprietà di quelle corrispondenze. Questa dimostrazione, contenuta nel libro di Clebsch e Gordan „Theorie der Abelschen Functionen“, e le premesse che esigeva, hanno aperto un nuovo campo

²⁾ Cfr. Picard-Simart, *Fonctions algebriques de deux variables*, t. II, p. 11.

di ricerche geometriche dedicate allo studio delle proprietà degli enti algebrici che non sono alterate da trasformazioni birazionali (*geometria sulle curve o superficie...*). Esplorare questo campo con soli mezzi algebrici è il programma che, iniziato in alcuni lavori di Clebsch e nell'opera citata di Clebsch e Gordan, viene ripreso con più potenti mezzi di indagine dal Noether, il quale porta alla teoria progressi essenziali.

Sorvolando per ora sopra alcuni dei primi lavori del N. che più strettamente si riattaccano alle dette ricerche del Clebsch, o si propongono di estendere il teorema dell'invarianza del genere ad enti algebrici a più dimensioni, dobbiamo fermarci sopra la Memoria fondamentale „Über die algebraischen Funktionen...“ pubblicata nel 1873 in collaborazione con A. Brill.

In essa si trova esposta per la prima volta la parte essenziale della geometria sulle curve coi soli metodi della geometria algebrica. A raggiungere lo scopo serve il teorema fondamentale di Noether di cui abbiamo discorso, ed il *Restsatz* che ne segue subito, il quale permette la costruzione, sopra una data curva piana, della serie lineare di gruppi di punti determinata da un suo gruppo. Occorre ricordare a tale proposito che la nozione equivalente di funzione razionale (della curva) avente un dato gruppo di poli era stata introdotta dal Riemann per via trascendente. Egli aveva insegnato a costruire, mediante integrali abeliani di 2^a specie, la più generale funzione razionale dotata di poli assegnati, in guisa che rimanessero in vista le costanti arbitrarie da cui la funzione stessa dipendeva. Restava però ancora da assegnare la costruzione algebrica di tale funzione generale, cioè della *serie completa* individuata da un dato gruppo di punti, in modo che le dette costanti arbitrarie apparissero esplicitamente anche nella espressione algebrica.

Il *Restsatz* insegna appunto a scrivere, sotto forma algebrica, questa funzione razionale, o, in linguaggio geometrico, insegna a costruire un sistema lineare di curve (*aggiunte* alla curva data, cioè passanti semplicemente per ogni punto doppio di questa) il quale seghi sulla curva primitiva la serie completa richiesta.

Dalla detta costruzione si deducono poi la relazione tra i caratteri di una serie completa ed il genere della curva sostegno, la proprietà fondamentale del genere, la unicità e quindi l'invarianza della serie segata sulla curva d'ordine n dalle curve aggiunte d'ordine $n - 3$ (serie che fu poi detta *canonica*) ed il teorema di Riemann-Roch. In breve, si ritrovano per via algebrico-geometrica, mettendole nella luce più favorevole, tutte quelle proprietà delle funzioni razionali di una superficie di Riemann che erano state scoperte col mezzo degli integrali abeliani.

La seconda parte della Memoria di cui stiamo parlando tratta del

problema difficile e interessante dei gruppi speciali e del computo, per via algebrica, del numero dei moduli da cui dipende una curva di dato genere. Ma poichè questo capitolo si riattacca strettamente a lavori precedenti e posteriori del Brill, il quale in esso deve aver avuto una parte preponderante, crediamo non occorra fermarci su di esso³).

Le idee feconde contenute nella fondamentale Memoria citata trovano sviluppo in vari lavori successivi del Noether.

Nella Nota „Über die invariante Darstellung...“ (Math. Ann. **17**, 1880) è posto il problema della rappresentazione delle funzioni algebriche di una variabile in forma invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della curva a cui quelle funzioni si riferiscono. Si raggiunge lo scopo assumendo come elementi fondamentali i rapporti dei polinomi $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{p-1}$ di grado $n - 3$ aggiunti alla curva d'ordine n . Ciò equivale, dal punto di vista geometrico, a trasformare birazionalmente la curva data in una curva d'ordine $2p - 2$ dello spazio a $p - 1$ dimensioni (*curva canonica*), sulla quale gli iperpiani segano la serie canonica. In questa ricerca è essenziale la conoscenza delle relazioni che passano tra le forme di $2^0, 3^0, \dots$ grado nelle φ , cioè lo studio dei sistemi lineari di ipersuperficie del $2^0, 3^0, \dots$ ordine che passano per la curva canonica. La determinazione del sistema di quadriche contenenti la curva canonica è eseguita dal Noether in modo esauriente per $p = 5, 6, 7$ in una successiva Nota („Note über die Normalkurven...“, Math. Ann. **26**, 1885) ed è sfruttata per la determinazione del numero dei moduli da cui dipende una curva di quel genere.

I polinomi φ e le forme con essi composte sono pure adoperati nella Nota „Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke...“ (Math. Ann. **37**, 1890), allo scopo di costruire in modo invariante i differenziali abeliani delle varie specie collegati colla curva data, e di stabilire per via algebrica alcuni dei teoremi sugli integrali abeliani che di solito vengono stabiliti per via trascendente.

La rappresentazione invariante di una curva (e quindi implicitamente la curva canonica) interviene pure nella dimostrazione che il Noether ha dato in due Note successive „Note über die algebraischen Kurven...“, „Nachtrag zur Note über die algebraischen Kurven...“ (Math. Ann. **20**, **21**; 1882) del teorema di Schwarz, il quale afferma che una curva di genere superiore ad 1 non ammette infinite trasformazioni birazionali in sè stessa. È degno di rilievo il fatto che nella prima di quelle due Note (del 4 marzo 1882) comparisce l'osservazione, fatta quasi negli stessi giorni dal Poincaré, che se la curva ammette infinite trasformazioni in sè,

³) Queste parole erano già scritte quando ci pervenne la bella commemorazione del Noether fatta dal Brill (Jahresberichte d. Deutschen Mathem. Vereinigung **32**, 1. Abt.), alcune righe della quale confermano la nostra induzione.

essa ammette una infinità continua anzi algebrica di trasformazioni siffatte. La dimostrazione data dal Noether del teorema di Schwarz è fondata sulla considerazione dei *punti di Weierstrass*, ove la curva canonica presenta contatti superiori al normale con rette, piani, ... Il *Lückensatz* di Weierstrass, ove quei punti appaiono, fu dimostrato ed esteso dal Noether coi metodi di cui egli e il Brill si servirono nella Memoria comune; si veda la Nota „Beweis und Erweiterung eines funktionentheoretischen Satzes ...“ (Journal für die r. u. a. Mathem. **97**, 1887).

Colla Memoria di Brill e Noether hanno anche qualche legame la Nota „Rationale Ausführung der Operationen ...“ (Math. Ann. **23**, 1883) e la successiva „Rationale Reduktion der Abelschen Integrale“ (Acta Math. **26**, 1903) nelle quali si dimostra che con sole operazioni razionali si possono determinare le curve aggiunte ad una curva, anche se dotata di singolarità qualsivogliano, e si può compiere lo spezzamento di un integrale abeliano generale in una somma di integrali delle tre specie.

E colla geometria sopra una curva possono collegarsi le Note „Ueber die Schnittpunktssysteme einer alg. Curve mit nicht-adjungierten Curven“ (Math. Ann. **15**, 1879), „Ueber die reduziblen alg. Curven“ (Acta Mathem. **8**, 1886), delle quali l'interesse principale sta nel lasciar apparire come varie proprietà di quella geometria si comportino quando la curva, modificandosi per continuità, muti genere o si scinda in più curve. È questo un campo di ricerche che ha attirato anche recentemente l'attenzione dei geometri e nel quale v'è ancora molto da raccogliere in relazione coi sistemi continui di curve piane o sghembe.

Geometria sulle superficie.

I metodi adoperati nella Memoria di Brill e Noether per lo studio delle curve sono così fecondi che essi permettono al Noether, pochi mesi più tardi, di affrontare un problema ben più arduo: quello di gettar le basi della geometria sopra una superficie algebrica. Qui mancava la traccia che il procedimento trascendente di Riemann aveva segnato per le funzioni algebriche di una variabile indipendente; nè appariva facile allora l'estensione di quel procedimento alle funzioni di due variabili. Non v'era da tener conto, sull'argomento, che di una brevissima Nota del Clebsch, dalla quale appariva l'analogia tra le curve d'ordine $n - 3$ aggiunte ad una curva piana d'ordine n , e le superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte ad una superficie d'ordine n , e di alcune osservazioni di Cayley e Zeuthen sopra due invarianti numerici di una superficie di fronte alle trasformazioni birazionali, invarianti di cui non risultava chiaro il significato funzionale.

Nella classica Memoria „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens ...; zweiter Aufsatz“ (Math. Ann. 8, 1874), preceduta da alcune Note dei Göttinger Nachrichten, ove si vedono via via precisarsi i risultati a cui quella Memoria è dedicata, il Noether distingue due metodi che possono condurre alla scoperta di caratteri invarianti di fronte alle trasformazioni birazionali. Il primo cerca di formare, col mezzo dei caratteri proiettivi di due superficie corrispondenti, delle espressioni numeriche (*invarianti numerici*) che non mutino valore per effetto della trasformazione; il secondo metodo mira a scoprire funzioni razionali della superficie godenti proprietà invariantive e di queste funzioni si vale per ricavare caratteri invarianti della superficie (*invarianti geometrici*).

Percorrendo anzitutto la prima via egli ritrova due formole date dallo Zeuthen, rilevando come una di esse dipenda, oltre che dai caratteri proiettivi delle superficie in esame, anche dal numero dei punti di una superficie che si mutano in curve (*ausgezeichnete Curven*) dell'altra.

Più notevoli per la novità e importanza dei risultati sono i paragrafi seguenti. La estensione del Restsatz alle superficie permette di costruire il sistema lineare completo di curve al quale appartiene una curva assegnata. Se n è l'ordine della superficie primitiva ed m l'ordine delle superficie che segano su di essa, all'infuori di curve fisse, il detto sistema completo di curve, le superficie di ordine $m + n - 4$ aggiunte a queste, cioè passanti in modo conveniente per le curve fisse, segano sopra ogni curva del sistema la serie canonica. Particolare importanza hanno le superficie d'ordine $n - 4$ aggiunte alla superficie data: il Noether dimostra infatti (per via algebrica) che le curve da esse segate su questa superficie formano un sistema invariante (che fu poi detto *canonico*). Questo risultato fondamentale conduce subito alla scoperta di tre caratteri invarianti: il *Flächengeschlecht* p (chiamato in seguito *genere geometrico* e indicato con p_g) che è il numero delle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$ linearmente indipendenti; il *Curvengeschlecht* $p^{(1)}$ (o *genere lineare*) che è il genere della *curva canonica* segata sulla superficie da una delle dette superficie aggiunte, fuori delle curve multiple; finalmente il numero $p^{(2)}$ delle intersezioni variabili di due curve canoniche, il qual carattere non riceve un nome speciale, giacchè Noether dimostra che esso è uguale a $p^{(1)} - 1$.⁴⁾

Sono distinti questi caratteri da quelli ottenuti per via numerica da Cayley, Zeuthen e dallo stesso Noether? Quest'ultimo fa vedere che per le superficie soddisfacenti a certe condizioni di regolarità, condizioni che

⁴⁾ Apparenti eccezioni a questo risultato possono togliersi introducendo opportune convenzioni.

solo più tardi furono nettamente precisate, gli uni caratteri si riconducono agli altri. In particolare uno degli invarianti numerici, che fu poi chiamato *genere numerico* od *aritmetico* ed indicato con p_a , dà il numero delle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$, linearmente indipendenti, valutato come se il detto ordine fosse abbastanza alto per poter applicare una formola generale (di *postulazione*) nel computo del numero delle condizioni imposte alle dette aggiunte dai punti multipli e dalle curve multiple della superficie primitiva; se questa ipotesi è dunque verificata, risulta $p_a = p_g$. Non sempre l'uguaglianza sussiste; il Noether, sulle tracce del Cayley, fa notare ad es. che per le rigate irrazionali è $p_g = 0$, $p_a < 0$. Il Noether deve avere sospettato che oltre le rigate irrazionali e le superficie trasformabili birazionalmente in quelle (di una tale superficie tratta la Nota „Über eine Fläche 6. Ordnung . . .“; Math. Ann. **21**, 1883) possano esistere altre superficie irregolari ($p_g > p_a$). Però solo in epoca più recente furono portati altri esempi di superficie siffatte, e ne fu costruita la teoria.

Il Noether si occupa anche nella Memoria in esame della relazione tra le *ausgezeichnete Curven* sopra nominate e le curve canoniche, e delle superficie particolari sulle quali tutte le curve canoniche si spezzano o appartengono ad una involuzione; risultati più precisi su qualcuno di questi argomenti furono portati in seguito, e si vide allora che il Noether, nonostante i mezzi insufficienti di cui disponeva, aveva scorto sempre il lato essenziale delle delicate questioni, guidato, qui come altrove, da un finissimo intuito geometrico.

Finalmente il Noether, per mostrare la fecondità dei metodi di cui abbiamo parlato, dedica le ultime pagine di questa breve ma ricchissima Memoria ad estendere alle varietà a tre dimensioni alcuni dei risultati ottenuti per le superficie, stabilendo i principali invarianti di quelle, dimostrando alcune relazioni che li legano e divinandone un'altra che fu poi giustificata da posteriori ricerche.

Il Noether è ritornato parecchi anni più tardi (1886) sulla geometria sopra una superficie algebrica per dare una estensione del teorema di Riemann-Roch valido per le curve; nella breve Nota „Extension du théorème de R.-R. . .“ (Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences, octobre 1886) egli assegna un limite inferiore alla dimensione di un sistema lineare completo di curve sopra una superficie in funzione di caratteri invarianti del sistema e della superficie. Il Noether, che introduce qui la feconda nozione di serie caratteristica di un sistema lineare di curve (serie segata sopra una curva del sistema dalle altre curve del sistema stesso), ammette che la detta serie sia completa se tale è il sistema. Ricerche posteriori hanno dimostrato che l'ipotesi si verifica solo per le superficie regolari ed

hanno dato alla dimostrazione del teorema in esame ed all'enunciato la precisione e l'estensione desiderabili.

In un'altra breve Nota „Anzahl der Moduln ...“ (Sitzungsber. d. preuss. Ak. d. Wiss., 1888) egli cerca il numero dei moduli da cui dipende una superficie di genere geometrico e numerico p e genere lineare $p^{(1)}$ e trova l'espressione $10p - 2p^{(1)} + 12$. La questione, ripresa più tardi da altri, è apparsa più complessa di quello che al Noether sembrasse, sia perchè occorre tener conto della eventuale irregolarità della superficie, sia perchè sul numero dei moduli potrebbe influire un altro carattere spettante alla curva doppia.

Citiamo infine il lavoro „Ueber die totalen alg. Differentialausdrücke“ (Math. Ann. 29, 1886) in cui il Noether, interessandosi al progresso essenziale portato dal Picard nella teoria delle superficie colla introduzione degli integrali di differenziale totale, esamina, coll'aiuto di una trasformazione birazionale applicata alla superficie, come si comportino nelle singolarità di questa i polinomi aggiunti che compariscono nelle espressioni dei detti differenziali totali. In una nota a piè di pagina il Noether dice che fino dal 1868 si era accorto, che sopra una superficie generale non esistevano integrali semplici dovunque finiti e che perciò egli si era limitato allo studio degli integrali doppi.

Nello sviluppo della geometria sopra una superficie lo studio dei problemi generali si è sempre alternato coll'esame di famiglie particolari di superficie, tra le quali specialmente notevole la famiglia delle superficie razionali, i cui punti hanno coordinate esprimibili razionalmente mediante due parametri.

Fatta astrazione dalle superficie del secondo ordine, la cui rappresentazione piana è introdotta nella prima metà del secolo scorso, la scoperta di particolari superficie razionali ed il trasporto ad esse della geometria piana precede di pochi anni l'epoca in cui si inizia la produzione matematica del Noether. Clebsch e Cremona, quasi contemporaneamente (1865—66), stabiliscono la razionalità della superficie generale del terzo ordine, e successivamente (1866—67) della superficie di Steiner; nel 1868 il Cremona si occupa di una classe particolare di rigate a sezioni razionali, è il Clebsch della superficie del 4° ordine con conica doppia e poco dopo della superficie del 4° ordine con retta doppia. Finalmente il Clebsch nel 1870 stabilisce un teorema di carattere più generale il quale afferma la razionalità di una superficie trasformabile birazionalmente in un *piano doppio con curva di diramazione del 4° ordine*, cioè nella superficie $z = \sqrt{f(x, y)}$, dove f è un polinomio di 4° grado.

Al Noether, che era allora in stretti rapporti col Clebsch, non poteva sfuggire l'importanza di questo campo di ricerche. Egli vi compie un

passo essenziale stabilendo con mano maestra un risultato che costituisce uno dei fondamenti di questa teoria. Il 5 gennaio 1870 il Clebsch legge alla K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen una Nota di 6 pagine del Noether, in data 10 dicembre 1869, nella quale, accanto al risultato di cui parleremo, sono lucidamente accennati tutti i punti essenziali della dimostrazione che verranno poi svolti nell'*Habilitationsschrift* presentato all'Università di Heidelberg nel 1870 e riprodotto, in gran parte, nella Memoria „Ueber Flächen, welche Scharen rationaler Curven besitzen“ (*Math. Ann.* 3).

Il teorema di Noether afferma che è razionale ogni superficie la quale contenga un fascio razionale di curve razionali. Il risultato potrebbe a prima vista parere evidente, osservando che ogni curva del fascio dipende razionalmente da un parametro u , mentre le coordinate di un punto della curva si esprimono razionalmente per un secondo parametro v . In realtà, nei coefficienti di queste funzioni razionali di v il parametro u entrerà, in generale, irrazionalmente; sarà possibile introdurre due nuovi parametri u' , v' , di cui le coordinate di un punto generico della superficie siano funzioni razionali? Per rispondere a questa delicata questione il Noether dimostra anzitutto che la superficie può trasformarsi birazionalmente in un'altra su cui le curve del fascio vengono segate da un fascio di piani. In secondo luogo egli riesce, mediante una nuova trasformazione birazionale, a mutare le dette curve in rette o coniche. Nel primo caso la rappresentazione piana della superficie è immediata. Nel secondo caso resta da dimostrare che si può individuare un punto sopra ciascuna conica risolvendo una equazione i cui coefficienti non dipendono dal parametro del fascio di piani, introducendo cioè una *irrazionalità aritmetica*. Il Noether riesce infatti a costruire sulla superficie un numero finito di curve unisecanti le coniche; nota una di quelle, la rappresentazione richiesta si compie facilmente.

La Memoria di cui stiamo parlando contiene, oltre il teorema cui è dedicata, una serie di risultati, ciascuno dei quali ha di per sé un notevole interesse. Basti ricordare che vi è indicata la via per spezzare ogni trasformazione cremoniana del piano nel prodotto di più trasformazioni quadratiche; sul qual risultato ritorneremo tra poco. Aggiungiamo che il procedimento seguito dal Noether nella detta Memoria ha potuto poi essere esteso alle superficie contenenti un fascio irrazionale di curve razionali, superficie che fu dimostrato potersi trasformare birazionalmente in rigate.

Un altro lavoro fondamentale per la teoria delle superficie razionali, sebbene meno accurato nei particolari, fu scritto dal Noether nel 1878: „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen“ (*Erlanger Berichte*,

1878). Esso è dedicato alla riduzione a tipi dei *piani doppi razionali*, cioè delle superficie $z = \sqrt{f(x, y)}$, dove f è un polinomio, che possono rappresentarsi birazionalmente sopra un piano. Il Clebsch, come abbiamo già detto, aveva fatto vedere che uno di questi tipi si presenta se f è un polinomio di 4° grado, mentre dall' *Habilitationschrift* sopra citata del Noether risulta un secondo tipo ove $f = 0$ è una curva d'ordine pari $2n$ qualsiasi dotata di un punto multiplo di ordine $2n - 2$. Nella Nota di cui stiamo ora discorrendo il Noether segnala un terzo tipo di piano doppio che si presenta quando la curva $f = 0$ è del sesto ordine con due punti tripli infinitamente vicini. Il Noether chiude quella Nota dicendo essere estremamente probabile che oltre ai tre tipi indicati (e a quelli ad essi riducibili) non esistano altri tipi di piani doppi razionali. A questa affermazione fu forse il Noether condotto da una ricerca parallela quasi contemporanea (1877) eseguita dal Bertini per ridurre a tipi le involuzioni piane di coppie di punti. In ogni modo la previsione del Noether fu più tardi completamente giustificata.

In una Nota posteriore „Ueber eine Klasse ...“ (Math. Ann. **33**, 1889) il Noether riprende in esame il terzo tipo di piano doppio per eseguirne uno studio sistematico. Nella successiva Nota „Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung“ (ibid.) egli riconduce alla classificazione dei piani doppi razionali la ricerca di tutte le superficie razionali del 4° ordine con un solo punto doppio singolare. Ai tre tipi di piani doppi corrispondono tre tipi di superficie di cui solo il primo (superficie con un tacnodo) era stato scoperto nel 1871 dal Cremona e dal Noether stesso.

Curve algebriche sghembe.

Il concorso al Premio Steiner bandito dall'Accademia delle Scienze di Berlino fu l'occasione che spinse il Noether a riunire e a condurre a termine nel 1881 le ricerche che egli aveva da parecchi anni iniziato intorno alla geometria delle curve algebriche sghembe. Il premio fu diviso, come è noto, tra la Memoria „Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven“ (Abhandl. d. K. Preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1882; Journal für r. u. a. Mathem. **93**) del Nostro ed un lavoro dell'Halphen. Il Noether ha, in quello scritto, largo campo per applicare i teoremi di geometria sulle curve, e le proprietà delle superficie aggiunte ad una curva sghemba, che egli (in parte insieme al Brill) aveva stabilito in lavori precedenti e riassume nei primi paragrafi di questo.

Tre ordini di questioni sono principalmente trattate. Un primo argomento riguarda la *postulazione* di una curva sghemba di ordine e genere noti, cioè il numero delle condizioni che la curva presenta alle superficie di un certo ordine costrette a contenerla. Sia nel caso che null'altro si

conosca della curva, sia quando si sappia che la curva sta già sopra una superficie di ordine noto, sono stabilite delle limitazioni che fissano o vincolano il carattere ricercato. Esso è fornito da una formola semplice e nota quando l'ordine delle superficie che si vogliono condurre per la curva è abbastanza alto.

Una seconda questione, che è trattata con ricchezza di mezzi ed occupa molte pagine della monografia, riguarda il numero delle costanti da cui dipende una curva sghemba di ordine n e genere p . Già nella Memoria citata di Brill e Noether, dal numero dei moduli di una curva di genere p era dedotto, con procedimento che fu recentemente reso rigoroso, che la curva sghemba dipende da $4n$ costanti se $n \geq \frac{3}{4}(p+4)$, mentre per i valori inferiori di n il numero di costanti può superare $4n$. Per questi valori il Noether tenta qui delle determinazioni più precise, ma arriva a risultati poco espressivi perchè dipendenti da altri caratteri, quali gli ordini di due superficie intersecantisi lungo la curva.

Una terza questione che dà luogo ad un risultato elegante, raggiunto con un ragionamento ingegnoso, riguarda le curve di una superficie assegnata che, per dato ordine, hanno il massimo genere. Il Noether dimostra che tali curve sono segate su questa superficie da un'altra superficie passante per una curva piana della prima; donde egli trae il valore del genere ed una conferma del teorema di Halphen che le curve di ordine n aventi il massimo genere stanno su quadriche.

Un altro bel risultato che il Noether giustifica attraverso ad un conto di costanti, e che solo recentemente fu dimostrato in modo rigoroso, consiste nel fatto che una superficie di ordine > 3 , la quale passi per una curva sghemba che non sia intersezione completa della detta superficie con un'altra, è particolare tra le superficie del proprio ordine; in altre parole: sopra una superficie generale d'ordine > 3 non esistono altre curve oltre le intersezioni complete.

Qualche affinità col primo tema trattato nella Memoria di cui abbiamo parlato ha uno dei primi lavori del Noether „Sulle curve multiple di superficie algebriche“ (Annali di Matem. (2) 5, 1871) in cui egli, allo scopo di precisare e di estendere alcuni risultati del Cayley, stabilisce sotto ipotesi molto larghe la *postulazione* di un complesso di curve sghembe per le superficie d'ordine abbastanza alto costrette a passare per quelle curve con determinate molteplicità, e la diminuzione che subisce il numero delle intersezioni di tre superficie passanti nel detto modo per le dette curve (*equivalenza*). Per determinare questi numeri in casi complicati il Noether ricorre a procedimenti che appartengono alla geometria numerativa. Dei risultati ottenuti egli fa un'applicazione, sulla quale ritornerà più tardi, al calcolo del genere aritmetico di una superficie; ed un'altra a stabilire formole relative ad una trasformazione cremoniana dello spazio.

Trasformazioni cremoniane.

Come già dicemmo, la ricerca sulle superficie contenenti un fascio di curve razionali condusse il Noether ad occuparsi di una questione fondamentale relativa alle trasformazioni birazionali tra due piani. Egli dimostra colà che mediante una trasformazione cremoniana, anzi mediante un seguito di trasformazioni quadratiche, un fascio di curve razionali può mutarsi in un fascio di rette; ed osserva incidentalmente che collo stesso procedimento una qualsiasi trasformazione cremoniana può scindersi nel prodotto di trasformazioni quadratiche. Il procedimento seguito dal Noether e tenuto pure quasi contemporaneamente (1870) dal Rosanes consiste nel far vedere che la rete (omaloidica) di curve d'ordine n dell'un piano corrispondenti alle rette dell'altro ha tre punti base le cui molteplicità danno una somma superiore ad n ; assumendo allora questi come fondamentali di una trasformazione quadratica, la rete di curve d'ordine n si muta in una rete d'ordine inferiore, cioè l'ordine della trasformazione cremoniana si abbassa. Il Noether però si è accorto poco dopo (1872) di una obiezione che poteva farsi al suo ragionamento: dei tre punti base due possono essere infinitamente vicini al terzo in direzioni diverse; ed in tal caso non possono essere assunti come punti fondamentali di una trasformazione quadratica. Egli però nella Nota „Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen“ (Math. Ann. 5) si sforza di far vedere che anche allora si possono assumere tre punti base le cui molteplicità diano una somma superiore ad n e che appartengano (se sono infinitamente vicini) ad uno stesso ramo di una curva generica della rete; e di questi si vale per costruire la trasformazione quadratica riduttrice. Solo molto più tardi (1901) fu osservato dal Segre che all'analisi del Noether sfugge il caso che i tre punti si susseguano sopra un ramo non lineare. Per rispondere all'obiezione si è ricorso a trasformazioni riduttrici di tipo più elevato (trasformazioni di Jonquières) che a loro volta potevano facilmente scindersi in trasformazioni quadratiche. Ma recentemente (1921) il Chisini ha fatto vedere che il procedimento di Noether con lievi modificazioni si applica anche al caso di eccezione, adoperando una serie di trasformazioni quadratiche di cui le prime alzano l'ordine della rete omaloidica, mentre le successive valgono ad abbassarlo al disotto del valore primitivo. Ci par giusto perciò di attribuire al Noether il merito di aver indicato un processo di riduzione dell'ordine di un sistema lineare di curve razionali, processo che fu poi applicato a sistemi di curve dei primi generi ed ha condotto a risultati essenziali per la teoria delle superficie razionali.

Il Noether si è anche occupato di trasformazioni birazionali dello spazio nella Nota „Über die eindeutigen Raumtransformationen...“ (Math.

Ann. 3, 1870); ma, dopo aver stabilito brevemente alcune proprietà generali, ha preso in esame certe particolari trasformazioni che mutano piani in superficie di terzo ordine, insieme ad altre trasformazioni che si ottengono mediante prodotti di quelle. Nella stessa Nota sono poi considerate superficie razionali, la cui rappresentazione piana può ottenersi ricorrendo alle dette trasformazioni.

Analisi dei punti singolari delle curve.

Ai vari metodi adoperati da Newton in poi per lo studio dei punti multipli singolari delle curve algebriche si aggiunge, nella seconda metà del secolo scorso, un nuovo procedimento che si propone di trasformare la curva in un' altra sulla quale al punto multiplo primitivo corrispondano punti semplici o multipli a tangenti distinte. Kronecker in ricerche che furono pubblicate solo nel 1881, ma che furono comunicate verbalmente fino dal 1858 a Riemann e Weierstrass, e nel 1862 all' Accademia di Berlino, ed esposte in un corso di lezioni nel 1870—71, adoperava a tale scopo una trasformazione birazionale della curva. Senza conoscere queste ricerche, il Noether nel 1871 („Über die algebraischen Funktionen; Note II“, Göttinger Nachr., 7. Juni 1871), adoperando una successione di trasformazioni quadratiche dell' intero piano, riuscì a trasformare una curva dotata di quantisivogliano punti singolari, in un' altra avente solo punti multipli ordinari. L' affermazione che il numero delle trasformazioni quadratiche occorrenti è sempre finito trovasi nella Nota citata, ma la prima dimostrazione di questo fatto comparisce in una Nota contemporanea di Hamburger che aveva avuto la stessa idea. Il Noether è ritornato più diffusamente sull' argomento nella Nota „Über die singulären Wertsysteme...“ (Math. Ann. 9, 1875), nella Nota già citata „Rationale Ausführung...“ ed in altri lavori. Il suo nome è rimasto specialmente connesso con questo importante problema e con questo metodo, grazie all' intuizione geometrica che egli ha avuto dei *punti multipli infinitamente vicini*, i quali vengono via via trasformati, dal procedimento riduttore, in punti distinti (e mercè questi definiti). Convien qui notare che i punti infinitamente vicini, onde ogni singolarità risulta composta, hanno in qualche modo una *reale esistenza*, perchè nel computo delle intersezioni di due curve o delle condizioni che un punto singolare impone alle curve di ordine abbastanza elevato quei punti infinitamente vicini si comportano come se fossero isolati. Ciò il Noether stesso ha messo in luce, come abbiamo già detto, a proposito del suo teorema fondamentale, ed è confermato anche dagli sviluppi più recenti della teoria ove le singolarità sono studiate sistematicamente anche di fronte al calcolo differenziale. Il Noether stesso ha aggiunto in seguito un risultato essenziale al suo teorema generale di

decomposizione, stabilendo il rapporto della propria teoria delle singolarità con quelle di Smith e Halphen che si fondano sugli sviluppi di Puiseux. Nella Nota „Les combinaisons caractéristiques...“ (Rendiconti Circolo Mat. di Palermo 4, 1890) egli determina precisamente i punti multipli successivi di un ramo di curva, e fa vedere il significato particolare che assumono in tale determinazione i cosiddetti *termini caratteristici* dello sviluppo in serie di potenze fratte; la natura della singolarità appare così legata agli elementi aritmetici che vengono definiti dall' algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra gli esponenti successivi dello sviluppo.

Funzioni theta e curve pluritangenti.

Un altro gruppo di lavori del Noether si riattacca a quel campo di ricerche che fu aperto dallo studio del problema di inversione di Jacobi nella teoria degli integrali abeliani. Come è noto, la risoluzione di esso è fondata sul legame che passa fra certe funzioni trascendenti di p variabili, quali sono le funzioni ϑ o le funzioni $2p$ volte periodiche con esse formate, e certe funzioni algebriche collegate ad una curva piana di genere p , che furono dette *Wurzelfunctionen* e trovano la interpretazione geometrica nelle curve aggiunte che toccano la curva data in tutti i punti comuni. Le diverse soluzioni del problema algebrico-geometrico corrispondono ad altrettante funzioni ϑ , che differiscono sostanzialmente l'una dall'altra per l'addizione, alle p variabili, di sistemi di semiperiodi; le diverse ϑ sono caratterizzate mediante i valori di certi gruppi di numeri detti *caratteristiche*.

Il primo lavoro del Noether sul soggetto „Zur Theorie der Thetafunktionen von 4 Argumenten“ (Math. Ann. 14, 1878) si connette con una Memoria di Weber che aveva studiato la teoria delle funzioni ϑ di genere 3. Il Noether riesce ad estendere i principali risultati al caso successivo $p = 4$ e stabilisce in forma esplicita un teorema di addizione per le relative ϑ . Nell'anno successivo egli affronta il problema generale nella Nota „Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten“ (Math. Ann. 16, 1879). Valendosi del processo di induzione completa egli ottiene risultati generali per le ϑ di p variabili; appoggiandosi su ricerche del Jordan, egli approfondisce lo studio del gruppo di Galois delle equazioni per la bisezione dei periodi delle funzioni abeliane di genere p , ed assegna le operazioni che si dovrebbero compiere per risolvere le dette equazioni. La Nota „Zur Umkehrproblem“ (Math. Ann. 28, 1886) porta perfezionamenti al metodo classico per la risoluzione del problema di inversione.

Da un punto di vista più geometrico è trattato il caso del genere 3 nelle Note „Über die Gleichung 8-ten Grades ...“ (Math. Ann. 15, 1879), „Zur Theorie der Berührungscurven ...“ (Abhandl. d. Münchener Akad. d. Wiss. 2^{te} Kl., 17, 1889), „Note über die 7-Systeme“ (Math. Ann. 46, 1895), ove si sfruttano le proprietà della classica configurazione delle bitangenti della quartica piana e delle curve di 2^o, 3^o, ... ordine che toccano la quartica ovunque la incontrano. Particolarmente notevole sotto l'aspetto algebrico è la prima di queste tre Note ove viene studiato sistematicamente il più semplice caso di una equazione *ternaria*, le cui radici si distribuiscono in terne tali che due radici individuano sempre una terna e che le radici di ciascuna terna sono legate da una relazione razionale, simmetrica rispetto ad esse. Della detta equazione, di 7^o grado, il Noether esamina il gruppo di Galois, di ordine 168, e fa vedere come all'equazione stessa conduca la risoluzione dell'equazione generale di ottavo grado, quando al campo di razionalità si aggiunga una radice di una risolvente di grado 30. Ad una equazione ternaria di 7^o grado conduce il problema di determinare un gruppo di sette coniche (considerato già da Hesse) le quali seghino complessivamente una quartica piana nei punti di contatto delle 28 bitangenti. La determinazione completa di tutti i gruppi di 7 coniche dotati della detta proprietà è fatta dal Noether nell'ultima delle Note sopra citate.

Altri scritti.

Abbiamo già detto che le opere più importanti ed originali del Noether appartengono al primo periodo della sua attività scientifica. Egli continuò a lavorare durante tutta la sua lunga vita, ma quando senti diminuite, per l'età, le facoltà inventive, volle rendere ancora dei servizi alla diffusione del sapere, approfittando della sua larga e profonda coltura.

Dal 1891 al 1894 egli collaborò col Brill ad una Monografia che fu pubblicata nel Jahresberichte der Deutschen Math.-Vereinigung (Band 3) sotto il titolo „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit“. La Monografia pregevolissima contiene uno sguardo completo sulla storia delle funzioni algebriche di una variabile e sui progressi apportati alla teoria nella seconda metà del secolo scorso, per via geometrica ed analitica.

Comincia in quell'epoca la serie delle commemorazioni che il Noether scrisse di molti dei maggiori matematici del suo tempo: Cayley, Sylvester, Brioschi, Lie, Hermite, Cremona, Salmon, Lüroth, Gordan e Zeuthen. Chi abbia letto queste biografie sa con quanto acume il Noether cerchi di mettere in rilievo i caratteri essenziali della produzione scientifica dei singoli autori, e con quanta simpatia vengano ricordati quei matematici

a cui egli fu legato da relazioni amichevoli. Questa collezione di commemorazioni fornisce una preziosa raccolta di notizie per chi vorrà scrivere la storia del pensiero matematico nella seconda metà del secolo XIX.

Negli ultimi anni della sua vita, che si chiuse il 13 dicembre 1921, egli cercò conforto ai dolori per la sorte della sua patria, dedicandosi alla lettura e alla interpretazione delle opere di uno dei maggiori geni del nostro Rinascimento, Leonardo da Vinci. L'indice analitico del Codice Atlantico da lui redatto ed inviato ad uno di noi appena conclusa la pace, si trova oggi presso l'Istituto di studi Vinciani che ne curerà la stampa dopo averlo tradotto e integrato nelle parti ove apparisca meno completo. Questa comunione di pensiero col sommo italiano costituisce un nuovo legame fra il matematico tedesco ad il nostro paese dove egli ebbe tanti ammiratori.

(Eingegangen am 5. 7. 1924.)

Schriftenverzeichnis¹⁾.

1. Bahn des Kometen III, 1861. *Astronomische Nachrichten* **69** (1867), S. 103–108.
2. Mehrere Noten zur Theorie der algebraischen Funktionen, als Voranzeigen: *Göttinger Nachrichten* 1869, S. 298–306; 1870, S. 1–6; 1871, S. 267–278; 1872, S. 490–498; 1873, S. 116–132; S. 248–254.
3. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. *Math. Ann.* **2** (1869), S. 293–316.
4. Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. *Math. Ann.* **3** (1870), S. 161–227.
5. Über die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen. *Math. Ann.* **3** (1870), S. 547–580.
6. Sulle curve multiple di superficie algebriche. *Ann. di mat.* (2) **5**, S. 163–176.
7. Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.* **5** (1872), S. 635–639.
8. Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.* **6** (1872), S. 351–359.
9. In Alfred Clebsch, *Math. Ann.* **7** (1873), S. 30–37, der Teil über algebraische Flächen.
10. Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendungen in der Geometrie, zusammen mit Brill. *Math. Ann.* **7** (1873), S. 269–310.
11. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz. *Math. Ann.* **8** (1874), S. 495–533.
12. Über die singulären Wertsysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkte einer algebraischen Kurve. *Math. Ann.* **9** (1875), S. 166–182.

¹⁾ Nach eigenen Aufzeichnungen, ergänzt von E. Noether.

13. Über die algebraischen Formen, deren Hessische Determinante identisch verschwindet. Zusammen mit Gordan. *Math. Ann.* **10** (1876), S. 547–568²⁾.
14. Zur Eliminationstheorie. *Math. Ann.* **11** (1875), S. 571–574.
15. Zur Theorie der Thetafunktionen von vier Argumenten. *Math. Ann.* **14** (1878), S. 248–293.
16. Über die Gleichungen 8. Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Kurven 4. Ordnung. *Math. Ann.* **15** (1879), S. 89–110.
17. Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Kurve mit nicht adjungierten Kurven. *Math. Ann.* **15** (1879), S. 507–528.
18. Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten. *Math. Ann.* **16** (1879), S. 270–344.
19. Notiz über eine Klasse symmetrischer Determinanten. *Math. Ann.* **16** (1879), S. 551–555.
20. Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen. *Math. Ann.* **17** (1880), S. 263–284.
21. Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. Schreiben an Herrn Fuchs. *Journal f. Math.* **92** (1881), S. 301–303.
22. Note über die algebraischen Kurven, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. *Math. Ann.* **20** (1882), S. 59–62. Fortsetzung in *Math. Ann.* **21** (1883), S. 138–140.
23. Bemerkungen zur Übersetzung von Faà di Bruno: Binäre Formen. Leipzig, B. G. Teubner, 1881.
24. Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven. Preisschrift 1882. *Abhandlungen der preußischen Akademie der Wissenschaften* 1882, S. 1–120.
25. Auszug gleichen Titels. *Journal f. Math.* **93** (1882), S. 271–318.
26. Über eine Fläche 6. Ordnung vom Flächengeschlecht 1. *Math. Ann.* **21** (1883), S. 399–410.
27. Über die ein-zweideutigen Ebenentransformationen. *Erlanger Berichte* 1876 und weitere Noten dort als Voranzeigen.
28. Beweis und Erweiterung eines funktionentheoretischen Satzes des Herrn Weierstrass. *Crelles Journal* **97** (1887), S. 224–229.
29. Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.* **23** (1883), S. 311–358.
30. Zur Reduktion algebraischer Differentialausdrücke auf die Normalform. *Erlanger Berichte* 1883 als Voranzeige.
31. Über die algebraischen Differentialausdrücke. *Erlanger Berichte*: Zweite Note 1884, dritte 1884, vierte 1886.
32. Über das Jacobische Umkehrproblem. *Erlanger Berichte* 1884.
33. Reduzible Kurven. *Erlanger Berichte* 1885.
34. Totale Differentialausdrücke. *Erlanger Berichte* 1886.
35. Notiz über die Normalkurven für $p = 5, 6, 7$. *Math. Ann.* **26** (1885), S. 143–150.
36. Über die reductiblen algebraischen Kurven. *Acta math.* **8** (1886), S. 161–192.
37. Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Funktionen. *Math. Ann.* **28** (1886), S. 354–380.

²⁾ Zu dieser und einer Reihe von weiteren Abhandlungen Voranzeigen in den Sitzungsberichten der *Erlanger phys. med. Sozietät*. In das Verzeichnis sind nur solche aufgenommen, die der Publikation zeitlich stark vorangehen.

38. Über die totalen algebraischen Differentialausdrücke. *Math. Ann.* **29** (1886), S. 339–381.
39. Über den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.* **30** (1887), S. 410–417.
40. Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques. *C. R.* Oktober 1886. **108**, S. 734–737.
41. Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Flächen. *Sitzungsber. der preuß. Akademie der Wissenschaften*, Februar 1888, S. 123–127.
42. Axel Harnack, Nekrolog. *Ztschr. für Math. und Physik* **23** (1888), *Hist.-lit. Abt.*, S. 121–124.
43. Über eine Klasse von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen. *Math. Ann.* **33** (1889), S. 525–545.
44. Über die rationalen Flächen 4. Ordnung. *Math. Ann.* **33** (1889), S. 546–571.
45. Zur Theorie der Berührungskurven der ebenen Kurve 4. Ordnung. *Abhandl. der Münchener Akademie der Wissensch.*, 2. Kl., **17** (1889), S. 103–150.
46. Zum Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.* **34** (1889), S. 450–453.
47. Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **4** (1890), S. 89–108.
48. Addition à cette note. *Ibid.* S. 299–301.
49. Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen. *Math. Ann.* **37** (1890), S. 417–460, 465–499.
50. Rezension über Poincaré: Problème des 3 corps. *Vierteljahresschrift der astron. Ges.* **25** (1890), S. 258–292.
51. Zum Beweise des Satzes der Theorie der algebraischen Funktionen. *Math. Ann.* **6**. *Math. Ann.* **40** (1891), S. 140–144.
52. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Bericht, gemeinsam mit Brill. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* **3** (1894), S. 107–566.
53. Die Siebensysteme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung gehen. *Münchener Sitzungsber.* **25** (1897), S. 93–100.
54. Arthur Cayley. *Math. Ann.* **46** (1895), S. 462–480.
55. Note über die Siebensysteme (vgl. 53). *Math. Ann.* **46** (1895), S. 545–556.
56. Über den gemeinsamen Faktor zweier binärer Formen. *Erlanger Berichte*. 1895.
57. Konsekutive und koinzidierende Elemente einer algebraischen Kurve. *Congress mathematical papers*. Chicago 1896 (geschrieben 1893), S. 253–257.
58. Mitherausgabe von O. Hesses ges. Werken. Vorrede und Biographie in denselben. 1897. (1875 Nekrolog in *Ztschr. f. Math. u. Phys.* **20**.)
59. Über kontinuierliche Gruppen von Cremonatransformationen. *Jahresbericht der deutschen Mathem.-Ver.* **5** (1897), S. 68–69.
60. James Joseph Sylvester. *Math. Ann.* **50** (1897), S. 133–156.
61. Francesco Brioschi. *Math. Ann.* **50** (1898), S. 477–491.
62. Über Riemanns Vorlesung über Abelsche Funktionen. *Jahresber. der deutschen Math.-Ver.* **8** (1900), S. 177–178.
63. Sophus Lie. *Math. Ann.* **53** (1900), S. 1–41.
64. Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt. *Festschrift der Universität Erlangen zum 80. Geburtstag des Prinzregenten Luitpold von Bayern*. Deichert,

- Erlangen und Leipzig 1901. Wiederabdruck Jahresb. der deutschen Math.-Ver. **32** (1923), S. 97–119.
65. Charles Hermite. *Math. Ann.* **55** (1901), S. 337–385.
66. Nachträge zu B. Riemanns Werken (mit Wirtinger). Leipzig, Teubner 1902.
67. Über die singulären Elemente der algebraischen Kurven. *Math. Ann.* **56** (1902), S. 677–684.
68. Rationale Reduktion der Abelschen Integrale. *Acta math.* **26** (1903) (Abelband), S. 205–225.
69. Sophus Lie di M. Noether, Traduzione di A. Viterbi. *Giornale Battagl.* **41** (1903), S. 145–180.
70. Luigi Cremona. *Math. Ann.* **59** (1904), S. 1–19.
71. George Salmon. *Math. Ann.* **61** (1905), S. 1–19.
72. Relazione del concorso internazionale per la medaglia Guccia. Zusammen mit Poincaré und Segre. *Atti Congr. intern. 1908 und Circ. mat. Palermo* **26** (1918), S. 145–151.
73. Geschichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen im 1. Jahrhundert ihres Bestehens. Erlangen, Mencke 1908. 83 Seiten.
74. Übermittlung von Nachschriften Riemannscher Vorlesungen. *Göttinger Nachr. Geschäftl. Mitt.* 1909.
75. Herausgabe von H. Stahl: Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen (mit Löffler). Leipzig, Teubner 1911.
76. Jakob Lüroth (gemeinsam mit Brill). *Jahresber. der deutschen Math.-Ver.* **20** (1911), S. 279–299.
77. Paul Gordan. *Math. Ann.* **75** (1914), S. 1–4.
78. Hieronymus Georg Zeuthen. *Math. Ann.* **83** (1921), S. 1–23.
- Zahlreiche Rezensionen in *Ztschr. f. Math. u. Physik*, *Archiv f. Math. und Literarisches Zentralblatt*. Darunter über Leonardo da Vincis *Codice Atlantico*: *Lit. Zentralblatt* 1895 und ff.
-