Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri I-IV

Stock, Roma, 1925. (Prefazione, pp. 7-10; Introduzione, pp. 13-24.)

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES
PROMOSSA
DALL'ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

N. 1.

GLI ELEMENTI D'EUCLIDE
E LA CRITICA ANTICA E MODERNA

EDITI DA

FEDERIGO ENRIQUES

COL CONCORSO DI DIVERSI COLLABORATORI

LIBRI I-IV

2

MCMXXV
ALBERTO STOCK - EDITORE
ROMA

ROMA, 1925 — GRAFIA, S. A. I. Industrie Grafiche

PREFAZIONE

L'idea di questa pubblicazione mi è stata suggerita dalla pratica della Scuola di Magistero, nella quale — se si vogliano educare i giovani alla critica comparativa dei testi — conviene dare a siffatto esame una base storica, riferendosi ai modelli classici e studiando le variazioni che via via si sono introdotte, traverso le edizioni e i commenti successivi. È certo in nessun campo questo programma può essere attuato meglio che nella geometria elementare, poichè lo sviluppo di tale disciplina nei secoli è interamente dominato dalla grande opera d'Euclide, sicchè la sua storia si confonde con quella della critica euclidea.

Purtroppo gli Elementi d'Euclide, dopo che la redazione fattane da Betti e Brioschi ha cessato di valere come libro di testo nelle nostre scuole, sono oggi mal noti ai nostri insegnanti. Ed è questa una grave lacuna della loro cultura, poichè tanto le semplifica-

zioni come i progressi più raffinati dei libri moderni, non si comprendono nel loro effettivo valore, senza riportarli a quell'opera classica, che essi mirano a correggere o perfezionare.

La scuola non è campo in cui la fantasia individuale abbia a sbizzarrirsi tentando esperimenti arbitrarii, anzi tanto più è atta ad accogliere gli spiriti e le voci della società circostante, quanto più si alimenti della tradizione in cui anche questa prolunga le sue radici: non già serbando viete forme e ripetendone la morta parola, ma riattaccando nella mente del maestro il passato al presente della cultura, in uno sforzo verso l'avvenire. E come la scuola la scienza. Anche per questa non vi ha vero progresso, dove le nuove generazioni non attingano alla continuità del pensiero scientifico la visione dei problemi, facendosi valenti nello studio dei grandi modelli.

Per tali motivi confidiamo che la nostra fatica sia per riuscire bene accetta ai docenti di Matematiche; che alla geometria euclidea, veduta storicamente nello sviluppo della critica, attingeranno una più vasta comprensione del sapere e un più alto senso dell'insegnamento.

La volgarizzazione degli « Elementi » che qui si offre è abbastanza fedele perchè il lettore possa sentirvi il sapore dell'opera greca, e d'altra parte è abbastanza libera per avere adottato talvolta espressioni del linguaggio geometrico che sono più brevi e familiari al nostro orecchio: ma, in ogni caso, si è fatto ricorso al testo greco (nell'edizione critica di Heiberg) per chiarire o sottolineare i dubbi a cui può dar luogo la dicitura originale, e, per quanto concerne l'adozione di termini tecnici introdotti in epoche posteriori, se ne è dato esplicito avvertimento nelle note.

I diversi libri degli «Elementi» (che, in questo volume, sono i primi quattro) sono stati curati da diversi autori, i quali, nel raccogliere la critica antica e moderna, hanno lavorato in un indirizzo comune, di guisa chè la varietà degli artefici sembra conferire al lavoro una certa varietà e ricchezza d'idee, senza toglierne l'unità. Nello stesso modo verrà proseguita la pubblicazione dei volumi successivi, in cui troveranno posto i libri euclidei V-IX-*e* X-XIII.

Alcuni commenti più recenti e alcune opere storiche, che citiamo in appresso, sono valsi invero ad alleggerire la nostra fatica, ma chi esaminerà con attenzione l'opera nostra non vorrà negare — crediamo — il di-

segno originale della sua costruzione, in cui si fa valere una veduta del progresso geometrico, in connessione cogli sviluppi più elevati della scienza.

Dei riferimenti bibliografici abbiamo fatto uso entro limiti definiti, e la stessa bibliografia euclidea che accompagna la nostra introduzione, lungi da voler essere — sotto alcun riguardo — completa, mira soltanto a porgere, nella maniera più breve, le indicazioni essenziali. È naturale che in essa, come nel nostro esame, i commenti classici dei matematici italiani del Rinascimento, che non da tutti sono tenuti presenti secondo il loro merito, trovino un posto proporzionato al valore della critica e all'importanza dell'opera di divulgazione dell'Euclide che hanno compiuta.

Ora ai collaboratori dell'opera piacemi di rivolgere, terminando, l'espressione della più viva e cordiale riconoscenza; in particolare debbo uno speciale ringraziamento alla mia allieva, Dott. Maria Teresa Zapelloni, che, avendo la fortuna di unire alla cultura scientifica un buon possesso della lingua greca, ha recato a tutti prezioso aiuto nelle questioni attinenti all'interpretazione del testo.

Roma, maggio 1924.

FEDERIGO ENRIQUES

INTRODUZIONE

Gli Elementi d'EUCLIDE costituiscono una delle opere classiche di quella cultura greca, alla quale deve ognora riattaccarsi chi voglia comprendere le origini e lo spirito della nostra cultura europea, giacchè da una parte l'insegnamento del Medio Evo non è che un pallido riflesso dell'antica tradizione, e d'altra parte il Rinascimento italiano — che segna appunto gl'inizii della scienza moderna — è un consapevole ritorno e una più vigorosa rielaborazione dello stesso pensiero greco.

Ora, nella storia della cultura greca si sogliono distinguere quattro periodi, corrispondenti a diversi caratteri sociali e politici, ciascuno dei quali occupa circa tre secoli:

1º Il periodo *ellenico* propriamente detto, che va dal 600 al 300 a. C. dominato dal conflitto col mondo orientale (impero persiano) e dallo sviluppo autonomo delle città greche, di cui la maggior parte conobbe le forme più libere della democrazia, nonchè dalle loro mutue competizioni, che culminarono nella guerra del Peloponneso (431-404).

2º Il periodo *ellenistico,* in cui la civiltà greca si allarga a tutto il mondo orientale, in seguito alle conquiste di Alessandro il Macedone.

3º Il periodo greco-romano, che abbraccia i primi tre secoli dell'èra cristiana, iniziandosi colla conquista romana dell'Egitto e terminando con Costantino.

4º E infine il periodo dei commentatori o della decadenza, che abbraccia parimente tre secoli, da Costantino ad Eraclio.

La scienza sorge nel primo periodo, fecondo dei più alti pensieri: anzitutto nelle colonie joniche dell'Asia Minore, che fu culla, nel VI secolo, dei naturalisti Milesii: TALETE, ANASSIMANDRO, ANASSIMENE, ecc.; poi nelle colonie della Sicilia e dell'Italia meridionale, la cui vita spirituale è dominata dall'impulso di PITAGORA (n. a Samo intorno al 572 a. C. venuto a Crotone circa il 532) e delle scuole pitagoriche da lui fondate: dalle quali si distacca, per assumere una propria fisionomia e un'importanza eccezionale nella storia della filosofia, la scuola d'Elea (PARMENIDE; ZENONE, prima metà del secolo V).

Soltanto in un'epoca posteriore il centro della scienza si trasporta nelle città della Grecia propria.

mente detta, e massime ad Atene, ove vedonsi convenire, all'epoca di Pericle, ANASSAGORA di Clazomene (circa 500-428) e il maestro della Sofistica PROTAGORA d'Abdera (circa 480-410). In questa città appunto insegnò SOCRATE (469-399), e il suo grande discepolo PLATONE (427-347) fondò l'*Accademia*, intorno a cui si raccolsero i più eletti spiriti del tempo, come i matematici TEETETO e EUDOSSO di Cnido, e il filosofo enciclopedico ARISTOTELE di Stagira (384-322), che a sua volta costituì il *Liceo*. Ma accanto ad Atene, deve almeno essere ricordata la piccola città di Abdera, che accolse la scuola degli atomisti (LEUCIPPO di Mileto, e segnatamente DEMOCRITO circa 460-360).

Più tardi, colla diffusione della civiltà greca susseguente alle conquiste macedoni, sorsero altri centri splendidi di cultura, come Rodi, Pergamo, e soprattutto Alessandria d'Egitto. In questo periodo ellenistico la scienza si scioglie dalla filosofia (che sembra ormai dominata esclusivamente da interessi morali) e tocca ad una florida maturità: alla quale tuttavia succede assai presto, se anche lentamente, la decadenza. I più grandi monumenti delle matematiche greche, cioè le opere d'EUCLIDE, ARCHIMEDE, APOLLONIO, appartengono precisamente agli inizii di questo periodo, che comprende poi ERATOSTENE, NICOMEDE, DIOCLE, PERSEO, ZENODORO e altri geometri minori, gli astronomi IPPARCO e TOLOMEO, e il meccanico ERONE d'Alessandria. Nei secoli che succederanno, la tradizione del periodo aureo sarà per alcun tempo continuata con GEMINO, TEONE, PAPPO; ma la decadenza è visibile, e si arriva presto ad un'epoca di commentatori, diligenti ma poco intelligenti raccoglitori di notizie. Ai quali tuttavia, e massimamente a PROCLO di Bisanzio (412-485 p. C.), dobbiamo la maggior parte delle informazioni che ci sono pervenute sullo sviluppo storico delle matematiche greche.

EUCLIDE, l'autore di questi *Elementi*, si trova proprio al principio del periodo ellenistico, e nel più cospicuo centro, Alessandria, ove fiorì verso il 300 dell'èra volgare. Infatti, dice PROCLO: « Euclide dovette vivere al tempo del primo Tolomeo (306-283 a. C.), poichè Archimede, che viene subito dopo, parla d'Euclide; ed inoltre si racconta che una volta Tolomeo gli avrebbe chiesto se vi fosse per lo studio della geometria una via più breve degli *Elementi*, ed egli rispose che in geometria non vi sono vie regie. Così dunque egli è più giovane degli scolari di Platone, e più vecchio di Eratostene e d'Archimede ».

« Egli, compilò i suoi *Elementi* raccogliendo molti teoremi di Eudosso, compiendo ciò che aveva cominciato Teeteto, e porgendo dimostrazioni esatte di quel che i suoi predecessori avevano dato senza il necessario rigore ». Ma i principali risultati che possono ascriversi ai predecessori d'Euclide, si vedranno registrati a suo luogo in questo commento. E per quel che tocca ad una veduta d'insieme dello sviluppo della geometria prima d'Euclide, rimandiamo alle principali storie dell'argomento e al primo articolo della terza edizione delle « Questioni riguardanti le matematiche elementari » (1).

Il testo degli *Elementi* ci è pervenuto in gran parte attraverso la redazione di TEONE alessandrino (4º secolo dell'e. v.), che tuttavia ha potuto essere criticamente emendata da Heiberg, col confronto di alcuni antichi papiri e di codici manoscritti, uno dei quali (il codice vaticano) si è riconosciuto far capo a fonti anteriori alla redazione teonina. Così abbiamo oggi l'edizione critica dei *13 libri* degli *Elementi* di HEIBERG e MENGE, che contiene anche numerosi scolii, ricca sorgente d'informazione storica (2).

(1) Raccolte e coordinate da F. ENRIQUES. Bologna, Zanichelli, 1924.

(2) I libri XIV e XV sviluppanti lo studio dei poliedri regolari che figurano in molte edizioni, sono stati riconosciuti non appartenere ad Euclide, ma a geometri posteriori (forse, il XIV almeno, ad *Ipsicle* circa 150 a. C.).

Gli *Elementi* d'Euclide hanno avuto innumerevoli edizioni e traduzioni commentate, in tutte le lingue, delle quali si avrà un'idea confrontando il « Saggio di Bibliografia euclidea » di PIETRO RICCARDI (Bologna, 1887, 1888, 1890, 1896).

Qui ci limitiamo a dare un elenco delle principali edizioni con commento, di cui ci siamo valsi per le nostre note: le quali, se per una parte rimandano a sviluppi più elevati delle matematiche moderne e a lavori in cui essi sono messi in rapporto cogli *Elementi*, specialmente vogliono offrire un quadro sintetico delle notizie storiche che ci sono pervenute intorno all'origine dei teoremi, delle varianti e delle aggiunte più notevoli, che dai successivi commentatori sono state proposte.

FEDERIGO ENRIQUES

LETTERATURA EUCLIDEA

AUTORI GRECI:

EUCLIDE. Edizione critica con traduzione latina e scolii: *Euclidis opera omnia ediderunt* J. L. HEIBERG et H. MENGE. Lipsia, 1883.

ERONE Alessandrino (vissuto fra il 100 a. C. e il 100 d. C.). Edizione critica con traduzione tedesca per cura di W. SCHMIDT: *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia.* — In particolare il vol. IV: « *Heronis definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur geometrica* ». Lipsia, 1899.

TEONE da Smirne (Sec. IV). *Expositio eorum quae in arithmeticis ad Platonis lectionem utilia sunt.* Leida, 1827.

PROCLO DIADOCO (412-85). Edizione critica per cura di G. FRIEDLEIN. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii.* Lipsia, 1873. — Traduzione latina di F. BAROZZI: *Procli Diadochi Licii in primum Euclidis elementorum librum commentariorum libri IIII.* Padova, 1560. — Il Commento interessante riporta anche osservazioni e note di ERONE Alessandrino, PORFIRIO (232-34 d. C.), PAPPO (sec. IV), TEONE.

AUTORI ARABI:

ANARIZIO (Abū'l 'Abbās al-Fadl b.Hātim an-Nairīzī) vissuto intorno al 900. — Il suo commento fu tradotto in latino da GHERARDO DA CREMONA (1114-87) e pubblicato per cura di M. CURTZE come supplemento all'edizione critica delle opere di EUCLIDE: *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii, ex interpretatione Gherardi Cremonensis*. Lipsia, 1899. — L'interessate commento riferisce anche le note, ora perdute, di ERONE ai primi otto libri, di SIMPLICIO (500 d. C.) ai principii del 1º libro, di GEMINO (sec. Iº a. C.) al 5º postulato, ed incidentalmente osservazioni di ARCHIMEDE (287-212 a. C.), APOLLONIO (200 a. C.) ed altri.

AUTORI DEL RINASCIMENTO E MODERNI:

LEONARDO PISANO (1220) (detto il Fibonacci). *Scritti*, Vol. II. *Practica geometriae*, ed opuscoli. Roma, 1857-62.

CAMPANO (1280?). Il suo commento fu per la prima volta stampato a Venezia, nel 1482.

ZAMBERTI. *Contenta Euclidis Megarensis* [1] *Geometricorum elemētorum libri XV. Campani Galli trāsalpini in eosdem cōmentariorum libri XV. Theonis Alexandrini Bartholamaeo Zamberto interprete, in tredecim priores cōmentariorum libri XIII. Hypsiclis Alexādrini in duos postremos, eodē Bar-*

---

(1) La confusione del geometra alessandrino con il filosofo EUCLIDE da Megara, contemporaneo di PLATONE, vissuto dunque un secolo prima, sembra risalire a VALERIO MASSIMO, all'epoca di Tiberio, ed è comune agli uomini del Rinascimento: questo errore fu corretto più tardi dal COMMANDINO e dal CLAVIO.

tholamaeo Zamberto Veneto interprete commētariorum libri II Parigi 1516.

TARTAGLIA. *Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice, diligentemente rassettato et alla integrità ridotto per il degno professore in tal scientie Nicolò Tartalea Brisciano, secondo le due tradottioni, e per commune commodo et utilità di latino in volgare tradotto.* Venezia, 1543.

PELETIER. (Jacopus Peletarius): *In Euclidis geometrica demonstrationum libri sex.* Lione, 1557.

CANDALLA (Francois de Foix, Comte de Candale). *Euclidis Megarensis elementa geometrica libri XV. His accessit decimus sextus liber de solidorum regularium sibi indicem inscriptorum collationibus.* Parigi, 1566.

COMMANDINO. *Euclidis elementorum libri XV. Una cum scholiis antiquis. A Fedrico Commandino Urbinate nuper in latinum conversi commentariisque quibusdam illustrati.* Pesaro, 1572. — *De gli Elementi di Euclide libri quindici. Con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. F. Commandino da Urbino, et con commentarii illustrati et bon d'ordine dell'istesso trasportati nella nostra vulgare et da lui riveduti.* Urbino, 1757.

CLAVIO (Christoph Schlüssel). *Euclidis elementorum libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione.* Roma, 1574.

CATALDI Antonio. *I primi VI libri degli Elemènti.* 1613 — Nel 1621 furono aggiunti i libri VII-IX e nel 1625 il X.

BARROW Isaac. *Euclidis elementorum libri XV breviter demonstrati.* Londra, 1655.

BORELLI Giacomo Alfonso. *Euclides restitutus.* Pisa 1658.

VIVIANI Vincenzo. *Il V Libro degli Elementi di Euclide, ovvero della scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo.* Firenze, 1674.

VITALE GIORDANO da Bitonto. *Euclide restituto.* Roma, 1680.

GREGORY David. *Euclidis opera omnia.* Oxford, 1703.

WOLFF Christian. *Elementa matheseos universae* — 2 Tomi Halae Magdeburgicae 1713-15.

SACCHERI Gerolamo. *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia.* Milano, 1733.

OZANAM. Traduzione italiana di un'edizione di DECHALES del 1660, con revisioni dell'OZANAM. Bergamo, 1749.

SIMSON Robert. *Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini; sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve, vitati sunt, et quibusdam Euclidi demonstrationibus restitutis.* Glasgow, 1756.

PLAYFAIR John. *Elements of geometry.* Edimburgo, 1795.

CAMERER J. G. *Euclidis elementorum libri* VI *priores graece et latine. — Commentaria e scriptis veterum ac recentium mathematicorum et Pleidereri maxime illustravit edidit Camerer.* Berlino 1824, 25,

FLAUTI Vincenzo, *Elementi di geometria di Euclide.* Napoli, 1843.

TODHUNTER Isaac. *Euclid Elements.* Londra, 1862.

SIMON Max. *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher.* Lipsia, 1901.

HEATH T. L. *The thirteen books of Euclid's elements.* Cambridge, 1908.

VACCA Giovanni. *Il primo libro degli Elementi.* Testo greco, versione italiana, introduzione e note. Firenze, 1916.

ALTRE OPERE CONSULTATE: Le principali storie delle matematiche, e in particolare:

ZEUTHEN H. G. *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age.* Parigi, 1902.

SCHOTTEN H., *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie.* Lipsia, 1890.

BONOLA Roberto. *La Geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo.* Bologna, 1906.

LORIA Gino. *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Milano, 1914.

HEATH T. L. *A history of greek mathematics.* Oxford, 1921.

TROPFKE Johannes. *Geschichte der elementar Mathematik.* Berlino e Lipsia, 1923.

Inoltre:

DUHAMEL J. M. C. *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* Parigi, 1865.

HOÜEL J., *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire.* 1ª ed., Parigi, 1867; 2ª ed., 1883.

ZACHARIAS. *Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* III. A. B. 9.

ENRIQUES F., *Prinzipien der Geometrie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III. A. B. 1. — Ediz. francese. *Encyclopédie des sciences mathématiques* III, 1, fasc. 1°.

ENRIQUES F. *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Bologna, 3ª edizione, 1924.

Inoltre si è tenuto conto dei principali trattati moderni di geometria elementare come: CLAIRAUT (1741), LEGENDRE (1ª ed. 1794, ultima 1852), BALTZER (traduzione di CREMONA, 1865), ROUCHÉ e COMBEROUSSE (1900), ed in particolare dei più recenti trattati italiani di FAIFOFER, DE PAOLIS, VERONESE, ENRIQUES e AMALDI, ecc., di quelli francesi di MÉRAY, BOREL, HADAMARD, nonchè di altri trattati — sotto diversi aspetti notevoli — dell'americano HALSTED, del danese BONNESEN, ecc.

Del resto, per una più estesa informazione bibliografica intorno a questi argomenti, rimandiamo a:

GINO LORIA, *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i vari problemi d'insegnamento della geometria elementare.* Periodico di matematica (Roma, 1893).

MAX SIMON. *Ueber die Entwicklung der elementar Geometrie.* Lipsia, 1906.

LIBRO PRIMO

PER CURA DI

FEDERIGO ENRIQUES E MARIA TERESA ZAPELLONI

Termini (Ὅροι)

Con la parola scolastica « termini » abbiamo reso il greco ὅροι, che si può anche tradurre « concetti » o « definizioni ». Tuttavia la definizione non era intesa dai Greci nel senso logico che oggi noi le attribuiamo. Infatti, si può dire che — conformemente all'ideologia platonico-aristotelica — essa ha per loro un significato *reale* anzichè *nominale*, cioè vale ad indicare un oggetto cui si attribuisce in qualche modo esistenza fuori di noi, in un mondo intelligibile, piuttostochè spiegare un processo costruttivo, mercè cui il pensiero unisce concetti elementari a formare concetti più elevati. (Cfr. ENRIQUES, *Per la storia della logica*, Bologna, Zanichelli, 1922).

D'altra parte, le più notevoli definizioni euclidee appariscono spesso come formule riassuntive di uno sviluppo storico dei concetti, e appunto attraverso la storia ricevono una spiegazione plausibile, siccome accade già per la def. I. Il significato di questo sviluppo storico e il rapporto dei principii euclidei colle vedute moderne, trovansi spiegati nell'articolo di ENRIQUES, che figura come primo nella terza edizione della sua raccolta: *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (Bologna, Zanichelli, 1924).

1.

Punto è ciò che non ha parti.

PROCLO (pag. 94, 11) dice che questa definizione è conforme al criterio di PARMENIDE, per cui le definizioni negative convengono ai principii. È da ritenere che appunto con PARMENIDE e poi con ZENONE d'Elea (nella prima metà del sec. V a. C.) si sia affermata quella critica dei concetti geometrici per cui si riconosce il « punto » della geometria razionale come inesteso, e quindi diverso da ogni piccolo oggetto sensibile. In uno stadio precedente, la più antica geometria pitagorica sembra non avere ancora superato il concetto empirico del punto, della linea e della superficie, assumendo il punto-monade come elemento costitutivo dei corpi o delle figure, che così appariscono « somme di punti ».

Per questa ricostruzione critica, iniziata da PAUL TANNERY, cfr. ENRIQUES, *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*, in *Periodico di Matematiche*, marzo 1923; vedansi pure le note alla prop. I, 10 e al libro VI.

Aggiungiamo che lo stesso termine qui adoperato da Euclide, σημεῖον, che letteralmente significa « segno », allude verosimilmente all'inesistenza sensibile del punto, ed è degno di nota che esso non venga usato per indicare il punto dai più antichi pre-socratici: infatti nei frammenti di questi (e in particolare nella polemica di ZENONE) trovasi, invece, la parola στιγμή, che, come la nostra parola « punto », accenna alla puntura di un oggetto acuminato.

2.

Linea una lunghezza senza larghezza.

Definizione che risale alla scuola platonica (cfr. ARISTOTELE, *Topica*, VI, 6, 1436, 11). PROCLO riferisce qui anche un'altra definizione che già s'incontra in ARISTOTELE (*De Anima*, I, 4, 409 a 4): « dicono che la linea col movimento genera la superficie, come la linea viene generata dal movimento del punto ».

3.

Estremi di una linea sono punti.

Questa proposizione trovasi criticata da ARISTOTELE (*Met.* 1060 C, 15). PROCLO (pag. 102, 11-21) osserva che il geometra si serve della linea in tre modi: 1° considerandola come terminata da ambo le parti, per esempio, nel problema contenuto nella prop. 1; 2° da una parte limitata e dall'altra illimitata, come al problema della prop. 22; 3° illimitata da tutte e due le parti, come nel problema della prop. 12.

Sembra però che la linea illimitata non venga mai concepita nella sua interezza, bensì potenzialmente, come linea prolungabile quanto occorre (cfr. *Post.* 2 e *Def.* 14).

PROCLO pone anche in rilievo le linee chiuse in cui i termini, segnati nella descrizione, più non appaiono.

4.

Linea retta è quella che giace egualmente rispetto ai suoi punti.

PROCLO, che discute lungamente questa definizione, riporta anche la definizione di PLATONE: « La retta è quella linea di cui la parte media ombreggia gli estremi » (PARMENIDE, 137 E), la quale, secondo HEATH, sarebbe anche l'origine della definizione euclidea.

Comunque, se la formula euclidea viene interpretata nel senso che la retta sia quella linea di cui tutte le parti sono simili o congruenti, ovvero in cui nessun punto occupa una posizione privilegiata, si è condotti alla quarta definizione di ERONE (op. cit., pag. 16). Ma già APOLLONIO, nel suo libro sulla chiocciola, aveva osservato che la proprietà di essere simile in ogni sua parte compete anche all'elica cilindrica (cfr. PROCLO, pag. 105, 5); perciò essa è insufficiente a definire la retta. Aggiungeremo che in PROCLO si trova pure la definizione: «la retta è quella linea che rimane immobile, quando sono fermi i suoi estremi», che fu poi ripresa da LEIBNIZ, SACCHERI, GAUSS, ecc. Menzioneremo, infine, il postulato assunto da ARCHIMEDE in *De sphaera et cylindro*: «la retta è la linea più breve fra due punti» (cfr. EUCL., prop. 20), che LEGENDRE doveva poi prendere come definizione della retta.

Ma per la critica di questa e delle altre definizioni, e per gli sviluppi che si legano a tale soggetto, vedasi l'articolo di AMALDI nelle *Questioni*.

5.

Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

Questa definizione fa riscontro alla 2.

6.

Estremi di una superficie sono linee.

Questa definizione fa riscontro alla 3 e valgono analoghe osservazioni.

7.

Superficie piana è quella che giace egualmente rispetto alle sue rette.

La definizione comunemente accolta dopo SIMSON: « Il piano è quella superficie che contiene la retta che abbia con essa a comune due punti qualunque » risale ad ERONE (def. 9, pag. 22).

GAUSS, in una lettera a BESSEL (Gottinga, 27 luglio 1829,) rileva che la definizione eroniana è sovrabbondante, includendo un postulato o un teorema che dev'essere dimostrato: chè, infatti, il piano risulta già definito dal proiettare una retta da un punto esterno. L'osservazione di GAUSS ha dato origine a sviluppi nei quali, partendo da diverse generazioni del piano (come luogo delle perpendicolari in un punto ad una retta, ovvero dei punti equidistanti da due punti dati, ecc.), si tende a dimostrare la sua proprietà fondamentale, di contenere la retta che ne congiunga due punti arbitrari (CRELLE, FOURIER, DEAHNA; BOLYAI e LOBATCHEFSKIJ). Più recentemente ha tentato in varî modi di stabilire questa proprietà fondamentale G. VERONESE, nei suoi *Fondamenti di geometria* (Padova, 1891), sebbene anche questo tentativo non sia esente da critiche: cfr. l'art. di F. ENRIQUES sui *Principii della geometria*, nella *Enciclopedia delle scienze matematiche*, (ed. ted. o franc. Vedi bibliografia), nonchè l'articolo di AMALDI nelle *Questioni*.

8-9.

Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee che in un piano hanno un estremo comune, ma non sono per diritto.

Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si dice *rettilineo*.

Notiamo che la def. 8 contempla anche l'angolo curvilineo, che sembra ricorresse nelle considerazioni dei geometri anteriori, ma che non occorre poi per la trattazione euclidea (cfr. la nota alla prop. I, 5). Qui si può riattaccare l'osservazione di SIMSON e FLAUTI, che l'esclusione del caso in cui i lati dell'angolo siano per diritto (angolo piatto) non riesce chiara per gli angoli curvilinei.

Ora, ad illustrare il significato della definizione euclidea, soccorre in qualche misura la veduta, espressa da ZEUTHEN, che il concetto dell'angolo rettilineo si sia guadagnato originariamente (da TALETE di Mileto ai primi Pitagorici) attraverso la similitudine, essendosi riconosciuto che alla posizione scambievole di due rette uscenti da un punto si collega un rapporto invariabile di segmenti, quale si ottiene, per esempio, costruendo i triangoli isosceli coi lati abbraccianti il detto angolo e paragonando in essi uno dei lati uguali alla rispettiva base. Appunto così può spiegarsi il nome usato dai più antichi geometri per designare l'uguaglianza degli angoli: ὅμοιος.

Dopo ciò giova rilevare che, anche limitandosi al caso dell'angolo rettilineo, la definizione euclidea sopra riferita sollevò dubbi fino dai commentatori più antichi (cfr. HEATH, pag. 176-178); anzi, si può dire che anche le critiche e le discussioni posteriori non sembrano apportarle alcun chiarimento essenziale. Tuttavia nella definizione di APOLLONIO (circa 225 a. C.) e di ERONE (circa 100 a. C.) « l'angolo è la contrazione di una superficie o di un solido in un punto, rispetto ad una linea o superficie spezzata » si può vedere adombrato il nuovo concetto che GERBERTO (morto papa nel 1003) spiegava colla definizione: « *angulus est spatium, quod sub duabus lineis se invicem tangentibus continetur* ». Il quale concetto si ritrova poi nei «*Nouveaux Eléments de Géométrie*» di A. ARNAUD (1667) e in L. BERTRAND « *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* » (Ginevra, 1778, II, pag. 6): « *Un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites, qui se coupent et sont terminées à leur point de section* ».

Forse di fronte a questa definizione (adottata da LACROIX, BALTZER, ecc., fino ai nostri giorni) si mantiene soltanto quella di MOEBIUS che considera l'angolo come grandezza di una rotazione, riattaccandosi ad una più antica veduta di W. SCHMID (1539).

Ma le due definizioni riescono in qualche modo unificate sotto l'influsso più recente della geometria proiettiva, nella quale — fino dal suo precursore DESARGUES (1593-1662) — si è introdotta la considerazione dei fasci di rette e di piani. Al lume di questa considerazione (che GIUSEPPE VERONESE ha portato nella geometria elementare) l'angolo non figura più come una parte di piano, bensì come parte del fascio di raggi; e questo concetto appunto viene espresso dalle più recenti definizioni, che trovansi esaminate criticamente nell'articolo su *Retta e piano* di AMALDI, nelle *Questioni*.

Notizie storiche più diffuse sull'argomento possono leggersi nell'opera di SCHOTTEN, *Inhalt und Methode* (II, 1893) e nella *Storia della Matematica elementare* di TROPFKE, (Bd. 4°, pag. 46), a cui abbiamo attinto qualcuna delle precedenti indicazioni.

Infine vogliamo rilevare che:

1° EUCLIDE contempla soltanto angoli convessi (minori di due retti), e così anche, nella def. 19, poligoni convessi. Generalmente l'antichità sembra limitarsi a questa veduta; tuttavia, la distinzione delle due specie di angoli ricorre nella def. 34 di ERONE; e nel Commento di PROCLO (pag. 165, 21) si trova pure un accenno a poligoni concavi, con angoli rientranti. Nella cultura moderna, la distinzione fra *angulus concavus* ed *angulus convexus* compare esplicitamente in CH. DE BOUVELLES, vissuto a Noyon nella prima metà del sec. XVI, e poi in J. JUNGIUS, il maestro di LEIBNIZ, morto a Rostock nel 1657; però un quadrilatero con angolo rientrante era già stato considerato da LEONARDO PISANO nella sua *Practica geometriae* (1220), ove riceve il nome di *figura barbata*.

2° Nemmeno si trova in EUCLIDE la distinzione del *verso degli angoli*, la cui importanza si rivela connessa alla regola dei segni nella geometria analitica, ed ha ricevuto una precisa determinazione da MOEBIUS (*Analytische Sphärik* I, Kreisverwandschaft 8). Per le notevoli applicazioni che ne sono state fatte nella geometria elementare si possono consultare gli *Elementi di Matematica* del BALTZER; mentre le relative questioni critiche sono menzionate nel detto articolo di AMALDI.

10-14.

Se una retta, innalzata su un'altra retta, fa gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è *retto*, e la retta innalzata si dice *perpendicolare* a quella su cui è stata eretta.

Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

Angolo acuto è quello minore di un retto.

Termine è ciò che è l'estremo di qualche cosa.

Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.

Si noti come EUCLIDE esclude così la considerazione di figure illimitate, che sembrano repugnare al genio greco, per cui viene considerato come perfetto soltanto il « finito ». Questo spirito trova una notevole espressione nel concetto del mondo finito, quale è accolto presso la maggior parte dei pensatori antichi, (esclusi ANASSIMANDRO 611-547 a. C.) e DEMOCRITO (n. 460 a. C.), e si afferma come un'esigenza razionale attraverso PLATONE ed ARISTOTELE. Ma già PARMENIDE d'Elea così diceva del mondo: « È giusto che non sia illimitato, poichè nulla gli manca e (se gli mancasse il limite) tutto gli mancherebbe » (DIELS, *Fragmente*, 8, 33).

In accordo con l'accennata predilezione per ciò che è « finito », la geometria euclidea studia l'eguaglianza o la similitudine delle figure, senza giungere all'idea moderna — maturata attraverso i fondatori della geometria proiettiva: PONCELET, STEINER, MOEBIUS — che considera queste relazioni come subordinate ad una corrispondenza estesa a tutto il piano o a tutto lo spazio.

Ma si deve anche avvertire una ragione specifica per cui ad EUCLIDE conviene supporre la limitatezza delle figure, ed è che egli le concepisce sempre come *grandezze*, paragonandole appunto, sotto questo aspetto, come *uguali* o *disuguali*.

Infine vogliamo notare che nella def. 14 si nasconde un postulato, di cui si fa uso più tardi per l'intersezione di rette e cerchi, ammettendosi in qualche modo che una retta che abbia un punto interno ad un poligono incontri il contorno (cfr. prop. 21), e similmente anche che un arco di circonferenza con un punto interno ed un punto esterno ad un cerchio, ne seghi la periferia (prop. 12, 22).

15-16.

Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea (la quale si dice *periferia*) tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto dentro la figura, sono uguali tra loro.

Quel punto si dice *centro del cerchio*.

Il nome di « periferia » (πεφιφέρεια) del cerchio, che oggi noi traduciamo con circonferenza, viene spesso sostituito da Euclide coll'uso della parola « cerchio » (κύκλος) adoperata indifferentemente per designare la figura e il suo contorno. Tuttavia, per chiarezza ci permettiamo, ov'è il caso, di rendere il greco « cerchio » con « circonferenza ».

Notiamo che la def. 15 è sovrabbondante, includendo in qualche modo un postulato, giacchè — per aver detto che il cerchio è una figura limitata, ecc. — Euclide si sentirà autorizzato ad ammettere che una linea congiungente un punto interno con uno esterno seghi la circonferenza (cfr. def. 14).

17.

Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti dalla circonferenza e che divide anche il cerchio per metà.

La definizione è sovrabbondante, giacchè include il postulato o teorema: « il cerchio è diviso in parti uguali da ogni suo diametro », la cui scoperta è attribuita a TALETE di Mileto (PROCLO, pag. 157, 10).

Si noti che questa proprietà non compare nelle proposizioni d'EUCLIDE, e si può dubitare che forse per colmare tale lacuna sia stata introdotta in redazioni posteriori della def. 17.

18-19.

Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata; il centro del semicerchio è lo stesso del centro del cerchio.

Figure rettilinee sono quelle comprese da rette; *trilatere* da tre, *quadrilatere* da quattro, *multilatere* quelle comprese da più di quattro.

Il trilatero (τρίπλευρον) viene poi chiamato triangolo (τρίγωνον).

20-21.

Tra le figure trilatere, *triangolo equilatero* è quello che ha i tre lati uguali; *isoscele* quello che ha solo due lati uguali; *scaleno* quello che ha i tre lati disuguali.

Inoltre, tra le figure trilatere, *triangolo rettangolo* è quello che ha un angolo retto; *ottusangolo* quello che ha un angolo ottuso; *acutangolo* quello che ha i tre angoli acuti.

L'esistenza di queste figure viene poi dimostrata con la costruzione.

22.

Tra le figure quadrilatere è *quadrato* quella che è equilatera e rettangola; *rettangolo* quella che è rettangola ma non equilatera; *rombo* quella che è equilatera ma non rettangola; *romboide* quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro, ma non è equilatera nè rettangola; i quadrilateri all'infuori di questi si chiamino *trapezii*.

L'esistenza di queste varie specie di figure, ed in particolare del quadrilatero con i lati uguali e gli angoli retti, viene dimostrata poi sulla base del post. 5 (cfr. prop. 46), e invero, ove si introduca un quadrilatero con i quattro angoli retti, si dà luogo ad una assunzione equivalente al post. 5 (SACCHERI, LEGENDRE).

Per la terminologia giova rilevare che la parola « trapezio » non è presa da EUCLIDE nel senso che oggi le attribuiamo di « quadrilatero con due lati paralleli »; ma questo senso si trova in ERONE (Def. 59-63, pag. 44-46), in POSIDONIO e in PROCLO (pag. 170, 4), che all'uopo distinguono i « trapezi » dai « trapezoidi » (non aventi lati paralleli).

Nella letteratura geometrica italiana la voce « trapezio » sembra aver conservato per lungo tempo il significato più generale della def. 22. Così in TARTAGLIA, ove parla delle figure trapezie, ovvero, con espressione araba, *helmuariphe*. Frattanto, il particolare quadrilatero con due lati paralleli trovasi considerato fino da LEONARDO PISANO (*Practica geometriae*, 1220) fra le figure « que habent capita abscissa », e quindi, nel PACIOLO, in TARTAGLIA, in TORRICELLI e in altri geometri dell'epoca, viene designato come « capotagliato » o « capomozzo »; sebbene in CATTANEO NOVARESE (*Opera del misurare*, 1608) le due voci di « trapezio » e « capotagliato » vengano già definite com eequivalenti: cfr. le *Noterelle* di BORTOLOTTI in *Periodico di Matematiche*, marzo 1921.

23.

Parallele sono le rette di un piano che, prolungate da tutte e due le parti, in nessuna di esse si incontrano.

PROCLO (pag. 176, 6) accenna ad altre definizioni delle parallele, aventi come scopo di rendere possibile la dimostrazione del post. 5; e in particolare riferisce da POSIDONIO quella notevole per cui le parallele sono « rette equidistanti nel piano »: la quale si trova pure in ERONE (definizione 70, pag. 48). Ma, nel supposto che esistano rette coplanari ed equidistanti, si nasconde l'ipotesi che la linea luogo dei punti equidistanti da una retta sia una retta, che sostanzialmente equivale al post. 5. Tra i commentatori italiani, CATALDI e GIORDANO VITALE hanno tentato di giustificare codesta esistenza, mentre il SACCHERI doveva più tardi insistere con forza sopra la « fallacia della definizione complessa », per la quale si introduce surrettiziamente un'ipotesi, assegnando alla figura definita condizioni sovrabbondanti.

È tuttavia notevole che all'indicata definizione delle parallele si sia ricondotti dal nuovo indirizzo della geometria francese, che assume come postulato l'esistenza del gruppo delle traslazioni: al quale si collegano *Les nouveaux éléments de géométrie* di Ch. MÉRAY ed i trattati più recenti di BOREL e BOURLET.

È anche meritevole di rilievo che il concetto di rette equidistanti trovi posto oggi nella geometria non-euclidea ellittica o riemanniana (spazio limitato chiuso, e quindi finito) dove appunto CLIFFORD e KLEIN considerano come rette parallele le traiettorie di un movimento di traslazione, le quali però non giacciono più in un piano (cfr. il citato articolo di F. ENRIQUES sui Principi della geometria, nell'*Enciclopedia matematica*).

Postulati (αἰτήματα)

La distinzione fra i postulati e quelle che più avanti sono designate come « nozioni comuni » (gli « assiomi » dei Pitagorici) viene illustrata da ARISTOTELE e dal commento di PROCLO secondo diversi punti di vista: qui e nella nota alle « Nozioni comuni » rileviamo i due aspetti principali della distinzione (1). Il più netto criterio che a questo proposito PROCLO indica (a pag. 79), consiste nel ritenere i postulati come fondamento dei problemi (equazioni) e gli assiomi dei teoremi (identità). Invero, i postulati ci porgono alcune costruzioni elementari, e come bene ha rilevato lo ZEUTHEN (2), la costruzione significa per i Greci dimostrazione d'*esistenza* delle figure. Vero è che PLATONE (Rep. 527) sembra disdegnare l'uso dei postulati, dove critica la « terminologia troppo ridicola e misera » dei geometri, i quali, « come si trattasse di scopo pratico, parlano sempre di quadrare, prolungare, o aggiungere, mentre tutta la scienza si coltiva allo scopo di conoscere »; ma l'ideale platonico di una scienza fondata soltanto sopra definizioni (o su principî evidenti che immediatamente ne

---

(1) Cfr. le comunicazioni di VAILATI e di ZEUTHEN negli *Atti del Congresso Matematico di Heidelberg*, 1904 (VAILATI, *Scritti*, pag. 547).

(2) *Die Geometriche Construction als Existenzbeweis im der antiken Geometrie* (*Math. Ann.*, Bd. 47, 1896).

derivino) urta contro la critica, che nessuna cosa può dirsi esistere per definizione. Questo principio logico dovette essere conosciuto dai geometri contemporanei, poichè viene espresso nettamente da ARISTOTELE (1): « Un geometra — egli dice — indicherà per mezzo di una definizione che cosa significa la parola triangolo, ma che un triangolo esista o che sia possibile costruirlo, e sia quindi lecito trarre conseguenze dal fatto di averlo costruito, è una verità che non viene nè ammessa nè provata per mezzo della definizione, e che dev'essere supposta o dimostrata a parte ».

Ma, nonostante tale esplicito riconoscimento, un'epoca posteriore ricadeva nell'erroneo concetto della « definizione creatrice », che già appare colla definizione delle parallele come rette equidistanti, introdotta a surrogare il postulato 5 (cfr. la nota alla def. 23).

Ora questo errore logico ha acquistato una grande importanza nella Metafisica moderna, grazie alla prova ontologica d'Iddio d'ANSELMO d'Aosta, ripresa da DESCARTES: nella quale, dal concetto d'un Essere perfettissimo, si argomenta alla sua esistenza. E si può scorgere assai bene ciò che tale argomento deve alla veduta d'un ordine deduttivo delle Matematiche assolutamente perfetto, sopratutto nella forma che esso riceve da SPINOZA (2); dove ogni apparenza di postulato è bandita e nascosta dalla definizione di ciò che è « causa di se stesso ».

---

(1) *Analyt. post.* cap. 7; cfr. VAILATI, *Scritti*, pag. 121-22, 213.
(2) Cfr. ENRIQUES, *Scienza e razionalismo*, II, 2.

« Per causam sui intelligo id cuius essentia involvit existentiam; sive id cuius natura non potest concipi nisi existens ». (*Ethices*, def. 1).

D'altra parte la questione « se le matematiche possano costruirsi su pure definizioni » è stata risollevata, nel secolo XVII, dal filosofo inglese HOBBES, la cui dottrina del fondamento arbitrario delle matematiche fu acutamente criticata da LEIBNIZ (cfr. VAILATI, *Scritti*, pag. 612 e segg., ed ENRIQUES, *Per la storia della logica*, cap. 2).

1-2.

Si domanda: che da qualsiasi punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto.

E che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente, per diritto.

Questi postulati affermano l'esistenza d'una retta contenente due punti. L'unicità di questa si deduce in parte, come diremo, dal post. 4, ma in parte costituisce una assunzione che Euclide adopera nella prop. I, 4, e che nei manoscritti e nelle edizioni successive figura generalmente aggiunta fra gli assiomi, cioè che « due rette non possono racchiudere uno spazio ».

3.

E che con ogni centro ed ogni distanza si possa descrivere un circolo.

Qui è da ritenere in qualche modo implicita anche l'unicità del cerchio, in rapporto agli assiomi sull'uguaglianza e disuguaglianza e ai postulati contenuti nel concetto della figura.

Per la terminologia notiamo che la parola raggio (*radius*) sembra apparire la prima volta nelle *Scholae mathematicae* di PETRUS RAMUS (Pierre de la Ramée) e divenne sempre più usata dopo il VIETA.

A = A

4.

E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

Di questo postulato non risalta subito il significato costruttivo, e forse perciò alcuni editori degli *Elementi* lo hanno collocato tra gli assiomi. Ma ZEUTHEN rileva che l'uguaglianza degli angoli retti porta l'unicità del prolungamento di una retta data, come appare anche dall'uso che se ne fa nella prop. I, 14. Reciprocamente, per chi ammetta *a priori* l'unicità della retta per due punti dati, l'uguaglianza degli angoli retti può essere dimostrata, ponendo i due angoli con un lato in comune e da una medesima parte di questo, e ricorrendo alla noz. com. 8.

5.

E che se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano, dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti.

Questo postulato significa per Euclide la condizione d'esistenza o di costruibilità di un punto come intersezione di due rette. Di esso non è fatto uso nelle prime 28 proposizioni del libro I, dove anzi si vede accuratamente evitato (cfr. la nota alla prop. 29). Molti tentativi sono stati fatti dopo Euclide — e fino da GEMINO, POSIDONIO, PROCLO — per dimostrare il post. 5, deducendolo dalle prime 28 proposizioni. I più celebri di questi si collegano alla definizione delle parallele come rette equidistanti (cfr. la nota alla def. 23), e poi all'esistenza delle figure simili che JOHN, WALLIS, nel secolo XVII, ha rilevato costituire un assunto equivalente al postulato euclideo. Ma, dopo che SACCHERI e LEGENDRE ebbero approfondito il legame del post. 5 con il teorema della somma degli angoli di un triangolo (cfr. la nota alla prop. 32), GAUSS, LOBATCHEFSKIJ e BOLYAI pervennero a costruire un edifizio geometrico coerente, basato sulla negativa del postulato medesimo, e così chiusero la serie dei tentativi rivolti alla dimostrazione di esso. In tal guisa abbiamo acquistato la sicurezza che « è impossibile dimostrare il post. 5, deducendolo dalle prime 28 proposizioni euclidee ovvero dalle proprietà elementari della retta, del piano e della congruenza, senza l'introduzione di qualche altro postulato equivalente »; giacchè una siffatta dimostrazione importerebbe la riduzione all'assurdo d'una teoria geometrica, che è suscettibile di ricevere un'interpretazione nel campo dell'analisi o della stessa geometria euclidea: che dunque dovrebbe essere assurda anch'essa, se tale fosse la non-euclidea. Ma, per lo sviluppo di siffatte dottrine, vedasi l'articolo di BONOLA nelle *Questioni* o anche le *Conferenze di Geometria non-euclidea* di F. ENRIQUES, per cura di O. Fernandez, Bologna, Zanichelli, 1918.

Nozioni comuni (Κοιναὶ ἔννοιαι)

Le nozioni comuni, o assiomi, vengono distinte dai postulati, secondo PROCLO, non soltanto per il carattere costruttivo di questi ultimi, di cui sopra si è discorso, ma anche per essere: gli assiomi principii comuni alle varie scienze (o relativi alle grandezze in generale) ed i postulati pertinenti alla particolare disciplina geometrica. Una distinzione dello stesso genere fra principii o cose comuni (τὰ κοινά) e principii particolari, s'incontra pure in ARISTOTELE (*Analyt. post.* I, II, 77 a 30). Ma è notevole che ARISTOTELE non parli mai di *nozioni* comuni, usando il termine pitagorico di assiomi ἀξιώματα (dignità); anzi la parola ἔννοια non sembra trovarsi in significato tecnico presso PLATONE o ARISTOTELE, bensì soltanto più tardi presso gli Stoici. Però, le deduzioni che qualcuno (TANNERY) ha voluto trarre da questa circostanza, mettendo in dubbio l'autenticità delle Nozioni euclidee, cadono di fronte all'osservazione che la voce ἔννοια s'incontra in un frammento di DEMOCRITO (1). E poichè fra le opere perdute di questi vi è un trattato di geometria (2) che per

(1) Aetius in Diels A, 30.

(2) È notevole che a questo non si accenni in alcun modo nel sunto storico di PROCLO, che tuttavia menziona alcune redazioni di *Elementi*, anteriori ad EUCLIDE, cioè IPPOCRATE di Chio (circa

la disposizione ricorda gli *Elementi* di EUCLIDE, è lecito argomentare che il testo democriteo potesse recare appunto questa denominazione degli assiomi, e che da esso EUCLIDE l'abbia ripreso (cfr. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica*, cap. I).

1-8.

Le cose eguali ad una stessa sono anche eguali tra loro.

E se a cose uguali si aggiungono cose uguali, le somme (1) sono uguali.

E se da cose uguali si tolgono cose uguali, i resti sono uguali.

[E se a cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti sono disuguali].

E i doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.

E le metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.

E le cose che si sovrappongono l'una all'altra sono uguali tra loro.

E il tutto è maggiore della parte.

La parola « uguale » che viene in qualche modo definita da questi assiomi, e dall'uso che se ne fa, si riferisce sempre,

---

450 a. C.); LEONE, discepolo di NEOCRIDE, poco più anziano di EUDOSSO di Cnido, e infine TEUDIO di Magnesia, uscito dall'accademia platonica.

(1) Per chiarezza, qui ed in seguito useramo la parola « somma » sebbene essa non si trovi mai nel testo euclideo, dove il concetto di somma di grandezze è reso con « tutte (τὰ ὅλα) » o « prese insieme ».

per EUCLIDE, alla grandezza delle figure, sieno segmenti, angoli, o poligoni. Così, per esempio, quando si afferma l'uguaglianza di due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso uguali (prop. I, 4), si vuol dire che sono uguali le loro superficie, e perciò appunto si aggiunge che sono anche uguali i terzi lati e gli angoli opposti ai lati uguali. Pertanto non si trova qui una definizione particolare dell'uguaglianza per sovrapponibilità (*congruenza*), che critici moderni hanno distinto dall'uguaglianza di superficie od *equivalenza* (cfr. prop. 35).

Tuttavia, al caso della congruenza contemplato nell'assioma 7 si riferisce un tentativo di APOLLONIO di dimostrare l'assioma 1, di cui PROCLO (pag. 194, 25) ci porge il seguente cenno: « Sia $a = b$, $b = c$; dico che $a = c$. Invero a occupa lo stesso luogo (τόπος) di b e così b occupa lo stesso luogo di c; dunque anche a occupa lo stesso luogo di c ». Questo tentativo, come, in tempi più recenti, un analogo sforzo di ROBERVAL per dimostrare gli assiomi, ha fermato l'attenzione di LEIBNIZ, che sostiene le verità geometriche, come tutte le verità razionali, doversi ridurre, in ultima analisi, a giudizi d'identità (cfr. ENRIQUES: *Per la storia della Logica*, cap. II). In contrapposizione a tale veduta, già combattuta da LOCKE, la critica moderna è pervenuta, con HELMHOLTZ, al concetto che la geometria trova la sua base nell'esperienza, sebbene per la sua trattazione razionale si assumano principii per cui l'esperienza stessa viene idealizzata, mercè ipotesi contenenti qualcosa d'arbitrario. Infatti la eguaglianza geometrica, ove pure ci si voglia ridurre al caso della coincidenza dell'assioma 7, non è affatto un'identità logica, venendo definita per mezzo di esperienze di *movimento* in cui (come già avvertiva SCHOPENHAUER) le figure vengono materializzate (cfr. la nota alla prop. I, 4).

Un rilievo speciale meritano gli assiomi sulla disuguaglianza, ed in particolare l'assioma 8. In quanto questo assioma si riferisce a segmenti ed angoli, esso sostituisce in qualche modo le nozioni che noi oggi postuliamo esplicitamente sull'ordine dei punti nella retta o dei raggi nel fascio. Ma in quanto si applichi al confronto dei poligoni, esso equivale a quel principio che nello sviluppo recente della teoria dell'equivalenza si è introdotto col nome di postulato di DE ZOLT, per la cui formulazione e dimostrazione rimandiamo al secondo articolo di AMALDI nelle *Questioni*.

9.

[E due rette non comprendono uno spazio].

Di questo assioma, verosimilmente interpolato, abbiamo già detto come dovrebbe trovar posto fra i postulati, a complemento del post. I.

Osservazioni generali sui principii

Abbiamo avuto occasione di rilevare che talune assunzioni della geometria euclidea appaiono nascoste nelle definizioni. E si deve aggiungere un'osservazione di ZEUTHEN, cioè che, ritenendo i postulati come veri nella geometria del piano, si viene a colmare la lacuna relativa alla proprietà fondamentale del piano, che in tal guisa deve vedersi espressa nei post. 1 e 2.

Comunque, conviene rilevare esplicitamente che, negli *Elementi*, si fa uso di assunzioni non espresse, fra cui le principali si riferiscono: all'ordine dei punti della retta, e quindi al concetto di segmento, cioè alle proprietà lineari della retta; e alla divisione del piano mediante rette, cui si legano le proprietà elementari delle ragioni angolari, ecc.

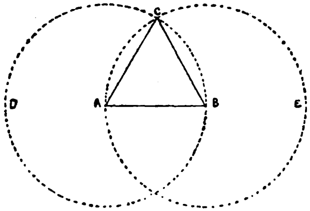
Su questi concetti ha attratto anzitutto l'attenzione GAUSS, in una lettera a BOLYAI del 6 marzo 1882 (Werke 8, pag. 222); ed essi hanno ricevuto la prima analisi completa da parte di PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882): ma per questa trattazione e per gli sviluppi ultetiori vedasi l'articolo di AMALDI nelle *Questioni* e l'articolo di F. ENRIQUES sui *Principii di Geometria* nell'*Enciclopedia matematica*. Nell'insegnamento elementare, i concetti e postulati di cui qui si discorre hanno trovato diverse sistemazioni nei libri di VERONESE, ENRIQUES-AMALDI, ecc.

Proposizioni

1.

Sopra una data retta terminata, costruire un triangolo equilatero.

La retta data terminata sia la AB. Sulla retta AB si deve costruire un triangolo equilatero. Con centro A e distanza AB si descriva il circolo BCD, e di nuovo, con centro B e distanza BA si descriva



il circolo ACE, e dal punto C in cui i circoli s'intersecano si conducano ai punti A e B le rette CA, CB.

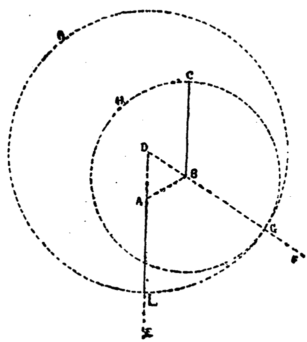
Poichè il punto A è centro del circolo CDB, la AC è uguale alla AB; di nuovo, poichè il punto B è centro del circolo CAE, la BC è uguale alla BA. Ma è già stato dimostrato che AC è uguale ad AB, dunque ciascuna delle CA, CB è uguale alla AB. Ma le cose eguali ad una stessa sono uguali tra loro [*n. com.* 1]; quindi CA è uguale a CB; perciò le tre CA, AB, BC sono uguali tra loro.

Dunque il triangolo ABC è equilatero, ed è costruito sulla retta data terminata AB. c. d. f.

2.

Per un punto dato condurre una retta uguale ad una retta data.

Sia A il punto dato, e BC la retta data; bisogna condurre per il punto A una retta uguale alla retta BC. Si conduca dal pun,to A al punto B la retta AB [*post.* 1] si costruisca su questa il triangolo equilatero DAB [*prop.* 1], e si prolunghino le rette AE, BF, per diritto alle DA, DB; con centro B e distanza BC si descriva il circolo CGH [*post.* 2] di nuovo, con centro D e distanza DG si descriva il circolo GKL.



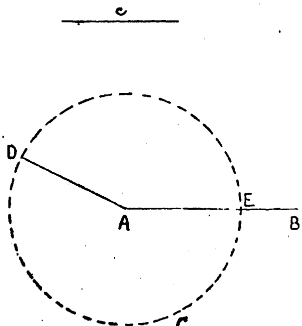
Poichè il punto B è centro del circolo CGH, la BC è uguale alla BG; di nuovo, poichè il punto D è centro del circolo GKL, la DL è uguale alla DG, delle quali la DA è uguale alla DB; perciò la rimanente AL è uguale alla rimanente BG. Ma è stato dimostrato che BC è uguale a BG, perciò ciascuna delle AL, BC è uguale alla BG. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro [*n. com.* 1], quindi AL è uguale a BC.

Dunque, per il punto A è stata condotta una retta, uguale alla retta data AB. c. d. f.

3.

Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta eguale alla minore.

Siano AB e *c* le due rette disuguali date, di cui la maggiore sia la AB. Dalla maggiore AB si deve togliere una retta uguale alla *c*.



Dal punto A si tracci la retta AD, uguale alla *c* [*prop.* 2]; e, con centro A, e distanza AD, si descriva il circolo CDE [*post.* 2]. Poichè il punto A è centro del circolo CDE, la AE è uguale alla DA; ma anche *c* è uguale alla AD; quindi ciascuna delle AE, *c*, è uguale alla AD, perciò AE è uguale a *c*.

Dunque, date due rette AB, *c*, dalla maggiore AB è stata tolta la AE, uguale alla minore *c*. c. d. f.

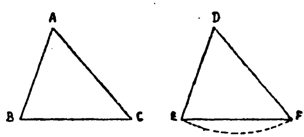
PELETIER nota che le prop. 2 e 3 diventano evidenti se si ammette l'uso del movimento (che ricorre poi nella proposizione 4). Sembra tuttavia che EUCLIDE voglia qui accennare ad una teoria geometrica in cui l'uso del movimento si restringa a quello delle rotazioni attorno ad un punto (*descrizione del cerchio*).

4.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed uguale l'angolo compreso dalle rette uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali.

Siano ABC, DEF i due triangoli aventi i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai lati DE, DF, cioè AB uguale a DE, ed AC a DF, e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF. Dico che anche la base BC sarà uguale alla base EF, che il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF, e che i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali, cioè l'angolo ABC uguale a $D\hat{E}F$ ed $A\hat{C}B$ uguale a $D\hat{F}E$.

Infatti, se il triangolo ABC si sovrappone al triangolo DEF ponendo il punto A nel punto D, e la retta



AB sulla DE, anche il punto B cadrà in E, perchè AB è uguale a DE. Sovrapposta la retta AB alla DE, anche la AC si sovrapporrà alla DF, perchè l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF. Perciò anche il punto C cadrà nel punto F, perchè AC è uguale a DF. Ma anche B cadeva in E, perciò la base BC si sovrapporrà alla EF. Infatti, siccome B cadeva in E, e C in F, se la base CB non si sovrapponesse alla base EF, le due rette comprenderebbero uno spazio, ciò che non è possibile [*n. com.* 9]. Così, la base BC si sovrappone alla EF, ed è uguale ad essa [*n. com.* 7]. Perciò anche tutto il triangolo ABC si sovrappone a tutto il triangolo DEF, ed è ad esso eguale; ed i rimanenti angoli si sovrappongono ai rimanenti angoli, e sono ad essi uguali, cioè $A\hat{B}C$ a $D\hat{F}F$, ed $A\hat{C}B$ a $D\hat{F}E$.

Dunque, se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed uguale l'angolo compreso dalle rette uguali, avranno anche la base eguale alla base; il triangolo sarà uguale al triangolo, e i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali.

c. d. d.

In questa proposizione, come nella 8 (ed in queste soltanto), si fa uso della sovrapposizione delle figure piane per movimento, per applicare il criterio di uguaglianza della nozione comune 7.

Candalla sostituisce la dimostrazione euclidea con altro ragionamento pretendendo così di fornirne una prova senza ricorrere al movimento, che dice costituire una considerazione da meccanici, anzichè da geometri.

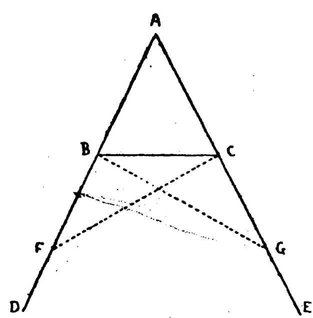
Peletier, pur riportando la dimostrazione euclidea, chiede se, «essendo essa fondata sul movimento», si possa dire che dimostri la proposizione di cui si tratta, o se questa non sia piuttosto da ritenere come *definizione dell'uguaglianza dei triangoli*, che come teorema. Poi accenna ad una dimostrazione, in cui si farebbe uso soltanto della rotazione.

Alla critica di Peletier è da riattaccare la veduta moderna (Hilbert) che la prop. IV sia un postulato, che insieme ad altri concorre a definire l'uguaglianza degli angoli (cfr. l'articolo di Guarducci, nelle *Questioni*).

5.

Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate le rette uguali, gli angoli sotto la base sono uguali tra loro.

Sia ABC il triangolo isoscele, avente il lato AB uguale al lato AC e si prolunghino, in direzione delle AB, AC, le BD, CE. Dico che l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB, e che $C\hat{B}D$ è uguale a $B\hat{C}E$. Si prenda infatti sulla BD un punto a caso F; si tolga dalla mag-



giore AE la AG, uguale alla AF [*prop.* 3]; e si conducano le rette FC, GB.

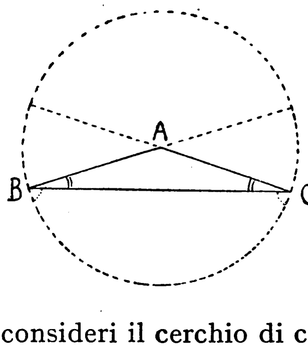
Poichè AF è uguale ad AG, e AB ad AC, le due

FA, AC sono rispettivamente uguali alle due GA, AB. Esse comprendono l'angolo comune FAG, perciò la base FC sarà uguale alla base GB; il triangolo AFC sarà uguale ad AGB, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali [*prop*. 4], cioè $A\hat{C}F$ ad $A\hat{B}G$, ed $A\hat{F}C$ ad $A\hat{G}B$. E poichè tutta AF è uguale a tutta AG, delle quali la parte AB è uguale alla parte AC, i resti BF e CG sono uguali [*n. com.* 3]. Ma è stato dimostrato che anche FC è uguale a GB, perciò le due BF, FC sono rispettivamente uguali alle due CG, GB, l'angolo BFC è uguale all'angolo $C\hat{G}B$, e la loro base BC è comune. Perciò il triangolo BFC sarà uguale al triangolo CGB, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Quindi $F\hat{B}C$ è uguale a $G\hat{C}B$, e $B\hat{C}F$ a $C\hat{B}G$ [*prop*. 4]. Ma poichè è stato dimostrato che tutto l'angolo ABG è uguale a tutto l'angolo ACF, dei quali la parte $C\hat{B}G$ è uguale alla parte $B\hat{C}F$, la rimanente parte $A\hat{B}C$ sarà uguale alla rimanente $A\hat{C}B$; ed essi sono gli angoli alla base del triangolo ABC. È stato anche dimostrato che $F\hat{B}C$ è uguale a $G\hat{C}B$, ed essi sono sotto la base.

Dunque, gli angoli alla base, ecc. c. d. d.

Proclo (pag. 250, 20) riferisce la tradizione secondo la quale questo teorema risalirebbe a Talete di Mileto (circa 600 anni a. C.). E la più antica dimostrazione di esso, di cui ora diremo, appare connessa ad un'altra proposizione, parimente attribuita a Talete (Proclo, pagine 157, 10), cioè che il cerchio è bisecato da ogni suo diametro.

La dimostrazione pre-euclidea del teorema, cui sopra si è alluso, trovasi in un passo di Aristotele (degli *Analytica Priora*, I, 24, 41 b 13-22) — riportato nel commento di Heath (vol. I, pag. 253) — ed è notevole per l'uso che in essa si fa dell'*angolo curvilineo*, formato da un arco di circolo



con la corda. Si consideri il cerchio di centro A che passa per i vertici alla base del triangolo isoscele ABC: l'angolo rettilineo ABC appare come differenza di due angoli curvilinei, uno dei quali è limitato dal diametro AB e da una semicirconferenza, mentre l'altro è limitato dal più piccolo arco BC e dalla relativa corda; e lo stesso si può dire per l'angolo ACB. Ciò posto, l'uguaglianza dei due angoli alla base del triangolo isoscele si deduce dall'ammettere che:

1° sono uguali due angoli curvilinei contenuti fra due semicirconferenze e i relativi diametri nello stesso cerchio (sovrapponibilità per rotazione);

2° sono uguali i due angoli contenuti fra un arco di circolo BC e la relativa corda (sovrapponibilità per simmetria);

3° sono uguali due angoli differenze di angoli curvilinei uguali (*n. com.* 3).

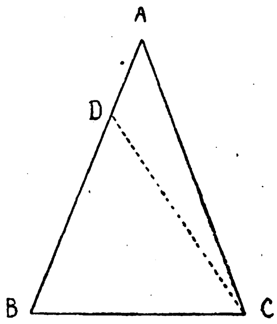
Osserviamo che il principio di simmetria, di cui è fatto uso implicito nella dimostrazione precedente, permette di stabilire il teorema senza ricorrere alla considerazione di angoli curvilinei: infatti, basta ribaltare il triangolo ABC, portando A in B e B in A. D'altronde questa simmetria risulta senz'altro dalla prop. 4, ove si consideri il triangolo isoscele ABC, di vertice A, come la sovrapposizione di due triangoli BAC e CAB, che hanno uguali i lati (AB = AC, AC = AB) e l'angolo compreso ($B\hat{A}C = C\hat{A}B$): si deduce che in questi triangoli saranno uguali gli angoli opposti a lati uguali, cioè $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. Questa dimostrazione risale a Pappo (cfr. Proclo, pag. 249, 20-250, 12). Essa si ritrova nel commento di Peletier e in Viviani, che la rende più accessibile costruendo un secondo triangolo uguale al dato e giacente da parte opposta rispetto alla base, mentre rimanda la seconda parte del teorema dopo la prop. 13. La stessa dimostrazione si ritrova in diverse forme, in alcuni fra i più recenti trattati.

6.

Se in un triangolo due angoli sono uguali tra loro, anche i lati che sottendono gli angoli uguali saranno uguali tra loro.

Sia ABC il triangolo avente l'angolo ABC uguale all'angolo ACB. Dico che anche il lato AB è uguale al lato AC.

Se infatti AB fosse disuguale da AC, uno di essi sarebbe il maggiore. Sia AB il maggiore, e dal maggiore AB si tolga DB uguale al minore AC [*prop.* 3]; e si conduca DC.



Poichè DB è uguale ad AC, e BC è comune, i due DB, BC sono rispettivamente uguali ai due AC, CB, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB. Quindi la base DC è uguale alla base AB, ed il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB [*prop.* 4],, il minore al maggiore, il che è impossibile. Dunque AB non è disuguale da AC, perciò è uguale.

Dunque, se in un triangolo, ecc. c. d. d.

PROCLO tenta di spiegare perchè EUCLIDE ha convertito in questa soltanto la prima parte della prop. 5, ed aggiunge la dimostrazione della inversa della seconda parte (cfr. il commento di ANARIZIO e quello di HEATH, pag. 257-258). Intorno alla dimostrazione della prop. 6, il TODHUNTER fa notare che essa si ricava dall'uguaglianza di due triangoli che hanno uguali un lato e gli angoli adiacenti (prima parte della prop. 26), allo stesso modo come la prop. 5 si deduce dalla 4 secondo PAPPO, giacchè della prop. 26 (prima parte) si può dare una dimostrazione immediata per sovrapponibilità o per assurdo (cfr. la nota alla prop. 26).

Infine, dal punto di vista moderno, si può rilevare che EUCLIDE conclude all'assurdo da ciò, che una superficie minore non può essere uguale ad una maggiore, facendo così appello a concetti che non è necessario introdurre nella teoria elementare dell'uguaglianza dei triangoli; ma poteva ugualmente bene concludere che un angolo risulterebbe uguale ad una sua parte.

Nella forma della dimostrazione euclidea appare, per la prima volta, il cosidetto procedimento di *riduzione all'assurdo*, di cui più volte parla ARISTOTELE (*Anal. Prior.* I, 7, 29b, 5; I, 21, 39b, 32; I, 29, 45 a, 35; I, 44, 50 a, 30, ecc.), e che si trova anche descritto nel commento di PROCLO (pag. 254, 22-27). Lo stesso procedimento ricorre nella prop. 14, per invertire la 13; nella 25 per invertire la 24; e nelle 39, 40, 48 ancora per dimostrare le reciproche di proposizioni già innanzi stabilite; inoltre s'incontrano pure dimostrazioni per assurdo nelle prop. 7, 8, 26; per dire soltanto del libro I.

V'è ragione di ritenere che il ragionamento per assurdo risalga alla scuola d'Elea, poichè — nella critica dei concetti pertinenti all'analisi infinitesimale — acquista la piena consapevolezza del *principio di contraddizione*, come criterio dell'esistenza logica dei concetti.

Tra i moderni HOÜEL (1) e DUHAMEL (2) rimproverano ad Euclide la forma indiretta di questa dimostrazione, di cui egli fa uso troppo frequente « per chiudere la bocca ai sofisti, che la Grecia aveva il torto di prendere sul serio », e soltanto il secondo degli autori citati concede che codesto procedimento si presenti naturalmente per stabilire le proposizioni reciproche (3).

Ma, a prescindere dal concetto superficiale che qui appare della sofistica, l'apprezzamento storico degli autori nominati, sembra privo di base, perchè, come sopra è accennato, è la scuola eleatica (precedente ai Sofisti) che ha dato alla matematica razionale quel tipo di ragionamento: il cui valore logico si rende manifesto non

---

(1) *Essai critique*, 1ª ed. pag. 7.

(2) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 1879 (parte I, vol. I, pag. 60).

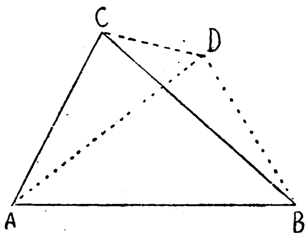
(3) Op. cit., vol. I, pag. 342.

solo nella prova delle proposizioni reciproche, sì anche come metodo di ricerca procedente da ipotesi, e specialmente poi nelle questioni di carattere infinitesimale, dove ha un ufficio necessario per evitare l'uso diretto dell'infinito (cfr. F. ENRIQUES, *Sul procedimento di riduzione all'assurdo*, *Boll. della Mathesis*, Bologna, aprile 1919).

7.

Sulla stessa retta non si possono innalzare a due punti diversi, e dalla stessa parte, due rette rispettivamente uguali ad altre due, ed aventi gli stessi loro estremi.

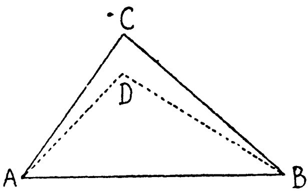
Infatti, se è possibile, sulla stessa retta AB, si innalzino ai due punti C e D dalla stessa parte le due rette AD, DB, rispettivamente uguali alle due rette AC, CB, ed aventi gli stessi loro termini, in modo che CA sia uguale a DA, avente lo stesso estremo A, e CB sia uguale a DB, avente lo stesso estremo B; e si conduca la CD. Poichè AC è uguale ad AD, anche l'angolo ACD è uguale ad $A\hat{D}C$ [*prop.* 5]. Dunque $A\hat{D}C$ è maggiore di DCB [*n. com.* 8]. Quindi $C\hat{D}B$ è molto maggiore di $D\hat{C}B$ [*id.*]. Di nuovo, poichè CB è uguale a DB, anche l'angolo $C\hat{D}B$ sarà uguale



all'angolo DCB [*prop.* 5]. Ma è stato dimostrato che è anche molto maggiore, il che è impossibile.

Dunque, sulla stessa retta, ecc. c. d. d.

È stato osservato da SIMSON, e poi da FLAUTI, che nella dimostrazione euclidea non viene preso in considerazione il caso in cui D cada internamente al triangolo ACB, come nella figura annessa (caso che pur si trova menzionato da PROCLO). SIMSON rileva che per questo caso occorre la seconda parte della prop. 5, di cui non si vede che venga fatto altro uso; e ciò potrebbe far dubitare che si abbia qui una lacuna nel testo euclideo.



8.

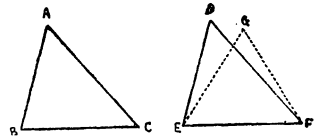
Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali ad altri due lati, e la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi da rette uguali.

Siano ABC, DEF i due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali, rispettivamente, ai due lati DE, DF, ed anche la base BC uguale alla base EF.

Dico che anche l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF.

Infatti, sovrapposto il triangolo ABC al triangolo

DEF, e posto il punto B nel punto E e la retta BC sulla EF, anche il punto C cadrà in F, perchè BC è uguale ad EF. Ma, applicata la BC alla EF, anche BA, CA si sovrapporranno alle ED, DF. Infatti, se la base BC è sovrapposta alla base EF, ed i lati BA, AC non fossero sovrapposti agli ED, DF, ma cadessero fuori, come EG, GF, sulla stessa retta, a due punti diversi, dalla stessa parte, sarebbero condotte due rette rispettivamente uguali ad altre due rette, aventi gli stessi loro estremi.



Ma esse non si possono costruire [*prop.* 7], perciò non può accadere che, sovrapposta la base BC alla base EF, anche i lati BA, AC non si sovrappongano agli ED, DF. Dunque si sovrappongono, perciò anche l'angolo BAC si sovrapporrà all'angolo EDF, e sarà ad esso uguale [*n. com.* 7].

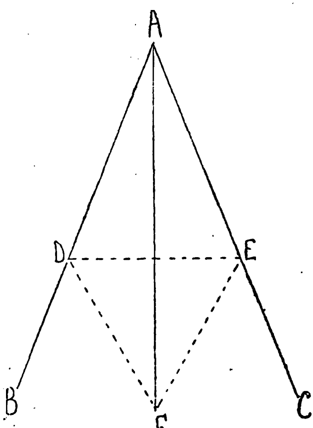
Dunque, se due triangoli, ecc. c. d. d.

La dimostrazione di questo criterio di uguaglianza dei triangoli, ricondotta per assurdo alla prop. 7, riesce didatticamente poco opportuna, poichè importa il riferimento ad una figura impossibile. Ma già gli antichi avevano trovato la dimostrazione diretta che si ottiene applicando la prop. 4, ove si porti uno dei due triangoli dalla parte opposta dell'altro, sopra la medesima base; infatti questa dimostrazione è svolta, esaminando distintamente i casi possibili, da FILONE in PROCLO (pag. 266, 15-268, 14). Fra i commentatori moderni essa viene adottata da CLAVIO, che ne cita l'autore greco, poi dal BORELLI e da VITALE GIORDANO. Trovasi in seguito adottata di preferenza nei trattati recenti. LEGENDRE offre del teorema un'altra dimostrazione indiretta, basandosi sulle disuguaglianze espresse dalle prop. 24, 25.

9.

Dividere per metà un dato angolo rettilineo.

Sia BAC il dato angolo rettilineo. Bisogna dividerlo per metà. Su AB si prenda un punto qualsiasi D, e da AC si tolga la AE, eguale alla AD [*prop.* 3]; si conduca DE, e su DE si costruisca il triangolo equilatero DEF [*prop.* 1] e si conduca AF. Dico che l'angolo BAC è diviso per metà dalla retta AF.



Infatti, poichè AD è uguale ad AE, ed AF è comune, le due rette DA ed AF sono rispettivamente uguali alle due EA, AF; e la base DF è uguale alla base

EF. Quindi l'angolo DAF è uguale all'angolo EAF [*prop.* 8].

Dunque, dato un angolo rettilineo, ecc. c. d. f.

Proclo spiega perchè il punto F cade nell'interno dell'angolo.

La bisezione dell'angolo si può ottenere senza far uso della circonferenza (che occorre per la prop. 1), col semplice *trasporto del segmento*: operazione assunta da Hilbert come elementare.

A tal uopo si apprenda anzitutto a costruire sopra una data base AB un triangolo isoscele: perciò si condurranno da una medesima parte due rette ugualmente inclinate sopra di essa, AC e BD, e — dove queste non s'incontrino — sostituendo ad esse le AD, BC (AC = BD).

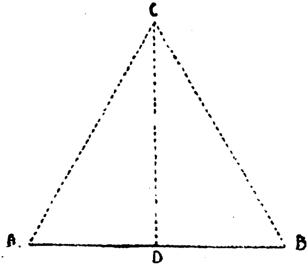
Ora, per bisecare l'angolo dato BAC (AB = AC), basterà costruire su BC un triangolo isoscele BDC, simmetrico a BAC, e congiungere poi A con D (cfr. Enriques-Amaldi, *Elementi di Geometria*, ed. 6ª, nⁱ. 87, 89, 115).

Aggiungiamo che, dopo il problema qui risoluto, si presenterebbe quello di « dividere un angolo in tre parti uguali ». Ma questa costruzione è impossibile elementarmente, cioè con riga e compasso. Cfr., anche per la storia del problema, l'articolo di A. Conti nelle citate *Questioni*.

10.

Dividere per metà una data retta terminata.

Sia AB la data retta terminata. Bisogna dividere per metà la data retta terminata AB. Su di essa si costruisca il triangolo equilatero ABC [*prop.* I], e



l'angolo ACB sia diviso per metà dalla retta CD [*prop.* 9]. Dico che la retta AB è divisa per metà nel punto D. Infatti, poichè AC è uguale a CB, e CD è comune, le due rette AC, CD sono rispettivamente uguali alle due BC, CD; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD, perciò AD è uguale a BD [*prop.* 4].

Dunque, la data retta terminata, ecc. c. d. f.

Si assume dall'intuizione che la bisettrice dell'angolo al vertice incontri la base del triangolo.

APOLLONIO in PROCLO (pag. 279, 16) biseca il segmento

AB costruendo su di esso due triangoli equilateri simmetrici ACB, ADB, e congiungendo i punti CD.

D'altra parte si può anche bisecare il segmento senza far uso del cerchio, presupponendo, con HILBERT, la costruzione elementare del *trasporto dell'angolo*.

Infatti, usando della costruzione del triangolo isoscele (di cui nella nota alla prop. 9), basta considerare due triangoli isosceli simmetrici sulla medesima base e congiungerne i vertici (cfr. ENRIQUES-AMALDI, l. c., n. 88).

Si noti che, a differenza di ciò che accade per l'angolo, la divisione d'un segmento in tre o più parti uguali si ottiene elementarmente; EUCLIDE la dà in VI, 9, con l'uso delle proporzioni; ma essa può anche ottenersi deducendola dalla prop. 34, ciò che per la prima volta ha fatto vedere ANARIZIO (cfr. la nota a quella proposizione).

La possibilità di *costruire* il punto medio d'un segmento implica, nel concetto dei Greci, l'*esistenza* di codesto punto medio (1). Ora, il riconoscimento di tale esistenza ha influito sulla evoluzione delle idee che conduce alla geometria razionale. Abbiamo già detto (cfr. la nota alla def. 1) che vi sono motivi di ritenere che, nella più antica concezione dei Pitagorici, la retta venisse considerata come una successione di elementi indivisibili (*punti-monadi*), e che questa concezione del punto-esteso è stata combattuta dagli Eleati (PARMENIDE, ZENONE) nella prima metà del secolo V. Qui possiamo aggiungere che, secondo il TANNERY, i celebri argomenti di ZENONE sul moto sono da spiegare

(1) Cfr. la nota che precede i postulati, pag. 42.

in questo senso, non già come sofismi, bensì come riduzioni all'assurdo della tesi pitagorica. In particolare, il primo argomento di Zenone dice che un punto non può muoversi passando da un estremo A all'estremo B d'un segmento, perchè dovrebbe prima passare per il punto medio C e poi per il punto C' che biseca CB, e così via all'infinito: invero, se il punto è esteso, anche il segmento ha un minimo di estensione, e perciò la somma d'infiniti segmenti deve riuscire necessariamente infinita.

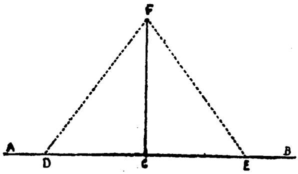
Senza approfondire la discussione intorno a ciò (per cui rimandiamo al citato art. di ENRIQUES), rileveremo che PROCLO (pag. 277, 25) nota come i geometri deducano dalla prop. 10 che la linea non è costituita di elementi indivisibili: poichè egli osserva che, essendo finito il numero di questi elementi, con bisezioni successive si arriverebbe ad un segmento contenente un numero dispari di elementi che non sarebbe più bisecabile. E vale la pena di dire che la tesi opposta sopravvive nei filosofi empiristi, come SESTO EMPIRICO (*Adversus mathematicos* libri III), dove la linea è concepita appunto come un insieme di punti, disposti in serie.

11.

Ad una data retta, da un punto dato su di essa, condurre una linea retta, ad angolo retto.

Sia AB la retta data, e C il punto dato su essa. Bisogna dal punto C condurre una linea retta ad angolo retto con la AB.

Su AC si prenda un punto a caso D, e si ponga CE uguale a CD [*prop.* 2]; su DE si costruisca il triangolo equilatero FDE [*prop.* 1], e si conduca FC. Dico che alla retta AB, dal punto C dato su



di essa, è stata condotta la linea retta FC, ad angolo retto.

Infatti, poichè DC è uguale a CE, e CF è comune, le due rette DC, CF sono rispettivamente uguali alle due EC, CF; e la base DF è uguale alla base FE. Così, gli angoli DCF ed ECF sono uguali [*prop.* 8]; e sono adiacenti. Ma quando una retta, innalzata su un'altra retta, fa gli angoli adiacenti uguali, ciascuno degli angoli uguali è retto [*term.* 10]. Quindi $D\hat{C}F$, $F\hat{C}E$ sono retti.

Dunque, ad una data retta AB, ecc. c. d. f.

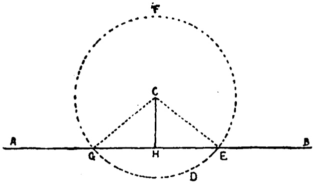
Altre soluzioni di questo problema sono riferite in PROCLO (cfr. il commento di HEATH, pag. 270). DE MORGAN osserva che il problema di cui si tratta è la bisezione di un angolo piatto; e si può aggiungere che questo caso può ridursi a quello della prop. 9, ove si ammetta il trasporto dell'angolo, costruendo per C due rette ugualmente inclinate sopra la AB. Ma la costruzione della perpendicolare si ottiene anche senza far uso del cerchio, ove si sostituisca il triangolo equilatero considerato da EUCLIDE con un triangolo isoscele (cfr. ENRIQUES-AMALDI, l. c., n. 89).

12.

Ad una data retta infinita, da un punto dato, che non sia su di essa, condurre una linea retta perpendicolare.

Sia AB la data retta infinita, ed il punto dato fuori di essa sia C. Bisogna condurre la retta perpendicolare alla AB dal punto C fuori di essa.

Si prenda dall'altra parte di AB un punto a caso D, e con centro C e distanza CD si descriva il circolo EFG [*n. com.* 3]; si divida la retta EG in due parti uguali in H [*prop.* 10], e si conducano le



rette CG, CH, CE. Dico che alla data retta infinita AB dal punto C dato fuori di essa, è stata condotta la perpendicolare CH.

Infatti, poichè GH è uguale ad HE, e HC è comune, le due rette GH, HC sono rispettivamente uguali alle due EH, HC; e la base CG è uguale alla base CE; quindi gli angoli CHG ed EHC sono uguali [*prop.* 8]; e sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta, forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto, e la retta innalzata si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata [*term.* 10].

Dunque, ad una data retta infinita, ecc. c. d. f.

Proclo (pag. 283, 7) dice che questo problema fu dapprima investigato da Enopide di Chio (v sec. a. C.), per scopo astronomico.

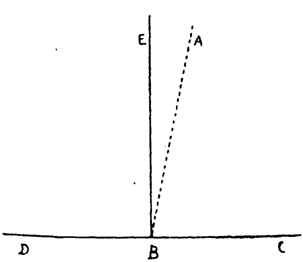
Occorre rilevare che, nella costruzione, si fa tacitamente uso del postulato che una circonferenza, la quale abbia il centro da una parte di una retta data ed un suo punto dall'altra parte, sega la retta in due punti. In luogo di questo postulato si può anche ammettere che « un segmento, avente un punto interno ed un punto esterno ad un cerchio, sega la circonferenza »; e tale affermazione si deduce da un principio di continuità, come vedesi nell'articolo di Vitali delle *Questioni*, citato nella nota alla prop. 1. Ma occorre aggiungere che la circonferenza taglia la retta in due punti e non in più. Sotto questo aspetto Euclide lascia una lacuna già rilevata in Proclo (pag. 286, 12); la quale, tuttavia, può essere soddisfacentemente colmata, con una semplice dimostrazione per assurdo, basata sulle prop. 13 e 17 (la somma di due angoli di un triangolo è minore di due retti).

Però, la costruzione della perpendicolare per un punto ad una retta data si può rendere indipendente dall'uso del cerchio, postulando soltanto il trasporto dell'angolo: infatti, si congiunga C con un punto B della retta, e si costruisca la BD, simmetrica della BC, prendendo BD = BC; allora la CD è la perpendicolare cercata (cfr. ENRIQUES-AMALDI, l. c., n. 110).

13.

Se una retta, innalzata su una retta, forma degli angoli, o forma due retti, od angoli uguali a due retti.

Infatti, una certa retta AB innalzata sulla retta CD formi gli angoli CBA, ABD. Dico che gli angoli CBA, ABD sono due retti, od eguali a due retti.



Poichè, se $C\hat{B}A$ è uguale ad $A\hat{B}D$, essi sono due retti [*term.* 10]. Se no, dal punto B si conduca la perpendicolare BE alla retta CD [*prop.* 11]. Così, $C\hat{B}E$, $E\hat{B}D$ sono due retti. E poichè $C\hat{B}E$ è uguale alla somma di $C\hat{B}A$ ed $A\hat{B}E$, si aggiunga $E\hat{B}D$ comune. Così la somma di $C\hat{B}E$ con $E\hat{B}D$, è uguale alla somma dei tre angoli CBA, ABE, EBD [*n. com.* 2]; di nuovo, poichè $D\hat{B}A$ è uguale alla somma di $D\hat{B}E$ ed $E\hat{B}A$, si aggiunga $A\hat{B}C$ comune. Così, la somma di $D\hat{B}A$ ed $A\hat{B}C$ è uguale alla somma dei tre $D\hat{B}E$, $E\hat{B}A$, $A\hat{B}C$ [*id.*]. Ma è stato dimostrato che anche $C\hat{B}E$, $E\hat{B}D$, presi insieme, sono uguali agli stessi tre angoli; e poichè cose uguali ad una stessa sono uguali tra loro [*n. com.* I], la somma di $C\hat{B}E$ con $E\hat{B}D$ sarà uguale a quella di DBA con $A\hat{B}C$. Ma $C\hat{B}E$, $E\hat{B}D$ sono due retti; quindi anche la somma di DBA ed ABC è uguale a due retti.

Dunque, se una retta, ecc. c. d. d.

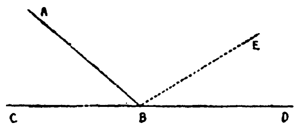
Conviene osservare (con Simon) che in questa proposizione si fa uso implicito dei postulati sulle proprietà commutativa ed associativa sull'addizione degli angoli.

14.

Se con una retta, e in un punto su di essa, due rette non giacenti dalla stessa parte fanno gli angoli adiacenti uguali a due retti, le due rette sono per diritto tra loro.

Con una retta AB, e nel punto B su di essa, le due rette BC, BD, non poste dalla stessa parte, facciano gli angoli adiacenti ABC, ABD, uguali a due retti. Dico che BD è per diritto alla BC.

Infatti, BC non sia per diritto alla BD, ma alla BE. Poichè dunque la retta AB è innalzata sulla retta CBE, la somma degli angoli ABC, ABE è uguale a due retti [*prop.* 13]. Ma anche $A\hat{B}C$,



$A\hat{B}D$, presi insieme, sono uguali a due retti. Dunque, la somma di $A\hat{B}C$ con $A\hat{B}E$ è uguale a quella di $A\hat{B}C$ con $A\hat{B}D$ [*n. com.* 1]. Si tolga $C\hat{B}A$, comune. Dunque, il resto $A\hat{B}E$ è uguale al resto $A\hat{B}D$ [*n. com.* 3], il minore al maggiore, il che è impossibile. Dunque BE non è per diritto alla CB; similmente dimostreremmo che nessun'altra retta lo è, eccetto la BD; dunque CB è per diritto alla BD.

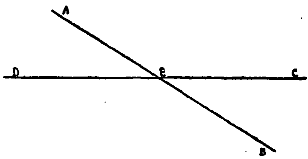
Dunque, se con una retta, ecc. c. d. d.

15.

Se due rette si intersecano, fanno gli angoli al vertice uguali tra loro.

Le due rette AB, CD si intersechino nel punto E. Dico che l'angolo AEC è uguale all'angolo DEB, e che $C\hat{E}B$ è uguale ad $A\hat{E}D$.

Poichè infatti la retta AE è innalzata sulla DC, formando gli angoli CEA, AED, i due angoli CEA, AED sono uguali a due retti [*prop.* 13]. Di nuovo, poichè la retta DE è innalzata sulla retta AB, formando gli angoli AED, DEB, gli angoli AED, DEB,



presi insieme, sono uguali a due retti [*id.*]. Ma è stato dimostrato che anche $C\hat{E}A$, $A\hat{E}D$, presi insieme, sono uguali a due retti: dunque la somma di $C\hat{E}A$ ed $A\hat{E}D$ è uguale a quella di $A\hat{E}D$ con $D\hat{E}B$ [*n. com.* 1]. Si tolga AED, comune; allora, il resto CEA è uguale al resto BED [*n. com.* 3]. Similmente si dimostrerà che anche CEB, DEA sono uguali.

Dunque, se due rette s'intersecano, ecc. c. d. d.

[*Corollario* (Πόρισμα)

Da questo è evidente che, se due rette s'incontrano, gli angoli intorno al punto d'incontro sono uguali a quattro retti].

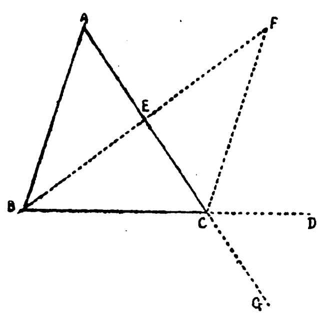
Secondo EUDEMO il teorema 15 sarebbe stato scoperto da TALETE, ma avrebbe ricevuto una dimostrazione scientifica da EUCLIDE (PROCLO, pag. 299, 3).

Il porisma manca nei codici vaticano, viennese e bolognese, mentre si trova in PROCLO, esteso al caso di più angoli per un punto. Da ciò MAX SIMON argomenta che si tratti di un'aggiunta all'Euclide, dei Neo-Pitagorici.

16.

In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ed opposti.

Sia ABC il triangolo, e si prolunghi un suo lato, fino in D. Dico che l'angolo esterno ACD è maggiore di ciascuno degli angoli interni ed opposti CBA, BAC.



Si divida per metà AC in E [*prop.* 10] e, condotta la BE, si prolunghi per diritto fino in F, ponendo EF uguale alla BE; si conduca la FC, e si prolunghi la AC in G.

Poichè AE è uguale alla EC, e BE ad EF, le due

AE, EB sono rispettivamente uguali alle due CE, EF; e l'angolo AEB è uguale all'angolo FEC, poichè sono opposti al vertice [*prop.* 15]. Dunque la base AB è uguale alla FC, ed il triangolo ABE è uguale al triangolo FEC, ed i rimanenti angoli sono rispettivamente uguali, quelli che sottendono lati eguali [*prop.* 4]. Dunque $B\hat{A}E$ è uguale ad $E\hat{C}F$. Ma $E\hat{C}D$ è maggiore di $E\hat{C}F$ [*n. com.* 8], dunque $A\hat{C}D$ è maggiore di $B\hat{A}E$.

Similmente, divisa per metà la BC, si dimostrerà che $B\hat{C}G$, cioè anche $A\hat{C}D$, è maggiore di $A\hat{B}C$.

Dunque, in ogni triangolo, ecc. c. d. d.

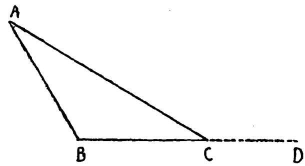
17.

In ogni triangolo due angoli, comunque presi, sono minori di due retti.

Sia ABC il triangolo; dico che due angoli del triangolo ABC, comunque presi, sono minori di due retti.

Si prolunghi infatti la BC in D. Poichè nel triangolo ABC l'angolo ACD è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno ed opposto ABC [*prop.* 16]; si aggiunga $A\hat{C}B$, comune; dunque la somma di $A\hat{C}D$

con $\widehat{ACB}$ è maggiore di quella di $\widehat{ABC}$ con $\widehat{BCA}$ [*n. com.* 4]. Ma la somma di $\widehat{ACD}$ ed $\widehat{ACB}$ è uguale a due retti [*prop.* 13], quindi $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, presi insieme, sono minori di due retti.



Similmente dimostreremmo che anche $B\widehat{A}C$, ACB, presi insieme, sono minori di due retti, e così anche $C\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$.

Dunque, in ogni triangolo, ecc. c. d. d.

Si noti che con la costruzione della prop. 16 si ottiene un triangolo BCF, ovvero BAF, in cui la somma degli angoli è uguale a quella di ABC e dove l'angolo in B è divenuto minore od uguale alla metà di ABC. Così, ripetendo la medesima costruzione, si può trasformare il triangolo ABC in un altro in cui gli angoli danno la medesima somma e dove uno degli angoli è piccolo ad arbitrio. Quindi la prop. 17 ci permette d'affermare che « la somma degli angoli di un triangolo è minore od uguale di due retti ».

Nella prop. 32 d'EUCLIDE sarà dimostrato che la somma degli angoli di un triangolo vale due retti; ma in essa ricorre l'uso del post. 5 delle parallele, che non si adopera invece nella dimostrazione precedente. La disuguaglianza

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \leq 2 \text{ retti}$$

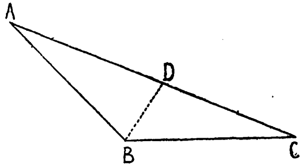
vale dunque indipendentemente dal postulato delle parallele (SACCHERI, LEGENDRE).

18.

In ogni triangolo, il lato maggiore sottende l'angolo maggiore.

Sia infatti ABC il triangolo, avente il lato AC maggiore di AB. Dico che anche l'angolo ABC è maggiore di $B\hat{C}A$.

Poichè infatti AC è maggiore di AB, si ponga AD uguale ad AB [*prop.* 2], e si conduca BD.



E poichè nel triangolo BCD l'angolo ADB è esterno, esso è maggiore dell'interno ed opposto $D\hat{C}B$ [*prop.* 16]; ma l'angolo ADB è uguale ad $A\hat{B}D$, perchè il lato AB è uguale ad AD [*prop.* 5]; dunque anche

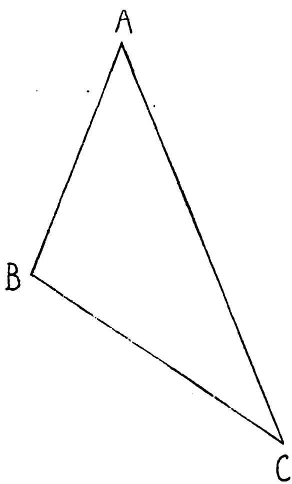
$A\hat{B}D$ è maggiore di $A\hat{C}B$, perciò $A\hat{B}C$ è molto maggiore di $A\hat{C}B$ [*n. com.* 8].

Dunque, in ogni triangolo, ecc. c. d. d.

19.

In ogni triangolo, l'angolo maggiore è sotteso dal lato maggiore.

Sia ABC il triangolo, avente l'angolo ABC maggiore di BCA. Dico che anche il lato AC è maggiore



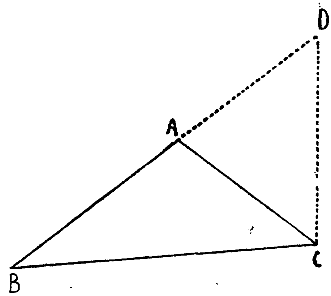
del lato AB. Se infatti non lo fosse, AC sarebbe uguale ad AB, o minore. Ma AC non è uguale ad AB; infatti, se fosse uguale, anche l'angolo ABC sarebbe uguale ad $A\hat{C}B$ [*prop.* 5]. Ma non lo è; dunque, AC non è uguale ad AB. E neppure AC è minore di AB, perchè anche l'angolo ABC sarebbe minore di $A\hat{C}B$ [*prop.* 18], il che non è. Dunque AC non è minore di AB. Ma è stato dimostrato che non è neppure uguale, perciò AC è maggiore di AB.

Dunque, in ogni triangolo, ecc. c. d. d.

20.

In ogni triangolo, due lati, comunque presi, sono maggiori del rimanente.

Sia infatti ABC il triangolo; dico che due lati del triangolo ABC, comunque presi, sono maggiori del rimanente: BA, AC di BC; AB, BC di AC; BC, CA di AB.



Si prolunghi infatti BA fino in D, ponendo AD uguale a CA, e si conduca DC.

Poichè DA è uguale ad AC, anche l'angolo ADC è uguale ad $A\hat{C}D$ [*prop.* 9]. Dunque $B\hat{C}D$ è maggiore di $A\hat{D}C$ [*n. com.* 8]. E poichè il triangolo DCB ha l'angolo $B\hat{C}D$ maggiore di $B\hat{D}C$, ed angolo maggiore sottende il lato maggiore, DB è maggiore di BC [*prop.* 19]. Ma DA è uguale ad AC, quindi BA, AC, presi insieme, sono maggiori di BC. Similmente dimostreremmo che AB, BC son maggiori di CA, e BC, CA di AB.

Dunque, in ogni triangolo, ecc. c. d. d.

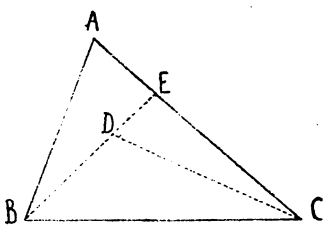
La prop. 20 esprime (nel confronto di linee composte di segmenti rettilinei) la proprietà di minimo, che si enuncia volgarmente dicendo « la retta è il più breve cammino tra due punti ».

Questa proprietà di minimo, in tutta la sua generalità, viene enunciata come postulato da ARCHIMEDE (*De sphaera et cylindro*, libro I). LEGENDRE l'ha assunta come definizione della retta (cfr. la nota alla def. 4) e tuttavia nei suoi *Elementi* presenta pure fra i teoremi la prop. 20.

21.

Se due rette, condotte dagli estremi di un lato di un triangolo, si congiungono internamente, le due rette congiunte, prese insieme, saranno minori dei due rimanenti lati del triangolo, ma comprenderanno un angolo maggiore.

Infatti, nel triangolo ABC, dagli estremi B, C di un lato BC, si conducano due rette, BD, DC, che si congiungano internamente. Dico che le BD, DC, prese insieme, sono minori dei rimanenti lati BA, AC del triangolo, ma che comprendono un angolo BDC, maggiore di $B\hat{A}C$. Si prolunghi infatti BD fino in E.



Poichè in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del rimanente [*prop.* 20], i due lati AB, AE del triangolo ABE, presi insieme, sono maggiori di BE; si aggiunga EC, comune: la somma di BA ed AC sarà maggiore di quella di BE ed EC [*n. com.* 4]. Di nuovo, poichè la somma dei due lati CE, ED del triangolo CED è maggiore di CD, si aggiunga la AB, comune: la somma di CE, EB sarà maggiore di quella di CD, DB. Ma è stato dimostrato che BA, AC, presi insieme, sono maggiori della somma di BE ed EC; dunque BA, AC, presi insieme, sono molto maggiori della somma di BD, DC.

Inoltre, poichè in ogni triangolo l'angolo esterno è maggiore di uno interno ed opposto [*prop.* 16], nel triangolo CDE l'angolo BDC è maggiore di $C\hat{E}D$. Per la stessa ragione anche nel triangolo ABE l'angolo esterno CEB è maggiore di BAC. Ma si è dimostrato che $B\hat{D}C$ è maggiore di $C\hat{E}B$; dunque $B\hat{D}C$ è molto maggiore di $B\hat{A}C$.

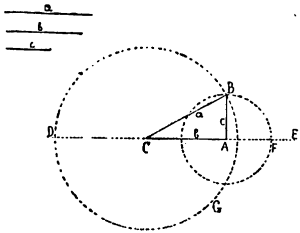
Dunque, se in un triangolo, ecc. c. d. d

22.

Con tre rette, uguali a tre date, costruire un triangolo; (occorre che due di esse, comunque prese, siano maggiori della rimanente [prop. 20]).

Siano *a*, *b*, *c* le tre rette date, delle quali due, comunque prese, siano maggiori della rimanente: *a*, *b* di *c; a, c* di *b;* ed anche *b, c* di *a*. Con tre rette uguali ad *a, b, c* si deve costruire un triangolo.

Si prenda una retta DE, terminata in D, ed infinita verso E, e si ponga DC uguale ad *a*, AC uguale a *b*, ed AF uguale a *c*. Con centro C, e distanza CD, si descriva il circolo DBG; di nuovo, con centro A, e distanza AF, si descriva il circolo BFG, e si conducano le BC, BA. Dico che con tre rette uguali ad *a, b, c* si è costruito il triangolo ABC.



Infatti, poichè il punto C è centro del circolo DBG, la CD è uguale alla CB; ma CD è uguale ad *a*; dunque, anche CB è uguale ad *a* [*n. com.* I]; di nuovo, poichè il punto A è centro del circolo GBF, la AF è uguale alla AB; ma AF è uguale a *c*, dunque anche AB è uguale a *c*; ma anche AC è uguale a *b*; dunque le tre rette BC, CA, AB sono uguali alle tre *a, b, c*.

Dunque, con tre rette, ecc. c. d. d.

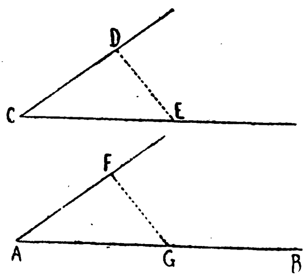
L'esistenza effettiva delle intersezioni delle circonferenze segue dalla restrizione conforme alla prop. 20; tuttavia si adopera qui il postulato cui già si è accennato nella nota alla prop. I.

Una discussione più completa delle posizioni relative di due cerchi in ordine alle loro intersezioni trovasi in LEGENDRE (cfr. le note al libro III).

23.

Su una retta data, ed in un suo punto, costruire un angolo rettilineo uguale ad un angolo dato.

Sia AB la retta data, ed A il punto su di essa; e sia DCE l'angolo rettilineo dato. Sulla retta data AB,



e nel suo punto A, si deve costruire un angolo rettilineo uguale a $D\hat{C}E$. Su ognuna delle due CD, CE, si prendano due punti a caso D, E; e si congiunga DE. Con tre rette, uguali alle tre CD, DE, CE, si costruisca il triangolo AFG, in modo che CD sia uguale ad AF, CE ad AG, e DE ad FG [*prop.* 22].

Poichè le due DC, CE sono uguali rispettivamente alle due FA, AG, e la base DE è uguale alla base FG, l'angolo DCE è uguale ad $F\hat{A}G$ [*prop.* 8].

Dunque, sulla retta data AB, ecc. c. d. d.

Secondo EUDEMO in PROCLO (pag. 333, 5) questo problema fu scoperto da ENOPIDE, e BRETSCHNEIDER (1) interpreta tale notizia nel senso che ENOPIDE dette precisamente la soluzione riferita da EUCLIDE.

La variante della costruzione, in cui ci si riferisce al caso particolare del triangolo isoscele, apparterrebbe ad APOLLONIO.

24.

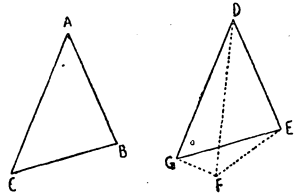
Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma gli angoli compresi dalle rette uguali uno maggiore dell'altro, avranno anche la base maggiore della base.

Siano ABC, DEF due triangoli, aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente ai due lati DE, DF; cioè AB uguale a DE, ed AC uguale a DF; e l'angolo in A maggiore dell'angolo in D. Dico che anche la base BC è maggiore della base EF.

Poichè infatti l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, sulla retta DE, e nel suo punto D, si

(1) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, 1870, pag. 645.

costruisca l'angolo EDG [*prop.* 23], uguale all'angolo BAC; si ponga DG uguale a ciascuna delle AC, DF, e si congiungano le EG, FG.



Poichè dunque AB è uguale a DE, ed AC a DG, le due BA, AC sono rispettivamente uguali alle due ED, DG; e l'angolo BAC è uguale all'angolo EDG; dunque la base BC è uguale ad EG. Di nuovo, poichè DF è uguale a DG, anche l'angolo DGF è uguale a $D\hat{F}G$. Dunque $D\hat{F}G$ è maggiore di $E\hat{G}F$ [*n. com.* 8], perciò $E\hat{F}G$ è molto maggiore di $E\hat{G}F$ [*id.*]. E poichè il triangolo EFG ha l'angolo EFG maggiore di $E\hat{G}F$, ed angolo maggiore sottende lato maggiore [*prop.* 19], anche il lato EG sarà maggiore di EF. Ma EG è uguale a BC, dunque BC è maggiore di EF.

Dunque, se due triangoli, ecc. c. d. d.

25.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno la base maggiore della base, avranno anche un angolo maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette uguali.

Siano ABC, DEF due triangoli, aventi i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai due lati DE, DF, cioè AB uguale a DE, ed AC a DF; e la base BC sia maggiore della base EF. Dico che anche l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.

Se infatti non lo fosse, sarebbe uguale o minore. Ma $B\hat{A}C$ non è uguale a $E\hat{D}F$, perchè anche la base BC sarebbe uguale alla base EF [*prop.* 4]; ma non

lo è, quindi l'angolo $B\hat{A}C$ non è uguale ad $E\hat{D}F$. E neppure $B\hat{A}C$ è minore di $E\hat{D}F$, perchè anche la base BC sarebbe minore della base EF [*prop.* 24]; ma non lo è, dunque l'angolo BAC non è minore di $E\hat{D}F$. Ma è stato dimostrato che non è neppure uguale, dunque $B\hat{A}C$ è maggiore di $E\hat{D}F$.

Dunque, se due triangoli, ecc. c. d. d.

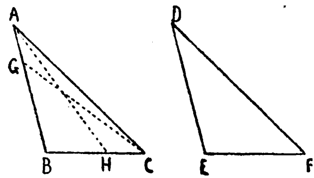
PROCLO (pag. 345, 15; 346, 13) riferisce due eleganti dimostrazioni dirette, una di MENELAO, e l'altra di ERONE, che possono vedersi riportate in HEATH, pag. 300, 301.

26.

Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, o quello tra i lati uguali, o quello che sottenda uno degli angoli uguali, avranno anche i rimanenti lati (rispettivamente) uguali ai rimanenti lati, ed il rimanente angolo al rimanente angolo.

Siano ABC, DEF due triangoli, aventi i due angoli ABC, BCA rispettivamente uguali ai due $D\hat{E}F$, $E\hat{F}D$, cioè $A\hat{B}C$ uguale a $D\hat{E}F$, e $B\hat{C}A$ uguale ad $E\hat{F}D$; abbiano anche un lato uguale ad un lato, e dapprima quello tra gli angoli uguali, cioè BC uguale ad EF. Dico che i due triangoli avranno anche i rimanenti lati rispettivamente uguali ai rimanenti lati, AB a DE, ed AC a DF; ed il restante angolo uguale al restante angolo.

Se infatti AB non fosse uguale a DE, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore AB, e si ponga BG uguale a DE, e si congiunga GC.



Poichè dunque BG è uguale a DE, e BC ad EF, le due BG, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e l'angolo GBC è uguale all'angolo DEF. Dunque la base GC è uguale alla base DF, ed il triangolo GBC è uguale al triangolo DEF, i restanti angoli saranno uguali ai restanti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Quindi l'angolo GCB sarà uguale a $D\hat{F}E$. Ma $D\hat{F}E$ si è supposto uguale a $B\hat{C}A$, dunque anche $B\hat{C}G$ è uguale a $B\hat{C}A$ [*n. com.* I], il maggiore al minore, il che è impossibile [*n. com.* 8]. Dunque AB non è disuguale a DE; quindi è uguale. Ma anche BC è uguale ad EF; perciò le due AB, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF; dunque la base AC è uguale alla base DF, ed il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF [*prop.* 4].

Siano ora uguali i lati che sottendono angoli uguali, come AB a DE. Di nuovo dico che i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati, AC a DF, e BE ad EF, ed anche che il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF.

Se infatti BC fosse disuguale da EF, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore, se è possibile, BC; si ponga BH uguale ad EF, e si congiunga AH. Poichè BH è uguale ad EF, ed AB a DE, le due AB, BH sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e comprendono angoli uguali; dunque la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Dunque l'angolo BHA è uguale all'angolo EFD. Ma $E\hat{F}D$ è uguale a $B\hat{C}A$, cioè nel triangolo AHC l'angolo esterno BHA è uguale all'interno ed opposto $B\hat{C}A$, il che è impossibile [*prop.* 16]. Dunque BC non è disuguale da EF, quindi è uguale. Ma anche AB è uguale a DE, perciò le due AB, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF, e comprendono angoli uguali. Quindi la base AC è uguale alla base DF; il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF, e il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF.

Dunque, se due triangoli, ecc. c. d. d.

Questo teorema, dice EUDEMO in PROCLO (pag. 352, 14), deve attribuirsi a TALETE di Mileto, perchè egli ne faceva uso per determinare la distanza d'una nave dalla spiaggia.

Ma i critici moderni (in particolare TANNERY e ZEUTHEN) avvertono che l'inferenza dell'antico storico è viziosa: infatti, l'uso pratico del teorema in un'operazione di triangolazione, non implica affatto il riconoscimento teorico di esso; poichè si tratta, invero, di proposizione evidente e però non significativa, che assume significato soltanto in un sistema deduttivo assai sviluppato, e come un anello nella catena delle deduzioni conducenti a teoremi realmente significativi.

Ora, passando ad esaminare il contenuto della prop. 26, dobbiamo anzitutto rilevare il posto che le è attribuito nell'ordine euclideo. Effettivamente la prop. 26 contempla due casi d'uguaglianza dei triangoli, il primo dei quali si riferisce all'eguaglianza d'un lato e degli angoli adiacenti. Ebbene, questo caso — che già CLAVIO considera come teorema inverso della prop. 4 — secondo la stessa dimostrazione euclidea, segue subito per assurdo da questa proposizione, ed anche può dimostrarsi collo stesso metodo diretto, cioè per sovrapposizione, come fa CLAVIO, e fra i trattatisti più recenti OZANAM e LEGENDRE (cfr. *Elementi*, prop. 7).

Perciò appunto il teorema di cui qui si tratta viene comunemente ritenuto come *secondo criterio d'uguaglianza* dei triangoli.

L'altro caso della prop. 26, che EUCLIDE deduce per assurdo dalla disuguaglianza dell'angolo esterno (prop. 16), viene così provato indipendente dalla teoria delle parallele: chè, se si voglia ricorrere a questa, si riconduce subito al primo caso, in base alla prop. 32.

Aggiungiamo alcune osservazioni generali sulla teoria dell'uguaglianza dei triangoli.

È stato osservato che le prop. 4, 8, 26 sono le sole in cui EUCLIDE esamini i criterii d'uguaglianza dei triangoli, mentre il caso omesso (di cui vogliamo discorrere) trova posto nella teoria della similitudine (VI, 7).

Per discutere in generale la questione, si noti che i triangoli del piano dipendono da sei parametri (le coordinate dei vertici), ma che quelli uguali ad un dato dipendono da tre parametri, sicchè l'uguaglianza di due triangoli importa *tre* condizioni. Si designino con a, b, c, α, β, γ e con a', b', c', α' β', γ' ordinatamente i sei elementi (lati e angoli) di due triangoli: *a priori* le condizioni d'uguaglianza di cui si tratta potranno essere espresse da:

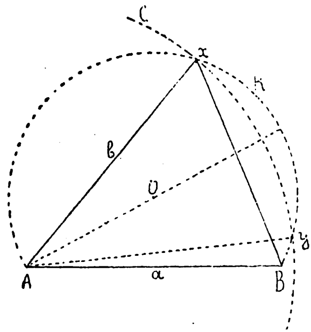
$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}\ a = a',\ b = b',\ \alpha = \alpha' & \text{(prop. 4)} \\ 2^{\circ}\ a = a',\ b = b',\ c = c' & \text{(prop. 8)} \\ \left.\begin{array}{l} 3^{\circ}\ a = a',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \\ 4^{\circ}\ a = a',\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta' \end{array}\right\} & \text{(prop. 26)} \end{array}$$

ovvero da:

$$\begin{array}{l} 5^{\circ}\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \\ 6^{\circ}\ a = a',\ b = b',\ \beta = \beta'. \end{array}$$

Ma le condizioni 5° non sono indipendenti, essendo $\alpha + \beta + \gamma = 2\,R$ (ragion per cui si unificano in un solo i criterii 3 e 4). Resta, dunque, da esaminare solo un *quarto caso*, essenzialmente distinto.

L'analisi (in cui viene presupposta la teoria delle parallele e le conseguenze del libro III che ne dipendono) si compie nel modo più semplice e completo, proponendosi



di « costruire un triangolo di cui sieno dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi ». Perciò costruiamo sul lato a = AB l'arco di circonferenza K, capace dell'angolo α, e seghiamolo colla circonferenza C di centro A e raggio b.

Ammessa l'esistenza d'un triangolo cogli elementi a, b, α, la circonferenza C dovrà segare l'arco K almeno in un punto; ma potrà segarlo in due punti o in uno solo, X, secondochè il simmetrico di X rispetto al diametro OA di K appartiene allo stesso arco K o al complementare (capace dell'angolo $\pi - \alpha$).

Dall'esame di questa costruzione si ricava:

1° l'uguaglianza di due lati e dell'angolo opposto ad uno di essi dà luogo ad un *caso ambiguo*, in cui non è sempre lecito concludere all'uguaglianza dei due triangoli;

2º l'ambiguità si risolve con qualche condizione di disuguaglianza, p. es. aggiungendo che:

gli angoli (α, α') di cui è data l'uguaglianza siano quelli opposti al lato maggiore ($a \geq b$, $a' \geq b'$);

ovvero che i triangoli che si confrontano sieno ambedue acutangoli, o ambedue ottusangoli (incluso il caso limite dell'angolo retto).

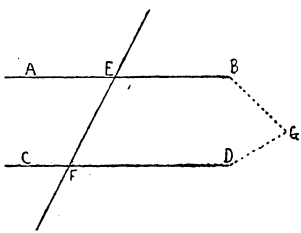
Il criterio d'uguaglianza dei triangoli con due lati e un angolo non compreso uguali, trovasi considerato da CHR. WOLFF, *Anfangsgründen aller mathematische Wissenschaften* (1750), ma incompletamente, senza porre in evidenza il caso ambiguo. LEGENDRE dimostra il criterio soltanto per i triangoli rettangoli; ma nella seconda edizione della traduzione tedesca, A. L. CRELLE aggiunge una nota in cui la questione viene completamente chiarita. Poi il caso ambiguo si vede pure trattato nel commento all'Euclide del TODHUNTER (1862), nella *Geometria* dell'AMIOT, ecc. Alcuni trattati, come il BALTZER (trad. it. di CREMONA, p. 4ª, 1867), enunciano il criterio d'uguaglianza pel caso in cui gli angoli uguali sono opposti ai lati maggiori; ma, di solito, nei nostri libri scolastici, il criterio non compare affatto o compare solo nel caso più semplice dei triangoli rettangoli.

27.

Se una retta, cadendo su due rette, fa gli angoli alterni uguali tra loro, le due rette saranno parallele tra loro.

Cadendo sulle due rette AB CD, la retta EF faccia gli angoli alterni AEF, EFD, uguali tra loro. Dico che AB è parallela a CD.

Se infatti non lo fosse, le AB, CD, prolungate, si incontrerebbero dalla parte B, D, oppure dalla parte A, C. Si prolunghino, e si incontrino dalla parte B, D, in G. Allora nel triangolo GEF, l'angolo esterno AEF è uguale all'interno ed opposto E$\hat{F}$G, il che è impossibile [*prop.* 16]. Dunque le AB, CD, prolungate,



non si incontrano dalla parte B, D. Similmente si dimostrerà che neppure si incontrano dalla parte A, C. Ma rette che non si incontrano in nessuna delle due parti, sono parallele [*term.* 23]. Dunque AB è parallela a CD.

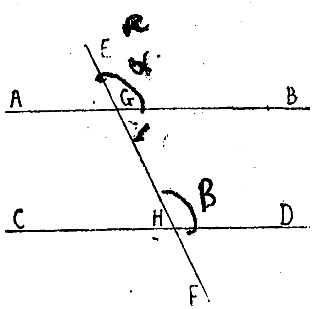
Dunque, se una retta, ecc.. c. d. d.

28.

Se una retta, cadendo su due rette, fa l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto dalla stessa parte, oppure gli angoli interni dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.

Cadendo sulle due rette AB, CD la retta EF faccia l'angolo esterno EGB uguale all'interno ed opposto G$\hat{H}$D, oppure gli angoli interni dalla stessa parte BGH, GHD, uguali a due retti. Dico che la AB è parallela alla CD.

Infatti, poichè E$\hat{G}$B è uguale a G$\hat{H}$D, siccome E$\hat{G}$B è uguale ad A$\hat{G}$H [*prop.* 15] anche A$\hat{G}$H è uguale a G$\hat{H}$D; e sono alterni; perciò AB è parallela a CD [*prop.* 27].



Inoltre, poichè la somma di B$\hat{G}$H con G$\hat{H}$D è uguale a due retti, ed anche quella di A$\hat{G}$H con

$B\hat{G}H$ è uguale a due retti [*prop.* 13], $A\hat{G}H$ e $B\hat{G}H$ presi insieme, sono uguali alla somma di $B\hat{G}H$ con $G\hat{H}D$ [*n. com.* 1]. Si tolga la parte comune $B\hat{G}H$; il resto $A\hat{G}H$ è uguale al resto $G\hat{H}D$ [*n. com.* 3]; e sono alterni; dunque AB è parallela a CD [*prop.* 27].

Dunque, se una retta, ecc. c. d. d.

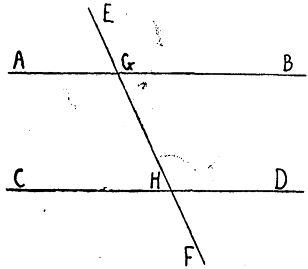
Il teorema contenuto in queste ultime due proposizioni può essere stabilito senza far uso della proposizione sull'angolo esterno, ricorrendo all'uguaglianza delle due parti in cui la striscia è divisa dalla trasversale, e tenendo presente l'impossibilità che due rette si seghino in due punti. Questa dimostrazione risale all'astronomo TOLOMEO, come apprendiamo da uno scolio di PROCLO (pag. 362, 14).

29.

Una retta che cade su due rette parallele fa gli angoli alterni uguali tra loro, l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto, e gli angoli interni dalla stessa parte uguali a due retti.

Sulle rette parallele AB, CD cada infatti la EF. Dico che essa fa gli angoli alterni AGH, GHD uguali tra loro, l'angolo esterno EGB uguale all'interno ed opposto GHD, e gli angoli interni dalla stessa parte BGH, GHD uguali a due retti.

Se infatti $A\hat{G}H$ non fosse uguale a $G\hat{H}D$, uno di essi sarebbe maggiore. Sia $A\hat{G}H$ il maggiore. Si aggiunga $B\hat{G}H$, comune. Allora $A\hat{G}H$, $B\hat{G}H$, presi insieme, sono maggiori della somma di $B\hat{G}H$ con $G\hat{H}D$ [*n. com.* 2]. Ma $A\hat{G}H$, $B\hat{G}H$, presi insieme, sono uguali a due retti [*prop.* 13]; dunque la somma di $B\hat{G}H$ con



$G\hat{H}D$ è minore di due retti. Ma due rette che fanno gli angoli interni minori di due retti, prolungate all'infinito, s'incontrano [*post.* 5]. Quindi le AB, CD, prolungate all'infinito, s'incontreranno; ma non s'incontrano, perchè si sono supposte parallele. Dunque $A\hat{G}H$ non è disuguale da $G\hat{H}D$; dunque è uguale. Ma $A\hat{G}H$ è uguale ad $E\hat{G}B$ [*prop.* 15]. Anche $E\hat{G}B$ è, quindi, uguale a $G\hat{H}D$ [*n. com.* 1]. Si aggiunga $B\hat{G}H$, comune. Dunque $E\hat{G}B$, $B\hat{G}H$, presi insieme, sono uguali alla somma di $B\hat{G}H$ con $G\hat{H}D$ [*n. com.* 2]. Ma $B\hat{G}H$, $G\hat{H}D$, presi insieme, sono uguali a due retti, quindi anche la somma di B$\hat{G}$H, G$\hat{H}$D è uguale a due retti.

Dunque una retta, cadendo, ecc. c. d. d.

In questa proposizione per la prima volta si fa uso del post. 5 delle parallele, che EUCLIDE si è proposto evidentemente di evitare nelle precedenti 28 proposizioni: del quale proposito vale, per esempio, come prova, l'avere dato due proposizioni come le 16 e 17, che ricevono una determinazione più significativa nella prop. 32.

Di qui, e da alcune notizie porteci da ARISTOTELE, si rileva che già prima di EUCLIDE si erano affacciate in qualche modo le questioni critiche che toccano il postulato delle parallele (cfr. RUFINI, *La preistoria delle parallele e il postulato d'Euclide*, in *Periodico di Matematiche*, gennaio 1923).

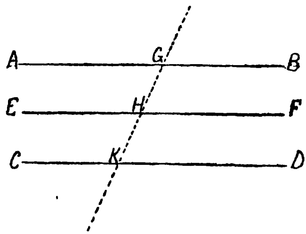
Per la storia di tali questioni dopo EUCLIDE vedasi R. BONOLA, *La geometria non euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo* e l'articolo dello stesso autore nelle *Questioni*.

30.

Le parallele ad una stessa retta sono anche parallele tra loro.

Ognuna delle AB, CD sia parallela alla EF. Dico che anche la AB è parallela alla CD.

Le incontri infatti la retta GK. Poichè sulle rette parallele AB, EF cade la retta GK, l'angolo AGK è uguale a $G\hat{H}F$ [*prop.* 29]. Inoltre, poichè sulle rette parallele EF, CD cade la retta GK, l'angolo GHF è uguale a $G\hat{K}D$ [*prop.* 29]. Ma è stato dimostrato



che anche $A\hat{G}K$ è uguale a $G\hat{H}F$, dunque anche $A\hat{G}K$ è uguale a $G\hat{K}D$ [*n. com.* 1]. E sono alterni; quindi AB è parallela a CD [*prop.* 27]. c. d. d.

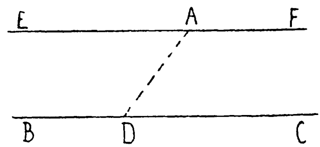
PROCLO osserva che da questa proposizione segue l'unicità della parallela per un punto ad una retta data, che anzi, secondo DE MORGAN (in VACCA) le è equivalente. D'altronde l'ipotesi di questa unicità permette di dimostrare la precedente prop. 29 sostituendo il post. 5 d'Euclide: sotto questa forma il postulato delle parallele riceve spesso il nome di PLEYFAIR.

31.

Per un punto dato condurre una linea retta parallela ad una retta data.

Sia A il punto dato, e la retta data sia BC. Per il punto A si deve condurre una linea retta parallela alla BC.

Sulla BC si prenda un punto a caso D, e si conduca AD; sulla retta AD, e nel suo punto A, si co-



struisca un angolo DAE uguale all'angolo ADC [*prop*. 23] e si prolunghi AF, per dritto alla EA.

Poichè, cadendo sulle due rette BC, EF, la retta AD fa gli angoli alterni EAD, ADC uguali tra loro, la EAF è parallela alla BC [*prop*. 27].

Dunque, per il punto dato A, ecc. c. d. f.

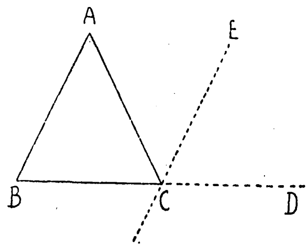
PROCLO (pag. 376, 14), osserva che EUCLIDE pone il problema 31 dopo avere dimostrato la 30, che porta l'unicità della parallela che qui si tratta di costruire.

32.

Prolungato un lato di qualsiasi triangolo, l'angolo esterno è uguale ai due interni ed opposti, ed i tre angoli interni del triangolo sono uguali a due retti.

Sia ABC il triangolo, e si prolunghi un suo lato BC in D. Dico che l'angolo esterno ACD è uguale ai due interni ed opposti $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$; e che i tre angoli interni del triangolo, ABC, BCA, CAB, sono uguali a due retti.

Si conduca infatti per il punto C la parallela CE alla retta AB. Poichè AB è parallela alla CE, e su di esse cade la AC, gli angoli alterni BAC, ACE sono

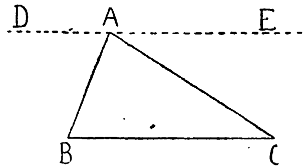


uguali tra loro [*prop.* 29]. Di nuovo, poichè la AB è parallela alla CE, e su di esse cade la retta BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'interno ed opposto ABC [*prop.* 29]. Ma è stato dimostrato che anche $A\hat{C}E$ è uguale a $B\hat{A}C$, dunque tutto $A\hat{C}D$ è uguale alla somma dei due interni ed opposti $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ [*n. com.* 2].

Si aggiunga $A\hat{C}B$, comune. Allora $A\hat{C}D$, $A\hat{C}B$, presi insieme, sono uguali alla somma dei tre $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$ [*n. com.* 2]. Ma $A\hat{C}D$, $A\hat{C}B$, presi insieme, sono uguali a due retti [*prop.* 13]; dunque, anche la somma di $A\hat{C}B$, $C\hat{B}A$, $C\hat{A}B$ è uguale a due retti [*n. com.* 1].

Dunque, in ogni triangolo, ecc, c. d. d.

Si osservi che questa proposizione esprime uno dei due teoremi veramente significativi del libro I (l'altro è la prop. 47), ed anzi i due teoremi di cui si parla sembrano costituire i fuochi rispetto a cui viene ordinata la tratta-



zione euclidea. La dimostrazione del teorema è attribuita da EUDEMO in PROCLO (pag. 379, 2) ai Pitagorici; la dimostrazione originale sembra fosse quella che viene suggerita dall'annessa figura, dove si fa uso dell'uguaglianza degli angoli alterni interni che le parallele determinano con le trasversali AB, AC.

I tentativi di dimostrare la prop. 32 indipendentemente dal postulato delle parallele hanno portato SACCHERI e LEGENDRE a stabilire che «se in un solo triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, altrettanto avviene per ogni altro triangolo, ed allora la validità del postulato delle parallele se ne deduce come conseguenza». Insomma, l'esistenza di un triangolo in cui la somma degli angoli è uguale a due retti, si può ritenere come un postulato che equivale al post. 5 delle parallele.

Già prima d'EUCLIDE si era avvertito il teorema generale che include la prop. 32 e ne costituisce una facile estensione, cioè « la somma degli angoli di un poligono di n lati vale $2n - 4$ retti, e la somma degli angoli esterni vale sempre 4 angoli retti». In ARISTOTELE (*Analyt. Post.* I, 24, 85 b, 38 e II, 17, 99 a, 19) si accenna alla seconda parte del precedente enunciato, che evidentemente importa anche la conoscenza della prima. PROCLO dà esplicitamente la somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati.

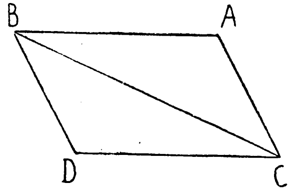
Una siffatta estensione trovasi anche in commenti posteriori, per esempio in TARTAGLIA (dove s'incontra il pentagono stellato dei Pitagorici) e in SIMSON.

33.

Rette congiungenti dalla stessa parte rette uguali e parallele, sono anch'esse uguali e parallele.

Le AB, CD siano uguali e parallele; e le rette AC, BD le congiungano dalla stessa parte. Dico che anche le AC, BD sono uguali e parallele.

Si conduca BC. Poichè AB è parallela alla CD, e su di esse cade la BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono



uguali tra loro [*prop*. 29]. E poichè AB è uguale a CD, e BC è comune, le due AB, BC sono uguali alle due CD, BC; inoltre l'angolo ABC è uguale all'angolo

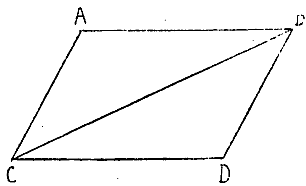
BCD; dunque la base AC è uguale alla base BD, il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Dunque l'angolo ABC è uguale a CBD [*prop.* 4]. E poichè la BC, cadendo sulle due rette AC, BD fa gli angoli alterni uguali tra loro, la AC è parallela alla BD [*prop.* 27]. È già stato anche dimostrato che è uguale ad essa.

Dunque, rette congiungenti, ecc. c. d. d.

34.

I lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono uguali tra loro, e la diagonale lo divide per metà.

Sia ACDB lo spazio parallelogrammo e BC il suo diametro. Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma sono uguali tra loro, e che il diametro BC lo divide per metà. Infatti, poichè AB è parallela a CD, e su di esse cade la retta BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali tra loro [*prop.* 29]. Di nuovo, poichè AC è parallela a BD, e su di esse cade la BC, gli angoli alterni ACB, CBD sono uguali tra loro [*prop.* 29]; dunque ci sono due triangoli ABC, BCD, che hanno i due angoli ABC, BCA rispettivamente uguali agli angoli BCD, CBD, ed hanno un lato uguale ad un lato, quello tra gli angoli uguali, cioè BC, comune. Dunque avranno rispettivamente uguali anche gli altri lati, ed il rimanente angolo uguale al rimanente angolo [*prop.* 26]. Quindi il lato AB è uguale a CD, e AC a BD, ed inoltre l'angolo BAC è uguale a CDB. E poichè l'angolo ABC è uguale a $B\hat{C}D$, e $C\hat{B}D$ ad $A\hat{C}B$; tutto $A\hat{B}D$ sarà uguale ad $A\hat{C}D$ [*n. com.* 2]. È stato già dimostrato inoltre che anche BAC è uguale a $C\hat{A}B$.



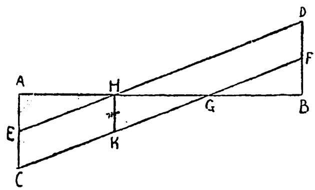
Dunque i lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono uguali tra loro.

Dico, inoltre, che la diagonale lo divide per metà. Infatti, poichè AB è uguale a CD, e BC è comune, le due AB, BC sono rispettivamente uguali alle due CD, BC; inoltre, l'angolo ABC è uguale a BCD [*prop.* 29]; dunque anche la base AC è uguale a DB. Ed il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD [*prop.* 4].

Dunque la diagonale BC divide per metà il parallelogramma ABCD. c. d. d.

Con la prop. 33, osserva PROCLO (pag. 385), si dimostra l'esistenza del parallelogramma, e si inizia la teoria dei parallelogrammi ed il confronto delle superficie che vi si riattaccano.

Il matematico arabo ANARIZIO (pag. 74) basa su queste proposizioni un elegante metodo per la trisezione di un segmento AB. Si conducano da A e B e da parti opposte



due perpendicolari uguali fra loro AC, BD, e si bisechino nei punti E, F, congiungendo poi ED, CF. Queste congiungenti segano AB in due punti, che dividono il segmento in tre parti uguali.

La dimostrazione segue facilmente, ove si conduca per H la perpendicolare HK ad AB, confrontando i triangoli AHE, HGK. La costruzione può essere estesa al problema di dividere un segmento in *n* parti uguali, che — come accennammo — EUCLIDE risolve in VI, 9.

Per la terminologia si noti che EUCLIDE usa il termine « parallelogramma » (παραλληλόγραμμον) senza esplicita definizione; e — come gli scrittori più antichi — usa la parola « diametro » (διάμετρος), in luogo di « diagonale » (διαγόνιος), sebbene questa designazione ricorra una volta negli *Elementi*, e precisamente in XI, 28.

Invece il termine « diagonale » è usato più tardi da

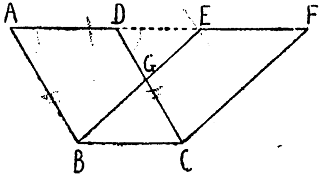
Erone; Pappo e Proclo conoscono ambedue questi termini; i quali anche in seguito, fino ai tempi più recenti, si trovano spesso adoperati indifferentemente.

35.

I parallelogrammi posti sulla stessa base e tra le stesse parallele, sono uguali tra loro.

Siano ABCD, EBCF i parallelogrammi posti sulla stessa base BC, e tra le stesse parallele AF, BC. Dico che ABCD è uguale al parallelogramma EBCF.

Infatti, poichè ABCD è un parallelogramma, AD è uguale a BC [*prop.* 34]. Per la stessa ragione anche EF è uguale a BC [*id.*], perciò anche AD è



uguale ad EF [*n. com.* 1]; inoltre DE è comune. Dunque tutto AE è uguale a tutto DF [*n. com.* 2]. Ma ancora, AB è uguale a DC [*prop.* 34], quindi le due EA, AB sono rispettivamente uguali alle due DF, DC; l'angolo FDC è uguale all'angolo EAB, l'esterno all'interno [*prop.* 29]; dunque la base EB è uguale alla base FC, ed il triangolo EAB è uguale al triangolo DFC [*prop.* 4]. Si tolga DGE, comune; il rimanente trapezio ABGD sarà uguale al rimanente trapezio EGCF [*n. com.* 3]. Si aggiunga il triangolo comune GBC; tutto il parallelogramma ABCD risulta così uguale a tutto il parallelogramma EBCF.

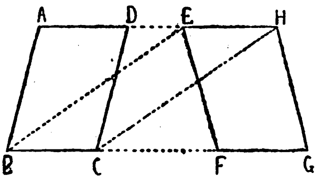
Dunque, i parallelogrammi, ecc. c. d. d.

36.

I parallelogrammi posti su basi uguali e tra le stesse parallele, sono uguali tra loro.

Siano ABCD, EFGH i parallelogrammi, posti sulle basi uguali BC, FG, e tra le stesse parallele AH, BG. Dico che il parallelogramma ABCD è uguale ad EFGH.

Si congiungano infatti BE e CH. Poichè BC è uguale ad FG, ed FG è uguale ad EH, anche BC sarà



uguale ad EH [*n. com.* 1]; e sono anche parallele; e le EB, HC le congiungono. Ma le congiungenti dalla stessa parte rette uguali e parallele, sono anch'esse uguali e parallele [*prop.* 33]. Dunque EBCH è un parallelogramma [*prop.* 34]; ed è uguale ad ABCD, perchè ha la stessa base BC, ed è tra le stesse parallele BC, AH [*prop.* 35]. Per la stessa ragione anche EFGH è uguale allo stesso EBCH [*id.*]. Quindi il parallelogramma ABCD è uguale ad EFGH [*n. com.* 1]

Dunque, parallelogrammi, ecc. c. d. d.

Nelle prop. 35 e 36 per la prima volta EUCLIDE considera un'uguaglianza di superficie (equivalenza) che non s'accompagna ad un'uguaglianza di forma (congruenza). La distinzione fra uguaglianza ed equivalenza trovasi chiaramente fatta da LEONARDO DA VINCI, che parla appunto di « superfizie equali in figura e di superfizie equali in quantità (o in valuta) e varie in figura » (cfr. p. es.: *Cod. Atl.* f. 131, verso *a*; f. 166 verso *b*; f. 181, verso *b*); ma di ciò che LEONARDO contiene su questo tema, speriamo che il prof. RUFINI (a cui dobbiamo l'osservazione precedente) offra più ampio riferimento in occasione della pubblicazione delle Opere, cui egli attende come collaboratore della commissione vinciana.

Nella dimostrazione del teorema 35, EUCLIDE adopera il criterio che sono uguali somme e differenze di superficie uguali. Anzi, come già osserva PROCLO, egli limita la sua dimostrazione al caso più difficile in cui i due parallelogrammi risultano differenze di figure uguali, anzichè considerare il caso in cui, E cadendo fra A e B, essi risultano somme di figure uguali. Tuttavia il caso di EUCLIDE si può sempre ridurre a questo, intercalando un certo numero di parallelogrammi fra i due lati, e fondandosi sul postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE.

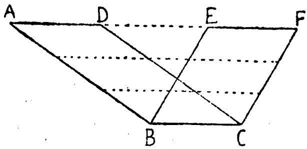
Solo intorno al 1832 l'attenzione dei geometri sembra essere stata attratta per la prima volta sulla molteplicità dei criterîi che si adoperano per riconoscere l'eguaglianza di due superficie. BOLYAI (1832-33) e GERWIEN (1833) (1), indipendentemente l'uno dall'altro, si sono proposti di dimostrare che figure rettilinee, le quali si ottengano come differenze di figure uguali, possono anche ritenersi come somme di parti uguali. E BOLYAI credette anzi di essere giunto a stabilire la cosa per figure qualsivogliano (mentre un teorema posteriore del RÉTHY assegna le condizioni sotto cui tale decomposizione riesce possibile). GERWIEN dimostra precisamente che due triangoli di uguale base ed altezza sono decomponibili in parti uguali, e ne deduce che due poligoni racchiudenti ugual superficie ammettono sempre un'analoga decomposizione; quindi egli conclude il suo scritto proponendo di definire come poligoni equivalenti (*inhaltgleich*), in contrapposto ad eguali (*gleich*), due poligoni che siano somme di poligoni uguali.

La stessa definizione si trova anche al termine della seconda parte dell'opera di DUHAMEL, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (Parigi, 1875, pag. 446-48), nella forma più completa: « Due grandezze (geometriche) di qualsiasi specie si dicono equivalenti quando sono com-

(1) *Journal für Mth. di Crelle*, X, pag. 228.

poste di parti rispettivamente uguali, o sono limiti di grandezze composte di parti rispettivamente uguali ».

Del resto il Duhamel stesso, che a quanto pare non conosceva l'opera dei suoi precursori, dimostra la decom-



ponibilità dei poligoni equivalenti in parti uguali, riducendosi alla prop. 37: a tal uopo egli divide i due parallelogrammi in parti uguali, così com'è indicato nell'annessa figura.

Ora se, partendo dalla decomponibilità in parti uguali, si voglia sviluppare la teoria generale dell'equivalenza fra poligoni, si incontrano alcune difficoltà che la critica recente ha pienamente delucidato. Ma noi non ci indugeremo su di queste, rimandando all'articolo che Amaldi vi ha espressamente consacrato nelle *Questioni*; e nel seguito ci limiteremo a notare come i teoremi di equivalenza in cui Euclide ricorre al criterio della sottrazione, si riducano direttamente e semplicemente al criterio dell'equivalenza per somma.

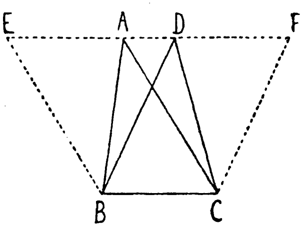
37.

sulla stessa base

I triangoli posti ~~su basi uguali~~ e tra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Siano ABC, DBC i triangoli posti sulla stessa base BC e tra le stesse parallele AD, BC. Dico che il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC.

Si prolunghi AD da ciascuna parte, verso E, F; per B si conduca la parallela BE alla CA, e per C si conduca la parallela CF alla BD [*prop.* 31]. Così, ciascuno degli EBCA, DBCF è un parallelogramma; essi inoltre sono uguali, perchè sono sulla stessa base BC e tra le stesse parallele BC, EF [*prop.* 35]. Ma il triangolo

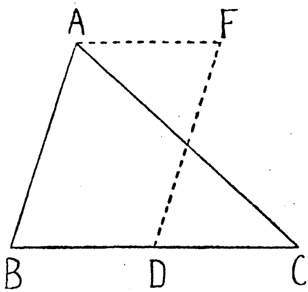


ABC è la metà del parallelogramma EBCA, perchè la diagonale AB divide questo per metà [*prop.* 34]; ed il triangolo DBC è la metà del parallelogramma DBCF, perchè la diagonale DC divide questo per metà. Dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC.

Dunque, triangoli sulla stessa base, ecc.

c. d. d.

Invece di adoperare il criterio che sono equivalenti le metà di poligoni equivalenti, è facile ridursi alla precedente prop. 35 dimostrando come un triangolo sia equivalente per somma ad un parallelogramma costruito sulla metà della base e con uno stesso vertice (V. figura).



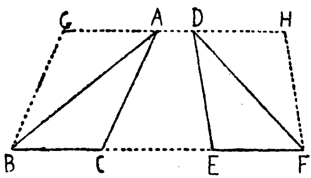
La prop. 37, come anche la precedente 35, mostra che due figure piane possono racchiudere la stessa superficie, senza avere lo stesso perimetro. Si apprende così che almeno dall'epoca di EUCLIDE i geometri avevano corretto l'opinione erronea dei naviganti che stimavano l'area di un'isola dal tempo occorrente per la circumnavigazione (cfr. TUCIDIDE, VI, I). A questo argomento si lega la storia degli isoperimetri, fondata da ZENODORO (cfr. l'articolo di CHISINI nelle *Questioni*). In particolare, il triangolo di perimetro minimo tra quelli di data area e con una base data risulta qui essere il triangolo isoscele.

38.

I triangoli posti su basi uguali e tra le stesse parallele sono uguali tra loro.

Siano ABC, DEF i triangoli posti sulle basi uguali BC, EF, e tra le stesse parallele BF, AD. Dico che il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

Si prolunghi infatti AD da ciascuna parte fino in G, H; per B si conduca la parallela BG alla CA, e per F la parallela FH alla DE [*prop*. 31]. Così, ciascuno degli GBCA, DEFH è un parallelogramma; e GBCA è uguale a DEFH, perchè son posti sulle basi uguali BC, EF, e tra le stesse parallele BF, GH, [*prop*. 36]. Ma il triangolo ABC è la metà del parallelogramma GBCA, perchè la diagonale AB divide questo per metà [*prop*. 34]; ed il triangolo FED è la metà del parallelogramma DEFH, perchè la diagonale DF divide questo per metà [*id.*]. Dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.



Dunque, i triangoli, ecc... c. d. d.

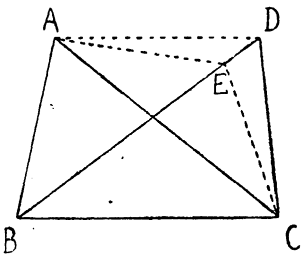
39.

I triangoli uguali, posti sulla stessa base, e dalla stessa parte, sono anche tra le stesse parallele.

Siano ABC, DBC i triangoli uguali, posti sulla stessa base, e dalla stessa parte di BC. Dico che sono anche tra le stesse parallele.

Si conduca infatti AD. Dico che AD è parallela a BC.

Supponiamo infatti che non lo sia; si conduca per il punto A la AE parallela alla retta BC [*prop.* 31], e si conduca EC. Così, il triangolo ABC è uguale al triangolo EBC, perchè è posto sulla sua stessa base BC, e tra le stesse parallele [*prop.* 37]. Ma ABC è uguale a DBC; dunque anche DBC è uguale ad EBC [*n. com.* 1], il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AE non è parallela a BC. Similmente dimostreremmo che nessun'altra retta lo è, eccetto la AD; quindi AD è parallela alla BC.



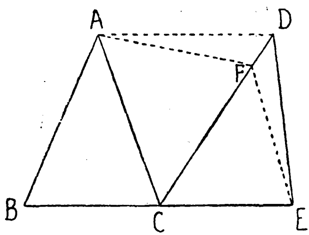
Dunque, i triangoli uguali, ecc. c. d. d.

40.

I triangoli uguali posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche tra le stesse parallele.

Siano ABC, CDE i triangoli uguali, sulle basi uguali BC, CE, dalla stessa parte. Dico che essi sono anche tra le stesse parallele.

Si conduca infatti la AD. Dico che la AD è parallela alla BE. Se infatti non lo fosse, si conduca per A la parallela AF alla BE, e si congiunga FE. Così, il triangolo ABC è uguale al triangolo FCE,



perchè sono sulle basi uguali BC, CE, e tra le stesse parallele BE, AF [*prop.* 38]. Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE. Dunque anche il triangolo DCE è uguale al triangolo FCE [*n. com.* 1], il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AF non è parallela a BE.

Similmente dimostreremmo che nessun'altra retta, eccetto la AD, lo è.

Quindi, la AD è parallela alla BE.

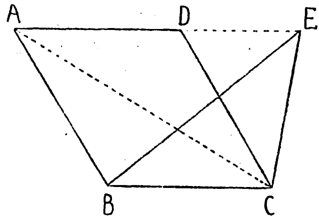
Dunque i triangoli eguali, ecc. c. d. d.

41.

Se un parallelogramma ha la stessa base di un triangolo ed è tra le stesse parallele, il parallelogramma è doppio del triangolo.

Il parallelogramma ABCD abbia, infatti, la stessa base BC del triangolo EBC, e sia tra le stesse parallele BC, AE. Dico che il parallelogramma ABCD è doppio del triangolo BEC.

Si conduca infatti AC. Il triangolo ABC è uguale al triangolo EBC, perchè è sulla stessa sua base BC, e tra le stesse parallele BC, AE [*prop*. 37]. Ma il pa-



rallelogramma ABCD è doppio del triangolo ABC, perchè la diagonale AC divide questo in due parti uguali [*prop*. 34]; perciò il parallelogramma ABCD è anche doppio del triangolo EBC.

Dunque, se un parallelogramma, ecc. c. d. d.

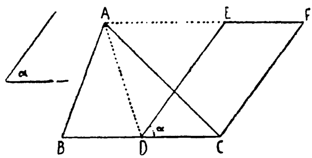
42.

In un dato angolo rettilineo costruire un parallelogramma, uguale ad un triangolo dato.

Sia ABC il triangolo dato, ed α l'angolo rettilineo dato. Nell'angolo rettilineo α bisogna costruire un parallelogramma uguale al triangolo ABC.

Si divida per metà BC, in D [*prop*. 10]; si conduca AD, e sulla retta DC, nel punto D, si costruisca un angolo CDE, uguale all'angolo α [*prop*. 23]; per

A si conduca la parallela AF [*prop*. 31] alla DC; e per C la parallela CF alla DE. Così, EDCF è un parallelogramma. E poichè BD è uguale a DC anche il triangolo ABD è uguale al triangolo ADC, perchè sono sulle basi uguali BD, DC e tra le stesse parallele



BC, AF [*prop*. 38]. Quindi il triangolo ABC è doppio del triangolo ADC. Ma anche il parallelogramma EDCF è doppio del triangolo ADC, perchè ha la sua stessa base ed è tra le stesse parallele [*prop*. 41]. Quindi il parallelogramma EDCF è uguale al triangolo ABC, ed ha l'angolo CDE uguale all'angolo dato α.

Dunque è stato costruito un parallelogramma, ecc

c. d. d.

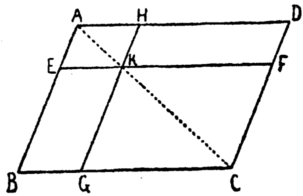
43.

In ogni parallelogramma, i complementi dei parallelogrammi intorno alla diagonale sono uguali tra loro.

ABCD sia un parallelogramma, ed AC una sua diagonale; siano EH, FG i parallelogrammi intorno ad AC, e BK, KD i cosiddetti complementi.

Dico che il complemento BK è uguale al complemento KD.

Infatti, poichè ABCD è un parallelogramma, ed AC è una sua diagonale, il triangolo ABC è uguale al triangolo ACD [*prop.* 34]. Di nuovo, poichè EH è un parallelogramma, ed AK è una sua diagonale, il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK. Per la

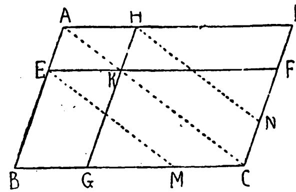


stessa ragione anche il triangolo KFC è uguale a KGC [*id.*]. Poichè dunque il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK, e KFC a KGC, la somma del triangolo AEK con il triangolo KGC è uguale a quella del triangolo AHK con il triangolo KFC [*n. com.* 2]. Ma tutto il triangolo ABC è uguale a tutto il triangolo ADC. Perciò il rimanente complemento BK è uguale al rimanente complemento KD [*n. com.* 3].

Dunque, in ogni parallelogramma, ecc.

c. d. d.

Questa proposizione si può dimostrare senza far uso del criterio dell'equivalenza per sottrazione, deducendola dalla prop. 36. A tal uopo vale il ragionamento di FAIFOFER (cfr. *Elementi di Geometria*, 4ª ediz., Venezia,



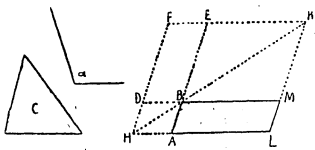
1883), per cui — riferendosi all'annessa figura — si vede che i parallelogrammi HKFD ed EKBG sono rispettivamente equivalenti a KCNH, KCME, i quali hanno la stessa base KC ed uguale altezza.

44.

Ad una retta data applicare, in un angolo rettilineo dato, un parallelogramma eguale ad un dato triangolo.

Sia AB la retta data, C il triangolo dato, ed α l'angolo rettilineo dato. Alla retta data AB, in un angolo uguale ad α, si deve applicare un parallelogramma uguale al triangolo C.

Si costruisca un parallelogramma BEFD uguale al triangolo C, nell'angolo EBD, che è uguale ad α [*prop*. 42]; si ponga la BE per diritto alla AB, si prolunghi la FD fino in H, per A si conduca AH, parallela ad ognuna delle BD, EF [*prop*. 31], e si congiunga HB. Poichè sulle parallele AH, EF cade la retta HF, gli angoli AHF, HFE, presi insieme, sono uguali a due retti [*prop.* 29]; quindi BHD, DFE, presi insieme, sono minori di due retti. Ma rette che formano angoli minori di due retti, prolungate all'infinito si incontrano [*post.* 5]; dunque HB, FE, prolungate, s'incontreranno. Si prolunghino, e s'incontrino in K; per il punto K si conduca la parallela KL



ad ognuna delle EA, FH, e si prolunghino HA, DB fino ai punti L, M. Così, HLKF è un parallelogramma, HK una sua diagonale, AD, ME i parallelogrammi intorno ad HK, ed LB, BF i cosiddetti complementi. Perciò LB è uguale a BF [*prop.* 43]. Ma BF è uguale al triangolo C, quindi anche LB è uguale a C [*n. com.* 1] E poichè l'angolo DBE è uguale ad $A\hat{B}M$ [*prop.* 15], e $D\hat{B}E$ è uguale ad α, anche $A\hat{B}M$ è uguale all'angolo α.

Dunque alla retta data AB, ecc. c. d. d.

A questo proposito PROCLO (pag. 419, 15) reca notizia del metodo di *applicazione delle aeree*, che egli dice (secondo EUDEMO) essere antico e risalire ai Pitagorici.

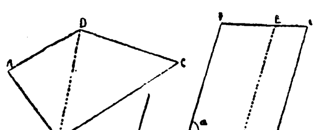
Si può parlare precisamente di un'applicazione per eccesso (*iperbolica*) e per difetto (*ellittica*), che rispondono a due casi dell'equazione di 2° grado, come rileveremo nei libri II e VI.

Appunto dai Pitagorici derivano così i nomi che i geometri posteriori (APOLLONIO) assunsero a designare le tre specie di coniche, una delle quali ha ricevuto il nome di *parabola* (applicazione), e le altre di *iperbole* (eccesso) e di *ellisse* (difetto).

45.

In un dato angolo rettilineo costruire un parallelogramma uguale ad una data figura rettilinea.

Sia ABCD la figura rettilinea data, ed α l'angolo rettilineo dato; nell'angolo dato α si deve costruire un parallelogramma uguale alla figura rettilinea ABCD. Si congiunga DB, e nell'angolo HKF, che è



uguale ad α, si costruisca un parallelogramma FH, uguale al triangolo CBD [*prop.* 42]; alla retta EH si applichi, nell'angolo EHM, che è uguale ad α un parallelogramma EM, uguale al triangolo DBA [*prop.* 44].

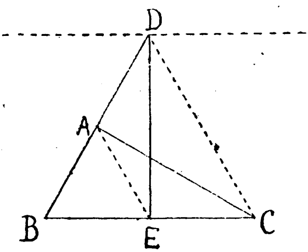
Poichè l'angolo α è uguale a ciascuno degli $H\hat{K}F$, $E\hat{H}M$, anche $H\hat{K}F$ è uguale ad $E\hat{H}M$. Si aggiunga $K\hat{H}E$, comune. Così, $F\hat{K}H$ e $K\hat{H}E$, presi insieme, sono uguali alla somma di $K\hat{H}E$ ed $E\hat{H}M$. Ma la somma di $F\hat{K}H$ e $K\hat{H}E$ è uguale a due retti [*prop.* 29], quindi anche quella di $K\hat{H}E$ e $E\hat{H}M$ è uguale a due retti [*n. com.* 2].

Allora, ad una retta EH, in un suo punto H, due rette KH, HM non giacenti dalla stessa parte fanno gli angoli adiacenti uguali; dunque KH è per diritto ad HM [*prop.* 14]. E poichè sulle parallele KM, FE cade la HE, gli angoli alterni MHE, HEF sono uguali tra loro [*prop.* 29]. Si aggiunga $H\hat{E}L$, comune; la somma di $M\hat{H}E$, ed $H\hat{E}L$ sarà dunque uguale a quella di $H\hat{E}F$, $H\hat{E}L$ [*n. com.* 2]. Ma $M\hat{H}E$, $H\hat{E}L$, presi insieme, sono uguali a due retti [*prop.* 29], dunque anche la somma di $H\hat{E}F$, $H\hat{E}L$ sarà uguale a due retti [*n. com.* 1]. Perciò FE è per diritto alla EL [*prop.* 14]. E poichè FK è uguale e parallela ad HE [*prop.* 34], ed HE ad ML [*id.*], anche KF sarà uguale e parallela ad ML. E le congiungono le rette KM, FL. Dunque anche KM, FL sono uguali e parallele [*n. com.* 1; *prop.* 30]. Perciò KFLM è un parallelogramma. E poichè il triangolo CBD è uguale al parallelogramma FH, e DBA a EM, così tutta la figura rettilinea ABCD è uguale a tutto il parallelogramma KFLM [*n. com.* 2].

Dunque, è stato costruito, ecc. c. d. d.

Le prop. 42, 44, 45 risolvono tre problemi di *trasformazione delle aree*, ciascuno più generale del precedente. La soluzione degli ultimi due problemi è fondata da EUCLIDE sulla prop. 43, ma si può anche renderla indipendente, deducendola dalla prop. 35, 36 o 37.

Basta all'uopo trasformare un triangolo in un altro equivalente, di data *altezza*; perciò dato il triangolo ABC,

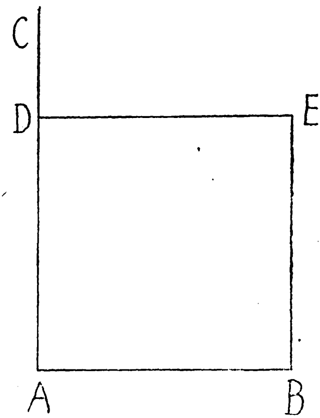


si prolunghi AB fino all'incontro D con la parallela alla BC alla distanza data, e si mandi per A la parallela a DC, ad incontrare BC in E; il triangolo BDE riesce manifestamente equivalente ad ABC (cfr. FAIFOFER, l. c.).

46.

Su una retta data descrivere un quadrato.

Sia AB la retta data. Sulla retta AB si deve descrivere un quadrato. Ad angolo retto con la retta AB, nel suo punto A, si conduca la AC [*prop.* 11], e si ponga AD uguale ad AB [*prop.* 2]; e per il punto D si conduca la parallela DE alla AB [*prop.* 31]. Così, ADEB è un parallelogramma, perciò AB è uguale a DE, ed AD a BE [*prop.* 34]. Ma AB è uguale ad AD; dunque le quattro BA, AD, DE, EB, sono uguali tra loro [*n. com.* 1], e quindi il parallelogramma ADEB è equilatero. Dico che è anche rettangolo. Infatti, poichè sulle parallele AB, DE cade la retta AD, gli angoli BAD, ADE sono uguali a due retti [*prop.* 29]. Ma $B\hat{A}D$ è retto, dunque anche $A\hat{D}E$ è retto. Ma i lati e gli angoli opposti dei parallelogrammi sono uguali tra loro [*prop.* 34]; dunque anche ciascuno degli angoli opposti ABE, BED è retto.

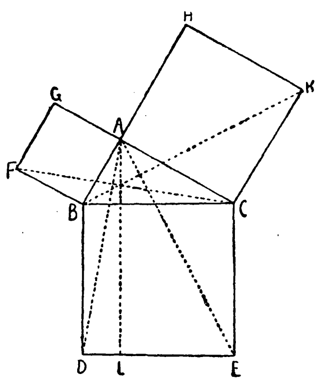


Dunque ADEB è rettangolo. Ma è stato dimostrato che è anche equilatero, dunque è un quadrato [*term.* 22]; ed è descritto sulla retta AB. c. d. f.

47.

Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto.

Sia ABC un triangolo rettangolo, avente l'angolo retto BAC. Dico che il quadrato costruito su BC è uguale alla somma dei quadrati costruiti su BA,



AC. Si descriva, infatti, su BC il quadrato BDEC; su BA, AC si descrivano GB, HC [*prop.* 46]; per A si conduca la parallela AL ad ognuna delle BD, CE [*prop.* 31], e si congiunga A con D, ed F con C. Poichè ognuno degli angoli BAC, BAG è retto, su una retta BA, ed in un suo punto A, le due rette AC, AG, non giacenti dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti uguali a due retti; perciò CA è per diritto alla AG [*prop*. 14]. Per la stessa ragione anche BA è per diritto alla AH [*prop*. 14]. E poichè l'angolo DBC è uguale ad $F\hat{B}A$, perchè ognuno è retto, si aggiunga $A\hat{B}C$, comune. Così, tutto $D\hat{B}A$ è uguale a tutto $F\hat{B}C$ [*n. com*. 2]. E poichè DB è uguale a BC, ed FB a BA [*term*. 22], le due DB, BA sono rispettivamente uguali alle due FB, BC, e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC. Dunque la base AD è uguale alla base FC, ed il triangolo ABD è uguale al triangolo FBC [*prop*. 4]. Ma il parallelogramma BL è doppio del triangolo ABD: infatti essi hanno la stessa base BD, e sono tra le stesse parallele BD, AL [*prop*. 41]. Inoltre, il quadrato GB è doppio del triangolo FBC; infatti essi hanno la stessa base FB, e sono tra le stesse parallele FB, GC. Dunque il parallelogramma BL è uguale al quadrato GB. Similmente, condotte le AE, BK, si dimostrerà anche che il parallelogramma CL è uguale al quadrato HC. Dunque tutto il quadrato BDEC è uguale alla somma dei due quadrati GB, HC [*n. com*. 2]. Ma il quadrato BDEC è descritto sulla

BC, e GB, HC su BA, AC. Dunque il quadrato del lato BC è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA, AC.

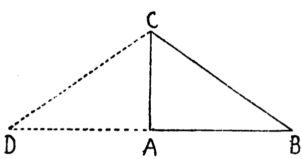
Dunque, nei triangoli rettangoli, ecc. c. d. d.

48.

Se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui rimanenti due lati del triangolo, l'angolo compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.

Infatti, nel triangolo ABC, il quadrato costruito su uno dei lati, BC, sia uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA, AC. Dico che l'angolo BAC è retto.

Si conduca infatti per il punto A la AD, ad angolo retto con la retta AC [*prop.* 11], si faccia AD uguale

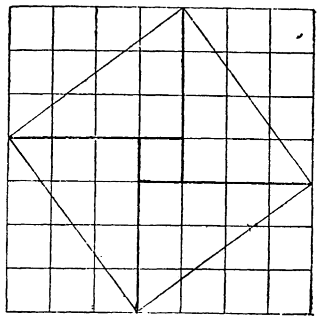


a BA, e si congiunga AC. Poichè DA è uguale ad AB, anche il quadrato costruito su DA è uguale al quadrato costruito su AB. Si aggiunga il quadrato costruito su AC, comune. Così, la somma dei quadrati costruiti su DA, AC sarà uguale a quella dei quadrati costruiti su BA, AC [*n. com.* 2]. Ma anche il quadrato costruito su DC è uguale alla somma di quelli costruiti su DA, AC, perchè l'angolo DAC è retto [*prop.* 47]; e il quadrato costruito su BC si è supposto uguale alla somma di quelli costruiti su BA, AC; dunque il quadrato costruito su DC è uguale a quello costruito su BC [*n. com.* 1]; quindi anche il lato DC è uguale a BC; Ora, poichè DA è uguale a AB, ed AC è comune, le due DA, AC sono uguali alle due BA, AC, e la base DC è uguale alla base BC; quindi $D\hat{A}C$ è uguale all'angolo BAC [*prop.* 8], Ma $D\hat{A}C$ è retto, perciò anche $B\hat{A}C$ è retto.

Dunque, se in un triangolo, ecc. c. d. d.

Il teorema 47 è attribuito a PITAGORA da PLUTARCO (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, c. 11), da DIOGENE LAERZIO (VIII, 12) e da ATENEO (X, 13), mentre PROCLO si limita a riferire la tradizione che lo ricollega al fondatore della scuola pitagorica. Si deve ritenere tuttavia che una qualche conoscenza induttiva di esso — anche al di là del primo caso intuitivamente evidente del triangolo rettangolo isoscele — fosse anteriormente acquisita presso altri popoli, cui la cultura greca deve avere, più o meno direttamente, attinto; segnatamente presso gli Egiziani, i Cinesi e gli Indiani. In un frammento di papiro della XII dinastia egiziana (circa 1800 a. C.)

M. CANTOR (1) ha trovato scritta in varii modi l'uguaglianza $3^2 + 4^2 = 5^2$ che risponde al più semplice caso del teorema di Pitagora per triangoli rettangoli non isosceli. E l'antico astrologo cinese CHÓU, zio del re WU (1100 a. C.), ha pure



conosciuto questo caso (2), se pure si ritenga posteriormente aggiunta la figura illustrativa che accompagna la predetta uguaglianza numerica, dove si vede che il quadrato dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di lati 3, 4 può ottenersi dal quadrato di 7 togliendo 4 triangoli rettangoli 3×4. Infine l'indiano APASTAMBA (*Sulbasutra*) che BÜR (3) fa risalire al V secolo a. C., enuncia il teorema in generale come relazione fra i quadrati dei lati del rettangolo e della diagonale, menzionando qualche caso particolare, come 15, 36, 39 (cioè 5, 12, 13).

Appunto da un esame approfondito di questo scritto

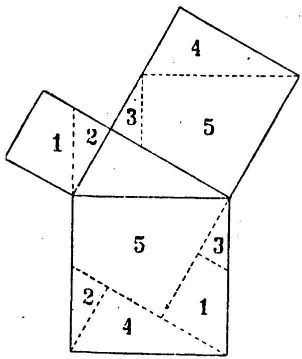
---

(1) *Archiv der Math. und Physik*, VIII, 1905, pag. 66.

(2) Cfr. BIOT, *Journal Asiatique*, 1841; CANTOR, *Geschichte*, I, pag. 637; VACCA, *Elementi*, pag. 112.

(3) *Zeitschrift der deutschen morgenländiche Gesellschaft*, t. 56. Cfr. *Revue générale des Sciences*.

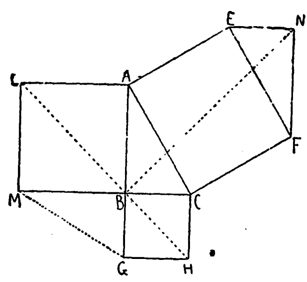
lo ZEUTHEN (*Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientiphique.* Rendiconti del II Congresso internazionale a Ginevra, 1904) argomenta che il teorema di cui si discorre — la cui conoscenza sarebbe stata acquisita induttivamente in un'epoca più remota — sia stato propriamente l'origine della geometria razionale nella scuola pitagorica, cioè che l'edifizio delle deduzioni geometriche a partire da proposizioni di per se stesse insignificanti, abbia avuto per scopo di guadagnare la dimostrazione generale di quel teorema. Ed anzi egli fa l'ipotesi che la prima dimostrazione si fondasse sopra relazioni analoghe a quelle contenute nel II libro d'EUCLIDE e specialmente sulla: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, che per $a = 3$, $b = 4$ ci riporta alla dimostrazione geometrico-aritmetica del caso (3, 4, 5) sopra accennato. Ma, poichè PROCLO attribuisce ai Pitagorici la teoria delle proporzioni, è da ritenere che almeno in seguito essi pervenissero alla dimostrazione del teorema, che si dà con questo mezzo, osservando come il triangolo rettangolo riesca simile ai due triangoli in cui esso viene diviso dall'altezza (EUCLIDE, VI, 8, 17). Conviene ad ogni modo rilevare che — come la dimostrazione immaginata da ZEUTHEN — anche quella colle proporzioni non poteva contemplare per i Pitagorici che il caso in cui i lati del triangolo sieno commensurabili, perchè la teoria primitiva delle proporzioni sembra fondata sul presupposto che le linee siano « somme di punti »; mentre la trattazione rigorosa delle proporzioni, che abbraccia anche il caso dell'incommensurabile, appartiene ad EUDOSSO di Cnido (IV sec. a. C.), come vedremo nelle note al libro V. Appunto la difficoltà e l'astrattezza della teoria eudossiana — che perciò viene rimandata ai libri V e VI del trattato euclideo — spiega le ragioni per cui EUCLIDE è stato indotto ad escogitare una nuova dimostrazione del teorema di Pitagora, quale ci è offerta nella prop. 47: infatti PROCLO ci dice che questa dimostrazione (come l'estensione contenuta nella prop. 31 del libro VI) gli appartiene in proprio. Dopo Euclide, il teorema di Pitagora ha ricevuto molte diverse dimostrazioni che trovansi raccolte in speciali libretti: il più recente appartiene a J. WIPPER, *46 Beweise des Pythag. Lehrsatzes* (2^a ed., Ber-



lino, 1911) (cfr. W. LIETZMANN, *Der Pythagoriche Lehrsatzes*, Teubner, Lipsia, 1912). Noi indicheremo anzitutto la dimostrazione di ANARIZIO (che in forma poco diversa ricompare in GÖPEL, 1824). Essa viene spiegata facilmente dall'annessa figura, e porge la decomposizione del quadrato dell'ipotenusa in cinque parti, che trovano le loro uguali nella divisione dei quadrati dei cateti. Vi sono anche altre dimostrazioni che rendono manifesta, mediante una decomposizione in parti uguali, l'equivalenza del quadrato dell'ipotenusa e della somma dei quadrati dei cateti, per esempio una nota dimostrazione di P. EPSTEIN (1906); ma se si confrontano le diverse dimostrazioni possibili, prendendo come criterio di semplicità il minimo numero di parti in cui viene diviso il quadrato dell'ipotenusa, si trova che la dimostrazione di ANARIZIO raggiunge da questo punto di vista la massima semplicità possibile: come risulta dagli studi di BERNSTEIN e BRANDES (cfr. LIETZMANN, l. c.).

Vogliamo citare ancora un'altra dimostrazione notevole del teorema di Pitagora, dovuta a LEONARDO DA VINCI. Essa viene spiegata dall'annessa figura: dove si riconosce l'uguaglianza dei quadrilateri LACH = BAEN, ecc.

Infine aggiungeremo che la dimostrazione del teorema di Pitagora con la similitudine (che come accennammo



dovette già essere raggiunta dai precursori di EUCLIDE) si trova varie volte proposta in maniera indipendente da matematici; così dall'indiano BHÂSKARA (nato nel 1114 d. C.) e poi nella *Practica geometriae* di LEONARDO PISANO (1220) e dal matematico inglese WALLIS, nel secolo XVII.

Fino nell'antica scuola di PITAGORA fu investigato il problema di trovare i triangoli rettangoli con lati commensurabili cioè i quadrati (di numeri interi) che sono decomponibili in una somma di due quadrati. Si ha qui l'origine dei problemi di analisi indeterminata, dovendosi appunto risolvere in numeri interi l'equazione:

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Dall'*Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* di TEONE di Smirne si rileva la conoscenza della *soluzione pitagorica* che si ha prendendo, per n dispari:

$$z = \frac{n^2 + 1}{2}, \quad x = n, \quad y = \frac{n^2 - 1}{2}$$

(HEATH porge un'accurata discussione storica intorno a ciò). Accanto a questa, giova pure ricordare quella che ci viene riferita da PROCLO come *soluzione platonica*:

$$z = n^2 + 1, \quad x = 2\,n, \quad y = n^2 - 1.$$

L'equazione pitagorica è stata ripresa nell'antichità da DIOFANTO e nei tempi moderni da FERMAT e da EULERO; che hanno considerato l'equazione più generale:

$$z = x^2 + y^2$$

dimostrando che ogni numero primo (positivo) della forma $z = 4\,h + 1$ può essere spartito in un sol modo in due quadrati. Risulta anche da queste ricerche (che furono poi estese con la generale teoria delle forme quadratiche di GAUSS) che la condizione perchè un numero dispari sia decomponibile nella somma di due quadrati è che tutti i suoi fattori primi con esponenti dispari siano della forma $4h + 1$ (anzichè $4h - 1$). (Teorema di GIRARD).

D'altra parte la risoluzione in numeri interi dell'equazione pitagorica $x^2 + y^2 = z^2$, equivale alla ricerca dei punti razionali appartenenti al cerchio:

$$x^2 + y^2 = 1$$

e può farsi quindi ricorrendo alla rappresentazione razionale dei punti del cerchio mediante un parametro. Questa soluzione di KLEIN viene riportata da SCARPIS nel suo articolo delle *Questioni*.

LIBRO SECONDO

PER CURA DI

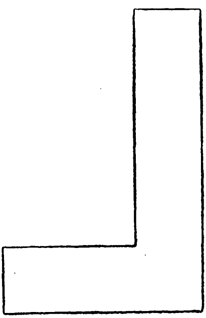
MARIA TERESA ZAPELLONI

Termini

1. Ogni parallelogramma rettangolo, si dice che è *contenuto* tra le due rette che comprendono l'angolo retto.

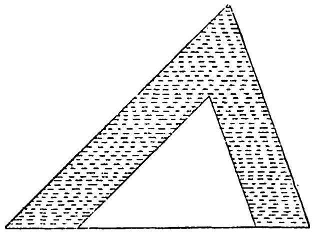
2. In ogni parallelogramma, ciascuno dei parallelogrammi attraversati dalla diagonale, insieme con i due complementi, si dice *gnomone*.

Sembra che la parola *gnomone* (γνώμων) sia stata importata in Grecia da Babilonia, per opera di Anassimandro o di Anassimene milesii (VI sec. a. C.), e che indicasse dapprima la posizione di un'asta perpendicolare all'orizzonte: rudimentale strumento per la misurazione del tempo, o per le ricerche astronomiche. La figura che tale strumento viene a formare ricorda quella che qui riproduciamo, che non è altro che lo gnomone della definizione euclidea, nel caso particolare in cui il parallelogramma sia un rettangolo.



La generalizzazione del concetto di gnomone, introdotta da Euclide, viene integralmente mantenuta nella def. 57 di Erone (l. c., pag. 44) che parla dello *gnomone nel parallelogramma*, mentre la def. 58 insegna che cosa sia lo gnomone in generale (κοινῶς):

« Generalmente è gnomone tutto ciò che, aggiunto a qualsiasi numero o figura, rende il tutto simile a quello a cui è stato aggiunto ».



Secondo tale definizione è uno gnomone, per esempio, la parte tratteggiata della figura annessa.

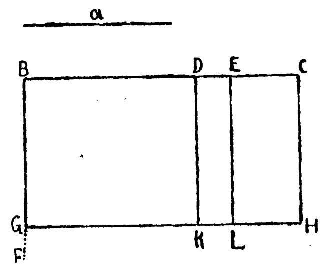
Proposizioni

1.

Date due rette, una delle quali divisa in un numero qualsiasi di parti, il rettangolo contenuto dalle due rette è uguale alla somma dei rettangoli contenuti dalla retta non divisa e dalle singole parti dell'altra.

Siano date le due rette a, BC, e si divida, a caso, la BC nei punti D, E. Dico che il rettangolo contenuto dalle a, BC è uguale alla somma dei rettangoli contenuti da a e BD, a e DE, a ed EC.

Si conduca infatti da B la perpendicolare BF alla BC [I, 11], e si faccia BG uguale ad *a*; per G si conduca la parallela GH alla BC [I, 31], e per D, E, C le parallele DK, EL, CH alla BG [*id.*]. Allora BH è uguale alla somma di BK, DL, EH. Ma BH è il rettangolo formato da *a* e BC: infatti è contenuto tra BG e BC, di cui BG è uguale ad *a*; BK è il rettangolo di *a*, BD: infatti è contenuto tra GB e BD, di cui GB è uguale ad *a*; DL è il rettangolo di *a*, DE: infatti DK, cioè GB [I, 34], è uguale ad *a*. Ed ancora similmente EH è il rettangolo contenuto da *a* ed EC.



Quindi il rettangolo formato da *a*, BC, è uguale alla somma dei rettangoli formati da *a*, BD; *a*, DE; *a*, EC.

Dunque, date due rette, ecc.

Questa proposizione equivale all'identità algebrica:

$$a\ (b + c + d + \ldots) = ab + ac + ad + \ldots$$

Analogamente, tutte le prime dieci proposizioni di questo libro sono suscettibili di interpretazioni algebriche.

Per queste prime proposizioni non si trovano, in generale, nei commentatori antichi e del Rinascimento, altre illustrazioni che verifiche con esempi numerici, dei quali è naturale fondamento il concetto dei numeri figurati, che EUCLIDE sviluppa in VII, def. 16-19. Si prelude così a quel che più tardi fu detto dallo ZEUTHEN (1) «algebra geometrica»; al sorgere della quale — fin quando il suo sviluppo non giunse alla teoria delle coniche — furono sufficienti i concetti di *numero rettangolo* e *numero quadrato*.

Stabilito che il prodotto di a per b è rappresentato dal rettangolo che ha per lati i segmenti a e b, e che a^2 è rappresentato dal quadrato di lato a, per addizionare e sottrarre tali superficie era necessario dar loro un lato comune: ma non per mezzo delle proporzioni, la cui teoria sarà esposta solo nel V libro, bensì con l'aiuto della prop. I, 43, o, per meglio dire, del caso particolare in cui il parallelogramma di cui ivi si parla sia un rettangolo. Questo è appunto il significato della trattazione che EUCLIDE svolge qui, e a cui si riattaccano anche le proposizioni 35-37 del libro III.

Abbiamo detto che il nome di « algebra geometrica » è stato introdotto dallo ZEUTHEN: però a questo proposito dobbiamo rilevare (col prof. BORTOLOTTI) che PAOLO BOSONI, lettore nello studio di Bologna dal 1586 al 1593, lasciò un'*Algebra geometrica* manoscritta, nella quale proposizioni geometriche sono dimostrate con metodi algebrici. Del resto, dimostrazioni geometriche di proposizioni algebriche (ma non il nome di algebra geometrica) erano già comparse anche nell'*Algebra* di RAFAEL BOMBELLI (Bologna, 1579, pag. 241).

---

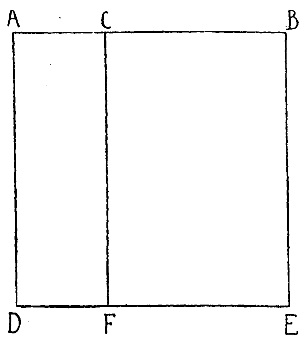
(1) *Die Lehre von der Kegelschnitte im Alterthum*, Copenhagen, 1886.

Quanto al metodo di dimostrazione usato qui da EUCLIDE, nota ERONE (cfr. il *Commento* di ANARIZIO, pag. 89, 10) che due sono i modi di dimostrazione possibili, cioè la *dissolutio* e la *compositio*: la prima si vale della decomposizione della figura costruita in rettangoli e quadrati; la seconda, invece, parte da figure note e mediante loro combinazione giunge alla figura richiesta.

2.

Se si divide a caso una retta, la somma dei rettangoli contenuti da tutta la retta e dalle singole parti è uguale al quadrato di tutta la retta.

Si divida infatti la retta AB, a caso, nel punto C. Dico che la somma dei rettangoli contenuti da AB, BC e da AB, CA è uguale al quadrato di AB.



Si costruisca infatti su AB il quadrato ADEB [I, 46] e si conduca per C la parallela CF a ciascuna delle AD, BE [I, 31]. Così, AE è uguale alla somma di AF con CE. Ma AE è il quadrato di AB; AF il rettangolo contenuto da BA, AC: infatti è compreso dalle DA, AC, e DA è uguale ad AB

[I, *term.* 23]; CE è il rettangolo formato da AB, BC: infatti BE è uguale ad AB.

Quindi la somma dei rettangoli contenuti da BA, AC e da AB, BC è uguale al quadrato di AB.

Dunque, se si divide a caso una retta, ecc.

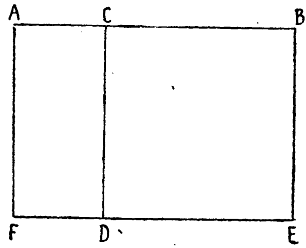
Algebricamente: $(a + b)\, a + (a + b)\, b = (a + b)^2$. Questa proposizione, come la seguente, è un caso particolare della prop. I. E in realtà, EUCLIDE ne ha già tacitamente fatto uso in I, 47. Ma, come avverte lo HEATH, non era quello il luogo opportuno per questa dimostrazione, che invece trova qui la sua conveniente sede, nello svolgimento del piano del II libro.

3.

Se si divide una retta a caso, il rettangolo contenuto da tutta la retta e da una delle parti in cui essa è stata divisa è uguale alla somma del rettangolo contenuto dalle due parti con il quadrato della parte già considerata.

Infatti, si divida a caso la AB in C. Dico che il rettangolo contenuto dalle AB, BC, è uguale alla somma del rettangolo compreso dalle AC, CB con il quadrato di BC.

Si costruisca infatti il quadrato CDEB di BC [I, 46]; si prolunghi ED fino in F, e per A si conduca la parellela AF a ciascuna delle CD, BE [I, 31]. Così, AE è uguale alla somma di AD con CE. Ma AE è il rettangolo contenuto dalle AB, BC, perchè è compreso dalle AB, BE, di cui BE è uguale a BC; AD è il rettangolo contenuto dalle AC, CB, perchè DC è uguale a CB; DB è il quadrato costruito su BC.



Quindi il rettangolo contenuto dalle AB, BC è uguale alla somma del rettangolo compreso dalle AC, CB con il quadrato costruito su BC.

Dunque, se una retta è divisa a caso, ecc.

Algebricamente: $(a + b)\ a = ab + a^2$.

Con le prime tre proposizioni è stata così dimostrata quella che in aritmetica è la proprietà distributiva della moltiplicazione.

Conseguenza di queste tre proposizioni è che:

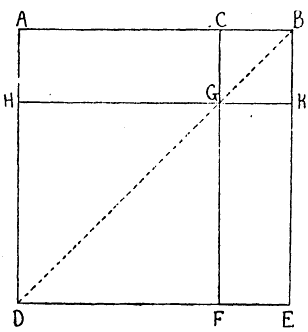
$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2.$$

4.

Se una retta è divisa a caso, il suo quadrato è uguale alla somma dei quadrati delle parti, insieme con il doppio del rettangolo che le parti contengono.

Si divida infatti la AB, a caso, in C. Dico che il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AC, CB, insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Si costruisca infatti il quadrato ADEB su AB [I, 46], si congiunga B con D; per C si conduca la parallela CF a ciascuna delle AD, EB [I, 30 *e* 31]; e per G si conduca la parallela HK a ciascuna delle AB, DE.



Poichè CF è parallela alla AD, e BD cade su di esse, l'angolo esterno CGB è uguale all'interno ed opposto $A\hat{D}B$ [I, 29]. Ma $A\hat{D}B$ è uguale ad $A\hat{B}D$, poichè anche il lato BA è uguale ad AD [I, 5]; dunque l'angolo CGB è uguale a $G\hat{B}C$; ed il lato BC è uguale al lato CG. Ma CB è uguale a GK [I, 34], e CG a KB [*id.*];

dunque anche GK è uguale a KB. Perciò CGKB è equilatero; dico che è anche rettangolo. Infatti, poichè CG è parallelo a BK [e su di essi cade la retta CB], gli angoli KBC, GCB sono uguali a due retti [I, 29]; ma $K\hat{B}C$ è retto, dunque anche $B\hat{C}G$ è retto. Perciò anche gli angoli opposti CGK, GKB sono retti [I, 34]. Quindi CGKB è rettangolo; ma è stato dimostrato che è anche equilatero, dunque è un quadrato, ed è costruito su BC.

Per le stesse ragioni anche HF è un quadrato, ed è costruito su HG, cioè su AC [I, 34]. Dunque HF, KC sono i quadrati di AC, CB. E poichè AG è uguale a GE [I, 43], ed AG è contenuto da AC, CB, perchè GC è uguale a CB, anche GE sarà contenuto dalle AC, CB; quindi AG, GE sono uguali al doppio del rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Ma anche i quadrati HF, CK sono costruiti su AC, CB. Perciò la somma dei quattro HF, CK, AG, GE è uguale alla somma dei quadrati costruiti su AC, CB, insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Ma la somma di HF, CK, AG, GE è tutto ADEB, che è il quadrato costruito su AB. Quindi il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati costruiti su AC, CB, insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC, CB.

Dunque se una retta è divisa a caso, ecc.

COROLLARIO.

Da questo appare evidente che, nei quadrati, i parallelogrammi che sono attraversati dalla diagonale sono quadrati.

Algebricamente la prop. 4 equivale a:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

Di questa importante proposizione si trova, nelle edizioni del testo greco che precedono quella di E. F. AUGUST (Berlino, 1826-29), una seconda dimostrazione, attribuita a TEONE. In essa, basandosi sull'uguaglianza di AB con AD, si deduce che anche:

$$A\hat{B}D = A\hat{D}B = \tfrac{1}{2}\text{ retto},$$
$$C\hat{G}B = \tfrac{1}{2}\text{ retto}$$

quindi:

$$CB = CG$$

cioè CK è un quadrato, e precisamente è il quadrato di BC.

Analogamente:

$$HF = \overline{AC}^2;$$

e poichè

$$AG = GE = AC \cdot CB,$$

il teorema è dimostrato.

Invece di questa dimostrazione — che, come nota il PELETIER, riesce eccessivamente lunga — il CAMPANO ne dà un'altra, basata sulle precedenti due proposizioni di questo stesso libro:

$$\overline{AB}^2 = AB \cdot AC + AB \cdot CB \text{ (per la prop. 2).}$$

Ma:

$$AC \cdot BA = \overline{AC}^2 + AC \cdot BC \text{ (per la prop. 3)}$$

e

$$BC \cdot BA = \overline{CB}^2 + CB \cdot AC$$

Dunque:

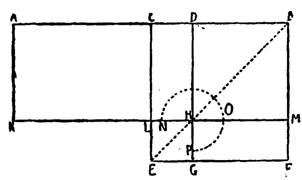
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \cdot BC$$

Però da questa elegante dimostrazione non si può dedurre il corollario euclideo.

5.

Se una retta è divisa in parti uguali ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, insieme con il quadrato della differenza tra le due sezioni è uguale al quadrato della metà della retta data.

Una retta AB sia infatti divisa in C in parti uguali, ed in D in parti disuguali. Dico che il rettangolo contenuto da AD, DB insieme con il quadrato di CD è uguale al quadrato di CB.



Si costruisca infatti il quadrato CEFB su CB, e si congiunga B con E; per D si conduca la parallela DG ad ognuna delle CE, BF, per H ancora si conduca la parallela KM ad ognuna delle AB, EF [I, 30, 31], ed infine per A si conduca la parallela AK ad ognuna delle CL, BM.

Poichè il complemento CH è uguale al complemento HF [I, 43], aggiungendo DM, comune, si avrà tutto CM uguale a tutto DF. Ma CM è uguale ad AL, perchè AC è uguale a CB. Perciò anche AL è uguale a DF. Si aggiunga CH, comune: così tutto AH sarà uguale allo gnomone NOP (1). Ma AH è compreso da AD, DB, perchè DH è uguale a DB. Quindi anche lo gnomone NOP è uguale al rettangolo contenuto da AD, DB. Si aggiunga LG, comune, che è uguale al quadrato di CD. Così, la somma dello gnomone NOP con LG è uguale alla somma del rettangolo contenuto da AD, DB con il quadrato di CD. Ma la somma dello gnomone NOP con LG è tutto il quadrato CEFB, cioè il quadrato di CB.

Quindi la somma del rettangolo contenuto da AD, BD con il quadrato di CD, è uguale al quadrato di CB.

---

(1) Nel testo greco questo gnomone è indicato con le lettere MNO, ma la M verrebbe allora usata due volte, in significati diversi.

Dunque, se una linea retta è divisa, ecc.

Algebricamente: $ab + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Una dimostrazione di MAUROLICO, basata sulle precedenti proposizioni di questo libro, è riportata da CLAVIO:

$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2CD \cdot DB$ (per la prop. 4)

$CD \cdot DB + \overline{DB}^2 = CB \cdot BD$ (per la prop. 3)

Dunque:

$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + CD \cdot DB + CB \cdot BD$ (cioè $AC \cdot BD$)

Ma:

$AC \cdot BD = CD \cdot BD = AD \cdot DB$ (per la prop. 1)

Quindi:

$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + AD \cdot DB.$$

Possiamo qui notare che questa proposizione e la seguente danno soluzioni geometriche di particolari equazioni quadratiche: mentre nel VI libro si troverà la soluzione generale di tali equazioni: almeno, di quelle che danno luogo a radici positive, giacchè i Greci non avevano alcuna idea delle quantità negative.

Se in questa proposizione si pone:

$$AB = a;\ DB = x$$

si ha:

$$ax - x^2 = AH = \text{gnomone NOP}$$

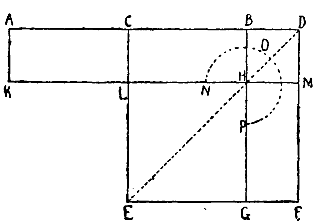
Data *a*, e data l'area dello gnomone ($= b^2$), la soluzione di questa equazione algebrica corrisponde al problema:

« Dato un segmento AB ($= a$) ad esso applicare un rettangolo AH uguale ad un dato quadrato (b^2) in modo che la porzione di superficie mancante — al rettangolo ax su AB — sia un quadrato ($\mathrm{BH} = x^2$) », che è un caso di *applicazione ellittica* delle aree (cfr. la nota alla prop. I, 44). E il problema di cui si tratta avrà la sua generalizzazione in VI, 28.

6.

Se si biseca una retta, e ad essa si aggiunge per diritto un'altra retta, il rettangolo contenuto dalla retta così composta e dall'aggiunta, insieme con il quadrato della metà della retta data, è uguale al quadrato costruito sulla somma della retta aggiunta e della metà della retta data.

Una retta AB sia infatti bisecata in C, e ad essa si aggiunga per diritto una retta BD. Dico che il rettangolo contenuto da AD, DB, insieme con il quadrato di CB, è uguale al quadrato di CD.



Si costruisca infatti il quadrato CEFD di CD, e si congiunga D con E; per il punto B si conduca la parallela BG ad ognuna delle EC, DF, per il punto H la parallela KM ad ognuna delle AB, EF, ed infine per A la parallela AK ad ognuna delle CL, DM.

Poichè la AC è uguale alla CB, anche AL è uguale a CH. Ma CH è uguale ad HF [I, 43], dunque anche AL è uguale ad HF. Si aggiunga CM, comune; così tutto AM sarà uguale allo gnomone NOP. Ma AM è compreso dalle AD, DB, perchè DM è uguale a DB. Perciò anche lo gnomone NOP è uguale al rettangolo contenuto dalle AD, DB. Si aggiunga LG, comune, che è uguale al quadrato costruito su BC: così il rettangolo contenuto dalle AD, DB, insieme con il quadrato di CB è uguale alla somma dello gnomone NOP con LG. Ma lo gnomone NOP, insieme con LG, è tutto il quadrato CEFD, cioè il quadrato di CD.

Quindi il rettangolo compreso dalle AD, DB, insieme con il quadrato di CB, è uguale al quadrato di CD.

Dunque, se una linea retta è bisecata, ecc.

Algebricamente: $(2a + b)\, b + a^2 = (a + b)^2$

Dimostrazione di Maurolico:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,CB \cdot BD \quad \text{(per le prop. 4)}$$
$$= \overline{CB}^2 + \overline{BD}^2 + CB \cdot BD + AC \cdot BD$$

Ma:

$$AC \cdot BD + CB \cdot BD + \overline{BD}^2 = AD \cdot DB \quad \text{(per la prop. 1).}$$

Perciò:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 + AD \cdot DB \qquad \text{c. d. d.}$$

Facendo qui:

$$AB = a, \quad BD = x$$

il problema conduce all'equazione:

$$ax + x^2 = b^2 \qquad [1]$$

che equivale alla proposizione geometrica:

« Ad un segmento dato AB ($= a$) applicare un rettangolo AM uguale ad un dato quadrato, in modo che la porzione BM di superficie eccedente sia un quadrato ».

La generalizzazione di questa proposizione, che ci offre un caso di *applicazione iperbolica* delle aree, si ha in VI, 29.

Il rettangolo AM si trasforma in gnomone, se AL prende la posizione di HF. Cioè:

$$AD \cdot BD = \overline{CD}^2 - \overline{CB}^2$$

E questa trasformazione equivale a quella algebrica usata per risolvere l'equazione [1], cioè:

$$b^2 = ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

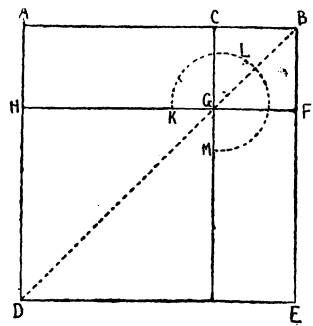
7.

Se una retta è divisa comunque, il quadrato della retta, insieme con il quadrato di una delle parti, è uguale al doppio del rettangolo contenuto da tutta la retta e dalla parte scelta, insieme con il quadrato della rimanente parte.

Una retta AB sia infatti divisa, comunque, nel punto C. Dico che la somma dei quadrati di AB, BC è uguale al doppio del rettangolo contenuto da AB, BC, insieme con il quadrato di CA.

Si costruisca infatti su AB il quadrato ADEB, e si descriva la figura.

Ora, poichè AG è uguale a GE, aggiunto CF, comune, tutto AF sarà uguale a tutto CE. Perciò AF, insieme con CE, è il doppio di AF. Ma la somma di AF con CE è lo gnomone KLM insieme con il quadrato CF. Perciò lo gnomone KLM insieme con CF è uguale al doppio di AF. Ma anche il doppio del rettangolo contenuto da AB, BC è doppio di AF, perchè BF è



uguale a BC; perciò lo gnomone KLM, insieme con il quadrato CF, è uguale al doppio del rettangolo contenuto da AB, BC. Si aggiunga DG, comune, che è il quadrato di AC: così lo gnomone KLM, insieme con i quadrati BG, GD è uguale al doppio del rettangolo contenuto dalle AB, BC, insieme con il quadrato di AC. Ma la somma dello gnomone KLM con i quadrati BG, GD è uguale alla somma di tutto ADEB con CF, che sono i quadrati di AB, BC.

Quindi la somma dei quadrati di AB, BC è uguale al doppio del rettangolo compreso da AB, BC, insieme con il quadrato di AC.

Dunque, se una retta è divisa comunque, ecc.

Algebricamente: $(a+b)^2 + a^2 = 2\,(a+b)\,a + b^2$.

Anche questa proposizione MAUROLICO giustifica in altra maniera, così:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \cdot CB \text{ (per la prop. 4)}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2AC \cdot CB + \overline{AC}^2$$

Ma:

$$\overline{AC}^2 + AC \cdot CB = AB \cdot AC \text{ (per la prop. 3).}$$

Perciò:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2AB\,.\,AC + \overline{CB}^2$$

CANDALLA aggiunge il corollario:

« I quadrati di due linee disuguali superano il doppio del rettangolo da esse contenuto di tanto quanto è il quadrato della differenza tra le due linee ».

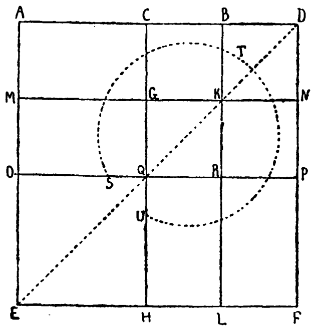
Messa sotto questa forma, la proposizione si riduce a:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

8.

Se una retta è divisa comunque, il quadruplo del rettangolo contenuto dalla retta e da una delle parti, insieme con il quadrato della rimanente parte, è uguale al quadrato costruito sulla somma della retta data con la parte scelta.

Una retta AB sia divisa, infatti, comunque, nel punto C. Dico che il quadruplo del rettangolo contenuto da AC, BC, insieme con il quadrato di BC, è uguale al quadrato costruito sulla somma di AB, BC.



Si conduca, infatti, per diritto [alla retta AB] la BD, facendo BD uguale a CB, si costruisca il quadrato AEFD, e si descriva la doppia figura.

Ora, poichè CB è uguale a BD ed a GK, e BD è uguale a KN, anche GK sarà uguale a KN. Per la stessa ragione anche QR sarà uguale ad RP. Ma poichè BC è uguale a BD, e GK a KN, anche CK sarà uguale a KD, e GR ad RN. Ma CK è uguale ad RN, perchè essi sono complementi del parallelogramma CP [I, 43]; quindi anche KD è uguale a GR, cioè i quattro DK, CK, GR, RN sono uguali tra loro, e quindi la loro somma è il quadruplo di CK.

Ancora, poichè CB è uguale a BD, e BD a BK, cioè a CG, e CB è uguale a GK, cioè a GQ, anche CG è uguale a GQ. E poichè CG è uguale a GQ, e QR ad RP, anche AG è uguale ad MQ [I, 36], e QL ad RF [*id.*]. Ma MQ è uguale a QL, perchè complementi del parallelogramma ML [I, 43]. Dunque anche AG è uguale ad RF, e perciò i quattro AG, MQ, QL, RF sono uguali tra loro, cioè la loro somma è il quadruplo di AG.

Ma è stato dimostrato anche che la somma dei quattro CK, KD, GR, RN è uguale al quadruplo di CK, perciò le otto figure che formano lo gnomone STU sono il quadruplo di AK; e poichè AK è il rettangolo contenuto dalle AB, BD, perchè BK è uguale a BD, così il quadruplo del rettangolo contenuto dalle AB, BD è il quadruplo di AK. Ma è stato dimostrato che anche lo gnomone STU è quadruplo di AK. Dunque il quadruplo del rettangolo di AB, BD è uguale allo gnomone STU. Si aggiunga OH, comune, che è uguale al quadrato di AC: così il quadruplo del rettangolo contenuto dalle AB, BD, insieme con il quadrato di AC, è uguale allo gnomone STU, insieme con OH. Ma lo gnomone STU, insieme con OH, è tutto il quadrato AEFD di AD. Quindi il quadruplo del rettangolo AB, BD, insieme con il quadrato di AC, è uguale al quadrato di AD; ma BD è uguale a BC, quindi il quadruplo del rettangolo contenuto dalle AB, BC, insieme con il quadrato di AC, è uguale al quadrato di AD, cioè al quadrato costruito sulla somma di AB con BC.

Dunque, se una retta è divisa, comunque, ecc.

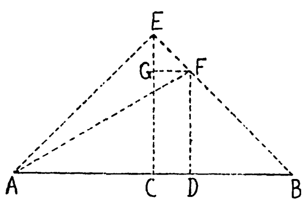
Algebricamente: $4\,(a+b)\,a+b^2=[(a+b)+a]^2$

9.

Se una retta è divisa in parti disuguali, la somma dei quadrati di queste è doppia del quadrato della metà della intera retta, preso insieme con il quadrato della differenza delle medesime.

Una retta AB sia, infatti, divisa in C in parti uguali, ed in D in parti disuguali. Dico che la somma dei quadrati di AD, DB è doppia della somma dei quadrati di AC, CD.

Si conduca infatti da C la perpendicolare CE [I, 11] uguale a ciascuna delle AC, CB, perpendicolarmente alla AB, e si conducano le EA, EB; per D si conduca la parallela DF alla EC, per F la FG parallela alla AB, e si congiunga A con F. Poichè AC è uguale a CE, anche l'angolo EAC è uguale all'angolo AEC [I, 5]; e poichè l'angolo in C è retto, i rimanenti



$E\hat{A}C$, $A\hat{E}C$, presi insieme, sono uguali ad un retto [I, 32]. Ma sono uguali tra loro, quindi ciascuno dei $C\hat{E}A$, $C\hat{A}E$ è uguale alla metà di un retto. Per la stessa ragione anche ciascuno dei $C\hat{E}B$, $E\hat{B}C$ è la metà di un retto. Perciò tutto $A\hat{E}B$ è retto. E poichè $G\hat{E}F$ è la metà di un retto, ed $E\hat{G}F$ è retto, perchè è uguale all'interno ed opposto $E\hat{C}B$ [I, 29], il rimanente $E\hat{F}G$ è la metà di un retto, cioè l'angolo GEF è uguale a $E\hat{F}G$: ma allora anche il lato EG è uguale a GF [I, 6]. Ancora, poichè l'angolo in B è la metà di un retto, ed $F\hat{D}B$ è retto, perchè uguale all'interno ed opposto $E\hat{C}B$ [I, 29], il rimanente $B\hat{F}D$ è la metà di un retto; quindi l'angolo in B è uguale a $D\hat{F}B$: ed allora anche il lato FD è uguale a DB [I, 6]. E poichè AC è uguale a CE, anche il quadrato di AC è uguale al quadrato di CE; perciò la somma dei quadrati di AC, CE, è doppia del quadrato di AC; ma il quadrato di EA è uguale alla somma dei quadrati di AC, CE, perchè l'angolo ACE è retto [I, 47]; dunque il quadrato di EA è doppio di quello di AC. Ancora, poichè EG è uguale a GF, anche il quadrato di EG sarà uguale a quello di GF; quindi la somma dei quadrati di EG, GF è doppia del quadrato di GF. Ma il quadrato di EF è uguale alla somma dei quadrati di EG, GF [I, 47]; dunque il quadrato di EF è doppio di quello di GF. Ma GF è uguale a CD [I, 34], quindi il quadrato di EF è doppio di quello di CD. E poichè anche il quadrato di EA è doppio di quello di AC, la somma dei quadrati di AE, EF è doppia della somma dei quadrati di AC, CD; ma il quadrato di AF è uguale alla somma dei quadrati di AE, EF, perchè l'angolo AEF è retto [I, 47]. Dunque il quadrato di AF è doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma la somma dei quadrati di AD, DF è uguale al quadrato di AF, perchè l'angolo in D è retto. Dunque la somma dei quadrati di AD, DF è doppia della somma dei quadrati di AC, CD. E poichè DF è uguale a DB, anche la somma dei quadrati di AD, DB è doppia della somma dei quadrati di AC, CD.

Dunque, se una retta è divisa in parti uguali ed in parti disuguali, ecc. c. d. d.

Algebricamente: $a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$.

Come nota lo ZEUTHEN (cfr. HEATH, pag. 398), questa proposizione e la seguente servono a stabilire una determinazione di $\sqrt{2}$; ed il modo con cui la dimostrazione è condotta costituisce una nuova applicazione dell'algebra geometrica, poichè — mentre la proposizione avrebbe potuto essere stabilita per mezzo di trasformazioni di rettangoli — EUCLIDE si serve del teorema di Pitagora, applicato a triangoli rettangoli isosceli: ciò che equivale a rappresentare $\sqrt{2}$ come ipotenusa di tali triangoli.

Ponendo nella prop. 9

$$CD = x, \ DB = y,$$

essa si ricollega al problema d'analisi indeterminata:

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2\,[(x + y)^2 + x^2]$$

cioè:

$$(2x + y)^2 - 2\,(x + y)^2 = 2x^2 - y^2 \qquad [1]$$

Alla stessa equazione si perverrebbe ponendo nella prop. 10:

$$CB = x, \ BD = y.$$

Se x ed y soddisfano una delle due equazioni:

$$2x^2 - y^2 = \pm 1,$$

la [1] ci dà altri due numeri, maggiori,

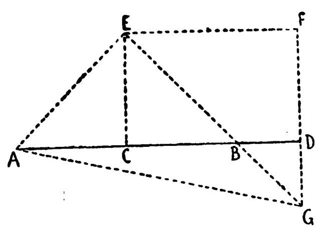
$$x_1 = x + y, \quad y_1 = 2x + y$$

che soddisfano all'altra. Continuando così, i valori $\frac{y}{x}, \frac{y_1}{x_1} ..,$ che si possono formare, si approssimano sempre più, per difetto o per eccesso, a $\sqrt{2}$.

10.

Se si biseca una retta, e ad essa si aggiunge per diritto un'altra retta, il quadrato di tutta la linea composta, e il quadrato dell'aggiunta, fanno insieme il doppio del quadrato della metà della retta data e del quadrato costruito sulla somma della detta metà con l'aggiunta.

Una retta AB sia infatti divisa per metà in C, e ad essa sia aggiunta, per diritto, la retta BD. Dico che la somma dei quadrati di AD, DB è doppia della somma dei quadrati di AC, CD.



Si innalzi infatti per C la perpendicolare CE alla AB, facendola uguale a ciascuna delle AC, CB, e si conducano le EA, EB; per E si tracci la parallela EF alla AD, e per

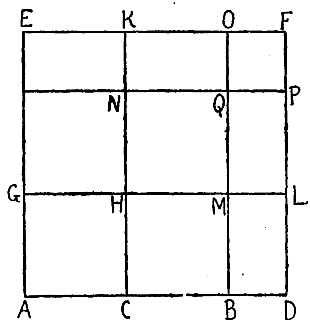
D la parallela FD alla CE. Poichè sulle parallele EC, FD cade la EF, gli angoli CEF, EFD sono uguali a due retti [I, 29]; perciò $F\hat{E}B$, $E\hat{F}D$ sono minori di due retti. Ma rette formanti con una terza angoli minori di due retti, prolungate, s'incontrano [post. 5]; perciò le EB, FD, prolungate, s'incontreranno dalla parte di B, D. Si prolunghino, e s'incontrino in G, e si conduca AG. Poichè AC è uguale a CE, anche l'angolo EAC è uguale ad $A\hat{E}C$ [I, 5]; ma l'angolo in C è retto, perciò ciascuno degli EAC, $A\hat{E}C$ è metà di un retto [I, 52]. Per la stessa ragione anche ciascuno dei $C\hat{E}B$, $E\hat{B}C$ è metà di un retto; perciò $A\hat{E}B$ è retto. E poichè $E\hat{B}C$ è metà di un retto, anche $D\hat{B}G$ è metà di un retto [I, 15]; ma $B\hat{D}G$ è retto, perchè è uguale all'alterno $D\hat{C}E$ [I, 29], perciò il rimanente $D\hat{G}B$ è metà di un retto. Quindi $D\hat{G}B$ è uguale a $D\hat{B}G$; ed allora anche il lato BD è uguale a GD [I, 6]. Ancora, poichè $E\hat{G}F$ è metà di un retto e l'angolo in F è retto, perchè uguale all'opposto in C [I, 34], il rimanente $F\hat{E}G$ è metà di un retto [I, 32]. Perciò l'angolo $E\hat{G}F$ è uguale ad $F\hat{E}G$: ed allora anche il lato GF è uguale al lato EF [I, 6]. E poichè [EC è uguale a CA, anche] il quadrato di EC è uguale al quadrato di CA; perciò la somma dei quadrati di EC, CA è doppia del quadrato di CA. Ma il quadrato di EA è uguale alla somma dei quadrati di EC, CA [I, 47], quindi il quadrato di EA è doppio del quadrato di AC. Ancora, poichè FG è uguale ad EF, anche il quadrato di FG è uguale al quadrato di FE. Perciò la somma dei quadrati di GF, FE è doppia del quadrato di EF. Ma il quadrato di EG è uguale alla somma dei quadrati di GF, FE [I, 47] quindi il quadrato di EG è doppio del quadrato di EF. Inoltre EF è uguale a CD [I, 34], perciò il quadrato di EG è doppio del quadrato di CD. Ma è stato pure dimostrato che il quadrato di EA è doppio del quadrato di AC; perciò la somma dei quadrati di AE, EG è doppia della somma dei quadrati di AC, CD. Ma il quadrato di AG è uguale alla somma dei quadrati di AE, EG [I, 47], quindi il quadrato di AG è doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma il quadrato di AG è uguale alla somma dei quadrati di AD, DG [*id.*]; perciò la somma dei [quadrati di] AD, DG è doppia della somma dei [quadrati di] AC, CD. E poichè DG è uguale a DB, la somma dei [quadrati di] AD, DB è doppia della somma dei quadrati di AC, CD.

Dunque, se si biseca una retta e ad essa si aggiunge per diritto un'altra retta, ecc. c. d. d.

Algebricamente: $(2a + b)^2 + b^2 = 2 [a^2 + (a + b)^2]$.

Le proprietà del gnomone, che tanto efficacemente concorrono a stabilire le più significative proposizioni di questo libro, suggeriscono qui al PELETIER anche un'altra dimostrazione.

Costruiti i quadrati ED, AH, HF, e posto HM = HN = AC = CB, le MO, NP si taglino ad angolo retto in Q.



Allora:

$$HQ = \overline{AC}^2, \quad QF = \overline{BD}^2,$$

ed il parallelogramma HP è uguale a ciascuno dei supplementi EH, HD, perchè essi sono uguali ad HO. Perciò i supplementi NO e QL sono uguali. Basterà allora far vedere che:

$$EH + HD + QF = AH + HF$$

e quindi sarà facile dedurre che

$$2(AH + HF) = DE + QF$$

Infatti:

$$EH = HP$$
$$AH + NO = HD$$
$$EH + HD = AH + \text{gnomone } KHLQ$$

ed aggiungendo ad ambo i membri il quadrato QF:

$$\begin{aligned} EH + HD + QF &= AH + \text{gnomone } KHLQ + QF \\ &= AH + HF \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} 2\,(AH + HF) &= EH + HD + QF + AH + HF \\ &= DE + QF. \end{aligned}$$

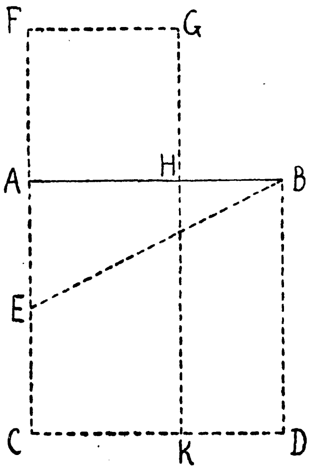
11.

Dividere una retta in modo che il rettangolo contenuto dalla retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della rimanente parte.

Sia AB la retta data. Bisogna dividere la AB in modo che il rettangolo contenuto dalla retta e da una delle sue parti sia uguale al quadrato della rimanente parte.

Si costruisca il quadrato ABDC di AB [I, 46], si bisechi AC in E, si conduca EF uguale a BE, su AF si costruisca il quadrato FH [*id.*], e si prolunghi GH in K. Dico che AB è divisa in H in modo che il rettangolo contenuto dalle AB, BH è uguale al quadrato di AH.

Infatti, poichè la AC è bisecata in E, e ad essa è aggiunta la FA, il rettangolo contenuto dalle CF, FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale al quadrato di EF [prop. 6]. Ma EF è uguale ad EB, dunque il rettangolo contenuto da CF, FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale al quadrato di EB. Ma la somma dei quadrati di BA, AE è uguale al quadrato di EB, perchè l'angolo in A è retto [I, 47]; quindi il rettangolo contenuto da CF, FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale alla somma dei quadrati di BA, AE. Si tolga il quadrato di AE, comune, ed allora il rettangolo da CF, FA sarà uguale al quadrato di AB. Ma il rettangolo contenuto da CF, FA è FK, perchè AF è uguale ad FG, ed il quadrato di AB è AD; quindi FK è uguale ad AD; si tolga AK, comune, così il rimanente FH è uguale ad HD. Ora, HD è il rettangolo contenuto da AB, BH,



perchè AB è uguale a BD; ed FH è il quadrato di AH, perciò il rettangolo compreso dalle AB, BH è uguale al quadrato di HA.

Dunque, la retta data AB è stata divisa in H in modo che il rettangolo contenuto dalle AB, BH sia uguale al quadrato di HA, c. d. f.

Gli esempi numerici, che per le prime dieci proposizioni di questo libro, nella maggior parte dei commentatori, hanno servito ad illuminare lo svolgersi dell'esposizione euclidea, non possono continuare in questa 11ª proposizione, nella quale bisogna costruire la BE, incommensurabile con la data AB.

Il punto che risolve il problema proposto risponde alla soluzione dell'equazione quadratica:

$$a\ (a - x) = x^2$$

cioè:

$$x^2 + a\ x = a^2,$$

che generalizzata è:

$$x^2 + ax = b^2$$

(cfr. la nota alla prop. II, 6).

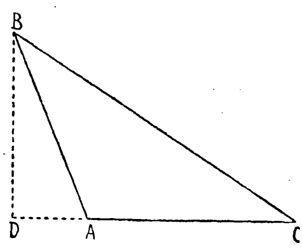
Il problema riappare in VI, 30 sotto la forma:
« Dividere una data retta in estrema e media ragione ».

12.

Nei triangoli ottusangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso supera la somma dei quadrati degli altri due lati di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da uno dei lati che comprendono l'angolo ottuso, e dalla porzione del prolungamento di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.

Sia ABC il triangolo ottusangolo, con l'angolo BAC ottuso, e dal punto B si conduca la perpendicolare BD sul prolungamento di CA. Dico che il quadrato di BC supera la somma dei quadrati di BA, AC, di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da CA, AD.

Poichè infatti la CD è divisa a caso nel punto A,



il quadrato di DC equivale alla somma dei quadrati di CA, AD, insieme con il doppio del rettangolo contenuto da CA, AD [prop. 4]. Si aggiunga il quadrato di DB, comune. Così, la somma dei quadrati di CD, DB è uguale alla somma dei quadrati di CA, AD, DB con il doppio del [rettangolo contenuto da] CA, AD. Ma il quadrato di CB è uguale alla somma dei quadrati di CD, DB, perchè l'angolo in D è retto [I, 47]; ed il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AD, DB [*id.*]. Perciò il quadrato di CB è uguale alla somma dei quadrati di CA, AB, insieme con il doppio del rettangolo contenuto da CA, AD; di modo che il quadrato di CB supera la somma dei quadrati di CA, AB del doppio del rettangolo compreso da CA, AD.

Dunque in triangoli ottusangoli, ecc.

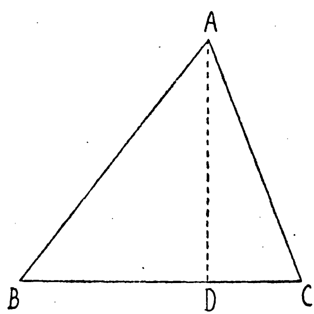
Questa proposizione, insieme con le seguenti 13 e 14, completano quella teoria della trasformazione delle aree già iniziata nelle ultime proposizioni del libro I.

13.

Nei triangoli acutangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore della somma dei quadrati degli altri due lati, di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da uno dei lati intorno all'angolo acuto, e dalla porzione di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.

Sia ABC il triangolo acutangolo, avente l'angolo in B acuto; e dal punto A si conduca la perpendicolare AD a BC. Dico che il quadrato di AC è minore della somma dei quadrati di CB, BA, di quanto è il doppio del rettangolo compreso da CB, BD.

Poichè, infatti, la CB è divisa a caso in D, la somma dei quadrati di CB, BD è uguale al doppio del rettangolo contenuto da CB, BD, insieme con il quadrato di DC [prop. 7]. Si aggiunga il quadrato di DA, comune: così la somma dei quadrati di CB,



BD, DA sarà uguale al doppio del rettangolo contenuto da CB, BD, insieme con i quadrati di AD, DC. Ma il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di BD, DA, perchè l'angolo in D è retto [I, 47]; e il quadrato di AC è uguale alla somma dei quadrati di AD, DC [*id.*]; perciò la somma dei quadrati di CB, BA è uguale alla somma del quadrato di AC, con il doppio del rettangolo contenuto da CB, BD. Quindi il solo quadrato di AC è minore della somma dei quadrati di CB, BA, di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da CB, BD.

Dunque in triangoli acutangoli, ecc.

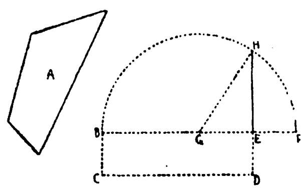
COMMANDINO, CLAVIO, SIMSON, PELETIER estendono la proposizione ad ogni triangolo, dando le particolari dimostrazioni per i tre casi. FLAUTI esclude il caso del triangolo rettangolo, e dà per gli altri due casi una sola dimostrazione, con doppia figura, supponendo che così fosse fatto dapprima nel testo greco, e poi da TEONE od altri modificato, per uniformare la proposizione alla 12.

14.

Costruire un quadrato uguale ad una figura rettilinea data.

Sia data la figura rettilinea A. Si deve costruire un quadrato uguale ad A.

Si costruisca il rettangolo BD, uguale ad A [I, 45]. Se BE fosse uguale ad ED, sarebbe compiuto ciò che era stato proposto: infatti sarebbe costruito un quadrato BD uguale alla figura rettilinea A. Se BE non è uguale ad ED, una delle due BE, ED



è maggiore. Sia BE la maggiore; si prolunghi fino in F, facendo EF uguale ad ED; si bisechi BF in

G [I, 10], e con centro G e distanza uguale ad una delle GB, GF, si descriva il semicerchio BHF; si prolunghi DE in H, e si conduca GH.

Ora, poichè BF è divisa in parti uguali in G, ed in parti disuguali in E, il rettangolo compreso da BE, EF, insieme con il quadrato di EG, è uguale al quadrato di GF [prop. 5]. Ma GF è uguale a GH, quindi il rettangolo di BE, EF, insieme con il quadrato di GE, è uguale al quadrato di GH. Ma anche la somma dei quadrati di HE, EG equivale al quadrato di GH [I, 47]; quindi il rettangolo di BE, EF, insieme con il quadrato di GE, equivale alla somma dei quadrati di HE, EG. Si tolga il quadrato di GE, comune: così il rimanente rettangolo contenuto da BE, EF è uguale al quadrato di EH. Ma il [rettangolo di] BE, EF è BD, perchè EF è uguale ad ED. Quindi il parallelogramma BD è equivalente al quadrato HE. Ma BD equivale ad A, perciò anche la figura rettilinea A è equivalente al quadrato che si può costruire su EH.

Dunque è stato costruito un quadrato, cioè quello che si può descrivere su EH, uguale ad una data figura rettilinea A. c. d. f.

Osserva Zeuthen (1) che la trasformazione di un rettangolo in un quadrato, insegnata qui senza ricorrere alla teoria delle proporzioni, si appoggia su II, 5 e 6, per cui un rettangolo è rappresentato come differenza di due quadrati. Il lato del quadrato uguale al rettangolo si costruisce per mezzo del teorema di Pitagora.

Simson propone di togliere qui la frase « se BE è diversa da ED, una di esse è maggiore. Sia BE, che si prolunghi in F », perchè la costruzione vale anche se si prolunga la minore.

---

(1) *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge*, pag. 41.

LIBRO TERZO

PER CURA DI

ADRIANA ENRIQUES

Termini

1.

Sono uguali i cerchi che hanno i diametri ovvero i raggi uguali.

La parola « raggi » che qui si è introdotta nell'uso tecnico consueto, non figura in EUCLIDE, che parla di « rette condotte dal centro ».

BORELLI enuncia questa proposizione come assioma e poi la stabilisce col movimento. Due secoli più tardi SIMSON dice non essere questa una definizione, ma un teorema da dimostrarsi colla sovrapponibilità. Tuttavia, la definizione euclidea torna a ricomparire come tale nelle trattazioni geometriche in cui si vuol bandire il movimento, riconducendo la congruenza delle figure a quella dei dati elementari (segmenti, angoli) che le determinano.

2.

Una linea retta si dice tangente ad un cerchio quando, avendo comune con esso un punto, prolungata non lo sega ulteriormente.

3.

Due cerchi si dicono fra loro tangenti se, avendo un punto in comune, non si segano.

Vi è incertezza sul significato di questa definizione, che già TODHUNTER osservava dar luogo a diverse interpretazioni. Anzitutto giova notare (con SIMON) che EUCLIDE considera come « cerchi » le superficie e non le linee: sembra dunque che nel concetto euclideo il contatto di due cerchi escluda che ciascuna delle due superficie (costituite di punti interni) abbia una parte propria comune coll'altra, e quindi che le due circonferenze si attraversino. Ma questa esclusione deve riferirsi soltanto all'intorno del punto di contatto, ovvero ai cerchi riguardati nella loro integrità? Crediamo che TODHUNTER giustamente si attenga a quest'ultima opinione, chè, invero, nulla autorizza a introdurre qui una interpretazione conforme alla moderna veduta della geometria differenziale.

A questo proposito HEATH, che sostiene l'opinione opposta, sembra non aver avvertito che l'enunciato euclideo si riferisce ai cerchi-superficie, anzichè alle circonferenze. Infatti nella prop. 13 verrà dimostrato che due cerchi non possono toccarsi in più di un punto (cioè che non possono dar luogo ad un caso come quello che viene offerto dalle coniche bitangenti), ma non si trova in alcun luogo un accenno alla dimostrazione che « due cerchi non possono toccarsi in un punto e segarsi in altri »: che è, del resto, una lacuna dell'EUCLIDE.

Il contatto interno ed esterno di due cerchi viene distinto da EUCLIDE colle proposizioni 11, 12.

4.

Linee rette (corde) del cerchio si dicono ugualmente distanti dal centro quando le perpendicolari abbassate dal centro sopra di esse sono uguali.

5.

E più distante dal centro si dice quella sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

6.

Segmento di cerchio è la figura compresa da un arco di cerchio e da una retta (corda sottesa dall'arco).

I termini « arco » e « corda » (che per brevità qui abbiamo introdotto) appaiono in CAMPANO e non ancora in ZAMBERTI, derivando probabilmente da fonti arabe.

7.

Angolo del segmento di cerchio è quello formato dall'arco e dalla retta (corda) che lo comprende.

Letteralmente invece che la parola « arco » figura in EUCLIDE « periferia del cerchio ». HEATH osserva che questa definizione ha soltanto un interesse storico, in quanto richiama l'uso che nei tempi più antichi si faceva di siffatti « angoli misti » con un lato curvilineo. Vedasi la nota alla prop. 5 del Libro I.

8.

Angolo inscritto nel segmento di cerchio è quello formato da due rette tirate dagli estremi della corda base ad un punto dell'arco.

9.

Quando le linee rette che contengono un angolo abbracciano un arco, si dice che l'angolo insiste in esso.

Si può osservare, con De Morgan (1) (in Heath), che qui si anticipa la considerazione generale delle figure simili, e che da questo punto di vista la definizione include propriamente un teorema.

10.

Settore circolare è la figura costituita da due raggi del cerchio e dall'arco da essi intercetto.

11.

Segmenti di cerchi simili sono quelli in cui sono inscritti angoli uguali o in cui insistono angoli uguali.

---

(1) Si veda la sua critica dell'Euclide nel *Companion to the British Almanak*, 1849.

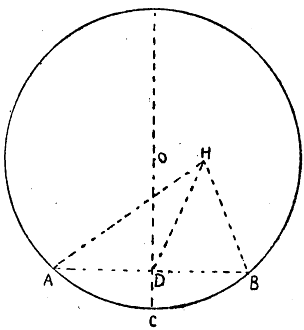
Proposizioni.

1.

Dato un cerchio trovarne il centro.

Sia dato il cerchio ABC di cui si voglia trovare il centro.

Si conduca in esso una corda qualunque AB e se ne trovi il punto di mezzo D. Si innalzi su AB la perpendicolare dal punto D (I, 11) e si prolunghi fino



ad incontrare la circonferenza nei punti C ed E; infine la CE sia divisa in due parti uguali in O. Dico che O è il centro del cerchio ABC.

Supponiamo, infatti, che O non sia centro e sia H il centro: si congiunga H con i punti A, D, B. Poichè la AD è uguale alla DB, DH è comune ai due triangoli ADH e HDB, e la HA è uguale alla HB (perchè raggi), verrebbero a essere uguali i due angoli ADH e HDB (I, 8). E poichè una retta che, innalzata su un'altra retta, forma con essa angoli uguali, è tale che ciascuno degli angoli da essa formato è retto (I, def. 10), l'angolo HDB è retto. Ma anche l'angolo ODB è retto, e perciò $H\hat{D}B$ è uguale a $O\hat{D}B$. Angolo maggiore sarebbe eguale a angolo minore, ciò che è assurdo. Perciò H non è il centro del cerchio ABC. Similmente si potrebbe dimostrare che nessun altro punto può essere centro all'infuori di O.

Dunque O è il centro del cerchio ABC.

Corollario

Da ciò si deduce che in un cerchio, una linea retta che seghi una corda per metà e sia ad essa perpendicolare, passa per il centro.

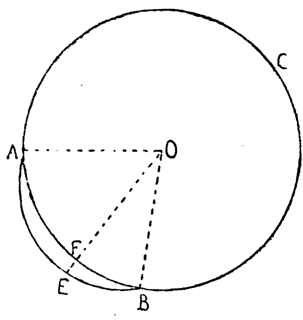
Simson dice che sarebbe impossibile fare la dimostrazione direttamente. Ma la costruzione del centro del cerchio si presenta nel modo più naturale in base al teorema che « il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti A e B nel piano è la retta perpendicolare al punto di mezzo D del segmento AB »; e per dimostrare che effettivamente ogni punto O equidistante da A e B appartiene a codesta retta, basta congiungere O col punto D e rilevare che OD risulta perpendicolare ad AB (cfr. I, 12).

2.

La retta che congiunge due punti di una circonferenza è interna al cerchio.

Dato il cerchio ABC prendiamo su di esso due punti A, B. Dico che la retta AB che congiunge questi due punti è interna al cerchio.

Supponiamo infatti che sia esterna, come la AEB e si trovi il centro O del cerchio ABC (prop. 1); si congiunga O con A e B e si prolunghi OF in E. Poichè AO è uguale a OB, sarà l'angolo OAE uguale a $O\hat{B}E$



(I, 5), e poichè nel triangolo OAE l'angolo OEB è esterno, sarà l'angolo OEB maggiore di $O\hat{A}E$ (I, 16), ma l'angolo OAE è uguale a $O\hat{B}E$ onde $O\hat{E}B$ è maggiore di $O\hat{B}E$. Ma ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore (I, 19), pertanto OB è maggiore di OE. Ma

OB è uguale a OF, perciò sarebbe OF maggiore di OE, mentre sappiamo che è minore: ciò che è assurdo. Dunque la retta AB non è esterna al cerchio. Similmente potremo dimostrare che neppure è sulla circonferenza. È dunque interna.

Questo teorema figura spesso in una maniera indipendente dal cerchio, come teorema delle perpendicolari e delle oblique, dedotto dalla prop. 16 del Libro I, e giova dire che già PROCLO, in una nota a quella proposizione, rilevava il corollario che da un punto non si possono condurre più di due segmenti uguali terminati ad una retta data; ciò importa che « una retta non può incontrare un cerchio in più di due punti », proposizione che DE MORGAN vorrebbe appunto introdurre qui dopo la 2.

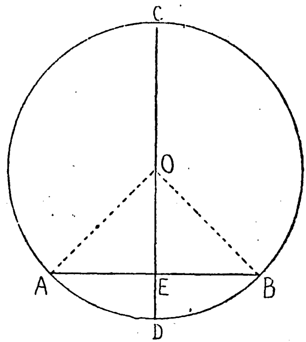
3.

Se nel cerchio una corda condotta per il centro ne sega un'altra che non passi per il centro in due parti eguali, è ad essa perpendicolare. E viceversa se è ad essa perpendicolare la sega in due parti uguali.

Sia dato il cerchio ABC e il diametro CD seghi la corda AB non condotta per il centro in due parti uguali nel punto E. Dico che è ad essa perpendicolare.

Si trovi infatti il centro del cerchio ABC (prop. 1) e sia O: si congiunga O con A e con B.

Poichè la AE è uguale alla EB, EO è comune ai due triangoli AEO, BEO, e OA è uguale a OB, sarà l'angolo AEO uguale a BÊO (I, 8); ma una retta che innalzata su un'altra retta forma con essa angoli



uguali è ad essa perpendicolare (I, def. 10), perciò gli angoli AEO, BEO, sono retti. Dunque il diametro DC che sega la corda AB in due parti uguali è ad essa perpendicolare.

Ora, supponiamo che la CD sia perpendicolare alla AB: dico che la divide in due parti uguali, cioè che la AE è uguale alla EB.

Infatti, paragonando gli stessi elementi, poichè la OA è uguale alla OB, sarà anche l angolo OAE uguale a OBE (I, 5). Ma anche l'angolo AEO è uguale a BÊO, perchè sono retti. Pertanto i due triangoli OAE, OEB, aventi due angoli e il lato comune OE rispettivamente uguali, sono uguali. Onde saranno uguali anche i rimanenti lati. Dunque la AE è uguale alla EB.

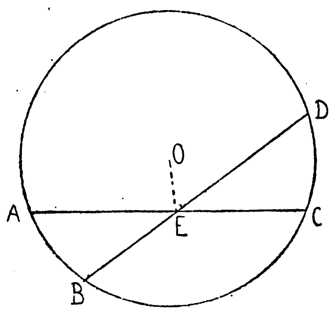
Dunque se in un cerchio una retta condotta per il centro sega un'altra retta... c. d. d.

4.

Se in un cerchio due rette non condotte per il centro si segano, non si dividono in due parti uguali.

Sia il cerchio ABCD e in esso due rette AC, BD non condotte per il centro si seghino in E. Dico che esse non si dividono in due parti uguali.

Infatti, supponiamo che si seghino in due parti uguali in modo che sia AE uguale a EC e BE uguale



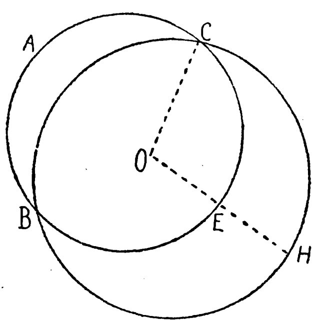
a ED: si trovi il centro del cerchio ABCD (prop. I) e sia O: si congiunga O con E. Poichè la retta OE, condotta per il centro, sega la retta AC, non condotta per il centro, in due parti uguali, è ad essa perpendicolare (prop. 3). Pertanto l'angolo OEA è retto. Similmente, poichè la retta OE sega la BD in due parti uguali è pure la OE perpendicolare alla BD. Pertanto l'angolo OEB è retto. Ma abbiamo dimostrato che anche $O\hat{E}A$ è retto, onde sarebbe $O\hat{E}A$ uguale a $O\hat{E}B$, mentre è minore: ciò che è assurdo.

Pertanto le rette AC, BD non si dividono in due parti uguali.

5.

Se due cerchi si segano non hanno lo stesso centro.

Siano dati i due cerchi ABC, CDH che si seghino nei punti B, C. Dico che non hanno lo stesso centro.



Infatti supponiamo che sia O il centro comune ai due cerchi, si congiunga O con C e si conduca una retta qualunque OEH. Poichè O è centro del cerchio ABC sarà OC uguale a OE. Similmente, poichè O è centro del cerchio CDH sarà OC uguale a OE, onde OE sarebbe uguale a OH, mentre sappiamo che è minore: ciò che è assurdo.

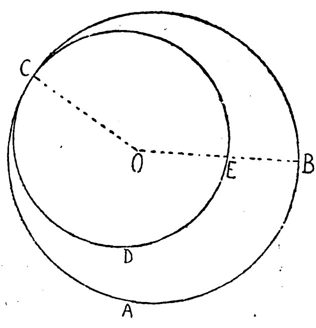
Pertanto O non è centro comune ai cerchi ABC, CDH.

6.

Se due cerchi si toccano non hanno lo stesso centro.

Siano dati i due cerchi ABC, CDE che si tocchino nel punto C: dico che essi non hanno lo stesso centro.

Infatti supponiamo che abbiano lo stesso centro



e sia O: si congiunga O con C e si conduca una retta qualunque OEB. Poichè il punto O è centro del cerchio ABC sarà OC uguale a OB. Similmente, poichè O è centro del cerchio CDE sarà OC uguale a OB, onde anche OE sarebbe uguale a OB, mentre è minore: ciò che è assurdo.

Pertanto il punto O non è centro comune ai due cerchi ABC, CDE.

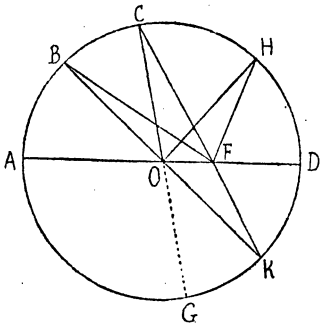
Con queste due proposizioni, in forza delle quali « cerchi concentrici non hanno punti comuni », viene stabilita l'unicità del cerchio che ha un dato centro e passa per un punto dato, completando così il post. 3 del Libro I.

7.

Se nel diametro di un cerchio prendiamo un punto distinto dal centro e da esso conduciamo quante si vogliano rette, quella che passa per il centro è la massima, minima è la rimanente parte, e delle altre la più vicina alla massima è sempre maggiore della più lontana: e da quel punto si possono condurre due sole rette fra loro eguali dall'una e dall'altra parte della minima.

Sia dato il cerchio ABCD e tracciamo un diametro AD nel quale sia preso un punto qualunque F che non sia centro del cerchio. Sia O il centro del cerchio e si conducano le rette qualsivogliano FB, FC, FH. Dico che la massima è la FA, la minima la FD e delle altre la FB è maggiore della FC e la FC è maggiore della FH.

Si conducano infatti le BO, CO, HO e poichè in ciascun triangolo la somma di due lati è sempre maggiore del rimanente (I, 20) sarà la somma di OB più OF maggiore di BF. Ma AO è uguale a BO, onde AF è maggiore di BF. Similmente, poichè BO è uguale a CO, la retta FO è comune ai due triangoli BFO, OHF, e le due rette BO, OF sono uguali alle due



rette CO, OF, avremo che anche l'angolo BOF è maggiore di $C\hat{O}F$. Pertanto BF è maggiore di CF (I, 24) e per la stessa ragione CF è maggiore di FH. Analogamente, poichè la somma di HF con FO è maggiore di OH (I, 20) e OH è uguale a OD, la somma di HF con FO sarà maggiore di OD. Si sottragga il segmento comune FO e avremo HF maggiore di FD.

Pertanto FA è la massima, FD la minima e FB è maggiore di FC, FC maggiore di FH.

Dico anche che dal punto F si possono condurre al cerchio ABCD due sole rette uguali dall'una e dall'altra parte della minima FD. Si costruisca infatti un angolo FOK uguale all'angolo OFH (I, 23) e si conduca la FK. Poichè HO è uguale ad OK, OF è comune e le due rette HO, OF sono uguali rispettivamente alle KO, OF, anche l'angolo HOF è uguale all'angolo KOF. Pertanto FH è uguale a FK. Dico dunque che dal punto F non si può condurre al cerchio nessuna altra retta uguale alla FH. Supponiamo infatti che si possa e sia la FK. Poichè FH è uguale a FK, e FC uguale FH, sarà anche FK uguale a FC, la più vicina alla FD uguale alla più lontana: ciò che è assurdo. Pertanto dal punto F non si può condurre al cerchio nessuna altra retta uguale alla HF, dunque se ne può condurre una sola.

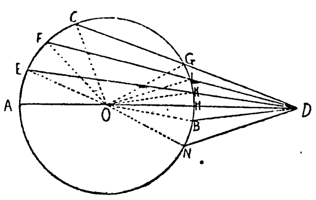
Dunque se nel diametro di un cerchio si prende un punto, ecc.

De Morgan (in Heath) osserva che questa dimostrazione assume senza prova che dall'essere l'angolo BFO maggiore di $C\hat{F}D$ segua anche $B\hat{D}E$ maggiore di $C\hat{E}D$.

8.

Se fuori di un cerchio si prende un punto e da questo si conducono al cerchio quante si vogliono rette, delle quali una per il centro, e le altre comunque condotte, di quelle rette che pervengono alla circonferenza dalla parte concava è massima quella che passa per il centro, delle rimanenti è maggiore la più vicina a quella che passa per il centro; di quelle rette poi che pervengono alla circonferenza dalla parte convessa è minima quella che è compresa fra il punto e il diametro; delle rimanenti è minore la più prossima alla minima, e due sole rette eguali si possono condurre da quel punto dall'una e dall'altra parte della minore.

Sia dato il cerchio ABC: fuori del cerchio prendiamo un punto D e da esso conduciamo quante si vogliono rette DA, DE, DF, DC, e la DA sia condotta per il centro. Dico che delle rette che pervengono alla circonferenza AEFC dalla parte concava, maggiore è quella che è condotta per il centro, cioè la DA e che DE è maggiore di DF, DF è maggiore di DC; di quelle



poi che pervengono alla circonferenza dalla parte convessa GLKH minima è la DH che è posta fra il punto D e il diametro AH, e delle altre minore è la più vicina alla minima DH, cioè DK è minore di DL, DL è minore di DG.

Si trovi infatti il centro del cerchio ABC (prop. 1) e sia O. Si conducano le rette OE, OF, OC, OK, OL, OG. Poichè la AO è uguale alla EO, si aggiunga all'una e all'altra OD: pertanto sarà AD uguale alla somma di EO con OD. Ma la somma di EO ed OD è maggiore di ED (I, 20) onde AD è maggiore di ED. Similmente, poichè OE è uguale a OF e OD è comune ai due triangoli OFD e OED, saranno OE e OD rispettivamente uguali a FO, OD; ma l'angolo EOD è maggiore dell'angolo FOD, pertanto ED è maggiore di FD (I, 24). Analogamente si dimostra che anche FD è maggiore di CD; dunque massima è la DA, e la DE è maggiore della DF, la DF maggiore della DC.

E poichè la somma di OK più KD è maggiore di OD (I, 20) e OH è uguale a OK, sarà KD maggiore di HD. Perciò anche HD sarà minore di KD. Poichè nel triangolo OLD sono state condotte due rette OK, KD sullo stesso lato OD, sarà la somma di OK e KD minore della somma di OL e LD (I, 21). Ma la OK è uguale alla OL onde la DK è minore della DL. Analogamente si dimostra che è anche la DL minore della DG. Dunque minima è la DH, e DK è minore di DL, la DL minore della DG.

Dico anche che dal punto D si possono condurre due sole rette uguali fino all'incontro della circonferenza dall'una e dall'altra parte della DH. Si costruisca sulla OD l'angolo KOD uguale all'angolo DOB (I, 23) e si conduca la retta DB. Poichè la OK è uguale alla OB, il lato OD è comune, le due rette KO e OD sono rispettivamente uguali alle due BO ed OD, l'angolo KOD è inoltre uguale all'angolo BOD, sarà allora anche DK uguale a DB (I, 4).

Dico che nessun'altra retta uguale alla DK si può condurre alla circonferenza dal punto D. Infatti, supponiamo che si possa condurre e sia la DN. Poichè la DK è uguale alla DN e la DK è uguale alla DB, sarà anche la DN uguale alla DB, ma la DB è più vicina alla DH che la DN, perciò non può essere la DN uguale alla DB. Perciò non più di due rette uguali si possono condurre dal punto D dall'una e dall'altra parte della DH.

Dunque se fuori di un cerchio si prende un punto...

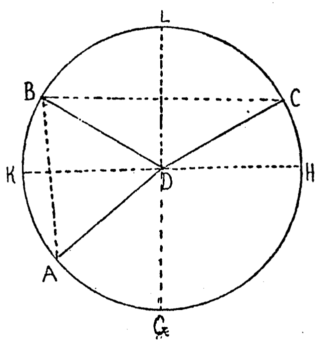
De Morgan rileva qui, come per la prop. 7, due assunzioni implicite.

9.

Se entro un cerchio si prende un punto qualunque e da questo punto si possono condurre fino all'incontro con la circonferenza più di due rette uguali, quel punto è centro del cerchio.

Sia dato il cerchio ABC e dentro ad esso il punto D: dal punto D si possano condurre al cerchio ABC più di due rette uguali, per esempio le DA, DB, DC. Dico che il punto D è centro del cerchio ABC.

Si conducano infatti le AB, BC, e si seghino in due parti uguali nei punti E, F, e condotte le ED,



FD, si prolunghino fino all'incontro con la circonferenza nei punti H, K, G, L.

Poichè la AE è uguale alla EB, il lato ED è comune ai triangoli DEB, DEA e la DA è uguale alla DB, sarà l'angolo AED uguale a BÊD (I, 8). Pertanto ciascuno dei due angoli AED, BED è retto (I, def. 10). Dunque la HK sega la AB in due parti uguali ed è ad essa perpendicolare. E poichè se in un cerchio una retta sega un'altra retta in due parti uguali ed è ad essa perpendicolare, passa per il centro (prop. 1, coroll.), il centro si trova sulla HK. Per la medesima ragione si trova anche sulla CL. Ma nessun altro punto comune hanno le HK, CL all'infuori del punto D. Pertanto D è centro del cerchio ABC.

Dunque se entro un cerchio si prende un punto e da questo punto si possono condurre alla circonferenza più di due rette uguali, questo punto è centro del cerchio. c. d. d.

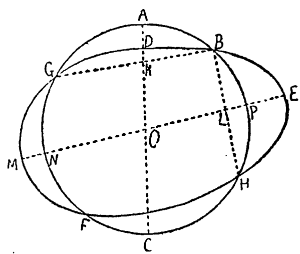
Questa proposizione si fonde colla 1 qualora si proceda colla considerazione dei luoghi geometrici dei punti equidistanti da due punti dati, come è indicato nella nota alla prop. 1.

10.

Due cerchi non si segano in più di due punti.

Infatti, supponiamo che i cerchi ABC, DEF si seghino in più di due punti; per es. pei punti B, H, F, G, e condotte le BG, BH si dividano in due parti nei punti K, L e da K, L alle BG, BH si conducano le perpendicolari KG, LM, indi si prolunghino fino a incontrare la circonferenza nei punti A, E.

Poichè nel cerchio ABC la retta AC sega la BG in due parti uguali ed è ad essa perpendicolare, il centro del cerchio si trova sulla AC (prop. 1, coroll.). Similmente, poichè nel medesimo cerchio ABC la retta NP sega la BH in due parti uguali ed è ad essa perpendicolare, sulla NP si trova il centro del cerchio ABC; ma è stato dimostrato che si trova pure sulla AC; e le due rette AC, NP non si incontrano fuori del punto O. O è dunque centro del cerchio



ABC. Analogamente si può dimostrare che O è pure centro del cerchio DEF. Pertanto i due cerchi ABC, DEF segantisi scambievolmente hanno lo stesso centro O: ciò che è assurdo (prop. 5).

Dunque due cerchi non si segano in più di due punti. c. d. d.

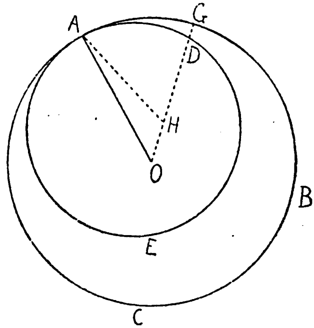
Si può aggiungere che per tre punti non in linea retta passa sempre un cerchio. Questo teorema (che EUCLIDE dà in IV, 5) si deduce dal postulato delle parallele, in forza del quale le perpendicolari nei punti di mezzo di due segmenti non allineati devono incontrarsi. Qui è importante notare che, reciprocamente, l'esistenza d'un cerchio passante per tre punti arbitrari costituisce un'assunzione capace di surrogare il postulato d'EUCLIDE delle parallele (LEGENDRE, BOLYAI).

11.

Se due cerchi si toccano internamente, la retta che congiunge i loro centri prolungata incontra la circonferenza nel punto di contatto.

Infatti i due cerchi ABC, ADE si tocchino nel punto A, si trovi il centro O del cerchio ABC e il centro H del cerchio ADE (prop. I). Dico che la retta congiungente H con O prolungata incontra la circonferenza nel punto A.

Supponiamo infatti che non la incontri nel punto



A, ma nel punto G: si conducano le rette AO, AH. Poichè la somma di AH con HO è maggiore di OA

(I, 20), la somma di AH con HO sarà maggiore di OG: si sottragga HO, che è comune, e avremo che AH è maggiore di HG. Ma AH è uguale a HD, onde anche HD è maggiore di HG, mentre sappiamo che è minore; ciò che è assurdo. Pertanto la retta che congiunge O e H non cade fuori del punto A, dunque incontra la circonferenza nel punto di contatto dei due cerchi.

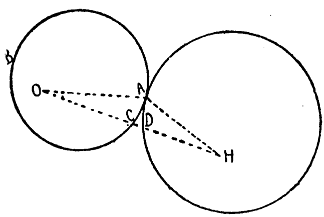
Dunque se due cerchi si toccano internamente...

12.

Se due cerchi si toccano esternamente la retta che congiunge i loro centri passa per il punto di contatto.

Infatti siano dati i due cerchi ABC, ADE che si tocchino esternamente nel punto A: si trovi il centro O di ABC e il centro H di ADE (prop. I). Dico che la retta che congiunge H con O passa per il punto di contatto A.

Supponiamo infatti che non vi passi e incontri invece i due cerchi nei punti C, D. Si conducano le rette AO, AH. Poichè O è centro del cerchio ABC, sarà AO uguale a OC. Similmente, poichè H è centro del cerchio



ADE, sarà AH uguale a HD. Ma è stato dimostrato che è anche OA uguale a OC. Pertanto la somma di OA con AH è uguale a quella di OL con HD, onde OH è maggiore della somma di OA con AH. Ma è anche OH minore della somma di OA con AH (I, 20), ciò che è assurdo. Pertanto la retta che congiunge O con H non incontra la circonferenza fuori del punto A di contatto; perciò passa per A.

Dunque se due cerchi si toccano esternamente...

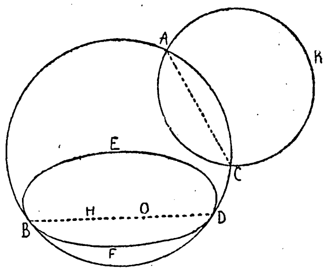
13.

Due cerchi non possono toccarsi che in un solo punto, sia che si tocchino internamente, sia esternamente.

Infatti supponiamo che i cerchi ABCD, EBFD si tocchino in più di un punto, per esempio nei punti B e D. Si trovi il centro H del cerchio ABCD e il centro O del cerchio EBFD (prop. 1). La retta che congiunge H con O incontra la circonferenza nei punti B e D, e poichè H è centro del cerchio ABCD sarà BH uguale a HD, onde BH è maggiore di OD e a più forte ragione BO è maggiore di OD. Similmente, poichè O è centro del cerchio EBFD sarà BO uguale a OD. Ma è stato dimostrato che è maggiore, ciò che è assurdo.

Pertanto i due cerchi non s'incontrano in più di un punto.

I casi d'intersezione di due cerchi che sono esaminati nelle precedenti proposizioni (10-13), sono suscettibili di una discussione sistematica che incontra favore nei trattati moderni, a partire da LEGENDRE e BALTZER: le posizioni dei due cerchi venendo caratterizzate in rapporto alle ipotesi in cui la distanza dei centri sia maggiore della somma dei raggi, o minore della loro differenza, ov-



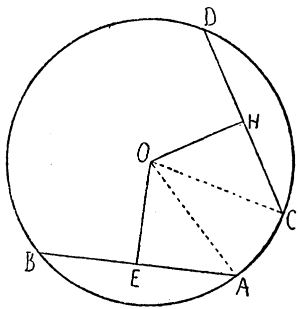
vero compresa fra la somma e la differenza suddette. Conviene aggiungere che in questa discussione occorre fare appello ad un principio di continuità, postulando direttamente che un arco di cerchio, i cui estremi siano l'uno interno e l'altro esterno ad un altro cerchio, seghi questo ultimo, ovvero riconducendo la dimostrazione di ciò all'intersezione d'un cerchio con una retta, o infine facendo capo al postulato della continuità della retta (cfr. VITALI, vol. I, art. 5 nella terza edizione delle *Questioni*).

14.

Nel cerchio corde uguali distano ugualmente dal centro e corde ugualmente distanti dal centro sono uguali.

Sia il cerchio ABCD e in esso siano uguali le corde AB, CD. Dico che AB, CD distano ugualmente dal centro.

Infatti si trovi il centro del cerchio ABCD (prop. I) e sia O; da O si conducano le perpendicolari OE, OH alle AB, CD e si congiunga O con A e C. Poichè la retta OE condotta per il centro taglia ad angoli retti



la AB non condotta per il centro, essa la sega in due parti uguali (prop. 3). Pertanto la AE è uguale alla EB. Dunque AB è uguale al doppio di AE. Per la medesima ragione sarà anche CD uguale al doppio di CH. Ma AB è uguale a CD, pertanto anche AE è uguale a CH. E poichè AO è uguale a OC, sarà il quadrato di AO uguale al quadrato di OC. Ma la somma del quadrato di AE e del quadrato di OE è uguale al quadrato di AO (perchè l'angolo in E è retto) (I, 47) e la somma del quadrato di OH e del quadrato di HC è uguale al quadrato di OC. Perciò il quadrato di AE ed il quadrato di EO, presi insieme, sono uguali alla somma del quadrato di CH con il quadrato di HO. Ma il quadrato di AE è uguale al quadrato di CH, perchè AE è uguale a CH. Pertanto EO è uguale a OH, onde OE è uguale a OH. Nel cerchio poi si dice che due corde distano ugualmente dal centro se le perpendicolari condotte dal centro ad esse sono uguali (def. 4): dunque AB, CD distano ugualmente dal centro.

Ora le rette AB, CD distino ugualmente dal centro; sia ad es. OE uguale a OH. Dico che è AB è uguale a CD.

Infatti, paragonando gli stessi elementi, si dimostra che AB è uguale al doppio di AE, e CO uguale al doppio di CH. E poichè AO è uguale a CO, sarà il quadrato di AO uguale al quadrato di OC. Ma la somma del quadrato di AE e del quadrato di OE è uguale al quadrato di AO (poichè l'angolo in E è retto), (I, 47) e la somma del quadrato di OH e del quadrato di HC è uguale al quadrato di OC (poichè l'angolo in H è retto); perciò il quadrato di AE ed il quadrato di EO, presi insieme, sono uguali alla somma del quadrato di CH con il quadrato di HO. Ma il quadrato di OE è uguale al quadrato di OH poichè OE è uguale a OH. Onde il quadrato di AE è uguale al quadrato di CH, perciò AE è uguale a CH. Ma era AB uguale al doppio di AE, CD uguale al doppio di CH, perciò è AB uguale a CD.

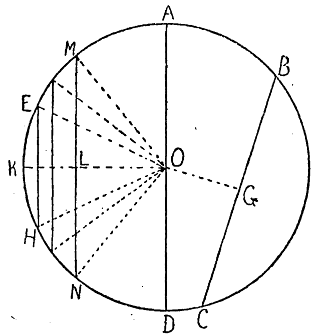
Dunque nel cerchio corde uguali ecc.

15.

Nel cerchio la massima corda è quella che passa per il centro e delle altre la più prossima al centro è maggiore della più lontana.

Sia dato il cerchio ABCD e sia AD un diametro: sia poi O il centro e la BC sia la corda più prossima a AD, la EH più lontana. Dico che la retta massima è la AD e che la BC è maggiore della EH.

Si conducano infatti dal centro O le perpendicolari OG, OK alle BC, EH. E poichè la BC è più vicina al centro e la EH è più lontana, sarà OK maggiore di OG (def. 4). Si ponga OL uguale a OG e per L si conduca alla OK la perpendicolare LM, indi si prolunghi fino al punto N e si conducano le rette MO, ON, EO, OH. Poichè OG è uguale a OL sarà anche BC uguale a MN (prop. 14). Similmente poichè AO è uguale a OM e OD è uguale a ON



sarà AD uguale a MO più ON. Ma MO più ON è maggiore di MN (I, 20) e MN è uguale a BC. Pertanto AD è maggiore di BC. E poichè anche l'angolo MON è maggiore di EÔH, sarà MN maggiore di EH (I, 24). Ma è stato dimostrato che MN è uguale a BC, perciò la massima corda del cerchio è la AD e BC è maggiore di EH.

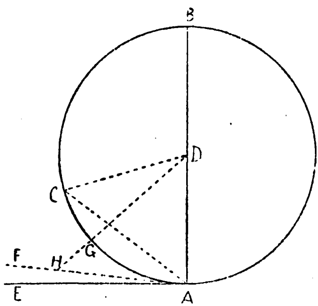
Dunque nel cerchio la massima corda ecc...

16

Se si innalza una retta perpendicolare in un estremo del diametro di un cerchio, essa cade fuori del cerchio e fra la retta e la circonferenza non è interposta nessuna altra retta.

Sia descritto il cerchio ABC con centro D e diametro AB. Dico che la retta perpendicolare innalzata sull'estremo del diametro cade fuori del cerchio.

Infatti supponiamo che non cada fuori, cada invece dentro il cerchio come la AC e si conduca la DC. Poichè DA è uguale a DC, sarà anche l'angolo DAC



uguale a $\hat{ACD}$ (I, 5). Ma l'angolo DAC è retto. Dunque nel triangolo ACD due angoli DAC e ACD sono uguali a due retti, ciò che è assurdo (I, 17). Pertanto la retta perpendicolare innalzata sul diametro AB nel punto A non cade entro il cerchio. Analogamente si potrebbe dimostrare che non cade neppure sulla circonferenza; dunque cade fuori.

Cada come la AE. Dico che nello spazio fra la retta AE e la circonferenza CGA non può essere interposta alcuna altra retta.

Infatti supponiamo che una retta possa essere interposta, come la FA, e dal punto D si conduca la perpendicolare DH alla FA. Poichè l'angolo AHD è retto e l'angolo DAH è minore di un retto, sarà AD minore di DH (I, 19). Ma DA è uguale a DG, dunque DG è maggiore di DH, mentre è minore, ciò che è assurdo. Pertanto nello spazio compreso fra la retta e la circonferenza non può essere interposta nessun'altra retta.

Dico anche che l'angolo del semicerchio compreso fra la retta BA e l'arco CGA è maggiore di qualunque altro angolo rettilineo e il rimanente compreso fra l'arco GCA e la retta EA è minore di qualsiasi angolo rettilineo. Infatti, se vi fosse un angolo rettilineo maggiore dell'angolo compreso fra la retta BA e l'arco CGA, e un angolo minore dell'angolo compreso fra l'arco CGA e la retta AE, si potrebbe interporre fra l'arco CGA e la retta AE una retta che formasse un angolo maggiore dell'angolo compreso fra la retta BA e l'arco CGA e un angolo minore dell'angolo compreso fra l'arco CGA e la retta AE. Ma non si può interporre nessuna retta. Pertanto nessun angolo acuto può essere maggiore dell'angolo compreso fra la retta BA e l'arco CGA, nè minore dell'angolo compreso fra l'arco CGA e la retta AE.

Corollario

Di qui è evidente che la retta perpendicolare innalzata su un estremo del diametro di un cerchio, tocca la circonferenza (def. 2). c. d. d.

L'ultima parte di questa proposizione viene a dire che l'angolo del cerchio colla tangente, a cui Giordano Nemorario (1220) ha dato il nome di *angolo di contingenza,* è più piccolo di qualsiasi angolo rettilineo. Proclo esita a parlare di questo come di un vero angolo, e il suo commento (che si riferisce alla def. 8) è spesso interpretato nel senso che l'angolo di contingenza sia nullo. Invero questo commento ci porta l'eco di discussioni che dovevano già essersi fatte fra gli antichi (Heath vede un'allusione a ciò nel titolo d'un'opera perduta di Democrito, di cui offre una correzione suggestiva): queste discussioni, in ogni caso, si richiamavano al concetto che grandezze omogenee sono quelle che hanno ragione fra loro, e per cui (secondo la def. V, 4) esiste sempre una molteplice dell'una maggiore dell'altra, cioè vale il cosiddetto postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE. Ma sembra che PROCLO ammetta qui che soltanto angoli di linee e angoli di superficie (diedri) possano essere grandezze eterogenee, e che invece angoli di una medesima superficie siano da ritenere omogenei, e quindi trovi difficoltà ad accogliere la veduta di alcuni che anche gli angoli curvilinei o di contatto, in quanto possono essere divisi mediante altre linee, siano da annoverare fra le grandezze.

La questione riappare fin dagli inizi dell'età moderna.

CAMPANO (nel secolo XIII) già osservava che l'angolo di due cerchi tangenti si può dividere in parti, e così che esso si deve ritenere come una grandezza, sebbene di specie diversa dell'angolo rettilineo.

Contro questa veduta, il PELETIER (1557) sostiene che l'angolo di contingenza deve ritenersi nullo, giacchè qualcosa di più piccolo per le grandezze continue è *extra intelligentiam*: e si appella in proposito al principio espresso in X, 1 che una grandezza da cui si tolga successivamente la metà, si può ridurre più piccola di qualsiasi grandezza arbitraria. Ma l'opinione del PELETIER viene combattuta da CANDALLA (1566) e da CARDANO che — sia pure in forma non chiara — sembra avvertisse qui il concetto della curvatura. A sua volta CLAVIO (nel suo commento del 1574 e più tardi in un'*Apologia*) si rivolta contro il PELETIER, dicendo che è pazzesco stimare che l'angolo di contingenza sia nullo. Egli sostiene che EUCLIDE stesso avrebbe rifiutato l'interpretazione di PROCLO; e che non è il caso di applicare il principio X, 1, poichè si tratta di grandezze che non hanno ragione fra loro ai sensi della def. V, 4; infine (come CANDALLA) vede negli angoli di contingenza una specie di grandezze che possono essere aumentate e diminuite mediante cerchi e non mediante rette: le quali sono incomparabili agli angoli rettilinei, rispetto a cui stanno « come le formiche rispetto all'uomo ».

La questione, in cui si tratta, insomma, dell'esistenza dell'*infinitesimo attuale*, doveva quindi attrarre i più grandi matematici, nel periodo di formazione del calcolo infinitesimale.

VIETA nel cap. XIII dei suoi *Variorum de rebus mathematicis responsorum* (1593) dice che due linee tangenti, essendo « in eandem lineam rectam coincidentes », ai sensi della def. I, 8 non formano alcun angolo.

Anche GALILEO, in una lettera scritta da Arcetri nel 1635 a G. C. GLORIOSI, matematico napoletano, si accorda con VIETA nel ritenere che la definizione dell'angolo come « inclinazione di due linee », uscenti da un punto in un piano e non per diritto, escluda la possibilità di considerare come angolo l'angolo di contatto. Egli esamina la questione accennata, col sostituire al cerchio un poligono iscritto, un lato del quale si confonde proprio colla tangente. E solo in un punto intravede più profondamente la natura della cosa, ove accenna all'angolo di due lati successivi del poligono (che darebbe la variazione della tangente). Ma, tenendosi fermo alla definizione d'angolo che sostituisce le tangenti alle curve, doveva naturalmente distinguere questo dallo spazio compreso fra due linee (che può esser diviso da altre linee) e così ritenere che l'angolo di contatto non esista. VIVIANI, riportando e commentando lo scritto di GALILEO, vi aggiunge la supposizione che

EUCLIDE abbia definito soltanto gli angoli rettilinei e che anche la prop. 16 di cui discorriamo sia una interpolazione degli antichi. Più esplicitamente di Vieta e di Galileo, WALLIS nel suo libro *De angulo contactus*, dice che una curva ha in ciascun punto la direzione della tangente.

Finalmente NEWTON trovò nelle osservazioni di CARDANO e di CLAVIO (e forse anche in quella che abbiamo rilevato esser fatta incidentalmente e quasi inconsapevolmente da GALILEO) il nodo del problema, cioè che la misura dell'angolo di contatto mette in giuoco, non più le direzioni delle tangenti (prime derivate), bensì le curvature (seconde derivate).

La polemica era chiusa in tal modo nel secolo XVIII, col resultato di porre in chiaro i concetti di « tangente » e di « direzione », di « curvatura » e di « linea osculatrice »; mentre l'analisi infinitesimale si andava costituendo su base rigorosa coll'eliminazione del concetto dell'*infinitesimo* come dell'*infinito attuale*. Ma, se all'analisi ordinaria basta il concetto dell'*infinitesimo* e dell'*infinito potenziale*, può dirsi che l'infinitesimo o l'infinito attuale siano contraddittori? Per questo lato il problema viene a connettersi, oltrechè colle origini del calcolo infinitesimale, anche con quelle della teoria degli insiemi.

GALILEO (*Opere* VIII, pag. 78) dal paradosso che la totalità dei numeri naturali appare numerosa come una sua parte (attesochè ad ogni numero si può far corrispondere il doppio) deduceva soltanto che « agl'infiniti convengono gli attributi di " maggiore ", " uguale " e " minore " ». Ma più tardi CAUCHY (nelle *Lezioni* edite da MOI-

GNO nel 1868) stima che codesto paradosso costituisca una contraddizione logica, provando così l'impossibilità di pensare comunque un infinito attuale. Invece BOLZANO nei *Paradoxien der Unendlichen* (opera iniziata nel 1847 e pubblicata dopo la sua morte) riprende le vedute del LEIBNIZ sostenendo che l'infinito attuale esiste e che deve potersi rimuovere dal suo concetto « l'apparenza della contraddizione ».

Frattanto la critica di GIORGIO CANTOR (1878-83) riusciva a definire il concetto della « potenza degl'insiemi infiniti » e dei « transfiniti ordinali »; mentre PAUL DU BOIS REYMOND era condotto dal canto suo a riconoscere gli ordini d'infinito di certe funzioni (e^x, log. x) come infiniti e infinitesimi attuali.

Pure tutti questi infiniti ed infinitesimi non soddisfano agli ordinari requisiti delle grandezze, che, invece, si ravvisano negli angoli di contingenza. Da questo punto di vista la critica ha fatto un passo decisivo collo sviluppo più recente della cosiddetta *geometria non archimedea*, iniziato da G. VERONESE nel 1900. Ma per più ampie notizie sull'argomento rimandiamo agli articoli 5 e 6, di G. VITALI e di F. ENRIQUES, nella nuova edizione delle *Questioni*, vol. I. Vedasi anche F. ENRIQUES, *Per la storia della Logica* (cap. III, § 25).

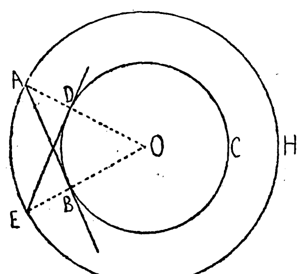
17.

Da un punto dato condurre una retta tangente a un dato cerchio.

Sia dato il punto A e il cerchio BCD. Dobbiamo dunque condurre da A una retta tangente al cerchio BCD.

Si trovi il centro del cerchio: sia O, e si conduca la AO; con centro O e raggio OA si descriva il cerchio AEH e dal punto D si conduca la perpendicolare DE alla OA, indi si conducano le rette OE, AB. Dico che la retta AB condotta dal punto A è tangente al cerchio BCD.

Infatti, poichè O è centro dei cerchi BCD, AEH



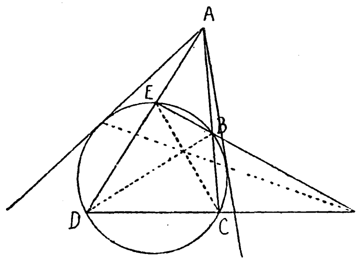
sarà OA uguale a OE e OD uguale a OB. Pertanto le due rette AO, OB sono rispettivamente eguali alle EO, OD. Inoltre, i due triangoli DOE, OBA hanno l'angolo in O compreso fra lati uguali, in comune, onde il triangolo DOE è uguale al triangolo OBA e i rimanenti angoli sono rispettivamente uguali (I, 4). Pertanto l'angolo ODE è uguale a OBA. Ma l'angolo ODE è retto. Pertanto anche l'angolo OBA è retto: OB è raggio. Ma la perpendicolare innalzata sull'estremo del diametro del cerchio tocca la circonferenza (prop. 16, coroll.), dunque la AB tocca il cerchio BCD.

Dunque dal punto dato è stata condotta al cerchio BCD una retta tangente, come dovevasi.

Si suppone che il punto dato sia esterno al cerchio perchè, se è interno, per esso non passano tangenti, e nel caso in cui il punto appartenga alla circonferenza, il problema è risolto dal corollario alla prop. 16.

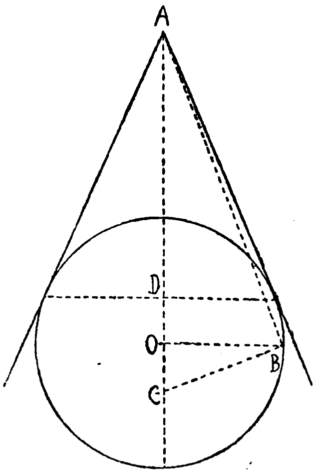
Una costruzione più semplice si ha basandosi sulla prop. 31 (l'angolo inscritto nel semicerchio è retto) perchè basta intersecare il cerchio dato col cerchio di diametro OA. Secondo TROPFKE questa costruzione risale al professore dell'Università di Vienna JOHANN VOEGELIN (m. 1549) e compare poi in CLAVIO (1574) e nella *Geometria rotundi* di FINK (1583).

Un'altra costruzione interessante, che viene usata in alcuni trattati moderni (p. es. nell'ENRIQUES-AMALDI), secondo TROPFKE appartiene a TELLKAMPF (1829). Essa consiste in ciò. Si costruisce un cerchio concentrico al dato e di raggio doppio e lo si interseca col cerchio di centro A e raggio AO: la retta che congiunge i punti d'intersezione sega il cerchio dato nei punti di contatto delle tangenti condotte da A. Ma la costruzione più semplice, e che non esige di descrivere alcun nuovo cerchio, è quella che trova il suo fondamento nella considerazione generale della polarità rispetto ad una conica (GREGORIO di S. VINCENT, 1647 - DE LA HIRE, 1679, ecc.). Si mandino per A due rette a segare il cerchio nei punti B, C e D, E rispet-



tivamente: la congiungente dei due punti BD . CE e BE . CD (polare di A) sega il cerchio nei punti di contatto delle tangenti per A. TROPFKE avverte che questa costruzione, nel caso particolare in cui una delle secanti per A passi per il centro, trovasi pubblicata da WOLDEGK WELAND in una *Strena mathematica* del 1640, e l'autore dice che l'idea gliene fu suggerita dal maestro JOACHIM JUNGE (1587-1657), che fu anche — notoriamente — maestro di LEIBNIZ.

Alla polarità (o più propriamente all'antipolarità che ricorre nella rappresentazione descrittiva secondo il metodo della proiezione centrale) si collega anche un'altra costruzione delle tangenti, che riesce particolarmente semplice per chi faccia uso di una squadra: si congiunga A col centro O del cerchio e si innalzi in O la perpendicolare fino ad un punto B della circonferenza, poi si mandi per B la perpendicolare ad AB fino ad incontrare in C la retta AO, e si costruisca il punto D simmetrico di C rispetto ad O: la perpendicolare in D alla AO è la polare di A, le cui intersezioni col cerchio sono i punti di contatto cercati.



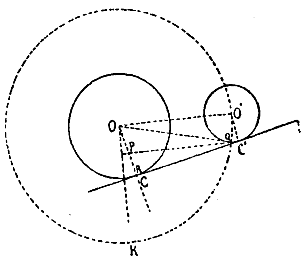
L'uguaglianza di lunghezza delle due tangenti condotte da un punto ad un cerchio non è rilevata esplicitamente negli *Elementi*, ma applicata da EUCLIDE nei *Phaenomena* (prop. 24); e si trova poi in ARCHIMEDE (*Opere*, ed. Heiberg, pag. 260). Mentre la proposizione inversa, che il centro del cerchio sta sulla bisettrice dell'angolo di due tangenti, è data in PAPPO (VII, 97, ed. Hultsch, § 159, pag. 822).

Aggiungasi che la proprietà del quadrilatero circoscritto ad un cerchio, connessa coll'uguaglianza di lunghezza delle tangenti innanzi accennata, cioè che « le somme di due lati opposti sono uguali » compare in GIORDANO NEMORARIO (m. 1237) nel libro *De triangulis* (ed. Curtze, 1887).

Diciamo infine che il PELETIER considera esplicitamente il caso particolare del nostro problema, in cui si tratti di condurre le tangenti a un cerchio che abbiano una data direzione.

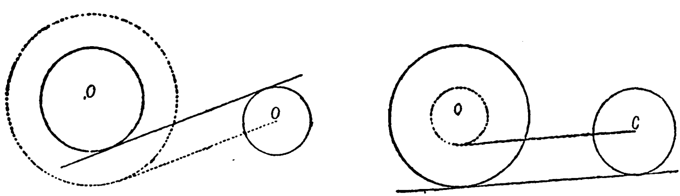
La costruzione delle *tangenti comuni a due cerchi* può ridursi, come è noto, a quella delle tangenti per un punto ad un cerchio. Gli antichi conobbero la riduzione che si ottiene in questo senso facendo uso dei centri di similitudine (cfr. PAPPO VII, pag. 110, 118).

Nell'epoca moderna il problema delle tangenti comuni a due cerchi è stato nuovamente risolto da CARDANO (1501-1576) (*Opus novum de proportionibus*, prop. 212, Scholio, pag. 245), e dal CLAVIO (1560). La soluzione di CARDANO — che contempla soltanto le tangenti esterne — consiste in questo. Abbiansi due cerchi C e C′ di centri O ed O′, il primo dei quali maggiore del secondo (vedi fig.) e con centro O e raggio OO′ descrivasi un cerchio ausiliario K. S'innalzi quindi in O una perpendicolare OP ad OO′ di lunghezza uguale al raggio di C′, e per P si conduca la parallela ad OO′ fino ad incontrare in Q il cerchio K; quindi si mandi per O una retta entro l'angolo POQ che faccia con OP un angolo uguale a QOO′: il punto R in cui questa retta incontra C, dalla stessa parte di P rispetto alla retta OO′, è punto di contatto di una delle tangenti comuni a C e C′. CARDANO ne dà la prova conducendo per O′ la parallela ad OR, ad incontrare, dalla stessa parte, C′ in R′, e facendo poi vedere che la retta RR′ riesce perpendicolare ad OR e a O′ R′.



Assai più tardi G. CEVA, nel libro *De lineis rectis se invincem secantibus statica constructio* (Milano, 1668, II, pr. 16, Lemma VI, pag, 52) considera anche le tangenti interne comuni a due cerchi che non si tagliano. E queste come le esterne determina costruendone il punto comune, che divide (internamente o esternamente) la congiungente dei centri nel rapporto dei raggi. Questa costruzione si ritrova poi nelle *Istitutiones Analyticae* di RICCATI e SALADINI, pubblicate a Bologna nel 1735 (I, pag. 78, 79). I punti ausiliarî che in essa si ricercano sono *i centri di similitudine* dei due cerchi, cioè i punti corrispondenti a se stessi nella similitudine di due figure, che già in modo generale aveva adoperato APOLLONIO nel primo libro *Dei luoghi piani* e che con questo nome nuovamente ha considerato EULERO nel 1777 (*Nova acta petropolitana* 9, pag. 154), e dopo di lui MAGNUS e STEINER. EULERO (l. c.) nota appunto che per i centri di similitudine di due cerchi passano le tangenti comuni.

Ma il modo più comune di trattare il problema delle tangenti comuni a due cerchi, senza ricorrere alla teoria delle proporzioni, consiste nel costruire un cerchio concen-



trico all'uno di essi ed avente come raggio la somma o la differenza dei due raggi: con ciò il problema è ridotto a mandare per il centro dell'altro cerchio dato le tangenti ai due cerchi ausiliari costruiti, che riescono parallele alle rette richieste. Questa soluzione s'incontra, a quanto pare, per la prima volta nel *Lehrbuch der Geometrie* di LEHMUS, pubblicato a Berlino nel 1818 (I, § 228, pag. 128-129). Mentre CRELLE, nel 1826, dà un'altra costruzione coi raggi di similitudine.

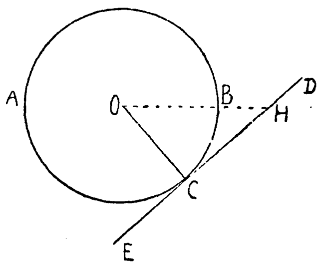
Dal punto di vista algebrico il problema delle tangenti comuni a due cerchi, come il problema duale dell'intersezione di due coniche dipende da un'equazione di quarto grado; ma, come la conoscenza di due tangenti comuni per due coniche permette di considerare in due modi le coniche stesse omologiche rispetto a questo centro, e quindi di ridurre l'equazione di quarto grado a due equazioni di secondo grado, così dualmente accade per due coniche aventi due punti comuni. In questa condizione si trovano precisamente due cerchi, in quanto passano per i punti ciclici del piano; perciò essi si corrispondono in due omotetie, i cui centri sono appunto i due centri di omotetia. D'altronde la riducibilità del problema di quarto grado a due problemi di secondo, appare anche subito dalla conoscenza di un lato del triangolo coniugato comune ai due cerchi, che è la congiungente i centri, loro comune asse di simmetria.

Noteremo infine che la ricerca delle tangenti comuni a due cerchi appartiene ai così detti « problemi di contatto » per i quali — e in particolare per la costruzione dei cerchi tangenti a tre cerchi dati — rimandiamo all'articolo di SABBATINI che apparirà nella nuova edizione delle *Questioni*.

18.

Se una retta è tangente a un cerchio e dal centro si conduce una retta fino al punto di contatto, tale retta è perpendicolare alla tangente.

Supponiamo infatti che la retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C e si trovi il centro O del cerchio ABC (prop. 1). Da O si conduca la retta OC: dico che la OC è perpendicolare alla DE.



Infatti, supponiamo che non sia e si conduca da O la perpendicolare OH alla DE. Poichè l'angolo OHC è retto sarà l'angolo OCH acuto (I, 17): e poichè ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore (I, 19), la OC è maggiore di OH. Ma OC è uguale a OB, onde OB è maggiore di OH, mentre sappiamo che è minore: ciò che è assurdo. Pertanto OH non è perpendicolare alla DE. Analogamente si può dimostrare che nessun'altra retta è ad essa perpendicolare, all'infuori della OC. Perciò la OC è perpendicolare alla DE.

Dunque se una retta è tangente a un cerchio ecc.

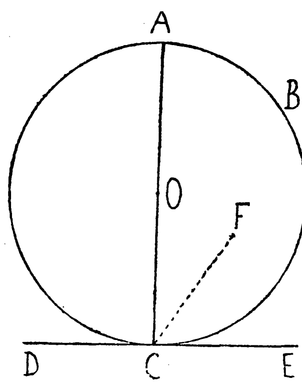
19.

Se una retta è tangente a un cerchio e dal punto di contatto si innalza la perpendicolare alla tangente, il centro del cerchio è posto sulla retta così condotta.

Infatti, supponiamo che la retta DE tocchi il cerchio ABC nel punto C e da C si conduca la perpendicolare CA alla DE. Dico che il centro del cerchio è posto sulla AC.

Infatti, supponiamo che non sia; sia F il centro e si conduca la CF.

Poichè la retta DE tocca il cerchio ABC e dal centro è stata condotta la retta FC al punto di contatto, la FC è perpendicolare alla DE (prop. 18). Pertanto l'angolo FCE è retto, onde l'angolo FCE è uguale a ACE, mentre è minore: ciò che è assurdo.



Pertanto F non è centro del cerchio ABC.

Analogamente si può dimostrare che nessun altro punto posto fuori della AC è centro del cerchio.

Dunque, se una retta è tangente a un cerchio e dal punto di contatto si innalza la perpendicolare alla tangente, il centro del cerchio è posto sulla retta così condotta.

Queste proposizioni sono completate dalla seguente che sembra appartenere a PIERRE DE LA RAMÉE (1569), critico severo degli *Elementi*: « La perpendicolare condotta dal centro su una tangente passa per il punto di contatto » (*Petri Rami Aritmeticae,* Libr. II, geom. libr. septem et viginti, Basilea. Cfr. Libr. XV, prop. 15, 3).

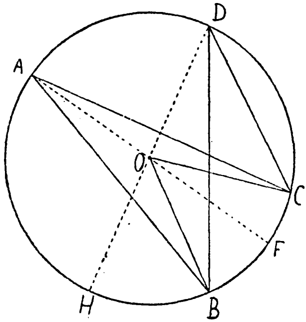
Il calcolo integrale conduce poi ad invertire la prop. 18 da un altro punto di vista, dimostrando che « le linee le cui tangenti tagliano ortogonalmente le rette per un punto, sono cerchi concentrici ».

20.

Nel cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, quando i due angoli comprendono il medesimo arco.

Sia dato il cerchio ABC e sia BOC l'angolo al centro, sia poi BAC l'angolo alla circonferenza e l'uno e l'altro comprendano il medesimo arco BC. Dico che l'angolo BOC è doppio dell'angolo BAC. Condotta la AO si prolunghi fino a F. Poichè OA è uguale a OB sarà l'angolo OAB uguale all'angolo OBA (I, 5), pertanto la somma dell'angolo OAB con l'angolo

OBA è uguale al doppio di OAB. Ma l'angolo BOF è uguale alla somma dell'angolo OAB con OB̂A



(I, 32), onde l'angolo BOF è doppio di OAB. Per la stessa ragione è FÔC uguale al doppio di OAC. Pertanto è BÔC uguale al doppio di BAC.

Similmente, si abbia un altro angolo BDC: condotta la DO si prolunghi fino a H. Analogamente si può dimostrare che è l'angolo HOC uguale al doppio di OD̂C, ma l'angolo HOB è uguale al doppio di OD̂B. Pertanto BÔC è uguale al doppio di BD̂C.

Dunque nel cerchio ecc.

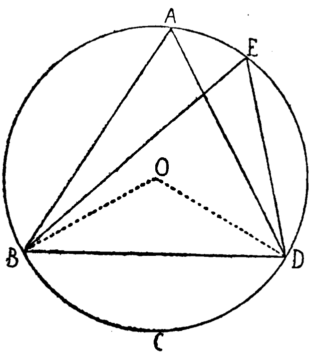
Questa proposizione e la seguente sono adoperate da Ippocrate di Chio (circa 440 a. C.) nel suo scritto sulle *Lunule*. Euclide si limita qui a considerare angoli al centro minori di due retti, mentre la considerazione dell'angolo generalizzato ricorre in Erone, il quale ne fa uso nella dimostrazione della prop. 22 (vedi nota).

21.

Nel cerchio angoli iscritti nel medesimo arco sono uguali.

Sia il cerchio ABCD e nel medesimo arco BAED siano inscritti gli angoli BAD, BED. Dico che è l'angolo BAD uguale all'angolo BED.

Si trovi infatti il centro O del cerchio (prop. 1) e si conducano le rette BO, OD. Poichè l'angolo BOD al centro e l'angolo BAD alla circonferenza comprendono il medesimo arco BCD sarà (prop. 20) l'angolo BOD uguale al doppio di BAD. Per la stessa ragione anche l'angolo BOD è uguale al doppio di BÊD, onde l'angolo BAD è uguale a BÊD.



Dunque nel cerchio angoli inscritti ecc.

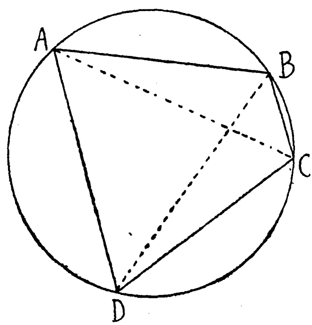
La proposizione inversa, cioè che « i punti d'un semipiano da cui si vede un dato segmento sotto un angolo dato, appartengono ad un arco di circolo », non è esplicitamente qui rilevata, mentre Clavio la enuncia come scolio della prop. 21. Del resto, questo scolio non fa che rendere esplicito ciò che Euclide doveva ritenere implicitamente contenuto nella prop. 23.

22.

Nei quadrilateri inscritti nei cerchi la somma di due angoli opposti è uguale a due angoli retti.

Sia dato il cerchio ABCD e in esso sia inscritto il quadrilatero ABCD. Dico che la somma di due angoli opposti di esso è uguale a due retti.

Si conducano le rette AC, BD. Poichè la somma dei tre angoli di ciascun triangolo è uguale a due retti (I, 32), nel triangolo ABC la somma dei tre angoli



CAB, ABC, BCA è uguale a due retti. Ma l'angolo CAB è uguale all'angolo BDC perchè sono inscritti nel medesimo arco BADC (prop. 21) e l'angolo ACB è uguale all'angolo ADB perchè sono inscritti nel medesimo arco BADC; onde l'angolo ADC è uguale alla somma di $B\hat{A}C$ con $A\hat{C}B$.

Si aggiunga l'angolo ABC. Allora la somma degli angoli ABC, BAC, ACB è uguale alla somma di $A\hat{B}C$ con $A\hat{D}C$. Ma la somma di $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ è uguale a due retti. Analogamente si dimostra che anche la somma di $B\hat{A}D$ più $D\hat{C}B$ è uguale a due retti.

Dunque nei quadrilateri inscritti nei cerchi la somma di due angoli opposti è uguale a due angoli retti.

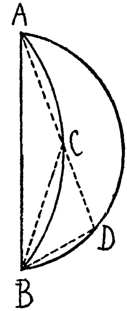
Anarizio offre un'altra dimostrazione di questo teorema, appartenente ad Erone, dove la prop. 20 viene applicata nel più largo senso, considerando angoli al centro convessi e concavi. In tal guisa, congiungendo il centro del cerchio con due vertici opposti, si ha che la somma di due angoli al centro (uguale a quattro retti) vale il doppio della somma dei due angoli opposti del quadrilatero, relativi ai rimanenti due vertici.

Ora importa rilevare che la prop. 22, costituisce un effettivo complemento della prop. 21; anzi i due teoremi si fondono in uno solo secondo la veduta moderna ispirata al principio di continuità. Si ha così la generazione del cerchio come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci di raggi direttamente congruenti: la quale si generalizza, poi, colla generazione proiettiva delle coniche (Steiner).

23.

Su una medesima retta non si possono costruire dalla medesima banda due archi di cerchi simili e disuguali.

Infatti, supponiamo che si possa: si costruiscano sulla retta AB dalla medesima parte due archi di cerchio simili e disuguali: siano gli archi ACB, ADB: si conducano le rette ACD, CB, DB. Poichè l'arco ACB è simile all'arco ADB e per definizione (def. 11) sono uguali quegli archi di cerchio che comprendono angoli uguali, sarà l'angolo ACB uguale all'angolo ADB. Ma $\widehat{ACB}$ è esterno rispetto all'angolo ADB, onde è assurdo che siano uguali (I, 16).



Dunque su una medesima retta ecc.

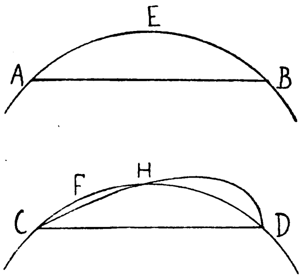
24.

Archi simili di cerchi costruiti su rette uguali sono uguali.

Infatti su le due rette uguali AB, CD siano costruiti due archi simili AEB, CFD: dico che è l'arco AEB uguale a $\overset{\frown}{CFD}$.

Infatti, applicato l'arco AEB sull'arco CFD e posto il punto A in C, e la retta AB sulla CD, anche il punto B cade in D perchè la AB è uguale alla CD.

Applicata poi la retta AB sulla CD, anche l'arco AEB si sovrappone all'arco CFD. Infatti se la AB coincide con CD e l'arco AEB non coincidesse con $\widehat{CFD}$, cadrebbe esternamente od interiormente ad esso, oppure in parte dentro e in parte fuori, come l'arco CHD; ma allora due cerchi verrebbero a intersecarsi in più di due punti, ciò che non può essere (prop. 10). Pertanto la retta AB non può essere coincidente con la CD se anche l'arco AEB non è coincidente con l'arco CFD. Dunque è coincidente ad esso ed eguale (I, *noz. com.* 8).



Dunque archi simili di cerchi costruiti su rette uguali sono uguali.

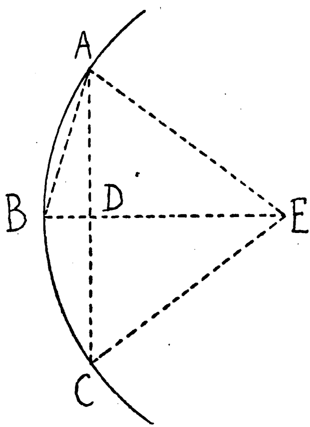
25.

Dato un arco di cerchio completare il cerchio di cui l'arco è parte.

Sia dato l'arco di cerchio ABC. Si deve dunque completare il cerchio di cui ABC è parte.

Si seghi la AC in due parti uguali nel punto D e da D si innalzi la perpendicolare DB alla AC e si conduca la AB. Allora l'angolo ABD o è maggiore dell'angolo BAD, o è uguale, o è minore.

Sia dapprima maggiore e sulla retta BA dal punto A di questa si costruisca l'angolo BAE uguale a $A\hat{B}D$ (I, 23) e si prolunghi la DB fino ad E, indi si conduca la EC. Poichè l'angolo ABE è uguale a $B\hat{A}E$, sarà anche EB uguale a EA (I, 6) e poichè AD

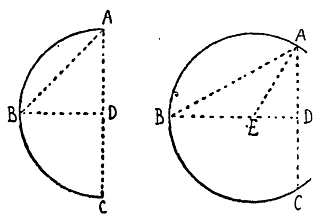


è uguale a DC, DE è comune ai due triangoli ADE, DCE, e l'angolo ADE è uguale a $C\hat{D}E$ perchè entrambi retti, sarà pure AE uguale a CE (I, 4). Ma si è dimostrato che AE è uguale a BE, onde anche BE è uguale a CE. Pertanto le tre rette EA, EB, EC sono uguali fra loro. Allora, descrivendo un cerchio di centro E e raggio una qualsivoglia delle tre rette

EA, EB, EC, tale cerchio passerà per i rimanenti punti dell'arco e l'arco rimarrà completato (prop. 9).

Dunque, dato un arco di cerchio resta completato il cerchio e appare che l'arco ABC in questo caso è minore di un semicerchio perchè il centro E è posto al di fuori di esso.

Analogamente, se l'angolo ABD è uguale a BÂD le tre rette DA, DB, DC sono tra loro uguali poichè



la AD è uguale a DB (I, 6) e la AD è uguale alla DC: allora D sarà il centro del cerchio completato e ABC è un semicerchio.

Se invece l'angolo ABD è minore di BÂD e sulla retta BA dal punto A di essa si costruisce un angolo uguale all'angolo ABD (I, 23) il centro cade sulla retta DB entro l'arco ABC e l'arco è maggiore di un semicerchio.

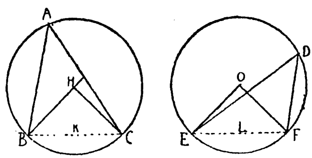
Dunque, dato un arco di cerchio resta completato il cerchio come si doveva.

26.

In cerchi uguali sono uguali gli archi che comprendono angoli uguali sia al centro, sia alla circonferenza.

Siano uguali i due cerchi ABC, DEF e in essi siano uguali gli angoli al centro BHC, EOF, indi siano uguali gli angoli alla circonferenza BAC, EDF. Dico che sono eguali gli archi BKC, ELF.

Si conducano infatti le rette BC, EF. E poichè sono uguali i cerchi ABC, DEF, saranno uguali anche i raggi. Allora le due rette BH, HC saranno uguali rispettivamente alle due rette EO, OF: l'an-



golo in H è uguale all'angolo in C, pertanto BC è uguale a EF (I, 4). E poichè l'angolo in A è uguale all'angolo in D, l'arco BAC è simile all'arco EDF (def. 11), ma tali archi sono costruiti su rette uguali e archi simili costruiti su rette uguali sono uguali (prop. 24) pertanto BAC è uguale alla EDF. Ma anche l'intero cerchio ABC è uguale all'intero cerchio

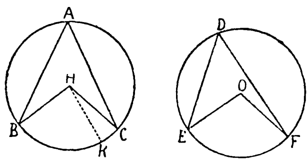
ELF perciò gli archi differenza BKC e ELF sono pure uguali.

Dunque in cerchi uguali sono uguali gli archi che comprendono angoli uguali sia al centro, sia alla circonferenza.

27.

In cerchi uguali sono uguali gli angoli posti in archi uguali, sia al centro sia alla circonferenza.

Infatti nei cerchi uguali ABC, DEF negli archi uguali BC, EF, siano posti gli angoli BHO, ECF



al centro e gli angoli BAC, EDF alla circonferenza. Dico che è l'angolo BHC uguale a EOF e l'angolo BAC uguale a EDF.

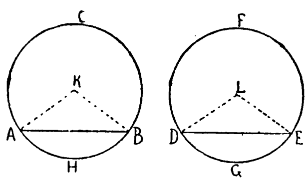
Infatti se l'angolo BHC è disuguale dall'angolo EOF uno dei due angoli è maggiore. Sia $B\hat{H}C$ maggiore e sulla retta BH dal punto H di essa si costruisca un angolo BHK uguale all'angolo EOF (I, 23). Ma ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali (prop. 26), dunque l'arco BK sarebbe uguale a BC, mentre sappiamo che è minore: ciò che è assurdo. Pertanto l'angolo BHC non è disuguale dall'angolo EOF, è dunque uguale. L'angolo in A è poi la metà dell'angolo BHC, l'angolo in D è la metà dell'angolo EOF (prop. 20): pertanto l'angolo in A è uguale all'angolo in D.

Dunque in cerchi uguali ecc.

28.

In cerchi uguali rette uguali tagliano archi uguali, cioè il maggiore uguale al maggiore ed il minore al minore.

Siano uguali i cerchi ABC, DEF e siano uguali le corde AB, DE che taglino gli archi ACB, DFE maggiori e gli archi AHB, DGE minori. Dico che è



l'arco ACB uguale a DFE e l'arco AHB uguale a DGE. Si trovino i centri dei cerchi, siano K e L (prop. 1) e si conducano le rette AK, KB, DL, LE. Poichè i cerchi sono uguali, anche i raggi sono uguali (def. 1). Pertanto le due rette AK, KB sono uguali alle due rette DL, LE, e AB è uguale a DE. Allora anche l'angolo AKB sarà uguale all'angolo DLE (I, 8). Ma angoli al centro uguali corrispondono ad archi uguali (prop. 26). Pertanto l'arco AHB è uguale a DGE. Ma anche l'intero cerchio ABC è uguale all'intero cerchio DEF. Perciò anche il rimanente arco ACB è uguale al rimanente arco DFE.

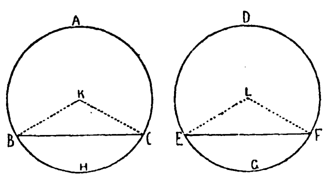
Dunque in uguali cerchi ecc.

29.

In cerchi uguali ad archi uguali sottendono corde uguali.

Siano uguali i cerchi ABC, DEF e in essi si distacchino gli archi uguali BHC, EGF e si conducano le rette BC, EF. Dico che è BC uguale a EF.

Si trovino infatti i centri dei cerchi: siano K, L (prop. 1) e si conducano le BK, KC, EL, LF. Poichè



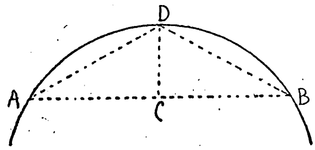
l'arco BHG è uguale a $\widehat{ECF}$, sarà anche l'angolo BKC uguale all'angolo ELF (prop. 27). E poichè i cerchi ABC, DEF sono uguali, anche i raggi sono uguali (def. 1). Pertanto le due rette BK, KC sono uguali alle due rette EL, LF, ma comprendono anche angoli uguali, perciò BC è uguale a EF (I, 4).

Dunque in cerchi uguali ecc.

30.

Dato un arco dividerlo in due parti uguali.

Sia dato l'arco ADB: dobbiamo dunque dividere l'arco ADB in due parti uguali. Si conduca la retta AB e si seghi in due parti uguali in C (I, 10): dal punto C si conduca la retta CD perpendicolare alla AB e si tirino le rette AD, DB. Poichè AC è uguale a



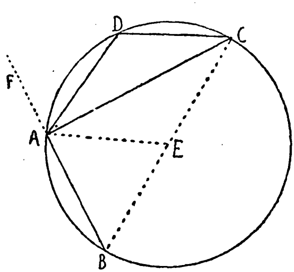
CB, il lato CD è comune ai due triangoli ACD, CDB, e inoltre l'angolo ACD è uguale a $B\hat{C}D$ (perchè entrambi retti), sarà anche AD uguale a DB (I, 4). Ma rette uguali tagliano archi uguali, cioè il maggiore uguale al maggiore e il minore al minore (prop. 28). Gli archi AD, DB sono ciascuno minore di un semicerchio, pertanto l'arco AD è uguale all'arco DB.

Dunque, dato un arco lo abbiamo diviso in due parti uguali, come dovevasi.

31.

Nel cerchio l'angolo inscritto in una semicirconferenza è retto, quello poi che è inscritto in un arco maggiore è minore di un retto, quello che è inscritto in un arco minore è maggiore di un retto e inoltre l'angolo formato dall'arco maggiore con la corda è maggiore di un retto, l'angolo formato dall'arco minore è minore di un retto.

Sia dato il cerchio ABCD e sia BC un diametro: sia poi E il centro e si conducano le BA, AC, AD, DC.



Dico che l'angolo BAC inscritto nel semicerchio BAC è retto, l'angolo ABC, che è inscritto in un arco maggiore di un semicerchio, è minore di un retto e l'angolo ADC che è inscritto in un arco minore di un semicerchio è maggiore di un retto.

Si conduca la AE e si prolunghi la BA fino in F. Poichè BE è uguale a AE sarà anche l'angolo ABE uguale a $B\hat{A}E$ (I, 5). Inoltre, poichè CE è uguale a EA sarà anche l'angolo ACE uguale a CAE. L'angolo BAC è uguale alla somma di $A\hat{B}C$ con $A\hat{C}B$.

Ma anche l'angolo FAC esterno al triangolo ABC è uguale alla somma di $A\hat{B}C$ con $A\hat{C}B$ (I, 32), pertanto l'angolo BAC è uguale a $F\hat{A}C$. Perciò sono entrambi retti (I, def. 10).

Dunque l'angolo BAC inscritto in una semicirconferenza è retto.

E poichè la somma dei due angoli ABC, BAC nel triangolo ABC è minore di due retti (I, 17) e l'angolo BAC è retto, l'angolo ABC sarà minore di un retto; ed è inscritto nell'arco ABC maggiore di un semicerchio.

Inoltre, poichè nel circolo è inscritto il quadrilatero ABCD e nei quadrilateri inscritti nei cerchi la somma di due angoli opposti è uguale a due retti (prop. 22), e l'angolo ABC è minore di un retto, sarà l'altro angolo ADC maggiore di un retto: ed è inscritto nell'arco ADC minore di un semicerchio.

Dico anche che l'angolo compreso tra l'arco ABC [maggiore di un semicerchio] e la retta AC è maggiore di un retto, l'angolo invece compreso fra l'arco ADC [minore di un semicerchio] e la retta AC è minore di un retto. E ciò appare subito manifesto. Infatti, poichè l'angolo formato dalle rette BA, AC è retto, l'angolo formato dall'arco ABC e dalla retta AC è maggiore di un retto. Similmente, poichè l'angolo formato dalle rette AC, AF è retto, l'angolo formato dalla retta CA e dall'arco ADC è minore di un retto.

Dunque nel cerchio l'angolo ecc. c. d. d.

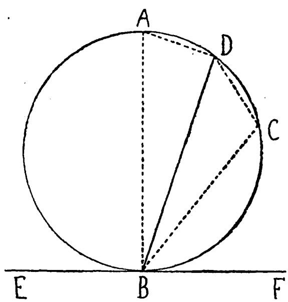
Questo teorema secondo PAMFILA risalirebbe a TALETE DI MILETO. Esso trova una generalizzazione proiettiva nel teorema di STAUDT (1847): « Se un triangolo è iscritto in una conica, una retta coniugata ad un lato sega gli altri due in punti coniugati ».

32.

Se una retta tocca un cerchio ed al punto di contatto si conduce una retta che seghi il cerchio, gli angoli che questa forma con la tangente sono uguali agli angoli inscritti negli archi opposti.

Infatti la retta EF tocchi il cerchio ABCD nel punto B e da B si conduca la retta BD che seghi il cerchio ABCD. Dico che gli angoli che BD forma con la tangente EF sono uguali agli angoli inscritti negli archi opposti, cioè $F\hat{B}D$ uguale all'angolo inscritto nell'arco BAD e l'angolo EBD uguale all'angolo inscritto nell'arco DCB.

Si conduca infatti da B la perpendicolare BA alla EF: nell'arco BD si prenda un punto qualsivoglia e si conducano le AD, DC, CB. Poichè la retta EF tocca il cerchio ABCD in B e dal punto di contatto abbiamo condotto la perpendicolare BA alla tangente, sulla BA sarà il centro del cerchio ABCD (prop. 19). Pertanto BA è diametro del cerchio



ABCD, onde l'angolo ADB che è inscritto in un semicerchio è retto (prop. 31); dunque la somma dei rimanenti $B\hat{A}D$, $A\hat{B}D$ è uguale a un solo retto (I, 32). Ma anche l'angolo ABF è retto, pertanto $A\hat{B}F$ è uguale alla somma di $B\hat{A}D$ con $A\hat{B}D$. Si sottragga dai due membri l'angolo ABD che è comune e avremo l'angolo DBF uguale a $B\hat{A}D$ che è inscritto nell'arco opposto. E poichè il quadrilatero ABCD è inscritto nel cerchio, la somma di due angoli opposti in esso è uguale a due retti (prop. 22). Ma anche la somma di $D\hat{B}F$ con DBE è uguale a due retti (I, 13), onde la somma $D\hat{B}F$ con $D\hat{B}E$ è uguale a quella di $B\hat{A}D$ con $B\hat{C}D$.

Ma abbiamo già dimostrato che è l'angolo BAD uguale a $D\hat{B}F$, pertanto l'angolo DBE è uguale a $D\hat{C}B$ che è inscritto nell'arco DCB opposto.

Dunque se una retta tocca un cerchio e dal punto di contatto ecc. c. d. d.

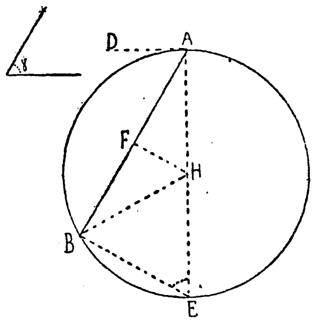
Questa proposizione si collega per continuità alle prop. 21, 22.

33.

Su una data retta costruire un arco di cerchio capace di un angolo dato.

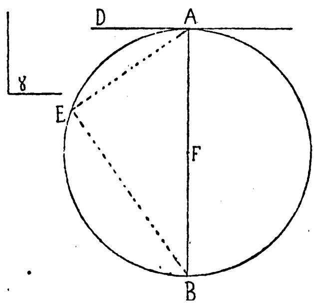
Sia data la retta AB e dato un angolo γ. Si deve dunque sulla retta data AB costruire un arco di cerchio capace dell'angolo γ.

L'angolo γ o è acuto, o è retto, o è ottuso. Sia dapprima acuto, come nella prima figura, e sulla retta AB dal punto A si costruisca un angolo BAD uguale all'angolo γ (I, 23). Pertanto BAD è acuto. Si conduca la perpendicolare AE alla DA e si divida AB in due parti uguali nel punto F, indi da F si conduca la retta FH perpendicolare alla AB e si congiunga H con B. Poichè AF è uguale a FB, FH è comune ai due triangoli AFH, FHB, e l'angolo $A\hat{F}H$ è uguale a $B\hat{F}H$, sarà pure AH uguale a BH (I, 4). Perciò, descritto un cerchio di centro H e raggio HA, esso passa anche per B. Sia ABE tale cerchio



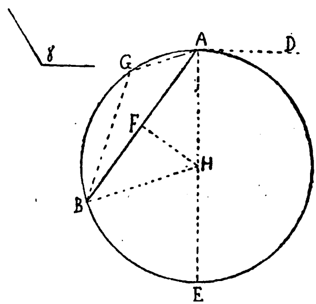
e si conduca la retta BE. Poichè dal punto A estremo del diametro AE è stata condotta la perpendicolare AD alla AE, la retta AD tocca il cerchio ABE (prop. 16, *coroll.*). E poichè la retta AD tocca il cerchio ABE e dal punto A di contatto è stata prolungata la retta AB nel cerchio ABE, sarà l'angolo $D\hat{A}B$ uguale a $A\hat{E}B$ che è posto nell'arco opposto (prop. 32). Ma l'angolo OAB è eguale all'angolo γ, pertanto l'angolo γ è eguale all'angolo AEB. Dunque, sulla retta data AB abbiamo descritto un arco di cerchio AEB capace di un angolo AEB uguale a un angolo dato γ.

Sia ora retto l'angolo γ. E nuovamente ci si proponga di descrivere su una retta data AB un arco di cerchio capace di un angolo retto eguale all'angolo γ. Si costruisca similmente l'angolo BAD eguale all'angolo retto γ, come nella seconda figura, e si divida AB in due parti uguali nel punto F; indi con centro F e raggio una qualunque delle due rette FA, FB si descriva il cerchio AEB. Pertanto la retta



AD tocca il cerchio ABE perchè l'angolo in A è retto (prop. 16, *coroll.*), e l'angolo BAD è uguale all'angolo inscritto nell'arco AEB poichè l'uno è retto e l'altro è pure retto perchè inscritto in una semicirconferenza (prop. 31). Ma l'angolo BAD è anche eguale all'angolo γ onde anche l'angolo inscritto nell'arco AEB è uguale all'angolo γ. Dunque nuovamente sulla retta data AB abbiamo descritto un arco di cerchio AEB capace di un angolo eguale all'angolo γ.

Sia ora ottuso l'angolo γ, e sulla retta AB dal punto A di essa si costruisca l'angolo BAD uguale al dato, come nella terza figura, e si conduca la retta AE perpendicolare alla AD, indi si divida la retta AB



in due parti uguali nel punto F, poi si conduca la retta FH perpendicolare alla AB e si congiunga H con B. Poichè AF è uguale a FB, FH è comune ai due triangoli AFH, FHB e l'angolo AFH è uguale a BFH anche AH sarà uguale a BH (I, 4).

Pertanto il cerchio descritto con centro H e raggio AH viene a passare anche per B. Sia AEB tale cerchio. Poichè dal punto A estremo del diametro AE è stata condotta la perpendicolare AD alla AE la retta AD tocca il cerchio AEB (prop. 16, *coroll.*). E poichè dal punto A di contatto è stata prolungata la AB l'angolo BAD è uguale all'angolo ACB costruito nell'arco opposto (prop. 32). Ma l'angolo

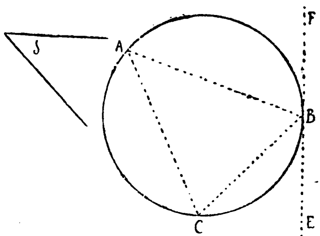
BAD è eguale all'angolo γ, onde anche l'angolo inscritto nell'arco ACB è uguale all'angolo γ.

Dunque sulla retta data AB abbiamo costruito un arco di cerchio ACB capace di un angolo eguale all'angolo γ, come dovevasi.

34.

Da un cerchio dato sottrarre un arco capace di un angolo rettilineo eguale a un dato.

Sia dato il cerchio ABC e sia dato l'angolo rettilineo δ. Dobbiamo dunque sottrarre dal cerchio ABC un arco di cerchio capace di un angolo rettilineo eguale all'angolo δ. Si conduca la retta EF



tangente al cerchio ABC nel punto B e sulla retta FB dal punto B di esso si costruisca l'angolo FBC eguale all'angolo δ (I, 23).

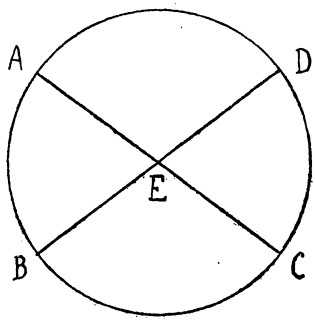
Poichè la retta EF tocca il cerchio ABC e dal punto B di contatto è stata prolungata la BC, l'angolo FBC è eguale all'angolo BAC inscritto nell'arco opposto. Ma l'angolo FBC è uguale all'angolo δ. Perciò anche l'angolo inscritto nell'arco BAC è eguale all'angolo in δ.

Dunque dal cerchio dato è stato sottratto l'arco BAC capace di un angolo rettilineo eguale all'angolo dato δ, come dovevasi.

35.

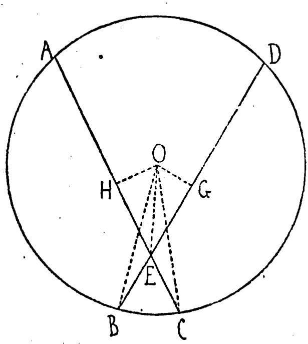
Se in un cerchio due corde si segano, il rettangolo formato dalle parti di una di esse è uguale al rettangolo formato dalle parti dell'altra.

Infatti nel cerchio ABCD le due corde AC, BD si intersechino nel punto E. Dico che il rettangolo



formato da AE ed EC è uguale al rettangolo formato da DE ed EB. Infatti se AC, BD sono condotte per il centro in modo che E sia centro del cerchio ABCD è chiaro che il rettangolo di AE ed EC è uguale al rettangolo di DE ed EB, essendo uguali AE, EC, DE, EB.

Non siano dunque AC, DB condotte per il centro. Si trovi il centro O (prop. 1) del cerchio ABCD: da O si conducano le perpendicolari OH, OG alle corde AC, DB e si tirino le OB, OC, OE. Poichè la OH condotta per il centro è perpendicolare alla corda



AC non condotta per il centro, essa la divide in due parti uguali (prop. 3). Pertanto AH è uguale a HC. E poichè la retta AC è divisa in due parti uguali in H e in parti disuguali in E, la somma del rettangolo di AE, EC con il quadrato di HE sarà uguale al quadrato di HC (II, 5).

Si aggiunga il quadrato di HO. Pertanto la somma del rettangolo AE, EC con il quadrato di HE ed il quadrato di HO è uguale alla somma del quadrato di CH con il quadrato di HO.

Invero il quadrato di OE è uguale alla somma del quadrato di EH con il quadrato di HO e il quadrato di OC è uguale alla somma del quadrato di CH con il quadrato di HO (I, 47); pertanto la somma del rettangolo di AE ed EC con il quadrato di OE è uguale al quadrato di OC. Ma OC è uguale a OB, onde la somma del rettangolo di AE, EC con il quadrato di EO è uguale al quadrato di OB. Per la medesima ragione la somma del rettangolo di DE, EB con il quadrato di OE sarà uguale a quadrato di OB. Ma abbiamo dimostrato che anche il rettangolo di AE, EC insieme con il quadrato di OE è uguale al quadrato di OB. Pertanto la somma del rettangolo di AE, EC con il quadrato di OE è uguale alla somma del rettangolo di DE, EB con il quadrato di OE. Si sottragga il quadrato di OE, che è comune. Avremo che il rettangolo formato da AE, EC è uguale al rettangolo formato da DE, EB.

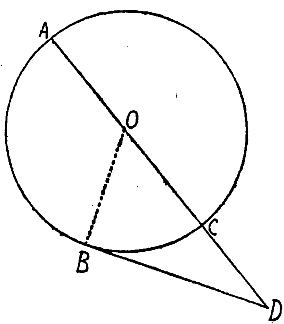
Dunque se in un cerchio ecc.

Campano, seguìto da Simson, aggiunge due casi intermedi in cui: 1º una corda passa per il centro e biseca l'altra (perpendicolarmente), e 2° una corda passa per il centro e taglia l'altra senza bisecarla e quindi non perpendicolarmente.

36.

Se fuori di un cerchio si prende un punto e da esso due rette che incontrino la circonferenza di cui l'una intersechi il cerchio e l'altra sia tangente, il rettangolo formato dall'intera retta secante e dalla parte di questa esterna al cerchio compresa fra il punto e la parte convessa della circonferenza, è uguale al quadrato della retta tangente.

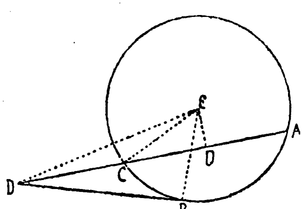
Infatti fuori del cerchio ABC si prenda il punto D e da D le due rette DCA, DB, delle quali DCA intersechi il cerchio e BD sia tangente. Dico che è



il rettangolo di AD e DC uguale al quadrato di DB.

La retta DCA o è condotta per il centro o non lo è. Sia dapprima condotta per il centro: il centro del cerchio ABC sia O e si conduca la OB. Pertanto l'angolo OBD è retto (prop. 18). E poichè la retta AC è divisa in O in due parti uguali e ad essa è aggiunta la CD, la somma del il rettangolo di AD, DC con il quadrato di OC sarà uguale al quadrato di OD (II, 6). Ma OC è uguale a OB. Perciò il rettangolo di AD e DC, insieme con il quadrato di OB, è uguale al quadrato di OD, e inoltre il quadrato di OD è uguale alla somma dei quadrati di OB e BD (I, 47). Pertanto il rettangolo di AD e DC, insieme con il quadrato di OB, è uguale alla somma del quadrato di OB con il quadrato di BD. Si sottragga il quadrato di OB che è comune; si ha che il rettangolo di AD e DC è uguale al quadrato di DB.

Ora non sia la retta DCA condotta per il centro del cerchio ABC: si trovi il centro E e da E si conduca



la retta EO perpendicolare ad AC e si conducano le rette EB, EC, ED. Pertanto l'angolo EBD è retto (prop. 18). E poichè la retta EO condotta per il centro è perpendicolare ad AC non condotta per il centro, essa la divide in due parti uguali (prop. 3). Perciò AO è uguale ad OC e poichè la retta AC è divisa nel punto O in due parti uguali e ad essa è aggiunta la CD la somma del rettangolo AD, DC con il quadrato di OC sarà uguale al quadrato di OD (II, 6). Si aggiunga il quadrato di OE, allora il rettangolo di AD e DC, insieme con il quadrato di OC, ed il quadrato di OE è uguale alla somma dei quadrati di OD e OE. Ma il quadrato di EC è uguale alla somma dei quadrati di OC e OE (I, 47), perchè l'angolo EOC è retto; e il quadrato di OD è uguale alla somma dei quadrati di DO e OE (*id.*). Pertanto il rettangolo di AD e DC, insieme con il quadrato di EC, è uguale al quadrato di ED. Ma EC è uguale a EB, perciò il rettangolo di AD e DC, insieme con il quadrato di EB, è uguale alla somma dei quadrati di EB e BD. Si sottragga il quadrato di EB che è comune e si ha che il rettangolo di AD e DC è uguale al quadrato di DB.

Dunque se fuori di un cerchio si prende ecc.

Le prop. 35 e 36 si riuniscono in una sola secondo una veduta di continuità. Esse conducono a introdurre la *potenza* di un punto rispetto ad un cerchio, e quindi a considerare il luogo dei punti di uguale potenza rispetto a due circoli che è la retta denominata *asse radicale* (GAULTIER-LA TOUR, 1813), e che — nel caso di cerchi secantisi — non è altro che la loro corda comune. Che questa retta sia il luogo dei punti da cui si possono condurre tangenti uguali ai due cerchi, pare fosse noto già ai Geometri arabi intorno al 1000 dell'e. v.

Ma la considerazione dell'asse radicale è specialmente importante per una definizione geometrica dei *fasci* di cerchi, che comprenda anche il caso in cui i punti base diventino immaginari. E così poi dai fasci si passa alle *reti*, mediante il teorema del centro radicale di tre cerchi, che appartiene a CARNOT (*Géométrie de position*). Appunto questo studio dei sistemi di cerchi, proseguito nella scuola francese ai principii del secolo scorso (MONGE, CARNOT, PONCELET, BRIANCHON...) ha un significato storico importante per riguardo allo sviluppo della teoria geometrica degli immaginari, che PONCELET riusciva a formulare nel suo principio di continuità. Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni* (L. II § 38 e segg., vol. II, pag. 235), e gli articoli di BOMPIANI e SABBATINI che figureranno nei volumi II e III della nuova edizione delle *Questioni*.

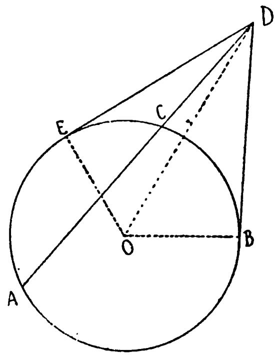
37.

Se fuori di un cerchio si prende un punto e da esso si tirano al cerchio due rette di cui l'una seghi il cerchio e l'altra termini alla circonferenza, e se il rettangolo formato dall'intera retta secante e dalla parte esterna di essa compresa fra il punto e la parte convessa della circonferenza è uguale al quadrato della retta che termina alla circonferenza, questa è tangente al cerchio.

Infatti fuori del cerchio ABC si prenda il punto D e da D si tirino due rette DCA, DB fino all'incontro col cerchio, di cui DCA intersechi il cerchio e DB termini alla circonferenza, e sia il rettangolo di AD e DC uguale al quadrato di DB. Dico che la retta DB è tangente al cerchio ABC.

Si conduca infatti la retta DE tangente al cerchio ABC (prop. 17): si trovi il centro del cerchio ABC, sia O, e si conducano le rette OE, OB, OD. Pertanto l'angolo OED è retto (prop. 18) e poichè DE tocca il cerchio ABC e la DCA lo sega, sarà il rettangolo di AD e DC uguale al quadrato di DE (prop. 36). Ma era pure il rettangolo di AD e DC uguale al quadrato di DB. Pertanto il quadrato DE è uguale al quadrato di DB; perciò

DE è uguale a DB. Ma anche OE è uguale a OB. Pertanto nei triangoli DEO, DBO le due rette DE, EO sono eguali alle DB, BO e la OD è comune, perciò l'angolo DEO è uguale a $D\hat{B}O$ (I, 8). Ma $D\hat{E}O$ è retto, onde anche $D\hat{B}O$ sarà retto, e la OB prolungata è diametro del cerchio: ma la retta condotta in un estremo del diametro perpendicolare ad esso è tangente



(prop. 16, *coroll.*). Pertanto DB è tangente al cerchio ABC. Similmente si dimostrerebbe anche se il centro cadesse sulla retta AC.

Dunque, se fuori di un cerchio si prende un punto e da esso si tirano due rette al cerchio di cui l'una sega il cerchio e l'altra termina alla circonferenza e se il rettangolo formato dall'intera retta secante e dalla parte esterna di essa compresa tra il punto e la parte convessa della circonferenza è uguale al quadrato della retta che termina alla circonferenza, questa è tangente al cerchio. c. d. d.

LIBRO QUARTO

PER CURA DI

AMEDEO AGOSTINI

Termini.

1. Una figura rettilinea si dice inscritta in un'altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura inscritta ha il vertice su ciascun lato della figura nella quale si inscrive.

2. Similmente una figura si dice circoscritta ad un'altra, quando ciascun lato della circoscritta passa per il vertice di ciascun angolo di quella a cui si circoscrive.

3. Una figura rettilinea si dice inscritta in un cerchio, quando ciascun angolo di essa ha il vertice sulla circonferenza del cerchio.

4. Una figura rettilinea si dice circoscritta ad un cerchio, quando ciascun lato di essa tocca la circonferenza del cerchio.

5. Similmente si dice che il cerchio è inscritto in una figura, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun lato di questa.

6. Un cerchio si dice circoscritto ad una figura, quando la sua circonferenza passa per il vertice di ciascun angolo di essa.

7. Si dice che una retta è adattata in un cerchio, quando i suoi estremi stanno sulla circonferenza del cerchio.

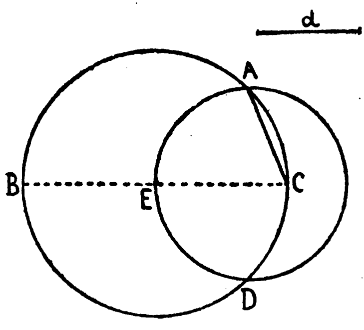
Proposizioni.

1.

Adattare in un dato cerchio una retta uguale ad una retta data, non maggiore del diametro del cerchio.[1]

Sia ABC il cerchio dato e *d* la retta data, non maggiore del diametro del cerchio: occorre, dunque, adattare nel cerchio ABC una corda uguale alla retta *d*.

Si conduca il diametro BC del cerchio ABC. Se BC è uguale a *d* è già fatto ciò che si richiede, poichè nel cerchio ABC è adattata una corda BC uguale alla retta *d*.



Se BC è maggiore di *d*, si ponga CE uguale a *d* e, con centro in C e raggio CE, si descriva il cerchio EAD e si conduca la CA.

---

(1) In EUCLIDE non è usata la parola « corda », terminologia introdotta più tardi (cfr. III): egli parla di retta (segmento) adattata in un cerchio.

Poichè C è il centro del cerchio EAD, sarà CA uguale a CE; ma CE è uguale a *d*, perciò anche *d* e CA sono uguali.

Dunque nel dato cerchio ABC si è adattata una corda CA uguale alla retta *d* data, c. d. f.

Il problema risolto da Euclide — costituente un lemma per le costruzioni relative al pentagono — appartiene a quel tipo di problemi di inserzione di cui ci fornisce un primo esempio Ippocrate di Chio nel quesito: *dato un semicerchio e la perpendicolare ad un raggio qualunque nel suo punto medio, condurre per l'estremo di questo raggio una corda tale che la parte intercetta tra la circonferenza e la perpendicolare sia di data lunghezza.* Archimede, nel suo trattato sulle spirali, fa pure uso di inserzioni mediante rette e cerchi, ed Apollonio scrisse su tale argomento i due libri περὶ νεύσεων che sono andati perduti (1).

Il problema posto da Euclide, per la scelta arbitraria del diametro AC, ammette infinite soluzioni, che si riducono a due qualora si stabilisca che la corda debba avere un estremo in un punto dato, C, della circonferenza. Tale caso particolare — benchè si trovi accennato solo da qualche commentatore medioevale come Anarizio (2) — doveva essere certamente noto, per la semplicità della

(1) Cfr. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, 1914, pp. 90, 312, 396.

(2) Anaritii... *commentarii*, suppl. a *Euclidis opera omnia*, Lipsia, 1899, pag. 139.

sua risoluzione, ad EUCLIDE stesso e anche a geometri posteriori come APOLLONIO e PAPPO, i quali trattarono casi più difficili di questo problema.

Spetta ad APOLLONIO di aver risolto, nell'opera ricordata, il problema, riportato poi da PAPPO, *condurre in un cerchio di raggio* r *una corda di lunghezza* $2a$, *minore del diametro, e passante per un punto dato*. Esso è risolto (PAPPO, *Collectiones*, VII), adattando al cerchio dato una corda qualunque di lunghezza uguale alla richiesta e tracciando quindi il cerchio concentrico al dato tangente alla corda: le tangenti a tale cerchio, che escono dal punto dato, risolveranno il quesito.

Tale problema ammette due soluzioni se la distanza d del punto dato dal centro del cerchio è maggiore di $\sqrt{r^2-a^2}$, una sola se $d = \sqrt{r^2-a^2}$, nessuna se $d < \sqrt{r^2-a^2}$, ossia, se il punto per cui deve passare la corda è interno al cerchio dato, alla condizione $2a < 2r$ va aggiunta l'altra $a^2 \geq r^2 - d^2$.

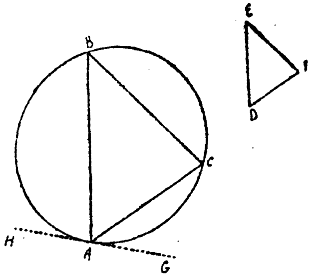
Il problema: *condurre in un cerchio dato una corda di data lunghezza, parallela ad una direzione data*, è risolto da PAPPO (*Coll.*, III) conducendo il diametro del cerchio parallelo alla direzione data e prendendo lungo esso, nei due sensi a partire dal centro, un segmento uguale alla metà del segmento dato: le perpendicolari al diametro condotte dagli estremi determinano sul cerchio gli estremi delle due corde che risolvono la questione. Tale costruzione è poi riportata dal COMMANDINO e quindi dal CLAVIO, a complemento della proposizione euclidea.

2.

Inscrivere in un dato cerchio un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

Sia ABC il cerchio dato e DEF il triangolo pure dato: occorre inscrivere nel cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Si conduca HG tangente in A al cerchio ABC (III, 17); colla AG si costruisca in A l'angolo GAC uguale all'angolo DEF e colla AH, in A, l'angolo HAB uguale all'angolo DFE (I, 23) e si conduca la BC.



Poichè il cerchio ABC è tangente alla retta HG e dal punto A di contatto si è condotta nel cerchio la retta AC, sarà $G\hat{A}C$ uguale all'angolo che è nell'altro segmento del cerchio, cioè ad $A\hat{B}C$ (III, 32). Ma $G\hat{A}C$ è uguale a $D\hat{E}F$ e perciò anche $A\hat{B}C$ è uguale all'angolo DEF. Per la stessa ragione è anche $A\hat{C}B$ uguale a $D\hat{F}E$ e quindi il rimanente $B\hat{A}C$ è uguale al rimanente $E\hat{D}F$ (I, 32). Il triangolo ABC ha quindi gli angoli eguali a quelli del triangolo DEF ed è inscritto nel cerchio ABC.

Dunque nel cerchio dato si è inscritto un triangolo equiangolo al triangolo dato, c. d. f.

Anche questo problema ammette, per la scelta arbitraria del vertice A, infinite soluzioni. Ma, fissato che sia il punto A sulla circonferenza, si hanno sei soluzioni diverse, poichè ciascuno degli angoli del triangolo dato può porsi in A, mentre gli adiacenti si possono scambiare tra loro. È evidente, però, che le sei soluzioni differiscono solo per la varia disposizione del triangolo rispetto al cerchio e non per la lunghezza dei lati.

Sapendosi già, per la (I, 1), costruire un triangolo equilatero, si potrà, come caso particolare, inscrivere nel cerchio un triangolo equilatero, ciò che troverà applicazione in IV, 16: ma della costruzione di tale poligono non è fatta parola da Euclide, perchè essa rientra appunto come caso particolare nelle costruzioni relative a triangoli qualunque.

Il Borelli, per risolvere il problema di questa proposizione, ricorre alla 34ª del III e costruisce nel cerchio gli archi ACB, CAB rispettivamente capaci degli angoli in F e D; inscrive invece il triangolo equilatero dividendo l'angolo al centro in tre parti eguali.

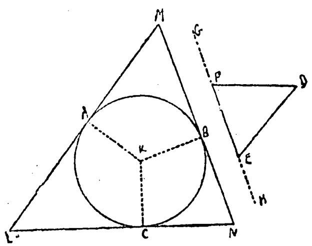
3.

Circoscrivere ad un dato cerchio un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

Sia ABC il cerchio dato e DEF il triangolo dato: bisogna dunque circoscrivere al cerchio ABC un triangolo equiangolo al triangolo DEF.

Si prolunghi EF da ambo le parti fino ai punti H, G e, chiamando K il centro del cerchio ABC, si conduca una retta qualunque KB colla quale, in K, si formi l'angolo BKA uguale a $D\hat{E}H$ e l'angolo BKC uguale a $D\hat{F}G$ (I, 23). Pei punti A, B, C si conducano quindi le tangenti LAM, MBN, NCL al cerchio ABC (III, 17).

Poichè LM, MN, NL sono tangenti al cerchio ABC nei punti A, B, C e dal centro K si sono condotte ai punti A, B, C le KA, KB, KC, gli angoli nei punti A, B, C sono retti (III, 18). Siccome la somma dei quattro angoli del quadrilatero AMBK è uguale a quattro retti, potendosi dividere AMBK in due triangoli (cfr. I, 32), in cui gli angoli KAM e KBM sono retti, i rimanenti $A\hat{K}B$ e $A\hat{M}B$, presi insieme, sono uguali a due retti. Ma anche $D\hat{E}H$ e $D\hat{E}F$ sono uguali a due retti (I, 13), quindi la somma di $A\hat{K}B$ con $A\hat{M}B$ è uguale alla somma di $D\hat{E}H$ con $D\hat{E}F$; ma $A\hat{K}B$ è uguale a $D\hat{E}H$ e, in conseguenza, $A\hat{M}B$ è uguale a $D\hat{E}F$.



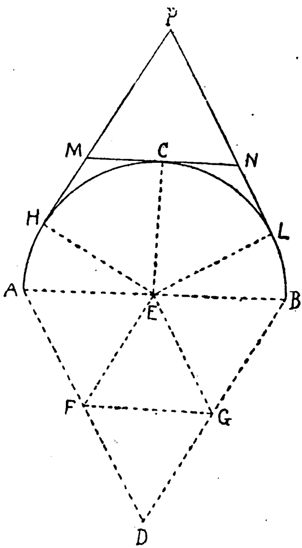
In modo analogo dimostreremo che $L\hat{N}M$ è uguale a $D\hat{F}E$ e perciò anche $M\hat{L}N$ e $E\hat{D}F$ sono uguali. Il triangolo LMN è quindi equiangolo al triangolo DEF ed è circoscritto al cerchio ABC.

Dunque si è circoscritto al cerchio dato un triangolo equiangolo al triangolo dato, c. d. f.

Si può osservare che Euclide tralascia di dimostrare che le tre tangenti formano un triangolo; ciò fu notato da ANARIZIO, il quale si preoccupò di mostrare che KC non può riuscire per diritto tanto a KA che a KB e tanto meno cadere entro l'angolo AKB = DEH. E che ciò sia, si deduce facilmente dal fatto che $A\hat{K}B$, $B\hat{K}C$ sono minori di π per costruzione, essendo essi i supplementi di due angoli del triangolo dato e — poichè gli angoli intorno a K sono uguali a quattro retti — dal fatto che $A\hat{K}C$ è uguale all'angolo supplementare di $F\hat{D}E$ e quindi anch'esso minore di due retti.

Tanto PELETIER che BORELLI risolvono la questione di questa proposizione inscrivendo dapprima nel cerchio un triangolo equiangolo al dato e tracciando poscia le tangenti al cerchio parallele ai lati del triangolo inscritto. Bisogna osservare, però, che tale modo di risolvere il problema — una volta tracciato il triangolo inscritto — dà luogo a otto triangoli, poichè si possono condurre due tangenti al cerchio parallele a ciascuno dei lati del triangolo: di questi triangoli due risolvono il problema avendo il cerchio come cerchio inscritto, mentre pei rimanenti il cerchio è ex-inscritto.

Che il problema potesse dar luogo a questo ultimo genere di soluzioni, doveva essere stato osservato anche anticamente e ce ne fa fede uno scolio che tratta una questione congenere. Infatti l'antico scoliasta — dopo



avere notato giustamente che in un semicerchio dato si può inscrivere un triangolo equilatero ma non un quadrato, e neppure uno degli altri poligoni regolari — costruisce il triangolo equilatero che ha il semicerchio dato ex-inscritto, nel modo seguente ([1]). Considerato il triangolo equilatero ADB costruito sul diametro del semicerchio, costruiamo il triangolo EFG conducendo dal centro del cerchio le parallele ai lati del triangolo ADB; anche EFG risulterà equilatero. Conduciamo allora per il centro le perpendicolari EH, EC, EL uscenti dal centro ai lati del triangolo EFG: le tangenti al cerchio, nei punti in cui le perpendicolari incontrano il semicerchio dato, verranno a costituire il triangolo MNP che sarà evidentemente equilatero ed avrà il semicerchio come ex-inscritto.

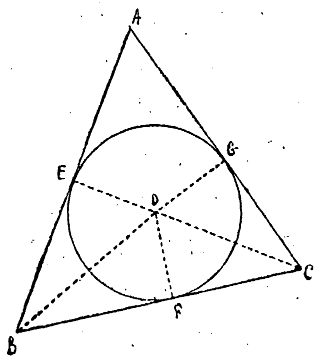
([1]) EUCLIDIS *Opera* (ed. Heiberg), vol. V, pag. 276-277, scolio II. L'editore attribuisce tale scolio alla prop. 2ª, ma poichè con evidenza si tratta di circoscrizione e non già di inscrizione, esso è da assegnarsi alla 3ª prop. Il testo dell'ultima parte dello scolio è molto corrotto e la mancanza di figura ne rende difficile la correzione, crediamo però che la costruzione dello scoliasta non differisca da quella che abbiamo intravveduto attraverso la lettura del testo greco.

4.

In un triangolo dato inscrivere un cerchio.

Sia ABC il triangolo dato; occorre dunque inscrivere un cerchio nel triangolo ABC.

Si dividano gli angoli ABC, ACB in due parti eguali mediante le rette BD, CD (I, 9) concorrenti



nel punto D (I, post. 5), e dal punto D si conducano le perpendicolari DE, DF, DG alle rette AB, BC, CA.

Poichè l'angolo ABD è uguale a $C\hat{B}D$ e l'angolo retto BED è uguale all'angolo retto BFD, i due triangoli EBD, FBD hanno due angoli uguali a due angoli e un lato uguale a un lato, cioè il comune BD, che sottende angoli uguali; perciò avranno anche gli altri lati uguali agli altri lati (I, 26); dunque DE è uguale a DF. Per la stessa ragione anche DG è uguale a DF e quindi le tre rette DE, DF, DG sono eguali tra loro.

Allora il cerchio descritto con centro D e raggio uguale ad uno qualunque delle rette DE, DF, DG, passerà anche pei rimanenti punti e risulterà tangente alle rette AB, BC, CA, poichè gli angoli in E, F, G sono retti: infatti, se il cerchio segasse tali rette, la perpendicolare all'estremo del diametro cadrebbe entro il cerchio, ciò che si è dimostrato essere assurdo (III, 16).

Dunque il cerchio descritto di centro D, e avente per raggio uno qualunque dei segmenti DE, DF, DG, non segherà le rette AB, BC, CA; quindi sarà tangente ad esse e sarà inscritto nel triangolo ABC.

Si descriva come EFG.

Dunque nel dato triangolo ABC si è inscritto il cerchio EFG, c. d. f.

Simson osserva che in questa proposizione, come nella 8 e 13 del IV, si dimostra che il cerchio risulta tangente alle tre rette, per assurdo, mentre nelle prop. 17, 33, 37 del III libro Euclide usa dimostrazioni dirette; da ciò è indotto a sostituire alla dimostrazione indiretta la diretta anche per la brevità che ne sussegue. Ma tale questione non è sostanziale tanto più che altrove — come in III, 16 — è usato lo stesso ragionamento per assurdo.

Piuttosto si può notare che Euclide non dimostra che BD e CD s'incontrino in un punto D interno al triangolo, ciò che si può subito dedurre dal 5° postulato del I libro notando che gli angoli ABC, ACB sono minori di due retti e tali saranno quindi anche gli angoli DBC, DCB, che ne sono la metà.

Dalla dimostrazione si ha poi che, essendo D il punto d'interserzione delle bisettrici degli angoli in B e C, la DA biseca l'angolo in A e quindi si può enunciare che *le tre bisettrici degli angoli di un triangolo s'incontrano in un punto.*

L'enunciato della proposizione può essere generalizzato nel seguente: *condurre un cerchio tangente a tre rette date non passanti tutte per un punto e di cui non più di due sono parallele.*

Nel caso in cui le tre rette formino un triangolo il problema amette quattro soluzioni: infatti tanto il cerchio circoscritto, che i tre cerchi exinscritti verificano la condizione richiesta. Se invece due delle rette sono parallele, le soluzioni si riducono a due.

Una interessante applicazione della inscrizione del cerchio ad un triangolo viene data da Erone quando ricerca la nota formola:

$$\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

esprimente l'area del triangolo di perimetro $2p$ e di lati a, b, c.

Crediamo utile riportare qui l'elegante dimostrazione elementare che Erone dà per ben due volte nelle sue opere μετρικά e διοπτρα [1].

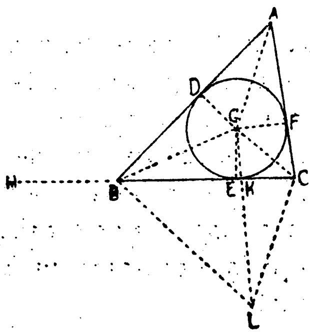
---

(1) Heronis *Opera*, III, Teubner, 1903, pag. 20-24 e pagine 280-284, vedi anche IV, pag. 248 e seg.

Sia ABC il triangolo dato e AB, BC CA siano i suoi lati dati: se ne vuol trovare l'area. Si inscriva nel triangolo il cerchio DEF, il cui centro sia G e si traccino le AG, BG, CG, DG, EG, FG. È allora $\overline{BC} \cdot \overline{EG}$ il doppio dell'area (BGC) del triangolo BGC, così CA · FG è il doppio di (ACG) e $\overline{AB} \cdot \overline{DG}$ il doppio di (ABG).

Dunque, sommando, il prodotto del perimetro $2p$ del triangolo ABC e di EG, raggio del cerchio DEF, è il doppio di (ABC).

Si prolunghi ora CB e sia BH uguale ad AD. Allora,



poichè AD = AF, DB = BE, FC = CE, è CH = p. Dunque:

$$\overline{CH} \cdot \overline{EG} = (ABC);$$

ma $\overline{CH} \cdot \overline{EG}$ è il lato del quadrato di $\overline{CH}^2 \cdot \overline{EG}^2$, quindi:

$$(ABC)^2 = \overline{CH}^2 \cdot \overline{EG}^2$$

Conduciamo la perpendicolare GL alla FG e la BL alla AB e conduciamo la CL. Poichè il quadrilatero CGBL è in un cerchio, la somma $C\hat{G}B + C\hat{L}B$ è uguale a due retti.

Ma anche $C\hat{G}B + A\hat{G}D$ è uguale a due retti, poichè gli angoli in G sono divisi per metà dalle AG, BG, CG, quindi

$$C\hat{G}B + A\hat{G}D = A\hat{G}C + D\hat{G}B$$

e questi tutti insieme sono quattro retti. Si ha poi che i triangoli AGD, CBL sono simili, quindi:

$$BC : BL = AD : DG = BH : EG$$

e, alternando:

$$CB : BH = BL : EG = BK : KE,$$

da cui, componendo,

$$CH : HB = BE : EK.$$

Quindi è anche:

$$\frac{\overline{CH}^2}{\overline{CH} \cdot \overline{HB}} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{CE}}{\overline{CE} \cdot \overline{EH}} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{EC}}{\overline{EG}^2},$$

dunque:

$$\begin{aligned}(ABC)^2 = \overline{CH}^2 \cdot \overline{EG}^2 &= \overline{CH} \cdot \overline{HB} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EC} \\ &= p\ (p - BC)\ (p - AB)\ (p - AC) \\ &= p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)\end{aligned}$$

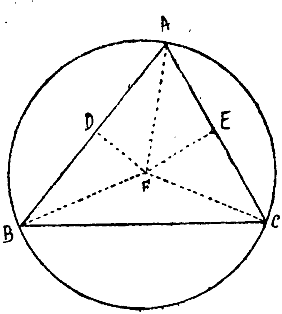
5.

Circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato.

Sia ABC il triangolo dato: bisogna dunque circoscrivere un cerchio al triangolo ABC.

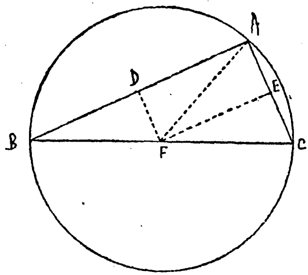
Si dividano le rette AB, AC in due parti eguali nei punti D ed E (I, 10) e dai punti D, E si conducano le perpendicolari DF, EF alle AB, AC: esse si intersecheranno o dentro il triangolo ABC, o sulla BC, o oltre BC.

Concorrano dapprima in un punto interno F e si conducano le FB, FC, FA. Poichè AD è uguale a DB e DF è comune e perpendicolare, ne risulta che le basi AF e FB sono uguali (I, 4). Similmente dimostreremo che anche CF e AF sono uguali, quindi è anche FB uguale a FC: le tre rette FA, FB, FC sono dunque uguali tra loro.



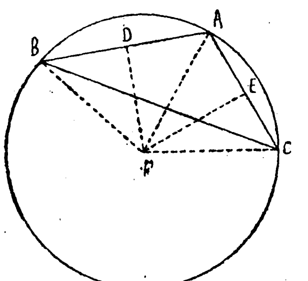
Allora il cerchio descritto con centro in F e raggio uguale ad una qualunque delle rette FA, FB, FC, passa anche per gli altri punti e sarà circoscritto al triangolo ABC. Si circoscriva come ABC.

Ora DF, EF concorrano in F sulla BC, così come è fatto nella seconda figura; si tracci la AF; dimostre-



remo in modo analogo che il punto F è centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Se invece DF e EF concorrono in F fuori del triangolo ABC, come è nella terza figura, si conducano le AF, BF, CF. Poichè ancora AD è uguale a DB e



DF è comune e perpendicolare (I, 4), la base AF sarà uguale alla base BF. Similmente dimostreremo che anche CF e AF sono uguali e perciò lo sono anche

BF e FC. Quindi il cerchio descritto con centro F e raggio uguale ad una qualunque delle rette FA, FB, FC, passa anche per gli altri punti e sarà circoscritto al triangolo ABC.

Dunque si è circoscritto al dato triangolo un cerchio, c. d. f.

È evidente che se il centro del cerchio cade dentro al triangolo, l'angolo BAC, inscritto in un segmento di cerchio maggiore della semicirconferenza, è minore di un retto; se il centro cade sulla BC, l'angolo BAC è retto perchè è inscritto in una semicirconferenza; se invece il centro del cerchio cade fuori del triangolo, l'angolo BAC è posto in un arco minore di una semicirconferenza, quindi è maggiore di un retto (III, 31).

La dimostrazione non è perfetta, poichè in essa si assume, senza dimostrarlo, che le EF, DF si incontrino. Il SIMSON lo dimostra dicendo che « le DF, EF s'incontrano necessariamente, poichè se non s'incontrassero sarebbero parallele e le AB, AC, che sono ad esse perpendicolari, sarebbero pure parallele, ciò che è assurdo ».

La manchevolezza nella dimostrazione euclidea era stata notata — prima che da Simson — da GIORDANO VITALE, il quale dà la seguente dimostrazione, simile a quella data molto più tardi dal TODHUNTER: « Si tiri la retta DE. Perchè gli angoli AEF, ADF sono retti, detrattine gli angoli AED, ADE, restano gli angoli FED, FDE minori di due angoli retti e per lo scolio alla 31ª proposizione del primo (= 5° postulato del I, che Giordano dimostra) le rette EF, DF, prolungate, concorrono in qualche punto F ».

Nella dimostrazione non si ha poi bisogno di distinguere tre casi, poichè una stessa costruzione e dimostrazione serve per tutti, come ebbe già a notare CAMPANO: e infatti CLAVIO, GIORDANO e SIMSON adottano una dimostrazione unica.

Il SIMSON osserva poi che la fine della proposizione si deve considerare come un'aggiunta e una delucidazione del penultimo paragrafo di III, 25, e non come un corollario, anche perchè i migliori codici non portano per essa il titolo πόρισμα. Inoltre si deve — col SIMSON e coll'HEIBERG — rigettare dal testo greco la fine di tale aggiunta, come non genuina, poichè in essa si parla di angolo dato, mentre nè nella proposizione, nè nella aggiunta si parla di angoli dati. La traduzione del testo greco dice appunto: « così che quando l'angolo dato sarà minore di un retto, l'intersezione di DF e EF cadrà dentro il triangolo, quando esso è retto su BC, e quando esso è più grande di un retto fuori di BC ».

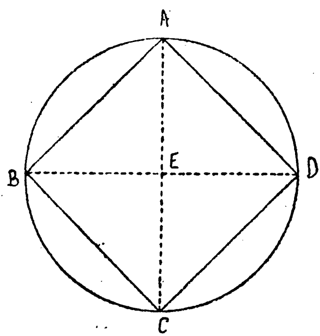
Dalla proposizione di questo numero dipende la nota costruzione del cerchio per tre punti, costruzione che viene posta come scolio da molti traduttori e commentatori come TARTAGLIA, PELETIER, CLAVIO, GIORDANO.

6.

Inscrivere un quadrato in un cerchio dato.

Sia ABCD il cerchio dato: bisogna inscrivere nel cerchio un quadrato.

Si traccino i due diametri AC, BD del cerchio ABCD tra loro perpendicolari e si conducano le AB, BC, CD, DA. Poichè BE e ED sono uguali (essendo E il centro) ed EA è comune e perpendicolare, la base AB è uguale alla base AD (I, 4).

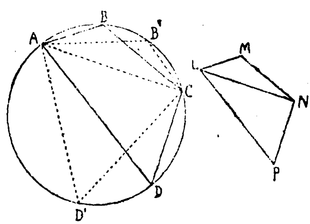


Per la stessa ragione anche le BC, CD sono rispettivamente uguali alle AB, AD; quindi il quadrilatero ABCD è equilatero: dico che è anche rettangolo. Infatti, poichè BD è diametro del cerchio ABCD, BAD è una semicirconferenza e l'angolo BAD è retto (III, 31); per la stessa ragione sono retti gli angoli ABC, BCD, CDA, onde il quadrilatero ABCD è rettangolo. Ma si è già dimostrato che è equilatero, perciò esso è un quadrato (I, def. 22) ed è inscritto nel cerchio ABCD.

Dunque nel dato cerchio si è inscritto il quadrato ABCD, c. d. f.

Mentre Euclide tratta in modo generale i problemi di inscrizione e circoscrizione relativi ad un triangolo, per il quadrilatero si limità al caso del quadrato.

Le costruzioni relative ad un quadrilatero in cui gli angoli opposti siano supplementari (condizione di inscrittibilità in un cerchio), si deducono però facilmente dalle precedenti proposizioni 2ª e 4ª. Così, per inscrivere in un cerchio dato un quadrilatero equiangolo ad un quadrilatero



LMNP dato e soddisfacente alla condizione ricordata, si divida, mediante una diagonale LN, il quadrilatero dato in due triangoli e mediante la IV, 2 si inscriva nel cerchio dato un triangolo ABC equiangolo al triangolo LMN; costruendo poscia l'angolo CAD uguale all'angolo NLP (I, 23) si avrà il quadrilatero richiesto.

Però il problema ammette infinite soluzioni, poichè — determinato l'arco capace dell'angolo LMN e preso ad arbitrio un punto B' — basta costruire $B'\hat{A}D' = M\hat{L}P$, affinchè il quadrilatero AB'CD' sia equiangolo al quadrilatero LMNP dato. Le soluzioni sono ancora infinite se il quadrilatero è un rettangolo, si ha invece una soluzione unica se si tratta di un quadrato.

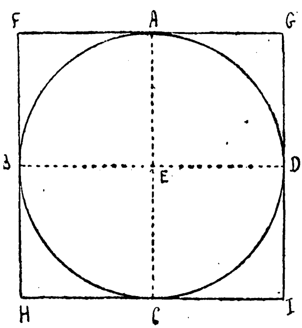
7.

Circoscrivere un quadrato ad un cerchio dato.

Sia ABCD il cerchio dato: bisogna circoscrivere dunque al cerchio ABCD un quadrato.

Si conducano due diametri AC, BD del cerchio ABCD, perpendicolari tra loro e pei punti A, B, C, D si conducano al cerchio ABCD le tangenti GF, FH, HI, IG (III, 17).

Poichè GF è tangente al cerchio ABCD e dal centro E si è condotta la EA al punto di contatto A, gli angoli in A sono retti (III, 18) e per la stessa ragione sono retti gli angoli in B, C e D; ma poichè $A\hat{E}B$ è retto ed anche $E\hat{B}F$ è retto, FH è parallelo ad AC (I, 29)



e così pure AC è parallelo a GI, quindi anche FH e GI sono paralleli (I, 30).

Analogamente dimostreremo che ambedue le rette FG, HI sono parallele alla BED, per cui FI, FC, AI, GB, BI sono parallelogrammi e quindi (I, 34) FG è uguale ad HI e FH a GI e poichè AC è uguale a BD e a ciascuna delle FH, GI, e BD è uguale a ciascuna delle FG, HI (I, 34) (e quindi ciascuna delle FH, GI è uguale a ciascuna delle FG, HI), il quadrilatero è equilatero. Dico che esso è anche rettangolo.

E infatti, poichè FBEA è un parallelogrammo e $A\hat{E}B$ è retto, anche $A\hat{F}B$ è retto (I, 34); analogamente dimostreremo che anche gli angoli in H, I, G sono retti e quindi GFHI è rettangolo. Ma si è già dimostrato che esso è equilatero, dunque è un quadrato (I, def. 22) ed inoltre è circoscritto al cerchio ABCD.

Dunque si è circoscritto al cerchio dato un quadrato, c. d. f.

Il metodo seguito in IV, 3 ci permette di circoscrivere ad un dato cerchio un poligono equiangolo ad un poligono dato. Fissiamo infatti un raggio e portiamo successivamente, a partire da questo raggio, intorno al centro, angoli uguali ai supplementi degli angoli successivi del poligono dato: le tangenti al cerchio negli estremi dei raggi determinanti gli angoli ora costruiti ci danno il poligono circoscritto, equiangolo al dato. Non si deve però credere che il poligono così ottenuto sia della stessa forma del dato, ossia che — anticipando un concetto che verrà introdotto nel VI libro — sia simile ad esso; ciò sarà solo se siano soddisfatte alcune condizioni, deducibili da III, 36, relative alla lunghezza dei lati e che si compendiano nella condizione che nel poligono dato sia inscrittibile un cerchio. In particolare, se il poligono è un quadrilatero, la condizione necessaria e sufficiente affinchè in esso sia inscrittibile un cerchio è che le somme delle coppie di lati opposti siano uguali, e allora, dato un tale quadrilatero, si può sempre circoscrivere ad un qualunque cerchio un quadrilatero non solo equiangolo, ma anche simile al dato.

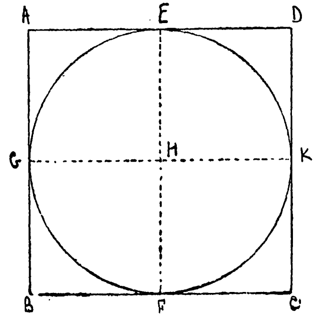
8.

Inscrivere un cerchio in un quadrato dato.

Sia ABCD il quadrato dato: occorre dunque inscrivere nel quadrato ABCD un cerchio.

Si dividano in due parti uguali, nei punti E, G, ambedue i lati AD e AB: per E si conduca la EF parallela ad AB e CD (I, 30, 31) e per G la parallela ad AD e BC. Quindi AK, KB, AF, FD, AH, HC, BH, HD sono dei parallelogrammi e i loro lati opposti sono tra loro uguali (I, 34). Ma poichè AD e AB sono uguali e AE è metà di AD, come AG è metà di

AB, sarà AE uguale ad AG. Saranno dunque uguali anche i lati opposti, cioè GH ed HE. Analogamente dimostreremo anche che HF è uguale a GH e HK è uguale ad HE. Le quattro rette HE, HG, HF, HK sono quindi uguali tra loro; perciò se si descrive il cerchio di centro H e raggio uguale ad una qualunque delle HE, HG, HF, HK, esso passa anche pei punti rimanenti e sarà tangente alle rette AB, BC, CD, DA, perchè gli an-



goli in E, G, F, K sono retti: infatti se il cerchio segasse le rette AB, BC, CD, DA, la perpendicolare all'estremo del diametro del cerchio cadrebbe internamente al cerchio, ciò che si è dimostrato essere assurdo (III, 16).

Quindi il cerchio descritto di centro H e raggio uguale ad una qualunque delle rette HE, HG, HF, HK non segherà le rette AB, BC, CD, DA, perciò sarà tangente ad esse e sarà inscritto nel quadrato ABCD.

Dunque si è inscritto nel quadrato dato un cerchio,

c. d. f.

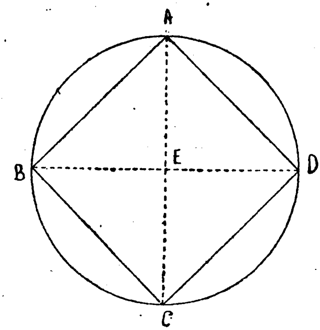
Si noti che si può inscrivere un cerchio in un quadrilatero solo se la somma di una coppia di lati opposti è uguale alla somma dell'altra coppia. Così si potrà inscrivere un cerchio in un quadrato o in un rombo, ma non in un rettangolo o in un romboide. Per un poligono qualunque occorre che siano soddisfatte condizioni analoghe a quelle del quadrilatero, cui si è accennato nella proposizione precedente.

9.

Circoscrivere un cerchio ad un quadrato dato.

Sia ABCD il quadrato dato: occorre dunque circoscrivere un cerchio al quadrato ABCD.

Condotte le AC, BD, esse si seghino in E. Ma poichè DA e AB sono uguali e AC è comune, i due lati



DA, AC sono eguali ai due lati BA, AC e la base DC è uguale alla base BC, quindi l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC. Dunque l'angolo DAB è diviso in due parti eguali dalla AC.

Similmente dimostreremo che anche gli angoli ABC, BCD, CDA sono divisi in due parti eguali dalle rette AC, DB; e poichè l'angolo DAB è uguale ad $A\hat{B}C$, ed $E\hat{A}B$ è metà di $D\hat{A}B$, come $E\hat{B}A$ è metà di $A\hat{B}C$, l'angolo EAB sarà uguale all'angolo EBA e perciò saranno uguali anche i lati EA ed EB (I, 6).

In modo analogo dimostreremo anche che EA, EB sono rispettivamente uguali ad EC, ED. Quindi le quattro rette EA, EB, EC, ED sono eguali tra loro, e perciò se si descrive un cerchio di centro E con raggio eguale alla distanza da uno dei punti A, B, C, D, esso passerà anche per gli altri punti e sarà circoscritto intorno al quadrato ABCD.

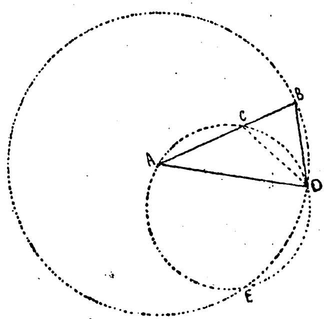
Dunque si è circoscritto un cerchio al quadrato dato, c. d. f.

La proprietà che il quadrato circoscritto ad un dato cerchio ha area doppia del quadrato inscritto nello stesso cerchio, il quale, in molte edizioni dell' EUCLIDE, come in quelle del PELETIER, del CLAVIO, costituisce uno scolio a questa proposizione, era un fatto noto fin dalla antichità. Infatti ne troviamo cenno — benchè non si parli esplicitamente del cerchio — nel *Menone* di PLATONE, e troviamo enunciata tale proprietà nel settimo dei *Lemmata Archimedis*.

10.

Costruire un triangolo isoscele avente ambedue gli angoli alla base doppi dell'altro angolo.

Si prenda una retta qualunque AB e la si divida nel punto C in modo che il rettangolo compreso dalle AB, BC sia uguale al quadrato costruito sulla CA; quindi, con centro in A e raggio AB, si descriva il



cerchio BDE. Nel cerchio BDE si adatti la retta BD eguale ad AC, che non è maggiore del diametro del cerchio BDE (IV, 1); si conducano AD, DC e si circoscriva intorno al triangolo ACD il cerchio ACDE (IV, 5).

E poichè il rettangolo compreso dalle AB, BC è uguale al quadrato di AC, e AC è uguale a BD, il rettangolo compreso dalle AB, BC sarà uguale al quadrato di BD. Ma poichè fuori del cerchio ACD si è preso un punto B e da B giungono al cerchio le due rette BA, BD, di cui la prima lo interseca, l'altra lo raggiunge soltanto ed il rettangolo formato dalle AB, BC è uguale al quadrato di BD, la retta BD è tangente al cerchio ACD.

Inoltre, poichè BD è tangente e dal punto D di contatto si è condotta la DC, l'angolo BDC sarà uguale all'angolo DAB che è posto nell'altro arco di cerchio (III, 37). Giacchè gli angoli BDC, DAC sono uguali, si aggiunga ad entrambi $C\hat{D}A$; così tutto $B\hat{D}A$ è uguale alla somma di $C\hat{D}A$ con $D\hat{A}C$; ma la somma di $C\hat{D}A$ e $D\hat{A}C$ è uguale all'angolo esterno BCD (I, 32), per cui anche $B\hat{D}A$ è uguale a $B\hat{C}D$. Ora $B\hat{D}A$ e $C\hat{B}D$ sono uguali, perchè anche i lati AD, AB sono eguali (I, 5); perciò sono uguali anche $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$.

Dunque i tre angoli BDA, DBA, BCD sono eguali tra loro, e poichè l'angolo $D\hat{B}C$ è uguale a $B\hat{C}D$, il lato BD sarà uguale al lato DC (I, 6).

Ma BD lo abbiamo posto uguale a CA, e CA è uguale anche a CD, perciò l'angolo CDA è uguale all'angolo DAC (I, 5). La somma quindi di $C\hat{D}A$ e DAC è uguale al doppio di DAC, e poichè $B\hat{C}D$ è uguale alla somma di $C\hat{D}A$ con $D\hat{A}C$, anche $B\hat{C}D$ è il doppio di $C\hat{A}D$.

Ora $B\hat{C}D$ è uguale a ciascuno degli angoli BDA, DBA, dunque ognuno degli angoli BDA, DBA è doppio dell'angolo DAB.

Dunque si è costruito un triangolo isoscele ABD avente gli angoli alla base DB doppi dell'altro,

c. d. f.

In questa proposizione sembra sia contenuta una delle più importanti scoperte della scuola pitagorica. Infatti l'opera di Euclide, in questo libro, è quella di raccoglitore e di coordinatore, poichè — come afferma un antico scoliasta (1) — il libro è tutto un ritrovato dei Pitagorici. E, a tacere di altre conferme indirette, l'origine pitagorica della costruzione del lato del pentagono, viene indicata anche dalla circostanza che la stessa costruzione euclidea fornisce anche il pentagono stellato (*pentagramma*), il quale costituiva il segno di riconoscimento dei pitagorici, e che dovette essere assunto a tale dignità per ricordare la non indifferente scoperta.

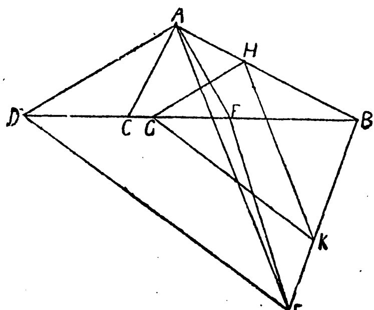
Riguardo alla dimostrazione euclidea si può notare che tanto il CAMPANO che TARTAGLIA e PELETIER si preoccupano di dimostrare che il cerchio ACD non sega il cerchio BDE in qualche punto dell'arco BD, ciò che del resto è evidente pel fatto che, essendo BD tangente al cerchio, questo sta tutto da una parte di BD.

---

(1) EUCLIDIS *Opera*, ed. Heiberg, t. V, pag. 273, 4 e 13.

Una soluzione elegante della proposizione euclidea ci è data dal De Paolis (*Elementi di Geometria*, 1884, pag. 92-93) nei seguenti termini: Sia AB un segmento dato. Costruiamo il triangolo rettangolo ABC che abbia il cateto AB doppio dell'altro cateto AC e sulla retta BC prendiamo il punto D, in modo che sia CD = CA. Un triangolo isoscele BDE, tale che sia BD = DE, BE = BA, sappiamo costruirlo, ed è quello cercato.

Ciò che desta interesse in tale costruzione, oltre alla semplicità, è che per la dimostrazione il De Paolis ricorre al teorema dei triangoli omotetici nel seguente modo: Preso il punto F tale che CF = CD = CA, i triangoli ACF, ACD risultano isosceli, così che $D\hat{A}F = A\hat{F}D + A\hat{D}F = 90^{\circ}$, ne segue che $F\hat{A}B = A\hat{D}F$. Posto ciò, si prendano i punti



G e H in modo che sia BG = BA, BH = BF, i triangoli ABF, GBH risulteranno uguali e se ne dedurrà l'uguaglianza degli angoli $H\hat{G}B$, $A\hat{D}B$ e quindi il parallelismo dei lati AD e GH. Ora, preso il punto K in modo che sia BK uguale a BH, sono isosceli i triangoli ABE, HBK e, per avere questi un angolo in comune, le rette AE, HK sono parallele. I triangoli ADE, HGK, avendo i vertici allineati con B e due coppie di lati paralleli, sono omotetici. Ma i triangoli BGK, BFE sono uguali, dunque $B\hat{E}F = B\hat{G}K = B\hat{D}E$; abbiamo poi $B\hat{F}E = B\hat{D}E + F\hat{E}D = B\hat{E}F + F\hat{E}D = B\hat{E}D = D\hat{B}E$, perchè BDE è isoscele. Dunque è isoscele anche BEF. Sapendo che per costruzione $BE = BA = 2AC = DF$, ne deduciamo che pure DEF è isoscele e perciò

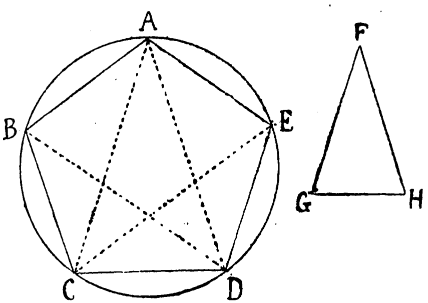
$$D\hat{B}E = B\hat{E}D = 2B\hat{D}E,$$

dunque BDE è il triangolo richiesto.

11.

Inscrivere in un dato cerchio un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il cerchio dato; bisogna dunque inscrivere nel cerchio ABCDE un pentagono equilatero ed equiangolo.



Si costruisca il triangolo isoscele GFH avente gli angoli in G e H doppi dell'angolo in F (IV, 10) e nel cerchio ABCDE si inscriva il triangolo ACD equiangolo a GFH in modo che l'angolo CAD sia uguale all'angolo in F e ciascuno dei due $A\hat{C}D$,

$C\hat{D}A$ sia uguale a ciascuno degli angoli posti in G e H (IV, 2). Perciò tanto $A\hat{C}D$ che $C\hat{D}A$ saranno doppi di $C\hat{A}D$.

Ora, si dividano in due parti eguali gli angoli ACD, CDA mediante le rette CE, DB e si traccino le rette AB, BC, [CD] (1), DE, EA. Poichè gli angoli ACD, CDA sono il doppio dell'angolo CAD e sono divisi in due parti eguali dalle rette CE, DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono eguali tra loro. Ma angoli eguali insistono su archi eguali (III, 29), quindi i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono eguali tra loro. Inoltre, rette uguali sono sottese da archi eguali (III, 29), per cui sono eguali tra loro anche le cinque rette AB, BC, CD, DE, EA.

Dunque il pentagono ABCDE è equilatero: dico, che esso è anche equiangolo.

Poichè l'arco AB è uguale all'arco ED, aggiungiamo ad entrambi $\overset{\frown}{BCD}$; tutto l'arco ABCD è quindi uguale all'arco EDCB; ma sopra l'arco ABCD insiste l'angolo AED e sopra l'arco EDCB l'angolo BAE, quindi l'angolo BAE è uguale all'angolo AED (III, 27).

Per la medesima ragione ciascuno degli angoli

---

(1) Secondo il GREGORY, ciò che è messo tra parentesi quadre non deve ritenersi genuino, perchè la CD è già stata tracciata.

ABC, BCD, CDE è uguale ad ambedue gli angoli BAE, AED, onde il pentagono ABCDE è equiangolo.

Ma si è mostrato che è anche equilatero. Dunque nel cerchio dato si è inscritto un pentagono equilatero ed equiangolo, c. d. f.

Osservando la figura, notiamo che in essa vi è, ad eccezione del lato AE, il pentagramma pitagorico completo, ciò che costituisce — come già si è detto — una buona testimonianza in sostegno della tesi che la costruzione del pentagono sia opera della scuola di PITAGORA.

EUCLIDE non accenna qui alla costruzione del decagono regolare mediante la divisione per metà dell'arco sotteso dal lato del pentagono, e solo nel XIII libro si può dedurre che la sezione aurea di un segmento è il lato del decagono inscritto nel cerchio che ha per raggio il detto segmento. Infatti le prop. 7, 8, 9, 10, 11 di tale libro dànno le seguenti importanti proprietà relative specialmente al pentagono e al decagono:

PROP. 7: *Se tre angoli di un pentagono, contigui o no, sono tra loro eguali, il pentagono è equiangolo.*

PROP. 8: *Due diagonali non uscenti dallo stesso vertice del pentagono si segano in media ed estrema ragione e ciascuna delle parti maggiori è uguale al lato del pentagono.*

PROP. 9: *Se al lato dell'esagono si aggiunge quello del decagono e del segmento così ottenuto se ne fa la sezione aurea, il segmento maggiore è il lato dell'esagono.*

È da tale proposizione che si deduce la costruzione del lato del decagono, sopra ricordata.

Prop. 10: *Il lato del pentagono è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i lati dell'esagono e del decagono inscritti nello stesso cerchio.*

Da tale proposizione si può dedurre che la somma dei quadrati della diagonale e del lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio r, è uguale a $5r^2$.

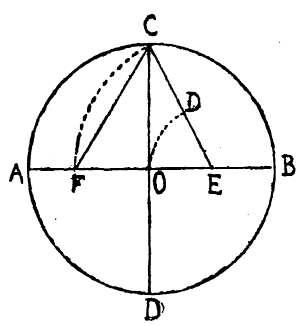
Prop. 11: *Se il diametro di un cerchio è razionale, il lato del pentagono inscritto in quel cerchio è irrazionale.*

Un'altra relazione tra il pentagono, l'esagono e il decagono inscritti in uno stesso cerchio ci è data da Ipsicle nella prima proposizione di quel libro che a lungo fu ritenuto il XIV di Euclide. Tale proprietà è la seguente: *l'apotema del pentagono è metà della somma dei lati dell'esagono e del decagono inscritti nel medesimo cerchio.* A complemento di tale proposizione il Clavio — e poscia Giordano Vitale — riporta anche le seguenti proprietà:

1° *il lato dell'esagono sta al lato del decagono come la corda del pentagono sta al lato del pentagono;*

2° *divisa l'apotema del pentagono in media ed estrema ragione, la parte maggiore è l'apotema del triangolo equilatero, e la minore è la metà del lato dell'esagono.*

Una semplice costruzione del lato del pentagono e del decagono, inscritti in uno stesso cerchio, è dovuta a Tolomeo (*Almagesto*, I, 1).



Condotti i diametri AB, CD ortogonali tra loro, sia E il punto medio di OB. Descritto il cerchio di centro E e raggio CE, la corda CF è il lato del pentagono, mentre OF è quello del decagono.

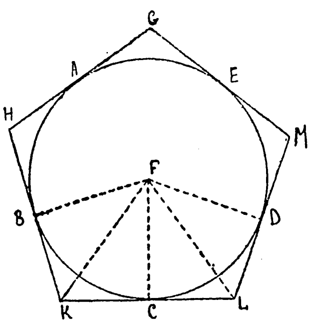
Tale costruzione si può giustificare solo colla proposizione 10ª del XIII libro di Euclide, e la costruzione di H. M. TAYLOR riportata dall'HEATH (II, pag. 102), non è che quella di Tolomeo variata in modo da renderla dipendente da II, 11 e da IV, 1. Essa consiste nel congiungere C con E e portare su essa DE = OE: la CD è il lato del decagono.

12.

Circoscrivere ad un dato cerchio un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il cerchio dato: occorre dunque circoscrivere al cerchio ABCDE un pentagono equilatero ed equiangolo.

Supponiamo che ABCDE siano i vertici del pentagono inscritto (IV, 11), di modo che gli archi AB, BC, CD, DE, EA siano eguali tra loro. Per A, B, C, D, E si conducano le GH, HK, KL, LM, MG tangenti al cerchio (III, 17) e, trovato il centro F del cerchio



ABCDE (III, 1), si conducano FB, FK, FC, FL, FD.

Poichè la retta KL è tangente al cerchio ABCDE nel punto C e dal centro F si è condotta al punto di contatto C la FC, la FC è perpendicolare a KL (III, 18); quindi ambedue gli angoli in C sono retti. Per la stessa ragione è retto anche ciascuno degli angoli posti nei punti B, D.

Essendo l'angolo FCK retto, il quadrato di FK è uguale alla somma di quelli costruiti su FC, CK (I, 47) e, per la stessa ragione, il quadrato di FK è uguale alla somma di quelli costruiti su FB, BK. Perciò la somma dei quadrati di FC, CK è uguale alla somma di quelli costruiti su FB, BK. Perciò la somma dei quadrati di FC, CK è uguale alla somma di quelli costruiti su FB, BK. Ma il quadrato di FC è uguale al quadrato di FB, per cui il quadrato rimanente di CK è uguale a quello di BK e quindi sarà la BK uguale alla CK.

E perchè FB è uguale alla FC ed FK è comune, i due lati BF, FK sono uguali ai due lati CF, FK e la base BK è uguale alla base CK. Quindi l'angolo BFK è uguale all'angolo KFC (I, 8) e $B\hat{K}F$ è uguale a $F\hat{K}C$ (I, 32); perciò $B\hat{F}C$ è doppio di $K\hat{F}C$ come $B\hat{K}C$ è doppio di $F\hat{K}C$.

Per la stessa ragione $C\hat{F}D$ è doppio di $C\hat{F}L$ e $D\hat{L}C$ è doppio di $F\hat{L}C$.

Ma poichè l'arco BC è uguale all'arco CD, anche l'angolo BFC sarà uguale a $C\hat{F}D$ (III, 27). Ora $B\hat{F}C$ è doppio di $K\hat{F}C$ e $D\hat{F}C$ doppio di $L\hat{F}C$; quindi $K\hat{F}C$ è uguale ad $L\hat{F}C$, come pure $F\hat{C}K$ è uguale a $F\hat{C}L$.

I due triangoli FKC, FLC hanno dunque due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, comune ad ambedue; quindi essi avranno anche i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati e l'altro angolo uguale all'altro angolo (I, 26). Perciò la retta KC sarà uguale alla CL e l'angolo FKC uguale a $F\hat{L}C$: e poichè KC è uguale a CL, sarà KL doppia della KC.

Per la medesima ragione dimostreremo anche che HK è doppio di BK: ma BK è uguale a KC, quindi anche HK è uguale a KL.

Similmente si dimostrerà che ciascuna delle GH, GM, ML è uguale a ciascuna delle HK, KL; quindi il pentagono GHKLM è equilatero. Dico che è anche equiangolo.

Poichè l'angolo FKC è uguale all'angolo FLC e si è dimostrato che l'angolo HKL è doppio dell'angolo FKC e $K\hat{L}M$ è doppio dell'angolo FLC, sarà anche $H\hat{K}L$ uguale all'angolo KLM.

In modo analogo si dimostrerà che ciascuno degli angoli KHG, HGM, GML è uguale tanto a $H\hat{K}L$ che a $K\hat{L}M$; dunque i cinque angoli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH sono tra loro eguali e però il pentagono GHKLM è equiangolo.

Ma si è dimostrato che è anche equilatero, ed è circoscritto al cerchio ABCDE. Dunque al cerchio dato si è circoscritto un pentagono equilatero ed equiangolo, c. d. f.

La conclusione: « dunque al cerchio dato si è circoscritto un pentagono equilatero ed equiangolo » manca in tutti i codici.

13.

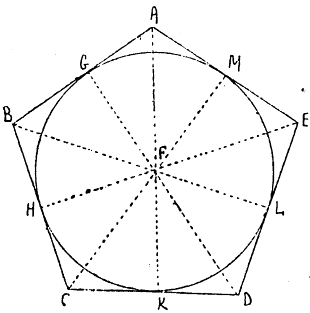
Inscrivere un cerchio in un pentagono dato, equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il pentagono equilatero ed equiangolo dato: occorre dunque inscrivere un cerchio nel pentagono ABCDE.

Si dividano ambedue gli angoli BCD, CDE in due parti uguali mediante le due rette FC, FD e, dal punto F dove si intersecano le rette FC, FD, si conducano le rette FB, FA, FE.

Poichè BC è uguale a CD e CF è comune, i due lati BC, CF sono uguali a DC, CF e l'angolo BCF è uguale all'angolo DCF. Quindi la base BF è uguale alla base DF (I, 4), il triangolo BCF è uguale al triangolo DCF (I, 4) e i rimanenti angoli saranno uguali agli angoli rimanenti, quelli che sottendono lati eguali (I, 4). L'angolo CBF è dunque uguale a $\widehat{CDF}$.

Ma poichè l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF, e $\widehat{CDE}$ è uguale ad $\widehat{ABC}$, come $\widehat{CDF}$ è uguale a $\widehat{CBF}$, anche l'angolo CBA sarà doppio di $\widehat{CBF}$ e quindi l'angolo ABF sarà uguale a $\widehat{FBC}$.



L'angolo ABC è dunque diviso in due parti eguali dalla retta BF.

Ugualmente dimostreremo che ambedue gli angoli BAE, AED sono divisi rispettivamente per metà dalle rette FA, FE.

Si conducano allora dal punto F le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM alle rette AB, BC, CD, DE, EA.

Poichè l'angolo HCF è uguale a $\widehat{KCF}$ e $\widehat{FHC}$ è uguale a $\widehat{FKC}$, perchè retti, i due triangoli FHC, FKC hanno due angoli uguali a due angoli e un lato uguale ad un lato, cioè il comune FC, che sottende angoli uguali: dunque anche i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati. La perpendicolare FH è quindi uguale alla perpendicolare FK.

Similmente dimostreremo che anche ciascuna delle FL, FM, FG è uguale a ciascuna delle FH, FK. Dunque le cinque rette FG, FH, FK, FL, FM sono uguali tra loro.

Perciò, se si descrive il cerchio di centro F e raggio uguale alla distanza da uno dei punti G, H, K, L, M, esso passerà anche pei punti rimanenti e sarà tangente alle rette AB, BC, CD, DE, EA, poichè gli angoli nei punti G, H, K, L, M sono retti.

Infatti, se non fosse tangente ad esse, ma le secasse, la perpendicolare condotta all'estremo di un diametro cadrebbe nell'interno del cerchio, ciò che si è dimostrato essere assurdo.

Dunque il cerchio descritto, di centro F e raggio uguale alla distanza da uno dei punti G, H, K, L, M, non sega le rette AB, BC, CD, DE, EA, quindi è tangente ad esse.

Si descriva come GHKLM.

Dunque in un dato pentagono equilatero ed equiangolo si è inscritto un cerchio, c. d. f.

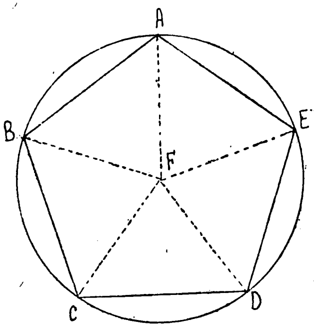
14.

Circoscrivere un cerchio ad un dato pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il pentagono dato, equilatero ed equiangolo: occorre dunque circoscrivere un cerchio al pentagono ABCDE.

Si divida ciascuno degli angoli BCD, CDE per metà mediante ciascuna delle rette CF, DF e dal punto F, in cui concorrono le rette, si conducano ai punti B, A, E le rette FB, FA, FE.

Nello stesso modo che nella proposizione precedente, dimostreremo che anche gli angoli CBA, BAE, AED sono divisi rispettivamente per metà dalle rette FB, FA, FE.



Poichè l'angolo BCD è uguale a $C\hat{D}E$ e l'angolo FCD è metà di $B\hat{C}D$, come l'angolo CDF è metà di $C\hat{D}E$, sarà anche $F\hat{C}D$ uguale a $F\hat{D}C$, e perciò il lato FC è uguale al lato FD (I, 6).

Similmente dimostreremo che ciascuna delle rette FB, FA, FE è uguale a ciascuna delle FC, FD. Le cinque rette FA, FB, FC, FD, FE sono dunque eguali tra loro.

Perciò se si descrive il cerchio di centro F e raggio uguale ad una qualunque delle FA, FB, FC, FD, FE, esso passerà anche per gli altri punti. Si descriva e sia ABCDE.

Così ad un dato pentagono equilatero ed equiangolo si è circoscritto un cerchio, c. d. f.

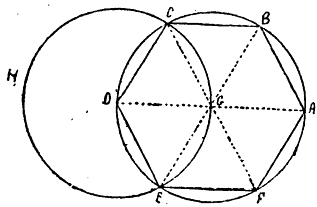
Ai problemi risolti nelle proposizioni 12, 13, 14 corrispondono i problemi più generali: dato un cerchio circoscrivere ad esso un poligono regolare di n lati; dato un poligono regolare di n lati inscrivere e circoscrivere ad esso un cerchio. Per la risoluzione di tali problemi si possono applicare gli stessi metodi usati pel pentagono, ed EUCLIDE stesso nota ciò quando, nelle proposizioni seguenti, tratta dell'esagono e del pentadecagono. Ma, mentre i problemi corrispondenti alle proposizioni 13, 14 sono sempre risolubili colla riga e col compasso, non è così pel primo problema generale che porta alla divisione del cerchio in n parti eguali.

15.

Inscrivere in un dato cerchio un esagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDEF il cerchio dato: occorre dunque inscrivere nel cerchio ABCDEF un esagono equilatero ed equiangolo.

Si conduca il diametro AD del cerchio ABCDEF, si prenda il centro G del cerchio e con centro in D e raggio DG si descriva il cerchio EGCH; condotte



le EG, CG, si prolunghino fino ai punti B, F e si congiungano AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Dico che l'esagono ABCDEF è equilatero ed equiangolo.

Poichè il punto G è centro del cerchio ABCDEF, GE è uguale a GD. Di nuovo, poichè il punto D è centro del cerchio GCH, DE è uguale a DG. Ma si è dimostrato che GE è uguale a GD, quindi anche ED è uguale a GE. Il triangolo EGD è quindi equilatero e perciò anche i suoi tre angoli EGD, GDE, DEG sono eguali tra loro: poichè gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali fra loro (I, 5). Inoltre, i tre angoli di un triangolo sono uguali a due retti (I, 32), quindi l'angolo EGD è un terzo di due retti.

Similmente dimostreremo che anche $D\hat{G}C$ è un terzo di due retti.

E poichè la retta CG, eretta sulla EB, forma angoli adiacenti $E\hat{G}C$, $C\hat{G}B$ eguali a due retti (I, 13), anche il rimanente $C\hat{G}B$ è un terzo di due retti: quindi gli angoli $E\hat{G}D$, $D\hat{G}C$, $C\hat{G}B$ sono eguali tra loro, e perciò saranno uguali anche gli angoli opposti al vertice $B\hat{G}A$, $A\hat{G}F$, $F\hat{G}E$.

I sei angoli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sono quindi eguali tra loro; ma angoli eguali insistono su archi eguali (III, 26), quindi i sei archi AB, BC, CD, DE, EF, FA sono eguali tra loro. Ma archi eguali sottendono corde uguali (III, 29), quindi le sei rette sono eguali tra loro. Dunque l'esagono ABCDEF è equilatero: dico che esso è anche equiangolo.

Infatti poichè l'arco FA è uguale all'arco ED, aggiungiamo l'arco comune ABCD; allora tutto $\overset{\frown}{FABCD}$ sarà uguale a $\overset{\frown}{EDCBA}$; ma nell'arco FABCD insiste l'angolo FED e nell'arco EDCBA l'angolo AFE, quindi l'angolo AFE è uguale a $D\hat{E}F$ (III, 27).

Similmente dimostreremo che anche ciascuno dei rimanenti angoli dell'esagono ABCDEF è uguale a ciascuno degli angoli AFE, DEF; quindi l'esagono ABCDEF è equiangolo.

Si è poi dimostrato che è anche equilatero; ed è inscritto nel cerchio ABCDEF.

Dunque nel cerchio dato si è inscritto un esagono equilatero ed equiangolo, c. d. f.

COROLLARIO. — Di qui è poi manifesto che il lato dell'esagono è uguale al raggio del cerchio.

Similmente a quel che si è fatto per il pentagono, se sui punti di divisione del cerchio manderemo le tangenti al cerchio, si circoscriverà intorno al cerchio un esagono equilatero ed equiangolo, per le ragioni che spiegammo a proposito del pentagono (IV, 12). E ancora per le stesse ragioni date per il pentagono (IV, 13, 14), in un dato esagono inscriveremo e circoscriveremo un cerchio, c. d. f.

L'HEIBERG, interpretando un passo di PROCLO (pag. 304, 2), afferma che questo è l'unico porisma del IV libro, e, quindi, che ciò che segue la dimostrazione di IV, 5 è da considerarsi come una aggiunta e non come corollario.

16.

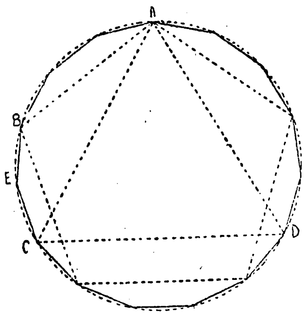
Inscrivere in un dato cerchio un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCD il cerchio dato; occorre dunque inscrivere nel cerchio ABCD un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Si inscriva nel cerchio ABCD il lato AC del triangolo equilatero inscritto in esso (IV, 2) e il lato AB del pentagono equilatero.

Quindi, se il cerchio si divide in quindici parti eguali, cinque di queste saranno nell'arco ABC, che è la terza parte del cerchio, tre nell'arco AB, che è la quinta parte del cerchio, e due quindi nel rimanente $\widehat{BC}$.

Si divida $\widehat{BC}$ per metà in E (III, 30), così ciascuno degli archi BE, EC è un quindicesimo del



cerchio ABCD. Allora, condotte le BE, EC, se adatteremo al cerchio ABCD, sempre di seguito, delle rette uguali a queste, si verrà ad inscrivere in esso un pentadecagono equilatero ed equiangolo, c. d. f.

Similmente, come pel pentagono, se pei punti di divisione del cerchio condurremo le tangenti al cerchio, si circoscriverà al cerchio un pentadecagono equilatero ed equiangolo (IV, 12).

Per le stesse dimostrazioni poi, che abbiamo usato nel pentagono, inscriveremo e circoscriveremo un cerchio ad un dato pentadecagono, c. d. f.

La costruzione del lato del pentadecagono è risolta in EUCLIDE elegantemente come immediata conseguenza della costruzione del lato del pentagono, ma tale soluzione deve essere anteriore ad Euclide, essendo il problema connesso a fatti astronomici osservati assai prima di Euclide: infatti — riconosciuto che l'inclinazione della eclittica corrisponde ad un arco che sottende il lato del pentadecagono [1] — gli scienziati anteriori ad Euclide, già in possesso della costruzione del pentagono, dovettero, naturalmente, essere spinti alla ricerca della costruzione del lato del pentadecagono regolare.

PELETIER nota che tutti i lati dei poligoni regolari inscritti si possono costruire per mezzo di triangoli isosceli, inscritti nel cerchio, tali che gli angoli alla base stiano in un certo rapporto coll'angolo al vertice. Così pel quadrato ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele deve essere uguale a $^3/_2$ dell'angolo al vertice, pel pentagono deve essere doppio, per l'esagono deve essere i $^5/_2$, per l'ettagono triplo, per l'ottagono i $^{10}/_3$, per l'ennagono deve essere quadruplo dell'angolo al vertice, e

---

[1] TEONE SMIRNEO, *Conoscenze matematiche*, ed. Dupuis, Parigi, 1892, pag. 220. PROCLO, *Hypotyposis astronomicarum positionum*, Lipsia, 1909, pag. 52-54, 206.

così via. Ma non è sempre possibile, solo con riga e compasso, inscrivere in un cerchio un triangolo isoscele i cui angoli alla base stiano in un certo rapporto con l'angolo al vertice, per cui tutte le costruzioni relative trovate da ORONZIO FINEO sono errate, come ebbe appunto a dimostrare PIETRO NONIO.

Il CLAVIO fa seguire a questa proposizione i seguenti scolii:

1° *Se da un medesimo punto sulla circonferenza adattiamo in un cerchio dato, consecutivamente, corde rispettivamente eguali al lato dell'm-gono regolare e dell'n-gono regolare inscritto* ($m < n$), *gli estremi di tali corde determinano un arco che sottende* $n - m$ *lati del poligono regolare inscritto di* nm *lati;*

2° *Dato un poligono regolare di* n *lati, le congiungenti dei punti di mezzo dei lati costituiscono ancora un poligono regolare avente lo stesso centro del poligono dato.*

Come si è visto, delle molte e immediate conseguenze delle costruzioni dei poligoni regolari, Euclide riporta solo quella riguardante la posizione del centro del cerchio circoscritto ad un triangolo e la proprietà che il lato dell'esagono è uguale al raggio del cerchio. Egli poi non accenna alle costruzioni dei poligoni di 2^n, 3.2^n, 5.2^n, 15.2^n lati, facilmente deducibili dalle costruzioni da lui riportate e necessariamente note ai suoi tempi.

Non si hanno notizie per stabilire se all'epoca di Euclide si fossero tentate costruzioni approssimate dei lati di poligoni regolari non trattati nel IV libro o non deducibili da questi. Un primo risultato in questo senso sarebbe stato ottenuto da IPPARCO DI NICEA (II sec. a. C.), cui ERONE [1] attribuisce le formule approssimate

$$3l_9 = 2r,\ 25l_{11} = 14r$$

per le lunghezze l_9, l_{11} dei lati dell'ennagono e dell'endecagono inscritti nel cerchio di raggio r.

A questi risultati di Ipparco, ERONE ne aggiunge uno proprio, relativo al lato dell'ettagono, $8l_7 = 7r$, che egli deduce dal lemma: il lato dell'ettagono regolare inscritto in un cerchio è sensibilmente uguale all'apotema dell'esagono regolare inscritto nello stesso cerchio; ritrovamenti che, col CANTOR, si può supporre che ERONE abbia dedotti dall'opera « dell'ettagono nel cerchio » andata dispersa e che autori arabi attribuiscono ad ARCHIMEDE.

ERONE però non pone la relazione $l_7 = l_3 : 2$, cui si avvicina il suo risultato: essa viene stabilita [2] dall'arabo ABOÛL WAFÂ (900-998), il quale aggiunge che essa dà una approssimazione e non una costruzione esatta. Tale regola si trova poi riportata da GIORDANO NEMORARIO (*De triangulis*) col nome di *quaestio indorum*, da LUCA PACIOLI (*De viribus quantitatis*) e ad essa si ricollegano le costruzioni geometriche di LEONARDO DA VINCI, ALBERTO DÜRER, CARLO MARIANI cremonese e CANDALLA.

Notevoli sono poi le seguenti costruzioni approssimate

(1) ERONE, *Metrica*, ed. Schöne, Lipsia, pag. 59 e 63.
(2) T. WOEPCKE, *Analyse* ecc., *Journal Asiatique*, vol. V, pag. 218-256, 309-359.

che LUCA PACIOLI dà nella sua opera inedita citata sopra [1]: il lato dell'ennagono regolare è uguale a $\frac{l_3 + l_6}{4}$; quello dell'endecagono è la parte maggiore della sezione aurea di $\frac{l_3 + l_6}{3}$; quello del tredecagono è la parte minore della sezione aurea di $^5/_4\, r$: costruzioni tutte approssimate a meno dei millesimi.

Il problema della inscrizione dei poligoni regolari nel cerchio assume grande importanza collo svilupparsi della trigonometria, poichè — fino a che nuovi e rapidi mezzi non siano forniti dall'analisi — da esso dipende la costruzione delle tavole dei seni o delle corde, e delle altre funzioni trigonometriche. Giacchè una qualunque di tali tavole può fornire costruzioni approssimate dei lati dei poligoni regolari, non ci inoltreremo in un esame di esse; solo ricorderemo la regola che BHASKARA ci dà nella sua Aritmetica: «moltiplicando il diametro del cerchio per 103923, 84853, 70534, 60000, 52055, 45922, 41031 e dividendo i prodotti rispettivi per 120000, i quozienti sono, nel loro ordine, i lati dei poligoni, dal triangolo all'ennagono, inscritti nel cerchio» [2].

Tali risultati di BHASKARA si potrebbero confrontare con gli altri valori che molti matematici del Rinascimento

---

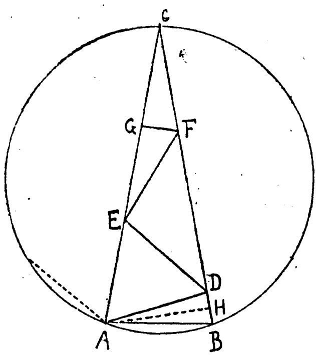
(1) Cfr. A. AGOSTINI, *Il «De viribus quantitatis» di Luca Pacioli*. Pubblicazioni dell'Istituto per la storia delle scienze fisiche e matematiche, I (1924), pag. 5. Cfr. *Periodico di Mat.*, S. IV, vol. IV (1924), fasc. 2.

(2) BHASKARA, *Lílávatí*, ed. Colebrooke, Londra, 1817, pag. 91-94.

assegnano ai lati di poligoni regolari, come, per esempio, a quelli che il CARDANO (*Practica arithmeticae*, cap. 63) assegna ai poligoni fino al quindecagono, ma ciò ci porterebbe in un campo tutto aritmetico. Di sommo interesse sono poi i primi risultati tendenti a ricondurre il problema geometrico della inscrizione di un poligono regolare in un cerchio, alla risoluzione di una equazione algebrica.

Già in un'opera di un arabo incognito fiorito intorno al 980 a. C., si trova l'equazione $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, ove la x rappresenta il rapporto del lato del tetradecagono al raggio del cerchio circoscritto e, poco dopo, ALBÎRÛNÎ asserisce, nella sua geometria, che la costruzione dell'ennagono dà una equazione tra l'incognita in un membro e il suo cubo e un numero nell'altro: tale equazione è poi ritrovata al principio del secolo XI da ABÛ 'L DSCHÛD nel modo che segue [1].

Si costruisca sul lato AB dell'ennagono il triangolo isoscele avente il vertice sulla circonferenza. Sia $AB = AD = DE = EF$, AH perpendicolare a BC e FG perpendicolare ad AC. Poichè $A\hat{C}B = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$, ne risulta che gli angoli in A e in B sono di 80° e quindi che $D\hat{A}E = D\hat{E}A = A\hat{D}E = 60^\circ$: il triangolo ADE è perciò equilatero.



(1) F. WOEPCKE, op. cit., pag. 125-127.

Nel triangolo DEF è $E\hat{D}F = E\hat{F}D = 40^\circ$ e $D\hat{E}F = 100^\circ$, ne segue che $F\hat{E}C = F\hat{C}E = 20^\circ$ e quindi il triangolo CFE è isoscele.

Dunque è CF = FE = ED = DA = AE = AB.

Dalla similitudine dei triangoli CGF e CAH, segue $CF : CG = CA : CH$ od anche $CF : 2CG = CA : 2CH$ ossia $AB : CE = CA : (CD + CB)$ da cui, componendo, $AB : (AB + CE) = CA : (CA + CD + CB)$, ossia $AB : AC = AC : (CD + 2AC)$.

Assunto $AC = BC$ come unità e posto $AB = x$, l'ultima proporzione dà $1 = x\,(2 + CD)$, ma dalla similitudine dei triangoli ABC, ABD, si ha $AC : AB = AB : BD$, da cui $BD = x^2$, e $CD = BC - BD = 1 - x^2$.

Perciò la ricerca del lato dell'ennagono dipende dalla risoluzione dell'equazione $3x = x^3 + 1$.

Per trovare — dopo quelli dei matematici arabi — nuovi tentativi per ricondurre la inscrizione dei poligoni regolari alla risoluzione di equazioni algebriche, la maggioranza degli storici scende fino a KEPLERO, ignorando che nuovi e brillanti risultati erano già stati conseguiti: per l'ettagono, da LUCA PACIOLI, LODOVICO FERRARI e GIROLAMO CARDANO; per l'ennagono, da RAFAELE BOMBELLI.

Riportiamo qui solo il metodo seguito dal FERRARI (1), per ottenere l'equazione dell'ettagono, non perchè la vinca in semplicità su quelli seguiti dagli altri autori, ma unicamente perchè con esso si giunge ad una equazione

(1) CARDANO, *Opus novum de proportionibus*, propositio 66ª, *Operum*, t. IV, Lione, 1663, pag. 492.

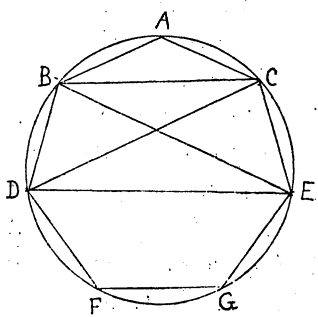
identica a quella dell'anonimo arabo ricordato sopra, e perchè le equazioni cui giungono PACIOLI, CARDANO e, più tardi, KEPLERO, HUYGENS, AGNESI non differiscono sostanzialmente da quella del FERRARI.

Dato l'ettagono ABCDEFG inscritto, sia $AB = 1$, $BC = x$; pel teorema di TOLOMEO, dal quadrilatero ABCD si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{AB} \cdot \overline{DC},$$

ossia

$$x^2 - 1 = \overline{DC}.$$



D'altra parte, dal quadrilatero BCDE, si ha

$$\overline{DC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DE} + \overline{BD} \cdot \overline{CE}$$

ossia

$$(x^2 - 1)^2 = x \cdot \overline{DE} + 1$$

da cui

$$\overline{DE} = x^3 - 2x,$$

ma $\overline{DE} = \overline{DC}$, quindi

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Come la costruzione dell'ettagono — venendo a dipendere da un'equazione di terzo grado — si riconduce alla trisezione di un angolo, anche la costruzione dell'ennagono si identifica con tale problema, il quale affannò non pochi matematici e commentatori d'Euclide, tra i quali ci piace ricordare il TARTAGLIA, che, nella sua prima edizione dell'EUCLIDE, credeva aver data una giusta costruzione per la trisezione dell'angolo — e, in conseguenza, per l'ennagono — costruzione che, riconosciuta errata, fu tolta nella seconda edizione.

Il problema della costruzione dell'ennagono, comunque posto, porta sempre, in generale, ad una equazione cubica del caso irriducibile, così che tale costruzione è legata a tutte le discussioni che intorno a tale caso furono condotte fino all'inizio del secolo scorso: la dipendenza dal caso irriducibile fu riconosciuta da RAFAELE BOMBELLI, in quella parte della sua *Algebra* che è rimasta tuttora inedita. Infatti egli dice (1):

« Gli è il circulo ABCDEF... dentro del quale vorrei fare un nove faccie di lati eguali, addimandasi quanto sarà uno di detti lati. Questa dimanda sino ad hora la tengo impossibile, fino a tanto che non sia retrovato il modo generale di agguagliare il Capitolo di cubo et numero eguale a cose, et dato che detto Capitolo ancor si ritrovi,

(1) A. BOMBELLI, *Algebra*, Codice B, 1569 della Bibl. Comunale di Bologna, fol. 228. Nel riportare — sia per il suo interesse geometrico, sia per l'importanza storica — la ricerca inedita del Bombelli, ricordiamo che il « Capitolo di cubo e numero uguale » a cose equivale alla equazione $x^3 + q = p\,x$ (p e q positivi).

dificil cosa sarà, che in detto agguagliamento non intravenga qualche radice cuba, che darebbe indizio, che potendosi formare detto nove faccie, non si potrebbe fare se non per via instrumentale, benchè da Horontio et Alberto Durero siano state date regole da fare detto nove faccie, le quali sono falsissime: et per essere cose chiare non mi affaticarò in volerle dimostrare; ma verrò a la operatione de la presente dimanda ».

Passa quindi alla ricerca dell'equazione del lato dell'ennagono, ch'egli ottiene con un metodo non meno elegante e semplice di quello seguito da Aboû 'l Dschûd. Noi riferiremo tale ricerca riferendoci ad un cerchio qualunque di raggio r, mentre Bombelli eseguisce — come sempre si usava per giungere ad una equazione a coefficienti numerici non complicati — le sue ricerche su un cerchio particolare, e precisamente di diametro $\sqrt{192}$.

Si costruisca nel cerchio di raggio r il triangolo equilatero ADF e si supponga diviso l'arco AD in tre parti eguali AB, BC, CD, si congiunga poscia B col centro: resterà determinato il triangolo isoscele ACE.

Posto AB = BC = CD = x, si ha, poichè AD $= \sqrt{3}r$,

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \sqrt{3}rx, \ \overline{AB} \cdot \overline{CD} = x^2$$

quindi

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD}} = \sqrt{x^2 + \sqrt{3}rx}$$

D'altra parte, poichè

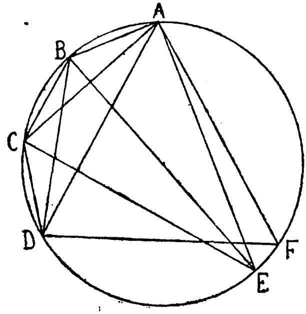
$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2 = 4r^2 - x^2,$$

si ha

$$\overline{BC}\cdot\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{CE}=x\sqrt{4r^2-x^2}$$

e quindi

$$\overline{BE}\cdot\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\overline{AE}+\overline{AB}\cdot\overline{CE}=2x\sqrt{4r^2-x^2};$$



donde si ricava

$$\overline{AC}=\frac{x\sqrt{4r^2-x^2}}{r}.$$

Uguagliando i due valori ottenuti per $\overline{AC}$ si ha l'equazione di Bombelli

$$x^3+\sqrt{3}r^3=3r^2x,$$

la quale, ponendo $\frac{x}{r}=y$, si trasforma nella

$$y^3+\sqrt{3}=3y.$$

Anche la costruzione dell'ettagono si riduce alla risoluzione di una equazione cubica, e di tale costruzione si occupò a lungo Keplero (*Harmonice Mundi*, libro I, prop. 45), il quale, attraverso successive applicazioni del teorema di Tolomeo, giunse alla equazione

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0,$$

ove x rappresenta il rapporto tra il lato dell'ettagono e il raggio del cerchio circoscritto. Tale equazione — presa in esame più tardi dalla AGNESI (*Instituzioni*, I, 279-284) e alla quale si riattacca l'equazione, ottenuta da HUYGENS (*Oeuvres*, vol. 14, 1920, pag. 498-500)

$$z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0,$$

ove z è la lunghezza della diagonale più lunga dell'ettagono regolare — ha, come osservò KEPLERO stesso, tre radici reali, delle quali una corrisponde all'ettagono regolare e le altre due ai due ettagoni stellati aventi gli stessi vertici del poligono regolare.

I risultati conseguiti dagli Arabi, da BOMBELLI e da KEPLERO preludono al collegamento tra il problema della inscrizione dei poligoni regolari e la teoria delle equazioni, dovuto a GAUSS. Le equazioni binomie furono oggetto di studio dei migliori matematici del secolo XVIII — ricorderemo tra gli altri il VANDERMONDE, il quale riconduce la risoluzione dell'equazione $z^{11} = 1$ ad estrazioni di $\sqrt[5]{\ }$ (*Hist. de l'Acad. des sciences*, 1771 [1776], pag. 415-416) — ma è solo dopo la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, che fu possibile vedere come la risoluzione dell'equazione binomia $z^n = 1$ si identifichi col problema della inscrizione del poligono regolare di n lati.

Non ci soffermeremo su una esposizione della teoria di Gauss, rinviando il lettore all'articolo sull'argomento di F. ENRIQUES nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*; ricorderemo soltanto che GAUSS giunse a dare una risposta negativa agli affannati ricercatori di costruzioni, colla riga e col compasso, dell'ettagono e dell'ennagono col seguente risultato: *tra i poligoni regolari sono costruibili elementarmente quelli e soltanto quelli il cui numero di lati contiene un solo fattore primo dispari, della forma* $2^n + 1$.

INDICE