
Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

ENRIQUES, FEDERIGO

Sull'immaginario in geometria, parti I e II

Period. di Matem. (IV) VII (1927), pp. 140-153, pp. 231-240.



L'utilizzo di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali.

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"

promosso dal

Ministero per i Beni e le attività Culturali

Area 4 – Area Archivi e Biblioteche

Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

Sull'immaginario in geometria

PARTE I - Problemi elementari.

1. Introduzione: punti e rette immaginari. — L'introduzione dei punti immaginari, qual'è data nel modo più semplice dalla geometria analitica ⁽¹⁾ porge una comprensione superiore e talvolta un istrumento d'indagine, anche nello studio di questioni geometriche aventi carattere elementare. Essa offre, in primo luogo, alla geometria una veduta di continuità, riattaccando proprietà apparentemente distinte, come quelle in cui si scambiano somme e differenze di segmenti ecc.: il passaggio continuo dall'una all'altra proprietà

⁽¹⁾ Le nozioni elementari, che qui richiameremo, si trovano p. es. in G. CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria analitica*. Una elementare trattazione sintetica degl'immaginari è data da F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, 4^a ed., §§ 38, 65^{bis}.

risponde qui al prolungamento analitico di funzioni polidrome ⁽¹⁾. In secondo luogo i teoremi generali sulla determinazione delle funzioni razionali per mezzo dei loro zeri e dei loro poli, trovano applicazione nei casi ove certe espressioni (rapporti o prodotti di distanze ecc.) rimangono costanti, al variare di alcuni elementi da cui dipendono: tale costanza riuscendo intimamente spiegata da quei teoremi.

L'interesse di queste considerazioni c'induce a trattarne in una rapida esposizione, recando qualche esempio istruttivo.

Ci limiteremo alla geometria del piano.

Un punto (xy) essendo definito dalle sue coordinate cartesiane ortogonali x e y , si otterranno i punti immaginari (o complessi) dando ad x e y valori comunque complessi:

$$x = x_1 + ix_2$$

$$y = y_1 + iy_2.$$

I punti soddisfacenti ad un'equazione lineare

$$ax + by + c = 0,$$

costituiscono una linea *retta*, che deve in ogni caso pensarsi come costituita da tutti i suoi punti reali e immaginari: del resto questa retta ha infiniti punti reali solo nel caso che l'equazione sia a coefficienti reali (*rette reali*). Se invece a, b, c sono complessi:

$$a = \alpha + i\alpha'$$

$$b = \beta + i\beta'$$

$$c = \gamma + i\gamma',$$

la retta è, essa stessa, *immaginaria* e contiene un solo punto reale, cioè l'intersezione colla retta immaginaria *coniugata*:

$$(\alpha - i\alpha')x + (\beta - i\beta')y + (\gamma - i\gamma') = 0.$$

La retta che congiunge due punti immaginari coniugati è reale; e viceversa una retta reale contiene sempre, insieme ad ogni suo punto immaginario, anche il coniugato.

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Il principio di continuità e l'immaginario in geometria*, art. 10° nel Vol. II delle *Questioni*, raccolte e coordinate da F. ENRIQUES.

2. Distanza di due punti: rette isotrope e punti ciclici. — La distanza di due punti, (ab) e (cd) , resta definita — per estensione — dalla formula

$$r = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2},$$

dove ora a, b, c, d assumono valori comunque complessi. Qui s'incontra subito un risultato paradossale. La condizione perchè la distanza di due punti s'annulli non porta più la coincidenza dei due punti. Dato un punto (ab) il luogo dei punti aventi distanza nulla da (ab) è costituito da due rette immaginarie, che per (ab) reale sono coniugate:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \{x - a + i(y - b)\}\{x - a - i(y - b)\} = 0$$

Queste rette immaginarie, che insieme alle coniugate formano i cerchi di raggio nullo con centro reale, si possono definire semplicemente come rette passanti per due punti immaginari coniugati sopra la retta all'infinito del piano, che diconsi *punti ciclici* del piano. Infatti cerchiamo i punti all'infinito appartenenti alle rette

$$x - a = \pm i(y - b);$$

a tal uopo conviene cambiare x e y nei rapporti x/z e y/z e rendere omogenea l'equazione:

$$x - az = \pm i(y - bz);$$

facendo poi in questa $z = 0$, si ottengono le coordinate dei punti d'intersezione colla retta all'infinito:

$$z = 0, x = \pm iy \quad (\text{o } y = \mp ix).$$

Il nome dei punti ciclici è dovuto alla proprietà che essi sono comuni a tutti i cerchi del piano. Infatti l'equazione d'un cerchio

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

resa omogenea diventa

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2 z^2,$$

e per $z = 0$ dà

$$x = \pm iy.$$

Così tutti i cerchi del piano hanno sempre due intersezioni fisse nei detti punti ciclici, M e N . In particolare i cerchi d'ugual centro O , si toccano in M e N , avendo ivi come tangenti le rette OM , ON : come è facile verificare, essendo la retta all'infinito polare del centro O .

Ora il risultato a cui siamo pervenuti innanzi si può anche enunciare come segue: *Vi sono nel piano infinite rette di lunghezza nulla, dette anche rette isotrope, che, costituiscono i due fasci di rette parallele coi centri nei due punti ciclici: la condizione di trovarsi sopra una retta isotropa è condizione necessaria e sufficiente perchè la distanza di due punti propri sia nulla.*

Quanto alla distanza di un punto proprio dai due punti ciclici, cioè dai due punti all'infinito che pur si trovano con esso sopra una retta isotropa, si ha un'espressione di forma indeterminata, che vedremo poter assumere qualunque valore, quando si definisca per continuità, calcolando la distanza del punto proprio da un altro che tenda ad andare in un punto ciclico secondo una data linea. Infatti si consideri il punto origine (OO) e il punto (x, ix) , che si muove sopra una delle due rette isotrope per esso: la distanza essendo sempre nulla, essa rimane anche nulla al limite, per $x = \infty$. Invece se si paragona coll'origine il punto $\{x, i(x-1)\}$, variabile sopra un'altra retta isotropa che non passi per (OO) , si trova la distanza

$$x^2 + [i(x-1)]^2 = x^2 - (x-1)^2 = 2x + 1$$

che diventa infinita (del 1° ordine) passando al limite per $x = \infty$. Se, infine, si fa muovere un punto (xy) sul cerchio di raggio r col centro nell'origine,

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

è chiaro che la distanza dall'origine — costantemente eguale ad r — resta sempre r anche al limite per $x = \infty$, cioè quando il punto (xy) venga a cadere in uno dei punti ciclici M o N .

Queste considerazioni si possono estendere al caso in cui un punto $P = (xy)$ vada a cadere sopra la retta all'infinito in uno dei punti ciclici, p. es. in M , movendosi sopra una

curva qualunque C (o sopra un ramo di curva) che passi semplicemente per M . Infatti si riconosce facilmente (colle consuete valutazioni degli ordini d'infinito e d'infinitesimo) che se la curva C tocca una qualsiasi retta isotropa diversa da MO (che è la retta isotropa congiungente il punto O) la distanza MO , valutata come limite della distanza d'un punto variabile P di C da O , risulta sempre infinita, come se il punto P si fosse mosso sulla tangente a C . Se invece P si muove sopra una C tangente in M ad MO , il limite della distanza PO dipende dal raggio del cerchio osculatore a C in M , cioè eguaglia il limite che si ottiene facendo tendere P a M sopra questo cerchio: che — per O reale — è un cerchio di centro O (tangente all'infinito alle rette OM , ON). Infine la distanza PO tenderà a 0 — diventando infinitesima d'ordine $r=1, 2, \dots$ — se P si accosta ad M sopra una C avente con OM in M un contatto d'ordine $r+1$ (ossia $(r+2)$ punto).

3. Angolo di due rette. — L'angolo di due rette,

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c &= 0, \end{aligned}$$

è dato in generale da

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}}, \end{aligned}$$

e queste espressioni si assumono a definire l'angolo per rette comunque immaginarie.

Da esse si ricava

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{aa' + bb' + i(ab' - a'b)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2}}, \\ e^{2i\alpha} &= \frac{(aa' + bb')^2 - (ab' - a'b)^2 + 2i(aa' + bb')(ab' - a'b)}{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \\ &= \left(1 + \frac{bb'}{aa'}\right)^2 - \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)^2 + 2i\left(1 + \frac{bb'}{aa'}\right)\left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right) = \\ &= \frac{1 + \frac{bb'}{aa'} + i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)}{1 + \frac{bb'}{aa'} - i\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right)} = \frac{\frac{b}{a} - i}{\frac{b}{a} + i} \cdot \frac{\frac{b'}{a'} - i}{\frac{b'}{a'} + i}. \end{aligned}$$

Quindi l'angolo α — a meno del fattore di proporzionalità $2i$ — viene espresso dal logaritmo del birapporto $\left(i, -i, \frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}\right)$ che appare nel secondo membro. Questo è il birapporto formato dai punti ciclici M, N coi punti all'infinito delle due rette, A e A' :

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log (MNA A').$$

In parole: *l'angolo di due rette è misurato dal logaritmo del birapporto che i loro punti all'infinito formano coi punti ciclici* ⁽¹⁾.

In particolare segue ⁽²⁾ che: Una retta isotropa forma con un'altra retta qualunque un *angolo infinito*. Due rette parallele — cioè aventi comune il punto all'infinito — formano in generale un *angolo nullo*. Fa eccezione il caso di due rette isotrope a, a' congiungenti il medesimo punto ciclico, per cui il birapporto $(MNA A')$ e quindi l'*angolo*, assume un valore *indeterminato*.

Se si cerca di determinare codesto angolo per continuità, più precisamente, se si cerca un limite dell'angolo secondo cui si vede un dato segmento AB da un punto P che si avvicini al punto ciclico M sopra una curva C (o sopra un ramo di curva che passi semplicemente per M), si riconosce subito che il birapporto da formare è quello delle due rette isotrope MA e MB colla tangente alla curva C e colla retta all'infinito (che va ad N). L'angolo ha dunque un valore finito se la curva su cui P si avvicina ad M non tocca una delle due rette isotrope MA, MH .

⁽¹⁾ LAGUERRE, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853 (pag. 57).

⁽²⁾ Tengasi presente che il birapporto di quattro punti di una retta

$$(MNA A') = \frac{MA}{NA} \cdot \frac{MA'}{NA'},$$

diventa infinito se uno dei due punti, A o A' , viene a coincidere con M o N , ma che esso assume la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se ambedue i punti A e A' vengono a coincidere con uno dei due punti M o N .

Le considerazioni precedenti tengono a ciò che le rette isotrope hanno rispetto a tutte le altre rette del piano un'orientazione assolutamente privilegiata: di qui anzi viene il nome « isotrope », che significa « egualmente poste ».

Le rette isotrope per un punto restano ferme per qualunque rotazione attorno ad esso. Le rette isotrope si presentano così, nel fascio di centro O , come le rette unite per la congruenza che intercede fra le rette inclinate d'un angolo dato qualsiasi, e in particolare come rette doppie della involuzione formata dalle coppie di rette perpendicolari, cioè come « rette perpendicolari a se stesse »: la relazione di perpendicolarità fra due rette, coi punti all'infinito A e A' , si lascia definire come separazione armonica della coppia dei punti ciclici MN , per mezzo di AA' ; e però se si cerca la direzione perpendicolare a quella delle rette isotrope per M , si ha da determinare il coniugato armonico di M rispetto ad MN , che è il punto stesso, M .

4. Distanza d'un punto da una retta. — Data, nel piano, una retta (propria)

$$ax + by + c = 0,$$

la distanza da essa d'un punto $P = (xy)$ vale

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

e però questa distanza non si annulla mai per punti P (reali o immaginari) che sieno fuori della retta. Essa non si annulla neppure quando P va all'infinito, tranne per $ax = -by$; ma questo caso non costituisce affatto un'eccezione, poichè allora P è il punto all'infinito della retta.

La distanza d'un punto da una retta propria è sempre finita, tranne quando il punto stesso cada all'infinito. Soltanto per le *rette isotrope* ($b = \pm ia$), accade che la distanza da esse di ogni punto esterno riesca sempre infinita.

Queste osservazioni portano alcune conseguenze per le aree dei triangoli. L'area d'un triangolo — essendo definita dal prodotto d'un qualunque lato per la corrispondente altezza — non diventa mai infinita per triangoli con lati finiti.

Più precisamente assumasi una base $a = BC$, finita e non nulla; sopra di essa si possono sempre costruire due triangoli dando ad arbitrio le lunghezze degli altri due lati, b e c , poichè occorre per ciò intersecare i due cerchi di raggi b e c con centri C e B : orbene questi due cerchi (avendo centro diverso) non si toccano nei punti ciclici, e però si segano in due punti (simmetrici rispetto a BC) a distanza finita, la cui distanza dalla retta BC è dunque finita; pertanto è sempre finita anche l'area del triangolo di lati a, b, c .

5. Area del triangolo. — Vogliamo indicare alcune applicazioni elementari cui dà luogo l'uso dell'immaginario in geometria.

Cominceremo col determinare la formola che ci esprime l'area A del triangolo di lati a, b, c .

Avvertiamo anzitutto che — essendovi due triangoli simmetrici con lati dati, sopra una base data — l'area deve ritenersi definita dai lati a, b, c , a meno del segno; sarà dunque A^2 funzione (algebraica univoca e però) razionale di a, b, c :

$$A^2 = \frac{\varphi(abc)}{\psi(abc)}.$$

Ma poichè, tenendo fermo uno dei tre lati, non è possibile rendere A infinita per valori finiti degli altri due, si deduce che il denominatore ψ è una costante, cioè

$$A^2 = k \varphi(abc) = f(abc).$$

Il polimONIO f si vede subito essere omogeneo di 4° grado rispetto alle a, b, c , perchè, moltiplicando queste variabili per p , l'area si moltiplica per p^2 e quindi A^2 per p^4 . Ciò posto, si osservi che la nostra area s'annulla quando i tre vertici del triangolo vengono in linea retta, cioè per

$$a = b + c, \quad a = b - c, \quad a = c - b;$$

ne segue che f è divisibile per

$$a + b - c, \quad b + c - a, \quad a + c - b.$$

Siccome poi i lati a, b, c , sono definiti per le coordinate, come radicali, a meno del segno, la continuità richiede che

ciascuno di essi possa mutare di segno (per cammini che girano attorno agli zeri); quindi l'espressione di f non dovrà cambiare cambiando di segno ad una qualunque delle variabili a, b, c : ciò porta che insieme ad $a + b - c$ figurì come fattore in f anche $a + b + c$ (e la stessa conseguenza si ottiene egualmente dalla considerazione degli altri due lati). In conclusione l'area verrà espressa da una formula

$$A^2 = k(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b);$$

ed il fattore numerico k si lascia determinare dal caso del triangolo rettangolo isoscele:

$$a = b = 1, \quad c = \sqrt{2}, \quad A^2 = \frac{1}{4},$$

$$k = \frac{1}{16},$$

sicchè, ponendo $p = \frac{a + b + c}{2}$, si trova

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

che è la formula consueta d'Erone.

6. Il cerchio come luogo. — Il cerchio si presenta, nel piano, come luogo dei punti che godono di alcune semplici proprietà, cioè: come luogo dei punti la cui distanza dal centro è costante, come luogo dei punti da cui due punti fissi (appartenenti al cerchio stesso) sono veduti sotto un angolo costante ⁽¹⁾, e come luogo dei punti le cui distanze da due punti dati sono in rapporto costante. Vediamo di comprendere queste proprietà dal punto di vista della geometria dell'immaginario.

Ciò accade di fare in relazione al teorema fondamentale della teoria delle funzioni, che: *una funzione algebrica, della variabile complessa, z , la quale non diventi mai nulla o infinita (neppure per $z = \infty$) si riduce ad una costante.*

⁽¹⁾ L'angolo ritenendosi formato dai raggi proiettanti i punti fissi A e B dal punto variabile P , secondo la loro direzione, non vi è differenza nel passare da un arco AB del cerchio al suo complementare.

1° La proprietà che la distanza d'un punto dal centro non diventi mai infinita, neppure pei punti in cui la curva sega la retta all'infinito, si traduce nella proprietà del cerchio di passare per i due punti ciclici, che costituiscono appunto le intersezioni predette. E perchè la medesima distanza non si annulli mai, occorre che le rette isotrope uscenti dal centro del cerchio non seghino in punti propri il cerchio stesso, ma lo tocchino negli stessi punti ciclici (all'infinito): tutto ciò ha riscontro nelle proprietà osservate nel § 2.

2° Il luogo C dei punti da cui si vedono due punti fissi generici, A e B , secondo un angolo costante, deve anzitutto soddisfare alla condizione di non segare la retta all'infinito fuori dei punti ciclici M e N , perchè da ogni altro punto all'infinito il segmento AB è veduto secondo un angolo nullo.

Occorre inoltre che nessun ramo della curva C tocchi in uno dei punti ciclici, M o N , la retta all'infinito, altrimenti l'angolo secondo cui si vede AB da un punto P di quel ramo tenderebbe a zero, quando il punto P va in M o N . Perciò l'ordine della curva C sarà un numero pari $2n$ e la C avrà in M e in N la molteplicità n .

Similmente si riconosce che la curva C non può segare la retta AB fuori di A e B , e che ha in essi la molteplicità n , non toccando la AB .

Ora la nostra curva d'ordine $2n$, con 4 punti n -pli si spezza in n coniche passanti pei 4 punti A , B , M , N , e cioè in n cerchi per A e B : vi vede poi subito che i cerchi componenti — di cui è data l'inclinazione sopra la retta AB — sono due, ossia $n = 2$.

Così l'analisi del problema conduce al luogo noto, composto di due cerchi simmetrici per A , B . E si può quindi verificare direttamente che per ogni punto P variabile sopra un cerchio passante per A e B , l'angolo secondo cui AB è veduto da P rimane costante: poichè (cfr. § 3) esso rimane finito e diverso da zero per ogni posizione di P , anche quando P va all'infinito in uno dei punti ciclici M o N , ovvero sulla retta AB in A o B .

3° Passiamo a considerare il cerchio come luogo dei punti le cui distanze da due poli fissi sono in un rapporto costante.

Assumansi due poli generici, A e B , e si cerchi il luogo K dei punti P per cui:

$$\frac{PA}{PB} = \text{cost.} \quad (\text{cost.} \neq 1).$$

Anzitutto dal grado dei polinomi che figurano sotto radicale nelle espressioni di PA e PB , si deduce che la curva K è di 2° grado, cioè una conica. Ora questa conica non può segare la retta all'infinito del piano fuori dei punti ciclici, M e N , perchè le distanze d'un generico punto all'infinito da A e B stanno in un rapporto eguale ad 1 (rapporto determinato, come si comprende, per continuità); dunque la K passerà per M e N , cioè dovrà essere un cerchio.

Questo è il risultato dell'analisi del problema, conforme a quello che si raggiunge, in maniera elementare, col ragionamento di APOLLONIO. Ma si può dare anche la sintesi, mettendo così in luce tutte le coppie di punti, A e B , rispetto a cui i punti P del cerchio hanno distanze formanti un rapporto costante.

Se il rapporto $PA : PB$ deve essere costante, bisogna che esso non diventi mai nullo, nè infinito. Ora esso diventerebbe nullo o infinito se si trovasse un punto P appartenente ad una retta isotropa PM , tale che la PN non fosse isotropa (sicchè $PM = 0$, $PN \neq 0$), ovvero se fosse isotropa la retta PN e non la PM .

Questa osservazione si può esprimere in una maniera per cui giova premettere una semplice definizione. Si congiungano A e B coi punti ciclici M e N , e s'indichino con

$$A' = AM \cdot BN \quad B' = AN \cdot BM$$

le intersezioni di queste due coppie di rette isotrope: con DARBOUX diremo che i punti A' e B' costituiscono la coppia dei punti *associati* ad A, B ⁽¹⁾. Nell'annessa figura i punti A, B, A', B', M, N , sono rappresentati tutti come reali; sappiamo invece che M e N sono immaginari coniugati, e per conseguenza se A e B sono reali A' e B' saranno immaginari coniugati,

(1) Coppie di punti associati sono dunque coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo, che ha due vertici nei punti ciclici.

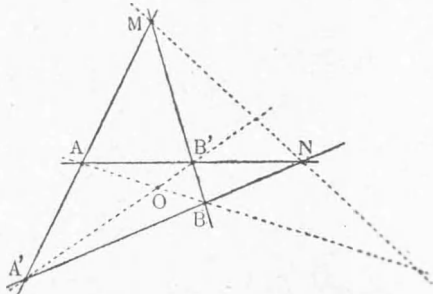
e viceversa, poichè la relazione fra coppie di punti associati è reciproca.

La nozione delle coppie di punti associati permette di esprimere l'osservazione sul cerchio che abbiamo fatta innanzi, come segue: se K è un cerchio luogo di punti, P , per cui le distanze da due poli fissi A e B hanno un rapporto costante, i punti A' e B' associati ad A , B , dovranno stare sopra il cerchio.

Viceversa se i punti A' e B' associati ad A e B stanno sul cerchio K , che cosa si può dire del rapporto $PA : PB$ per un punto P variabile su K ?

Questo rapporto non diventa mai nullo, nè infinito perchè quando uno dei suoi termini s'annulla (cadendo P in A' o in B') s'annulla anche l'altro, diventando — come è facile verificare — infinitesimo del medesimo ordine (cioè del 1° ordine rispetto all'ascissa x); e similmente quando uno dei termini diventa ∞ (cadendo P in M o in N) diventa ∞ anche l'altro, e del medesimo ordine. Così si conclude che il detto rapporto riesce costante. Cioè: *il cerchio è luogo dei punti le cui distanze da una coppia di punti fissi han rapporto costante, e ciò rispetto ad infinite coppie di punti, soggette soltanto alla condizione che la coppia dei punti associati appartenga al cerchio.* È poi facile vedere che le coppie di punti possibili sono precisamente quelle che — trovandosi sopra un diametro del cerchio — dividono armonicamente le sue intersezioni colla circonferenza. Questa proprietà, notissima, risulta qui dalle nozioni della polarità relativa ad una conica, mercè un semplice sguardo dato alla figura che precede: se A' e B' sono sulla circonferenza, la retta AB coniugata alla $A'B'$ passerà per il polo O di MN , che è il centro del cerchio ed i punti A' e B' resulteranno coniugati alla conica (cerchio) in cui è iscritto il quadrangolo $MNA'B'$.

In tal guisa la proprietà del cerchio (di Apollonio) di essere luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi hanno un rapporto costante, riesce illuminata secondo il nostro punto di vista: in una maniera superiore che non pretende certo



di sostituire la semplicissima maniera elementare, ma che appare soprattutto feconda in ordine a possibili estensioni del problema, come vedremo più avanti.

7. Osservazione sui punti associati. — Si consideri, insieme ad una coppia di punti AB del piano, la coppia associata $A'B'$. Il rapporto delle distanze $PA:PB$, come si è visto, rimane costante quando P varia su un cerchio per $A'B'$, ed allora resta anche costante l'angolo secondo cui il segmento $A'B'$ è veduto da P . Segue da ciò che il detto rapporto $PA:PB$ sarà funzione dell'angolo $\alpha' = \widehat{APB}$.

Si può determinare agevolmente tale funzione. A tal uopo sostituiamo alle coordinate cartesiane $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ e xy , di A , B e P , le nuove coordinate *simmetriche*:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1 + ia_2, & \alpha_2 &= a_1 - ia_2, \\ \beta_1 &= b_1 + ib_2, & \beta_2 &= b_1 - ib_2, \\ u &= x + iy, & v &= x - iy,\end{aligned}$$

rispetto a cui i due fasci delle rette isotrope vengono rappresentati da $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$; le coordinate simmetriche dei punti associati A' e B' saranno

$$\alpha_1 \beta_2, \quad \alpha_2 \beta_1.$$

Avremo, per le distanze:

$$\begin{aligned}PA^2 &= (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \\ &= (x + iy - a_1 - ia_2)(x - iy - a_1 + ia_2) = \\ &= (u - \alpha_1)(v - \alpha_2), \\ PB^2 &= (u - \beta_1)(v - \beta_2),\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{PA^2}{PB^2} = \frac{(u - \alpha_1)(v - \alpha_2)}{(u - \beta_1)(v - \beta_2)};$$

analogamente per i punti associati, essendo p. es.

$$A' = (\alpha_1 \beta_2), \quad B' = (\alpha_2 \beta_1),$$

sarà

$$\frac{PA'^2}{PB'^2} = \frac{(u - \alpha_1)(v - \beta_2)}{(u - \alpha_2)(v - \beta_1)}.$$

D'altra parte ponendo

$$\alpha = \widehat{APB}, \quad \alpha' = \widehat{A'PB'},$$

avremo (§ 3)

$$\begin{aligned} e^{2iz} &= \frac{u - \alpha_1}{v - \beta_1} \cdot \frac{u - \alpha_2}{v - \beta_2} = \\ &= \frac{(u - \alpha_1)(v - \beta_2)}{(v - \beta_1)(u - \alpha_2)} = \frac{PA'^2}{PB'^2}, \end{aligned}$$

e però, estraendo la radice,

$$e^{iz} = \frac{PA'}{PB'}.$$

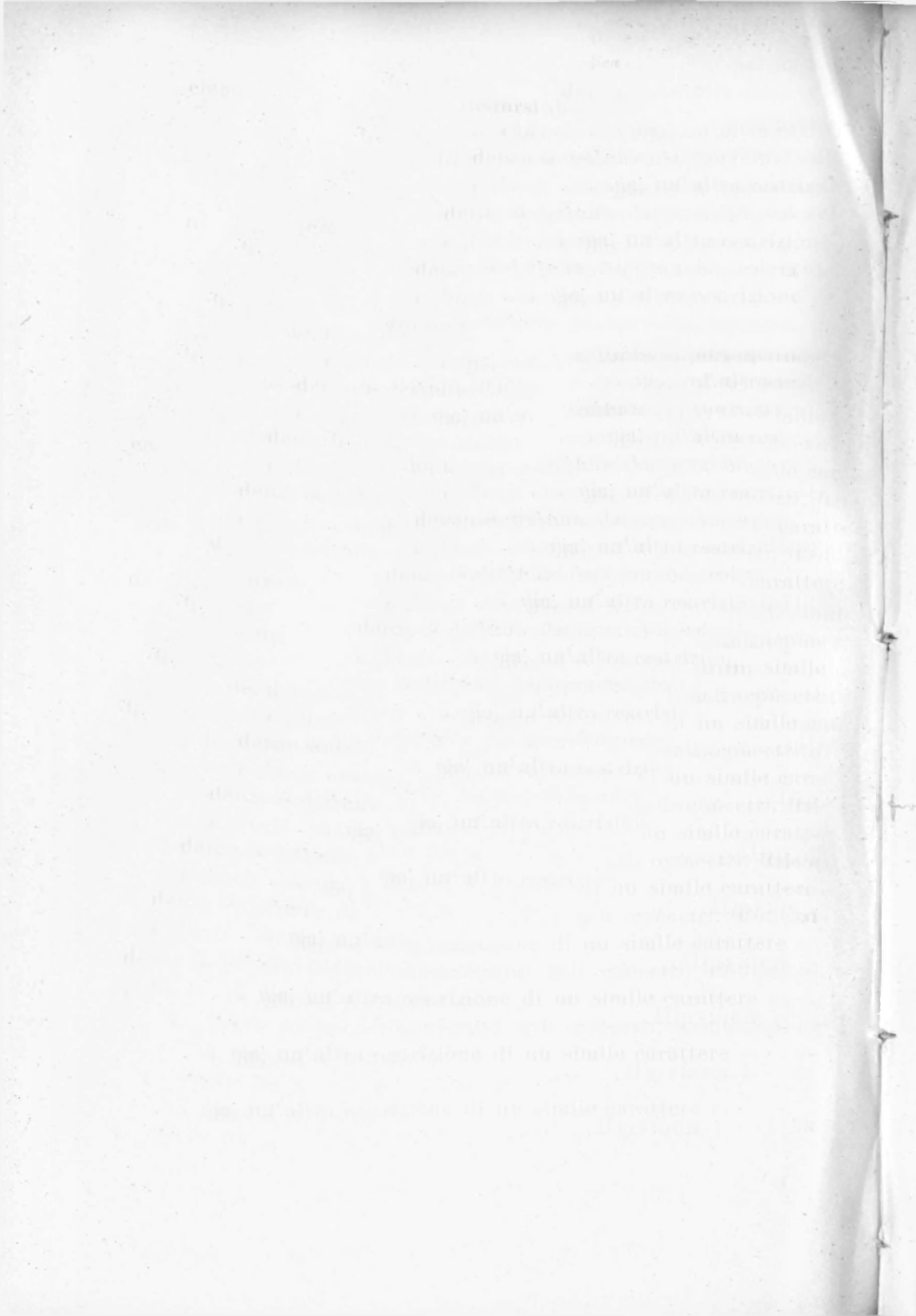
Analogamente

$$e^{i\alpha'} = \frac{PA}{PB'}.$$

Cioè: il prodotto delle distanze d'un punto P da due punti A e B eguaglia $e^{i\alpha'}$, designando α' l'angolo secondo cui si vede da P il segmento formato dai punti associati A' e B' ⁽¹⁾.

FEDERIGO ENRIQUES

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Parigi, Gauthier et Villars, 1873 (pag. 63).



Sull'immaginario in geometria

PARTE II - Le cassinoidi e le curve di Darboux.

8. **Cassinoidi.** — Ci proponiamo di studiare le curve piane, luogo dei punti le cui distanze da un certo gruppo di poli danno un prodotto costante. Queste curve han ricevuto il nome di *cassinoidi*, presentandosi come estensioni della curva di CASSINI, che risponde al caso di due poli. Talvolta sono anche dette *lemniscate*, generalizzando il nome della lemniscata di BERNOUILLI, che è il luogo dei punti il cui prodotto delle distanze da due poli A e B eguaglia il quadrato della metà di AB .

Consideriamo dapprima la curva di CASSINI, luogo dei punti le cui distanze da due punti (generici) A e B danno un rapporto costante (non nullo). Questa curva K è del 4° ordine, come appare subito dall'equazione. Essa deve soddisfare a due condizioni:

1° La K non può segare la retta all'infinito del piano in un punto P fuori dei punti ciclici M e N , perchè la distanza PA (e similmente la PB) diverrebbe infinita. Per lo stesso motivo la K , passando p. es. per M , non può avere in M un ramo tangente alla retta all'infinito, sul quale P , accostandosi ad M , diverrebbe infinita.

2° La K non può neppure segare una retta isotropa per A o B , p. es. AM , in un punto P a distanza finita, perchè la distanza PA e quindi il prodotto $PA \cdot PB$ si annullerebbe. Quindi la K tocca coi suoi due rami per M le due rette isotrope AM e BM , ad anzi queste debbono essere tangenti d'inflexione per i detti rami.

In conclusione: *La curva di Cassini è una quartica che passa doppiamente per i due punti ciclici del piano ed ha un flesso su ciascuno dei quattro rami uscenti da M e N.*

Queste proprietà caratterizzano la curva di Cassini. Se una quartica K , soddisfacente ad esse, è reale, le tangenti principali m_1 e m_2 in M , sono immaginarie coningate alle tangenti n_1 e n_2 in N , sicchè i punti $A = m_1 n_1$, $B = m_2 n_2$, sono reali: la K è luogo di punti il cui prodotto delle distanze da A e B riesce costante.

Infatti, se sopra la quartica K si fa muovere un punto P , il prodotto delle distanze $PA \cdot PB$ non si annulla mai a distanza finita, e nei punti all'infinito M e N — accostandosi ad essi sopra i rami che vi passano — si conserva pure finito e diverso da zero: giacchè, per il ramo osculatore a PM accade che la distanza PA diventi zero (del 1° ordine) mentre la distanza PB diventa infinita dello stesso ordine.

Il risultato ottenuto riesce confermato da un calcolo di costanti, che pure, a prima vista, conduce ad un *paradosso*.

Le quartiche piane dipendono da 14 costanti arbitrarie. L'imposizione d'un punto doppio equivale a 3 condizioni lineari e così le quartiche passanti doppiamente per M e N dipendono da $14 - 6 = 8$ parametri. Ora, se una tangente principale in M o in N deve essere tangente di flesso, si ha una condizione lineare; in tutto dunque 4 condizioni, che sembran ridurre a $8 - 4 = 4$ i parametri da cui dipendono le curve di CASSINI. Ma i due poli d'una tal curva dipendono da 4 parametri (le loro coordinate nel piano) e resta ancora la costante a cui si eguaglia il prodotto delle distanze. Dunque le curve di CASSINI contengono in effetto 5 e non 4 parametri! Come si spiega il paradosso?

La risposta è che le condizioni perchè le tangenti principali nei due punti doppi d'una quartica sieno tangenti di flesso pei relativi rami, non sono condizioni indipendenti: *se una quartica passante per M e N, oscula tre rami lineari uscenti da questi punti, essa oscula anche il rimanente ramo.*

Per dimostrarlo si consideri il sistema lineare di tutte le quartiche K che passano doppiamente per M e N : questo sistema ha la dimensione 8 e il grado 8, cioè due K si segano (fuori di M, N) in un gruppo di 8 punti comuni alle K di un fascio; si deduce che le quartiche K passanti per 7 punti

del piano passano in generale per un 8° punto da esse determinato.

Fra i gruppi di punti intersezioni di due K , vi è quello formato dalle intersezioni d'una K generica colla retta $r = MN$ contata 4 volte, che — detratte le 8 intersezioni assorbite in generale dai punti doppi M e N — contiene 8 punti, costituiti da 4 coppie di punti infinitamente vicini ad M e N , sui rami di K . Ciò posto, si supponga che per una K irriducibile, tre delle tangenti principali ai rami per M e N (per es. m_1, m_2, n_1) oscolino i relativi rami; allora la quartica formata da tutte e quattro le tangenti principali m_1, m_2, n_1, n_2 , contiene 7 fra le intersezioni della nostra K colla retta r^2 , e quindi contiene anche l'8° punto d'intersezione: quanto dire che la tangente principale n_2 oscula anch'essa il corrispondente ramo di K (per N).

Le cose dette per la quartica di CASSINI si estendono facilmente alle cassinoidi d'ordine superiore.

La cassinoidale luogo dei punti del piano per cui è costante il prodotto delle distanze da n poli, è una curva d'ordine $2n$ passante n volte per ciascuno dei punti ciclici M e N , e caratterizzata dalla proprietà di possedere su ciascuno dei $2n$ rami per M o N un flesso d'ordine $n - 1$: cioè un contatto $(n + 1)$ punto colla tangente.

9. Le curve di Darboux. — DARBOUX ha considerato una famiglia di curve piane che, come vedremo costituisce una generalizzazione delle cassinoidi, e che si lasciano definire in relazione a due serie di poli $A_1, A_2, \dots$ e $B_1, B_2, \dots$ come luoghi di punti per cui il prodotto delle distanze d'un punto dai poli della prima serie ha un rapporto costante al prodotto delle distanze dai poli della seconda serie:

$$PA_1 \cdot PA_2 \dots = k PB_1 \cdot PB_2 \dots \quad (k \neq 0, 1, \infty).$$

Consideriamo in particolare il caso in cui si abbiano due coppie di poli A_1, A_2 , e B_1, B_2 :

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2} = k.$$

La formula stabilita nel § 4 mostra che per i punti P della curva riesce costante anche la somma algebrica degli angoli

secondo cui si vedono le due coppie formate dai punti associati ad A_1, B_1 e A_2, B_2 .

Questa proprietà si estende in generale alle curve di DARBOUX relative a due serie di n poli, che appariscono dunque come luoghi di punti per cui riesce costante la somma algebrica degli angoli secondo cui si vedono n segmenti dati del piano ⁽¹⁾.

DARBOUX ha scoperto questa bella proprietà, di cui godono tutte le curve luogo di punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m poli hanno rapporto costante; le quali, per $m < n$, rientrano pure come caso particolare nella famiglia sopra considerata, siccome dimostreremo nel seguito.

10. La quartica di Darboux definita in relazione ai punti ciclici. — Per caratterizzare le curve di DARBOUX, dal punto di vista delle relazioni proiettive coi punti ciclici, ci varremo di considerazioni sintetiche, a cui si è condotti per naturale estensione dallo studio del caso ($n = 1$) del cerchio (§ 6).

Riferiamoci al caso semplice delle curve di DARBOUX con due coppie di poli, che — come appare subito dall'equazione — sono del 4° ordine. Affinchè il rapporto $\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$

si mantenga sempre eguale alla costante $k \neq 1$, esso non deve mai diventare 1, nemmeno quando P va all'infinito sopra la curva; segue da ciò che la quartica non può segare la retta all'infinito in altri punti che nei punti ciclici M e N , ed anche che in questi non può avere un ramo tangente alla retta all'infinito, poichè accostandosi P per es. ad M , sopra il ramo, il rapporto fra i detti prodotti di distanze tenderebbe ad 1. Pertanto la quartica di DARBOUX passa doppiamente per M e N .

Oltre a ciò essa deve soddisfare a condizioni ulteriori. Poichè una retta isotropa come la A_1M , sega la curva in un punto P che ha da A_1 una distanza $PA_1 = 0$, onde non si annulli il nostro rapporto di prodotti bisogna che si annulli in pari tempo anche la distanza PB_1 o PB_2 , sia per es. PB_1 . Allora PB_1 sarà pure una retta isotropa: $PB_1 = PN$.

Si riconosce in tal guisa che le due coppie di punti (generalmente a distanza finita), P_1P_2 e P_3P_4 , in cui la quartica

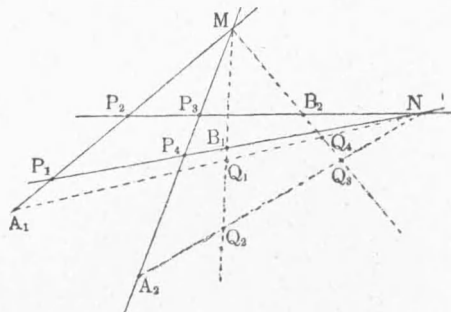
(1) Cfr. DARBOUX, l. c.

di DARBOUX, K , viene segata dalle rette isotrope, MA_1 e MA_2 , sono anche due coppie di punti appartenenti alle rette isotrope NB_1 e NB_2 .

Similmente le due coppie di rette isotrope NA_1 , NA_2 e MB_1 , MB_2 , si segheranno in 4 punti $Q_1Q_2Q_3Q_4$, appartenenti alla K .

Queste condizioni sono espresse dall'annessa figura, ove tutti i punti sono segnati come se fossero reali. Esse valgono a caratterizzare la quartica di

Darboux, K , potendosi dimostrare la costanza del rapporto dei prodotti delle distanze in relazione alle coppie di poli A_1A_2 e B_1B_2 . Infatti, facendo variare un punto P sulla curva, si verifica che il rapporto $\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$ non diventa mai



zero o infinito, nè quando P va all'infinito in M o N , nel qual caso PA_1 , PA_2 , PB_1 , PB_2 diventano infinite dello stesso ordine, nè quando P va sopra una retta isotropa per A_1 , A_2 o B_1 , B_2 , cioè assume la posizione d'uno dei punti $P_1P_2P_3P_4$ o $Q_1Q_2Q_3Q_4$, nel qual caso numeratore e denominatore del rapporto diventano infinitesimi dello stesso ordine. E però quel rapporto rimane costante.

Ora sorge una domanda: che cosa importano le condizioni sopra espresse per una quartica, K , soggetta ad avere due punti doppi in M e N ?

La risposta può esser data molto semplicemente per chi conosce gli elementi della geometria delle curve ellittiche, ossia di genere 1 (¹).

La K , passante doppiamente per M e N , è una curva di genere 1, sulla quale le rette per M e N segano due involuzioni g_2^1 . Quando si proiettano da N sulla stessa K le coppie di punti di K allineate con M , si trasforma la prima g_2^1 in

(¹) Cfr. p. es. ENRIQUES-CHISINI: *Lezioni sulla teoria geometrica...*, vol. III, §§ 7, 27.

un'altra g_2^1 , che, se è distinta dalla data, non avrà coppie comuni con essa. Dunque, se i due punti P_1P_2 allineati con M sono proiettati da N su K , in altri due punti, P_3 e P_4 , pure allineati con M , vuol dire che la g_2^1 segata su K dalle rette per M viene trasformata in se stessa dall'involuzione analoga segata dalle rette per N : in altre parole *le due involuzioni g_2^1 sono permutabili*.

Se sussiste questa relazione simmetrica di permutabilità, anche ogni coppia di punti allineati con M , dovrà esser proiettata da N in una coppia di punti allineati con M , e reciprocamente due punti di K allineati con N saran proiettati da M in due punti ancora allineati con N .

Così essendo, si può costruire la figura sopra disegnata a partire da un punto A , scelto nel piano in maniera arbitraria. Infatti, assunto A in un punto generico del piano, determineremo i punti P_1 e P_2 sezioni di MA colla K , e quindi i punti P_3 e P_4 loro proiezioni da N , i quali si troveranno sopra una retta per M : a questa retta dovrà dunque appartenere anche il punto A_2 . Ma ora seghiamo la K colla retta NA , in Q_1Q_4 ; proiettando Q_1Q_4 da M sulla K stessa, si avranno due punti Q_2Q_3 allineati con N , e sulla Q_2Q_3 dovrà pure trovarsi anche il punto A_2 , che così riesce determinato.

Infine anche i punti B_1 e B_2 verranno determinati come intersezioni rispettivamente delle rette P_1N , Q_1M e P_2N , Q_3M .

In conclusione potremo enunciare il teorema:

La quartica di Darboux è caratterizzata come curva del 4° ordine che passa doppiamente pei punti ciclici M , N del piano, e su cui le rette per M , N segano due involuzioni permutabili. Questa quartica costituisce il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due coppie di poli stanno in un rapporto costante, e ciò relativamente ad una serie ∞^2 di quaterne di poli: una quaterna (come DARBOUX pure ha avvertito) resta determinata dalla scelta arbitraria, nel piano, di uno dei suoi punti.

È facile valutare il numero dei parametri da cui dipendono queste curve; anzi, effettuandosi il computo in due modi diversi, se ne trae una conferma dei risultati stabiliti.

L'imposizione d'un punto doppio importa per una curva 3 condizioni, e la permutabilità di 2 involuzioni g_2^1 sopra una curva ellittica dà luogo ad una condizione, che significa

l'equivalenza delle serie doppie (serie complete g_4^3)⁽¹⁾; perciò le quartiche di DARBOUX contengono $14 - 6 - 1 = 7$ parametri. Allo stesso risultato si arriva contando le 8 costanti da cui dipendono le due coppie di poli $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, e la costante data dal rapporto del prodotto delle distanze $\frac{PA_1 \cdot PA_2}{PB_1 \cdot PB_2}$; purchè si diminuisca il numero, 9, così ottenuto, di 2, in vista della circostanza che una quartica di DARBOUX è tale rispetto ad ∞^2 quaterne di poli.

11. Casi particolari. — La quartica di DARBOUX essendo definita per rispetto ad una serie di poli, vi è luogo a considerare il caso particolare in cui uno di questi va all'infinito e la curva appare quindi come luogo di punti per cui il prodotto delle distanze da due poli e la distanza da un terzo polo stanno in un rapporto costante. Inoltre, particolarizzando la quartica, si presenta anche il caso in cui essa compaia come luogo dei punti le cui distanze da due poli danno un rapporto costante, cioè come una curva di CASSINI.

La quartica K essendo affatto generale (con due punti doppi in M e N e le relative g_2^4 permutabili) si può ottenere una particolare quaterna di poli, facendo coincidere la retta per N cui appartengono P_1 e P_3 colla retta all'infinito NM : ciò accade se si scelga A , sopra una delle due tangenti principali a K in M ; allora $A_2 M$ sarà la tangente principale all'infinito, e così anche Q_3 e Q_4 , le $A_1 N$ e $A_2 N$ risultando tangenti principali ai rami di K in N . La quartica, K , di Darboux, appare così anche il luogo dei punti P per cui il prodotto delle distanze $PA_1 \cdot PA_2$ ha un rapporto costante alla distanza da un unico polo, B .

⁽¹⁾ Questa equivalenza si può esprimere, come è noto, in base al teorema d'ABEL, eguagliando le somme dei valori degli integrali ellittici di prima specie

$$2I(P_1) + 2I(P_2) = 2I(P_3) + 2I(P_4) \quad (\text{mod. } \omega, \omega').$$

L'integrale I (coi periodi ω, ω'), relativo ad una quartica $f(xy) = 0$ passante doppiamente per i punti all'infinito M e N , vien dato da

$$I = \int \frac{dx}{f_y'}.$$

Per particolarizzare ulteriormente la generazione della K , mandando all'infinito anche B_1 , occorre che la K stessa soddisfi a condizioni particolari. Infatti, bisogna che anche P_1 e P_4 vadano all'infinito vicino ad M , e però che le tangenti ai due rami di K in M siano tangenti di flesso per questi rami. Se ciò accade, anche Q_1 e Q_2 come Q_3 e Q_4 andranno all'infinito vicino ad N , cioè le tangenti principali di K in N risulteranno tangenti di flesso per i rispettivi rami. *La K così particolarizzata è la curva di Cassini, luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze dai poli A_1 e A_2 .* Ed invero la proprietà caratteristica che abbiamo indicato per questa curva, implica — come subito appare — che le due g_2^1 segate dalle rette per M e N , siano permutabili: quando sussista per una quartica tale relazione, le quattro tangenti ai rami per i punti doppi M ed N risulteranno tangenti di flesso per i rispettivi rami, ove ciò accada per due di esse; si ritrovano così le tre condizioni perchè una quartica passante doppiamente per M e N , sia una curva di CASSINI.

Il risultato ottenuto ci permette di enunciare che: *la quartica di Cassini può ritenersi anche, in infiniti modi, come luogo di punti i cui prodotti da due coppie di poli sono in un rapporto costante; uno dei poli della quaterna può scegliersi ad arbitrio, nel piano, sopra una retta per M , diversa dalle tangenti principali.*

12. Curve di Darboux d'ordine n . — I risultati, che abbiamo svolto per le curve di DARBOUX relative a due coppie di poli, si estendono al caso di due serie di poli qualsiasi. Così, il luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ sono in un rapporto costante, sarà una sestica, K_6 , passante triplamente per i due punti ciclici, M e N , e su cui le rette per M e N segheranno due g_3^1 permutabili. S'intende con ciò che tre punti di K_6 allineati con M verranno proiettati da N , sulla K_6 stessa, in sei punti costituiti da due terne ancora allineate con M ; e reciprocamente per tre punti allineati con N . Questa relazione, come nel caso delle due g_2^1 sulla quartica di genere 1, si esprime affermando l'equivalenza dei tripli delle due g_3^1 : cioè dicendo che codesti tripli sono contenuti in una medesima serie completa g_3^3 , sulla K_6 di genere 4.

Infatti, i gruppi di 9 punti formati da terne allineate con M e N costituiscono gruppi comuni alle serie complete (non speciali) g_3^5 triple delle nostre g_3^4 , le quali g_3^5 debbon quindi coincidere ⁽¹⁾; ma se tali serie coincidono, le g_3^5 composte delle terne delle due g_3^4 avran comune una g_3^4 , cioè vi saranno ∞^1 gruppi G_9 composti di terne allineate con M e N ; ogni terna allineata con M o N farà parte d'un tal G_9 ; ossia le due g_3^4 saranno permutabili, nel senso innanzi spiegato.

Anche qui la K_6 apparirà come luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due terne di poli danno un rapporto costante, e ciò rispetto ad una serie di ∞^2 sestine di poli: dove è possibile scegliere un polo ad arbitrio ecc.

Il numero dei parametri da cui dipendono le curve di DARBOUX del 6° ordine può determinarsi facilmente in due modi, il cui accordo vale anche come dimostrazione della proprietà caratteristica di esse.

Le curve del 6° ordine con due punti tripli M e N contengono $\frac{6 \cdot 9}{2} - 2 \cdot 6 = 15$ costanti arbitrarie; e la permutabilità delle due g_3^4 segate dalle rette per M e N , che significa la equivalenza di due gruppi di 9 punti composti da terne delle due serie, porta 4 condizioni, essendo 4 il genere della curva; queste condizioni, possono esprimersi col noto teorema d'ABEL, eguagliando due somme d'integrali abeliani. Così rimangono $15 - 4 = 11$ parametri.

Allo stesso numero si arriva contando le $2 \cdot 6 = 12$ costanti da cui dipendono le due terne di poli, nonchè la costante che esprime il rapporto dei prodotti delle distanze; poichè una stessa curva di DARBOUX ammette una serie ∞^2 di poli.

Ciò che si è detto per il caso $n = 3$ si estende ora al caso di n qualunque e si ottengono, pure per n qualunque, i casi particolari corrispondenti a quelli considerati per $n = 2$.

Ci limiteremo ad enunciare i risultati che in tal guisa si ottengono.

La curva di Darboux, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n poli ciascuna sono in rapporto costante, è in generale una curva d'ordine $2n$ di genere

$$p = n^2 - 2n - 1,$$

⁽¹⁾ Cfr. ENRIQUES-CHISINI, op. cit. § 17.

passante n volte per i due punti ciclioi M e N , e caratterizzata dalla proprietà che gli n -pli delle due g_n^1 segate dalle rette per M e N appartengono alla stessa serie lineare g_{n+1}^{n+1-p} . La curva gode della sua proprietà rispetto ad ∞^2 coppie di serie di poli, potendosi scegliere ad arbitrio uno dei poli.

Le curve, luogo dei punti per cui i prodotti delle distanze da due serie di n e m ($m < n$) poli, sono in un rapporto costante, appartengono alla stessa famiglia delle curve anzidette, i poli della prima serie trovandosi su rette che hanno un contatto d'ordine $n - m$ coi rami della curva in M e N .

In particolare, per $m = 0$, rientrano fra le curve di Darboux le cassinoidi, luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da n poli: tali poli si trovano sopra rette osculatrici (con contatto d'ordine n) ai rami della curva.

Questi sviluppi e conclusioni mostrano l'uso che può farsi in problemi elementari o quasi elementari, non solo dell'immaginario, bensì anche dei concetti e dei teoremi della geometria algebrica: i quali, per la loro generalità ed importanza, meritano di essere più divulgati fra gl'insegnanti.

FEDERIGO ENRIQUES