Enriques, Federigo

Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio. Gli studi matematici

Leonardo: Rassegna mensile della coltura italiana **IV** (1928), pp. 132-141.

degli imprestiti lessicali ed abbia a sua volta ceduto a lingue indoeuropee con cui si trovò a contatto parte del proprio lessico. Chi ammette una unità, sia pure molto remota, ibero-ligure-etrusco-asianica troverà ragionevole che vi sieno delle sensibili interferenze lessicali fra tutto o parte di questo complesso linguistico e tutto o parte del mondo linguistico ariano. Per cogliere queste relazioni in modo che ne abbia giusta luce il lessico etrusco occorre andar ben più in là di singole omofonie senza virtù di coesione e svolgere un metodo severissimo, che è proprio il contrario di quello usato dal Trombetti. La conoscenza formidabile di moltissime lingue, la memoria più squisita, la facilità di accostamenti di voci similari negli idiomi più disparati sono delle doti personali invidiabili, ma non bastano; esse possono favorire l'illusionismo e inibire il senso critico. Nella sua relazione A. Trombetti ridusse la parte etimologica al minimo possibile, per quanto proprio da essa l'illustre glottologo sembrasse ripromettersi la futura decifrazione dell'etrusco, ma i pochi accostamenti presentati non convinsero affatto i glottologi. Del resto, giudicare a che punto siamo arrivati colla decifrazione dell'etrusco è prematuro; se ne parlerà con maggior cognizione di fatto fra non molto, quando sarà pubblicata la « lingua etrusca ». La relazione di A. Trombetti aveva, come disse modestamente l'oratore alla fine del suo discorso, lo scopo di « aprire la via ». E questo fu anche quello del Congresso: segnare un punto di partenza per un'esplorazione più sistematica e coordinata della lingua etrusca.

CARLO BATTISTI
dell'Università di Firenze.

ARTI E STUDI IN ITALIA NELL'ULTIMO VENTICINQUENNIO

GLI STUDI MATEMATICI

1. — *Il Risorgimento scientifico.*

L'altezza degli studi matematici, diceva Napoleone, è strettamente legata alla prosperità degli Stati. L'osservazione sembra vera, chi riguardi le alterne vicende della vita degli Stati europei nella civiltà contemporanea, sebbene sia difficile spiegare le ragioni più profonde di codesto legame: sia che, correlativamente, la fioritura del genio matematico si avvantaggi delle prospere condizioni dell'ambiente; sia che le più alte menti matematiche assumano una naturale funzione direttiva nel moto della cultura, favorendo così il migliore sviluppo ed impiego delle energie sociali.

Il Risorgimento Italiano, insieme alla passione nazionale e agli sviluppi dell'arte in cui essa si esprime, è anche elevamento della cultura scientifica, che vuol richiamare la magnifica tradizione dei secoli passati, e rimettere il Paese a contatto coi grandi problemi e cogli indirizzi di studio proseguiti al di fuori: in Francia, in Germania, in Inghilterra.

Nella rifioritura degli studi le Matematiche sono al primo posto, e gli uomini che le coltivano — i Brioschi, i Betti, i Cremona — danno il più vigoroso impulso al moto scientifico, col rinnovamento della Scuola. Le idee che essi professano e fanno valere in quest'opera, testimoniano della loro vasta mente, capace di comprendere le più diverse esigenze della cultura: il valore formativo degli studi classici, a cui sempre guardarono con spiccata predilezione, i principii d'ordine e di libertà armonizzati nella vita universitaria, i bisogni specifici delle scuole d'applicazione per gl'ingegneri, che da loro primamente ricevettero il loro organismo; qui la specializzazione troppo spinta e il sovraccarico degl'insegnamenti che oggi si lamentano, sono venuti più tardi, per opera di tecnici.

2. — *Posizione delle Matematiche nel secolo XIX.*

Per intendere i caratteri dell'opera scientifica dei Nostri convien richiamare le linee generali dello sviluppo delle discipline matematiche, nel secolo decimonono.

L'Analisi infinitesimale, meravigliosamente cresciuta nei secoli precedenti, aveva dischiuso l'era delle grandiose applicazioni alla filosofia naturale, per la strada di Galileo; e dopo tanti trionfi il pensiero matematico pareva ora ripiegarsi sopra se stesso per approfondire i problemi qualitativi che lo stesso progresso delle dottrine poneva allo spirito. D'altronde le difficoltà sorgenti dall'integrazione delle funzioni e delle equazioni differenziali, si ricongiungevano idealmente a quelle, non superate, che s'incontrano nel campo delle equazioni algebriche, se si domandi di risolverle per radicali, cioè nel modo con cui Tartaglia, Cardano, Scipione del Ferro, sono riusciti a risolvere, nel Cinquecento, le equazioni di 3° e 4° grado.

L'impossibilità della formula cercata, a cui era pur giunto il nostro Ruffini, veniva ora riaffermata dal grande norvegese Abel, che — a soli venticinque anni — promoveva anche le nuove teorie delle funzioni ellittiche e riusciva ad approfondire il significato stesso della soluzione dei problemi: significato relativo, che conduce a misurare la potenza degl'istrumenti e dei mezzi che vengono messi in opera. Uno spirito più largo dà impulso ad una critica rinnovatrice dei concetti, in tutti i rami delle Matematiche. Gli stessi principii della scienza appaiono quindi in una nuova luce. E presto si raccolgono i resultati di tanto lavoro in una vasta fioritura di sviluppi che s'innalzano liberamente dalle profondità del pensiero matematico, non più legato ad interessi o a limiti esterni, ma liberato, e per così dire sublimato, in una contemplazione artistica del proprio mondo concettuale. Perciò il secolo decimonono è stato detto *il secolo delle Matematiche pure*. In esso sono riusciti a compimento gli sforzi delle generazioni precedenti per una dilucidazione e sistemazione rigorosa di molteplici ordini di questioni. I fondamenti del Calcolo differenziale vengono chiariti da Cauchy. Con Gauss e collo stesso Cauchy si scioglie finalmente l'enigma dell'immaginario, che aveva tormentato i matematici dall'epoca di Cardano e di Bombelli (il seminatore dell'idea feconda!); sorge quindi la nuova « teoria delle funzioni », cresciuta dopo la metà del secolo per opera di Riemann e di Weierstrass. Con Gauss e con Monge si apre il campo all'investigazione sistematica della geometria differenziale. Mentre dallo stesso Monge, e per il lavoro di Poncelet, Steiner e Pluecker, ha origine un rinnovamento più profondo delle dottrine geometriche, per cui l'antica geometria elementare cede il campo ad una visione dominata dal principio di continuità, secondo lo spirito della geometria proiettiva.

A questi nuovi indirizzi del pensiero matematico, l'Italia della prima metà del secolo decimonono non aveva sostanzialmente partecipato. Come sopra ho detto, è merito di Brioschi, Betti e Cremona, — e poi di Beltrami, Casorati ecc. — di avere ripreso contatto colla scienza internazionale, in quel meraviglioso Risorgimento in cui la coscienza nazionale non temeva di guardare anche fuori di sè, per ritrovare se stessa.

3. — *Betti, Brioschi e Cremona rinnovatori delle Matematiche italiane.*

Francesco Brioschi — che sembra il ricercatore meno originale fra i tre — è pur forse il più attivo nell'opera di modificazione dell'ambiente che occorreva compiere per richiamare alle menti italiane la consapevolezza dell'universalità della scienza e rianimarne gli sforzi cogl'insegnamenti e cogli esempi. L'attività di questo lombardo si è svolta infatti prodigiosamente durante i settantatre anni della sua vita (dal 1824 al 1897). Era un matematico calcolatore, di quelli che pensano attraverso agli algoritmi e alle combinazioni delle formule. Ha lavorato soprattutto intorno alle teorie dell'algebra formale, perfezionando la trattazione dei determinanti, il calcolo delle funzioni invariantive ecc.: a tali studi si riattaccano i più bei resultati da lui conseguiti in rapporto alla risoluzione delle equazioni di 5° grado mediante funzioni ellittiche, scoperta da Hermite. Ma non si può nemmeno dimenticare che egli, primo in Italia, attrasse l'attenzione sulle idee di Gauss, promovendo gli sviluppi della Geometria differenziale del Beltrami e del Dini.

Ingegno assai diverso era Enrico Betti (1823-1892), che dalla nativa Pistoia venne a Pisa, ove professò per trentacinqu'anni, dirigendo poi anche quella Scuola Normale.

Anche questi mosse dallo studio dell'Algebra, ma anzichè le questioni formali, lo attrassero gli ardui problemi della risoluzione, che ho rilevato poc'anzi riattaccarsi alla schietta tradizione italiana, ma in cui aveva segnato una nuova strada il giovane francese Evaristo Galois, morto in duello a ventitue anni. La memoria di Galois, pubblicata dopo la sua morte, dava un'applicazione sistematica dei gruppi di sostituzioni, giungendo ai più bei resultati; ma molti di questi erano soltanto enunciati senza dimostrazione, alcuni forse divinati: l'intero lavoro appariva allora come una serie di enigmi, indecifrabili alla maggior parte dei matematici. Fu merito del Betti di ricostituire organicamente questa dottrina, che ha avuto poi tanta influenza sul progresso ulteriore delle Matematiche. E in quest'opera egli porse anche la misura del suo ingegno.

Non si fermò tuttavia alle questioni algebriche, passando alla teoria delle funzioni e poi alla Fisica matematica, Per il primo ramo di studi piace ricordare che, molti anni prima del Weierstrass il Nostro dette la costruzione di alcune trascendenti intere come prodotto infinito in relazione agli zeri: e l'uomo era così modesto, che quando il matematico di Berlino pubblicò il suo teorema, non si curò di rivendicarne la priorità.

Per la Fisica matematica conviene ricordare almeno il famoso teorema sull'elasticità; avvertendo che questi studi del Betti furono il punto di partenza di tante ricerche proseguite da matematici italiani. L'elasticità, mi diceva una volta un collega tedesco, è divenuta per voi una « Nationalfrage ».

Ma non potrei lasciare il Betti, senza dire delle sue ricerche — proseguenti le idee del Riemann — sull'*analysis situs* delle varietà a più dimensioni: un altro argomento in cui si esprime il suo forte pensiero e la sua intuizione geometrica; nel quale egli è stato veramente il pioniere d'un indirizzo di studi proseguito poi dal Poincaré, e oggi dal matematico americano Leffschetz ecc.

Il terzo dei maestri sopra nominati, Luigi Cremona, (n. a Pavia nel 1830, m. a Roma nel 1903), ha esercitato l'influenza più caarteristica sul movimento della scienza matematica italiana. Egli è il cultore e il propugnatore della nuova Geometria, sorta in Francia per opera di Poncelet, Chasles, De Jonquières, e svolta in Germania da Möbius, Pluecker, Steiner e Staudt.

Il Cremona si assimilò il metodo delle proiezioni, insegnando anche a trarne profitto per le costruzioni della Statica grafica. Ma il suo ingegno inventivo si spiegò soprattutto nello studio generale delle curve e delle superfici algebriche e di quelle trasformazioni birazionali del piano e dello spazio, che hanno ricevuto il nome di cremoniane.

Ben presto il Nostro si rivelò degno continuatore dei grandi geometri della prima metà del secolo scorso; la sua opera ebbe nel mondo il più largo riconoscimento. Si ammirò insieme la fantasia, la potenza e l'eleganza dei suoi metodi: pei quali riusciva, per esempio, a dimostrare molti teoremi sulle superficie cubiche, che lo Steiner aveva semplicemente enunciati, conseguendo così un premio dall'Accademia di Berlino.

Ma, se si vuol rendersi ragione dello sviluppo straordinario che la scuola cremoniana ha avuto nel nostro paese, e del primato geometrico indiscusso che essa è venuta poi conseguendo sulle altre scuole straniere, convien porre attenzione ad una dote che distingue il Nostro da alcuni dei suoi contemporanei, pur valorosi: cioè alla sua tendenza a ravvicinare questioni e metodi d'ordine diverso, geometrico ed analitico, anzichè rinchiudersi nello stretto purismo. Perciò appunto l'indirizzo sintetico puro, che in Italia fu suscitato dalla sua opera, potè qui, meglio che altrove, essere rapidamente superato, per il più grande progresso della scienza.

4. — *Casorati, Battaglini, Beltrami e Dini.*

Accanto a Brioschi, Betti e Cremona, la scuola matematica italiana deve ricordare altri maestri: Felice Casorati (1835-90) che ha dato un magnifico impulso alla teoria delle funzioni, professando sempre nella nativa Pavia; Battaglini, maestro di Geometria all'Università di Napoli; ma soprattutto Eugenio Beltrami e Ulisse Dini.

Il Beltrami (n. a Cremona nel 1835 e m. a Roma nel 1900), ha coltivato specialmente la Geometria differenziale e la Fisico-matematica, offrendo nei suoi lavori un modello di compiutezza e d'eleganza. Più larga traccia ha lasciato nel primo campo di studi, colla sua geniale interpretazione della Geometria non-euclidea. Per la nostra generazione, che ha assimilato nel più vasto senso i resultati della critica dei principii, non accade di comprendere la straordinaria importanza dell'opera del Beltrami. Ma bisogna riportarsi all'epoca in cui essa apparve, quando le speculazioni di Lobafschebski e di Riemann erano mal conosciute o accolte come fantasiose ed assurde costruzioni;

Beltrami ha fatto la luce in un campo oscuro: dopo di lui nessuno più ha rifiutato il diritto di cittadinanza alle nuove dottrine.

Il Dini (n. 1845, m. 1918), studente e subito dopo maestro nella nativa Pisa, prosegue dapprima l'indirizzo della Geometria differenziale del Beltrami. Ma poi volge il suo ingegno, penetrante ed acuto, alle investigazioni sui principii dell'Analisi infinitesimale, nelle quali s'incontra coi matematici della scuola di Weierstrass. Le lezioni di Calcolo e altri suoi libri fondamentali, hanno dato impulso in Italia ad una lunga serie di ricerche critiche sulla teoria delle funzioni di variabili reali.

5. — *Nuovi sviluppi della Fisica-matematica.*

Ho parlato di maestri che appartengono ad una generazione ormai scomparsa. I loro discepoli sono, oggi, gli uomini rappresentativi della scienza italiana. Ma piuttosto che delle persone, dirò ora degli indirizzi principali che vengono da noi coltivati. Dopo Cauchy e Riemann — quando sembrava di possedere ormai le leggi elementari della Fisica, espresse da certe equazioni differenziali — lo studio di alcuni tipi di equazioni differenziali e dei loro metodi d'integrazione, ha dato luogo ad un ramo particolare delle discipline matematiche, che costituisce la Fisica matematica classica. Nella quale dunque i progressi della Fisica sono pensati come dipendenti da quelli d'un gruppo assai ben definito di problemi dell'Analisi.

In Italia la Fisica matematica del Betti e del Beltrami ha pòrto il modello di questo ramo della scienza. I più forti analisti si sono cimentati con tali questioni.

Ho già accennato al teorema di reciprocità del Betti. Il metodo così segnato nello studio dell'elasticità si svolge presto (1) colle ricerche del Cerruti e colla scoperta delle formule del Somigliana. Marcolongo, Tedone, Almansi, Lauricella, Levi-Civita ed altri ancora, proseguono la teoria dell'equazione a derivate parziali che domina tale ordine di questioni, e studiano parallelamente la doppia equazione di Laplace. Volterra — che ha dato impulso ad alcune delle predette ricerche (Tedone, Lauricella ed Almansi sono usciti dalla sua scuola) — passa dal caso dell'equilibrio alla trattazione sistematica delle vibrazioni elastiche, mercè la teoria delle caratteristiche e dei loro inviluppi. D'altra parte pone e risolve un problema d'equilibrio affatto nuovo pei solidi elastici più volte connessi, giungendo a resultati precisi, che hanno ricevuto una brillante conferma sperimentale da Corbino.

Tanti altri campi della Meccanica e della Fisica matematica furono arricchiti dalle ricerche dei matematici sopra nominati e da quelle di Siacci, Morera, Maggi, Burgatti, Cisotti, Signorini ecc. Ma, per non trascorrere in un'esposizione troppo arida e tecnica, mi limiterò a parlare di due indirizzi e di due nomi rappresentativi: Vito Volterra e Tullio Levi-Civita.

Il primo fu allievo del Betti a Pisa, e anche dal Roiti ricevette impulso alla Fisica. La sua potenza d'analista si è rivelata nelle più svariate ricerche; i metodi classici delle equazioni differenziali (di Hamilton, Jacobi ecc.) sono stati da lui adoperati con straordinaria abilità, anche in alcune delle ricerche sopra accennate. Ma il suo nome resta legato specialmente a quell'ordine d'idee da cui è scaturita la dottrina delle funzioni di linee e delle equazioni integrali ed integro-differenziali.

Questo progresso ha una doppia origine: fisica e matematica.

Vi sono fenomeni fisici che la Meccanica classica sembra meno capace di spiegare, dove lo stato futuro d'un sistema si vede dipendere, non più da un presente istantaneo, secondo le ipotesi di Galilei-Newton, ma da tutto il passato: tali, per esempio, i fenomeni dell'isteresi elastica. Volterra riflette su questi fenomeni e sul problema della Meccanica ereditaria posto dal Robin, secondo lo spirito della filosofia positiva: se anche l'eredità è apparente, come per Newton l'azione dei gravi a distanza, si può domandare tuttavia di tradurre in forma matematica la dipendenza d'uno stato materiale presente dal suo passato; ma perciò si è tratti ad abbandonare le classiche equazioni differenziali e a rimpiazzarle con nuovi tipi d'equazioni per cui la funzione incognita viene a dipendere, anzichè da semplici variabili, dalla forma o dalla totalità dei valori di altre funzioni. Gli sforzi del Volterra tendono a foggiare l'istrumento analitico per trattare tali equazioni. E già prima di pensare alla possibile applicazione, il suo pensiero era stato condotto su questa via da uno studio approfondito di Lagrange.

È noto che il sommo matematico piemontese, vissuto lungamente a Parigi alla fine del secolo decimottavo, ha organizzato in una trattazione sistematica formale, da una parte la Meccanica analitica e dall'altra il Calcolo delle variazioni. Volterra vede nel pensiero lagrangiano il primo passo verso una generalizzazione dell'Analisi infinitesimale. Il passaggio dal discontinuo al continuo, che si mette in opera nel metodo del Calcolo differenziale e integrale di Newton e di Leibniz, è suscettibile di essere compreso più largamente; i problemi di massimo e minimo di Lagrange ne porgono già un primo esempio; ma si può ridurre in generale operazioni funzionali complesse alla ripetizione di semplici operazioni algebriche, passando dal caso d'un numero infinito a quello d'una successione infinita e continua. Così appunto il Volterra illumina la teoria delle equazioni differenziali lineari, riconducendola al concetto dell'integrazione delle sostituzioni lineari.

Il Calcolo funzionale e le equazioni integrali ed integro-differenziali che ne derivano, costituiscono il campo in cui il nostro matematico ha impresso i segni più profondi del suo ingegno: l'idea originale è svolta in una serie di problemi concreti, con logica diritta e con quel forte sentimento delle analogie formali, che conferisce l'abilità algoritmica. E questi studi del Volterra, insieme a quelli del Fredholm, hanno avuto largo seguito nell'attività degli analisti contemporanei.

Tullio Levi-Civita, nella Fisica matematica e nella Meccanica (di cui ha composto anche, in collaborazione coll'Amaldi, un eccellente trattato) ha risolto e approfondito problemi importanti, nettamente posti: sulla stabilità, sulla teoria delle onde ecc.

Una nota caratteristica della sua produzione è di unire le questioni meccaniche alla Geometria differenziale, che egli tratta coi metodi del suo maestro Gregorio Ricci, come dirò più avanti. L'alleanza della Meccanica colla Geometria differenziale, di cui offerse già un modello il Beltrami, ha ora il suo campo proprio nella Dinamica relativistica, ma può osservarsi già in ricerche precedenti del Nostro. Così, per esempio, egli è riuscito a determi-

(1) Cfr. R. Marcolongo: « *Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità* in *Italia, dal 1870 al 1907; Nuovo Cimento,* T, 19.

nare i problemi dinamici che danno origine allo stesso sistema di traiettorie, riportandosi alla questione di trovare le trasformazioni delle varietà comunque estese che conservano le geodetiche: la quale, nel caso più elementare delle due dimensioni, era stata trattata dal Dini. Dalla ricerca del Levi-Civita è scaturita quindi la classificazione generale dei gruppi geodetici delle varietà, compiuta da Guido Fubini.

6. — *Geometria differenziale*

Quando si parla di Geometria differenziale, il pensiero corre naturalmente al Bianchi, maestro di questi studi in Italia, il maggiore forse tra i geometri differenziali viventi. Luigi Bianchi, che idealmente si ricongiunge alla tradizione di Monge e di Gauss, è uscito dalla scuola del Betti e del Dini, e ne prosegue l'insegnamento come professore dell'Università di Pisa e direttore di quella Scuola Normale. Egli si è formato anche sul modello del Beltrami, ed ha ampliato i suoi orizzonti al contatto con Felice Klein di cui fu allievo a Lipsia.

Non mi fermerò ad esaminare le sue belle ricerche, dominate da una lucida intuizione visiva (cito, a memoria, gli studi sull'applicabilità, sulle trasformazioni delle superfici a curvatura costante ecc.), ma dirò che molte di esse sono esposte o riassunte nel suo grande trattato di Geometria differenziale, che si è andato allargando attraverso le successive edizioni. Accanto al quale debbono pure ricordarsi anche gli altri trattati del Bianchi: una collana di volumi in cui vengono esposti, in forma semplice e lucida, e generalmente con unità di metodo, le più alte dottrine delle Matematiche moderne.

Dalla scuola del Bianchi sono usciti non solo geometri differenziali in senso stretto, ma cultori di varii indirizzi ed in ispecie investigatori della teoria generale delle equazioni a derivate parziali, che si ricongiungono coi fisici-matematici. Appunto da codesta scuola è venuto il già nominato Fubini, che è oggi uno dei più forti analisti del nostro paese, ed ancora Onorato Niccoletti studioso delle equazioni di tipo iperbolico, e Eugenio Elia Levi che ha approfondito quelle di tipo parabolico, di cui s'incontrano casi particolari nella teoria del calore. Le belle ricerche su tale argomento, ed altre sulle funzioni analitiche di più variabili, ponevano in vista il giovane matematico come un'alta promessa dei nostri studi; ma egli ha dato generosamente la vita, nella recente guerra per la redenzione della Patria!

Accanto al Bianchi, e indipendentemente da lui, è fiorito un altro indirizzo, che prende origine dal riavvicinamento della teoria delle forme differenziali coll'algebra delle sostituzioni lineari.

Intendo la Geometria intrinseca di Ernesto Cesaro e il Calcolo differenziale assoluto, costruito da Gregorio Ricci e recentemente perfezionato dal Levi-Civita. L'idea fondamentale è di studiare la metrica d'una linea, d'una superfice o d'una varietà più volte estesa, guardando alle proprietà interne, invarianti in una trasformazione per applicabilità. Il Calcolo del Ricci costituisce appunto l'istrumento per approfondire tale analisi, che ha trovato la più brillante applicazione nei problemi matematici posti dalla Dinamica di Einstein.

Ho menzionato il legame fra la Geometria differenziale, la teoria delle equazioni differenziali e la Fisica-matematica, per cui riesce difficile distinguere gli studiosi di codesti indirizzi. Può sembrare strano invece che alla Geometria differenziale meno partecipino i cultori della Geometria proiettiva od algebrica discendenti dal Cremona. Eppure il fatto è così evidente che, nella divisione, che un tempo si faceva in Italia, fra analisti e geometri, i geometri differenziali si ponevano piuttosto a lato degli analisti. Tuttavia il paradosso si spiega riflettendo che i geometri, nel senso cremoniano, sono educati dalla Geometria proiettiva alla visione degli enti matematici nella loro totalità, e perciò pensano naturalmente al campo delle variabili complesse; mentre i cultori della Geometria differenziale (almeno i citati italiani) restano nel campo delle variabili reali, adoperando il Calcolo colle condizioni di diseguaglianza che vengono imposte dalle esigenze d'un esame locale. Così i primi si riaccostano piuttosto all'analisi qualitativa e alla teoria delle funzioni, mentre l'analisi dei secondi è più spesso quantitativa e legata all'uso degli algoritmi.

Ma infine l'intima parentela degli argomenti deve superare le differenze di metodo. Un avvicinamento si avverte nel più recente indirizzo della Geometria differenziale proiettiva: un campo di ricerche aperto fra noi da qualche osservazione suggestiva di Corrado Segre, in cui ha compiuto le più profonde ricerche il Fubini. In questo campo appunto sono entrati due giovani valorosi, Enrico Bompiani e Alessandro Terracini, educati entrambi secondo lo spirito della Geometria proiettiva ed algebrica (rispettivamente dal Castelnuovo e dal Segre): i quali hanno scoperto il senso geometrico di alcuni elementi definiti dall'analisi di Fubini, offrendo così interpretazioni eleganti della teoria.

Forse è lecito prevedere che da questo avvicinamento d'indirizzi e d'idee, abbia a scaturire un'unione anche più intima; auspicando che anche nella nostra Geometria differenziale s'introducano quelle considerazioni sull'immaginario, di cui Sophus Lie e Gastone Darboux fecero un uso così brillante.

7. — *Funzioni analitiche.*

La teoria delle funzioni propriamente detta (funzioni analitiche nel piano della variabile complessa), oltre ad essere usata in alcuni problemi dei fisici matematici, è coltivata per se stessa da Salvatore Pincherle, Ernesto Pascal, Giulio Vivanti, Guido Fubini, Mauro Picone ed altri ancora. Senza indugiarmi in un esame particolareggiato, dirò in breve delle tendenze e delle idee che contrassegnano diversi indirizzi accennando in ispecie ad alcune ricerche.

Il Pincherle, maestro da quasi cinquant'anni all'Università di Bologna, è uscito dalla scuola di Pisa e fu anche allievo del Weierstrass a Berlino. Le lezioni del grande analista, ed insieme i lavori di Carlo Hermite, sembrano avere esercitato la più forte influenza sul suo pensiero. Infatti nei suoi numerosi lavori, egli concepisce sempre la funzione analitica come serie di potenze, determinata nella sua continuazione dai coefficienti dello sviluppo che si dia intorno ad un punto. La stessa concezione domina i suoi studi sulle operazioni funzionali distributive (caso lineare del Volterra), dove molti teoremi relativi a tali operazioni ricevono eleganti dimostrazioni. In quest'ordine l'idee, un resultato nuovo ed interessante (che si lega all'idea della funzione indicatrice), è stato ottenuto di recente da Luigi Fantappiè, un giovane scolaro del Volterra.

Il Pascal, nei suoi studi sulle funzioni abeliane, congiunse l'impulso del Klein, di cui fu scolaro di perfezionamento, alle tendenze algoritmiche del Brioschi, che bene convengono alla sua mente.

Il Fubini riattaccandosi a Poincaré e a Klein, ha approfondito con ricerche originali la teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, di cui ha esposto in un libro le più generali proprietà.

Nell'insieme però bisogna dire che la teoria delle funzioni non ha avuto in Italia uno sviluppo comparabile a quello della scuola francese, — di Poincaré, Picard e Painlevé — che ha raccolto la grande eredità di Bernardo Riemann. Lo spirito di Riemann, divulgato fra noi dalla magnifica esposizione del Casorati (1868) ha influito soltanto più tardi sulla scuola geometrica, che ha profondamente sentito quel tanto di più ricco e di suggestivo che esso reca in confronto all'impeccabile metodica di Weierstrass.

8. — *Funzioni di variabile reale.*

Più che alla considerazione sintetica delle funzioni analitiche i matematici italiani si sono rivolti allo studio delle funzioni di variabile reale: il campo aperto fra noi dalla critica di Ulisse Dini. Qui anzi l'opera degl'Italiani precede quella dei Francesi, i quali — circa vent'anni or sono — ebbero a *scoprire* ciò che si era fatto in Italia ed era passato inosservato: per esempio i teoremi d'Ascoli e d'Arzelà.

Cesare Arzelà ha insegnato fino al termine della sua vita (1907) all'Università di Bologna; ed ha formato numerosi discepoli. Cito, in particolare, Giuseppe Vitali e Leonida Tonelli — suo successore nella cattedra — che ha rinnovato il Calcolo delle variazioni.

Altri matematici hanno portato notevoli contributi a quest'ordine d'idee; e vale la pena di ricordare che il concetto più generale dell'integrazione (studiato poi in Francia, dal Lebesgue), è stato indagato nelle ricerche del Vitali e di Beppo Levi. La critica dei fondamenti del Calcolo infinitesimale ha ricevuto impulso da Giuseppe Peano, allievo del Genocchi e poi professore nell'Ateneo di Torino. Il quale, con insuperato acume, e con un senso raffinato della semplicità concettuale, ha approfondito tante questioni sottili, mettendo in luce meravigliosi paradossi: p. es. la curva piana che riempie un quadrato! Però tali ricerche sono ormai un po' antiche, poichè l'autore si è volto successivamente dal Calcolo alla Logica matematica e alla questione della lingua ausiliaria internazionale.

Giudicata nel suo insieme, l'opera dei matematici italiani che hanno approfondito la teoria delle funzioni di variabile reale, siccome quella dei francesi, ha condotto a chiarire la visione dell'Analisi e a stabilire con rigore resultati importanti, rinnovando anche l'insegnamento. Si può dubitare tuttavia se un'influenza troppo esclusiva in questo senso (quando il rigore sia posto come esigenza a priori, anzichè come conclusione d'uno sviluppo storico) non rischi di disseccare le qualità creatrici dell'intuizione. E di fronte ad un eccessivo propagarsi della critica si può anche chiederci se un indirizzo di studi dominato da scopi puramente logici, non possa degenerare pei minori in un campo d'esercitazioni astratto ove si cimenti la sottigliezza degli ingegni, senza l'arricchimento dello spirito che porta con sè una più larga cultura. Il pericolo esiste non solo e non tanto per le Matematiche italiane; in altri paesi anzi certi indirizzi, come la teoria degl'insiemi, hanno preso uno sviluppo veramente mostruoso, dando luogo ad una nuova scolastica.

9. — *Evoluzione della scuola geometrica cremoniana.*

Nei varii rami delle Matematiche di cui ho discorso fin quì si vedono uomini di alto valore che hanno, naturalmente, alcuni legami di discendenza da comuni maestri, onde si formano anche gruppi di ricerche collegate (come quelle sull'elasticità); ma non si può dire che vi sieno veramente delle scuole, con caratteri nazionali propri. Una vera scuola è costituita invece dai cosidetti geometri.

Questa scuola discende dal Cremona e la sua formazione e il suo sviluppo costituiscono un fenomeno interessante della vita scientifica del nostro paese.

L'insegnamento del Cremona sulla Geometria proiettiva e sulla teoria sintetica delle curve, fu raccolto immediatamente da alcuni discepoli di valore; mi limito a citare Ettore Caporali e Riccardo De Paolis, ambedue morti giovani, intorno al 1890, dieci anni prima del Maestro. Sorse l'ideale di sviluppare il metodo sintetico in contrapposto al metodo analitico. Quel metodo, allora nuovo, era così promettente, ed anche così artistico! L'Italia ancor più della Germania e della Francia sembrava chiamata dal suo genio a fruttificarlo.

La tendenza sintetica aveva in sè il pericolo di tutti i purismi: lo spirito del ricercatore viene ad appagarsi d'una cultura più povera; i problemi isolandosi dalla tradizione finiscono per perdere significato. C'era di più, nel caso della Geometria, che i nuovi e potenti metodi di trasformazione suscitavano l'illusione di poter moltiplicare a volontà le scoperte. Michele Chasles lo aveva detto espressamente: « Peut donc qui voundra devenir géomètre à volonté; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice ».

Così i geometri pullularono attorno alla prima scuola del Cremona; ma pochi di questi si volgevano a scopi veramente serii come Domenico Montesano (che ancor oggi prosegue l'indirizzo sintetico puro con alto senso d'arte); i più erano attratti dalla sperata facilità di successo. Si giunse a tale che spiritosamente fu detto: in Italia basta piantare un fagiuolo perchè nasca un geometra.

Però la produzione meccanica fu ben definita da un geometra umanista: tic-tac-geometria, diceva Enrico D'Ovidio.

Ragioni in qualche modo analoghe (e soprattutto la fatale chiusura degli orizzonti) provocavano al tempo stesso la dissoluzione della geometria sintetica in altri paesi, per esempio in Germania. L'Italia doveva superare la crisi e dar luogo al più alto sviluppo delle dottrine geometriche che si sia mai raggiunto nel mondo. Testimone non sospetto, il matematico di multiforme ingegno Felice Klein, scriveva nel 1903 che l'Italia è divenuta il centro proprio della ricerca geometrica.

Ho già accennato che questa felice evoluzione si deve ai ricchi elementi della cultura del Cremona. Il metodo sintetico era l'aspetto più appariscente della sua scienza, ma i più larghi interessi analitici (per esempio per le funzioni abeliane) dovevan pure richiamare, in un secondo tempo, l'attenzione dei suoi discepoli più vigorosi. Così appunto Eugenio Bertini (che la legge sui limiti d'età ha tolto oggni all'insegnamento dell'Università di Pisa) avvicinava nelle sue ricerche il punto di vista algebrico e analitico a quello propriamente geometrico. Su di lui cominciava ad esercitarsi l'influenza di Riemann, traverso gl'insegnamenti del Casorati per molti anni collega a Pavia. Affatto nuova per i suoi tempi, e feconda per lo sviluppo ulteriore della Geometria, è la posizione data dal Bertini al problema delle involuzioni piane, come ricerca dei tipi irriducibili per trasformazioni cremoniane.

Intanto maturava nella coscienza dei geometri l'idea degli spazi a più di tre dimensioni. Era venuto il momento in cui la teoria di questi continui superiori poteva essere svolta per il suo interesse matematico, indipendentemente dalle questioni filosofiche sul loro possibile significato fisico. Felice Klein contribuì a indirizzare in questo senso Giuseppe Veronese (che fu pure allievo del Cremona) e Corrado Segre, cresciuto a Torino alla scuola del D'Ovidio. Il primo, dopo alcune belle ricerche, fu attratto specialmente dalle questioni critiche: nelle quali, nonostante una certa oscurità ha segnato un'orma, precorrendo la geometria non-archimedea di David Hilbert.

Il Segre è divenuto il maestro, diretto o indiritto, delle nuove generazioni di geometri. Egli è morto appena toccati i sessant'anni, nel 1924, ma tutti coloro che lo hanno avvicinato hanno amato in lui il culto disinteressato della scienza ed han subito un poco della sua suggestione.

La sua influenza personale supera assai quella esercitata dalle ricerche, appartenenti in gran parte ad un'epoca di transizione. Segre è stato fra noi l'avversario del purismo, in nome delle esigenze superiori della scienza matematica, che deve tendere alla più alta comprensione dei problemi ed affrontare le difficoltà col più vasto possesso dei metodi. In un tempo in cui i geometri si rinchiudevano nella torre d'avorio della costruzione sintetica, egli è andato a cercare nelle opere degli analisti, e vi ha trovato resultati importanti per la geometria ed anche significativi per la posizione dei problemi. In particolare col consiglio e coll'esempio ha additato le nuove vie di ricerca: la geometria delle trasformazioni birazionali.

10. — *Geometria delle trasformazioni birazionali.*

Questa geometria — che collega felicemente Luigi Cremona e Max Noether (e traverso Noether si ricongiunge a Clebsch e a Riemann) — ha dato la sua misura colla teoria della superficie algebriche. Noether, pioniere del movimento, aveva abbandonato quello studio da circa un ventennio, per le difficoltà troppo gravi.

La scuola geometrica italiana l'ha ripreso con nuove idee, riuscendo a resultati fondamentali: una nuova armonia, più complessa, ma anche più bella di quel che poteva aspettarsi, si rivela ormai ai nostri occhi.

Gl'inizii della nuova teoria risalgono all'anno 1893. In quell'anno si trovarono a Roma Guido Castelnuovo e Federigo Enriques. Il primo era venuto da Torino, giovane professore, avendo così subito l'influenza del Segre, dopo essere stato scolaro del Veronese a Padova. Il secondo, accorreva, come studente di perfezionamento, alla scuola del Cremona, dopo avere studiato a Pisa, col De Paolis e col Bianchi, di cui l'impressionarono sopratutto le lezioni sull'algebra. Ventiduenne aveva già il superbo proposito (espresso al Segre) di riprendere e ricostruire ex novo l'opera del Noether, che in gran parte gli appariva incomprensibile. Ed infatti quell'anno stesso gettò le basi dello studio generale delle superficie algebriche, considerate rispetto alle trasformazioni birazionali, segnando la via di problemi che dovevano maturare più tardi. Il Castelnuovo frattanto risolveva la difficile questione della razionalità delle involuzioni piane.

Fra il Castelnuovo e l'Enriques, che fu chiamato l'anno appresso ad insegnare all'Università di Bologna, si strinse subito la più schietta e amichevole collaborazione. I problemi della geometria delle superficie formarono per lunghi anni argomento d'una corrispondenza epistolare quasi quotidiana e di lunghe conversazioni, quando gli amici potevano ritrovarsi. Allora lavoravano, di solito, passeggiando; e non era la strada che li affaticava di più. Azione e reazione reciproca di due mentalità che hanno caratteri in parte comuni e in parte diversi, riuscivano al miglior progresso delle idee. In pochi anni la teoria si andò svolgendo: Enriques assolse il compito della definizione generale degli invarianti, Castelnuovo riuscì alle condizioni di razionalità (che si esprimono annullando, oltre il genere numerico, anche il bigenere, nuovo invariante introdotto da Enriques) e alla più completa estensione del teorema di Riemann Roch. Poco dopo, unendo i loro sforzi, i due geometri pervenivano a chiarire altri problemi (sulle curve eccezionali, sulle possibili trasformazioni delle superficie in sè ecc.). Soltanto dopo il 1905 riuscì ad Enriques di chiudere, in qualche modo, quest'ordine di ricerche coi più generali teoremi classificatorii, dando le condizioni perchè una superficie $f(xyz)=0$ possa trasformarsi in un cilindro $F(XY)=0$ (annullamento del quadrigenere e del sestigenere).

Per quasi dieci anni i due geometri sopra nominati, erano restati quasi soli in Italia a lavorare nel campo delle superficie algebriche. Contemporaneamente in Francia, Emilio Picard aveva ripreso le dottrine di Noether collo studio degli integrali di differenziali algebrici delle funzioni di due variabili indipendenti. Secondo le distinzioni dei puristi, allora sopravviventi, questo era un ramo dell'Analisi pertinente alla teoria delle funzioni, in contrapposto alla Geometria algebrica.

Del resto, a parte le differenze di metodo, anche i resultati delle scuole italiana e francese offrivano difficoltà di confronto. Ma s'intravedevano notevoli analogie. Infatti Picard scorgeva il valore di quelle considerazioni geometriche che — in difetto d'un teorema d'esistenza sulle trascendenti — permettono di costruire un ricco materiale d'esempi, e presto si mise in relazione coi nostri. Questi, a loro volta, comprendevano che l'interpretazione algebrico-geometrica degli integrali avrebbe offerto un nuovo istrumento possente per superare molte difficoltà.

Enriques indovinò il ponte fra le due teorie attraverso un'osservazione di Humbert sulle superficie che contengono un sistema continuo non lineare di curve, e, nel 1902, riconobbe l'esistenza d'un tale sistema per le superficie che posseggono p integrali semplici di 1^a specie con $2p$ periodi. Poi incitò a lavorare su alcuni esempi caratteristici, il giovane Francesco Severi, che — uscito allora dall'Università di Torino — era venuto alla sua scuola a Bologna, per consiglio del Segre, e più in generale lo spinse ad approfondire lo studio delle trascendenti algebriche, che sorge come prolungamento della dottrina di Riemann degli integrali abeliani.

Nel ravvicinamento della teoria algebrico-geometrica delle superficie colla teoria trascendente di Picard, Severi raccolse presto bei resultati.

Colla scoperta, fatta poco dopo da Enriques, della proprietà caratteristica delle superficie irregolari (in rapporto alla sopra nominata osservazione di Humbert) tutta la scuola italiana si volse al nuovo aspetto dei problemi. E, per l'opera comune di Severi, Enriques e Castelnuovo si pervenne infine a riconoscere che il numero degli integrali di Picard di prima specie linearmente indipendenti è, per ogni superficie ,eguale alla differenza fra il genere geometrico e numerico (1905-6): così riesce anche completata la teoria analitica di Picard, dimostrandosi che il numero (p) di codesti integrali è sempre la metà del numero dei periodi (2p). Poco dopo Severi giungeva al teorema generale della base per i sistemi di curve appartenenti ad una superficie, in rapporto alla teoria degli integrali di terza specie. Enriques e Severi e — in un senso più aritmetico — Giuseppe Bagnera e Michele De Franchis (un altro valoroso aggiuntosi alla scuola dei geometri italiani) riuscivano a sciogliere il problema delle superficie iperellittiche, posto dai matematici francesi, onde alla memoria comune dei primi venne conferito il premio Bordin dell'Istituto di Francia nel 1907 e ai secondi lo stesso premio, per l'anno seguente.

La teoria delle superficie algebriche ha continuato a svolgersi negli anni seguenti, arricchendosi di resultati, col contributo sempre più largo dei giovani; citerò fra questi Annibale Comessanti e Oscar Chisini. Ma, piuttosto che insistere su particolari sviluppi, mi piace rilevare la coscienza nuova che è venuta penetrando i nostri geometri.

In opposizione all'antico ideale puristico la Geometria italiana ha messo in opera la più grande varietà di metodi, sintetici ed analitici; essa ha chiamato a contribuzione tutti i concetti e i metodi dell'Algebra e della teoria delle funzioni analitiche. Ed in primo luogo è divenuta consapevole di essere, essa medesima, un'algebra, concepita nel modo più generale: dove, al posto delle classiche equazioni ad un'incognita, si studiano equazioni e sistemi d'equazioni fra più variabili, con un qualunque grado d'interminazione. In questo senso la scuola riprende e continua la tradizione degli algebristi italiani del Cinquecento, che — attraverso Ruffini — si prolunga, come abbiamo visto, in Enrico Betti.

11. — *Essenza dell'Algebra.*

Il significato propriamente algebrico della Geometria è stato chiaramente affermato da Enriques, fin dal 1897 in una conferenza al Congresso matematico di Zurigo, nella quale vengono anche posti alcuni problemi di risoluzione, colla domanda se l'equazione algebrica generale $f(x\ y)=0$ possa risolversi parametricamente per radicali. Ma passarono quasi trent'anni prima che si avesse una risposta: data ora in senso negativo da Oscar Zariski, un giovane russo scolaro d'Enriques a Roma.

La classica Algebra ha subito, nella storia, più d'un'evoluzione. Dal calcolo approssimativo delle radici delle equazioni di Newton ,esce fuori il Calcolo differenziale. Dalla teoria delle funzioni simmetriche e dalle considerazioni di Lagrange, si svolge — con Galois e Betti — la teoria dei gruppi di sostituzioni. Più tardi sotto l'influenza della Geometria proiettiva, sorge — nelle scuole inglese e tedesca — l'algebra delle sostituzioni lineari, o teoria delle forme, che in Italia — dopo il Brioschi — è stata coltivata brillantemente da Enrico d'Ovidio ,da Ernesto Pascal e da Luigi Berzolari. Qual'è la vera essenza dell'Algebra? Per i tedeschi d'oggi mi riferiscono al trattato ancora rappresentativo del Weber) l'Algebra è soprattutto: teoria dei numeri o aritmetica superiore; per i geometri italiani: teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Là si contempla esclusivamente il discontinuo, qua si vede sorgere il discontinuo dal continuo.

Non voglio dire che i problemi aritmetici sieno trascurati fra noi. Basta infatti ricordare Ernesto Cesaro, che coltivò con tanta originalità le questioni asintotiche, e Giuseppe Bagnera, morto l'anno scorso a Roma sulla cattedra d'Analisi infintesimale. Ancora: Gaetano Scorza, Beppo Levi, Michele Cipolla e, fra i più giovani, Giovanni Sansone, uscito dalla scuola del Bianchi. Ma, in alcuni dei nominati studiosi una visione geometrica tende ad armonizzarsi collo spirito aritmetico. Così accade nelle belle ricerche del Bagnera e in quelle sui corpi di numeri e sulle algebre dello Scorza: del resto l'A., che insegna ora all'Università di Napoli e che è uomo d'alto ingegno e di larga cultura, ha formato il suo pensiero colla geometria. E veste geometrica hanno anche gli studi sulle forme cubiche, con cui B. Levi ha approfondito alcuni problemi del Poincarè.

12. — *Lo spirito geometrico.*

Nel concetto dei geometri italiani la Geometria non è soltanto Algebra, ma qualcosa di più. C'è una tendenza espansiva a dominare diversi campi della ricerca matematica, o quanto meno a informarli del proprio spirito. Collo studio delle singolarità algebroidi, che si lega pure ai problemi di massimo e minimo delle funzioni di più variabili, si fa progredire un capitolo un pò trascurato del Calcolo differenziale. La teoria dei gruppi proiettivi illumina l'integrazione delle equazioni differenziali lineari: come si vede nelle ricerche di Gino Fano.

Il problema di determinare i gruppi continui di trasformazioni birazionali del piano e dello spazio appartiene alla geometria algebrica; ma la sua trattazione si collega naturalmente alla dottrina generale dei gruppi di trasformazioni di Sophus Lie (Enriques e Fano). Anche Ugo Amaldi, che è il maggior cultore di questa dottrina in Italia, porta lo spirito della scuola geometrica nelle ricerche sul potenziale, e nell'analisi classificatoria dei gruppi infiniti. Che cos'è infine questo spirito? Di esso, come di certe essenze metafisiche, è più facile dire quello che « non è ». Non è un carattere particolare dei problemi e nemmeno, propriamente, un metodo. Non appartiene tanto alla cosa che si studia, quanto alla mente dello studioso. Ma anche a definirlo come una speciale mentalità, non riesce facile di precisarne la natura. Se qualcuno dei geometri, come p. es. il Chisini, possiede una forte intuizione visiva (che lo abilita alle più profonde ricerche d'Analysis situs) altri non *vede* veramente cogli occhi corporali e con difficoltà si rappresenta la figure visibili. La mentalità dei « geometri » italiani non si potrebbe dunque caratterizzare dalla semplice qualità visiva, che d'altronde si trova assai spiccata in qualcuno degli analisti o dei geometri differenziali, più lontani dall'eredità cremoniana. Se si vuol parlare d'una visione comune a tutti, giova riferirsi ad una forma dell'immaginazione più raffinata ed astratta, quale occorre, per esempio, a *vedere* cogli occhi dello spirito, negli spazi a più dimensioni. Ma per comprendere bene ciò che vi è di caratteristico nell'intelligenza dei geometri, alcuni tratti del loro lavoro riescono particolarmente significativi.

Uno studioso intento a tracciare sulla carta dei piccoli segni — segni inafferrabili dal senso nascosto e quasi mistico per i profani! —, è l'aspetto sotto cui la fantasia del volgo ama raffigurarsi il matematico. Questo non è il ritratto del nostro « geometra ». Il quale più spesso suole studiare passeggiando e conversando con un collega o compagno. Nel suo modo di ricerca c'è qualcosa di romantico: il desiderio di conquistare da sè la verità che gli occorre o di ritrovarne il possesso ad ogni momento col puro sforzo del proprio pensiero; la tendenza a scorgere la verità generale attraverso casi particolari; e soprattutto a non appagarsi di dimostrazioni in cui la scienza cade dal cielo, come conseguenza di calcoli o di procediment di trasformazione dei quali non appaia il motivo.

Questi caratteri non appartengono soltanto alla scuola dei geometri italiani. Nell'analisi qualitativa di Riemann e dei matematici francesi, specialmente in Poincarè, si riconosce il medesimo spirito. Ma la nostra scuola lo ha educato al massimo grado. E se anche l'attuale Geometria abbia a perdersi un giorno fondendosi nel vasto corpo dell'Analisi, tutto l'indirizzo del pensiero matematico ne resterà trasformato. La Geometria non sarà passato invano.

12. — *Matematiche, poesia e filosofia.*

Il pubblico che ha poca dimestichezza coi matematici, li giudica secondo il modello dei ragionieri o degl'ingegneri che ha più occasione d'avvicinare. Ma il vero matematico, qualunque sieno le sue tendenze geometriche o analitiche, è assai lontano, non soltanto dal calcolatore pratico, sì anche del tecnico dell'edilizia o delle macchine. Alcuni distrazioni che si raccontano di grandi matematici — ricordo Poincarè che passeggia per le vie di Parigi con una gabbia d'uccelli presa senz'accorgersi dal banco d'un rivenditore! — recano qualche lume sulla loro psicologia. Quell'assorbimento del pensiero in se stesso, onde l'uomo dimentica tutto ciò che lo circonda, ravvicina il matematico al poeta: l'uno e l'altro vivono in un mondo creato dalla propria fantasia ed inseguono le immagini del loro sogno.

Sono, per il poeta, immagini scolpite nella lava ardente della passione; mentre le immagini del matematico sorgono come figure marmoree di classica bellezza, nella rigida proporzione dele forme. Ma questa bellezza esprime a suo modo il segreto bisogno dell'anima umana che aspira a comporre in un ordine il tumulto delle passioni e a risolvere in un'armonia superiore la discordante realtà: a quel modo appunto che l'arte classica supera il momento romantico e purifica l'ebbrezza dionisiaca nell'ideale apollineo.

Ma come il poeta vuole animare col suo canto gli animali e le pietre, il matematico dà vita alle creature della sua fantasia. Le forme matematiche non sono soltanto nella sua mente, sì anche nella natura. Esprimono a priori la legge che dovrà realizzarsi in questo o quell'angolo dell'universo; e che Galileo vede scritta nell'alfabeto proprio alla parola d'Iddio. Keplero ha cercato per lunghi anni il semplice rapporto fra i moti dei pianeti, che è riuscito a scoprire nell'« Harmonices mundi ». Questa scoperta lo riempie del più schietto entusiasmo: « Il mio lavoro è compiuto. Venga ora più presto o più tardi colui che saprà comprenderlo. Io posso bene aspettare, poichè Dio ha aspettato due mil'anni un contemplatore della sua opera ».

Tale atteggiamento dei matematici li porta, non soltanto a indagare i problemi della natura, ma anche alla speculazione filosofica. I più grandi fiolosofi furono matematici o trassero ispirazione dalle matematiche. Il razionalismo greco porta il suggello dello spirito pitagorico: che, nei tempi moderni, rinasce con Galileo, Descartes e Leibniz.

Kant e il romanticismo tedesco dopo di lui, hanno rotto l'unione delle matematiche colla filosofia; pure nel corso dello stesso secolo decimonono riappaiono matematici filosofi: il più popolare è Augusto Comte, fondatore del positivismo.

13. — *Filosofia della scienza.*

L'unione della matematiche colla filosofia si rafferma colla crisi della filosofia positiva. È l'anima del pensiero matematico che si esprime nella nuova critica della scienza, a cui lavorano Helmholtz e Mach, Poincarè, Jevons e Clifford.

A questo movimento gl'Italiani non potevano rimanere estranei. Intanto essi vi erano condotti da quell'analisi dei principii che tanto strettamente si lega ai più alti sviluppi delle recenti matematiche. Il bisogno di chiarire il significato degli spazi a più dimensioni ha spinto appunto in questo campo Giuseppe Veronese.

Giuseppe Peano vi è giunto invece dalla critica dei principii dell'Aritmetica e del Calcolo vettoriale: più tardi ha esaminato anche i principii della Geometria di posizione di Moritz Pasch.

Ma egli ha oltrepassato i confini del problema matematico, collo studio della logica simbolica. La scuola da lui fondata ha raccolto intorno a sè numerosi discepoli: alcuni dei quali si sono limitati ad approfondire in vari sensi i fondamenti delle matematiche, mentre altri sono trascorsi più largamente nel campo della filosofia e della storia della scienza. Fra questi mi piace ricordare specialmente Giovanni Vailati, morto a quarantacinque anni nel 1909, i cui scritti molteplici (in genere sotto forma di recensioni) si possono leggere raccolti nel grosso volume composto dalla pietà degli amici; nella stessa varietà degli argomenti balza fuori una caratteristica unità, che è lo spirito originale dell'autore, intento soprattutto ad indagare il problema dell'espressione del pensiero per mezzo del linguaggio.

Da un'altra parte Federigo Enriques veniva condotto alla critica dei principii. Chiamato nel 1894 ad insegnare Geometria proiettiva all'Università di Bologna, egli riusciva a colmare le lacune del sistema di Standt e così a compiere le ricerche di Klein, Lüroth e Zeuthen, De Paolis, sui fondamenti di codesta scienza: le Lezioni di Geometria proiettiva che ne scaturiscono, furono pubblicate per la prima volta nel 1898, e poco appresso comparvero nella traduzione tedesca, presentate dal Klein. L'autore proseguiva quindi la sua critica dei principii in tutti i campi della Geometria e poi dell'Aritmetica, raccogliendo e ordinando gli studi di numerosi collaboratori e discepoli in un'opera collettiva che costituiva un volume nel 1900 e, attraverso successive traduzioni e edizioni, si è ampliata nei quattro volumi delle « Questioni riguardanti le Matematiche elementari », finiti di pubblicare presso l'editore Zanichelli, nel 1927.

La critica così svolta non mira soltanto al rigore logico, ma contempla, nel modo più largo, gl'interessi d'ordine scientifico e filosofico, storico, didattico e artistico. Nondimeno essa rimane nell'ambito delle Matematiche. Alla filosofia, come teoria generale della conoscenza scientifica, si sollevano invece i « Problemi della Scienza » che videro la luce nel 1906, e che presto furono divulgati attraverso traduzioni in francese, inglese, tedesco, russo.

Il contributo più specialmente scientifico di quest'opera concerne il problema dei principii della Meccanica, coll'analisi dei concetti di spazio, tempo ecc. Per essa l'Italia non è rimasta assente da quel processo filosofico di revisione delle idee di Kant e di rinnovamento della Dinamica newtoniana, onde è scaturita la teoria della relatività di Alberto Einstein. Accanto alla dinamica di Newton vi è luogo a considerare la possibilità di altre Dinamiche, non newtoniane; e il loro fondamento comune viene scorto da Enriques nelle leggi del moto incipiente, le quali sono valide egualmente per qualunque moto relativo. Per descrivere la continuità del moto occorre aggiungere un'ipotesi, che può essere il postulato d'inerzia di Galilei, Newton o un'altro principio più generale. Questo principio fu scoperto da Einstein nel 1917: è curioso vedere che la più brillante conferma della scoperta — cioè la correzione dell'anomalia del perielio di Mercurio — era proprio indicata nei Problemi della Scienza del 1906, come criterio e misura della costruzione da compiere!

Enriques non ha cessato di discutere i problemi filosofici, pubblicando nel 1912 « Scienza e razionalismo » e nel 1922 « Per una Storia della logica: i principii e l'ordine della Scienza nel concetto dei pensatori matematici ». La sua mente si è andata orientando sempre più verso la comprensione storica; il bisogno di risalire alle sorgenti della nostra cultura lo ha condotto alla storia del pensiero greco, cui ha dedicato, in questi ultimi anni, particolari ricerche (pubblicate per la maggior parte nel Periodico di Matematiche). E finalmente colla pubblicazione d'una collana di classici accompagnati da note storico-critiche, egli lavora oggi a diffondere l'intelligenza storica del sapere fra i giovani studiosi ed insegnanti delle Matematiche e della Fisica.

14. — *Storia delle matematiche.*

Questa maniera di storia — che tende alla storia filosofica delle idee — si aggiunge, senza sostituirla, alla storia più tecnica della matematiche, che ha, in Italia, una lunga tradizione di cultura. È di ieri l'opera compiuta dal principe Boncompagni. La sua eredità scientifica è stata raccolta da Gino Loria (professore di Geometria all'Università di Genova), che ne ha proseguito il Bollettino. Il Loria ha dedicato alla storia delle matematiche in tutti i suoi rami, un'attività trentennale. Negli ultimi dieci anni si è volto anche sistematicamente a tali studi Ettore Bortolotti (dell'Università di Bologna), che è riuscito a illuminare di nuova luce l'opera degli Algebristi Italiani del Cinquecento e della Scuola bolognese. E non si potrebbero dimenticare: Giovanni Vacca, autore delle eccellenti note storiche che si trovano nel « Formulario » di Peano; e Roberto Marcolongo — che ho già menzionato come fisico matematico e meccanico — investigatore erudito della storia della Meccanica. Ma la storia della scienza non è coltivata soltanto da coloro che possono dirsi, in qualche modo, storici di professione, sì anche negli scritti occasionali di scienziati, nei loro rapporti, esposizioni di teorie ecc.

In questo senso contribuiscono al progresso della cultura storica opere come il « Repertorio » del Pascal, che di recente è stato rifatto ed ampliato in Germania, ma a cui resta sempre legato il nome dell'illustre analista napoletano. Ed anche alcuni articoli per l'Enciclopedia matematica, scritti con profonda intelligenza e dottrina, dal Berzolari; come pure articoli di Giulio Vivanti ecc.

15. — *Versatilità dei matematici.*

I matematici in genere, ed i matematici italiani in particolare, dimostrano nel loro insieme una versatilità d'ingegno e di cultura che è connaturata coll'indole del loro pensiero, perchè è un bisogno proprio dello spirito matematico, d'intendere e dominare la scienza razionale. Le esposizioni istoriche danno spesso occasione agli autori di mostrare la loro versatilità. Ma altre testimonianze se ne raccolgono in varie guise. Citerò soltanto G. A. Maggi (il chiaro professore e cultore di Meccanica dell'Università di Milano) che possiede un'erudizione storica e filologica portentosa, leggendo e parlando non sò quante diecine di lingue. E ricorderò anche, a memoria, alcuni saggi scientifici dei nostri matematici: nel campo della Biologia, la teoria matematica della selezione naturale darviniana, svolta recentemente dal Volterra; e nell'Economia (oltre ai contributi tecnici speciali degli economisti matematici come il Cantelli ecc.) le ricerche critiche dello Scorza ecc.

Conclusione.

Giunto al termine di quest'articolo, mi accorgo di aver esaminato soltanto una piccola parte degli sviluppi delle matematiche italiane, e quindi di aver dimenticato nomi di degni studiosi ovvero di avere appena citato altri, di cui pur sarebbe stato interessante esaminare i resultati, le tendenze, le idee. Debbo dunque dichiarare che questo non vuole essere un rapporto obiettivo della produzione matematica del nostro paese, in cui si assegni a ciascuno un posto in proporzione ai suoi meriti; e del resto non avrei veste per erigermi a giudice di stimati colleghi. Il mio articolo tende ad altro scopo: anzitutto far sapere agli Italiani che c'è una famiglia di studiosi, la quale, dinnanzi al mondo, tiene alto il decoro della scienza e del pensiero italiano; ed anche offrire qualche esempio e qualche suggestione sul lavoro dei matematici. Questi uomini sono tanto remoti dal pubblico; e la loro disciplina, incomprensibile ai più, si circonda anche del mistero d'un linguaggio simbolico. Ho cercato di spiegare che tale linguaggio non è l'essenza stessa del pensiero matematico e perciò mi sono indugiato volentieri sulla scuola geometrica; ma non vorrei si credesse ch'io abbia minore stima per altre forme di mentalità, le quali pure han tanta parte nello sviluppo storico della nostra scienza. Non ne ho minore stima; le conosco e le comprendo meno. Ho fatto male a seguire tendenze, impressioni e talora anche ricordi personali? Vorrei poter addurre a mia scusa di essere riuscito a colorire l'esposizione d'un argomento, per sè arido e tecnico. Anche le attività astratte degli uomini hanno una comune base affettiva e non si può tentare di umanizzarle senza partecipare alla commozione degli animi. L'amore per le idee e i problemi

che m'han fatto per più anni macro

accende il mio desiderio di renderli amabili anche ai più lontani.

Ed altro ancora vorrei dire.

Quanto più alte sono le Matematiche italiane tanto più è dovere di vigilare che non vengano meno le condizioni del loro progresso, poichè dove cessi o rallenti il moto, ivi si affaccia immancabile la decadenza. Basti avvertire il pericolo!

Tutti i rami della scienza sono solidali con quella che Pitagora e Platone hanno messo al vertice delle scienze umane.

Al Governo nazionale che vuol provvedere a tutti i bisogni e suscitare tutte le energie, ripetiamo con fiducia le parole di Napoleone:

L'altezza degli studi matematici è strettamente congiunta colla prosperità degli Stati.

FEDERIGO ENRIQUES
dell'Università di Roma

ITALIANI DELL' ULTIMO SECOLO

GRAZIADIO ISAIA ASCOLI

Nacque in Gorizia il 16 luglio del 1829 e morì il 21 gennaio 1907 in Milano.

In considerazione di alcuni suoi saggi semitici, nel 1860 il Mamiani, allora ministro della P. I., gli offriva la cattedra di *Lingue semitiche* nell'Università di Bologna; ma, non ritenendo egli la filologia semitica, per quanto fosse anche in quegli studî molto versato, il campo precipuo della sua futura attività scientifica, rinunziava nobilmente all'onorevole invito; accettava invece l'anno di poi la cattedra per lui istituita a Milano, che in origine ebbe il titolo di *Linguistica e lingue orientali* e poi quello più preciso e limitato, da lui stesso suggerito e divenuto ufficiale nel nostro ordinamento didattico universitario, di *Storia comparata delle lingue classiche e neolatine*. Ottenne d'essere messo a riposo nel giugno del 1902; ma già nel 1896 aveva lasciato effettivamente la cattedra, essendogli stato concesso un supplente nella persona del dottissimo compianto amico mio il professor Claudio Giacomino.

Interessante assai per mettere in evidenza l'altezza dell'ingegno dell'Ascoli è la dichiarazione da lui, con intenzioni di modestia, fatta nella Prolusione ai suoi corsi in Milano, ch'egli non aveva mai varcato la soglia d'una scuola: fu egli, dunque, un autodidatta nel senso più stretto ed esteso della parola; e infatti, quando giovanissimo d'anni — nel 1846 — egli pubblicò un suo primo saggiuolo, sulla affinità tra l'idioma friulano e il valacco (1), saggiuolo fondamentalmente errato, ma da cui già traluceva uno spirito poderoso (2), egli non aveva avuto neppur sentore di quella

(1) Vedasi la bibliografia ascolina de' Guarnerio in Riv. di fil. XXXV, pp. 246 segg., n. 1. In seguito rimanderò, per brevità, a questa bibliografia con la sigla G. seguita dal numero d'ordine dello scritto ivi elencato. Avverto, di passata, che questa bibliografia, certo utile, va accolta con benefizio d'inventario, per omissioni ed inesattezze.

(2) Poichè questo scritto fu da alcuni, anzi più tardi dall'Ascoli stesso giudicato con molta severità, voglio rilevare che l'impostazione del problema che verteva su quei rapporti tra linguistica e etnologia, nello studio dei quali l'Ascoli lascerà più tardi nella scienza un'orma incancellabile, e un magnifico intuito del diverso valore critico degli elementi linguistici schiettamente popolari e dei letterarî d'accatto (es. il suffisso *issim*) sono un'indubbia prova di potenza e originalità d'ingegno dell'Ascoli allora poco più che trilustre.