Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

FEDERIGO ENRIQUES

Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri V-IX

Zanichelli, Bologna, 1930.

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES
PROMOSSA
DALL' ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE

N. 8.

GLI ELEMENTI D'EUCLIDE
E LA CRITICA ANTICA E MODERNA

EDITI DA

FEDERIGO ENRIQUES

COL CONCORSO DI DIVERSI COLLABORATORI

LIBRI V-IX

LABORAVI·FIDENTER

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Coop. Tipografica Azzoguidi - Bologna IV-1930

LIBRO QUINTO

PER CURA DI

MARIA TERESA ZAPELLONI

INTRODUZIONE

Il libro V degli *Elementi* euclidei ha, in confronto ai precedenti, un carattere più generale: non si tratta più esclusivamente di geometria, ma — in genere — di grandezze e dei loro rapporti.

Vero è che la teoria riceve più avanti, nel libro VI, un'applicazione diretta allo studio della similitudine delle figure, ed è anche vero che i « rapporti » non sono considerati dal geometra greco come « numeri », bensì piuttosto come relazioni fra grandezze estensive e spaziali; ma, nonostante queste differenze caratteristiche, in confronto della concezione moderna, la dottrina astratta che forma il contenuto del libro V assume un significato che oltrepassa quello di una semplice introduzione allo studio geometrico del libro seguente: dico il significato di un organo generale delle scienze matematiche, occupando, rispetto all'insieme di queste, il posto che oggi compete all'Analisi.

EUCLIDE non definisce il concetto di « grandezza », che risulta determinato solo implicitamente dall'uso di certe proprietà, quali figurano tra gli assiomi del I libro e le definizioni di questo libro V (cfr. nota alla def. 2). Appare quindi che sono da attribuire alla classe delle grandezze, non soltanto le lunghezze, gli angoli, le aree, i volumi, offerti dalla geometria, ma anche altre specie di enti, come per esempio i pesi e le forze, di cui più tardi ARCHIMEDE doveva studiare le condizioni di equilibrio. Così appunto si giustifica il significato più generale, che abbiamo ravvisato nel libro V, in confronto alle altre parti più propriamente geometriche degli *Elementi*.

Ora, merita speciale attenzione la circostanza che EUCLIDE ci porga due sviluppi della teoria delle proporzioni, uno dei quali (appartenente a questo libro V) considera i « rapporti di grandezze », mentre l'altro (nel libro VII) si riferisce propriamente ai numeri interi. Nel concetto dell'A. questa seconda teoria ha, in confronto alla prima, un valore più particolare, perchè la ricerca del rapporto di due grandezze non conduce sempre ad un numero (intero o fratto) nel senso greco della parola, dandosi pur luogo al caso incommensurabile.

Pei Pitagorici primitivi, che, a quanto pare, concepivano le linee, le superficie, ecc. come « somme di punti », due grandezze geometriche venivano ad avere naturalmente un rapporto numerico; solo quando nella scuola stessa il teorema di PITAGORA condusse alla scoperta degli incommensurabili (cfr. libro I, prop. 48) e suscitò quindi la critica eleatica sui concetti primitivi della geometria, la teoria delle proporzioni e della similitudine, fondata sul semplice confronto di numeri, dovette apparire insufficiente.

Questa insufficienza spingeva da una parte ad elaborare le teorie geometriche, per quanto è possibile, indipendentemente dal concetto della proporzione o della misura, e dall'altra a dare un assetto rigoroso alla teoria dei rapporti, indipendentemente dalla possibilità di pensarli come numeri. Quest'ultimo compito fu assolto da EUDOSSO DI CNIDO (prima metà del Sec. IV a. C.: probabilmente 408-355), a cui appartiene la materia del V libro euclideo. Infatti in due scolii agli *Elementi* (ed. Heiberg, Vol. V, pag. 280 e 282) vien riferita l'opinione che — a prescindere dall'ordinamento — l'*invenzione* della teoria delle proporzioni, così com'è svolta da EUCLIDE, appartenga ad EUDOSSO: nel senso che a lui spetterebbe il merito di aver stabilito una teoria rigorosamente logica per le grandezze in genere, superando anche lo « scandalo » della incommensurabilità [1]. Del resto la teoria eudossiana delle proporzioni, nella forma che le ha dato EUCLIDE nel libro V, costituisce una delle parti più belle degli *Elementi*, ed ha sempre suscitato la più grande ammirazione per il suo raffinato rigore logico. ISACCO BARROW, maestro

---

(1) Intorno al contributo dato alla geometria da EUDOSSO cfr. E. RUFINI « Gli studi geometrici di Eudosso di Cnido », Archivio di Storia della Scienza, Vol. II n. 2-3.

di NEWTON, ne dava questo giudizio (*Lect. Math.*, pag. 136): « non vi è nulla, in tutto il corpo degli *Elementi*, di più sottile invenzione, nulla di più solidamente stabilito e più accuratamente trattato, della teoria delle proporzioni ».

Diciamo ora che la teoria eudossiana dei rapporti, esposta nel trattato euclideo, differisce assai meno che non sembri dalla teoria moderna dei numeri irrazionali.

Per passare da quella a questa conviene chiamare numero (razionale o irrazionale) il rapporto di due grandezze, indipendentemente dalla loro commensurabilità, e abituarsi a rappresentare tali numeri con simboli letterali, ed operare su di essi mediante le regole fondamentali del calcolo.

Questo passo si è compiuto attraverso un lento sviluppo di idee, che dalla nomenclatura di *numeri ficti* o *numeri surdi* in LEONARDO FIBONACCI (*Liber abaci*, 1202) e di *numeri irrationales* in GHERARDO DA CREMONA (1114-1187) va fino alla definizione esplicita di NEWTON nella *Arithmetica universalis* (1707): *Per numerum non tam multitudinem unitatum, quam abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus.*

Qui importa osservare con DUHAMEL, STOLTZ (¹) e ZEUTHEN (²) che, attribuito ai numeri il significato più generale sopra espresso, la giustificazione delle regole fondamentali del calcolo pel caso degli irrazionali si trova già nei teoremi dell'EUCLIDE, come a suo luogo indicheranno le nostre note.

Alla teoria euclidea *dei numeri reali*, le matematiche moderne aggiungono tuttavia, con CANTOR e DEDEKIND, un *postulato di continuità* (cfr. gli art. di G. VITALI ed F. ENRIQUES nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Ed. III, Vol. I), che contiene una supposizione di *esistenza*, capace di sostituire con un principio generale le dimostrazioni che si davano dai Greci caso per caso, per mezzo di procedimenti costruttivi.

(¹) *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*. Vol. I (1885).

(²) Cfr. p. es. BONNESEN, *Sur la théorie des nombres irrationnels de l'antiquité* « Per. di Mat. », 1921, N. 1; ENRIQUES e AMALDI, *Geometria elementare* (ed. 1928 ed edizioni anteriori al 1921).

All' infuori di questo, la definizione degli irrazionali di DEDEKIND mediante la partizione nel campo dei numeri è direttamente suggerita dalla teoria eudossiana (cfr. le note alle deff. 3 e 5).

Infatti nel concetto greco l'esistenza di una figura è strettamente legata alla sua costruzione (cfr. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*, pag. 74). Questo concetto è seguito con rigore nella trattazione di questo libro, dove EUCLIDE evita di ricorrere alla divisione in parti delle grandezze (cfr. la nota alla def. 5), tantochè quelle dimostrazioni in cui si fa ricorso a tale divisibilità, o, peggio ancora, all'esistenza di una quarta proporzionale, sono da ritenere come guaste o modificate in redazioni successive (cfr. propp. 5 e 18). Dal punto di vista moderno invece la nozione della continuità, più o meno esplicitamente introdotta, ci fa accogliere facilmente un postulato di divisibilità delle grandezze, come, per scopo didattico, si fa in molti trattati scolastici.

Termini.

1.

Date due grandezze, la minore si dice *parte* della maggiore, quando questa la misura (esattamente).

A differenza di quanto è stabilito in I, *noz. com.* 5, la parola *parte*, qui e nella def. 3 del Libro VII, è usata nel senso di sottomultiplo.

Fra i commentatori, solo il CANDALLA conserva anche qui alla parola « parte » il significato di grandezza minore di un'altra: ma in realtà ciò è contrario all'uso che del vocabolo si fa nella prop. 15.

2.

La maggiore è *multipla* della minore, quando è da questa misurata (esattamente).

Il termine *grandezza* (o *quantità*, μέγεθος) non è qui esplicitamente definito. — Ma, come si è detto sopra, nell'introduzione, si deve intendere che le grandezze soddisfino a quegli assiomi che nel libro I sono stati enunciati in generale per gli « enti » o le « cose » uguali o disuguali — (Assiomi 1-8).

Questa osservazione dispensa dall'aggiungere alle definizioni dell'EUCLIDE dei nuovi assiomi, come quelli che vengono introdotti, per esempio, da SIMSON, dove si enuncia che equimultipli di grandezze uguali sono uguali, ecc.

Ora, il vocabolo *grandezza* può assumere il significato ristretto di grandezza geometrica, come in vari passi [1] ha presso ARISTO-

---

(1) Eth. Nic. I, X, (XI), 1; An. Post. I, V, 4; I, X, 3.

TELE; in altri (cfr. *Metaph.* IV, XIII, 1) lo stesso A. definisce come grandezza ciò che è misurabile, ed in seguito (id., IX, II, 13), notando la necessità della omogeneità tra la misura e la cosa misurata, comprende tra le grandezze anche i suoni (voci), i pesi, e i numeri, in quanto si considerino come unità di diverso ordine confrontate all'unità fondamentale (1).

Uno dei passi sopra citati di ARISTOTELE (*An. post.* I, V, 4) è particolarmente notevole perchè reca traccia dell'unificazione concettuale avvenuta probabilmente per opera di EUDOSSO: l'Autore ci fa sapere che un tempo i geometri dimostravano separatamente le proprietà delle proporzioni per le linee, per le aree, per i volumi, per i tempi, ecc., e ciò in mancanza di un nome comune, da attribuire a codesti enti.

Ora, l'idea di caratterizzare il concetto della grandezza mediante la misurabilità, convenientemente analizzata, potrebbe condurre alla definizione implicita che delle grandezze vien data, come diremo, dagli autori moderni, ricorrendo alle nozioni di uguaglianza, di disuguaglianza, e di somma. Tuttavia non appare che questa analisi sia stata messa nei suoi chiari termini dai geometri antichi.

EUCLIDE, nel libro dei *Data*, dice: « I poligoni, i segmenti, gli angoli si dicono dati in grandezza, quando possiamo paragonarli con enti uguali ». Così egli sembra ritenere che il concetto della grandezza venga definito semplicemente dalla relazione di uguaglianza.

CANDALLA, commentando la def. V, 3 degli *Elementi* euclidei, dice che, secondo ARISTOTELE, grandezza è ogni cosa, *secundum quam quid aequale, maius vel minor.* Si allude così ad una definizione aristotelica (che non ci è stato dato di ritrovare) per cui le grandezze verrebbero definite dalle relazioni di uguaglianza e disuguaglianza. Ma questa definizione è insufficiente e darebbe luogo a confondere, per esempio, le grandezze estensive o *quantità* fisiche (peso, massa, ecc.) con le *qualità* intensive (come, per esempio, le temperature, la durezza dei metalli, ecc.) (2), la cui misura dipende da una convenzione arbitraria.

---

(1) Abbiamo cercato così di rendere il senso un poco oscuro del passo aristotelico.

(2) Cfr. p. es. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, Cap. VI.

La definizione del concetto di grandezza è stata data alla fine del secolo scorso da GRASSMANN e STOLTZ (1), i quali ritengono come classe di grandezze una classe di enti il cui confronto dà origine alle relazioni di uguaglianza, di disuguaglianza e di somma, soddisfacendo ai relativi assiomi o postulati caratteristici. Si tratta dunque di una *definizione implicita* per postulati.

Fra essi occorre notare quello che STOLTZ chiama postulato di ARCHIMEDE, e che si può ravvisare nascostamente enunciato nella def. 4 del testo euclideo (cfr. la nota alla def. 4).

Noteremo infine che — per uno scopo didattico — alcuni trattati moderni, limitando la teoria euclidea delle proporzioni al suo ufficio geometrico, sostituiscono il concetto generale di grandezza col nome comune dato a grandezze innanzi definite (segmenti, angoli, ecc.). Così il BERTINI: *Libro V di Euclide*, Roma, 1874. Similmente da queste particolari specie di grandezze prendono le mosse ENRIQUES e AMALDI (*Geometria elementare,* Parte I) per riconoscere la sussistenza di alcune proprietà generali, che assumono come attributi o postulati caratteristici delle grandezze in genere.

3.

Ragione (o *rapporto*) è una relazione tra due grandezze omogenee, rispetto alla loro quantità.

Già dai chiarimenti portati dal CLAVIO e da altri commentatori appare il senso di oscurità che presenta questa definizione, sostanzialmente priva di significato.

Invero, non si deve credere che la (3) costituisca la vera definizione del *rapporto* (o *ragione*, λόγος). In realtà questo concetto è definito solo più avanti, mediante la def. 5, che è, come rileveremo, una definizione *per astrazione*.

EUCLIDE, come EUDOSSO, creatore di questa teoria, dovette sentire la difficoltà di definire esplicitamente il rapporto di due

(1) Cfr. ENRIQUES, *I numeri reali*, nelle « Questioni riguardanti le Matematiche elementari », Ed. III, Vol. I, pag. 327.

grandezze. Per calcolare questo rapporto, almeno nel caso commensurabile, i Greci usarono il procedimento del massimo comun divisore (EUCLIDE, X), che da CATALDI (1597) fu poi trasformato nell'algoritmo della frazione continua [1].

Lo ZEUTHEN stima che, a parte la forma, questo algoritmo appunto fosse già preso dai Greci come definizione del rapporto nel caso incommensurabile, ravvisando una allusione a ciò in un passo di ARISTOTELE ove si parla della ἀντιναιρέσις. Ma per sfuggire alla infinità del processo che qui si mette in opera, codesta definizione dovette poi essere mutata da EUDOSSO in quella che costituisce la def. 5.

4.

Si dice che le grandezze *hanno ragione* tra loro, quando ciascuna può essere moltiplicata in modo da superare l'altra.

CAMPANO, G. VITALE, CANDALLA ed altri commentatori interpretano questa definizione nel senso che le grandezze devono essere omogenee.

Osserva GIORDANO VITALE: « Questa definizione non è fatta per trovare se fra due quantità proposte sia, o non sia proportione, perchè, essendo infiniti i molteplici, se fra due quantità non cadesse proportione alcuna, mai si perverrebbe alla notitia che fra quelle quantità non cade proportione alcuna; ma si concepisca di qual natura siano le quantità, che hanno proportione, come sono le quantità terminate del medesimo genere ».

Con quel « terminate » GIORDANO VITALE nota che sono di qui escluse le grandezze infinite, come già aveva avvertito il COMMANDINO.

È questo precisamente il significato più importante della def. 4, pur nel confronto delle grandezze omogenee. Infatti essa viene ad enunciare nascostamente un postulato, che, sotto forma poco diversa,

---

[1] Cfr. l'articolo di BORTOLOTTI citato nella nota alla prop. 2 del libro VII.

si ritrova in EUCLIDE, X, 1, e che STOLTZ [1] ha ravvisato in altra forma nell'opera di ARCHIMEDE, designandolo col nome di *postulato di Archimede.*

Tuttavia non è dubbio che codesto postulato, a parte la forma precisa dell'enunciazione, doveva costituire il fondamento della teoria delle proporzioni di EUDOSSO, autore, come abbiam detto, delle dottrine esposte in questo libro euclideo. Ed è notevole che esso esprima in forma negativa il principio stesso che si trova negli argomenti paradossali sul moto di ZENONE d'Elea. Come già abbiamo accennato nella nota alla prop. 10 del libro I, ZENONE dava nei suoi argomenti una riduzione all'assurdo della ipotesi pitagorica del punto-esteso; in questa ipotesi la somma di un numero infinito di segmenti supera certamente un multiplo qualsiasi di un segmento dato, e tuttavia ZENONE prova che codesta somma può riuscire inferiore ad una certa lunghezza finita: l'assurdo a cui conduce la teoria pitagorica è dunque, propriamente, la negazione del principio che EUDOSSO più tardi postulerà in maniera esplicita.

Così dunque il postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE ha radice nelle prime considerazioni da cui trae origine l'analisi infinitesimale, e, come bene ha avvertito lo ZEUTHEN (l. cit., pag. 115), costituisce una condizione fondamentale necessaria, tanto per lo sviluppo della teoria delle proporzioni applicata alle grandezze incommensurabili, quanto, più tardi, per il metodo di esaustione.

In conclusione, crediamo utile riassumere i principî che nel testo euclideo vengono presupposti per lo sviluppo del libro V.

1. Sommabilità ed uguaglianza delle somme o differenze (cfr. *Assiomi*, Libro I).

2. Se due grandezze omogenee (o di una stessa classe) non sono uguali, una di esse è maggiore dell'altra, cioè si può considerare come somma dell'altra e di una terza grandezza (differenza). Questo principio viene postulato implicitamente là dove si ammette che due grandezze debbono essere uguali se l'ipotesi che esista una differenza si riduca all'assurdo (Metodo di esaustione).

---

(1) *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes* in « Math. Annalen », 22 (1883).

3. Postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE: « Date due grandezze disuguali, esiste sempre un multiplo della minore che superi la maggiore ». Questo postulato costituisce un complemento essenziale dell assunzione precedente, ai fini del metodo di esaustione.

5.

Si dice che la ragione di una prima grandezza ad una seconda è uguale a quella di una terza ad una quarta, quando, presi degli equimultipli qualsiansi della prima e della terza, e degli equimultipli qualsiansi della seconda e della quarta, se il multiplo della prima è maggiore del multiplo della seconda, anche il multiplo della terza sia maggiore del multiplo della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore.

Questa definizione, tradotta in simboli, afferma che

$$a:b = c:d$$

quando, presi ad arbitrio gli interi m ed n, secondochè

$$ma \gtreqless nb$$

anche

$$mc \gtreqless nd.$$

Questa definizione, che regge tutta la teoria euclidea dei rapporti, dà luogo a diverse osservazioni.

1. Anzitutto, per la forma logica, si ha qui il primo esempio della cosiddetta definizione *per astrazione*, che trova così largo impiego nelle esposizioni critiche della scienza moderna (massa, valore, ecc., cfr. ENRIQUES: *Per la storia della Logica*, pag. 148). Invero, senza che sia detto esplicitamente che cosa significhi ragione o rapporto (poichè la def. 3 non ne porge che una spiegazione illusoria), si definisce l'uguaglianza (e nella def. 7 la disuguaglianza) di due rapporti.

Ma perchè la relazione di proporzionalità fra due coppie possa effettivamente ritenersi come un' « uguaglianza », bisogna che essa soddisfi non soltanto alle evidenti proprietà *riflessiva* $\left(\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\right)$ e *simmetrica* $\left(\text{se } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ anche } \frac{c}{d}=\frac{a}{b}\right)$, ma anche alla proprietà *transitiva* $\left(\text{se } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ e } \frac{c}{d}=\frac{e}{f}, \text{ anche } \frac{a}{b}=\frac{e}{f}\right)$, per cui si conclude che due coppie proporzionali ad una terza sono anche proporzionali fra loro: ciò che costituisce l'oggetto della prop. V, 11.

2. Il caso in cui si trovino due interi m ed n per cui

$$ma = nb,$$

e contemporaneamente

$$mc = nd,$$

risponde alla esistenza di un rapporto commensurabile

$$a = \frac{n}{m} b.$$

In questo caso è superfluo considerare i valori di m ed n che danno luogo alle disuguaglianze

$$ma \gtrless nb$$

contemporaneamente alle

$$mc \gtrless nd.$$

Ma questa considerazione occorre invece per definire il rapporto nel caso incommensurabile.

Essa conduce allora a dividere le frazioni $\frac{n}{m}$ in due classi: quelle per cui

$$a > \frac{n}{m} b$$

cioè

$$ma > nb$$

e quelle per cui

$$a < \frac{n}{m} b$$

cioè

$$ma < nb;$$

il rapporto $\frac{a}{b}$ che si tratta di definire appare in qualche modo come termine di separazione delle due classi, e così appunto viene modernamente definito da DEDEKIND.

3. Lo studioso abituato all' uso moderno della teoria della misura è tratto a chiedersi perchè mai EUCLIDE consideri i multipli delle grandezze fra cui vuole riconoscere la proporzionalità, anzichè i sottomultipli.

Ma il motivo sta in ciò, che fra le grandezze considerate da EUCLIDE ve ne sono talune per cui egli non sa costruire i sottomultipli, dei quali non vuole perciò affermare l' esistenza. A questa categoria appartengono gli angoli, per i quali è noto che già la trisezione costituisce un problema non risolubile con la riga e il compasso (cfr. l' articolo di A. CONTI nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* Ed. III, Parte II).

Se in base ad un' intuizione di continuità si postula la divisibilità di tutte le grandezze geometriche di cui voglionsi confrontare i rapporti (cfr. la nota d' introduzione), le definizioni euclidee 5 e 7 si riconducono alla forma seguente: Il rapporto $a:b > c:d$, se esiste una frazione $\frac{m}{n}$ per cui $\frac{a}{m} > \frac{b}{n}$. E si diranno eguali due rapporti $a:b = c:d$ se nessuno dei due è maggiore dell' altro.

Questa forma data alla definizione è consona alla maniera euclidea di considerare l' eguaglianza di superficie e di solidi, nei casi in cui non si può ricorrere alla divisione in un numero finito di parti uguali. *Il procedimento di esaustione* di EUDOSSO che si adopera in tali casi riduce infatti il criterio della eguaglianza alla « non-diseguaglianza », in virtù del postulato implicito che « se due enti (grandezze) non sono uguali, l' uno è maggiore dell' altro, cioè è uguale alla somma dell' altro con una certa differenza ». (Cfr. la nota alla def. 4).

Lo sviluppo del concetto di rapporto nella critica moderna ha un particolare interesse per intendere la formazione del nostro concetto di numero reale, quale si ritrova in DEDEKIND.

Questa storia comincia con la critica di GALILEO, la quale, invero, prende motivo da una interpolazione.

Alcuni testi, precedenti la edizione critica di HEIBERG, come per esempio quello di CAMPANO, aggiungono alla def. 3 l'altra [4]: « Proporzione è uguaglianza di rapporti », che forse è lecito vedere sottintesa nell'uso del termine ἀναλογία.

Ora GALILEO, fermandosi sulla def. 3, completata con la [4], tenta di dedurne la def. 5, da lui concepita non più come definizione, ma come teorema da dimostrarsi. Questo tentativo costituisce l'argomento del « Principio di giornata » aggiunta ai « Discorsi e dimostrazioni metematiche intorno a due nuove scienze ». (Giornata V) (1).

Nella trattazione anzidetta si vede GALILEO interpretare la def. 3 di EUCLIDE nel senso dell'ordinario procedimento della misura: date due grandezze, egli cerca una parte aliquota dell'una che sia contenuta nell'altra, e si appoggia sulla considerazione che, se vi è un resto, questo può ridursi, in ogni caso, piccolo ad arbitrio.

Siffatte considerazioni non possono ritenersi estranee al pensiero di EUDOSSO e di EUCLIDE, i quali per certo hanno cominciato col *misurare* le grandezze così come noi lo facciamo; e soltanto per le esigenze della formulazione rigorosa della dottrina furono condotti ad una definizione astratta, che si allontana alquanto dai procedimenti più naturali.

GALILEO rappresenta dunque, di fronte ad EUCLIDE, un pensiero meno critico e raffinato; e tuttavia il ricorso storico è interessante, per la comprensione dei progressi dello spirito umano; un'epoca creatrice come quella a cui appartiene GALILEO deve riprendere i concetti risalendo al loro significato originario e risuscitandone la virtù di sviluppo, al di là della forma più perfetta imposta dal rigore logico.

D'altra parte, attraverso la critica di GALILEO, si intravvede una nuova maniera di intendere il rapporto di due grandezze, che potrebbe dirsi dinamica, in confronto a quella statica che figura nell'EUCLIDE.

---

(1) L'indirizzo indicato da GALILEO fu poi fedelmente seguito dal VIVIANI, che amava chiamarsi ultimo suo discepolo, nel *V Libro degli Elementi di Euclide* (ovvero *La Scienza universale delle proporzioni*), Firenze, 1734.

Studiando il moto rettilineo uniforme ed uniformemente accelerato, il sommo fisico pisano è tratto a considerare una grandezza y (spazio o velocità), come *funzione* d' una x variabile (tempo): il caso di dipendenza più semplice è quello della proporzionalità, che si può distinguere in due modi equivalenti:

1° a due valori x_1, x_2 di x corrispondono due valori y_1, y_2 di y tali che

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2$$

ovvero

$$y = ax. \tag{2}$$

Quest' ultima designazione, che è per noi la più abituale, importa che le grandezze x ed y siano tradotte nelle loro misure numeriche; e, dal punto di vista critico, che non ci si arresti eventualmente di fronte alla considerazione d' un rapporto a, numero irrazionale.

Il commento galileiano alla teoria delle proporzioni appare in questa luce come un chiarimento allo sviluppo stesso del pensiero di GALILEO, che — attraverso lo studio dei problemi del moto — era venuto a considerare il rapporto come un' invariante della coppia di grandezze corrispondenti x, y, al variare di x. Questo pensiero, che ci è oggi tanto familiare, ma che pur si collega ad una nota difficoltà didattica, racchiude invero qualcosa di nuovo rispetto ad ARCHIMEDE, che, considerando il moto uniforme di cui si vale per la generazione della spirale, lo caratterizza semplicemente mediante la proporzione euclidea fra due spazi e i tempi corrispondenti (« Sulle spirali », prop. 1).

Nella considerazione galileiana vi è l' esigenza, se non ancora il riconoscimento, del rapporto come numero, al di là del caso commensurabile: la stessa esigenza che verrà poi affermata da NEWTON nella sua definizione di numero (cfr. introduzione).

Ora, l' ordine di idee di Galileo viene proseguito dal BORELLI, che nel suo *Euclides restitutus* (1688) offre una teoria delle proporzioni alquanto diversa da quella euclidea, e tale da preludere alla introduzione degli irrazionali.

Il BORELLI fonda implicitamente la sua teoria sui due postulati:

1° divisibilità di una grandezza in un numero qualsiasi di parti uguali;

2° postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE;

e sull' enunciato esplicito dell' esistenza della quarta proporzionale.

Un esame dello sviluppo che BORELLI dà alla teoria delle proporzioni, sebbene riveli la mancanza dell' assoluto rigore logico, che caratterizza invece la teoria euclidea, può riuscire suggestivo per l' analogia ch' esso presenta con la teoria di DEDEKIND dei numeri reali.

Distinti infatti i rapporti nel caso della commensurabilità $(a = m\frac{b}{n})$ e della incommensurabilità (a ha rapporto incommensurabile con b se ogni grandezza che abbia rapporto razionale con b è $\gtrless a$), il BORELLI definisce come uguali i rapporti commensurabili di a con b e c con d se esistono due interi m ed n, per cui

$$a = m\frac{b}{n} \quad \text{e} \quad c = m\frac{d}{n};$$

e passa quindi a definire la disuguaglianza di un qualsiasi rapporto con un rapporto razionale.

Il rapporto di a con b è maggiore del rapporto razionale di c con d, quando, essendo

$$\frac{a'}{b} = \frac{c}{d}$$

sia $a > a'$.

Sarà invece
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$
se $a < a'$.

Così, il BORELLI ammette che il rapporto $\frac{a}{b}$ sia maggiore dei rapporti rispetto a b di tutte le grandezze minori di a, e commensurabili con b, e sia minore dei rapporti rispetto a b di tutte le grandezze maggiori di a e commensurabili con b.

Non vi è da far altro che dare al rapporto il nome di numero, perchè il numero reale venga definito dalla partizione di DEDEKIND, come minore di tutti i numeri della seconda classe, e maggiore di tutti i numeri della prima.

Analogamente, nelle successive definizioni di disuguaglianza di un rapporto qualsiasi con un rapporto irrazionale, e di uguaglianza di due rapporti irrazionali, si ritrova la definizione della disuguaglianza e dell'uguaglianza di due numeri reali ([1]).

6.

Le grandezze che hanno la stessa ragione fra loro si dicono *proporzionali*.

Quindi, anche l'uguaglianza di ragioni si designa come « proporzione (ἀναλογία) » (proporzionale = ἀνάλογον).

È da ritenersi dunque come interpolata la definizione che figura in qualche testo, come per esempio quello del CAMPANO, dopo la def. 3: « Proporzione è uguaglianza di rapporti » ([2]).

7.

Quando, degli equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda, ma il multiplo della terza non è maggiore di quello della quarta, si dice che la prima grandezza ha con la seconda *ragione maggiore* di quella che la terza ha con la quarta.

In simboli, questa definizione afferma che

$$a : b > c : d$$

quando si possono trovare due interi m ed n tali che:

$$ma > nb$$

([1]) Per un più particolare esame della teoria delle proporzioni in BORELLI cfr. F. PODETTI: *La teoria delle proporzioni in un testo del XVII secolo* « Boll. di Bibl. e Storia delle Scienze Matematiche », 1913, fasc. I.

([2]) Cfr. la nota alla def. 5.

mentre

$$mc \leq nd.$$

Questa definizione completa la 5, mettendo in rilievo che il rapporto $a:b$ occupa un posto ben determinato nell'ordine delle frazioni $\frac{n}{m}$, disposte in serie crescente. (Cfr. la dimostrazione della unicità della quarta proporzionale: note alle propp. 9 e 10).

8.

Una proporzione è formata almeno di tre termini. (Proporzione continua).

Notiamo qui che la parola ὅρος usata nel senso di « termine di una proporzione » ha fatto pensare che questa definizione non apparisse nel testo originale degli *Elementi*.

ARISTOTELE usa tuttavia la parola ὅρος in questo senso, in un passo della *Eth. Nic.* [V, III (V)] in cui considera anche le proporzioni continue come formate di quattro termini, di cui uno è considerato due volte.

La distinzione fra proporzioni *discrete* e *continue* sembra doversi attribuire ai Pitagorici (NICOMACO, II, 21, 5; 23).

9-10.

Quando tre grandezze sono (continuamente) proporzionali, si dice che la prima ha con la terza una ragione *duplicata* di quella che ha con la seconda.

Quando quattro grandezze sono (continuamente) proporzionali, si dice che la prima ha con la quarta una ragione *triplicata* di quella che ha con la seconda, e così seguitando sempre in modo consimile.

Abbiamo qui aggiunto al testo greco l'avverbio « continuamente » necessario, specie per la def. 10, ad indicare il tipo di proporzione che dà luogo al concetto di ragione duplicata, triplicata, ecc.

Le definizioni dicono che, se

$$a:b=b:c$$

si dice che a ha con c ragione duplicata di quella che ha con b, cioè

$$a:c=(a:b)^2;$$

e se

$$a:b=b:c=c:d,$$

a ha con d ragione triplicata di quella che ha con b, cioè

$$a:d=(a:b)^3.$$

11-12.

Si dicono *grandezze omologhe* gli antecedenti agli antecedenti, e i conseguenti ai conseguenti.

Una proporzione si ottiene da un'altra *permutando*, quando si deduce che l'antecedente sta all'antecedente, come il conseguente al conseguente.

Nella proporzione

$$a:b=c:d$$

permutare significa sostituirle la proporzione

$$a:c=b:d$$

la cui esistenza verrà dimostrata nella prop. 16.

Il testo greco parla qui di *ragione* permutata, come nelle deff. 13 e 14 di ragione invertita e composta; ma in realtà l'operazione del permutare ha significato soltanto per una proporzione.

13.

Una ragione è *invertita*, se si prende l'antecedente come conseguente, ed il conseguente come antecedente.

Invertire una proporzione significa dunque dedurre da

$$a:b = c:d$$

che

$$b:a = d:c.$$

La proposizione « ragioni invertite di ragioni uguali sono uguali », che EUCLIDE userà nella prop. 20 — a differenza di quelle relative al permutare e al comporre — non viene da lui esplicitamente dimostrata. Ed è da ritenere che ciò sia fatto consapevolmente, trattandosi di cosa ovvia.

Perciò crediamo che il corollario aggiunto nella edizione di TEONE alla prop. 4 e nell'edizione di HEIBERG alla prop. 7 non avesse posto nella edizione originale; tanto più che, comunque lo si prenda, quel corollario si riattacca male alla proposizione da cui deriverebbe.

14.

Una ragione si ottiene da un'altra *componendo*, quando si mette in relazione la somma dell'antecedente e del conseguente con il conseguente.

Dalla proporzione

$$a:b = c:d$$

componendo si ha:

$$(a + b):b = (c + d):d$$

(cfr. prop. 18).

15.

Una ragione si ottiene da un'altra *dividendo*, quando si mette in relazione l'eccesso di cui l'antecedente supera il conseguente, con il solo conseguente.

Dalla proporzione

$$a:b=c:d$$

dividendo si ha

$$(a-b):b=(c-d):d$$

(cfr. prop. 17).

16.

La ragione è *convertita*, quando si mette in relazione l'antecedente con la differenza tra l'antecedente ed il conseguente.

Convertire dunque significa, per EUCLIDE, successivamente dividere e invertire.

Da $a:b$

dividendo $(a-b):a$

ed invertendo $a:(a-b)$

(cfr. prop. 19, coroll.).

17.

Si ha una proporzione *ex aequo*, quando, dato un qualsiasi numero di grandezze rispettivamente proporzionali ad altrettante grandezze, si deduce che, nelle prime grandezze, la prima sta all'ultima, come nelle seconde la prima sta all'ultima. O, in altre parole, quando si considerano i termini estremi, trascurando i medi.

Se

$$\begin{matrix} a, & b, & c\ldots, & d \\ a', & b', & c'\ldots, & d' \end{matrix}$$

sono grandezze rispettivamente proporzionali, cioè

$$a:a' = b:b' = \ldots = d:d'$$

si forma una proporzione *ex aequo*, scrivendo

$$a:d = a':d'$$

(cfr. prop. 22).

18.

Si ha una proporzione *perturbata* quando, date tre grandezze, ed altre tre, nelle prime grandezze la prima sta alla seconda come, nelle seconde grandezze, la seconda sta alla terza, mentre nelle prime grandezze la seconda sta alla terza, come nelle seconde la prima sta alla seconda.

Le grandezze

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c', \end{matrix}$$

danno luogo ad una proporzione perturbata quando

$$a:b = b':c'$$

e

$$b:c = a':b'.$$

In queste ipotesi, la prop. 23 mostrerà che:

$$a:c = a':c'.$$

Così dalla proporzione perturbata consegue l'uguaglianza di ragioni composte di ragioni uguali, prese in ordine inverso.

Veramente, EUCLIDE parla di ragione perturbata: anche qui, dunque, abbiamo fatto un cambiamento analogo a quello della def. 13.

Proposizioni.

1.

Dato un numero qualsiasi di grandezze, rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze, la somma [1] *delle prime è multipla della somma delle seconde tante volte, quante ciascuna delle prime è multipla della sua corrispondente.*

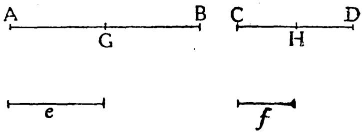
Sia AB, CD [2] un numero qualsiasi di grandezze, rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze e, f; dico che la somma di AB con CD è multipla della somma di e con f tante volte, quante AB è multipla di e. Infatti, poichè AB e CD sono rispettivamente equimultiple di e e di f, tante grandezze sono in AB uguali ad e, quante grandezze sono in CD uguali ad f. Si divida AB in grandezze AG, GB, eguali ad e; e CD in grandezze CH, HD, uguali ad f: il numero delle grandezze AG, GB sarà uguale al numero delle grandezze CH, HD. E poichè AG uguale ad e, e CH uguale ad f, sarà la somma di AG con CH uguale alla somma di e con f. Per la stessa

---

(1) Sull'uso della parola « somma » in EUCLIDE cfr. la nota a pag. 48 del Libro I.

(2) Poichè le grandezze vengono rappresentate in figura con segmenti, nei libri V e VI e nei libri aritmetici le indicheremo con due lettere maiuscole o con una sola minuscola, secondochè dei corrispondenti segmenti occorra o no designare gli estremi.

ragione GB è uguale ad e, e la somma di GB con HD è uguale alla somma di e con f. E così, in AB ci sono tante grandezze eguali ad e, quante grandezze sono nella somma di AB con CD, uguali alla somma di e con f. Perciò



la somma di AB con CD è multipla della somma di e con f tante volte, quante AB è multipla di e.

Dunque, dato un numero qualsiasi di grandezze, ecc.

c. d. d.

Indicando con le prime lettere dell'alfabeto a, b, c... delle grandezze, e con m, n, p... numeri interi, la proposizione equivale all'identità:

$$ma + mb + mc + \ldots = m(a + b + c + \ldots)$$

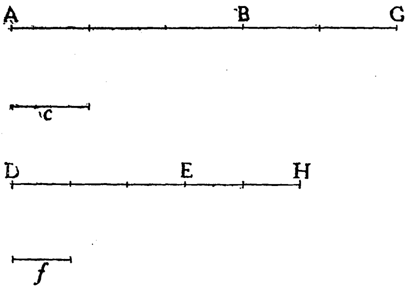
(cfr. la def. 5).

2.

Se una prima grandezza è multipla di una seconda come una terza è multipla di una quarta, ed una quinta è multipla della seconda come una sesta è multipla della quarta, anche la prima e la quinta insieme saranno multiple della seconda, come la terza e la sesta insieme sono multiple della quarta.

Sia infatti la prima grandezza AB multipla della seconda c, come la terza DE è multipla della quarta f; e la quinta BG sia multipla della seconda c, come la sesta EH è multipla della quarta f. Dico che la somma della prima e della quinta, cioè AG, è multipla della seconda c, come la somma della terza e della sesta, cioè DH, è multipla della quarta f.

Infatti, poichè AB e DE sono equimultiple di c ed f, in AB ci sono tante grandezze uguali a c, quante gran-



dezze sono in DE eguali ad f. Per la stessa ragione, quante grandezze sono in BG uguali a c, altrettante sono in EH uguali ad f. Perciò in tutta la AG ci sono tante grandezze eguali a c, quante grandezze sono in DH eguali ad f. E così AG è tante volte multiplo di c, quante volte DH è multiplo di f. Quindi la somma della prima e della quinta grandezza, cioè AG, è multipla della seconda c, come la somma della terza e della sesta è multipla della quarta.

Dunque, se una prima grandezza è multipla di una seconda, come ecc. c. d. d.

La proposizione afferma che, essendo ma, mb equimultiple di a e b, come lo sono na ed nb, anche le grandezze $ma + na$, $mb + nb$ sono equimultiple di a e b.

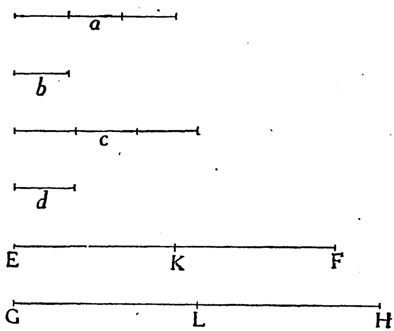
Per giungere alla dimostrazione, EUCLIDE osserva implicitamente che nella grandezza $ma + na$ la grandezza a è contenuta $m + n$ volte: ciò che equivale all'identità

$$ma + na = (m + n)a.$$

3.

Se una prima grandezza è multipla di una seconda come una terza è multipla di una quarta, e si prendono degli equimultipli della prima e della terza, essi, ex aequo, *saranno rispettivamente equimultipli della seconda e della quarta.*

Sia infatti la prima grandezza a multipla della seconda b, come la terza c lo è della quarta d; e si pren-



dano degli equimultipli EF, GH di a e c. Dico che EF è multiplo di b come GH è multiplo di d.

Infatti, poichè EF e GH sono equimultipli di a e c, in EF ci sono tante grandezze eguali ad a, quante grandezze sono in GH eguali a c. Si divida EF in grandezze EK, KF, eguali ad a, e GH in grandezze GL, LH uguali a c. Il numero delle grandezze EK, KF sarà uguale al numero delle grandezze GL, LH. E poichè a e c sono equimultipli di b e d, ed EK e GL sono rispettivamente uguali ad a e c, anche EK e GL saranno equimultipli di b e d. Per la stessa ragione anche KF ed LH saranno equimultipli di b e d. E allora, poichè una prima grandezza EK è multipla di una seconda b, come una terza GL è multipla di una quarta d, ed una quinta KF è multipla della seconda b come una sesta LH è multipla della quarta d, anche la somma della prima e della quinta, cioè EF, è multipla della seconda b, come la somma della terza e della sesta, cioè GH, è multipla della quarta d.

Dunque, se una prima grandezza è multipla di una seconda, come ecc. c. d. d.

La proposizione afferma che, essendo ma ed mb equimultiple di a e b, ed $n.ma$, $n.mb$ equimultiple di ma e mb, le grandezze $n.ma$, $n.mb$ sono equimultiple di a e b.

La via seguita da EUCLIDE per la dimostrazione conduce implicitamente ad affermare che l'n^0 multiplo di ma è anche l'm^0 multiplo di na, cioè:

$$n \cdot ma = m \cdot na = (mn)a.$$

Nota HEIBERG che nell'enunciato di questa proposizione EUCLIDE usa l'espressione *ex aequo* in un senso differente da quello attribuitole nella def. 17. Osserva però HEATH (pag. 141) che differenza sostanziale non esiste. In realtà, poichè

$$n \cdot ma : n \cdot mb = ma : mb$$

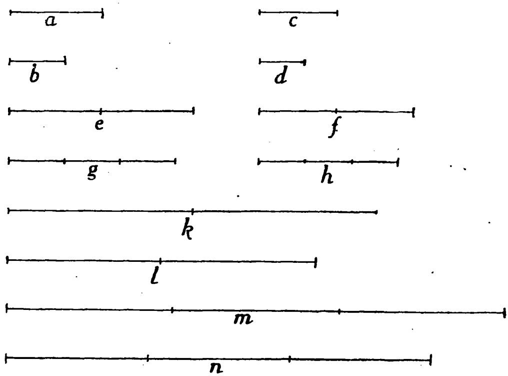
ed
$$ma : mb = a : b$$

ex aequo
$$n \cdot ma : n \cdot mb = a : b.$$

4.

Se una prima grandezza ha con una seconda la stessa ragione che una terza ha con una quarta, anche equimultipli qualsiansi della prima e della terza avranno *una stessa ragione con equimultipli qualsiansi della seconda e della quarta, presi nel medesimo ordine.*

La prima grandezza *a* abbia infatti con la seconda *b* la stessa ragione che la terza *c* ha con *d*; e si prendano



degli equimultipli *e*, *f* di *a* e *c*, ed altri equimultipli qualsiansi *g*, *h* di *b* e *d*. Dico che *e* sta a *g* come *f* ad *h*.

Si prendano infatti degli equimultipli *k*, *l* di *e*, *f*, ed altri equimultipli *m*, *n*, scelti a caso, di *g*, *h*. Siccome e ed *f* sono rispettivamente equimultiple di *a* e *c*, e le grandezze *k*, *l* sono state prese rispettivamente equimultiple di *e* e *f*, la *k* sarà multipla di *a* come *l* lo è di *c*; per la stessa ragione *m* sarà multipla di *b* come *n* lo è di *d*; e poichè *a* sta a *b* come *c* sta a *d*, e le grandezze *k*, *l* sono state prese rispettivamente equimultiple di *a* e *c*, ed *m*, *n* equimultiple qualsiansi di *b*, *d*, se *k* supera *m*, anche *l* supera *n*, se è uguale sarà uguale, se minore, minore. Ma *k*, *l* sono equimultiple di *e*, *f*; ed *m*, *n* sono altre qualsiansi equimultiple di g, h; quindi e sta a g, come f sta ad h.

Dunque, se una prima grandezza ha con una seconda ecc. c. d. d.

In simboli:

se
$$a:b = c:d$$
si ha:
$$ma:nb = mc:nd.$$

La dimostrazione deriva direttamente dalla def. 5, considerando equimultipli pma, pmc di a e c, ed equimultipli qnb, qnd di b e d.

TEONE aggiunge il corollario: « se quattro grandezze sono proporzionali, lo sono anche *invertendo* ».

Infatti,
$$a:b = c:d$$
quando, secondochè
$$ma \gtreqless nb$$
anche
$$mc \gtreqless nd.$$

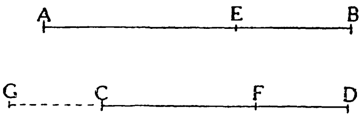
Ma allora, secondochè
$$nb \gtreqless ma$$
anche
$$nd \gtreqless mc$$
cioè
$$b:a = d:c.$$

Tale proposizione, come abbiamo già rilevato nella nota alla def. 13, manca in EUCLIDE; ma essa, piuttosto che costituire un corollario a questa od altre proposizioni (cfr. nota alle proposizioni 7 e 20) deriva direttamente dalla def. 5.

5.

Se una grandezza è multipla di un'altra come una grandezza sottratta dalla prima è multipla di una grandezza sottratta dalla seconda, anche la rimanente sarà multipla della rimanente, come tutta la prima grandezza era multipla di tutta la seconda.

Sia infatti la grandezza AB multipla della CD, come la grandezza AE sottratta dalla prima è multipla della



grandezza CF sottratta dalla seconda. Dico che anche la rimanente EB è multipla della rimanente FD, come l'intera AB è multipla di tutta la CD.

Infatti, si costruisca CG tale che AE sia multipla di CF tante volte, quante EB è multipla di CG; poichè AE è multipla di CF come EB è multipla di GC, si deduce che AE sarà multipla di CF come AB di GF. Ma, per ipotesi, AE sta a CF come AB sta a CD; quindi AB è lo stesso multiplo di ciascuna delle grandezze GF, CD; perciò GF è uguale a CD.

Si tolga da ciascuna la grandezza comune CF: la rimanente GC sarà uguale alla rimanente FD; e poichè AE è multipla di CF come EB lo è di GC, e GC è uguale ad FD, la AE sarà multipla di CF, come EB di FD.

Ma, per ipotesi, AE sta a CF come AB sta a CD; quindi EB sta a FD come AB sta a CD; e così anche la rimanente EB sta alla rimanente FD come tutta la AB sta a tutta la CD.

Dunque, se una grandezza è multipla di un'altra, ecc.

c. d. d.

In simboli, se

(1) $$a:b = c:d$$

anche $$a:b = (a - c):(b - d).$$

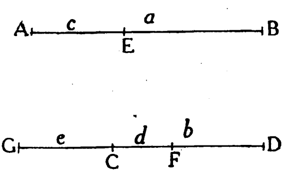
La dimostrazione di questa proposizione, il cui senso è:

$$ma - mb = m(a - b),$$

si può brevemente riassumere così:

se $$a = mb, \quad c = md$$

dico che $$a - c = m(b - d).$$



Prendo infatti

$$e = \frac{a - c}{m},$$

in guisa che $$a - c = me;$$

allora

$$c:d = (a - c):e$$

e per la prop. 1:

$$c:d = a:(d + e).$$

Perciò $\quad b = d + e, \quad$ cioè $\quad e = b - d;$

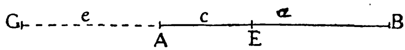
allora $$c:d = (a - c):(b - d),$$

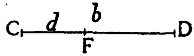
onde $$a:b = (a - c):(b - d).$$

Ma questa dimostrazione va incontro ad inconvenienti di divisibilità, non ammessa da EUCLIDE.

Quindi c'è ragione di ritenere che essa non si dovesse trovare in questa forma, nel testo originale degli *Elementi.* Molto più che nel testo di CAMPANO, tradotto dall'arabo, si trova una dimostrazione che è esente dagli accennati inconvenienti, perchè si serve di multipli, anzichè di sottomultipli:

Nell'ipotesi
$$a:b = c:d$$
si deve provare che
$$a:b = (a - c):(b - d).$$





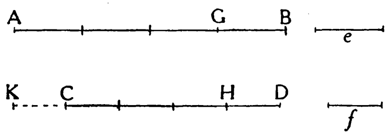
Se $c = md$, si prenda $e = m(b - d)$.

Allora, per la prop. 1,
$$c:d = (c + e):b$$
e per l'ipotesi che
$$a:b = c:d$$
si ha
$$c + e = a,$$
cioè
$$e = a - c$$
e quindi
$$(a - c) = m(b - d)$$
come
$$a = mb.$$

6.

Se due grandezze sono equimultiple di altre due grandezze, e dalle prime si sottraggono grandezze equimultiple delle seconde, le rimanenti saranno uguali a queste, o loro equimultiple.

Le due grandezze AB, CD siano equimultiple di altre due grandezze e, f, e le grandezze AG, CH, sottratte



dalle prime, siano equimultiple delle stesse e, f. Dico che le rimanenti GB, HD saranno uguali alle e, f, o loro equimultiple.

Infatti, sia dapprima GB uguale ad e; dico che anche HD è uguale ad f. Si ponga infatti KC uguale ad f. Poichè AG e CH sono equimultiple di e ed f, la AB e KH saranno equimultiple di e ed f. Ma, per ipotesi, AB e CD sono equimultiple di e ed f; allora KH e CD sono equimultiple della stessa grandezza f, e perciò sono uguali fra loro. Si sottragga da esse la grandezza comune CH; le grandezze rimanenti KC ed HD saranno allora uguali; ma f è uguale a KC, perciò anche HD è uguale ad f; e così, se GB è uguale ad e, anche HD è uguale ad f.

Similmente dimostreremo che, se GB è multiplo di e, HD è l'equimultiplo di f.

Dunque, se due grandezze sono equimultiple di altre due grandezze, ecc. c. d. d.

In simboli:

se

$$a = mb, \quad c = md$$

anche

$$(a - nb):(c - nd) = b:d.$$

E poichè questo porterebbe:

$$(mb - nb):(md - nd) = b:d,$$

il significato di questa proposizione è

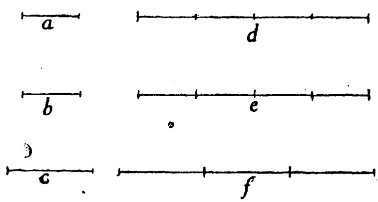
$$mb - nb = (m - n)b.$$

Essa è analoga, dunque, alla prop. 2.

7.

Grandezze uguali hanno uguale ragione rispetto ad una stessa grandezza, ed una grandezza ha eguale ragione con grandezze uguali.

Siano a e b due grandezze uguali, e c un'altra grandezza scelta a caso; dico che ciascuna delle a, b ha con



c la stessa ragione, e che c ha la stessa ragione con ciascuna delle a, b.

Si prendano infatti degli equimultipli d, e delle a, b, ed un qualsiasi multiplo f della c; poichè d ed e sono equimultipli di a e b, ed a è uguale a b, anche d è uguale ad e. La f è un multiplo qualsiasi di c; quindi, se d supera f, anche e supera f, se è uguale, uguale, se minore, minore; ma d ed e sono equimultipli di a e b, ed f è un qualsiasi multiplo di c, dunque a sta a c come b sta a c.

Dico inoltre che c ha la stessa ragione con ciascuna delle a, b.

Infatti, con le stesse costruzioni, dimostreremo similmente che d è uguale ad e; ed f è un'altra qualsiasi grandezza (multipla di c). Allora, se f supera d, supera anche e, se è uguale a d, è anche uguale ad e, se è minore, minore.

Ma f è multipla di c, e d, e sono altri qualsiasi equimultipli di a, b. Perciò c sta ad a, come c sta a b.

Dunque, grandezze uguali hanno uguale ragione, ecc.

COROLLARIO

Di qui è manifesto che, se delle grandezze sono proporzionali, lo sono anche in ordine inverso. c. d. d.

La proposizione appare qui una conseguenza immediata della def. 5. Infatti, se

$$a = b$$

anche

$$ma = mb;$$

quindi, scelta a caso la grandezza c, sarà

$$ma \gtreqless nc$$

tutte le volte che

$$mb \gtreqless nc,$$

cioè, per la def. 5,

$$a : c = b : c.$$

La seconda parte della proposizione (una grandezza ha ugual ragione con grandezze uguali) — che è del resto evidente — segue qui dall'invertire la proporzione.

Quanto al corollario che segue questa proposizione, afferma HEIBERG che questo è il suo vero posto, e non dopo la prop. 4, come lo colloca TEONE, e nota che, altrimenti, a nulla servirebbe la seconda parte della prop. 7 (se $a = b$, $c : a = c : b$).

Ma, come abbiamo altrove notato (cfr. propp. 4 e 13) neppure a questa prop. 7 quel corollario si può convenientemente riattaccare: la seconda parte della proposizione tende piuttosto, come la prima parte, a stabilire, insieme con la prop. 10, l'unicità della 4ª proporzionale.

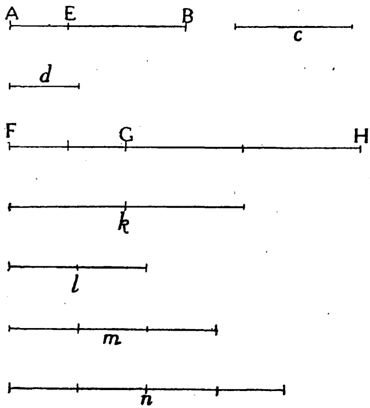
8.

Date due grandezze disuguali, la maggiore ha verso una medesima grandezza maggiore ragione che la minore, e la medesima grandezza ha maggiore ragione con la minore che con la maggiore.

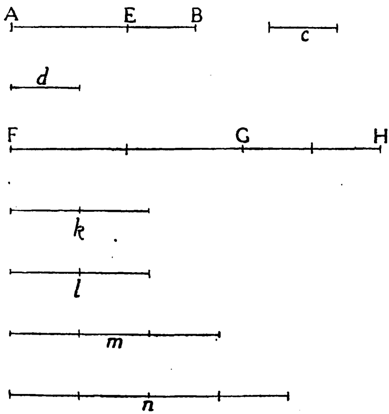
Le grandezze AB e c siano disuguali, e la maggiore sia AB; e sia d un'altra grandezza, scelta a caso. Dico che AB ha con d una ragione maggiore di quella che c ha con d; e che d ha con c una ragione maggiore di quella che ha con AB.

Infatti, poichè AB è maggiore di c, si ponga EB uguale a c; allora, la minore delle grandezze AE, EB, convenientemente moltiplicata, potrà superare d.

Sia dapprima AE minore di EB, si moltiplichi AE, e sia FG un multiplo di AE che supera d; allora, quante volte FG è multipla di AE, altrettante GH sia multipla



di EB, e k di c; inoltre, si prenda l doppio di d, m triplo di d, così si prendano tutti i successivi multipli di d, fino al primo che supera k. Sia n, quadruplo di d, la prima grandezza che supera k. Poichè n è il primo multiplo di d che supera k, la k non è minore di m. E poichè FG e GH sono equimultiple di AE ed EB, anche FG ed FH saranno equimultiple di AE ed AB. Ma FG e k sono equimultiple di AE e c, quindi FH e k sono equimultiple di AB e di c. Ancora, le GH e k sono equimultiple di EB e c; ma EB è uguale a c, dunque GH è uguale a k. Ma k non è minore di m, quindi neppure GH è minore di m. Inoltre FG è maggiore di d, dunque FH è maggiore della somma di d ed m; ma la somma di d ed m è n, perchè m è il triplo di d, ed m e d, presi insieme, formano il quadruplo di d, che è n; la somma di d ed m è quindi uguale ad n. Ma FH supera n, mentre k non supera n; ed FH e k sono equimultiple di AB e c, mentre



n è un altro qualsiasi multiplo di d; quindi AB ha con d ragione maggiore di quella che c ha con d.

Inoltre, dico che d ha con c ragione maggiore che con AB.

Infatti, fatte le stesse costruzioni, dimostreremo similmente che n supera k, mentre non supera FH; inoltre n è multiplo di d, ed FH e k sono altri qualsiasi equimultipli di AB e c. Quindi d ha con c maggiore ragione di quella che ha con AB.

Sia ora invece AE maggiore di EB. La grandezza minore EB, convenientemente moltiplicata, può superare d; moltiplichiamola, e sia GH un multiplo di EB che supera d; quante volte GH è multiplo di EB, altrettante

FG sia multiplo di AE, e k di c. Potremo similmente dimostrare che FH e k sono equimultipli di AB e c: si prenda n uguale al primo multiplo di d che supera FG; di nuovo, FG non sarà minore di m; ma GH è maggiore di d, quindi FH è maggiore della somma di d ed m, cioè FH maggiore di n. Ora, k non supera n, perchè FG, che è maggiore di GH, cioè di k, non supera n. E nello stesso modo, seguendo la via già indicata prima, termineremo la dimostrazione.

Dunque, di grandezze disuguali, ecc. c. d. d.

La distinzione, non indispensabile, della dimostrazione in due casi, è evitata dal SIMSON.

Nota lo ZEUTHEN (¹) che nella dimostrazione euclidea, partendo dall' ipotesi $a > b$, si cercano, in sostanza, due numeri interi m ed n, tali che

$$ma \geqq nc$$

mentre

$$mb \leq nc$$

ossia

$$ma > nc > mb.$$

Queste condizioni si possono cambiare nelle altre:

$$mb > c$$

$$m(a - b) > c$$

$$(n - 1)c \leqq mb < nc$$

e quindi si possono soddisfare, per la def. 4, che per la prima volta qui viene impiegata.

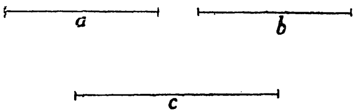
(¹) l. cit., pag. 117.

L' ufficio della proposizione precedente e di questa 8ª è preparare le proposizioni 9 e 10, da cui risulterà l' unicità della 4ª proporzionale.

9.

Grandezze che hanno una medesima ragione con una stessa grandezza sono uguali fra loro, e grandezze con le quali una medesima grandezza ha ugual ragione, sono pure uguali.

Abbia infatti ciascuna delle a, b, una ugual ragione con c; dico che a è uguale a b.



Infatti, se questo non fosse, le a, b, non avrebbero ugual ragione con la c; invece hanno ugual ragione, dunque a è uguale a b.

Ancora: c abbia una medesima ragione con ciascuna delle a, b; dico che a è uguale a b. Se infatti non lo fosse, c non avrebbe una ugual ragione con ciascuna delle a, b. Invece la ha, dunque a è uguale a b.

Dunque grandezze che hanno ecc. c. d. d.

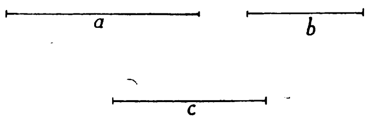
Proposizione inversa della 7.

EUCLIDE la dimostra per assurdo, valendosi della precedente. Una dimostrazione basata sulla def. 5 è stata esposta dal SIMSON (cfr. HEATH, II, pag. 154).

10.

Delle grandezze che hanno una ragione con una stessa grandezza, è maggiore quella che ha ragione maggiore; e quella, alla quale una stessa grandezza ha ragione maggiore, è la minore.

Abbia infatti a con c ragione maggiore di quella che b ha con c. Dico che a è maggiore di b. Infatti, se questo



non fosse, a sarebbe uguale a b, o minore. Ma a non può essere uguale a b, perchè, se lo fosse, ciascuna delle a, b, avrebbe una stessa ragione con la c: e invece questo non è; perciò a non è uguale a b. E neppure a è minore di b, perchè, se lo fosse, a avrebbe con c una ragione minore di quella che b ha con c; invece questo non è, perciò a non è minore di b. Ma è già dimostrato che non è neppure uguale, perciò a è maggiore di b.

Ancora: c abbia con b una ragione maggiore di quella che ha con a; dico che b è minore di a.

Infatti, se non lo fosse, b sarebbe uguale ad a, o maggiore; ma b non è uguale ad a, perchè, se lo fosse, c avrebbe una stessa ragione con a e con b; invece questo non è, quindi a non è uguale a b; e neppure b è maggiore di a, perchè, se lo fosse, c avrebbe con b una ragione minore di quella che ha con a; invece questo non è, perciò b

non è maggiore di a. Ma è stato già dimostrato che non è neppure uguale, perciò b è minore di a.

Dunque, delle grandezze che hanno una ragione con una medesima grandezza, ecc. c. d. d.

Questa proposizione, inversa della 8ª, insieme alla 9ª stabilisce l'unicità della 4ª proporzionale, la cui esistenza viene riconosciuta pei segmenti in VI, 12.

EUCLIDE procede per assurdo, valendosi delle propp. 7 ed 8.

Se $$a:c > b:c$$

si deduce che $$a > b$$

perchè i due casi $$a \lesseqgtr b$$

condurrebbero, rispettivamente, ad:
$$a:c \lesseqgtr b:c,$$ contro l'ipotesi.

Nota però il SIMSON che tale dimostrazione non è rigorosa, perchè non è stato dimostrato che un rapporto non può essere al tempo stesso maggiore e minore d'un altro.

Per questo egli dà una dimostrazione nuova, che si fonda direttamente sulla def. 7:

se $$a:c > b:c$$

si possono trovare due numeri m, n, tali che
$$ma > nc$$
senza che
$$mb > nc.$$
Allora:
$$ma > mb$$
cioè $$a > b.$$

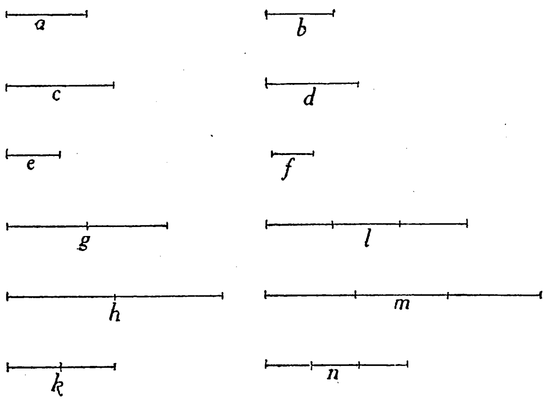
Analogamente il SIMSON dimostra che, se
$$c:b > c:a,$$
anche $$b < a.$$

11.

Le ragioni che sono uguali ad una medesima ragione, sono anche uguali tra loro.

Infatti, a stia a b, come c sta a d; e c stia a d come e sta ad f. Dico che a sta a b come e sta ad f.

Si prendano infatti degli equimultipli g, h, k delle a, c, e; ed altri equimultipli qualsiasi l, m, n, delle b, d, f.



Poichè a sta a b come c sta a d, e sono stati presi degli equimultipli g, h delle a, b e degli altri equimultipli qualsiasi l, m delle b, d, se g supera l, anche h supera m, se è uguale, uguale, se minore, minore. Inoltre, poichè c sta a d come e sta ad f, e sono stati presi degli equimultipli h, k delle c, e, e degli altri equimultipli qualsiasi m, n delle d, f, se h supera m, anche k supera n, se è uguale, uguale, se minore, minore. Ma se h supera m, anche g supera l, se è uguale, uguale, se minore, minore; perciò, se

g supera l, anche k supera n, se è uguale, uguale, se minore, minore; ma g e k sono equimultipli delle a, e, ed l, n sono altri qualsiasi equimultipli delle b, f; dunque a sta a b, come e sta ad f.

Dunque, ragioni uguali ad una stessa ragione sono anche uguali tra loro. c. d. d.

In simboli:

(I) se $$a:b=c:d$$

(II) e $$c:d=e:f$$

anche $$a:b=e:f.$$

Infatti, le (I) e (II) significano che,

secondochè $$ma \gtreqless nb$$

anche $$mc \gtreqless nd;$$

e secondochè $$mc \gtreqless nd$$

anche $$me \gtreqless nf.$$

Perciò, secondochè $$ma \gtreqless nb$$

anche $$me \gtreqless nf$$

cioè $$a:b=e:f.$$

Questa proposizione implica la proprietà transitiva per l'uguaglianza di rapporti, definiti per astrazione nella def. 5.

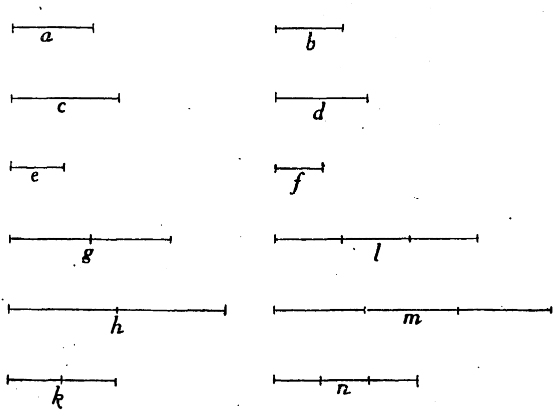
BARROW aggiunge qui lo scolio:

« Le grandezze che hanno ragioni uguali con grandezze uguali sono uguali ».

12.

Se quantesivogliano grandezze sono proporzionali, una delle antecedenti starà ad una delle conseguenti, come la somma delle antecedenti alla somma delle conseguenti.

Quantesivogliano grandezze a, b, c, d, e, f siano proporzionali, in modo che a sta a b come c sta a d, e



come e sta ad f. Dico che la somma delle a, c, e sta alla somma delle b, d, f, come a sta a b.

Si prendano infatti degli equimultipli g, h, k, delle a, c, e; ed altri qualsiasi equimultipli l, m, n, delle b, d, f. Poichè a sta a b come c sta a d, e come e sta ad f, e le grandezze g, h, k sono state prese equimultiple delle a, c, e, e le l, m, n sono altre qualsiasi equimultiple delle b, d, f, se g supera l, anche h supera m, e k supera n; se è uguale, uguale; se minore, minore.

Perciò, se g supera l, anche la somma delle g, h, k supera la somma delle l, m, n; se è uguale, uguale; se minore, minore.

Inoltre, g e la somma delle g, h, k sono equimultiple di a e della somma delle a, c, e, perchè, date quantesivogliano grandezze rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze, la somma delle prime è multipla della somma delle seconde tante volte, quante una delle prime è multipla della sua corrispondente.

Per la stessa ragione, anche l e la somma delle l, m, n sono equimultiple di b e della somma di b, d, f, quindi a sta a b, come la somma delle a, c, e sta alla somma delle b, d, f.

Dunque, se quantesivogliano grandezze, ecc. c. d. d.

In simboli, se

$$a:b = c:d = e:f....$$

si deduce

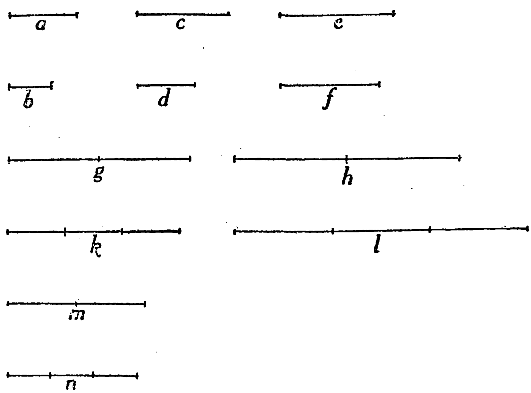
$$(a + c + e ...):(b + d + f + ...) = a:b$$

13.

Se una prima grandezza ha con una seconda ugual ragione di quella che una terza ha con una quarta, e la terza ha con la quarta ragione maggiore di quella che una quinta ha con una sesta, anche la prima ha con la seconda ragione maggiore di quella che la quinta ha con la sesta.

Una prima grandezza a abbia con una seconda b la stessa ragione che una terza c ha con una quarta d, e la terza *c* abbia con la quarta *d* ragione maggiore di quella che una quinta *e* ha con una sesta *f*; dico che la prima *a* ha con la seconda *b* ragione maggiore di quella che la quinta *e* ha con la sesta *f*.

Infatti, poichè esistono certi equimultipli delle *c*, *e*, ed altri qualsiasi equimultipli delle *d*, *f*, tali che il multiplo



di *c* supera il multiplo di *d*, ed il multiplo di *e* non supera il multiplo di *f*, si prendano degli equimultipli *g*, *h* delle *c*, *e*, e degli altri qualsiasi equimultipli *k*, *l* delle *d*, *f*, in modo che *g* superi *k*, ed *h* non superi *l*; inoltre, una grandezza *m* sia multipla di *a* tante volte, quante *g* è multipla di *c*, ed *n* sia multipla di *b* tante volte, quante *k* è multipla di *d*. Poichè *a* sta a *b* come *c* sta a *d*, ed *m*, *g* sono equimultiple di *a*, *c* ed *n*, *k* sono altre qualsiasi equimultiple di *b*, *d*, se *m* supera *n*, anche *g* supera *k*, se è uguale, uguale, se minore, minore. Ma *g* supera *k*, perciò anche *m* supera *n*. Ma *k* non supera *l*, le *m*, *h* sono equimultiple delle a, e e le n, l altre qualsiasi equimultiple delle b, f; quindi a ha con b ragione maggiore di quella che e ha con f.

Dunque, se una prima grandezza ha con una seconda ragione uguale, ecc. c. d. d.

In simboli, se

$$a : b = c : d,$$

ma

$$c : d > e : f,$$

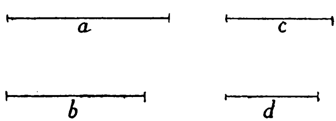
anche

$$a : b > e : f.$$

14.

Se una prima grandezza ha con una seconda la stessa ragione che una terza ha con una quarta, e la prima è maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore.

Una prima grandezza a abbia infatti con una seconda b la stessa ragione che una terza c ha con una quarta d;



ed a sia maggiore di d. Infatti, poichè a è maggiore di c, e b è un'altra qualsiasi grandezza, a ha con b ragione maggiore di quella che c ha con b. Ma a sta a b come c sta a d; quindi anche c ha con d una ragione maggiore di quella che ha con b. Ma di due grandezze è minore quella che con una medesima grandezza ha ragione maggiore: perciò d è minore di b, cioè b è maggiore di d.

Similmente dimostreremo, che se a è uguale a c, anche b è uguale a d; e se a è minore di c, anche b è minore di d.

Dunque, se una prima grandezza, ecc. c. d. d.

Se in una proporzione

$$a : b = c : d$$

si suppone che i quattro termini siano omogenei, secondochè

$$a \gtreqless c$$

anche

$$b \gtreqless d.$$

EUCLIDE perviene alla dimostrazione valendosi delle propp. 8 e 13-10. Infatti, se

(I) $$a : b = c : d$$

ed

$$a > c,$$

per la 8:

$$a : b > c : b$$

e per la (I)

$$c : d > c : b \qquad \text{(prop. 13).}$$

La 10 avverte allora che

$$d < b, \quad \text{cioè} \quad b > d.$$

Con analogo ragionamento, valendosi della prop. 9, si perverrebbe alla dimostrazione della 2ª parte della proposizione.

La prova della 3ª parte si ricondurrebbe al primo caso osservando che, se:

$$a : b = c : d,$$

anche

$$c : d = a : b.$$

E se

$$a < c$$

cioè

$$c > a$$

anche

$$d > b$$

cioè

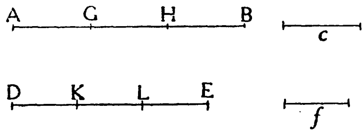
$$b < d.$$

15.

Le parti hanno fra loro la stessa ragione che i loro equimultipli, presi nel loro ordine.

Siano infatti AB e DE equimultipli di c ed f; dico che c sta ad f come AB sta a DE.

Infatti, poichè AB e DE sono equimultipli di c ed f, in AB sono contenute tante grandezze uguali a c, quante grandezze sono in DE uguali ad f. Si divida AB in parti



AG, GH, HB, uguali a c, e DE in parti DK, KL, LE, uguali ad f; il numero delle grandezze AG, GH, HB sarà uguale al numero delle grandezze DK, KL, LE. E poichè AG, GH, HB sono uguali fra loro, e DK, KL, LE sono pure uguali tra loro, AG starà a DK come GH sta a KL, come HB sta ad LE. Ma una delle antecedenti sta ad una delle conseguenti, come la somma delle antecedenti alla somma delle conseguenti. Quindi AG sta a DK come HB sta a DE. Ma AG è uguale a c, e DK è uguale ad f, dunque c sta ad f, come AB sta a DE.

Dunque, le parti hanno ecc. c. d. d.

In simboli:

$$a : b = ma : mb.$$

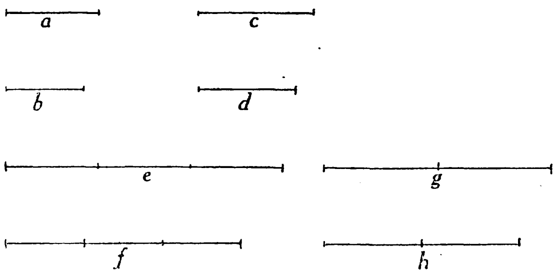
16.

Se quattro grandezze sono proporzionali, anche permutando saranno proporzionali.

Siano *a*, *b*, *c*, *d* quattro grandezze proporzionali, in modo che *a* stia a *b* come *c* sta a *d*; dico che, anche permutando, *a* sta a *c* come *b* sta a *d*.

Si prendano infatti delle grandezze *e*, *f*, equimultiple delle *a*, *b*, e delle altre qualsiasi equimultiple *g*, *h*, delle *c*, *d*.

Poichè *e* ed *f* sono equimultiple di *a* e *b*, e le parti hanno ugual ragione che loro equimultipli, presi nel loro



ordine, *a* sta a *b* come *e* sta ad *f*. Ma *a* sta a *b* come *c* sta a *d*, perciò anche *c* sta a *d* come *e* ad *f*; ancora, poichè *g* ed *h* sono equimultiple di *c* e *d*, così *c* sta a *d* come *g* sta a *h*; ma *c* sta a *d* come *e* ad *f*, quindi anche *e* sta ad *f* come *g* sta ad *h*.

Se poi quattro grandezze sono proporzionali, e la prima è maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore. Quindi, se *e* è più grande di *g*, anche *f* è più grande di *h*;

se uguale, uguale; se minore, minore; ma e ed f sono equimultipli di a e b, e g, h altri qualsiasi equimultipli di c, d, perciò a sta a c come b sta a d.

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali, ecc. c. d. d.

Da una proporzione:

$$a:b = c:d,$$

se i quattro termini sono omogenei si può dedurre:

$$a:c = b:d.$$

Infatti, per la prop. 15,

$$a:b = ma:mb$$
$$c:d = nc:nd;$$

allora: $$ma:mb = nc:nd \qquad \text{(prop. 11).}$$

Ma la prop. 14 avverte che, secondochè

$$ma \gtreqless nc$$

anche $$mb \gtreqless nd$$

cioè $$a:c = b:d.$$

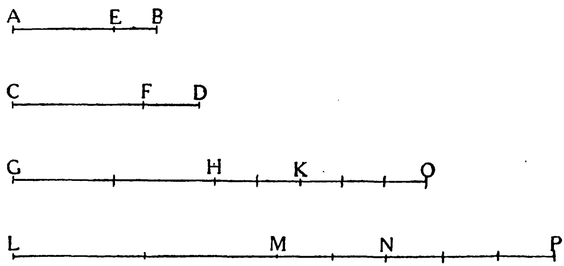
17.

Se delle grandezze, prese insieme, sono proporzionali, lo sono anche prese separatamente (dividendo).

Siano AB, BE, CD, DF grandezze proporzionali, in modo che AB stia a BE come CD sta a DF; dico che sono proporzionali anche dividendo, cioè AE sta ad EB come CF sta a DF.

Si prendano infatti degli equimultipli GH, HK, LM, MN delle AE, EB, CF, FD; ed altri qualsiasi equimultipli KO, NP delle EB, FD; poichè le GH ed HK sono equimultiple delle AE, EB, le GH e GK saranno equimultiple delle AE ed AB.

Ma GH ed LM sono equimultiple delle AE, CF; quindi GK ed LM sono equimultiple delle AB e CF.



Ancora, poichè LM ed MN sono equimultiple delle CF, FD, le LM, LN saranno equimultiple delle CF, CD; ma LM e GK erano equimultiple delle CF, AB; perciò GK ed LN sono equimultiple delle AB, CD; di nuovo, poichè HK ed MN sono equimultiple delle EB, FD, e KO ed NP sono pure equimultiple delle EB, FD, anche componendo, HO ed MP saranno equimultiple delle EB, FD; e poichè AB sta a BE come CD sta a DF, e le GK, LN sono state prese equimultiple delle AB, CD, e le HO, MP sono equimultiple delle EB, FD, se GK supera HO, anche LN supera MP; se è uguale, uguale; se minore, minore. Supponiamo che GK superi HO; tolta la grandezza comune HK, anche GH supera KO; ma se

GK superava *HO*, anche *LN* superava *MP*; dunque anche *LN* supera *MP*, e, tolta la grandezza comune *MN*, anche *LM* supera *NP*; perciò, se *GH* supera *KO*, anche *LM* supera *NP*. Similmente dimostreremo che, se *GH* è uguale a *KO*, anche *LM* è uguale ad *NP*, e se *GH* è minore di *KO*, anche *LM* è minore di *NP*. Ma *GH* ed *LM* sono equimultipli di *AE*, *CF*; e *KO*, *NP* sono altri qualsiasi equimultipli di *EB*, *FD*. Quindi *AE* sta ad *EB* come *CF* sta ad *FD*.

Dunque, se delle grandezze, ecc. c. d. d.

Se $$a:b=c:d$$

anche $$(a-b):b=(c-d):d.$$

Infatti, presi degli equimultipli

$$m(a-b),\quad mb,\quad m(c-d),\ md,$$

delle

$$a-b,\quad b,\quad c-d,\quad d$$

per la prop. 1 si può affermare che ma, mc sono equimultipli di a, c.

E se

$$nb,\quad nd$$

sono due equimultipli di b, d, la prop. 2 avverte che

$$(m+n)b,\quad (m+n)d$$

sono equimultipli di b, d.

Ora, poichè:

$$a:b=c:d,$$

secondochè: $$ma \gtreqless (m+n)b$$

sarà anche: $$mc \gtreqless (m+n)d.$$

Sottraendo dalle ma, $(m+n)b$ la parte comune mb, e dalle mc, $(m+n)d$ la parte comune md, si troverà che, secondochè

$$m(a-b) \gtreqless nb,$$

anche:

$$m(c-d) \gtreqless nd;$$

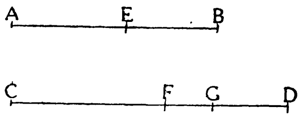
cioè:

$$(a-b):b=(c-d):d. \qquad \text{c. d. d.}$$

18.

Se delle grandezze sono proporzionali prese separatamente, sono anche proporzionali prese insieme (componendo).

Le grandezze AE, EB, CF, FD, siano proporzionali, in modo che AE stia ad EB, come CF sta ad FD; dico



che anche componendo sono proporzionali, cioè AB sta a BE come CD sta ad FD.

Infatti, se AB non stesse a BE come CD sta a DF, la AB starebbe a BE, come CD ad una grandezza minore o maggiore di DF, grandezza che dapprima supponiamo sia DG, minore di DF. Poichè AB sta a BE come CD sta a DG, queste grandezze, che sono proporzionali, sarebbero proporzionali anche dividendo, cioè AE starebbe ad EB, come CG sta a GD. Ma, per ipotesi, AE sta ad EB come CF sta ad FD, dunque CG starebbe a GD come CF ad FD; ma la prima, CG, è maggiore della terza, CF, perciò anche la seconda GD sarebbe maggiore della quarta, FD, invece essa è, per ipotesi, minore, il che è impossibile. Quindi non può essere che AB stia a BE, come CD ad una grandezza minore di DF. Similmente si dimostrerebbe che non può AB stare a BE, come CD ad una grandezza maggiore di DF; dunque AB sta a BE, come CD a DF stesso.

Dunque, se delle grandezze, ecc. c. d. d.

In simboli, se

$$a:b = c:d$$

anche

$$(a+b):b = (c+d):d.$$

Infatti, se questo non fosse, si verificherebbe uno dei due casi:

$$(a+b):b = (c+d):(d \pm x).$$

Allora, dividendo (prop. 17),

$$a:b = (c \mp x):(d \pm x),$$

quindi (prop. 11)

$$(c \mp x):(d \pm x) = c:d.$$

Ora, essendo

$$c - x < c$$

per la prop. 14 dovrebbe essere

$$d + x < d$$

che è assurdo; nel secondo caso si avrebbe:

$$c + x > c;$$

dovrebbe essere allora

$$d - x > d,$$

ugualmente assurdo.

Questa proposizione è analoga alla 17, e nel nostro concetto entrambe ne formano anzi una sola.

Ma la via seguita qui da EUCLIDE non è analoga a quella seguita nella prop. 17; e la differenza è tanto più rilevabile, in quanto il metodo seguito nella presente dimostrazione implica l'unicità della 4ª proporzionale.

L'osservazione fu già fatta dal CAMPANO, il quale dà quindi della proposizione in esame la dimostrazione seguente:

Si tratta di far vedere che, se

$$AE:EB = CF:FD$$

anche:

$$AB:EB = CD:FD.$$

Presi, come nella prop. 17 (cfr. figura, pag. 53) GH, HK, LM, MN equimultipli delle AE, EB, CF, FD, ed altri qualsiasi equimultipli KO, NP delle EB, FD, secondochè

(1) $$GH \gtreqless KO$$

sarà

(2) $$LM \gtreqless NP.$$

Aggiungendo ora HK ai due membri della (1) ed MN ai due membri della (2), avremo che, quando

$$GK \gtreqless HO$$

sarà anche

$$LN \gtreqless MP.$$

Perciò

$$AB:EB = CD:FD.$$

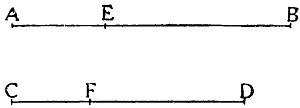
Più tardi il CLAVIO volle rimediare all'inconveniente introducendo l'affermazione dell'esistenza della 4ª proporzionale come un postulato: ma esso richiede una costruzione.

Ora il SACCHERI giustifica questa prop. 18 in esame, osservando che, almeno per i segmenti, questa costruzione è offerta con la VI, 12, che, basandosi solamente sulle proposizioni VI, 1 e 2, potrebbe, con quelle, essere dimostrata anche a questo punto dell'opera euclidea.

Per eliminare invece l'inconveniente, il SIMSON offre di questo teorema una dimostrazione analoga a quella seguita per la prop. 17 (cfr. HEATH, II, pag. 171) e che è riportata in E. BERTINI, *Libro V di Euclide*, prop. 21.

19.

Se una grandezza sta ad un'altra come una grandezza tolta dalla prima sta ad una grandezza tolta dalla seconda, anche le rimanenti staranno tra loro, come tutta la prima grandezza sta a tutta la seconda.



La grandezza AB stia a CD come AE sta a CF; dico che anche EB sta ad FD, come AB sta a CD.

Infatti, poichè AB sta a CD come AE sta a CF, permutando, anche BA sta ad AE come DC sta a CF; e poichè le grandezze che sono proporzionali, lo sono anche dividendo, BE sta ad EA, come DF sta a CF; e permutando, BE sta a DF, come EA sta a CF. Ma, per ipotesi, AE sta a CF, come AB sta a CD; quindi anche EB sta ad FD come AB sta a CD.

Dunque, se una grandezza sta ad un'altra, ecc. c. d. d.

Corollario.

Di qui è manifesto che, se delle grandezze sono proporzionali, lo saranno anche convertendo.

In simboli, se

$$a:b=(a-c):(b-d)$$

anche

$$c:d=a:b$$

Infatti, per la prop. 16:

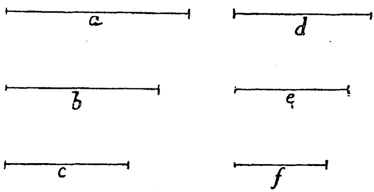
$$a:(a-c)=b:(b-d)$$

e dividendo: $$c:a=d:b,$$

cioè: $$c:d=a:b.$$

20.

Se tre grandezze, ed altre in egual numero, sono a due a due proporzionali, e se, ex aequo, *la prima è maggiore della terza, anche la quarta è maggiore della sesta; se uguale, uguale; se minore, minore.*



Le tre grandezze a, b, c, e le altre tre d, e, f, siano a due a due proporzionali, cioè a stia a b come d sta ad e, e b stia a c come e sta a f; e sia a maggiore di c: dico che anche d è maggiore di f; e se a è uguale a c anche d è uguale ad f, se minore, minore.

Infatti, poichè a è maggiore di c, e b è un'altra qualsiasi grandezza, a avrà con b ragione maggiore di quella che c ha con b. Ma a sta a b come d sta ad e, ed, invertendo, c sta a b come f sta ad e. Quindi anche d ha con e ragione maggiore di quella che f ha con e.

Ma, di due grandezze che abbiano una ragione con una stessa grandezza, è maggiore quella che ha maggiore ragione, quindi d è maggiore di f. Similmente dimostreremo che, se a è uguale a c, anche d è uguale ad f, e se a è minore di c, anche d è minore di f.

Dunque, date tre grandezze, ecc. c. d. d.

In simboli, se

(I) $$a:b=d:e$$

e

(II) $$b:c=e:f,$$

secondochè: $$a \gtreqless c$$

anche $$d \gtreqless f.$$

Infatti, se $a > c$, per la prop. 8:

$$a:b > c:b.$$

Ma

$$a:b=d:e$$

ed invertendo la (II):

$$c:b=f:e,$$

perciò:

$$d:e > f:e$$

cioè $$d > f.$$

Le dimostrazioni per gli altri due casi, esposte dal SIMSON, sono riportate in HEATH., II, pag. 177.

In questa proposizione per la prima volta si inverte la proporzione, assumendo che, se

$$a:b=c:d,$$

anche

$$b:a=d:c.$$

Come abbiamo già rilevato, la possibilità di ciò consegue immediatamente dalla def. 5 (Cfr. note alle propp. 4 e 7).

Si inizia, con questa proposizione, la teoria delle ragioni *composte*, tendendo le 20-23 ad enunciare che la ragione $a:c$ è composta delle ragioni $a:b$, $b:c$.

In linguaggio moderno, considerando la ragione, o *rapporto*, come numero, si direbbe che $a:c$ è il *prodotto* dei due rapporti $a:b$ e $b:c$. E nota a questo proposito lo ZEUTHEN [1]: il fatto che l' ultimo termine del primo rapporto è uguale al primo termine del secondo, non pone alcuna restrizione alla composizione di rapporti; poichè la VI, 12 proverà che ogni rapporto può essere trasformato in modo che uno dei suoi termini assuma un dato valore, come EUCLIDE stesso, appunto per comporre due ragioni, fa in VI, 23. Risulta da tale proposizione che, in realtà, due erano i modi con cui i Greci potevano esprimere un prodotto: quello espresso da queste proposizioni del V libro, e la rappresentazione per mezzo di rettangoli: tra le due, la prima ha il vantaggio di poter esprimere il prodotto di qualsiasi numero di fattori (come si può rilevare dalla prop. 22); mentre, rappresentando il prodotto di due fattori per mezzo di un rettangolo, si è costretti, quando si debba rappresentare un prodotto di tre fattori, a ricorrere alle tre dimensioni dello spazio.

Nel caso poi in cui i rapporti di cui si deve fare la composizione siano uguali, cioè se

$$a:x_1 = x_1:x_2 = ... = x_{n-1}:b$$

tale scrittura esprime, per mezzo di termini che formano una progressione geometrica, ciò che in simboli moderni è reso da

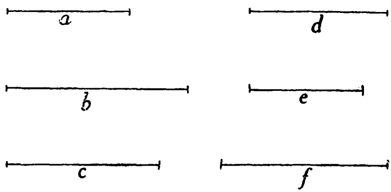
$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{x}\right)^n.$$

(1) l. cit., pag. 119.

21.

Qualora tre grandezze, ed altre in egual numero, formino una proporzione perturbata, se la prima grandezza è maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della seconda; se uguale, uguale; se minore, minore.

Siano date tre grandezze a, b, c, ed altrettante d, e, f, tali che prese a due a due esse siano proporzionali,



in ordine perturbato, per modo che a stia a b come e sta ad f, e b stia a c come d sta ad e, ed a sia maggiore di c. Dico che anche d è maggiore di f; e se a è uguale a c, anche d è uguale ad f; se minore, minore.

Infatti, poichè a è maggiore di c, e b è un'altra qualsiasi grandezza, a ha con b maggiore ragione di quella che c ha con b. Ma a sta a b come e sta ad f, ed, invertendo, c sta a b come e sta a d; quindi anche e ha con f maggior ragione di quella che ha con d; ma, di due grandezze, è minore quella con cui una stessa grandezza ha maggior ragione; quindi d è maggiore di f; similmente dimostreremo che, se a è uguale a c, anche d è uguale ad f, e se minore, minore.

Dunque, date tre grandezze, ecc. c. d. d.

Le grandezze

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ d, & e, & f, \end{matrix}$$

formino una proporzione perturbata, cioè

(I) $$a:b = e:f,$$

e (II) $$b:c = d:e:$$

secondochè $$a \gtreqless c$$

sarà anche $$d \gtreqless f.$$

Infatti, per la prop. 8:

$$a:b > c:b.$$

Tenendo presenti la (I), e la (II) invertita, si ha:

$$e:f > e:d,$$

cioè $$d > f \qquad \text{(V, 10).}$$

Le dimostrazioni degli altri due casi, esposte dal SIMSON, sono dallo HEATH riportate in II, p. 179.

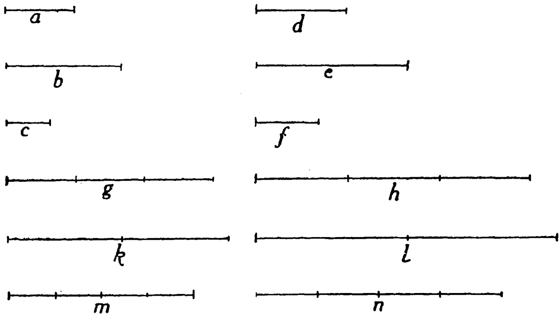
22.

Date quantesivogliano grandezze, ed altre in egual numero, se prese a due a due esse sono proporzionali, anche ex aequo *esse saranno in proporzione.*

Siano date quantesivogliano grandezze a, b, c ed altre in egual numero d, e, f, tali che prese a due a due siano proporzionali, in modo che *a* stia a *b*, come *d* sta ad *e*, e *b* stia a *c* come *e* sta ad *f*; dico che anche *ex aequo* esse saranno in proporzione.

Si prendano infatti degli equimultipli *g*, *h* delle *a*, *d*, poi altri qualsiasi equimultipli *k*, *l* delle *b*, *e*, ed altri qualsiasi equimultipli *m*, *n*, delle *c*, *f*.

Poichè *a* sta a *b* come *d* sta ad *e*, e le *g*, *h* sono state prese equimultiple delle *a*, *d*, e le *k*, *l* altre qualsiasi equi-



multiple delle *b*, *e*, la *g* sta a *k*, come *h* sta ad *l*. Per la stessa ragione, anche *k* sta ad *m* come *l* sta ad *n*; ora, poichè si hanno tre grandezze *g*, *k*, *m* ed altre tre *h*, *l*, *n* tali che prese a due a due sono proporzionali, *ex aequo*, se *g* supera *m*, anche *h* supera *n*, se è uguale, uguale, se minore, minore. Ma le *g*, *h* sono equimultiple delle *a*, *d*, e le *m*, *n* sono altre qualsiasi equimultiple delle *c*, *f*. Quindi *a* sta a *c*, come *d* sta ad *f*.

Dunque, date quantesivogliano grandezze, ecc.

c. d. d.

Date le grandezze

$$a,\ b,\ c,\ldots,$$
$$d,\ e,\ f,\ldots,$$

se

$$a:b = d:e$$

e

$$b:c = e:f,$$

ex aequo

$$a:c = d:f.$$

Infatti, per la prop. 4:

$$ma:nb = md:ne$$

$$nb:pc = ne:pf;$$

cioè, secondochè

$$ma \gtreqless pc$$

anche

$$md \gtreqless pf. \qquad \text{(V, 20).}$$

La def. 5 avverte allora che

$$a:c = d:f.$$

Questa 22ª proposizione significa che « ragioni composte di ragioni uguali sono uguali ».

Essa permette di definire il prodotto di due numeri reali, concepiti come rapporti di grandezze.

Sia, per esempio,

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{c}{d}.$$

Immaginiamo di aver costruito una terza grandezza b', tale che

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{d}.$$

L' esistenza di b' si può stabilire indipendentemente dal postulato della continuità per classi particolari di grandezze, come i segmenti (cfr. VI, 12), mentre la sua unicità deriva dalle propp. V, 9, 10.

Ora, il prodotto $\gamma = \alpha\beta$ sarà definito da

$$\gamma = \frac{a}{b'}.$$

L'unicità del prodotto così definito risulta da questa 22ª proposizione.

La proprietà commutativa sarà espressa invece dalla proposizione seguente.

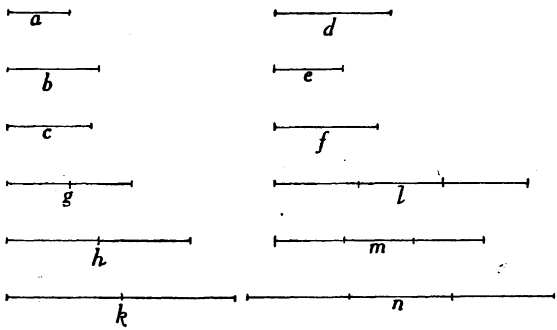
La proprietà associativa è evidente.

23.

Se tre grandezze, ed altre in egual numero, formano una proporzione perturbata, anche ex aequo esse *saranno in proporzione.*

Date tre grandezze a, b, c ed altrettante d, e, f, se prese a due a due esse sono proporzionali, e la loro proporzione è perturbata, in modo che a stia a b come e sta ad f, e b stia a c come d sta ad e, dico che a sta a c, come d sta ad f.

Si prendano infatti degli equimultipli g, h, k delle a, b, d; ed altri qualsiasi equimultipli l, m, n delle c, e, f. Poichè g, h sono equimultipli delle a, b, e le parti hanno tra loro la stessa ragione che loro equimultipli, a sta a b come g sta ad h. Per la stessa ragione, e starà ad f come m sta ad n; ma a sta a b come e sta ad f; quindi anche g sta ad h come m sta ad n; e poichè b sta a c come d sta ad e, permutando, b starà a d come c sta ad e. Ora, poichè h, k sono equimultiple delle b, d, e le parti hanno tra loro la stessa ragione che loro equimultipli, b sta a d, come h sta a k; ma b sta a d come c sta ad e, quindi anche h sta a k come c sta ad e. Di nuovo, poichè l ed m sono equimultiple delle c, e, la c sta alla e come l sta ad m; ma c sta ad e come h sta a k; perciò anche h sta a k come l sta ad m, e, permutando, h sta ad l come k sta ad m; ma è già stato dimostrato che g sta ad h come m sta ad n; e poichè le tre grandezze g, h, l, e le altre



tre k, m, n formano una proporzione perturbata, *ex aequo*, se g è maggiore di l, anche k è maggiore di n, se uguale, uguale; se minore, minore; inoltre g, k sono equimultiple delle a, d, e le l, n delle c, f; quindi a sta a c, come d sta ad f.

Dunque, date tre grandezze, ecc. c. d. d.

In simboli, date le grandezze proporzionali

$$a,\ b,\ c,$$
$$d,\ e,\ f,$$

se esse dan luogo ad una proporzione perturbata, in modo che:

(I) $$a:b = e:f$$

(II) $$b:c = d:e$$

anche, *ex aequo*:

$$a:c = d:f.$$

Infatti, per la prop. 15, la (I) avverte che:

$$ma : mb = ne : nf$$

e la (II), permutata, avverte che

$$mb : md = nc : ne.$$

Dunque le grandezze

$$\begin{array}{l} ma,\ mb,\ nc \\ md,\ ne.\ nf \end{array}$$

formano una proporzione perturbata. Perciò, *ex aequo*,

secondochè $\qquad ma \gtreqless ne$

anche $\qquad md \gtreqless nf \qquad$ (V. 21)

cioè $\qquad a : c = d : f.$

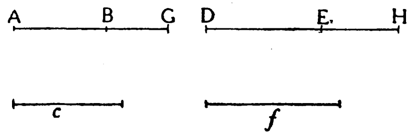
Come è stato già osservato (cfr. nota alla prop. precedente) questa proposizione esprime la proprietà commutativa del prodotto di due rapporti.

24.

Se una prima grandezza ha con una seconda la stessa ragione che una terza ha con una quarta, ed una quinta ha con la seconda la stessa ragione che una sesta ha con la quarta, anche la somma della prima e della quinta ha con la seconda la stessa ragione che la somma della terza e della sesta ha con la quarta.

Una prima grandezza AB abbia con una seconda c la stessa ragione che una terza DE ha con una quarta f; ed una quinta BG abbia con la seconda c la stessa ragione che una sesta EH ha con la quarta f; dico che anche la somma della prima e della quinta, cioè AG, ha con la seconda c la stessa ragione che la somma della terza e della sesta, cioè DH, ha con la quarta f.

Infatti, poichè BG sta a c come EH sta ad f, invertendo, c sta a BG come f ad EH; e poichè AB sta a c



come DE sta ad f, e c sta a BG come f sta ad EH, *ex aequo*, AB sta a BG, come DE sta ad EH; e poichè le grandezze che sono proporzionali, lo sono anche componendo, AG sta a BG come DH sta ad HE. Ma BC sta a c come EH sta ad f; quindi, *ex aequo*, AG sta a c, come DH sta ad f.

Dunque, se una prima grandezza, ecc. c. d. d.

In simboli, se

(I) $$a:c = d:f$$

e

(II) $$b:c = e:f$$

anche $$(a+b):c = (d+e):f.$$

Infatti, per la prop. 22, la (I) e la (II) invertita danno:

$$a:b = d:e.$$

Ma allora

$$(a+b):b = (d+e):e. \qquad \text{(V, 18).}$$

Una nuova applicazione della prop. 22 fra questa proporzione e la (II) mostra che

$$(a+b):c = (d+e):f.$$

In sostanza, questa proposizione afferma che la somma di due rapporti (numeri reali) è indipendente dalla rappresentazione $a:c$ o $d:f$. Nota il BONNESEN [1] che si ha dunque qui, implicitamente, la definizione di *addizione di rapporti.*

La definizione di sottrazione manca, ma sarebbe analoga.

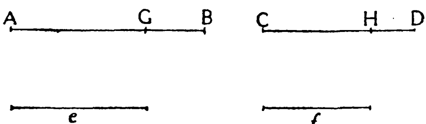
Osserva lo ZEUTHEN che, benchè questa proposizione sia dello stesso tipo di quelle che precedono le proposizioni sulle ragioni composte, tuttavia solamente qui essa può trovar posto, per le due applicazioni della prop. 22, che la dimostrazione richiede.

Si noti la prima di tali applicazioni: essa mostra che la divisione di rapporti non richiede nuove particolari proposizioni.

25.

Se quattro grandezze sono proporzionali, la somma della maggiore e della minore supera la somma delle rimanenti.

Siano date quattro grandezze AB, CD, e, f proporzionali, in modo che AB stia a CD, come e sta ad f; la



maggiore sia AB, e la minore f. Dico che la somma delle AB, f è più grande della somma delle CD, e.

Si costruisca, infatti, AG uguale ad e e CH uguale ad f. Poichè AB sta a CD come e sta ad f, ed inoltre e è uguale ad AG, ed f a CH, la AB starà a CD come AG

(1) l. cit., pag. 121.

sta a CH: allora anche GB starà ad HD come AB sta a CD. Ma AB è maggiore di CD, perciò anche GB è maggiore di HD; e poichè AG è uguale ad e, e CH è uguale ad f, anche la somma delle AG, f è uguale alla somma delle CH, e; allora, se, date le grandezze disuguali GB, HD, delle quali la maggiore è GB, alla GB si aggiunge la somma delle AG, f, ed alla HD si aggiunge la somma delle CH, e, si può concludere che la somma delle AB, f supera la somma delle CD, e.

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali, ecc.

c. d. d.

In simboli, se

$$a:b = c:d$$

ed a è la grandezza maggiore, e d la minore,

$$a + d > b + c.$$

Infatti, per la prop. 19,

$$(a - c):(b - d) = a:b;$$

e poichè $$a > b.$$

sarà $$a - c > b - d;$$

aggiungendo $c + d$ a ciascun membro di questa disuguaglianza:

$$a + d > b + c.$$

Notiamo, con lo ZEUTHEN, che nel caso particolare in cui $b = c$, questa proposizione afferma che la *media aritmetica* fra due grandezze è maggiore della *media geometrica:* per i segmenti, tale proposizione verrà dimostrata in VI, 27, e costituisce il *diorisma* (διορισμός), cioè la condizione necessaria per la risolubilità delle equazioni di 2° grado.

LIBRO SESTO

PER CURA DI

MARIA TERESA ZAPELLONI

Termini.

1.

Le figure rettilinee sono *simili* (ὅμοια), quando i loro angoli sono uguali a due a due, ed i lati che comprendono gli angoli uguali proporzionali.

Come è già stato notato (v. Libro V, introduzione), nel VI Libro degli *Elementi* la teoria generale delle proporzioni viene applicata alle grandezze geometriche: in particolare, alle figure simili, che sono qui definite (pel caso dei poligoni), e la cui esistenza è dimostrata mediante la costruzione nella prop. 18.

La definizione che qui vien data dei poligoni simili (uguaglianza d'angoli e proporzionalità di lati attorno agli angoli uguali) assume un'importanza anche per la *teoria euclidea dell'uguaglianza*.

Abbiamo già rilevato (nota alle noz. com. 1-8: Vol. I. pp. 48-49) che, per EUCLIDE, l'uguaglianza si riferisce sempre alle grandezze: segmenti, angoli, superficie, ecc. L'uguaglianza per sovrapponibilità (congruenza) non è esplicitamente definita e viene considerata soltanto in singoli casi (1). Ma si comprende ch'essa è per lui « uguaglianza di forma » (similitudine) aggiunta a « uguaglianza di grandezza », così *poligoni congruenti* sono « poligoni simili ed uguali » (in superficie). Dalle prop. 19, 20 risulta poi che i poligoni congruenti si possono definire come aventi « lati e angoli ordinatamente uguali ». Questo concetto s'accorda con quello che appare nelle prop. I, 4, 8, 26: ivi infatti s'incontrano triangoli congruenti, dei quali — senza designarne la relazione con un nome speciale — l'enunciato dice che, oltre ad essere uguali, hanno ordinatamente uguali lati ed angoli.

---

(1) Una definizione a parte si trova anche pei « cerchi uguali » in III, 1.

Pertanto l'approfondimento della nozione euclidea della congruenza porta a ridurla alle nozioni elementari di « segmenti uguali » ed « angoli uguali », come è svolto modernamente nella critica di HILBERT (cfr. l'art. di GUARDUCCI nel I Vol. delle *Questioni*) (1).

2.

[Due grandezze (omogenee) si dicono *inversamente* proporzionali ad altre due, se una delle prime sta ad una delle seconde, come la rimanente di queste sta alla rimanente delle prime].

Abbiamo tradotto alquanto liberamente questa definizione, che, riferita letteralmente, non sarebbe chiara. [Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν]. Cioè: « Due figure sono riferite reciprocamente, quando in ciascuna di esse i termini del rapporto sono antecedenti e conseguenti »; dove con « termini del rapporto » si rende qui la parola λόγοι, il cui ufficio resta oscuro. (Cfr. ZAMBERTI: « Termini rationales »).

D'altra parte la definizione del testo euclideo è, con ogni probabilità, interpolata, perchè nelle propp. 14 e 15 si parla solo di parallelogrammi e triangoli in cui i *lati* sono inversamente proporzionali (ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί), ciò che risponderebbe alla forma da noi data alla def. 2.

3.

Si dice che una retta è *divisa in media ed estrema ragione*, quando tutta la retta ha con la sua parte maggiore la stessa ragione che la parte maggiore ha con la minore.

---

(1) *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. ENRIQUES. Bologna, Zanichelli.

Si introduce qui l'espressione che conviene ad un segmento a, diviso in parti x ed $a - x$, tali che soddisfino l'equazione:

$$a(a - x) = x^2.$$

La ricerca del punto di divisione costituisce l'argomento della prop. 30, come già ha costituito, sotto altra forma, quello della II, 11.

4.

L'*altezza* (ὕψος) di qualsiasi figura è il segmento di perpendicolare condotto dal vertice alla base.

Il vocabolo « altezza » verrà usato solo per i triangoli ed i parallelogrammi, e — naturalmente — sempre in relazione alla scelta d'una base.

Nel testo di TEONE si trova anche la definizione [5] seguente: « *Una ragione si dice esser composta di più ragioni, quando* « *i valori* » (πηλικότητες) *di dette ragioni, moltiplicati insieme, formano una* (*ragione*) ».

Ora, tale definizione è senza dubbio interpolata. Essa non si trova nel testo di CAMPANO, tradotto dall'arabo, nè mai viene usata negli *Elementi*.

Data la sua forma oscura, non deve meravigliare che abbia sempre sollevato le critiche dei commentatori, e richiesto delucidazioni anche da GALILEO [1] e da SACCHERI [2].

Il qual GALILEO nota che il punto essenziale per ridurre la composizione di due rapporti $a:b$, $m:n$, a quella dei due: $a:b$, $b:c$, è la possibilità di trasformare un rapporto in un altro, avente un termine assegnato, come si fa nella prop. 23.

Egli considera perciò questa 5ª definizione come un teorema da dimostrarsi dopo la detta 23: a questa veduta si accosta quella del

---

[1] Principio di giornata aggiunta ai « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze ».

[2] *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Libr. II, Parte II.

SACCHERI, che nella definizione in esame vede introdotto un postulato, non evidente senza dimostrazione.

Nel testo di CANDALLA ed in quello di GIORDANO VITALE, nel quale manca la def. 5, compare la definizione di parallelogrammo a cui manca, o che ha in eccesso un altro parallelogrammo della medesima altezza:

« *Il parallelogrammo applicato ad una linea retta si dice mancare di un parallelogrammo della medesima altezza, quando non occupa tutta la retta alla quale è applicato; e si dice superare d'un parallelogrammo della medesima altezza, quando occupa maggior lunghezza della linea alla quale è applicato* ».

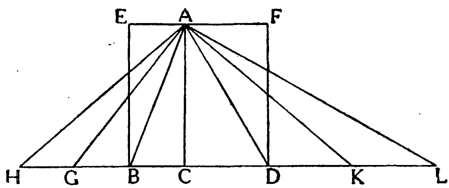
Nel testo però (propp. 27, 28, 29) interviene la nozione di parallelogrammo applicato ad una retta, ed a cui manca (o che ha in eccesso) un parallelogrammo simile e similmente disposto ad un parallelogrammo dato.

Proposizioni.

1.

I triangoli ed i parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.

I triangoli ABC, ACD, ed i parallelogrammi EC, CF abbiano la stessa altezza AC. Dico che la base BC sta alla base CD, come il triangolo ABC sta al triangolo ACD, e come il parallelogrammo EC sta al parallelogrammo CF. Si prolunghi infatti la base BD da tutte



e due le parti, fino ai punti H, L, conducendo quantisivogliano segmenti BG, GH, uguali alla base BC, e quantisivogliano segmenti DK, KL, uguali alla base CD, e si conducano le AG, AH, AK, AL.

Poichè CB, BG, GH sono fra loro uguali, anche i triangoli AHG, AGB, ABC sono uguali (1) tra loro [I, 38]; perciò, quante volte la base HC è multipla della

(1) Sull'uso della parola « uguale » cfr. la nota alla def. I di questo libro.

base BC, attrettante il triangolo AHC è multiplo del triangolo ABC. Per la stessa ragione, quante volte la base LC è multipla della base CD, altrettante il triangolo ALC è multiplo del triangolo ACD. E se la base HC è uguale alla base CL, anche il triangolo AHC è uguale al triangolo ACL, se la base HC è maggiore della base CL, anche il triangolo AHC è maggiore del triangolo ACL, se è minore, minore. Ora, date quattro grandezze, cioè le due basi BC e CD, ed i due triangoli ABC, ACD, sono stati presi la base HC ed il triangolo AHC come equimultipli della base BC e del triangolo ABC, e la base LC ed il triangolo ALC come altri qualsiasi equimultipli della base CD e del triangolo ACD; e si è dimostrato che se la base HC supera CL, anche il triangolo AHC supera il triangolo ALC, se è uguale, uguale, se minore, minore. Perciò, come la base BC sta alla base CD, così il triangolo ABC sta al triangolo ACD. E poichè il parallelogrammo EC è doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo FC è doppio del triangolo ACD, e le parti hanno fra loro la stessa ragione che i loro multipli [V, 15], il triangolo ABC sta al triangolo ACD come il parallelogrammo EC sta al parallelogrammo FC. E poichè è già stato dimostrato che la base BC sta alla CD come il triangolo ABC sta al triangolo ACD, e che il triangolo ABC sta al triangolo ACD come il parallelogrammo EC sta al parallelogrammo FC, così, la base BC sta alla base CD come il parallelogrammo EC sta al parallelogrammo FC.

Dunque, i triangoli ed i parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi, c. d. d.

Poichè fra i triangoli (o parallelogrammi) di uguale altezza e le loro basi c'è corrispondenza biunivoca, e poichè a basi uguali corrispondono triangoli (o parallelogrammi) equivalenti, ed alla somma di più basi corrisponde la somma dei rispettivi triangoli (o parallelogrammi), si ha qui un primo caso di classi di grandezze proporzionali (cfr. nota alla def. V, 5). Un altro caso sarà offerto dalla prop. 33.

La dimostrazione del teorema in esame è una diretta applicazione della def. V, 5.

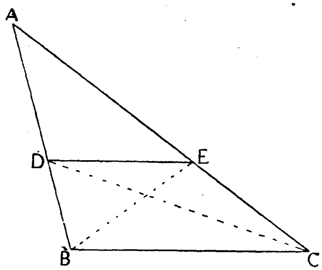
Analogamente si potrebbe dimostrare, con il COMMANDINO, che « triangoli (o parallelogrammi) della stessa base stanno fra loro come le altezze », e facilmente si dimostrerebbero, con il CLAVIO, le due proposizioni inverse. Ma per giungere a tale inversione è necessario ricorrere alla V, 9, che, con la V, 10, serve a determinare l'unicità della quarta proporzionale.

2.

Se in un triangolo si conduce una parallela ad un lato, i lati del triangolo sono segati proporzionalmente; e se i lati di un triangolo sono segati proporzionalmente, la retta condotta per i punti di sezione è parallela al terzo lato.

In un triangolo ABC si conduca la parallela DE ad un lato BC; dico che BD sta a DA come CE sta ad EA.

Si conducano, infatti, le BE, CD. Il triangolo BDE è uguale al triangolo CDE: infatti essi hanno la stessa base DE, e sono contenuti tra le stesse parallele DE, BC. Il triangolo ADE è un'altra grandezza; sappiamo che grandezze uguali hanno ugual ragione verso una stessa grandezza [V, 7]; dunque il triangolo BDE sta al triangolo ADE come il triangolo CDE sta ad ADE. Ma BDE sta ad ADE come BD sta a DA; infatti, avendo la medesima altezza, cioè la perpendicolare condotta da E ad AB, stanno fra loro come le basi. Per



la stessa ragione, il triangolo CDE sta ad ADE, come CE ad EA; perciò, anche BD sta a DA come CE ad EA.

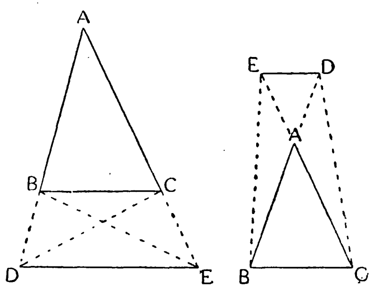
Ora, i lati AB, AC del triangolo ABC siano secati proporzionalmente, in modo che BD stia a DA, come CE sta ad EA; si conduca DE: dico che la DE è paparallela alla BC. Infatti, fatte le medesime costruzioni, poichè BD sta a DA come CE ad EA, e BD sta a DA come il triangolo BDE al triangolo ADE, e CE sta ad EA come il triangolo CDE al triangolo ADE, così, anche il triangolo BDE sta al triangolo ADE come il triangolo CDE al triangolo ADE. Così, ciascuno dei triangoli BDE, CDE ha la medesima ragione con il triangolo ADE. Perciò il triangolo BDE è uguale al triangolo CDE; inoltre, essi hanno la stessa base DE; ma triangoli uguali posti sulla stessa base sono anche compresi tra le stesse parallele [I, 39]. Perciò DE è parallela a BC.

Dunque, se in un triangolo, ecc..., c. d. d.

EUCLIDE non considera qui il caso in cui la retta tracciata seghi non i lati, ma i prolungamenti dei lati del triangolo.

Per prendere in esame anche questo caso, SIMSON modifica così l'enunciato della proposizione:

« .... i lati del triangolo, *o i loro prolungamenti*, saranno segati proporzionalmente; e se i lati, *o i lati prolungati*, siano segati propor-



zionalmente, ecc. »; ed introduce le due figure che qui riportiamo, che si riferiscono appunto ai due possibili aspetti del caso in esame.

Quanto alla via seguita nella dimostrazione, notiamo che EUCLIDE ricorre all'equivalenza dei triangoli BDE, CDE.

Nei trattati moderni, invece (cfr., p. es., ENRIQUES e AMALDI: *Geometria elementare*) questa proposizione appare come caso particolare d'un teorema, detto di TALETE, che, nella sua forma generale, si enuncia come segue:

« *Se più trasversali parallele segano due rette* a, b, *ogni coppia di segmenti così intercetti sull'una è proporzionale alla coppia dei segmenti corrispondenti, intercetti sull'altra* ».

Questo teorema vien dimostrato direttamente, ricorrendo alla definizione di grandezze proporzionali: infatti (cfr. figura seguente), per *ogni* coppia di interi m, n, presi i multipli mAB, nCD di AB e CD, la stessa relazione di uguaglianza o disuguaglianza che passa fra

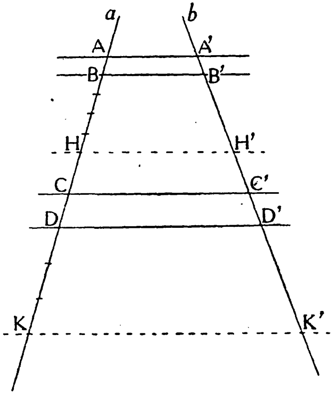
$$AH = mAB \quad \text{e} \quad CK = nCD$$

passa anche fra

$$A'H' = mA'B' \quad \text{e} \quad C'K' = nC'D' \ (^1).$$

Ora, se le trasversali parallele sono tre, ed una di esse incontra le rette a, b nel loro punto d'intersezione, si ha il caso particolare presentato dalla prop. 2 del testo euclideo.

A priori questa trattazione, in cui il teorema viene dimostrato senza far uso di considerazioni di area, risponde evidentemente ad un concetto proiettivo della geometria, poichè si tratta appunto di



dare, in tutta la sua generalità, la proprietà delle punteggiate simili, di essere punteggiate proiettive in cui i punti all'infinito si corrispondono. Tale evidenza a priori si avvalora per la circostanza che la trattazione di cui si discorre non si trova ancora in LÉGENDRE, ed invece si trova in AMIOT, che, appunto verso il 1850, ha espresso nella sua « Geometria » uno sforzo per l'introduzione dei concetti della geometria proiettiva nel campo elementare.

---

(1) Se si ammette la divisibilità delle grandezze in parti uguali, invece dei multipli si possono considerare i sottomultipli: il che può riuscire, didatticamente, più comodo.

Quanto alla denominazione che del detto Teorema si dà comunemente, attribuendolo a TALETE, essa, come ha osservato recentemente il LORIA, sembra derivare dal COURNOT. (De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie. Paris, 1847).

Fondamento di questa attribuzione è la conoscenza che TALETE avrebbe posseduto delle prime proprietà dei triangoli simili, e che (come già argomentava PROCLO) sarebbe rivelata dalle operazioni elementari di triangolazione che egli praticava. Secondo questo argomento apparterrebbe a TALETE il caso particolare caratteristico delle trasversali che si incontrano, contemplato in questa prop. 2 dell' Euclide.

Ma già ZEUTHEN ha messo bene in luce che non è mai lecito argomentare dall' uso pratico di una proprietà la sua conoscenza teorica.

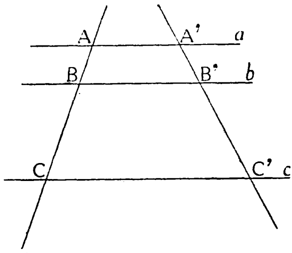
Pertanto resta dubbio che veramente TALETE abbia conosciuto la proporzione di cui si tratta. Comunque, essa deve risalire a tempi antichi, ed essere stata conosciuta dai Pitagorici. Invero giova osservare che la detta proporzione mette in luce l'esistenza di una grandezza dipendente dalla posizione scambievole di due rette uscenti da un punto, e così suggerisce la prima nozione dell' angolo. (Cfr. la nota alle deff. 8, 9 del libro I°). Da questo punto di vista si ha pure un indiretto riattacco con gli argomenti (proprietà angolari) che, secondo la tradizione, avrebbero formato oggetto della investigazione di TALETE.

L' introduzione dell' indicato teorema relativo alla proporzionalità dei segmenti intercetti da un fascio di trasversali parallele su due rette, permette, nello sviluppo della teoria, un ordinamento un po' diverso da quello euclideo.

1) Teorema delle trasversali parallele (detto di TALETE). Proposizioni relative ai triangoli simili. Proposizioni segmentarie nel cerchio.

2) Proporzionalità dei triangoli o parallelogrammi di uguale altezza alle loro basi.

Aggiungeremo una breve nota relativa alla proposizione inversa del teorema delle trasversali parallele. La sua dimostrazione, che nei trattati moderni deriva immediatamente dalla proposizione diretta e dall'unicità della quarta proporzionale, è basata nel nostro testo su un'equivalenza di aree, come la proposizione diretta; invece nella « Géometrie » di LÉGENDRE, e, più tardi, nel trattato dell'AMIOT,



si trova una riduzione all'assurdo, implicante l'unicità della quarta proporzionale.

Inoltre è opportuno qui rilevare che tale proposizione inversa, nel caso di tre sole parallele, può esser data in due forme:

1) o si suppone che le a, b siano parallele, ed inoltre

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

2) o si suppone che le a, c siano parallele, ed inoltre

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

Nel primo caso (come quando si supponesse che:

$$AC : AB = A'C' : A'B',$$

poichè questo caso non differisce dal primo che per la posizione della c rispetto alle altre due rette a, b) si perviene subito alla conclusione che anche la c è parallela alle a, b, solo ammettendo l'unicità della quarta proporzionale.

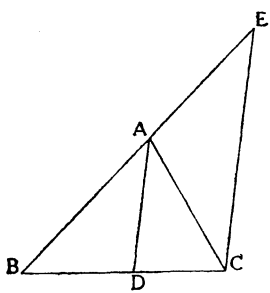
Nel secondo caso invece, per concludere che anche la b è parallela alle a, c, s'invoca l'unicità della divisione in parti proporzionali.

Vero è che questo caso si riduce al primo col « *comporre* » o « *dividere* », ma l'osservazione acquista importanza per riguardo ad esposizioni della dottrina in cui si svolgano le proprietà dei triangoli simili sulla semplice base del concetto di proporzione, rimandando o riducendo al minimo la parte astratta della teoria, come avveniva, p. es., nella VI ed. della *Geometria elementare* di F. ENRIQUES e U. AMALDI.

3.

Se un angolo di un triangolo è diviso per metà da una retta che seghi anche la base, le due parti in cui la base è divisa avranno fra di loro la stessa ragione che gli altri due lati del triangolo; e se le parti in cui la base è divisa hanno fra loro la stessa ragione che i rimanenti lati, la retta condotta dal vertice al punto di sezione segherà in due parti uguali l' angolo del triangolo.

Sia dato il triangolo ABC; e l'angolo BAC sia diviso in due parti uguali dalla retta AD. Dico che BD sta a CD, come BA ad AC. Si conduca infatti per C la paral-



lela CE alla retta DA, fino al punto d'incontro E con il prolungamento di BA. Poichè la AC taglia le parallele AD, EC, l' angolo ACE è uguale all' angolo CAD [I, 29]. Ma supponemmo l'angolo CAD uguale all'angolo BAD, perciò anche l'angolo BAD è uguale ad ACE. Ancora, poichè la BAE taglia le parallele AD, EC, l'angolo BAD è uguale all'angolo AEC [I, 29]. Perciò anche l'angolo ACE è uguale all'angolo AEC; quindi anche il lato AE è uguale al lato AC [I, 6]. E poichè nel triangolo BCE è stata condotta la parallela AD al lato EC, ne consegue che BD sta a DC come BA sta ad AE; ma AE è uguale ad AC, perciò BD sta a DC come BA sta ad AC.

Ora supponiamo che BD stia a DC come BA ad AC; si conduca AD. Dico che l'angolo BAC è diviso in due parti uguali della retta AD.

Infatti, fatte le stesse costruzioni, poichè BD sta a DC come BA sta ad AC, anche BD sta a DC come BA sta ad AE: infatti, nel triangolo BCE è stata condotta la parallela AD al lato CE [prop. 2]. Ma BA sta ad AC come BA sta ad AE; perciò AC è uguale ad AE, e quindi anche l'angolo AEC è uguale all'angolo ACE. Ma l'angolo AEC è uguale all'angolo BAD, ed uguali sono gli angoli alterni ACE, CAD; perciò anche l'angolo BAD è uguale a CAD, cioè l'angolo BAC è diviso in due parti uguali dalla retta AD.

Dunque, se un angolo di un triangolo, ecc... c. d. d.

EUCLIDE considera qui solamente il caso della bisezione di un angolo *interno* di un triangolo; ma la proposizione è vera ed interessante, anche se si riferisce alla bisezione di un angolo esterno.

Tale proposizione compare già presso PAPPO, senza dimostrazione; ed è poi inserita dal SIMSON nel testo euclideo, come prop. A dopo la 3ª.

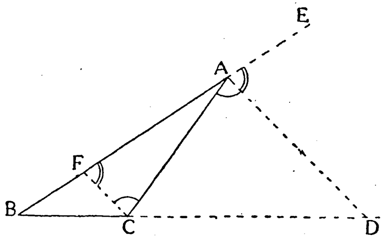
Si tratta di mostrare che, in un triangolo ABC, se la bisettrice

AD dell'angolo esterno EAC incontra il prolungamento del lato BC in un punto D, questo è tale che

$$BD : CD = AB : AC.$$

Ora, condotta per C la CF parallela alla AD, si ha:

$$\widehat{ACF} = \widehat{CAD}$$
$$\widehat{CFA} = \widehat{DAE}.$$



Ma gli angoli CAD, DAE sono uguali, perciò anche gli angoli ACF, CFA lo sono. Il triangolo ACF è quindi isoscele, cioè

$$AC = AF.$$

Si deve dunque dimostrare che

$$BD : CD = AB : AF$$

ciò che deriva senz'altro dal parallelismo delle CF, AD.

In realtà le due proposizioni si possono riunire in una sola, ammettendo un'unica dimostrazione. (Cfr. HEATH, II, 195).

L'interesse della proposizione relativa alla bisezione dell'angolo esterno sta nella importanza delle conseguenze che ne derivano, quando si tenga conto anche della prop. 3 d'EUCLIDE.

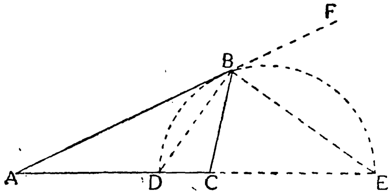
1) Poichè (cfr. fig. seguente).

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}, \quad \widehat{CBE} = \widehat{EBF},$$

l'angolo DBE formato dalle due bisettrici è retto: per questo il cerchio che ha per diametro DE passa per B.

Ora, dato il rapporto dei lati AB, BC, e dato AC, son determinati D ed E, cioè il cerchio. Perciò:

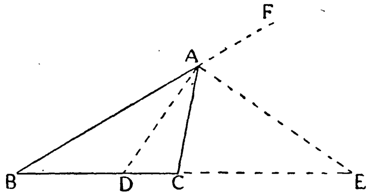
« Il luogo dei punti che hanno da due punti dati (A, C) distanze aventi dato rapporto, è un cerchio ». La discussione di questo



luogo fu già iniziata da APOLLONIO (*Plane loci*, II) e trovasi in PAPPO (VII, p. 666).

Se poi la bisettrice dell'angolo esterno non incontra il lato opposto, cioè è parallela ad esso, il dato triangolo ABC è, evidentemente, isoscele; il cerchio di APOLLONIO diventa, in tal caso, l'asse del segmento AC.

2) Poichè (cfr. figura annessa) entrambi i rapporti:



$$BD : DC, \quad BE : CE$$

sono uguali al rapporto fra i lati AB e AC, sarà

(1) $$BE : CE = BD : DC.$$

Ponendo

$$BE = b, \quad CE = c, \quad DE = d$$

la (1) diventa

(2) $$\frac{b}{c} = \frac{b - d}{d - c}$$

cioè

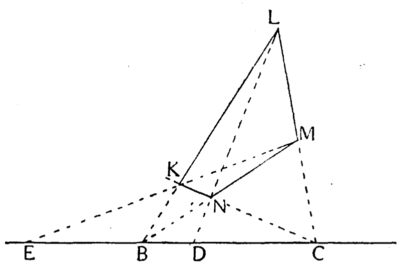
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{d}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$$

da cui

(3) $$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{d}.$$

La (2) si esprime dicendo che d è *media armonica fra* b e c (o che B, D, C, E formano un *gruppo armonico*). La (3) mostra allora che la relazione stabilita dalla media armonica corrisponde ad una relazione di media aritmetica fra le quantità inverse.

La media armonica trovasi già considerata nella scuola pitagorica; e le sue proprietà si trovano enunciate in APOLLONIO [1] e



quindi in PAPPO (cfr. CLAVIO, nota alla prop. 17). Ma la costruzione del quarto elemento di un gruppo armonico mediante la sola riga, fu data, per mezzo del quadrilatero completo, da DELAHIRE [2], nel 1685.

Se su una linea retta sono dati tre punti B, D, C, e si costruisce un quadrangolo completo $KLMN$ in modo che due lati opposti (KN, ML) concorrano in C, e il quinto lato (LN) passi per D, il sesto lato (KM) segherà la retta data in un punto E, che non varia comunque si mutino gli elementi arbitrari nel triangolo.

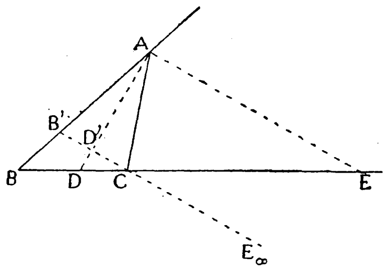
A questa conclusione si può giungere partendo dal concetto del birapporto, o dal teorema dei triangoli omologici (cfr. la nota alla proposizione seguente).

---

(1) *Conicorum*, lib. I, 34, 36, 37, 38.

(2) *Sectiones conicae*, I, 20.

L'analogia con la costruzione di PAPPO si vede, per esempio, nel caso dell'annessa figura: i punti $BDCE$ formano gruppo armo-



nico, perchè tale è il gruppo dei punti $B'D'CE_\infty$.

La media armonica deve il suo nome ad una ragione fisica: se infatti tre corde aventi lunghezze proporzionali ai numeri $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ (di cui il secondo è medio armonico fra gli altri due) vengono eccitate, esse danno l'accordo perfetto maggiore *do, mi, sol.*

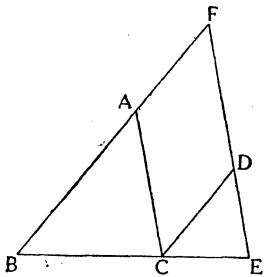
4.

In triangoli equiangoli, i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali e omologhi quelli opposti ad angoli uguali.

Siano dati i triangoli ABC, DCE, in cui l'angolo ABC è uguale all'angolo DCE, BAC uguale a CDE, ACB uguale a CED. Dico che nei triangoli ABC, DCE i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali, e omologhi quelli opposti ad angoli uguali.

Si ponga infatti BC sul prolungamento di CE. Poichè gli angoli ABC, ACB, presi insieme, sono minori di due retti, e l'angolo ACB è uguale a DEC, anche gli angoli ABC, DEC, presi insieme, daranno un angolo minore di due retti. Allora le BA, ED, prolungate, si incontrano: si prolunghino, e sia F il punto d'incontro.

Poichè gli angoli DCE, ABC sono uguali, la BF è parallela alla CD; ancora, poichè anche gli angoli ACB, DEC sono uguali, la AC è parallela alla FE. Dunque $FACD$ è un parallelogrammo, e quindi FA è uguale a



DC, ed AC è uguale ad FD. E poichè nel triangolo FBE è stata condotta la AC parallela al lato FE, si sa che BA sta ad AF come BC sta a CE [prop. 2]. Ma AF è uguale a CD, quindi BA sta a CD come BC sta a CE, e permutando: AB sta a BC come CD sta a CE. Inoltre, poichè CD è parallela alla BF, si sa che BC sta a CE come FD sta a DE. Ma FD è uguale ad AC, perciò BC sta a CE come AC sta a DE; e permutando: BC sta a CA come CE sta a ED; e poichè è già stato dimostrato che AB sta a BC come DC sta a CE, e che BC sta a CA come CE sta ad ED, *ex aequo* BA sta ad AC come CD sta a DE.

Dunque, in triangoli equiangoli, ecc., c. d. d.

Si inizia da questa proposizione l'esame dei criteri di similitudine dei triangoli:

prop. 4 - Triangoli aventi gli angoli a due a due uguali;

prop. 5 - Triangoli aventi i lati a due a due proporzionali;

prop. 6 - Triangoli aventi un angolo uguale, ed i lati che lo comprendono proporzionali;

prop. 7 - Triangoli aventi un angolo uguale, ed i lati che comprendono un secondo angolo proporzionali. (Caso ambiguo. Cfr. nota).

Quanto alla dimostrazione della prop. 4, essa si potrebbe dedurre immediatamente dalla prop. 2, con tre trasporti del secondo triangolo sul primo, portando ogni volta un angolo a coincidere con l'angolo corrispondente, come appunto si fa in trattati moderni (cfr. ENRIQUES e AMALDI: *Geometria elementare*).

Noteremo qui che dai teoremi relativi alla similitudine risulta che la proporzionalità dei lati costituisce una proprietà caratteristica dei triangoli simili; su di essa quindi si può basare una definizione di segmenti proporzionali, che tenda ad evitare le difficoltà presentate dalla definizione di EUDOSSO.

Per lo sviluppo d'una tale teoria geometrica delle proporzioni cfr. la nota alla prop. 16.

Giova qui rilevare che le proprietà dei triangoli simili conducono alla seguente proposizione ben nota:

« *Se due triangoli hanno i lati rispettivamente paralleli, le congiungenti i vertici corrispondenti passano per un punto* ».

Ora, questo teorema acquista importanza per il fatto che si generalizza per proiezione:

« *Se le tre coppie di lati corrispondenti di due triangoli si incontrano in punti di una retta, le congiungenti i vertici corrispondenti si incontrano in un punto* ».

In questa forma tale proposizione si trova in DESARGUES (Manière universelle pour pratiquer la perspective, 1648), ma essa sostanzialmente coincide col teorema seguente, che già appare nelle « Collectiones Mathematicae » di PAPPO [1] (cfr. l'introduzione al Libro VII): « *Se i tre lati di un triangolo variabile ruotano intorno*

---

[1] Sembra ch'egli riferisca qui un celebre porisma di EUCLIDE (op. perduta).

a tre punti fissi situati in linea retta, mentre due vertici si muovono su due rette, anche il terzo vertice descriverà una retta ». (Della quale è facile riconoscere che passa per il punto d'incontro delle prime due).

Ora, il teorema di DESARGUES, potendosi generalizzare per proiezione e sezione, ha acquistato grande importanza nella moderna geometria: e mentre, da una parte, gli studi di PONCELET (Traité des proprietés projectives des figures, 1822, 1865) indussero a considerare la relazione dei triangoli di DESARGUES come subordinata di un'*omologia* (1) (o omotetia (2) nel caso in cui i lati dei triangoli siano paralleli), tale relazione ha ricevuto con STAUDT (Geometrie der Lage, 1847) una dimostrazione dipendente dai semplici postulati di appartenenza di rette e piani, e porge il primo esempio di quelle proprietà grafiche invariabili per proiezione e sezione, che sono state sviluppate sistematicamente nella geometria proiettiva.

5.

Se due triangoli hanno i lati proporzionali, sono equiangoli ed hanno uguali gli angoli opposti a lati omologhi.

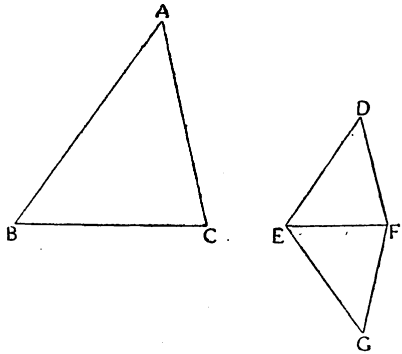
I due triangoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali, in modo che AB stia a BC come DE sta ad EF, BC stia a CA come EF sta ad FD, e BA stia ad AC come ED sta a DF; dico che i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, ed hanno uguali gli angoli opposti a lati omologhi, cioè l'angolo ABC uguale a DEF, l'angolo BCA uguale ad EFD, e l'angolo BAC uguale ad EDF.

Si costruisca infatti sulla retta EF nel punto E un angolo FEG uguale all'angolo ABC; e nel punto F un

(1) A PONCELET si debbono le denominazioni di *centro* ed *asse* di omologia.

(2) Denominazione introdotta da CHASLES.

angolo EFG uguale all'angolo ABC; e così anche gli altri angoli, con i vertici in A ed in G, sono uguali [I, 32]. Perciò i triangoli ABC, EFG sono equiangoli. Ed allora, nei triangoli ABC, EGF, i lati che comprendono gli angoli



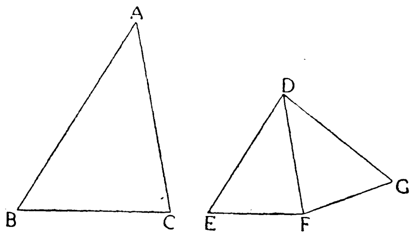
uguali sono proporzionali, e omologhi quelli opposti ad angoli uguali. Dunque AB sta a BC come GE sta ad EF. Ma AB sta a BC come DE sta ad EF, come abbiamo supposto. Perciò DE sta ad EF come GE sta ad EF. E così, ciascuno dei lati DE, GE ha una stessa ragione al lato EF. Dunque DE è uguale a GE; per la stessa ragione, anche DF è uguale a GF; e poichè DE è uguale ad EG, ed FE è comune, le due rette DE, EF sono uguali alle due GE, EF; ma DF è uguale ad FG: allora gli angoli DEF, GEF sono uguali, e uguali sono i triangoli DEF, GEF, ed uguali i rimanenti angoli, opposti a lati uguali: cioè DFE è uguale a GFE, ed EDF è uguale ad EGF. E poichè gli angoli FED, GEF sono uguali, ed anche gli angoli GEF, ABC sono uguali, anche l'angolo ABC sarà uguale all'angolo DEF. Per la stessa ragione, anche gli angoli ACB, DFE sono uguali, ed uguali gli angoli di vertice A e D. Perciò i triangoli ABC, DEF sono equiangoli.

Dunque, se due triangoli, ecc...., c. d. d.

6.

Se in due triangoli un angolo di uno è uguale ad un angolo dell'altro, ed i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali, i triangoli sono equiangoli, ed avranno uguali gli angoli che sono opposti a lati omologhi.

I due triangoli ABC, DEF abbiano l'angolo BAC uguale all'angolo EDF, ed i lati che comprendono gli angoli uguali siano proporzionali, in modo che BA stia



ad AC, come ED sta a DF; dico che i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, ed hanno l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB uguale all'angolo DFE.

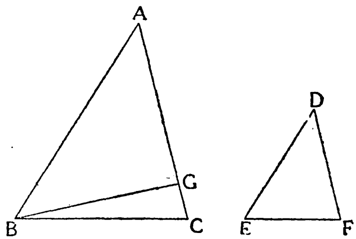
Si costruisca, in fatti, sulla retta DF, nel punto D, un angolo FDG uguale all'angolo BAC, e nel punto F un angolo DFG uguale ad ACB. E così, anche i rimanenti angoli in B ed in G sono uguali, ed i triangoli ABC, DGF sono equiangoli. Perciò BA sta ad AC come GD sta a DF [prop. 4]. Ma abbiamo supposto che BA stesse ad AC come ED sta a DF. Perciò ED sta a DF come GD sta a DF, e quindi ED è uguale a DG; ma DF è in comune, perciò i due segmenti ED, DF sono uguali ai due GD, DF, ed uguali sono gli angoli EDF, GDF. Perciò EF è uguale a GF; uguali sono i triangoli DEF, GDF ed uguali i rimanenti angoli, opposti a lati uguali, cioè DFG uguale a DFE; DGF uguale a DEF. Ma gli angoli DFG, ACB sono uguali, perciò anche gli angoli ACB, DFE sono uguali. Abbiamo poi supposto che anche gli angoli BAC, EDF fossero uguali; ed allora anche i rimanenti angoli in B ed in E sono uguali, ed i triangoli ABC, DEF sono equiangoli. Dunque, ecc., c. d. d.

7.

Se in due triangoli un angolo di uno è uguale ad un angolo dell'altro, ed i lati che comprendono altri due angoli sono proporzionali, ed i rimanenti angoli sono contemporaneamente tutti e due minori o tutti e due non minori di un retto, i triangoli sono equiangoli, ed hanno uguali gli angoli compresi tra lati proporzionali.

I due triangoli ABC, DEF abbiano l'angolo BAC uguale all'angolo EDF; e proporzionali i lati che comprendono altri due angoli, cioè AB stia a BC come DE sta ad EF; e degli altri due angoli, in C ed in F, supponiamo dapprima che ognuno sia minore di un retto. Dico che i triangoli ABC, DEF sono equiangoli: l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, ed uguali i rimanenti angoli in C ed in F.

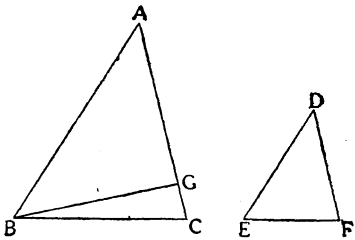
Infatti, se l'angolo ABC fosse disuguale dall'angolo DEF, uno dei due sarebbe maggiore. Sia ABC il mag-



giore, e sulla AB, nel punto B, si costruisca un angolo ABG uguale all'angolo DEF. Poichè l'angolo in A è uguale all'angolo in D, e gli angoli ABG, DEF sono uguali, anche gli angoli AGB, DFE saranno uguali. Allora i triangoli ABG, DEF sono equiangoli; perciò AB sta a BG come DE sta ad EF [prop. 4]. Ma abbiamo supposto che DE stesse ad EF come AB a BC. Quindi AB ha ugual ragione con ciascuna delle BC, BG; cioè BC è uguale a BG [V, 9]. E così anche l'angolo in C è uguale all'angolo BGC; ma abbiamo supposto che l'angolo in C fosse minore di un retto, perciò anche l'angolo BGC è minore di un retto. Allora l'angolo supplementare AGB è maggiore di un retto .Abbiamo poi dimostrato che esso è uguale all'angolo in F, perciò anche l'angolo in F è maggiore di un retto, mentre avevamo supposto che esso fosse minore di un retto; il che è assurdo. Perciò l'angolo ABC non può essere disuguale dall'angolo DEF: dunque è uguale.

Ma anche gli angoli in A e in D sono uguali, perciò anche i rimanenti in C ed in F; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli.

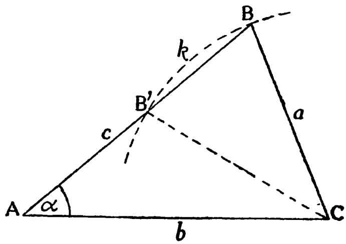
Supponiamo ora che ciascuno degli angoli in C ed F sia non minore di un retto. Dico che anche in questo



caso i triangoli ABC, DEF sono equiangoli. Infatti, con le stesse costruzioni, dimostreremo che BC è uguale a BG; perciò anche l'angolo in C è uguale all'angolo BGC; ma l'angolo in C non è minore di un retto; perciò neppure l'angolo BGC è minore di un retto. Allora nel triangolo BGC ci sarebbero due angoli non minori di un retto, il che non può accadere; quindi neppure in questo caso l'angolo ABC può essere diverso dall'angolo DEF, dunque è uguale. Ma anche gli angoli in A e in D sono uguali, quindi anche i rimanenti angoli in C ed in F. Perciò i triangoli ABC, DEF sono equiangoli. Dunque, ecc...., c. d. d.

Mentre fra i criteri di uguaglianza dei triangoli (I, 4, 8, 26) EUCLIDE omette l'esame del caso ambiguo (cfr. nota alla prop. I, 26) troviamo il caso corrispondente della similitudine esaminato qui, nella prop. 7.

Questa può discendere direttamente dall'esame del caso ambiguo dell'uguaglianza; e, viceversa, la via che EUCLIDE segue per



dimostrare la prop. 7 offre la seguente trattazione del caso ambiguo dell'uguaglianza (che per verità riesce più semplice di quella da noi indicata nella nota I, 26).

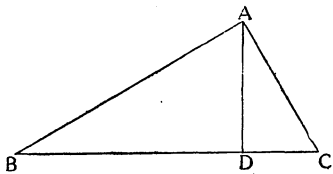
Sul lato noto $b = AC$ si costruisca l'angolo, anch'esso noto, α; se la circonferenza k che ha centro in C e raggio uguale all'altro lato noto (a) del triangolo sega in due punti la retta c, si hanno due differenti triangoli che rispondono alle condizioni volute.

8.

Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato, e simili tra loro.

Sia dato il triangolo rettangolo ABC, che ha retto l'angolo BAC; e da A si conduca la perpendicolare AD alla base BC; dico che i triangoli ABD, ADC sono simili a tutto ABC, e simili tra loro.

Infatti, poichè gli angoli BAC, ADB sono uguali, perchè tutti e due retti, e l'angolo in B è comune ai due triangoli ABC, ABD, anche gli angoli ACB, BAD saranno uguali. Perciò i triangoli ABC, ABD sono equiangoli. Ed allora BC sta a BA come AB a BD e come AC ad AD [prop. 4]; infatti BC è opposto, nel triangolo



ABC, all'angolo retto, e BA è opposto, nel triangolo ABD, all'angolo retto; ancora, AB, nel triangolo ABC, è opposto all'angolo in C, e BD, nel triangolo ABD, è opposto all'angolo uguale BAD; quanto ad AC, AD, essi sono opposti all'angolo in B, comune ai due triangoli. Allora i triangoli ABC, ABD sono equiangoli, ed hanno proporzionali i lati che comprendono gli angoli eguali; così, i triangoli ABC, ABD sono simili. Similmente dimostreremo che anche i triangoli ADC, ABC sono simili, perciò ciascuno dei triangoli ABD, ADC è simile a tutto il triangolo ABC.

Dico inoltre che i triangoli ABD, ADC sono anche simili tra loro.

Infatti, poichè gli angoli BDA, ADC sono uguali, perchè retti, e già è stato dimostrato che l'angolo BAD è uguale all'angolo in C, anche il rimanente angolo, in B, sarà uguale all'angolo DAC; perciò i triangoli ABD, ADC sono equiangoli, e quindi BD sta a DA come AD

a DC, e BA ad AC; infatti BD, nel triangolo ABD, è opposto a BAD, e DA, nel triangolo ADC, è opposto all'angolo in C, che è uguale all'angolo BAD, e, nel triangolo ABD, AD è opposto all'angolo in B, come DC, nel triangolo ADC, è opposto all'angolo DAC, uguale all'angolo in B; inoltre BA, AC sono opposti ad angoli retti. Dunque i triangoli ABD, ADC sono simili.

Dunque, se in un triangolo rettangolo, ecc., c. d. d.

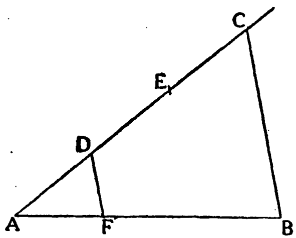
Corollario

Di qui risulta evidente che, se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto alla base, il segmento così condotto è la media proporzionale tra le parti in cui la base vien divisa, c. d. d.

9.

Da una data retta togliere una quasiasi parte proposta.

Sia data la retta AB: da essa bisogna togliere una qualsiasi parte proposta.



Si debba togliere la terza parte. Dal punto A si conduca una retta AC, che formi un angolo qualsiasi con la AB. Sulla AC si prenda un qualsiasi punto D, e si facciano DE, EC uguali ad AD; si conduca BC, e per D la parallela DF alla BC. Poichè nel triangolo ABC è stata condotta la parallela DF al lato BC, si sa che CD sta a DA come BF ad FA; ma CD è doppio di DA; perciò anche BF è doppio di FA. E così BA è triplo di AF.

Dunque dalla retta data AB è stata tolta la terza parte AF, come si voleva fare.

Questa proposizione (caso particolare della prop. 10) insegna, in sostanza, a dividere un segmento in parti uguali.

Il problema è da EUCLIDE risoluto in un caso particolare. In realtà, come nota il SIMSON, la soluzione si potrebbe assai facilmente generalizzare, con lievi modificazioni: sostituendo cioè le parole: « si facciano DE, EC, uguali ad AD » con « si costruisca AC tale che sia lo stesso multiplo di AD, che AB deve essere della parte che si deve togliere ».

Allora:

$$CD : AD = BF : AF$$

e componendo:

$$CA : AD = AB : AF.$$

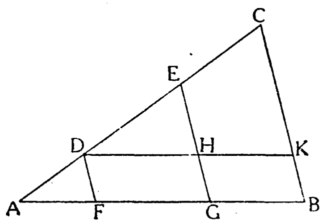
Cioè, CA è lo stesso multiplo di AD, che AB è di AF. Dunque AF è proprio la parte che si deve togliere.

Quanto alla dimostrazione noteremo inoltre che in trattazioni moderne (cfr. per es. le « Geometrie » di FAIFOFER, ENRIQUES e AMALDI) questo problema vien risoluto senza far uso delle proporzioni, e costituisce, anzi, il presupposto della dimostrazione del teorema delle trasversali parallele.

10.

Data una retta, dividerla in parti proporzionali e similmente disposte a quelle nelle quali è divisa un' altra retta.

Sia data da dividere la retta AB, e sia data la retta AC, tagliata nei punti D, E; si ponga AC in modo che formi un qualsiasi angolo con la AB. Si conduca CB,



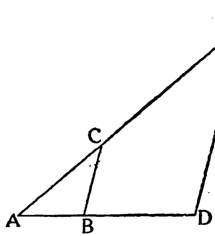
e per D ed E si conducano le parallele DF, EG alla CB. Per D si conduca poi la parallela DHK alla AB. Così, tanto FH che HB sono dei parallelogrammi. Perciò DH è uguale ad FG, ed HK è uguale a GB. E poichè nel triangolo DKC è stata condotta la parallela HE al lato KC, si avrà che CE sta ad ED come KH ad HD [prop. 2]. Ma KH sta a BG come HD a GF; perciò CE sta ad ED come BG a GF. Ancora, poichè nel triangolo AGE è stata condotta la parallela FD al lato GE, si avrà che ED sta a DA come GF ad FA; ma è stato anche dimostrato che CE sta ad ED come BG a GF, perciò CE sta ad ED come BG sta a GF, ed ED sta a DA come GF ad FA.

Dunque, data una retta, ecc.,,, come volevamo.

11.

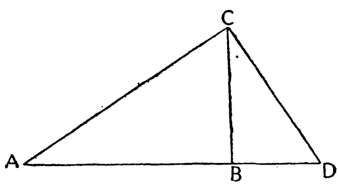
Trovare la terza proporzionale dopo due rette date.

Siano date le rette BA, AC, formanti un angolo qualsasi. Bisogna trovare la terza proporzionale dopo



BA, AC. Si prolunghino le due rette fino ai punti D, E, in modo che BD sia uguale ad AC; si conduca BC, e, per D, la DE parallela a BC. Poichè nel triangolo ADE è stata condotta la BC parallela al lato DE, si sa che AB sta a BD come AC a CE; ma BD è uguale ad AC, perciò AB sta ad AC come AC a CE. Dunque, date due rette AB, AC, abbiamo trovato la terza proporzionale CE, come volevamo.

Caso particolare della prop. 12.
La terza proporzionale viene qui costruita come la quarta dopo



a, *b*, *b*. Invece il CLAVIO giunge alla costruzione richiesta valendosi del corollario della prop. 8. La figura precedente mostra che

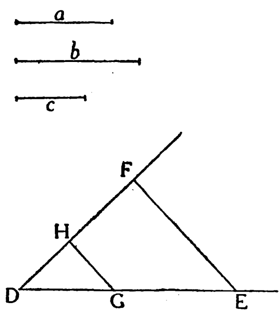
$$AB : BC = BC : BD.$$

12.

Date tre rette, trovare la quarta proporzionale.

Siano date le rette a, b, c. Bisogna trovare la quarta proporzionale.

Si prendano due rette DE, DF, in modo che formino un angolo qualsiasi EDF, e si faccia DG uguale ad a,



GE uguale a b, DH uguale a c. Condotta la GH, per E si conduca la sua parallela EF. Poichè nel triangolo DEF è stata condotta la GH parallela al lato EF, si sa che DG sta a GE come DH ad HF. Ma DG è uguale ad a, GE uguale a b, e DH uguale a c; perciò a sta a b, come c ad HF.

Dunque, date tre rette, ecc., come volevamo.

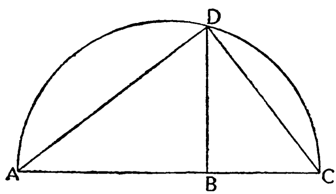
Il significato di questa proposizione è di stabilire come un rapporto fra segmenti possa essere trasformato in un altro che abbia un termine assegnato: trasformazione che sarà usata nella prop. 23, per mostrare che parallelogrammi simili stanno fra loro in ragione composta delle ragioni dei lati.

La costruzione della quarta proporzionale può anche servire, come vedremo (cfr. la nota alla prop. 16), per ricondurre il concetto di proporzione fra segmenti alla nozione di parallelismo.

13.

Date due rette, trovare la media proporzionale.

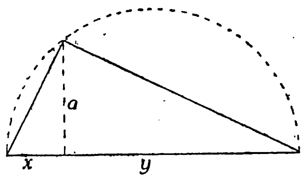
Siano date le due rette AB, BC. Bisogna trovare la loro media proporzionale. Si pongano le AB, BC su



una stessa retta, su AC si descriva un semicerchio ADC, nel punto B si innalzi la perpendicolare BD alla AC, e si conducano AD, DC.

Poichè l'angolo ADC è inscritto in un semicerchio, esso è retto [III, 31]; e poichè nel triangolo rettangolo ADC è stata condotta la perpendicolare DB dall'angolo retto alla base, la DB è media proporzionale fra le parti AB, BC in cui la base è divisa [prop. 8, coroll.]. Dunque, date due rette AB, BC, abbiamo trovato la loro media proporzionale DB, come volevamo.

Questa costruzione della media proporzionale, corrispondente al problema della estrazione di una radice quadrata, è la stessa già usata in II, 14, per trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente. La dimostrazione è, naturalmente, diversa, basandosi qui



sulla teoria delle proporzioni, e là sulle proposizioni di algebra geometrica per le quali un rettangolo è rappresentato come differenza fra due quadrati.

Alla prop. 13 il PELETIER aggiunge l'altra:

« Data una retta, dividere un'altra retta (non minore del doppio della data) in modo che la data sia media proporzionale fra i segmenti di questa ».

L'annessa figura mostra chiaramente la costruzione: dati a, $b = x + y$ si trovano x, y per modo che:

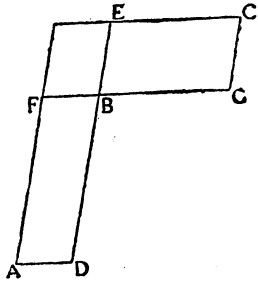
$$x : a = a : y.$$

14.

In parallelogrammi uguali ed equiangoli, i lati che comprendono angoli uguali sono in ragione inversa; ed i parallelogrammi equiangoli, in cui i lati che comprendono gli angoli eguali sono in ragione inversa, sono uguali.

I parallelogrammi AB, BC siano uguali ed equiangoli, avendo uguali gli angoli in B. E siano posti sulla stessa retta DB, BE. Così, anche FB, BG sono su una stessa retta. Dico che in AB, BC i lati che comprendono gli angoli uguali sono tra loro inversamente proporzionali, cioè che DB sta a BE come GB a BF.

Si completi infatti il parallelogrammo FE. Poichè il parallelogrammo AB è uguale al parallelogrammo BC,



ed FE è un'altra grandezza, AB starà ad FE come BC ad FE [V, 7]. Ma AB sta ad FE come DB a BE, e BC sta ad FE come GB a BF. Perciò anche DB sta a BE come GB a BF. Così, nei parallelogrammi AB, BC, i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali.

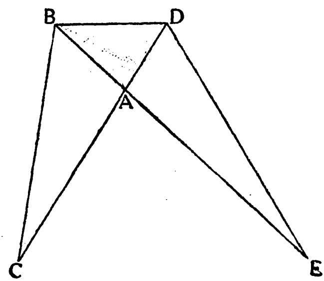
Supponiamo ora che DB stia a BE come GB a BF. Dico che AB è uguale a BC.

Infatti, poichè DB sta a BE come GB a BF, e DB sta a BE come AB ad FE, e GB a BF come BC ad FE, anche AB sta ad FE come BC ad FE. Perciò i parallelogrammi AB e BC sono uguali. Dunque, ecc., c. d. d.

15.

In triangoli uguali ed aventi un angolo dell'uno uguale ad un angolo dell'altro, i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali; e triangoli aventi un angolo dell'uno eguale ad un angolo dell'altro, e nei quali i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali, sono uguali.

I triangoli ABC, ADE siano uguali ed abbiano l'angolo BAC uguale all' angolo DAE. Dico che nei



triangoli ABC, ADE i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali, cioè che CA sta ad AD come EA ad AB.

Si pongano infatti i triangoli in modo che CA, AD giacciano su una stessa retta; e si conduca BD. Poichè i triangoli ABC, ADE sono uguali, e BAD è un'altra grandezza, il triangolo CAB starà a BAD come EAD a BAD. Ma CAB sta a BAD come AC ad AD [prop. 1], ed EAD sta a BAD come EA ad AB. Perciò anche CA sta ad AD come EA sta ad AB. E così, nei triangoli ABC, ADE, i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali.

Supponiamo ora che i lati dei triangoli ABC, ADE, siano inversamente proporzionali, e cioè CA stia ad AD come EA ad AB; dico che i triangoli ABC, ADE sono uguali.

Condotta di nuovo la BD, poichè CA sta ad AD come EA ad AB, e CA sta ad AD come il triangolo ABC al triangolo BAD [prop. 1], ed EA sta ad AB come il triangolo EAD al triangolo BAD, anche ABC sta a BAD come EAD a BAD. E così, ciascuno dei triangoli ABC, EAD, ha una stessa ragione con il triangolo BAD. Perciò i triangoli ABC, EAD sono uguali.

Dunque, in triangoli uguali...., c. d. d.

Queste proposizioni costituiscono il ponte di passaggio fra le proposizioni segmentarie e quelle relative ad equivalenza di aree (prop. 16 e segg.). Le quali, esprimendo proprietà caratteristiche, permettono di introdurre in nuovo modo il concetto della proporzione fra segmenti (cfr. nota alla prop. 16).

In rapporto al contenuto delle proposizioni qui esaminate noteremo che, quanto alla deduzione tratta nella prop. 14, che essendo DB, BE per diritto, anche FB, BG lo sono, essa discende da I, 14, che è dimostrata per assurdo. Ma, come osserva lo HEATH (II, 218), la verità della cosa si può qui affermare semplicemente così (cfr. la figura a pag. 110):

Notiamo che

$$\widehat{DBF} = \widehat{GBE}.$$

Aggiungendo a ciascuno $\widehat{FBE}$:

$$\widehat{DBF} + \widehat{FBE} = \widehat{GBE} + \widehat{FBE}.$$

Ma:

$$\widehat{DBF} + \widehat{FBE} = 2 \text{ retti}.$$

Perciò:

$$\widehat{GBE} + \widehat{FBE} = 2 \text{ retti}$$

cioè FB, BG sono per diritto.

La seconda parte della proposizione costituisce una inversione della prima, ma non è la sola possibile. E lo stesso può dirsi della prop. 15, che offre l'analogo teorema per i triangoli.

L'altra inversione che ciascuna delle due proposizioni ammette è:

« Parallelogrammi equivalenti, che hanno i lati intorno ad un angolo in ragione inversa, sono equiangoli ».

« Triangoli equivalenti, che hanno i lati intorno ad un angolo in ragione inversa, hanno uguale l'angolo compreso dai detti lati, o supplementare ».

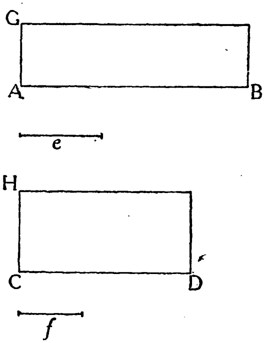
16.

Se quattro rette sono in proporzione, il rettangolo formato dai termini estremi è uguale a quello formato dai medi. E se il rettangolo formato dagli estremi è uguale a quello formato dai medi, le quattro rette sono in in proporzione.

Le quattro rette AB, CD, e, f siano in proporzione, in modo che AB stia a CD come e ad f. Dico che il rettangolo formato da AB ed f è uguale al rettangolo formato da CD ed e.

Dai punti A, C si conducano le perpendicolari AG, CH alle rette AB, CD; e si faccia AG uguale ad f, e CH uguale ad e. Si completino poi i parallelogrammi BG, DH.

Poichè AB sta a CD come e ad f, ed e è uguale a CH, ed f uguale ad AG, anche AB starà a CD come CH ad AG. Così, nei parallelogrammi BG, DH, i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali. E i parallelogrammi equiangoli, in cui i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali, sono uguali [prop. 14]. Quindi BG è uguale



a DH. Ma BG è il rettangolo formato da AB ed f: infatti AG è uguale ad f; e DH è il rettangolo formato da CD ed e, infatti CH è uguale ad e; perciò il rettangolo formato da AB ed f è uguale a quello formato da CD ed e.

Sia ora il rettangolo formato da AB ed f uguale a quello formato da CD ed e. Dico che i quattro segmenti sono in proporzione, cioè che AB sta a CD come e ad f.

Infatti, fatte le medesime costruzioni, poichè il rettangolo formato da AB ed f è uguale a quello formato da CD ed e, ed il rettangolo di AB ed f è BG, infatti AG è uguale ad f, e quello di CD ed e è DH, infatti CH è uguale ad e, il rettangolo BG è uguale al rettangolo DH. Ma essi sono anche equiangoli; ed in parallelogrammi uguali ad equiangoli i lati che comprendono gli angoli uguali sono tra loro inversamente proporzionali, cioè AB sta a CD come CH ad AG; ma CH è uguale ad e, ed AG è uguale ad f. Perciò AB sta a CD come e ad f.

Dunque, se quattro rette, ecc...., c. d. d.

Questa proposizione è un caso particolare della prop. 14, ma, per la sua grande importanza, riceve qui da EUCLIDE una dimostrazione propria.

In essa viene affermata una delle proprietà caratteristiche più suggestive della proporzione fra segmenti. Ed è naturale che essa per prima abbia suggerito la possibilità di una teoria delle proporzioni indipendente dalla definizione euclidea V, 5, e da tutte le difficoltà critiche che si incontrano nel suo sviluppo.

I tentativi moderni fatti in questo senso sono da riattaccare anzitutto ad una tendenza che già risulta nettamente negli *Elementi* euclidei, dove alcuni problemi del libro VI son considerati una prima volta nei libri anteriori al V, con lo scopo evidente di insegnarne una soluzione più elementare, se pure talvolta meno generale, che sia accessibile in un primo studio anche a chi non abbia affrontato quella dottrina delle proporzioni, che è stata resa così difficile, dopo l'introduzione del rigore euclideo.

Invero abbiamo già accennato che la dimostrazione del teorema di Pitagora (I, 47) è stata resa da EUCLIDE indipendente da ogni ricorso al concetto di similitudine, mentre sulla base di questo concetto risulterebbe in una maniera più facile, rientrando nella prop. 8.

Ora, l'esistenza di una proporzione corrisponde ad una equivalenza. Per eliminare le difficoltà presentate dalla teoria delle proporzioni, l'idea più naturale è dunque di sostituire ad essa la teoria dell'equivalenza. E questo fa EUCLIDE, quando nel II libro ci offre una costruzione della sezione aurea di un segmento (prop. 11) anticipando così il risultato della VI, 30; e quando, nelle II, 5 e 6, tratta i problemi relativi ad equazioni di 2^0 grado, che verranno esaminati in forma più generale nelle VI, 28 e 29.

I geometri moderni riprendono il tentativo di emancipare la geometria dal concetto di proporzione, in una maniera più sistematica, proponendo addirittura di sostituire il concetto sostanzialmente aritmetico del rapporto con una nuova definizione della proporzionalità; il che si può fare, almeno per i segmenti, ricorrendo ad una qualunque delle sue proprietà caratteristiche: per esempio a quella offerta da questa prop. 16.

Già nell'*Euclide restituto* di GIORDANO VITALE da Bitonto era stato notato che la prop. 16 offre un criterio per riconoscere se quattro segmenti sono in proporzione.

L'idea di GIORDANO VITALE fu ripresa più tardi dal GRASSMANN, nell'*Ausdehnungslehre* (1844) del quale si trovano i germi di due diverse teorie, riconducenti il concetto di proporzione fra segmenti sia all'equivalenza di rettangoli (o parallelogrammi), sia all'altra proprietà caratteristica del parallelismo, che si incontra nel teorema delle trasversali parallele: teorie che il GRASSMANN mostra essere deducibili una dall'altra.

Ma quando al concetto in qualche modo intuitivo dell'uguaglianza di rapporti fra segmenti si sia sostituita una definizione convenzionale, per mezzo dell'uguaglianza di rettangoli (definizione che si può, come abbiamo detto, ricondurre a quella basata sul teorema delle trasversali parallele) occorre dimostrare che son verificate le proprietà formali dell'uguaglianza: in particolare la proprietà transitiva.

Ora, la definizione di proporzione basata sul teorema delle trasversali parallele si può enunciare così:

« Se due triangoli hanno i lati rispettivamente paralleli, due lati dell'uno e i corrispondenti dell'altro formano una proporzione ».

Per giustificarla occorre dimostrare che, prendendo per base questa definizione, se

(1) $$a : b = c : d,$$

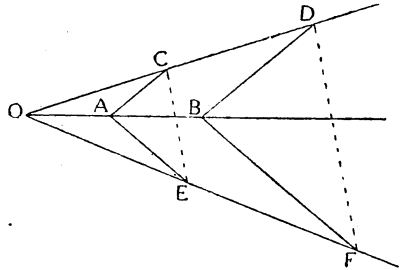
ed

(2) $$a : b = e : f$$

anche

$$c : d = e : f;$$

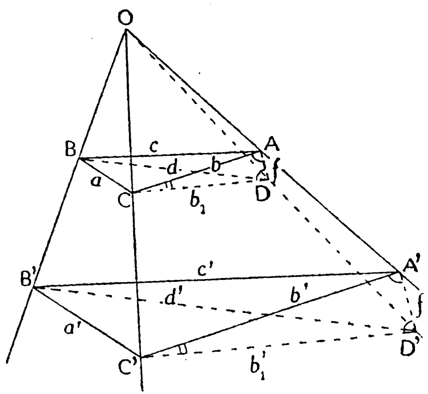
a questo scopo il GRASSMANN riporta su una retta i segmenti $OA = a$, ed $OB = b$, e quindi per A e B riporta i segmenti AC, BD, rispettivamente uguali e paralleli a c, d. Per la (1) i segmenti OC, OD sono paralleli, e quindi O, C, D sono allineati. Costruiti i segmenti AE, BF rispettivamente uguali e paralleli ad e, f, per la (2) OE, OF son paralleli, e quindi O, E, F sono allineati.



Il teorema di DESARGUES (cfr. nota alla prop. 4) avverte allora che nei due triangoli ACE, BDF anche i lati CE, DF sono paralleli, cioè

$$c : d = e : f.$$

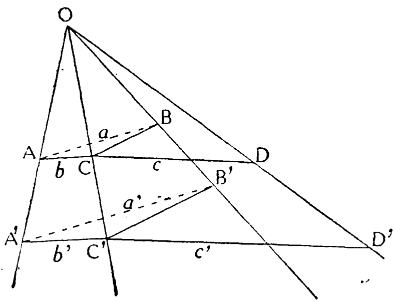
Dagli sviluppi del GRASSMANN prendono le mosse autori successivi: il RAJOLA PESCARINI (*Studio sulla proporzionalità grafica*



e sue applicazioni alla similitudine ed alla omotetia, Napoli, 1876) basandosi sulla proprietà enunciata dal teorema delle trasversali parallele, e, svolgendo la teoria in modo poco diverso, R. HOPPE (*Rein geometrische Proportionslhere* — Archiv. fur Math. und

Physik, 1882). L'HOPPE parte dalla seguente definizione: « Due segmenti a, a' si diranno proporzionali a due altri b, b' quando i due primi e gli ultimi due figurino come lati corrispondenti in due triangoli equiangoli ».

Questa definizione sembra a prima vista dipendere dall'angolo abbracciato dai lati a, b, che si può prendere ad arbitrio nella costruzione del primo triangolo. Occorre dunque giustificarla, dimostrando che la relazione fra i quattro segmenti riesce indipendente



da codesto angolo. A tale scopo l'HOPPE ricorre soltanto ad una proprietà che equivale al Teorema di DESARGUES per i triangoli omotetici (Cfr. nota alla prop. 4).

Infatti, se ai lati (paralleli b, b', si dà una posizione b_1, b_1', i triangoli isosceli ACD, $A'C'D'$, avendo gli angoli al vertice uguali, sono equiangoli. Le loro basi f, f' sono dunque parallele, e per conseguenza la DD' passa per O. Dunque anche le d, d' sono parallele.

Ora si può vedere come le proprietà fondamentali dell'uguaglianza dei rapporti si deducano dalla definizione di HOPPE. La proprietà transitiva segue direttamente, come conseguenza del teorema di DESARGUES. Infatti, se $a : a' = b : b'$, disponendo i segmenti in modo che i due triangoli simili di cui parla la definizione di proporzione siano omotetici, le AA', BB', CC' passano per un punto O. Se, inoltre, $b : b' = c : c'$, anche la DD' passerà per O; dunque:

$$a : a' = c : c'.$$

Ed il teorema della ragion composta, per cui, se (cfr. figura seguente)

$$OA : OB = OC : OD$$

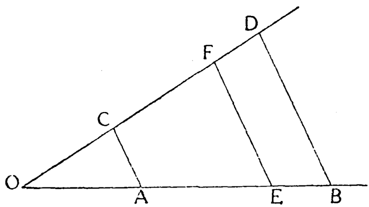
ed

$$OB : OE = OD : OF$$

anche

$$OA : OE = OC : OF,$$

dice che se AC è parallela a BD e BD è parallela ad EF, anche AC ed EF sono parallele. Cioè, due rette parallele ad una terza



son parallele fra loro: e questo equivale al postulato euclideo delle parallele, perchè racchiude l'affermazione che, se due rette si incontrano, non possono essere parallele ad una stessa retta.

In una seconda trattazione l'HOPPE, come più tardi il BIASI, definisce come proporzionali i segmenti a, b, c, d, se il rettangolo di a, d equivale a quello di b, c. La proposizione che afferma la proporzionalità di due coppie di lati omologhi in triangoli simili diviene allora un teorema da dimostrarsi.

Ora osserviamo che, se, come già GIORDANO VITALE, GRASSMANN ed in una seconda trattazione anche HOPPE, si riduce il concetto di proporzione ad equivalenza, il teorema della ragion perturbata si riconduce direttamente alla definizione di proporzionalità. Esso dice infatti che, se:

$$OA : OB = OC : OD$$

e inoltre

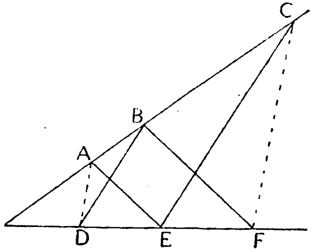
$$OB : OE = OF : OC$$

anche

$$OA : OE = OF : OD$$

e quindi non esprime altro che la proprietà transitiva dell'uguaglianza di rettangoli.

Ma se, con l'HOPPE, si definiscono come proporzionali i lati omologhi in triangoli simili, essa dice che, disposti i segmenti dati come è indicato nell'annessa figura, se AE è parallela a BF, e



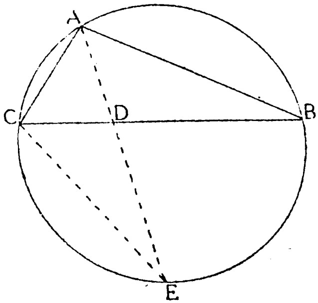
BD è parallela ad EC, anche le AD, CF sono parallele: e questo non è che un caso particolare del teorema di PASCAL sull'esagono inscritto in una conica (le tre coppie di lati opposti si tagliano in punti di una retta); e precisamente è il caso particolare già noto a PAPPO.

Per diffuse notizie intorno allo sviluppo di queste teorie geometriche delle proporzioni cfr. il citato articolo di G. VAILATI nel I Vol. delle citate *Questioni*.

Al libro VI il SIMSON fa seguire 3 Teoremi (propp. B, C, D) che BETTI e BRIOSCHI introducono nella loro edizione degli *Elementi*: ad essa rimandiamo per le dimostrazioni, che si basano appunto su questa prop. 16.

Prop. B: « Se un angolo di un triangolo è segato per metà da una retta terminata alla base, il rettangolo contenuto dai lati dell'angolo sarà uguale al rettangolo contenuto dai segmenti della base, preso insieme col quadrato della retta secante ».

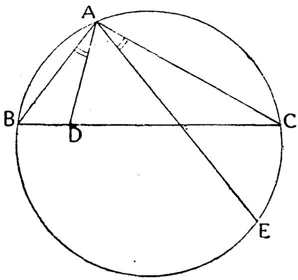
Cioè (v. figura annessa), se AD biseca $\widehat{CAB}$,



$$AC \cdot AB = CD \cdot DB + \overline{AD}^2.$$

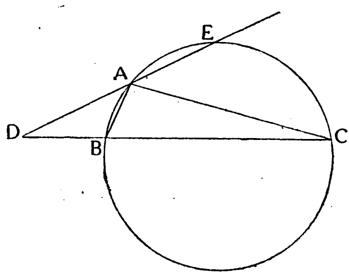
Questa proposizione è un caso particolare del teorema:

« Se un cerchio è circoscritto intorno ad un triangolo ABC, e per A son condotte due rette entrambe interne od entrambe esterne all'angolo BAC, come la AD, che sega BC (prolungata se necessario), ed AE, che sega il cerchio in E, in modo che



gli angoli DAB, EAC siano uguali, il rettangolo delle AD, AE equivale al rettangolo delle BA, AC (per la dimostrazione v. HEATH, II, 222). Questa proposizione generale diventa la *prop.* B di SIMSON, quando AD coincida con AE, cioè l'angolo BAC sia bisecato.

Un altro caso particolare si avrebbe, se D ed E giacessero bensì su di una stessa retta, ma situati da parti opposte del punto A



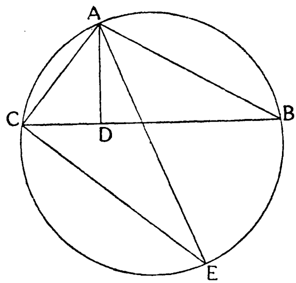
In questo caso il rettangolo delle *AB*, *AC* equivale all'eccesso del rettangolo delle *BD*, *DC* sul quadrato della *AD*.

L'inversa della *prop.* *B* di SIMSON è usata da EUCLIDE, nella prop. 67 dei « Data », per mostrare che:

« Se è dato un angolo di un triangolo, il poligono di cui il quadrato della somma dei lati che comprendono l'angolo dato supera il quadrato del lato rimanente, ha con il triangolo data ragione.

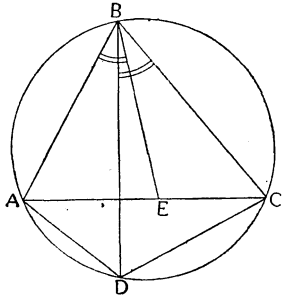
In questo teorema, l'inversa della *prop.* *B* di SIMSON è usata, senza dimostrazione, nel caso particolare in cui $AC = AB$; uno scoliasta la prova, basandosi su considerazioni di equivalenza di aree.

Prop. *C*: « Se da un angolo di un triangolo si abbassa la perpendicolare alla base, il rettangolo contenuto dai lati dell'angolo sarà uguale al rettangolo contenuto dalla perpendicolare e dal diametro del cerchio circoscritto al triangolo ». Cioè (cfr. figura annessa) il rettangolo delle *AB*, *AC* equivale al rettangolo delle *AD*, *AE*.

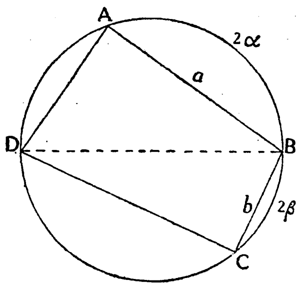


Prop. *D* (Lemma di TOLOMEO): « Se un quadrilatero è inscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali è uguale alla somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti ». Cioè (cfr. la figura annessa) il rettangolo delle *BC*, *AD*, e quello delle *BA*, *DC*, presi insieme, equivalgono al rettangolo delle *BD*, *AC*.

L'importanza di questo teorema sorge dal fatto ch'esso racchiude — in linguaggio geometrico — le nostre *formule di addi-*



zione per le funzioni trigonometriche. Si consideri, invero, una corda come il doppio del seno dell'arco metà, e si applichi il lemma di



Tolomeo ad un quadrangolo di cui due lati consecutivi siano due corde note, e di cui una diagonale sia un diametro.

Siano a, b le due corde note; si vuol valutare AC. Indichiamo con 2α l'arco AB, e con 2β l'arco BC.

Allora

$$a = 2 \operatorname{sen} \alpha, \quad b = 2 \operatorname{sen} \beta.$$

Poichè $CD = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, sarà

$$CD = 2 \cos \beta$$

e analogamente

$$AD = 2 \cos \alpha.$$

Ponendo il raggio $= 1$, ed applicando il lemma di Tolomeo, si ha:

$$2AC = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + 4 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

E poichè

$$AC = 2 \operatorname{sen} (\alpha + \beta),$$

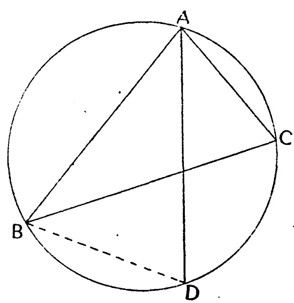
si trova che

$$\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

In realtà, anche TOLOMEO [1], astronomo, si occupò di questo teorema di geometria solo perchè poteva essergli utile per valutare la misura delle corde di archi somma (e differenza) di archi dati: non seguendo la via da noi indicata, ma usando il suo lemma in un altro caso particolare: facendo passare cioè per il centro del cerchio un lato del quadrangolo, invece che una diagonale.

Le dimostrazioni di Tolomeo possono vedersi riportate in un articolo di M. T. ZAPELLONI (*Periodico di Matematiche*, 1928, n.° 1).

Un'altra proposizione aggiunta al VI° Libro, e basata su la prop. 16 viene introdotta dal PLAYFAIR, come *prop. E.*



« Se l'angolo BAC di un triangolo ABC è bisecato da una retta AD, che incontra in D il cerchio circoscritto al triangolo,

(1) Μαθηματικὴ σύνταξις (generalmente nota col nome di *Almagesto*), libro I, Ed. Heiberg, pag. 36.

condotto DB, si avrà:

$$(BA + AC) : AD = BC : BD.$$

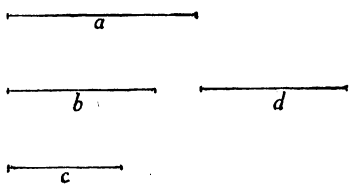
La dimostrazione (cfr. HEATH, II, 227) si può dedurre dal teorema di Tolomeo, ma EUCLIDE, nella prop. 93 dei *Data*, giunge a provarla servendosi solamente delle propp. VI, 3, 4; V, 16, 12, 11.

17.

Se tre rette sono in proporzione, il rettangolo dei termini estremi è uguale al quadrato dei medi; e se il rettangolo degli estremi è uguale al quadrato dei medi, le tre rette sono in proporzione.

Le tre rette a, b, c stiano in proporzione, in modo che a stia a b, come b a c. Dico che il rettangolo di a e c è uguale al quadrato di b.

Si faccia d uguale a b. Poichè a sta a b come b sta a c, e b è uguale a d, anche a sta a b come d sta a c. Ora, se quattro rette sono in proporzione, il rettangolo dei



termini estremi è uguale al rettangolo dei medi. Perciò il rettangolo formato da a e c è uguale a quello formato da b e d. Ma il rettangolo di b e d è uguale al quadrato di b, perchè b è uguale a d. Perciò il rettangolo formato da a e c è uguale al quadrato formato da b.

Supponiamo ora che il rettangolo formato da a, c, sia uguale al quadrato formato da b. Dico che a sta a b come b a c.

Infatti, fatte le stesse costruzioni, poichè il rettangolo di a e c è uguale al quadrato di b, ed il quadrato di b è uguale al rettangolo di b e d, perchè d è uguale a b, il rettangolo di a e c è uguale a quello di b e d. Ma se, date quattro rette, il rettangolo dei termini estremi è uguale a quello dei medi, le quattro rette sono in proporzione, cioè a sta a d come b a c. Ma d è uguale a b, perciò a sta a b come b a c.

Dunque, se tre rette, ecc...., c. d. d.

Caso particolare della prop. 16.

18.

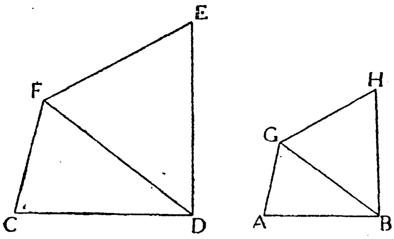
Su un dato segmento costruire una figura simile ad una data figura rettilinea, e similmente disposta.

Sia dato il segmento AB, e la figura rettilinea CE; sul segmento AB bisogna costruire una figura rettilinea simile alla figura CE, e similmente disposta.

Si conduca DF. Sul segmento AB, nel punto A, si faccia un angolo GAB uguale all' angolo in C, e nel punto B un angolo ABG uguale all'angolo CDF.

Così, l'angolo CFD è uguale all'angolo AGB [I, 32]. Perciò i triangoli FCD, GAB sono equiangoli. Ed allora FD sta a GB come FC a GA, e come CD ad AB [prop. 4].

Di nuovo, sul segmento BG, nel punto G si formi un angolo BGH uguale all'angolo DFE, e nel punto B un



angolo GBH uguale all'angolo FDE. Così, i rimanenti angoli, in E ed in H, sono eguali, ed i triangoli FDE e GHB sono equiangoli. Perciò FD sta a GB come FE a GH, e come ED ad HB. Ma abbiamo già dimostrato che FD sta a GB come FC a GA e come CD ad AB, perciò FC sta ad AG come CD ad AB, come FE a GH e come ED ad HB. E poichè gli angoli CFD, AGB sono uguali, ed uguali gli angoli DFE, BGH, anche gli angoli CFE, AGH saranno uguali. Per la stessa ragione anche gli angoli CDE, ABH sono uguali. Inoltre anche gli angoli posti in C ed in A sono uguali ed uguali gli angoli posti in E ed in H.

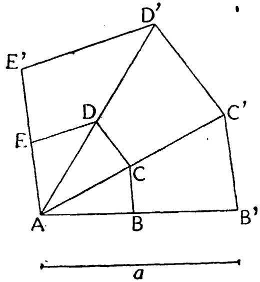
Così, la figura AH è equiangola alla figura CE, ed lati che comprendono angoli uguali sono proporzionali; ioè la figura rettilinea AH è simile alla figura rettilinea E.

Dunque, su un dato segmento AB, è stata costruita una figura rettilinea AH simile ad una data figura rettilinea CE, e similmente disposta.

Mediante la costruzione, EUCLIDE dimostra qui l'esistenza delle figure simili.

La costruzione viene eseguita nel caso particolare di quadrilateri, ma essa sarebbe facilmente generalizzabile, ripetendo più volte la costruzione di triangoli simili a quelli in cui si dovrebbe spezzare il poligono dato, e ricorrendo, come qui, all'assioma « somme di angoli uguali sono uguali ».

Segnaliamo la costruzione usata, per questa proposizione, dal CLAVIO, il quale, ammettendo che si possa operare il trasporto di tutta una figura, riduce la costruzione ad un caso particolare, in cui essa si presenta più semplice.



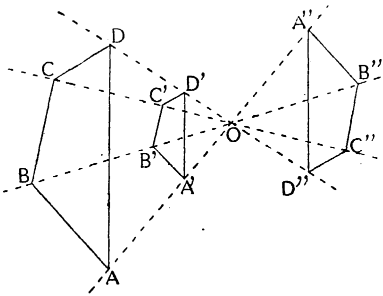
Dato il poligono $ABCDE$, ed il segmento a, egli costruisce un segmento $AB' = a$ sulla AB (prolungandola, se necessario); per B' traccia la parallela $B'C'$ a BC, fino al suo punto d'incontro C' con la AC; per C' la parallela $C'D'$ a CD, fino al suo punto d'incontro D' con AD' ecc.

Il poligono $AB'C'D'E'$ si dimostra assai facilmente essere simile al poligono dato: esso deve poi essere trasportato, in modo che AB' coincida con a.

La costruzione del CLAVIO si estende subito al caso in cui il segmento dato $a = A'B'$, è parallelo al corrispondente lato AB del poligono dato.

In questo caso basta condurre le AA', BB', e dal loro punto d'incontro O (nel caso del CLAVIO il punto A) tracciare le OC, OD, ecc.

Le parallele $B'C'$, $C'D'$, ecc. ai rispettivi lati del poligono dato sono (e la dimostrazione è ovvia) i lati del poligono nuovo.



La relazione fra i due poligoni è allora una *omotetia* (cfr. nota alla prop. 4), che sarà diretta od inversa, secondochè A', B',.... sono posti dalla stessa parte di A, B o da parte opposta, rispetto ad O.

19.

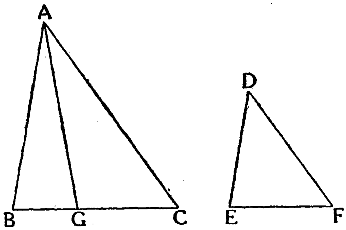
I triangoli simili hanno fra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi.

I triangoli ABC, DEF, siano simili, avendo uguali gli angoli in B ed in E, ed i lati tali che AB stia a BC come DE ad EF, in modo che il lato BC corrisponda ad EF.

Dico che il triangolo ABC ha con il triangolo DEF ragione duplicata di quella che BC ha con EF.

Si prenda infatti la terza proporzionale BG, dei segmenti BC, EF, in modo che BC stia ad EF come EF

a BG; e si conduca AG. Poichè AB sta a BC come DE ad EF, permutando, AB sta a DE come BC ad EF. Ma BC sta ad EF come EF a BG. Perciò AB sta a



DE come EF a BG. Dunque, nei triangoli ABG, DEF i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali. Ma triangoli nei quali un angolo dell'uno sia uguale ad un angolo dell'altro, ed i lati che comprendono gli angoli uguali siano inversamente proporzionali, sono uguali [prop. 15]. Perciò i triangoli ABG, DEF sono uguali. E poichè BC sta ad EF come EF a BG, e se tre rette sono in proporzione, la prima ha con la terza ragione duplicata che con la seconda, così BC ha con BG ragione duplicata di quella che CB ha con EF. Ma CB sta a BG come il triangolo ABC al triangolo ABG [prop. 1]. Dunque i triangoli ABC, ABG hanno tra loro ragione duplicata di quella che BC ha con EF. Ma il triangolo ABG era uguale al triangolo DEF, perciò anche i triangoli ABC, DEF hanno fra loro ragione duplicata di quella che BC ha con EF.

Dunque i triangoli simili hanno tra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi, c. d. d.

COROLLARIO

Di qui è manifesto che, se tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza come una figura descritta sulla prima sta alla figura simile e similmente disposta descritta sulla seconda, c. d. d.

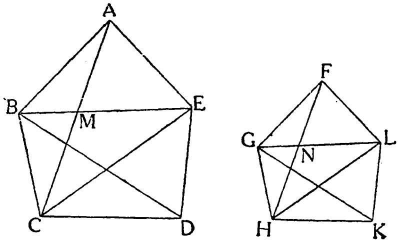
Per dimostrare che due triangoli simili stanno fra loro — oggi si direbbe — come i quadrati dei lati omologhi, EUCLIDE deve qui ricondurre il rapporto $a : b$ dei due lati alla forma $b : c$, per ottenere il rapporto (quadrato) $a : c$.

20.

I poligoni simili si dividono in un ugual numero di triangoli simili, tali che i triangoli corrispondenti hanno fra loro la stessa ragione che i poligoni dati; ed i poligoni hanno tra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi.

I poligoni $ABCDE$, $FGHKL$ siano simili; il lato AB sia omologo del lato FG. Dico che i poligoni $ABCDE$, $FGHKL$ si possono dividere in un ugual numero di triangoli simili, tali che i triangoli corrispondenti hanno fra loro la stessa ragione che i poligoni dati, e che il poligono $ABCDE$ ha con il poligono $FGHKL$ ragione duplicata di quella che il lato AB ha con il lato FG.

Si conducano BE, EC, GL, LH. Poichè i poligoni $ABCDE$, $FGHKL$ sono simili, gli angoli BAE, GFL sono uguali, e BA sta ad AE come GF ad FL. Allora i due triangoli ABE, FGL, avendo un angolo dell'uno uguale ad un angolo dell'altro, ed i lati che comprendono gli angoli uguali proporzionali, sono equiangoli [prop. 6], cioè simili [prop. 4]. Così, anche gli angoli *ABE*, *FGL*



sono uguali. Ed uguali sono anche gli angoli *ABC*, *FGH*, per la similitudine dei poligoni. Perciò anche gli angoli *EBC*, *LGH* sono uguali. E poichè, per la similitudine dei triangoli *ABE*, *FGL*, si sa che *EB* sta a *BA* come *LG* a *GF*, ed inoltre, per la similitudine dei poligoni, *AB* sta a *BC* come *FG* a *GH*, *ex aequo*, *EB* sta a *BC* come *LG* a *GH* [V, 22], ed i lati che comprendono gli angoli uguali *EBC*, *LGH* sono proporzionali, perciò i triangoli *EBC*, *LGH* sono equiangoli, cioè simili. Per la stessa ragione, anche i triangoli *ECD*, *LHK* sono simili. Così, i poligoni simili *ABCDE*, *FGHKL* sono stati divisi in un ugual numero di triangoli simili.

Dico inoltre che questi triangoli stanno fra loro come i poligoni dati, e che i poligoni *ABCDE*, *FGHKL* hanno tra loro ragione duplicata di quella che hanno tra loro i lati omologhi, cioè di quella che *AB* ha con *FG*.

Si conducano infatti *AC*, *FH*. Poichè gli angoli *ABC*, *FGH* sono uguali, per la similitudine dei poligoni, ed AB sta a BC come FG a GH, i triangoli ABC, FGH sono equiangoli. Così, gli angoli BAC, GFH sono uguali, ed uguali gli angoli BCA, GHF.

E poichè gli angoli BAM e GFN sono uguali, come pure gli angoli ABM, FGN, anche gli angoli AMB, FNG saranno uguali. Perciò i triangoli ABM, FGN sono equiangoli. Similmente si dimostrerebbe che anche i triangoli BMC, GNH sono equiangoli. Così, AM sta ad MB come FN ad NG, e BM sta ad MC come GN ad NH.

Perciò *ex aequo* anche AM sta ad MC come FN ad NH. Ma AM sta ad MC come ABM ad MBC, e come AME ad EMC; infatti hanno tra loro la stessa ragione che le basi. Ma siccome uno degli antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti [V, 12], così AMB sta a BMC come ABE a CBE. Ma AMB sta a BMC come AM ad MC. Perciò anche AM sta ad MC come ABE ad EBC. Per la stessa ragione anche FN sta ad NH come FGL a GLH. Inoltre AM sta ad MC come FN ad NH; perciò anche ABE sta a BEC come FGL a GLH, e, permutando [V, 16], ABE sta ad FGL come BEC a GHL. Similmente, condotte BD, GK, si dimostrerebbe che BEC sta ad LGH come ECD ad LHK. E poichè ABE sta ad FGL come EBC ad LGH, come ECD ad LHK, uno degli antecedenti starà ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti, cioè ABE starà ad FGL come $ABCDE$ ad $FGHKL$. Ma ABE ha con FGL ragione duplicata di quella che ABE ha con FG. Infatti i triangoli simili hanno tra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi [prop. 19]; perciò anche $ABCDE$, $FGHKL$ hanno tra loro ragione duplicata di quella che hanno tra loro i lati AB, FG.

Dunque, i poligoni simili, ecc...., c. d. d.

Corollario

E similmente si dimostra che anche i quadrilateri (simili) hanno tra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi. Per i triangoli questo è già stato dimostrato. Perciò tutte le figure rettilinee simili hanno fra loro ragione duplicata di quella dei lati omologhi, c. d. d.

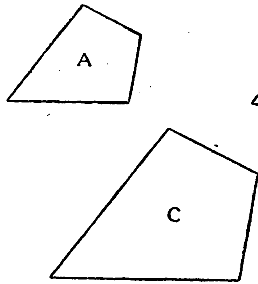
Il Clavio dà del teorema anche un'altra dimostrazione, ed osserva come tanto da questa quanto dalla II, 4, si deduca ugualmente che il quadrato di lato doppio ha area quadrupla.

21.

Le figure simili ad una stessa figura rettilinea sono anche simili tra loro.

Ciascuna delle figure rettilinee A, B, sia simile alla figura C. Dico che le figure A e B sono anche simili tra loro.

Infatti, poichè le figure A e C sono simili, esse sono anche equiangole, ed hanno proporzionali i lati che comprendono angoli uguali. Analogamente, poichè le figure B e C sono simili, esse sono anche equiangole, ed hanno proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali. Così, ognuna delle figure A, B è equiangola alla C, ed



in esse i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali. Perciò le figure A e B sono simili, c. d. d.

22.

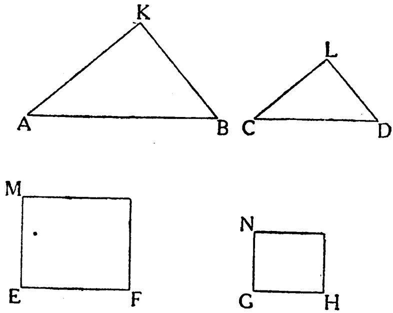
Se quattro rette sono proporzionali, anche le figure rettilinee simili e similmente descritte su di esse sono proporzionali; e se le figure rettilinee simili e similmente descritte su quattro rette sono proporzionali, anche quelle rette lo sono.

Le quattro rette AB, CD, EF, GH siano proporzionali, in modo che AB stia ad CD come EF sta a GH.

Su AB, CD si descrivano dei poligoni KAB, LCD simili, e similmente disposti, e su EF, GH si descrivano poligoni MF, NH, simili e similmente disposti. Dico che KAB sta ad LCD come MF ad NH.

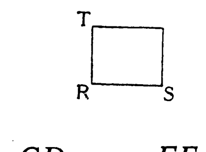
Si prenda infatti la terza proporzionale p dopo le rette AB, CD, e la terza proporzonale q dopo le rette

EF, GH. Poichè AB sta a CD come EF a GH, e CD sta ad p come GH a q, *ex aequo* AB sta a p come EF



sta a q [V, 22]. Ma AB sta a p come KAB ad LCD, ed EF sta a q come MF ad NH, perciò KAB sta ad LCD come MF ad NH.

Supponiamo ora che KAB stia ad LCD come MF ad NH. Dico che AB sta a CD come EF a GH. Infatti,



se AB non stesse a CD come EF a GH, AB starebbe a CD come EF ad un segmento RS [prop. 12]. Su RS si costruisca un poligono TS simile e similmente disposto a ciascuno dei poligoni MF, NH. Ora, poichè AB sta a CD come EF ad RS e su AB e CD sono stati descritti due poligoni KAB, LCD simili e similmente disposti, e su EF, RS i poligoni MF, TS pure simili e similmente disposti,

KAB starà ad LCD come MF a TS. Ma abbiamo supposto anche che KAB stesse ad LCD come MF a NH, perciò MF sta a TS come MF ad NH, cioè MF ha con ognuno dei poligoni NH, TS, una uguale ragione; perciò NH e TS sono uguali.

Ma sono anche simili e similmente disposti, perciò GH è uguale ad RS. E poichè AB sta a CD come EF ad RS, ed RS è uguale a GH, così AB sta a CD come EF a GH.

Dunque, se quattro rette sono in proporzione, ecc., c. d. d.

La proposizione corrisponde, in linguaggio geometrico, all'altra: « Se due ragioni sono uguali, le loro ragioni duplicate sono uguali; ed inversamente, se le ragioni duplicate di due ragioni sono uguali, le ragioni sono uguali ».

(Per la dimostrazione cfr. HEATH, II, 243).

23.

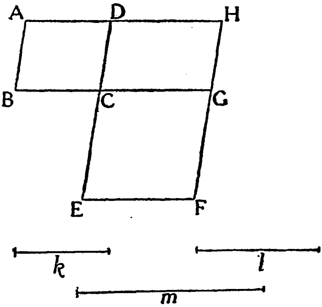
I parallelogrammi equiangoli hanno tra loro ragione composta delle ragioni dei lati.

I parallelogrammi AC, CF siano equiangoli, con l'angolo BCD uguale all'angolo ECG.

Dico che i parallelogrammi AC, CF hanno fra loro ragione composta di quelle dei lati.

Si dispongano i parallelogrammi in modo che i lati BC, CG siano su una stessa retta. Allora, anche DC, CE saranno su una stessa retta. Si completi il parallelogrammo DG, e si assuma un segmento k, ed un altro l in modo che BC stia a CG come k ad l, e DC a CE

come l ad m. Così, le ragioni di k ad l e di l ad m sono le stesse che le ragioni del lato BC a CG, e di DC a CE. Ma la ragione di k ad m è composta della ragione



di k ad l, e di l ad m. Perciò k ha con m la ragione composta delle ragioni dei lati. E poichè BC sta a CG come AC a CH [prop. 1], e BC sta a CG come k ad l, così k sta ad l come AC a CH. Analogamente, poichè DC sta a CE come CH a CF, e DC sta a CE come l ad m, così l sta ad m come CH a CF. E poichè abbiamo dimostrato che k sta ad l come AC a CH, ed l sta ad m come CH a CF, *ex aequo*, k sta ad m come AC a CF. Ma k ha con m ragione composta di quelle dei lati. Perciò anche AC ha con CF ragione composta delle ragioni dei lati.

Dunque i parallelogrammi, ecc...., c. d. d.

Il COMMANDINO fa seguire a questa proposizione i teoremi:

I. - *I triangoli che hanno uguale un angolo stanno fra loro come i rettangoli contenuti dai lati intorno agli angoli uguali.*

In una forma simile aveva già PAPPO enunciato il teorema corrispondente alla prop. 23: « Due parallelogrammi equiangoli stanno fra loro come il rettangolo contenuto da due lati adiacenti nel primo sta al rettangolo contenuto da due lati adiacenti nel secondo ».

II. - *I triangoli e i parallelogrammi hanno fra loro ragione composta delle ragioni delle loro basi ed altezze.*

Della prop. 23 il CLAVIO dà anche una dimostrazione più breve: poichè:

$$AC : CH = BC : CG$$

e

$$CH : CF = DC : CE,$$

si componga, secondo la definizione, il rapporto $AC : CF$ con i rapporti intermedi $AC : CH$, $CH : CF$, e il rapporto $AC : CF$ si comporrà anche dei rapporti $BC : CG$, $DC : CE$, uguali a quegli intermedi.

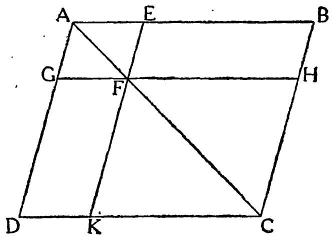
24.

In qualsiasi parallelogrammo, i parallelogrammi costruiti intorno alla diagonale sono simili tra loro, e simili al dato.

Il parallelogrammo $ABCD$ abbia per diagonale AC: i parallelogrammi posti intorno ad AC siano EG, HK. Dico che i parallelogrammi EG, HK sono simili a tutto $ABCD$, e simili tra loro.

Infatti, poichè nel triangolo ABC è stata condotta la parallela EF al lato BC, si sa che BE sta ad EA come CF ad FA [prop. 2]. Analogamente, poichè nel triangolo ACD è stata condotta la parallela FG al lato CD, si sa che CF sta ad FA come DG a GA. Ma abbiamo dimostrato che CF sta ad FA come BE ad EA. Perciò anche BE sta ad EA come DG a GA; componendo, BA sta ad AE come DA ad AG, e, permutando, BA sta ad AD come EA ad AG.

Così, i lati che comprendono l'angolo BAD, comune ai parallelogrammi $ABCD$, EG, sono proporzionali. E poichè GF è parallelo a DC, gli angoli AFG, DCA sono



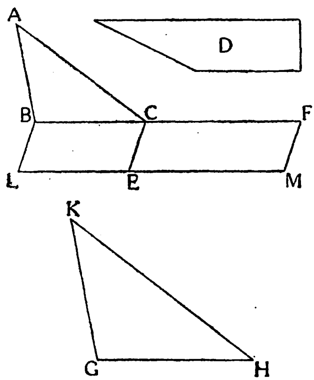
uguali [I, 29]; l'angolo DAC è comune ai due triangoli ADC, AGF; perciò i triangoli ADC, AGF sono equiangoli. Per la stessa ragione anche i triangoli ACB, AFE sono equiangoli, e tutto il parallelogrammo $ABCD$ è equiangolo al parallelogrammo EG. Ma AD sta a DC come AG a GF; DC sta a CA come GF ad FA; AC sta a CB come AF ad FE, e CB sta a BA come FE ad EA; e poichè abbiamo dimostrato che DC sta a CA come GF ad FA, ed AC sta a CB come AF ad FE, *ex aequo* DC sta a CB come GF ad FE. Dunque, nei parallelogrammi $ABCD$, EG i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali. Ed allora i parallelogrammi $ABCD$, EG sono simili. Per la stessa ragione anche i parallelogrammi $ABCD$, KH sono simili. Così, ciascuno dei parallelogrammi FG, KH è simile al parallelogrammo $ABCD$; ma i poligoni simili ad uno stesso poligono sono anche simili tra loro, perciò EG è simile ad HK.

Dunque, in qualsiasi parallelogrammo, ecc...., c. d. d.

25.

Costruire un poligono simile ad un poligono dato, ed uguale ad un altro poligono dato.

Sia ABC il poligono a cui dev'essere simile il poligono che si deve costruire, e D il poligono a cui deve



essere uguale. Bisogna dunque costruire un poligono simile ad ABC, ed uguale a D.

Su BC si costruisca una parallelogrammo BE uguale ad ABC, e su CE un parallelogrammo CM uguale a D con l' angolo FCE uguale all' angolo CBL. Così, BC, CF sono sulla stessa retta, come pure LE ed EM. Si prenda la media proporzionale GH delle rette BC, CF, e su KH si costruisca un triangolo KGH simile ad ABC, e similmente disposto. Poichè BC sta a GH come GH a CF, e se tre rette sono in proporzione la prima sta alla terza come un poligono costruito sulla prima sta al poligono simile e similmente disposto costruito sulla seconda [prop. 19, coroll.], BC starà a CF come ABC a KGH. Ma BC sta a CF come BE ad EF. Perciò anche ABC sta a KGH come BE ad EF. E, permutando, ABC sta a BE come KGH ad EF. Ma ABC è uguale a BE, quindi anche KGH è uguale ad EF. Ma EF è uguale a D, perciò anche KGH è uguale a D. Inoltre KGH era simile ad ABC.

Dunque è stato costruito un poligono KGH simile ad un dato poligono ABC, ed uguale ad un altro dato D, c. d. d.

La costruzione, necessaria, come vedremo, alla soluzione geometrica dei problemi che corrispondono ad equazioni di 2° grado (cfr. nota alle propp. 28-29), appartiene, con ogni probabilità, alla scuola pitagorica: ce lo prova il fatto che il problema della applicazione delle aree, necessario per la costruzione del lato del decagono regolare, dovette già essere risoluto in tale scuola (cfr. prop. 30); e ce lo prova anche una testimonianza di PLUTARCO, che riferisce come PITAGORA facesse un sacrifizio dopo aver trovato la soluzione di questo problema, interessante quanto il teorema relativo ai quadrati dei lati di un triangolo rettangolo.

La costruzione euclidea si riconduce del resto alla ricerca di una media proporzionale, quando si sappia che due figure simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi: se D è l'area data, C quella della figura simile alla figura cercata, x il lato di quest'ultima omologo al lato a di C,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{D}{C}.$$

Con due semplici applicazioni di aree si può avere:

$$c = \frac{C}{a}, \quad b = \frac{D}{c}$$

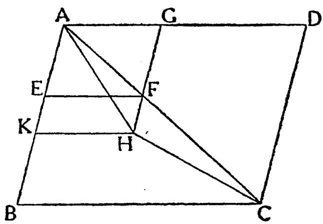
donde

$$x^2 = ab.$$

26.

Se da un parallelogrammo si toglie un parallelogrammo simile al dato e similmente posto, ed avente un angolo in comune, i due parallelogrammi sono costruiti intorno alla stessa diagonale.

Dal parallelogrammo *ABCD* si tolga il parallelogrammo *AF* simile ad *ABCD*, similmente posto, ed



avente in comune l'angolo *DAB*. Dico che *ABCD* ed *AF* sono posti intorno alla stessa diagonale.

Infatti, supponiamo che questo non sia: sia *AHC* la diagonale. Prolungato *GF* fino ad *H*, si conduca per *H* la parallela *HK* a ciascuno dei lati *AD*, *BC*. Poichè *ABCD*, *GK* sono posti intorno alla stessa diagonale, *DA* sta ad *AB* come *GA* ad *AK*. Ma, per la similitudine dei parallelogrammi *ABCD*, *EG*, anche *AD* sta ad *AB* come *GA* ad *AE*. Così, anche *GA* sta ad *AK* come *GA* ad *AE*: cioè *GA* ha con ognuno degli *AK*, *AE* la stessa ragione; perciò *AE* ed *AK* sono uguali [V, 9]. Così una quantità minore sarebbe uguale ad una maggiore, il che è impossibile. Perciò non è possibile che

ABCD ed *AF* non siano posti intorno alla stessa diagonale.

Dunque i parallelogrammi *ABCD*, *AF* sono posti intorno alla stessa diagonale.

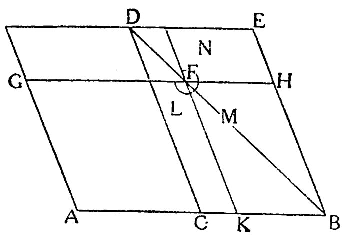
Dunque, se da un parallelogrammo, ecc...., c. d. d.

Inversa della prop. 24; EUCLIDE la dimostra per assurdo, basandosi sulla proposizione diretta; il CLAVIO dà del teorema anche un'altra dimostrazione, basata sulle prop. V, 15, 11; VI, 6, 2: I, 28.

27 moltiplicare il n.° di dimostraz.

Fra tutti i parallelogrammi costruiti su una stessa retta e mancanti di parallelogrammi simili e similmente disposti a quello descritto sulla metà della retta data, è massimo quello che è costruito sulla metà della retta, ed è simile al parallelogrammo mancante.

La retta *AB* sia divisa nel punto *C* in due parti uguali, e sulla retta *AB* si costruisca un parallelogrammo *AD*,



mancante del parallelogrammo *DB* descritto sulla metà di *AB*, cioè su *CB*. Dico che fra tutti i parallelogrammi costruiti su *AB* e mancanti di parallelogrammi simili a *DB* e similmente posti, il massimo è *AD*.

Si costruisca infatti su AB il parallelogrammo AF, mancante del parallelogrammo FB simile a DB, e similmente posto. Dico che AD è maggiore di AF. Infatti, poichè DB è simile a BF, essi son posti intorno alla stessa diagonale.

Si conduca la diagonale DB, e si descriva il poligono. Poichè CF ed FE sono uguali [I, 43], ed FB è in comune, CH e KE sono uguali. Ma CH è uguale a CG, perchè AC è uguale a CB [prop. 1]. Perciò anche GC è uguale ad EK. Si aggiunga la parte comune CF. Così, AF è uguale ad LMN. Perciò DB è maggiore di AF, cioè AD è maggiore di AF.

Dunque fra tutti i parallelogrammi, ecc...., c. d. d.

Abbiamo già visto (cfr. nota alla def. 6) che cosa si debba intendere per parallelogrammo descritto su un dato segmento, e mancante di un parallelogrammo simile e similmente disposto ad un altro.

Ora, l'importanza delle proposizioni 27–29 deriva dal fatto che in esse, e precisamente nelle 28, 29, si trova la soluzione generale della equazione di 2° grado, quando essa ammetta una radice reale positiva.

La prop. 27 porge la necessaria delimitazione del problema (il διορισμός dei Greci) (1).

Se $AB = a$, $KF = x$, e se si indicano con b, c i lati del parallelogrammo (per semplicità rettangolo) a cui deve essere simile la parte mancante del poligono che deve essere applicato ad AB,

$$c : b = x : KB$$

(1) L'introduzione delle delimitazioni nei problemi sembra che si debba attribuire a LEONE (sec. V a. c.) autore di un volume di *Elementi*, perduto.

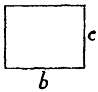
cioè

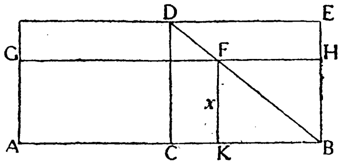
$$KB = \frac{b}{c} x$$

$$AK = a - \frac{b}{c} x.$$

L'area del rettangolo AF, data da

$$\left(a - \frac{b}{c} x\right) x$$





non può — per questa prop. 27 — superare l'area di CE, cioè

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{c}{d} \frac{a}{2}$$

cioè

$$\frac{c}{4} \frac{a^2}{b}$$

limitazione che corrisponde appunto, nell'equazione

$$ax - \frac{b}{c} x^2 = C$$

alla nostra:

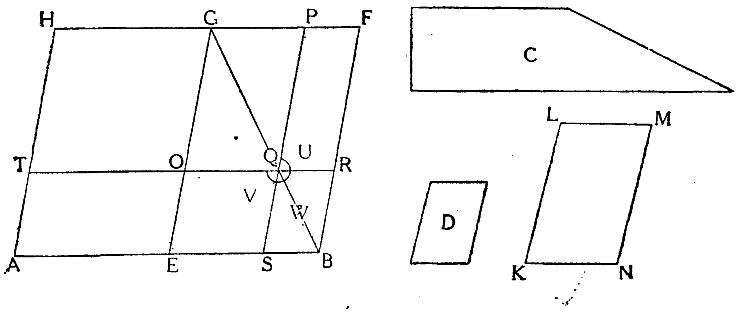
$$a^2 - 4 \frac{b}{c} C \geq 0.$$

28.

Su una data retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, mancante di un parallelo-

grammo simile ad un parallelogrammo dato. Occorre che il poligono dato non sia maggiore del poligono costruito sulla metà della retta data, e simile al poligono mancante.

Sia data la retta AB, ed il poligono C, a cui deve essere uguale il parallelogrammo che si deve descrivere su AB; non sia maggiore del parallelogrammo co-



struito sulla metà di AB e simile al poligono mancante, e sia D il poligono a cui dev'essere simile la figura mancante.

Bisogna dunque su AB costruire un parallelogrammo uguale a C, mancante di un parallelogrammo simile a D. Si divida AB in due parti uguali, nel punto E; su EB si costruisca $EBFG$, simile a D e similmente posto [prop. 18], e si completi il parallelogrammo AG; se AG sarà uguale a C, sarà fatto quel che ci proponevamo. Infatti, su AB sarà stato costruito un parallelogrammo AG uguale a C, mancante di un parallelogrammo GB, simile a D. Supponiamo che HE sia maggiore di C. Poichè HE è uguale a GB, anche GB sarebbe maggiore di C; si costruisca ora un parallelogrammo $KLMN$ uguale all'eccesso di cui GB supera C, simile a D, e similmente posto [prop. 25]. Ma D è simile a GB. Perciò anche KM è simile a GB; siano corrispondenti fra loro KL con GE, ed LM con GF. Poichè GB è uguale alla somma di C con KM, GB sarà maggiore di KM. Perciò anche GE è maggiore di KL, e GF di LM. Si faccia GO uguale a KL, GP uguale ad LM, e si completi il parallelogrammo $OGPQ$, che sarà uguale e simile a KM. Allora, anche GQ e GB sono simili, e così GQ, GB sono posti intorno alla stessa diagonale [prop. 26]. Sia questa GQB, e si completi la figura. Poichè GB è uguale alla somma di C con KM, tenendo conto che GQ è uguale a KM, risulta UVW uguale a C. E poichè PR è uguale ad OS, aggiungendo ad ognuno dei due QB, si trova che PB è uguale ad OB. Ma OB è uguale a TE, perchè AE è uguale ad EB. Perciò anche TE è uguale a PB. Aggiungendo ad ognuno OS, si trova che ST è uguale a VWU. Ma abbiamo dimostrato che VWU è uguale a C, perciò TS è uguale a C.

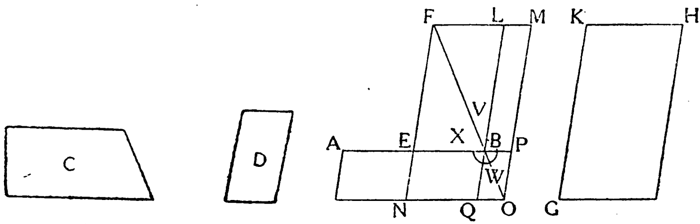
Dunque, sulla retta data AB, ecc...., c. d. d.

29.

Su una data retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, eccedente di un parallelogrammo simile ad un altro dato.

Sia data la retta AB, ed il poligono C, a cui deve essere uguale il parallelogrammo che bisogna costruire su AB, e sia D il parallelogrammo a cui deve essere simile il poligono di cui deve eccedere il parallelogrammo da costruirsi. Bisogna costruire su *AB* un parallelogrammo uguale a *C*, ed eccedente di un parallelogrammo simile a *D*.

Si tagli *AB* in due parti uguali, nel punto *E*. Su *EB* si costruisca un parallelogrammo *BF* simile a *D*, simil-



mente posto, ed uguale alla somma di *BF* con *C*; si costruisca *GH*, simile a *D*, e similmente posto: si corrispondano *KH* con *FL*, e *KG* con *FE*. Poichè *GH* è maggiore di *FB*, anche *KH* è maggiore di *FL* e *KG* maggiore di *FE*. Si prolunghino *FL* ed *FE*, e sia *FLM* uguale a *KH*, ed *FEN* uguale a *KG*. Si completi poi il parallelogrammo *MN*. Così *MN* è uguale e simile a *GH*. Ma *GH* è simile ad *EL*. Perciò anche *MN* è simile ad *EL*. E quindi *EL*, *MN* sono posti intorno alla stessa diagonale [prop. 26]. Si conduca la loro diagonale *FO*, e si completi la figura. Poichè *GH* è uguale alla somma di *EL* con *C*, e *GH* è uguale ad *MN*, anche *MN* è uguale alla somma di *EL* con *C*. Si sottragga la parte comune *EL*. Risulterà *XWV* uguale a *C*. Poichè *AE* è uguale ad *EB*, *AN* sarà uguale ad *NB* ed a *LP* [I, 43].

Si aggiunga ad ognuno dei due EO. Sarà AO uguale a XWV. Ma XWV è uguale a C, perciò AO è uguale a C.

Dunque, su una data retta AB, ecc...., c. d. d.

Queste due proposizioni danno la soluzione di problemi che, enunciati in simboli algebrici, si presentano sotto forma di equazioni di 2° grado.

Abbiamo già visto che soluzioni geometriche di problemi corrispondenti ad equazioni di 2° grado sono già presentate dalle propp. II, 5 e 6.

Ed abbiamo anche avuto occasione di dire (cfr. la nota alla prop. 16) che le proposizioni in esame 28 e 29 ne offrono una generalizzazione. Vogliamo qui chiarire in che senso i problemi già proposti nel secondo libro vengono generalizzati.

Volendo attribuire ai simboli solamente valore positivo, la equazione di 2° grado può assumere le quattro forme:

$$x^2 + ax + b^2 = 0$$
$$x^2 - ax + b^2 = 0$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

La prima di queste equazioni ammette solo radici negative (o complesse) e quindi i problemi ad essa corrispondenti non possono essere presi in esame dai Greci, che delle quantità negative non avevano alcuna idea.

Le rimanenti, che si possono mettere sotto la forma:

$$ax - x^2 = b^2$$
$$ax + x^2 = b^2$$
$$x^2 - ax = b^2$$

corrispondono rispettivamente a questi tre problemi geometrici:

1) *Su un dato segmento* (a) *preso come base, costruire un rettangolo (di altezza* x*) che superi il quadrato dell'altezza* (x^2) *di una superficie equivalente ad un dato quadrato* (b^2);

2) *Su di un segmento* (a) *costruire un rettangolo che, aumentato del quadrato dell'altezza* (x^2), *dia una superficie equivalente ad un dato quadrato;*

3) *Su un dato segmento* (a) *costruire un rettangolo tale che, togliendo dal quadrato dell'altezza* (x^2) *questo rettangolo, si ottenga un resto equivalente ad un dato quadrato.*

Il primo di questi problemi consiste in una applicazione di area *per difetto*; gli altri due (ciascuno dei quali si ridurrebbe all'altro cambiando x in $-x$) in un'applicazione *per eccesso*: nell'ultimo l'incognita è il lato maggiore, nel precedente è il lato minore del rettangolo da costruire (cfr. ARTOM: *Le equazioni di secondo grado presso i greci*, in « Periodico di Matematiche », II, 4, 1922).

Prima di giungere alla soluzione generale di questi problemi, i precedenti libri degli *Elementi* presentano già casi di applicazione delle aree, che corrispondono ad equazioni di 1° grado, od a particolari equazioni di 2° grado.

In primo luogo la prop. I, 44, che si potrebbe enunciare:

« Costruire un rettangolo, data l'area ed un lato » corrisponde all'equazione

$$ax = b^2$$

e consiste in ciò che i Greci chiamavano *applicazione parabolica*, o brevemente *parabola* (παραβολὴ παρά = applicazione su) di un'area su una retta (cfr. *Data*, prop. 57).

In seguito, nella prop. 5 del II° Libro (cfr. nota) è data la somma AB dei lati di un rettangolo, e l'area b^2: si deve, in sostanza, fare la applicazione di una superficie data su una retta a, mancante (= in ellisse) di un quadrato. In simboli

$$ax - x^2 = b^2.$$

Nella II, 6 è data l'area del rettangolo e la differenza dei lati: si deve fare l'applicazione di una superficie data su una retta, con eccesso (= in iperbole) di un quadrato. In simboli

$$ax + x^2 = b^2.$$

In questi casi i problemi son ricondotti alla costruzione di un quadrato di superficie data $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp b^2$.

Le traduzioni in simboli algebrici delle II, 5, 6 corrispondono dunque a quelle delle VI, 28, 29. La generalizzazione offerta da queste ultime è dunque piuttosto geometrica che algebrica.

Un primo passo verso la generalità (geometrica) del problema viene dalla prop. II, 14, in virtù della quale l'area data si può supporre rettangolare, anzichè quadrata.

Il problema, nel caso in cui l'area data sia rettangolare, viene ancora trattato, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, nelle propp. 84-85 dei *Data*, come già nelle propp. 57, 58, 59 si avevano esempi di applicazione di aree, parabolica semplice, con ellisse, e con iperbole.

Si apre così la via al problema generale, nel quale la superficie mancante o eccedente non è più un rettangolo, ma un parallelogrammo che deve essere simile ad un parallelogrammo dato. Non è più data dunque una superficie, ma un rapporto $\frac{b}{c}$. Ed EUCLIDE risolve il problema dopo aver stabilito la prop. 12 (costruzione della quarta proporzionale), che è, in fondo, l'esecuzione di una applicazione parabolica semplice, la prop. 13 (costruzione di una media proporzionale), che è, in sostanza, la trasformazione di un rettangolo in quadrato, e dopo aver dato, con la prop. 25, il modo per costruire un poligono simile ad un poligono dato ed equivalente ad un altro dato. Dei due problemi che così si presentano, seguendo le notazioni già usate (cfr. nota alla proposizione precedente) cerchiamo ora la corrispondenza con il nostro procedimento algebrico.

La prop. 28 dà la soluzione geometrica della equazione di 2° grado:

$$ax - \frac{b}{c}x^2 = C. \tag{1}$$

Il διορισμός enunciato nella seconda parte della proposizione è la limitazione (cfr. prop. 27)

$$a^2 - 4\frac{b}{c}C \geq 0$$

necessaria per la realità delle radici.

Costruito il parallelogrammo AG, EUCLIDE nota anzitutto che, se AG è equivalente a C, lo scopo del problema è già raggiunto.

Con le notazioni già usate nella prop. 27, infatti, essendo

$$EB = \frac{a}{2}, \quad EG = \frac{c}{b}\frac{a}{2},$$

sarà:

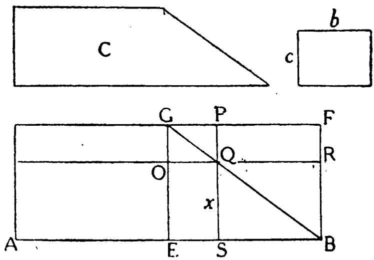
$$C = \frac{a^2}{4}\frac{c}{b}$$

cioè:

$$4bC = a^2c;$$

uguaglianza che indica che il discriminante della (1) è nullo, e la soluzione dell'equazione si riduce così a

$$x = \frac{ac}{2b}.$$



Nel caso invece in cui $GB > C$, costruito OP uguale alla loro differenza, sarà:

$$OQ = GO\frac{b}{c}; \quad OGPQ = GO^2\frac{b}{c}; \quad EGFB = \frac{c}{b}\frac{a^2}{4}.$$

Dovendo essere:

$$OGPQ = EGFB - C$$

si ha:

$$GO^2\frac{b}{c} = \frac{c}{b}\frac{a^2}{4} - C$$

cioè:

$$GO = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\frac{a^2}{4} - C\right)}.$$

E allora:

$$QS = x = GE - GO = \frac{c}{b}\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\frac{a^2}{4} - C\right)}$$

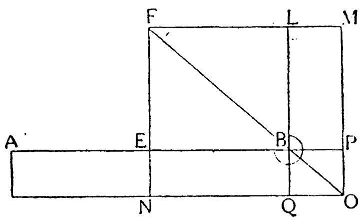
che equivale alla nostra soluzione algebrica

$$x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\frac{b}{c}C}}{2\frac{b}{c}}$$

della (1).

Per avere la soluzione nella quale figura il segno $+$ avanti al radicale, si dovrebbe prendere $GOPQ$ nell'angolo opposto al vertice di $\widehat{PGO}$.

È così risoluto, nel caso generale, il problema di applicazione *ellittica* delle aree.



Il problema della applicazione *iperbolica* vien risolto dalla prop. 29.

Esso corrisponde alla equazione nostra:

(2) $$ax + \frac{b}{c}x^2 = C$$

secondo le notazioni già usate.

Sarà:

$$FE = \frac{c}{b}\frac{a}{2}$$

$$EFLB = \frac{c}{b}\frac{a^2}{4}.$$

Dovendo essere:

$$FMON = EFLB + C$$

sarà

$$FN\left(FN\frac{b}{c}\right)=\frac{c}{b}\frac{a^2}{4}+C$$

$$FN^2=\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\frac{a^2}{4}+C\right)$$

$$FN=\sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\frac{a^2}{4}+C\right)}$$

$$x=FN-FE=\sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\frac{a^2}{4}+C\right)}-\frac{c}{b}\frac{a}{2}.$$

Le proposizioni 28, 29 equivalgono dunque alla soluzione dell'equazione di 2° grado, nel caso in cui una radice sia positiva.

Nè il posto che esse occupano nello sviluppo degli *Elementi* deve far pensare che la loro elaborazione sia posteriore ad EUDOSSO, poichè la applicazione parabolica delle aree con ellisse o iperbole di un rettangolo, dovette essere uno dei più brillanti problemi apertisi alla investigazione dei Pitagorici (cfr. nota prop. 30).

I nomi delle tre specie di applicazione delle aree richiamano quelli delle tre coniche: effettivamente le equazioni $ax \mp \frac{b}{c}x^2 = C$, che abbiamo visto corrispondere alla applicazione delle aree in *ellissi* ed in *iperbole* sono precisamente le equazioni delle coniche di tal nome, quando si prenda come origine O un punto qualunque della conica, come asse x il diametro passante per O, e come asse delle ordinate la tangente in O. In tali equazioni C rappresenta il quadrato dell'ordinata, a il parametro, b l'asse trasverso.

Se poi il termine in x^2 manca, la corrispondente applicazione delle aree si riduce (cfr. I, 44) ad una applicazione parabolica semplice: effettivamente, l'equazione

$$ax = C,$$

dove C è il quadrato dell'ordinata, rappresenta una *parabola*.

Ma la soluzione geometrica della equazione di 2° grado, che qui appare scritta nei due casi esaminati, e ridotta a quelli solamente, si può avere, con procedimento generale, quando sia stabilito il modo per rappresentare su una retta anche i numeri negativi.

Riportiamo qui una soluzione che si trova nelle opere di F. KLEIN.

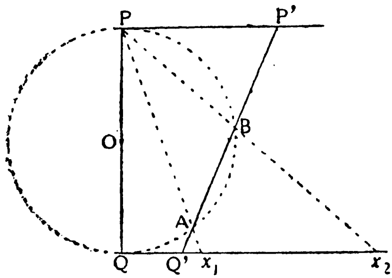
Posta l'equazione sotto la forma:

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

e stabilita l'unità di misura, si tracci una circonferenza di diametro 2, e sulle tangenti ad essa nei punti P, Q si prendano i segmenti

$$PP' = -\frac{2a}{b}, \quad QQ' = -\frac{c}{2b}$$

(tenendo conto del segno). Se $P'Q'$ taglia la circonferenza in due punti A, B, proiettando questi da P si ottengono i punti x_1, x_2.



Ora, Qx_1 e Qx_2 rappresentano, anche nel segno, le radici dell'equazione. Infatti, nei triangoli simili $Q'Ax_1$, APP', si ha:

$$(1) \qquad \frac{Q'x_1}{PP'} = \frac{x_1 A}{AP}$$

e poichè AQ è altezza relativa all'ipotenusa nel triangolo rettangolo PQx_1, si ha:

$$\overline{Qx_1}^2 = Px_1 \cdot Ax_1$$
$$\overline{PQ}^2 = Px_1 \cdot PA.$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{\overline{Qx_1}^2}{\overline{PQ}^2} = \frac{Ax_1}{PA}.$$

Da questa uguaglianza e dalla (1) si ha:

$$\frac{Q'x_1}{PP'} = \frac{\overline{Qx_1}^2}{\overline{PQ}^2}$$

e sostituendo ai segmenti il loro valore:

$$\frac{x_1 + \frac{c}{2b}}{-\frac{2a}{b}} = \frac{x_1^2}{2^2}$$

cioè

$$ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0.$$

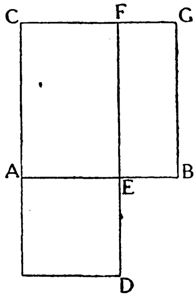
30.

Dividere una data retta in media ed estrema ragione.

Sia data la retta AB. Bisogna dividerla in media ed estrema ragione.

Su AB si costruisca un quadrato BC. Sulla retta AC si costruisca un parallelogrammo CD, uguale al quadrato BC, ed eccedente di un parallelogrammo AD simile a BC [prop. 29]. Ma BC è un quadrato, perciò anche AD è un quadrato. E poichè BC è uguale a CD, sottraendo la parte comune CE, si trova che BF è uguale ad AD. Ma BF ed AD sono equiangoli. Perciò nei parallelogrammi BF, AD, i lati che comprendono gli angoli uguali sono inversamente proporzionali [prop. 14], cioè

FE sta ad *ED*, come *AE* ad *EB*. Ma *FE* è uguale ad *AB*, ed *ED* ad *AE*. Perciò *BA* sta ad *AE* come *AE*



ad *EB*. Ma *AB* è maggiore di *AE*. Perciò anche *AE* è maggiore di *EB*.

Dunque il segmento *AB* è stato diviso in *E* in estrema e media ragione, e la sua parte maggiore è *AE*, c. d. d.

La costruzione, che porge qui, in sostanza, la sezione aurea di un segmento, è un caso particolare del problema risoluto nella proposizione precedente. Qui l'area *C* data è il quadrato costruito sul segmento *a* dato, ed il parallelogrammo dato è un quadrato. Si tratta quindi di costruire un rettangolo equivalente al quadrato *C*, la cui altezza *x* sia uguale all'eccesso della sua base sul segmento dato *a*. (Applicazione con iperbole di un quadrato).

In simboli

$$a^2 = a(a + x).$$

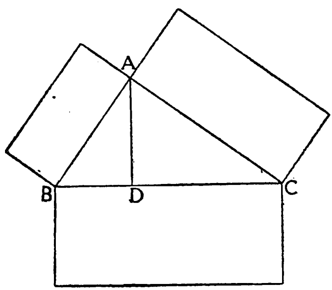
Tale problema, che, sotto altra forma, ha già costituito l'oggetto della prop. II, 11, è in relazione con la costruzione del pentagono e decagono regolare: dalle proposizioni 7-10 del libro XIII (cfr. note) si può infatti rilevare che il lato del decagono regolare è uguale alla sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto (cfr. la nota alla prop. IV, 11).

Non volendo far dipendere dalla teoria delle proporzioni il problema della costruzione del lato del decagono regolare, e valendosi piuttosto del teorema di DESARGUES (cfr. nota alle propp. 14, 15) si può seguire la costruzione indicata dal DE PAOLIS (cfr. nota alla IV, 11, e l'articolo di G. VAILATI sulla « Teoria delle proporzioni », nel I° volume delle citate *Questioni*).

31.

Nei triangoli rettangoli, ogni poligono costruito sul lato opposto all' angolo retto è uguale alla somma dei poligoni simili e similmente posti, costruiti sugli altri due lati.

Il triangolo ABC sia rettangolo, avendo retto l'angolo BAC. Dico che ogni poligono costruito su BC è



uguale alla somma dei poligoni simili e similmente posti, costruiti su AB, ed AC. Si conduca la perpendicolare AD. Poichè nel triangolo rettangolo ABC è stata condotta la perpendicolare AD dall'angolo retto A alla base BC, i triangoli ABD, ADC sono simili tra loro, e simili al triangolo dato ABC [prop. 8]. E poichè ABC è simile ad ABD, il lato CB sta a BA come AB a BD. Ma se tre rette sono in proporzione, la prima sta alla terza come un poligono costruito sulla prima sta al poligono simile e similmente posto costruito sulla seconda [prop. 19, coroll.], cioè *CB* sta a *BD* come un poligono costruito su *CB* sta al poligono simile e similmente posto costruito su *AB*. Per la stessa ragione *BC* sta a *CD* come un poligono costruito su *BC* sta a quello simile e similmente posto costruito su *CA*. Ed allora *BC* sta alla somma di *BD* con *DC*, come un poligono costruito su *BC* sta alla somma dei poligoni simili e similmente posti costruiti su *AC* ed *AD*. Ma *BC* è uguale alla somma di *BD* con *DC*. Perciò anche un poligono costruito su *BC* è uguale alla somma dei poligoni simili e similmenti posti costruiti su *BA*, *AC*.

Dunque, nei triangoli rettangoli, ecc...., c. d. d.

La proposizione, che costituisce una generalizzazione del teorema di Pitagora, è data da Proclo come scoperta propria d'Euclide. Essa viene invertita dal CAMPANO e dal CLAVIO.

Il teorema si può applicare a tutte le figure simili: quindi anche a quelle con contorno circolare o misto. Ma occorre allora estendere la definizione di poligoni equivalenti, non essendo sempre possibile decomporre superficie che in realtà hanno la stessa area in un certo numero di parti congruenti. Sarà dunque necessario dire equivalenti anche superficie che sono *limiti* di poligoni equivalenti.

Applicando la prop. 31 ai semicerchi aventi per diametro i lati del triangolo, si può avere come immediato corollario la proposizione relativa alle lunule d'IPPOCRATE. (Cfr. l'art. di U. AMALDI: *Sulla teoria dell'equivalenza*, nel II.° Vol. delle citate *Questioni*).

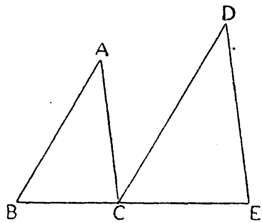
32.

Se due triangoli, aventi due lati proporzionali, si portano ad avere un vertice in comune, in modo che i lati cor-

rispondenti siano anche paralleli, i rimanenti lati dei triangoli saranno posti sulla stessa retta.

I due triangoli ABC, DCE abbiano due lati proporzionali, cioè AB stia ad AC come DC sta a DE; inoltre AB sia parallelo a DC, ed AC a DE. Dico che BC e CE sono posti su una stessa retta.

Infatti, poichè AB è parallela a DC, ed AC sega quelle due parallele, gli angoli alterni BAC, ACD sono



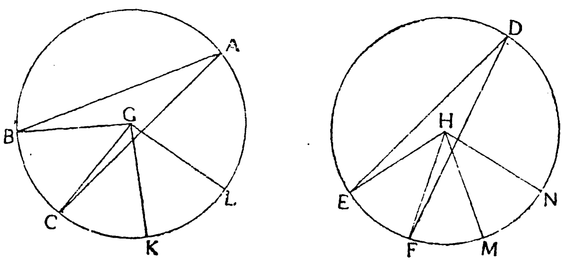
uguali. Per la stessa ragione anche gli angoli CDE ed ACD sono uguali, e così pure gli angoli BAC, CDE. E poichè i due triangoli ABC, DCE hanno gli angoli in A ed in D uguali, ed i lati che comprendono questi angoli sono proporzionali, cioè BA sta ad AC come CD sta a DE, così i triangoli ABC, DCE sono equiangoli [prop. 6]. Perciò gli angoli ABC e DCE sono uguali. Ma abbiamo dimostrato che anche gli angoli ACD, BAC sono uguali. Perciò l'angolo ACE sarà uguale alla somma degli angoli ABC, BAC. Si aggiunga a tutti e due l'angolo ACB. Allora la somma di ACE con ACB sarà uguale alla somma degli angoli BAC, ACB, CBA. Ma la somma di questi tre angoli è uguale a due retti, perciò la somma di ACE con ACB è uguale a due retti. Allora, la AC, cadendo nel punto C sulle due rette BC, CE non dalla stessa parte, forma gli angoli ACE, ACB, la cui somma è uguale a due retti. Perciò BC e CE sono posti sulla stessa retta [I, 14].

Dunque, se due triangoli, ecc...., c. d. d.

33.

In cerchi uguali tanto gli angoli al centro che gli angoli alla circonferenza hanno tra loro la stessa ragione degli archi su cui insistono.

I cerchi ABC, DEF siano uguali; BGC, EHF siano angoli al centro, e BAC, EDF angoli alla circonferenza.



Dico che l'arco BC sta all'arco EF come l'angolo BGC sta all'angolo EHF, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

Si costruiscano l'un dopo l'altro quanti si vogliano archi CK, KL, uguali a BC, e quanti si vogliano archi FM, MN uguali ad EF; e si conducano GK, GL, HM, HN. Poichè gli archi BC, CK, KL sono uguali, anche gli angoli BGC, CGK, KGL saranno uguali [III, 27]. E così BL è multiplo di BC tante volte, quante l'angolo BGL dell'angolo BGC. Per la stessa ragione NE è multiplo di EF tante volte, quante l'angolo NHE dell'angolo EHF. Ora, se BL è uguale ad EN, anche l'angolo BGL è uguale all'angolo EHN, e se BL è maggiore di EN anche l'angolo BGL è maggiore di EHN, e se BL è minore di EN, anche l'angolo BGL è maggiore di EHN. Dunque, date quattro grandezze, cioè i due archi BC, EF, e i due angoli BGC, EHF, si sono presi l'arco BL e l'angolo BGL equimultipli dell'arco BC e dell'angolo BGC, e poi l'arco EN e l'angolo EHN equimultipli dell'arco EF e dell'angolo EHF; poi abbiamo dimostrato che se l'arco BL supera EN, anche l'angolo BGL supera EHN, se è uguale, uguale, se minore, minore. Così [V, def. 5], l'arco BC sta all'arco EF come l'angolo BGC all'angolo EHF. Ma l'angolo BGC sa all'angolo EHF come l'angolo BAC all'angolo EDF; infatti i primi sono rispettivamente doppi degli ultimi. Perciò, l'arco BC sta all'arco EF, come l'angolo BGC all'angolo EHF, e come BAC ad EDF.

Dunque, in cerchi uguali, ecc...., c. d. d.

LIBRO SETTIMO

PER CURA DI

GUIDO RIETTI

Termini.

1.

Unità è ciò per cui ogni singola cosa è detta uno.

2.

Numero è una pluralità composta di unità.

Le definizioni di numero e di unità hanno dato luogo fra i Greci, già prima di Euclide, a numerose discussioni che escono in gran parte dal campo dell'aritmetica per toccare alla fisica ed alla filosofia.

La più antica definizione di numero è attribuita a TALETE di Mileto (circa 600 a. C.) che, secondo GIAMBLICO (III secolo E. v.), l'avrebbe presa dagli Egiziani. Essa dice: « Numero è un sistema di unità »; e già in questa come nella definizione euclidea si vede che l'unità non viene considerata come numero.

ARISTOTELE giustificava questo concetto dicendo essere ragionevole distinguere il principio dalle cose che ne derivano.

Vi sono diversi motivi per ritenere che l'unità e il numero venissero considerati dai Pitagorici in un significato concreto: l'unità (monade) come elemento o punto materiale ed il numero come riunione di monadi convenientemente disposte secondo un certo ordine geometrico: in questo senso è da intendere la veduta della più antica scuola pitagorica che « le cose sono numeri ».

Per quanto riguarda le definizioni di numero anteriori a EUCLIDE, citeremo ancora quella di EUDOSSO di Cnido (circa 400 a. C.) « Numero è una pluralità definita » che secondo il TANNERY potrebbe comprendere il concetto più esteso del numero frazionario. Ma, come nota lo stesso TANNERY, EUCLIDE aveva ragione di restringere la sua definizione ai numeri interi, poichè di questi soltanto si occupa.

Citiamo finalmente, come esempio delle poche varianti apportate alla definizione di EUCLIDE, quella di TEONE (II secolo E. v.): « Numero è una collezione di unità ».

Il concetto di numero è stato oggetto, nel secolo XIX, di un profondo studio critico, per opera di GRASSMANN, CANTOR, DEDEKIND, PEANO, ENRIQUES, ecc.

Cfr. ENRIQUES: art. su « *I numeri reali* » nel I volume delle citate *Questioni riguardanti le matematiche elementari.*

DEDEKIND: *Essenza e significato dei numeri — Continuità e numeri irrazionali.* Trad. e note di O. ZARISKI. Roma, 1926.

E. BORTOLOTTI: *Definizioni di numero,* « Periodico di Mat. », Nov. 1922.

M. T. ZAPELLONI: *Il postulato di Campano e i fondamenti dell'aritmetica,* « Periodico di Mat. », Maggio 1928.

3.

Dati due numeri, il minore si dice divisore (sottomultiplo) del maggiore quando lo misura. (Cioè, lo divide esattamente).

4.

Un numero si dice frazione di un altro quando non lo misura. (Cioè non lo divide esattamente).

Abbiamo tradotto il greco « μέρη » (letteralmente « parti ») con la parola frazione.

Questa definizione assume un significato positivo soltanto in rapporto alla prop. 4. Precisamente risulta dal contesto di codesta proposizione che per frazione propria di un numero a si deve intendere la somma di un certo numero n di parti emmesime di a, dove m è un divisore di a ed $n < m$, e dove inoltre verrà sempre supposto che n ed m siano primi fra loro (frazione irriducibile). Tuttavia, come osserva ZEUTHEN, la supposizione poco essenziale che il numeratore sia minore del denominatore, non è sempre conservata da EUCLIDE.

L'uso della parola « parti » per indicare una frazione deriva dal fatto che i Greci, seguendo gli Egiziani, usavano di preferenza frazioni aventi come numeratore l'unità; per es. la frazione propria $\frac{3}{4}$ veniva espressa come somma delle frazioni $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Faceva eccezione [cfr. prop. 4] l'uso di un segno speciale per indicare la frazione $\frac{2}{3}$.

5.

Un numero maggiore è multiplo del minore quando è diviso esattamente da questo.

6.

Un numero si dice pari quando è divisibile in due parti uguali.

7.

Un numero si dice dispari quando non è divisibile in due parti uguali, ossia quando differisce di un'unità da un numero pari.

Nella opposizione fra i numeri pari e dispari i pitagorici vedevano simboleggiata l'opposizione fra due elementi contrari che ritrovavano in tutta la loro rappresentazione del mondo.

Questa concezione però appartiene ad un periodo di speculazione metafisica che si può comprendere in rapporto alla particolare teoria della materia dei pitagorici (1) e che assunse più tardi un significato mistico e cabalistico.

(1) Cfr. per es. l'art. di F. ENRIQUES su: *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco*, Vol. I delle *Questioni*.

EUCLIDE, pur rispecchiando in gran parte lo sviluppo dell'aritmetica pitagorica, rimane sempre all'infuori di queste speculazioni.

8.

Un numero si dice parimente pari quando, diviso da un numero pari, dà un numero pari.

9.

Un numero si dice parimente dispari quando, diviso da un numero pari, dà un numero dispari.

10.

Un numero si dice disparimente dispari quando, diviso da un numero dispari, dà un numero dispari.

Si osservi che l'ultima di queste tre definizioni (numeri disparimente dispari) è inutile in quanto comprende tutti i numeri dispari che non sono primi.

Inoltre, secondo le altre due (numeri parimente pari e parimente dispari), possono esservi numeri che siano nello stesso tempo parimente pari e parimente dispari, come risulta dalle proposizioni 32, 33, 34 del libro IX.

Dalle definizioni di EUCLIDE si distaccano TEONE, NICOMACO (I secolo E. v.), GIAMBLICO.

Essi più esattamente dividono i numeri in:

1) parimenti pari, che sono quelli della forma 2^n;

2) parimente dispari, che sono quelli della forma $2(2m + 1)$;

3) disparimente pari, che sono quelli della forma $2^n(2m + 1)$ (con $n > 1$).

NICOMACO e GIAMBLICO non definiscono il numero disparimente dispari, e TEONE dice che così si chiamavano i numeri primi, risultando essi dal prodotto di due fattori dispari, cioè 1 ed il numero stesso.

11.

Un numero si dice primo quando è diviso soltanto dall'unità.

Si osservi che EUCLIDE non considera la divisione del numero primo per sè stesso, poichè l'unità non è compresa tra i numeri.

12.

Più numeri si dicono primi fra loro quando hanno soltanto l'unità per divisore comune.

13.

Un numero si dice composto quando ha per divisore qualche numero.

14.

Più numeri si dicono composti fra loro quando hanno qualche numero per divisore comune.

15.

Si dice prodotto di un numero per un altro numero, il numero che si ottiene sommando il secondo tante volte con sè stesso quante sono le unità di cui è composto il primo.

É notevole che questa definizione del prodotto di due numeri interi è ancora corrente nell'insegnamento moderno.

16.

E quando due numeri moltiplicati fra loro dànno un certo numero, il numero così ottenuto si dice *piano*, ed i numeri moltiplicati fra loro si dicono lati di esso.

17.

E quando tre numeri moltiplicati fra loro dànno un certo numero, il numero così ottenuto si dice *solido*, ed i numeri moltiplicati fra loro si dicono lati di esso.

18.

Numero quadrato è il prodotto di un numero per sè stesso, ossia un numero piano avente i due lati uguali.

19.

Numero cubo è il prodotto che si ottiene moltiplicando un numero due volte successivamente per sè stesso, ossia un numero solido avente i tre lati uguali.

Queste definizioni si ricollegano alla teoria dei numeri figurati dell'aritmetica pitagorica: numeri, cioè, nei quali le unità son disposte a forma di rettangolo, quadrato, triangolo, pentagono regolare, ecc.

Il concetto di numero triangolare risale a PITAGORA e probabilmente egli scoprì che le somme dei numeri triangolari 1, 3, 5, 7.... porgono i quadrati dei numeri della serie naturale:

$$1 = 1^2, \quad 1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 \ldots = 3^2.$$

Teoremi sui numeri figurati si trovano nelle opere di TEONE, NICOMACO, DIOFANTO.

NICOMACO dà il modo per formare dei numeri triangolari, quadrati ecc., ossia dà la legge che determina il numero (gnomone) da aggiungere ad un numero poligonale di lato n per ottenere il numero poligonale di lato $n+1$.

La serie gnomonica per i numeri triangolari è 1, 2, 3, 4...; per i numeri quadrati è 1, 3, 5...; per i pentagonali 1, 4, 7, 10....

Un importante teorema in questo campo è quello enunciato da FERMAT: « Ogni intero positivo è un numero triangolare o somma di due o tre numeri triangolari; ogni intero positivo è un numero quadrato o somma di due o tre o quattro numeri quadrati, ecc. ».

Di questo argomento si occuparono poi molti altri matematici quali EULERO, LEGENDRE, GAUSS, CAUCHY ecc.

20.

Quattro numeri si dicono in proporzione quando il primo è lo stesso multiplo o lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del secondo che il terzo del quarto.

ZEUTHEN (1) osserva che questa definizione non sembra dire, a prima vista, nulla di più sulle proporzioni numeriche di quanto si avrebbe applicando la definizione generale di proporzione data nel libro V:

$$a:b = c:d$$

se, avendosi

$$na \gtreqless mb,$$

anche

$$nc \gtreqless md,$$

in cui il caso $na = mb$ si riferisce espressamente a tale applicazione.

---

(1) Cfr. *Sur la constitution des livres arithmetiques des éléments d'Euclide, et leur rapport à la question de l'irrationalité.* « Bull. de l'Academie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark », 1910.

Il nuovo significato viene dato dall'uso delle nozioni stabilite con le definizioni 3 e 4, uso che viene spiegato nella prop. 4.

La semplice applicazione della definizione del libro V si ridurrebbe a questo: « Quattro numeri, a, b, c, d sono in proporzione quando per qualunque coppia di numeri m, n, per cui $na = mb$ è anche

$$nc = md \text{ ».}$$

Qui invece si considera una sola coppia n, m di numeri primi fra loro; per la ricerca ed il significato di tali numeri vedi la prop. 4.

21.

I numeri piani e solidi si dicono simili quando hanno i lati proporzionali.

22.

Si dice numero perfetto quello che è uguale alla somma (1) dei suoi divisori.

I pitagorici si erano sempre particolarmente occupati della ricerca di numeri aventi proprietà caratteristiche.

Per maggiori notizie sui metodi per la costruzione dei numeri qui definiti e di altri numeri aventi proprietà simili, rimandiamo senz'altro alla nota alla proposizione 36 del libro IX.

(1) In EUCLIDE non si trova la parola « somma »; cfr. la nota alle Noz. com. 1-8, libro I.

Postulati.

GIOVANNI CAMPANO da Novara (2ª metà del sec. XIII) fa — a quanto pare per la prima volta — il tentativo interessante di enunciare esplicitamente gli assiomi e i postulati su cui si baserebbe tutta l'aritmetica dei numeri naturali.

Gli assiomi portano che:

La parte è minore del tutto.

Equimultipli di numeri uguali sono uguali, e viceversa.

L'unità è parte di ogni numero: parte, che prende il suo nome dalla quantità di unità di cui il numero è formato.

Ogni parte è tanto minore, quanto più prende il suo nome da un numero grande, e viceversa.

Se un numero ne divide un altro, divide anche ogni suo multiplo.

Se un numero ne divide altri due, divide anche il loro prodotto e la loro differenza.

I postulati di CAMPANO sono quattro. I primi tre dicono, in sostanza, che la serie dei numeri naturali è illimitata.

Il quarto afferma che « un numero non può essere diminuito indefinitamente », cioè « in ogni gruppo di numeri esiste un minimo ». Di questo principio fa uso la prop. euclidea VII, 2; CAMPANO l'adopera anche per stabilire la incommensurabilità di un segmento con la sua sezione aurea (cfr. la nota alla prop. IX, 16).

Un altro principio di cui EUCLIDE fa uso implicito nelle proposizioni IX, 7, 8 è il principio di induzione completa, enunciato da MAUROLICO (cfr. nota alle prop. IX, 7, 8): esso è considerato da questo autore e in generale dai matematici posteriori come un principio logico, finchè la critica recente di CANTOR, DEDEKIND e PEANO ha messo in luce trattarsi di una proprietà della serie dei numeri naturali, che distingue codesta serie dalle serie ben ordinate più estese, comprendenti numeri transfiniti.

Le ricerche moderne sui fondamenti dell'aritmetica portano da una parte ad approfondire il concetto del numero cardinale e ordinale in relazione a classi equivalenti di oggetti e a serie ordinate; dall'altra parte a enunciare esplicitamente le proposizioni elementari che stanno a base della definizione delle operazioni aritmetiche e delle loro proprietà formali.

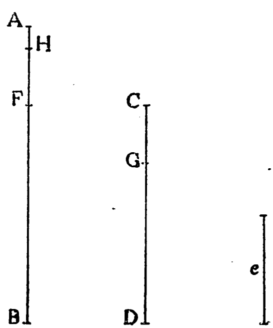
Un resoconto di queste ricerche si trova nell'articolo di ENRIQUES su: *I numeri reali* nel Volume I delle *Questioni*. Cfr. pure ZAPELLONI: *Il postulato di Campano e i fondamenti dell'aritmetica*. « Per. di Mat. », Maggio, 1928.

Proposizioni.

1.

Dati due numeri disuguali, si tolga il minore dal maggiore. Sulla coppia formata dal resto di questa operazione e dal minore dei numeri dati si operi come sulla coppia di numeri data. Se così facendo successivamente il resto non divide mai il numero precedente, finchè si arriva all'unità, i due numeri dati saranno primi tra loro.

Dati i due numeri AB, CD [1], sottraendo sempre di volta in volta il minore dal maggiore, il numero che rimane non divida mai esattamente quello che lo precede finchè non si giunga all'unità. Dico che i numeri AB e CD sono primi fra loro, cioè che la sola unità li divide.



Infatti, se AB e CD non fossero primi fra loro, vi sarebbe un certo numero che li divide.

---

(1) EUCLIDE designa i numeri con due lettere maiuscole od una sola, secondochè, nella rappresentazione che ne dà per mezzo di segmenti, ha o non ha la necessità di considerarne gli estremi. Secondo le notazioni moderne abituali per i segmenti, noi, a somiglianza di quanto già si è fatto nel libro V per le grandezze, indicheremo anche i numeri con due lettere maiuscole od una minuscola, secondochè dei rispettivi segmenti occorra o no considerare gli estremi.

Sia e questo numero.

Sia ora BF il maggior multiplo di CD contenuto in BA e sia FA, minore di CD, il resto della operazione; sia poi DG il maggior multiplo di AF contenuto in DC e GC, minore di AF, il resto della operazione; finalmente FH il maggior multiplo di GC contenuto in AF e il resto sia l'unità HA.

Poichè e divide CD e CD divide BF, anche e dividerà BF.

Ma divide anche l'intero BA; perciò divide anche la differenza AF. Ma AF divide DG. Perciò anche e divide DG. Ma divide anche l'intero DC. Perciò divide anche la differenza CG. Ma CG divide FH. Perciò anche e divide FH. Ma divide anche l'intero FA. Perciò deve dividere anche l'unità AH, mentre esso è numero, il che è impossibile. Pertanto nessun numero può essere divisore comune dei numeri AB e CD.

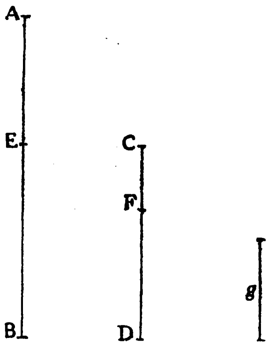
Dunque, dati due numeri, ecc. c. d. d.

2.

Dati due numeri che non siano primi fra loro, trovare il loro massimo comun divisore.

Siano AB, CD i due numeri dati, non primi fra loro. Bisogna trovare il loro massimo comune divisore.

Se invero CD divide AB, poichè divide anche sè stesso, esso sarà divisore comune dei numeri CD ed AB; ed è chiaro che sarà anche il massimo. Poichè infatti nessun numero maggiore del numero CD dividerà CD. Se invece CD non è divisore di AB, sottraendo sempre di volta in volta il minore dei numeri dal maggiore, resterà un certo numero che dividerà quello che lo precede. Infatti non resterà l'unità, poichè allora AB e CD sareb-



bero primi fra loro [prop. 1], il che è contro l'ipotesi. Resterà dunque un certo numero che dividerà quello che lo precede. Supponiamo che CD, dividendo BE, lasci come resto EA minore di sè ed inoltre che EA, dividendo DF, lasci come resto FC minore di sè, e che CF divida AE. Poichè CF divide AE, ed AE divide DF, anche CF dividerà DF. Ma divide anche sè stesso. Perciò divide anche l'intero CD. Ma CD divide BE; perciò anche CF divide BE. Inoltre divide anche EA. Dunque divide anche l'intero BA. Ma divide anche CD. Dunque CF divide AB e CD. Pertanto CF è divisore comune dei numeri AB, CD. Dico che è il massimo. Infatti, se CF non fosse il massimo comun divisore dei numeri AB, CD, vi sarebbe un altro numero, maggiore del numero CF, che dividerebbe i numeri AB e CD. Sia g.

Poichè g divide CD e CD divide BE, anche g divide BE. Ma divide anche l'intero BA. Dunque divide anche il resto AE. Ma AE divide DF. Dunque g divide DF. Ma divide anche l'intero DC. Dunque divide anche il resto FC, cioè un numero maggiore ne divide uno minore, il che è impossibile.

Dunque, dati due numeri ecc. c. d. d.

Corollario

Da ciò risulta evidentemente che se un numero divide due numeri divide anche il loro massimo comun divisore.

Dati due numeri a_1 e a_2, le prop. 1, 2 insegnano a riconoscere se sono primi fra loro [prop. 1] e trovarne il massimo comune divisore [prop. 2].

L'algoritmo euclideo si può esprimere in simboli così:

$$\begin{gathered} a_1 = u_1 a_2 + a_3 \\ a_2 = u_2 a_3 + a_4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} = u_{n-1} a_n \, . \end{gathered}$$

Se $a_n = 1$, i due numeri dati sono primi fra loro, altrimenti a_n è il loro M. C. D.

Dall'algoritmo euclideo si passa senz'altro all'ordinario sviluppo in frazione continua del quoziente $\frac{a_1}{a_2}$.

Si ha infatti:

$$\frac{a_1}{a_2} = u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ddots + \cfrac{1}{u_{n-1}}}} \, .$$

Ricordiamo qui che l'origine dell'algoritmo della frazione continua si trova nell'*Algebra* di R. BOMBELLI (Bologna 1572), ma lo sviluppo completo di questo concetto è dovuto a PIETRO ANTONIO CATALDI (fine del sec. XVI) che dà per il primo la frazione continua

$$\sqrt{a^2+r}=a+\cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\ldots}}$$

(Cfr. E. BORTOLOTTI: *P. A. Cataldi ed i primi algoritmi infiniti.* Bologna 1920. Boll. Mathesis, 1919, n.ri 1-12).

È da notare che nelle due proposizioni anzidette EUCLIDE ammette che se a_1 ed a_2 sono entrambi divisibili per m, sono divisibili per m anche $a_1 - na_2$ ed $a_1 + na_2$, cioè che « un numero divisore di due altri divide anche la loro somma e la loro differenza ».

Nella proposizione 2 si adopera come evidente il principio che « in un qualsiasi gruppo G di numeri esiste sempre un minimo ». Questo principio figura nel postulato aggiunto alla edizione latina del libro VII degli *Elementi* di GIOVANNI CAMPANO (cfr. la nota a pag. 175).

Il postulato di CAMPANO si ritrova nella critica moderna dei principi dell'aritmetica, in GIORGIO CANTOR. come condizione che la serie di numeri naturali ordinali (finiti o trasfiniti) sia *bene ordinata*: s'intende con ciò che sia ordinata in guisa che la serie stessa e ogni parte di essa possegga sempre un primo elemento.

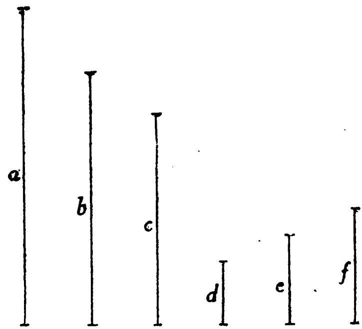
Per le relazioni del postulato di CAMPANO col cosiddetto principio d'induzione, cfr. note alle prop. IX, 7, 8.

3.

Dati tre numeri, che non siano primi fra loro, trovare il loro massimo comun divisore.

Siano a, b, c i tre numeri dati, non primi fra loro. Bisogna dunque trovare il massimo comun divisore dei numeri a, b, c.

Sia d il massimo comun divisore dei due numeri a e b [prop. 2]; o d dividerà c, o non lo dividerà. Supponiamo dapprima che divida c; esso divide allora anche a e b. Dunque d divide i numeri a, b, c. Quindi d è un divisore



comune dei numeri a, b, c. Dico che è il massimo. Infatti, se d non fosse il massimo comun divisore dei numeri a, b, c, vi sarebbe un altro numero, maggiore di d, che dividerebbe i numeri a, b, c. Sia e questo numero. Ora, poichè e divide i numeri a, b, c, dividerà anche il loro massimo comun divisore [prop. 2, coroll.]. Ora il massimo comun divisore dei numeri a, b è d. Dunque e, che è più grande, dividerebbe d, che è più piccolo; il che è impossibile. Dunque un numero più grande del numero d non può essere divisore comune dei numeri a, b, c. Dunque d è il massimo comun divisore dei numeri a, b, c.

Supponiamo ora che d non divida il numero c. Dico anzitutto che i numeri c e d non sono primi fra loro. Infatti, poichè i numeri a, b, c non sono primi fra loro, esisterà un numero che li dividerà; esso, dividendo a, b, c, dividerà a, b, ed il loro massimo comun divisore d [propos. 2, coroll.]; ma divide anche c; quindi esiste un numero che divide d e c; dunque d e c non sono primi fra loro. Sia e il loro massimo comun divisore.

Poichè e divide d e d divide a e b, anche e divide a e b; ma divide anche c; dunque e divide a, b, c. Quindi e è divisore comune dei numeri a, b, c.

Dico che è il massimo. Infatti, se e non fosse il massimo comun divisore dei numeri a, b, c, vi sarebbe un altro numero, maggiore del numero e, che dividerebbe i numeri a, b, c. Sia f questo numero; poichè f divide i numeri a, b, c, divide anche a e b; e quindi dividerà anche il massimo comun divisore dei numeri a e b [prop. 2, coroll.]. Ma il massimo comun divisore dei numeri a e b è d. Dunque f divide d; ma divide anche c, dunque divide anche il massimo comun divisore dei numeri d e c. Ma il massimo comun divisore dei numeri d e c è e. Dunque f, che è più grande, divide e, che è più piccolo, il che è impossibile. Pertanto nessun numero maggiore del numero e può essere divisore comune dei numeri a, b, c.

Dunque e è il massimo comun divisore dei numeri a, b, c.; c. d. d.

Trovare il M. C. D. di tre numeri.

ANARIZIO attribuisce ad ERONE l'osservazione che il metodo serve per quanti si vogliano numeri. Basta infatti, dati n numeri, trovare il M. C. D. di due qualunque di essi, poi quello del M. C. D. trovato e di un terzo numero, e così di seguito, finchè rimangano due soli numeri il cui M. C. D. è quello dei numeri dati, EUCLIDE ammette tacitamente questa estensione nella proposizione 27.

Per trovare il M. C. D. di tre numeri si può anche usare un procedimento ternario consistente nel sottrarre sempre il più piccolo dei tre numeri dagli altri due. Il procedimento va continuato finchè si trovino tre resti uguali che rappresentano il M. C. D. dei numeri dati.

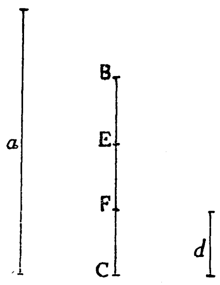
Cfr. ENRIQUES-CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni*, Vol. II, Cap. IV, § 32.

4.

Dati due numeri, il minore è sempre un sottòmultiplo o una frazione del maggiore.

Si abbiano i due numeri a, BC e il minore sia BC. Dico che il numero BC è un sottomultiplo o una frazione del numero a.

Infatti i numeri a, BC o sono primi fra loro o non lo sono. Supponiamo dapprima che siano primi fra loro. De-



componiamo ora BC nelle sue unità; ciascuna delle unità contenute in BC sarà un sottomultiplo del numero a; quindi BC è una frazione (propria) del numero a.

Supponiamo ora che a e BC non siano primi fra loro.

BC pertanto o dividerà a, o non lo dividerà. Se BC dividerà a, esso è un sottomultiplo del numero a. Nel caso contrario, sia d il massimo comun divisore dei numeri a e BC [prop. 2] e si decomponga BC in parti BE, EF, FC uguali al numero d. Poichè d divide a, esso è sottomultiplo del numero a. Ma d è uguale a ciascuno dei BE, EF, FC, quindi anche uno qualunque dei numeri BE, EF, FC è sottomultiplo del numero a. Perciò BC è una frazione del numero a.

Dunque, dati due numeri, ecc. c. d. d.

Dati due numeri a, b (dove $b < a$), il numero b è un sottomultiplo o una frazione di a.

Sia g il M. C. D. di a, b; se $a = mg$, $b = ng$ risulta

$$b = \frac{n}{m} a .$$

Per $n = 1$ si ha il caso particolare di b sottomultiplo di a.

Osserva ZEUTHEN (¹) che questa proposizione ci dà il significato preciso della parola « parti » (o frazione) della definizione 4, cioè della frazione irriducibile $\frac{n}{m}$.

Il nucleo logico da cui si svilupperà tutta la teoria è la univocità di questa determinazione, univocità che risulta da quella del M. C. D.

Tuttavia l'univocità di m ed n è determinata soltanto nel caso che siano dati a e b: ma si deve dimostrare che m ed n dipendono unicamente dal rapporto $\frac{a}{b}$, ossia che essi restano inalterati sostituendo ad a e b due numeri c e d aventi lo stesso rapporto

(¹) Cfr. loc. cit.

nel senso definito nel libro V, dove la definizione di proporzione, per a, b, c, d numeri interi può essere sostituita da

$$ad = bc.$$

Per giungere a questo risultato (nella prop. 19) EUCLIDE si serve della nuova definizione 20, in base alla quale

$$a : b = c : d,$$

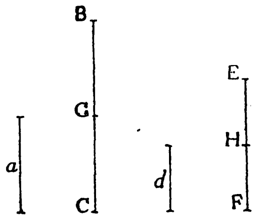
quando i numeri m ed n dedotti da a e b nel modo indicato nella prop. 4 sono uguali a quelli che si deducono da c e d.

5.

Se un numero è sottomultiplo di un altro numero ed un terzo numero è lo stesso sottomultiplo di un quarto numero, anche la somma del primo e del terzo è lo stesso sottomultiplo della somma del secondo e del quarto.

Il numero a sia sottomultiplo del numero BC ed un altro numero d sia lo stesso sottomultiplo di un altro numero EF che a del numero BC. Dico che anche la somma di a con d è lo stesso sottomultiplo della somma di BC con EF che a del numero BC. Infatti, essendo a sottomultiplo del numero BC e d lo stesso sottomultiplo del numero EF, in EF saranno contenuti tanti numeri uguali al numero d quanti ve ne sono in BC di uguali al numero a. Si decomponga BC nei numeri BG, GC uguali al numero a, ed EF nei numeri EH, HF uguali al numero d. La quantità dei numeri BG, GC sarà uguale a quella dei numeri EH, HF. E poichè BG è uguale ad a, ed

EH è uguale a d, la somma di BG con EH sarà uguale alla somma di a con d. E, per la stessa ragione, la somma di GC con HF sarà uguale alla somma di a con d.



Dunque nella somma di BC con EF sono contenuti tanti numeri uguali alla somma di a con d, quanti numeri uguali ad a sono contenuti in BC. Perciò la somma di BC con EF è tante volte multipla della somma di a con d, quante BC lo è del numero a.

Dunque a è lo stesso sottomultiplo di BC che la somma di a con d è della somma di BC con EF; c. d. d.

Se $a = \frac{1}{n} b$ e $c = \frac{1}{n} d$

anche

$$a + c = \frac{1}{n}(b + d).$$

Infatti

$$b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n}$$

$$d = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n}$$

e quindi

$$b + d = \underbrace{(a + c) + (a + c) + \dots + (a + c)}_{n}$$

cioè

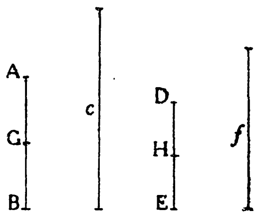
$$a + c = \frac{1}{n}(b + d).$$

6.

Se un numero è frazione di un altro, ed un terzo numero è la stessa frazione di un quarto, anche la somma del primo e del terzo è la stessa frazione della somma del secondo e del quarto.

Sia infatti il numero AB frazione del numero c, ed un altro numero DE sia la stessa frazione di un altro numero f.

Dico che anche la somma di AB con DE è la stessa frazione della somma di c con f, che il numero AB è



di c. Infatti, poichè AB è la stessa frazione del numero c che DE del numero f, in DE saranno contenuti tanti sottomultipli del numero f, quanti ne sono contenuti in AB del numero c.

Si divida AB in AG, GB sottomultipli del numero c, e poi DE in DH, HE sottomultipli del numero f. La quantità dei numeri AG, GB sarà pertanto uguale alla quantità dei numeri DH, HE. E poichè AG è lo stesso sottomultiplo del numero c che DH è del numero f, la somma di AG con DH sarà lo stesso sottomultiplo della somma di c con f, che AG è del numero c [prop. 5].

Per la stessa ragione GB è lo stesso sottomultiplo del numero c, che la somma di GB con HE è della somma di c con f.

Dunque la somma di AB con DE è la stessa frazione della somma di c con f, che AB è del numero c; c. d. d.

Se $a = \frac{m}{n} b$ e $c = \frac{m}{n} d$

allora

$$a + c = \frac{m}{n}(b + d).$$

Infatti

$$mb = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n}$$

$$md = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n}$$

quindi

$$m(b + d) = \underbrace{(a + c) + (a + c) + \dots + (a + c)}_{n}$$

cioè

$$a + c = \frac{m}{n}(b + d).$$

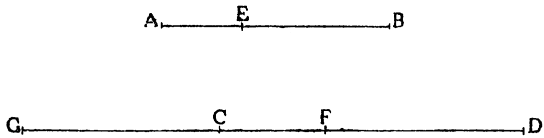
7.

Se un numero è sottomultiplo di un altro ed un terzo numero è lo stesso sottomultiplo di un quarto, anche la differenza tra il primo ed il terzo è lo stesso sottomultiplo della differenza tra il secondo ed il quarto.

Il numero AB sia lo stesso sottomultiplo del numero CD che il numero AE del numero CF. Dico che anche la differenza EB è lo stesso sottomultiplo della differenza FD che l'intero numero AB è dell'intero numero CD.

Sia infatti EB lo stesso sottomultiplo del numero CG

che AE è del numero CF. Poichè EB è lo stesso sottomultiplo del numero CG che AE è di CF, anche AB è lo stesso sottomultiplo del numero GF che AE è di CF [prop. 5]. Si è supposto inoltre che AB fosse lo



stesso sottomultiplo di CD che AE è di CF. Pertanto AB è lo stesso sottomultiplo dei numeri GF e CD.

Dunque GF è uguale a CD. Se ne sottragga la parte comune CF. Sarà dunque GC uguale ad FD. E poichè AE è lo stesso sottomultiplo di CF che EB è di GC, e GC è uguale ad FD, AE è lo stesso sottomultiplo di CF che AB è di CD.

Dunque, anche ecc.; c. d. d.

Se $a = \frac{1}{n} b$ e $c = \frac{1}{n} d$

allora

$$a - c = \frac{1}{n}(b - d).$$

Infatti sia e tale che

$$(1) \qquad a - c = \frac{1}{n} e;$$

poichè

$$c = \frac{1}{n} d,$$

risulta che

$$a = \frac{1}{n}(d + e);$$

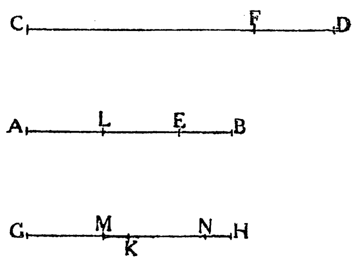
ma, per ipotesi, $d + e = b$. Cosicchè $e = b - d$; e sostituendo in (1) si ha

$$a - c = \frac{1}{n}(b - d).$$

8.

Se un numero è frazione di un altro ed un terzo numero (sottratto dal primo) è la stessa frazione di un quarto (sottratto dal secondo), anche la differenza tra il primo ed il terzo è la stessa frazione della differenza tra il secondo ed il quarto.

Il numero AB sia la stessa frazione del numero CD che il numero AE è del numero CF. Dico che anche la



differenza EB è la stessa frazione della differenza FD che l'intero numero AB è dell'intero numero CD.

Si ponga infatti GH uguale ad AB. Pertanto AE è la stessa frazione di CF che GH è di CD.

Si divida GH in GK e KH, sottomultipli del numero CD, e poi AE in AL, LE sottomultipli del numero CF.

La quantità del numeri GK, KH è dunque uguale a quella dei numeri AL, LE. E poichè AL è lo stesso sottomultiplo di *CF* che *KG* è di *CD*, e *CD* è maggiore di *CF*, sarà anche *GK* maggiore di *AL*. Si ponga *GM* uguale ad *AL*; *GM* è dunque lo stesso sottomultiplo del numero *CF* che *GK* è di *CD*. Perciò anche la differenza *MK* è lo stesso sottomultiplo della differenza *FD* che l'intero *GK* è dell'intero *CD* [prop. 7]. E ancora, poichè *EL* è lo stesso sottomultiplo di *CF* che *KH* è di *CD* e *CD* è maggiore di *CF*, sarà anche *HK* maggiore di *EL*.

Si ponga *KN* uguale ad *EL*. Sarà dunque *KN* lo stesso sottomultiplo di *CF* che *KH* è di *CD*.

Perciò anche la differenza *NH* è lo stesso sottomultiplo della differenza *FD* che l'intero *KH* è dell'intero *CD* [prop. 7].

Si è poi dimostrato che la differenza *MK* è lo stesso sottomultiplo della differenza *FD* che l'intero *GK* è dell'intero *CD*. Perciò anche la somma di *MK* con *NH* è la stessa frazione di *DF* che l'intero *HG* è dell'intero *CD*.

Ma la somma di *MK* con *NH* è uguale ad *EB*, ed *HG* è uguale a *BA*, dunque, ecc.; c. d. d.

Se $a = \frac{m}{n} b$ e $c = \frac{m}{n} d$

anche

$$a - c = \frac{m}{n}(b - d).$$

Infatti, sia:

$$e = \frac{1}{n} b, \quad f = \frac{1}{n} d.$$

Poichè per ipotesi $b > d$, sarà anche $e > f$ e quindi [prop. 7]

$$e - f = \frac{1}{n}(b - d).$$

E poichè

$$a = \underbrace{e + e + \dots + e}_{m}$$

$$c = \underbrace{f + f + \dots + f}_{m}$$

sarà anche

$$a - c = m(e - f);$$

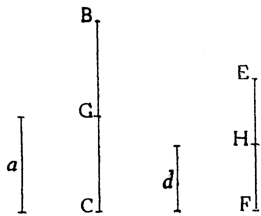
cioè

$$a - c = \frac{m}{n}(b - d).$$

9.

Se un numero è sottomultiplo di un altro, ed un terzo numero è lo stesso sottomultiplo di un quarto, anche permutando, il primo è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del terzo, che il secondo è del quarto.

Sia infatti il numero a lo stesso sottomultiplo del numero BC che un altro numero d è di un altro numero



EF. Dico che, anche permutando, il numero BC è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero EF che a è di d.

Poichè infatti a è lo stesso sottomultiplo del numero BC che d è del numero EF, saranno contenuti in EF tanti numeri uguali al numero d quanti ne sono contenuti in BC di uguali al numero a. Si divida BC nei numeri BG,

GC uguali al numero a, ed EF nei numeri EH, HF uguali al numero d. Sarà pertanto la quantità dei numeri BG, GC uguale alla quantità dei numeri EH, HF. E poichè BG è uguale a GC, ed EH è uguale ad HF e la quantità dei numeri BG, GC è uguale alla quantità dei numeri EH, HF, sarà anche GC lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero HF che BG è di EH. Perciò anche BC è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero EF che BG è di EH [propp. 5 e 6].

Ma BG è uguale ad a, ed EH è uguale a d; dunque a è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero d che BC è di EF; c. d. d.

Se $a = \frac{1}{n} b$ e $c = \frac{1}{n} d$

ed

$$a = \frac{p}{q} c, \quad \text{anche } b = \frac{p}{q} d.$$

Infatti

$$b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n}$$

$$d = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n}$$

quindi [propp. 5, 6] sarà anche

$$na = \frac{p}{q} nc$$

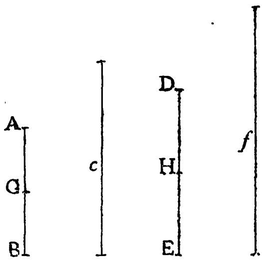
cioè

$$b = \frac{p}{q} d.$$

10.

Se un numero è frazione di un altro numero, ed un terzo numero è la stessa frazione di un quarto numero, anche permutando, il secondo è la stessa frazione o lo stesso sottomultiplo del quarto, che il primo è del secondo.

Il numero AB sia frazione del numero c, ed un altro numero DE sia la stessa frazione del numero f. Dico che,



anche permutando, il numero c è la stessa frazione o lo stesso sottomultiplo del numero f che AB è del numero DE.

Infatti, poichè AB è la stessa frazione del numero c che DE è di f, in AB saranno contenuti tanti sottomultipli di c, quanti ne sono contenuti in DE del numero f.

Si divida AB in AG, GB, sottomultipli del numero c, e DE in DH, HE sottomultipli del numero f.

Sarà pertanto la quantità dei numeri AG, GB uguale a quella dei numeri DH, HE. E poichè DH è lo stesso sottomultiplo di F che AG è di c, sarà anche AG lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione di DH che c è di f [prop. 9].

Per la stessa ragione GB è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione di HE che c è di f.

Dunque, ecc.; c. d. d.

Se $a = \frac{m}{n} b$ e $c = \frac{m}{n} d$

ed

$$a = \frac{p}{q} c, \quad \text{anche } b = \frac{p}{q} d.$$

Infatti

$$a = \underbrace{\frac{b}{n} + \frac{b}{n} + \dots + \frac{b}{n}}_{m}$$

$$c = \underbrace{\frac{d}{n} + \frac{d}{n} + \dots + \frac{d}{n}}_{m}$$

e poichè, essendo

$$\frac{a}{m} = \frac{p}{q} \frac{c}{m},$$

anche

$$\frac{b}{m} = \frac{p}{q} \frac{d}{m}, \qquad \text{[prop. 9]}$$

sarà anche [propp. 5, 6]

$$m \frac{b}{m} = m \frac{p}{q} \frac{d}{m}$$

cioè

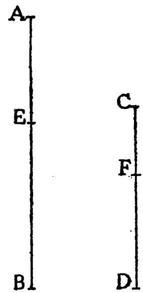
$$b = \frac{p}{q} d.$$

11.

Se quattro numeri sono in proporzione, la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come il primo dei numeri dati sta al secondo.

Stia AB a CD come AE, tolto da AB, a CF, tolto da CD. Dico che il rimanente EB sta al rimanente FD

come AB sta a CD. Infatti, poichè AB sta a CD come AE sta a CF, sarà AB lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione di CD che AE di CF [def. 20].



Perciò anche EB è lo stesso divisore o la stessa frazione di FD che AB di CD [propp. 7, 8].

Dunque EB sta ad FD come AB sta a CD [def. 20]; c. d. d.

Se

$$a : b = c : d$$

anche

$$(a - c) : (b - d) = a : b.$$

Infatti sarà [def. 20]

$$\frac{m}{n} a = b, \quad c = \frac{m}{n} d \quad (m \geq 1)$$

e quindi [propp. 7, 8]

$$(a - c) = \frac{m}{n} (b - d).$$

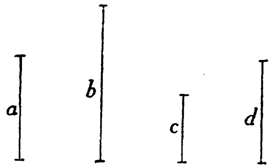
Dunque [def. 20]

$$(a - c) : (b - d) = a : b.$$

12.

Se quanti si vogliono numeri sono in proporzione, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come un antecedente sta ad un conseguente.

Siano dati quanti si vogliono numeri a, b, c, d in proporzione, in modo che a stia a b come c sta a d.



Dico che a sta a b come la somma di a con c sta alla somma di b con d.

Infatti, poichè a sta a b come c sta a d, ne segue che il numero c è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero d che il numero a è del numero b [def. 20].

Perciò anche la somma di a con c sarà lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione della somma di b con d, che a è del numero b [propp. 5, 6].

Dunque a sta a b come la somma di a con c sta alla somma di b con d [def. 20]; c. d. d.

Se

$$a : a' = b : b' = c : c' = \ldots,$$

anche

$$(a + b + c + \ldots) : (a' + b' + c' + \ldots) = a : a' = b : b' = \ldots.$$

Infatti sarà [def. 20]

$$a = \frac{m}{n} a', \quad b = \frac{m}{n} b', \quad c = \frac{m}{n} c', \dots \quad (m \geq 1)$$

e quindi [propp. 5, 6] anche

$$(a + b + c + \dots) = \frac{m}{n} (a' + b' + c' + \dots).$$

Dunque [def. 20]

$$(a + b + c + -) : (a' + b' + c' + -) = a : a' = b : b' = \dots .$$

Peano raggruppa le proposizioni 5, 6, 7, 8, 11, 12, nel modo seguente:

Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

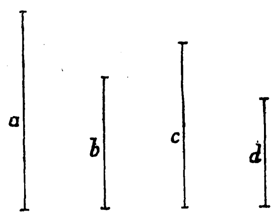
allora

$$\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}, \text{ (v. op. cit.).}$$

13.

Se quattro numeri sono in proporzione, essi restano in proporzione anche permutando.

Si abbiano quattro numeri a, b, c, d in proporzione, tali cioè che a stia a b come c sta a d; dico che saranno in



proporzione anche permutando, cioè che a sta a c come b sta a d.

Infatti, siccome a sta a b come c sta a d, ne segue che c è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero d [def. 20] che a è del numero b.

Ne segue pertanto che anche b è lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del numero d che a è del numero c [prop. 10].

Dunque a sta a c come b sta a d [def. 20]; c. d. d.

Se

$$a : b = c : d,$$

anche

$$a : c = b : d.$$

Infatti sarà [def. 20]

$$a = \frac{m}{n} b, \quad c = \frac{m}{n} d$$

e quindi [prop. 10] se

$$a = \frac{p}{q} c$$

anche

$$b = \frac{p}{q} d.$$

Dunque [def. 20]

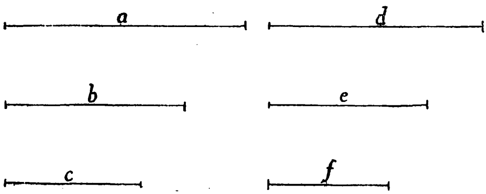
$$a : c = b : d.$$

14.

Dati quanti si vogliano numeri ed altri in eguale quantità, tali che due numeri consecutivi del primo gruppo stiano in proporzione con i corrispondenti numeri del secondo gruppo, essi staranno in proporzione anche ex aequo.

Si abbiano quanti si vogliano numeri a, b, c ed altri in eguale quantità d, e, f, che stiano a due a due nello stesso rapporto, in modo che a stia a b come d sta ad e; e b stia a c come e sta ad f.

Dico che, *ex aequo*, anche a sta a c come d sta ad f.



Infatti, poichè a sta a b come d sta ad e, permutando, a sta a d come b sta ad e [prop. 13]. Inoltre, poichè b sta a c come e sta ad f, permutando [id.] b sta ad e come c sta ad f. Ma b sta ad e come a sta a d, perciò a sta a d come c sta ad f, cioè, permutando, a sta a c come d sta ad f; c. d. d.

Dati

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ d, & e, & f, \end{matrix}$$

se

$$a : b = d : e$$

e

$$b : c = e : f$$

allora:

$$a : c = d : f.$$

Infatti, per la prop. 13 si ha

(1)
$$\left\{ \begin{array}{l} a : d = b : e \\ \text{e} \\ b : e = c : f. \end{array} \right.$$

quindi

(2)
$$a : d = c : f$$

da cui

$$a : c = d : f.$$

HEIBERG suppone che per il passaggio da (1) a (2) EUCLIDE si riferisca alla prop. 11 del libro V: rapporti uguali ad uno stesso rapporto sono uguali tra loro.

Invece HEATH, con più ragione, considera questo passaggio come assiomatico: si ammette cioè che numeri o frazioni uguali allo stesso numero o alla stessa frazione siano uguali fra loro. Invero questa proprietà transitiva dell' eguaglianza di rapporti riesce evidente per i rapporti fra numeri, mentre non lo è affatto pel caso di rapporti fra grandezze incommensurabili, che sono definiti per astrazione.

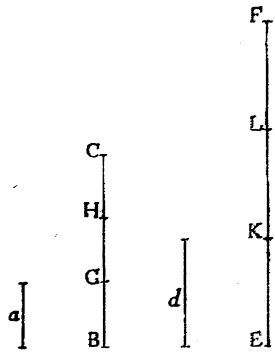
15.

Se l'unità è contenuta un certo numero di volte in un numero, ed un terzo numero è contenuto lo stesso numero di volte in un quarto numero, anche permutando, l'unità ed il secondo numero sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nel terzo e nel quarto dei numeri dati.

L'unità a sia contenuta un certo numero di volte nel numero BC ed un altro numero d sia contenuto lo stesso numero di volte in un altro numero EF. Dico che l'unità a ed il numero BC sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nei numeri d ed EF.

Infatti, poichè l'unità a e il numero d sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nei numeri BC ed EF, in EF sono contenuti tanti numeri uguali al numero d quante unità sono in BC.

Si decomponga BC nelle sue unità BG, GH, HC, ed EF nei numeri EK, KL, LF uguali al numero d. Sarà dunque la quantità dei BG, GH, HC uguale alla quantità dei numeri EK, KL, LF. E poichè le unità BG, GH, HC sono uguali fra loro, ed anche i numeri EK, KL, LF sono uguali fra loro, e la quantità delle unità BG, GH,



HC è uguale alla quantità dei numeri EK, KL, LF, l'unità BG starà al numero EK come l'unità GH sta al numero KL, come l'unità HC sta al numero LF.

Ma un antecedente sta ad un conseguente come la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti [prop. 12].

Perciò l'unità BG sta al numero EK come BC sta ad EF. Ma BG è uguale ad a, ed EK è uguale a d; perciò l'unità a e BC stanno lo stesso numero di volte rispettivamente nel numero d e nel numero EF; c. d. d.

Se

$$1 : a = b : ab$$

allora

$$1 : b = a : ab.$$

Infatti

$$a = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a}$$

$$ab = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a}$$

e quindi [prop. 12]

$$1 : b = a : ab.$$

HEATH considera questa proposizione come caso particolare della prop. 9; ZEUTHEN invece la considera compresa nella prop. 13, ove si sia decomposto d in b parti uguali a c.

PEANO raggruppa le proposizioni 9, 10, 13, 15 nel modo seguente:

Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

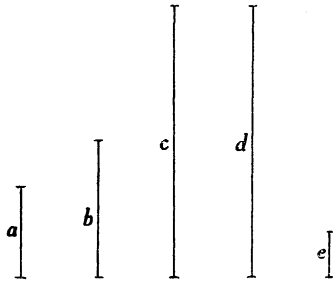
allora

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

16.

Se due numeri si moltiplicano l'uno per l'altro, i due prodotti ottenuti scambiando l'ordine dei termini, sono uguali tra loro.

Si abbiano due numeri a e b; il numero a, moltiplicando b, formi il numero c; ed il numero b, moltiplicando a, formi il numero d; dico che c e d sono uguali. Infatti, poichè il numero a, moltiplicando b, forma il numero c, ne risulta che b è contenuto in c tante volte quante sono le unità del numero a. Ma anche l'unità e è contenuta nel numero a tante volte quante sono le sue unità. Pertanto l'unità e e il numero b sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nel numero a e nel numero c. Ne risulta quindi che l'unità e e il numero a sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nel numero b e nel numero c (prop. 15). Inoltre poichè il numero b, moltiplicando a, forma il numero d, ne risulta che a è contenuto in d tante volte, quante sono le unità di b. Ma anche l'unità e è contenuta b volte nel numero b. Pertanto l'unità e e il numero a sono contenuti



lo stesso numero di volte rispettivamente nel numero b e nel numero d. Ma si è visto che l'unità e e il numero a sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nel numero b e nel numero c. Pertanto a è contenuto lo stesso numero di volte in entrambi i numeri c e d.

Dunque i numeri c e d sono uguali; c. d. d.

Diciamo che

$$ab = ba.$$

Infatti (def. 20)

$$1 : a = b : ab$$

da cui

$$1 : b = a : ab;$$

inoltre (def. 20)

$$1 : b = a : ba;$$

ne segue che

$$a : ab = a : ba.$$

Quindi

$$ab = ba.$$

La proprietà commutativa del prodotto di due numeri naturali è certamente nota fino dai tempi più remoti. Poichè i Pitagorici, intorno al 500 a. C., consideravano il prodotto di due numeri come *numero rettangolare*, si può presumere che essi possedessero quella dimostrazione della proprietà commutativa che risulta dal rappresentare le unità del moltiplicando con a punti messi in fila: ponendo b file uguali l'una sotto l'altra si dà origine ad un numero rettangolare ab, il quale può ritenersi ugualmente costituito da a colonne, ciascuna formata di b punti; onde si rende manifesto che

$$ab = ba.$$

Una semplice modificazione di questa dimostrazione si trova in quella che DIRICHLET (cfr. DIRICHLET, *Lezioni sulla teoria dei numeri* (trad. FAIFOFER), Venezia, 1881) dà per un prodotto di tre fattori e che si estende immediatamente ad un numero qualunque di fattori. Siano dati i tre numeri a, b, c, e si consideri il seguente quadro (in cui ogni orizzontale è composta di a elementi ed ogni verticale di b elementi):

$$\begin{matrix} c, & c, & \ldots, & c_a \\ c, & c, & \ldots, & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_b, & c, & \ldots, & c. \end{matrix}$$

La somma di ogni orizzontale è ca e quindi la somma totale è $(ca)b$.

Similmente la somma di ogni verticale è cb e quindi la somma totale è $(cb)a$.

Ne segue

$$(ca)b = (cba),$$

e posto

$$c = 1$$

$$ab = ba.$$

Diamo qualche notizia sulle dimostrazioni della proprietà commutativa del prodotto che s'incontrano dopo EUCLIDE.

CAMPANO dimostra la proposizione come segue:

Sia (1) $ba = c$ e (2) $ab = d$: dico che $c = d$.

Infatti per la (1) si ha

$$c = (b + b + \ldots + b_a)$$

e quindi a starà in c tante volte quante l'unità sta in b, cioè

$$c = (a + a + \ldots + a_b) = d.$$

Nella forma un po' oscura di CAMPANO si può trovare il principio della dimostrazione che si esprime ordinariamente così:

$$\begin{aligned} ab &= (a+a+\ldots+a_b) = \\ &= \underbrace{(1+1+\ldots+1_a)+(1+1+\ldots+1_a)+\ldots+(1+1+\ldots+1_a)}_{b} = \\ &= \underbrace{(1+1+\ldots+1_b)+(1+1+\ldots+1_b)+\ldots+(1+1+\ldots+1_b)}_{a} = \\ &= ba. \end{aligned}$$

Nel ragionamento precedente permane ancora un elemento intuitivo che richiama in qualche modo l'antica dimostrazione pitagorica. C'è un'altra maniera di stabilire la proprietà commutativa del prodotto che riesce pure illuminata in rapporto a quella medesima intuizione. Essa risulta dal definire il prodotto di due numeri cardinali a e b, ciascuno dei quali viene concepito come numero degli oggetti di una classe — rispettivamente A_r, B_s —, come il numero degli oggetti della classe formata dalle combinazioni $A_r B_s$ (CANTOR, CAPELLI). Qui la definizione del prodotto è simmetrica e perciò la proprietà viene data a priori. Nondimeno a chi approfondisce l'esame della cosa apparirà chiaro che la facilità di questa dimostrazione dipende dall'insieme delle proposizioni che sono presupposte nella teoria dei numeri cardinali, e particolarmente da quella che — ordinando comunque gli oggetti di una classe — si ottiene sempre il medesimo numero d'ordine, e che costituisce il cosidetto *principio d'invarianza* di SCHRÖDER.

Ciò posto, è naturale di dare alla dimostrazione precedente un'altra forma che si riferisce ai numeri ordinali:

Si procederà come segue: si considerino le classi ordinate

$$(A) = (A_1, A_2, \ldots, A_a)$$
$$(B) = (C_1, C_2, \ldots, C_b).$$

La classe (AC) si può ordinare in modo da avere la serie

$$S = A_1C_1, A_2C_1, \ldots, A_aC_1, A_1C_2, \ldots, A_aC_2, A_1C_b, \ldots, A_aC_b$$

ed allora il prodotto ab indica il numero d'ordine dell'ultimo elemento $A_a C_b$ in S.

Cioè il prodotto ab è la somma di b numeri uguali ad a.

Per stabilire quindi la proprietà commutativa del prodotto basta notare che la S si può ordinare così:

$$A_1 C_1, \ldots, A_1 C_b, A_2 C_1, \ldots, A_2 C_b, \ldots, A_a C_1, \ldots, A_a C_b,$$

ed allora il numero d'ordine dell'ultimo elemento è ba, e il principio d'invarianza dà

$$ab = ba.$$

Come si vede, la dimostrazione sopra esposta non fa che conferire una forma rigorosa a quel procedimento dimostrativo ordinario che abbiamo detto derivare da CAMPANO.

Più precisamente essa elimina ogni ricorso all'intuizione geometrica, riposando tuttavia come fondamento sul principio dell'invarianza del numero.

Il suo valore dipenderà dunque dal valore stesso di questo principio o dalla maniera come può essere giustificato. Ora le dimostrazioni che a tale scopo sono state offerte da KRONECKER e da HELMHOLTZ non fanno che mettere in giuoco altre assunzioni che non riescono più evidenti.

La difficoltà è stata sciolta da REY PASTOR e da ENRIQUES facendo vedere che il principio d'invarianza del numero è conseguenza logica dell'ipotesi che la classe data sia *finita*. La classe finita si definisce qui come « classe i cui elementi sono disposti *in un ordine perfetto* » per modo che ogni gruppo contenuto in essa abbia un primo ed un ultimo elemento (Cfr. ENRIQUES, op. cit.).

Anche per un'altra via la prova della proprietà commutativa del prodotto ha ricevuto una sistemazione soddisfacente, e cioè sulla base del principio d'induzione secondo l'indirizzo di GRASSMANN, DEDEKIND, PEANO.

Conviene supporre definita la successione dei numeri naturali 0, 1, 2, 3..., e definire il prodotto di due numeri a, b mediante le condizioni fondamentali

$$a0 = 0$$
$$a(b+1) = ab + a.$$

Da queste condizioni segue

$$a1 = a$$
$$a2 = a + a.$$

Si prova in generale che ab è un numero, induttivamente, perchè la proposizione vale per $b = 0$, e dall'essere ab un numero si deduce che è pure un numero $a(b + 1)$.

Ciò posto, è necessario stabilire ancora la proprietà distributiva, il che si fa nel modo seguente.

Si dimostra che

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Infatti si ha

$$a(b + 0) = ab + a0$$

e da

$$a(b + c) = ab + ac$$

segue

$$a(b + [c + 1]) = a([b + c] + 1) =$$
$$= a(b + c) + a = (ab + ac) + a =$$
$$= ab + a(c + 1)$$

e induttivamente segue l'asserto.

Analogamente si dimostra che

$$(a + b)c = ac + bc.$$

La proprietà commutativa del prodotto

$$ab = ba$$

si può ora dimostrare induttivamente con tre passaggi successivi.

Anzitutto

$$00 = 0, \quad 01 = 0, \quad ...., \quad 0a = 0 = a0.$$

Ora

$$1 \cdot 0 = 0$$

e poichè da $1 \cdot a = a \cdot 1$ segue (1)

$$1(a + 1) = (a + 1)1,$$

(1) Cfr. ENRIQUES, Op. cit.; DEDEKIND, Op. cit., nota VII di O. ZARISKI.

essendo la relazione già dimostrata per $a = 0$, si giunge induttivamente a

$$1a = a1.$$

Infine da

$$ba = ab$$

si deduce

$$(b + 1)a = ba + 1a = ab + a1 = a(b + 1)$$

e, poichè $ba = ab$ è già dimostrato per $b = 1$, segue induttivamente, per qualsiasi b,

$$ba = ab.$$

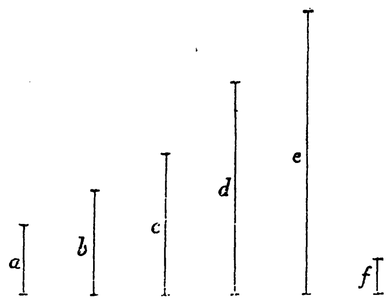
17.

Moltiplicando un numero per altri due numeri, i prodotti così ottenuti stanno fra loro come i due numeri dati.

Il numero a, moltiplicato per i due numeri b e c, dia i numeri d ed e. Dico che b sta a c come d sta ad e.

Infatti, poichè a, moltiplicato per il numero b, dà il numero d, il b è contenuto tante volte nel numero d quante sono le unità del numero a.

Ma anche l'unità f è contenuta tante volte nel numero a quante sono le sue unità. Quindi l'unità f e il numero b



sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nei numeri a e d. Perciò f sta ad a come b sta a d [def. 20].

Per la stessa ragione f sta ad a come c sta ad e. Quindi b sta a d come c sta ad e. E, permutando, [prop. 13], b sta a c come d sta ad e; c. d. d.

Infatti [def. 20]

$$b : c = ab : ac.$$

$$1 : a = b : ab$$

e

$$1 : a = c : ac,$$

da cui

$$b : ab = c : ac$$

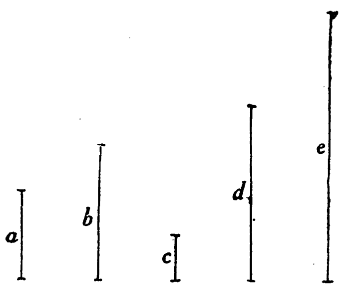
e quindi

$$b : c = ab : ac.$$

18.

Moltiplicando due numeri per uno stesso numero, i prodotti ottenuti stanno fra loro come i due numeri dati.

I numeri a e b, moltiplicati per un numero c, diano come prodotto i numrei d ed e.



Dico che a sta a b, come d sta ad e. Infatti, poichè a, moltiplicato per il numero c, dà il numero d, anche c, moltiplicato per il numero a dà il numero d [prop. 16].

Per la stessa ragione c, moltiplicato per il numero b, dà il numero e.

Dunque il numero c, moltiplicato per i due numeri a e b, dà i numeri d ed e.

Dunque a sta a b come d sta ad e [prop. 17]; c. d. d.

$$a : b = ac : bc.$$

Infatti

$$ac = ca$$
$$bc = cb$$

e

$$a : b = ca : cb$$

da cui si ha

$$a : b = ac : bc.$$

BARROW osserva che da questa proposizione deriva il modo di ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

PEANO raggruppa la proposizione precedente con questa nel modo seguente:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

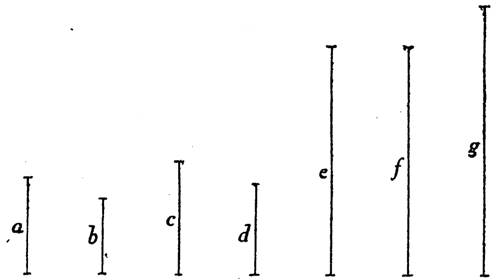
19.

Se quattro numeri sono in proporzione, il prodotto del primo e del quarto è uguale al prodotto del secondo e del terzo; e (viceversa) se (dati quattro numeri) il prodotto del primo e del quarto è uguale al prodotto del secondo e del terzo, i quattro numeri sono in proporzione.

Siano a, b, c, d quattro numeri in proporzione, tali che a stia a b come c sta a d; sia e il prodotto di a per d, ed f il prodotto di b per c. Dico che e è uguale ad f.

Infatti, moltiplicando *a* per *c* si ottenga *g*. Poichè *g* è il prodotto di *a* per *c*, ed *e* è il prodotto di *a* per *d*, il numero *a*, moltiplicato per i numeri *c* e *d*, dà rispettivamente come prodotto i numeri *g* ed *e*.

Pertanto *c* starà a *d* come *g* sta ad *e* [prop. 17]. Ma



c sta a *d* come *a* sta a *b*. Perciò *a* sta a *b* come *g* sta ad *e*.

Inoltre, poichè *a*, moltiplicato per *c*, dà *g*, e *b*, moltiplicato per *c*, dà *f*, i due numeri *a* e *b* moltiplicati per il numero *c*, dànno come prodotto rispettivamente i numeri *g* ed *f*. Pertanto *a* starà a *b* come *g* sta ad *f* [prop. 18].

Ma *a* sta a *b* come *g* sta ad *e*; perciò *g* sta ad *e* come *g* sta ad *f*.

Dunque *g* sta nello stesso rapporto con ambedue i numeri *e* ed *f*. Perciò i numeri *e* ed *f* sono uguali.

Sia ora *e* uguale ad *f*. Dico che *a* sta a *b* come *c* sta a *d*. Infatti, con le stesse considerazioni di prima, essendo *e* uguale ad *f*, il numero *g* avrà lo stesso rapporto tanto con *e* che con *f* [V, 7]; ma *g* sta ad *e* come *c* sta a *d* [prop. 17], e *g* sta ad *f* come *a* sta a *b* [prop. 18]; dunque *a* sta a *b* come *c* sta a *d*; c. d. d.

Se

$$a : b = c : d$$

allora

$$ad = bc$$

e viceversa.

Infatti:

1) Se $\quad a : b = c : d$

anche

$$ac : ad = c : d \qquad \text{[prop. 17]}$$
$$= a : b .$$

Ed

$$a : b = ac : bc \qquad \text{[prop. 18];}$$

perciò

$$ac : ad = ac : bc$$

e quindi

$$ad = bc .$$

2) Se $\quad ad = bc$

si ha

$$ac : ad = ac : bc .$$

Ma

$$ac : ad = c : d \qquad \text{[prop. 17]}$$

e $\quad ac : bc = a : b .$

Quindi

$$a : b = c : d .$$

HEIBERG riferisce l'ultimo passaggio di 1) ed il primo di 2) rispettivamente alle proposizioni 9 e 7 del libro V, osservando che queste proposizioni non sono dimostrate separatamente per i numeri, il che ha luogo invece per le altre.

HEATH invece considera questi passaggi come conseguenze evidenti della definizione di proporzione data nel libro VII.

ZEUTHEN osserva che il riferimento alla prop. 7 del libro V, darebbe a 2) un significato troppo ristretto e dimostrerebbe soltanto che da

$$ad = bc$$

si deduce la proporzione

$$a : b = c : d$$

definita come nel libro V, mentre non sarebbe dimostrato che esistono i numeri m ed n, (determinati nel modo stabilito nella prop. 4), tali che

$$a = \frac{m}{n} b, \quad c = \frac{m}{n} d.$$

Il riferimento al libro V costituirebbe effettivamente un circolo vizioso, poichè l'importanza della prop. 19 consiste proprio nello stabilire che la definizione di proporzione data nel libro V, ha, quando la si applichi a numeri interi, la stessa portata della definizione data nel libro VII.

Bisogna dunque considerare le due conclusioni di questa proposizione come conseguenze immediate della def. 20.

Dopo questa proposizione è lecito qualunque riferimento al libro V, ed è quindi naturale che EUCLIDE non abbia rifatto per i numeri interi tutta la teoria delle proporzioni già svolta nel libro V.

Si è visto nella prop. 4 che la riduzione di una frazione data ai suoi minimi termini è univoca: con questa proposizione risulta dimostrato che riducendo ai minimi termini due frazioni uguali, si ottiene lo stesso risultato.

ANARIZIO attribuisce ad ERONE il rilievo del caso particolare che, se

$$a : b = b : c,$$

si ha

$$ac = b^2.$$

Questa proposizione si trova anche in CAMPANO ed in vari altri commentatori.

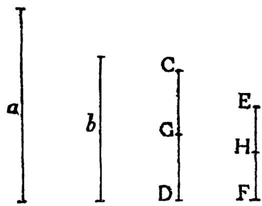
20.

I più piccoli numeri che stanno fra loro nello stesso rapporto di due numeri dati sono equisottomultipli dei numeri dati, e rispettivamente il maggiore divide il maggiore e il minore divide il minore.

Siano infatti CD ed EF i più piccoli tra i numeri aventi lo stesso rapporto di a con b. Dico che CD ed EF sono equisottomultipli rispettivamente dei numeri a e b.

Infatti CD non può essere frazione del numero a. Supponiamo, se fosse possibile, che lo sia. Allora anche EF sarà la stessa frazione del numero b che CD è del numero a [prop. def. 20].

Pertanto in EF saranno contenuti tanti sottomultipli del numero b quanti ne sono contenuti in CD del numero



a. Scomponiamo CD in CG, GD, sottomultipli del numero a; ed EF in EH, HF, sottomultipli del numero b. I numeri CG, GD saranno tanti quanti sono i numeri EH, HF. E poichè GC è uguale a GD, ed EH è uguale ad HF, ed i numeri CG, GD sono tanti quanti sono i numeri EH, HF, il numero CG starà ad EH come GD sta ad HF. Ma un antecedente sta ad un conseguente come la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti. Quindi CG sta ad EH come CD sta ad EF.

Pertanto CG ed EH, più piccoli dei numeri CD ed EF, stanno nel loro stesso rapporto; il che è impossibile; poichè si è supposto che CD ed EF fossero i più piccoli tra tutti i numeri aventi fra loro quel rapporto.

Dunque CD non può essere frazione del numero a. Ne sarà quindi sottomultiplo [prop. 4]. Ed EF è lo stesso sottomultiplo del numero b che CD è del numero a.

Dunque CD ed EF sono equisottomultipli rispettivamente dei numeri a e b; c. d. d.

Se

$$a:b=c:d$$

ed $\frac{a}{b}$ è ridotta ai minimi termini, si ha

$$a=\frac{1}{n}c, \quad b=\frac{1}{n}d,$$

n essendo un numero intero.

Infatti, supponiamo che sia

$$a=\frac{m}{n}c \qquad (1<m<n);$$

sarà anche [prop. 13, def. 20]

$$b=\frac{m}{n}d.$$

Quindi [prop. 12]

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d$$

il che è contrario all'ipotesi.

Dunque deve essere

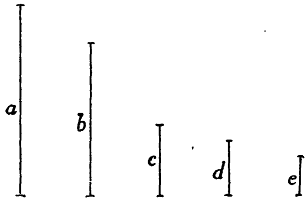
$$a=\frac{1}{n}c, \quad b=\frac{1}{n}d.$$

21.

Fra tutti i numeri che stanno fra loro in eguale rapporto, quelli primi fra loro sono i più piccoli possibili.

Siano a e b due numeri primi fra loro. Dico che i numeri a e b sono i più piccoli fra tutti quelli che stanno in eguale rapporto. Poichè, se ciò non fosse, vi sarebbero altri numeri, minori dei numeri a e b, aventi lo stesso rapporto di a con b.

Siano c e d questi numeri. Ora, poichè i più piccoli tra i numeri aventi lo stesso rapporto di due numeri dati



sono equisottomultipli dei numeri dati, e precisamente il maggiore divide il maggiore ed il minore divide il minore [prop. 20] cioè l'antecedente divide l'antecedente, ed il conseguente divide il conseguente, c e d sono equisottomultipli rispettivamente dei numeri a e b.

Sia ora il numero e composto di tante unità quante volte c è contenuto nel numero a. Allora anche d sarà contenuto nel numero b tante volte quante sono le unità del numero e. E poichè c è contenuto tante volte nel numero a quante sono le unità del numero e, anche e sarà contenuto tante volte nel numero a quante sono le unità nel numero c [prop. 15]. Per la stessa ragione e è anche contenuto tante volte nel numero b quante sono le unità del numero d [prop. 15].

Dunque e divide i numeri a e b che sono primi fra loro; il che è impossibile [def. 12].

Dunque non vi possono essere numeri minori dei numeri a e b aventi lo stesso rapporto di a e b. Dunque

a e b sono i più piccoli tra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto; c. d. d.

Se a e b sono primi fra loro, la frazione $\frac{a}{b}$ è ridotta ai minimi termini.

Infatti, supponiamo che

$$a : b = c : d,$$

essendo $\frac{c}{d}$ la frazione ridotta ai minimi termini. Allora [prop. 20]

$$a = mc, \quad b = md;$$

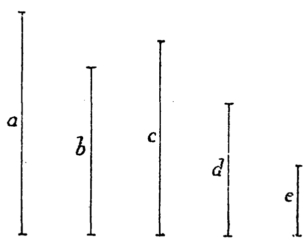
cioè a e b, per ipotesi primi fra loro, avrebbero un divisore comune m, il che è impossibile.

22.

I più piccoli fra tutti i numeri che stanno fra loro nello stesso rapporto, sono primi fra loro.

Siano a e b i più piccoli fra tutti i numeri che stanno in uno stesso rapporto. Dico che i numeri a e b sono primi fra loro.

Infatti, se non fossero primi fra loro, vi sarebbe un



numero che li dividerebbe. Sia c questo numero. E sia d un numero composto di tante unità, quante volte c è contenuto nel numero a, ed e composto di tante unità quante volte c è contenuto nel numero b. Ora, poichè c è contenuto nel numero a tante volte quante sono le unità del numero d, il numero c, moltiplicato pel numero d, darà il numero a [def. 15].

Per la stessa ragione c, moltiplicato per e, dà b. Dunque il numero c, moltiplicato per i due numeri d ed e, dà i numeri a e b. Dunque d sta ad e come a sta a b [proposizione 17].

Pertanto d ed e, più piccoli dei numeri a e b, stanno nel loro stesso rapporto; il che è impossibile. Quindi nessun numero può dividere i numeri a e b. Dunque i numeri a e b sono primi fra loro; c. d. d.

Se la frazione $\frac{a}{b}$ è ridotta ai minimi termini, a e b sono primi fra loro.

Infatti, se non lo fossero, avrebbero un divisore comune c e sarebbe

$$a = mc, \quad b = nc,$$

da cui

$$m : n = a : b.$$

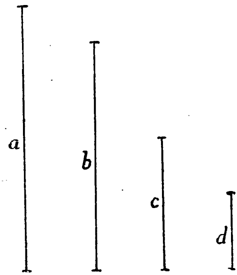
Ma $m < a$, $n < b$, e la frazione $\frac{a}{b}$ non sarebbe ridotta ai minimi termini, contro l'ipotesi.

23.

Se due numeri sono primi fra loro, un numero che divide uno di essi è primo con l'altro.

Siano a e b due numeri primi fra loro ed un altro numero c divida il numero a. Dico che anche c e b sono primi fra loro.

Infatti, se non sono primi fra loro, vi sarà un altro numero che dividerà *c* e *b*. Sia *d*. Poichè *d* divide il nu-



mero *c* e *c* divide il numero *a*, anche *d* divide il numero *a*. Ma divide anche il numero *b*.

Dunque *d* divide i numeri *a* e *b*, che sono primi fra loro, il che è impossibile.

Pertanto nessun altro numero può dividere i numeri *c* e *b*. Dunque *c* e *b* sono primi fra loro; c. d. d.

Se *a* e *b* sono primi fra loro, e *c* divide *a*, *c* è primo con *b*. Infatti se esiste un numero *d* divisore comune di *c* e *b*, esso sarebbe anche divisore comune di *a* e *b*, contro l'ipotesi.

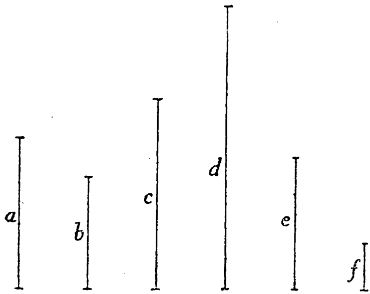
24.

Se due numeri sono primi con un altro numero, anche il loro prodotto è primo con esso.

I due numeri *a* e *b* siano primi col numero *c*, e sia *d* il prodotto di *a* per *b*. Dico che anche *c* e *d* sono primi fra loro.

Infatti, se *c* e *d* non sono primi fra loro, vi sarà un certo numero che dividerà i numeri *c* e *d*. Sia *e* questo numero. Poichè *c* ed *a* sono primi fra loro ed un altro numero *e* divide il numero *c*, i numeri *a* ed *e* sono primi fra loro [prop. 23].

Sia ora *f* composto di tante unità quante volte *e* è contenuto nel numero *d*. Perciò anche *f* sarà contenuto tante



volte nel numero *d* quante sono le unità del numero *e* [prop. 15].

Dunque *e*, moltiplcato per *f*, dà *d* [def. 15]. Ma anche *a*, moltiplicato per *b*, dà *d*; pertanto il prodotto di *e* per *f* è uguale al prodotto di *a* per *b*.

Ma quanto [dati quattro numeri], il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi, i quattro numeri sono in proporzione [prop. 19]. Dunque *e* sta ad *a* come *b* sta ad *f*.

Ma *a* ed *e* sono primi fra loro ed i numeri primi sono i più piccoli [prop. 21] [tra tutti quelli che stanno nello stesso rapporto], ed i più piccoli possibili, tra i numeri che stanno nello stesso rapporto, sono equisottomultipli dei numeri che stanno in quel rapporto, e precisamente il maggiore divide il maggiore e il minore divide il minore [prop. 20], cioè l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente.

Dunque e divide il numero c. Il numero e divide quindi entrambi i numeri b e c che sono primi fra loro, il che è impossibile. Perciò nessun numero può dividere i numeri c e d. Dunque c e d sono primi fra loro; c. d. d.

Se a e b sono primi con c, anche ab è primo con c.

Supponiamo infatti che d sia un divisore comune di ab e c, cioè che

$$ab = md, \quad c = nd.$$

Ne segue che [prop. 19]

$$d : a = b : m;$$

per la proposizione precedente d ed a sono primi fra loro, perciò sarà [prop. 20]

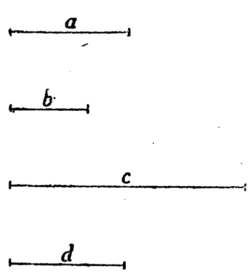
$$b = pd.$$

Dunque d è divisore comune di b e c, contro l'ipotesi.

25.

Se due numeri sono primi fra loro, il quadrato di uno di essi è primo col rimanente.

Siano a e b due numeri primi fra loro e sia c il quadrato di a. Dico che i numeri b e c sono primi fra loro.



Si prenda infatti d uguale ad a. Poichè a e b sono primi fra loro, ed a è uguale a d, anche d e b sono primi fra loro. Dunque ciascuno dei due numeri d ed a è primo con b. Perciò anche il prodotto di d per a sarà primo con b [prop. 24]. Ma il prodotto di d per a è c.

Dunque c e b sono primi fra loro. c. d. d.

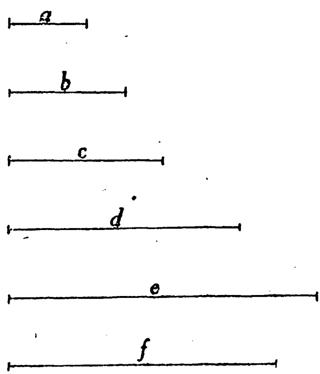
Se a e b sono primi fra loro, anche a^2 e b sono primi fra loro.

Conseguenza immediata della proposizione precedente.

26.

Dati due numeri, ciascuno dei quali sia primo con altri due numeri, anche i rispettivi prodotti sono primi fra loro.

I numeri a e b siano infatti rispettivamente primi con i numeri c e d; sia e il prodotto di a per b, e sia f il prodotto di c con d.



Dico che anche e ed f sono primi fra loro. Infatti, poichè entrambi i numeri a e b sono primi con c, anche il prodotto di a per b sarà primo con c [prop. 24]. Ma il prodotto di a per b è e. Quindi e e c sono primi fra loro.

Per la stessa ragione anche e e d sono primi fra loro. Dunque ambedue i numeri c e d sono primi con e. Quindi anche il prodotto di c per d sarà primo con e. Ma il prodotto di c per d è f. Dunque e ed f sono primi fra loro;

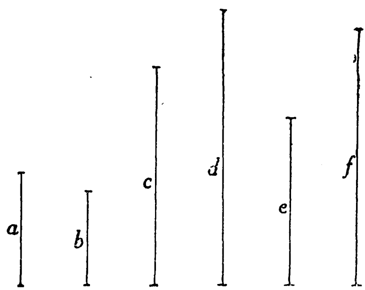
c. d. d.

Se a e b sono primi con c e d, ab e cd sono primi fra loro. Infatti ab è primo con c e con d [prop. 24] e quindi cd è primo con ab (id.).

27.

Se due numeri sono primi fra loro anche i loro quadrati ed i loro cubi [e così di seguito] sono primi fra loro.

Siano a e b due numeri primi fra loro. Moltiplicando a per sè stesso si abbia c, e moltiplicando a per c si ottenga d; moltiplicando b per sè stesso si ottenga e, e



moltiplicando b per e si ottenga f. Dico che anche c ed e, e d ed f, sono primi fra loro.

Infatti, poichè a e b sono primi fra loro ed a, moltiplicato per sè stesso, ha dato c, saranno primi fra loro anche c e b [prop. 25]. E poichè c e b sono primi tra loro, e b, moltiplicato per sè stesso, ha dato e, anche c ed e saranno primi fra loro [id.]. E ancora, poichè a e b sono primi fra loro e b, moltiplicato per sè stesso, ha dato e, anche a ed e saranno primi fra loro [id.]. E poichè ciascuno dei due numeri a e c è primo con ciascuno dei due numeri b ed e, anche il prodotto di a per c è primo con il prodotto di b per e [prop. 26]. Ma il prodotto di a per c è d, ed il prodotto di b per e è f. Dunque d ed f sono primi fra loro; c. d. d.

Se a e b sono primi fra loro, lo sono anche a^2 e b^2, a^3 e b^3, e, in generale a^n e b^n.

Infatti, poichè a è primo con b, anche a^2 è primo con b [prop. 25] e quindi a^2 è primo con b^2.

Inoltre a è primo con b^2 [prop. 25]; quindi, applicando ad a, a^2, b, b^2 la proposizione precedente, risulta che a^3 è primo con b^3.

HEIBERG ritiene che le parole dell' enunciato indicanti una continuazione illimitata siano dovute ad una interpolazione di TEONE; tanto più che la dimostrazione di EUCLIDE si limita al caso dei quadrati e dei cubi.

ZEUTHEN invece osserva che l' estensione è abbastanza evidente per essere stata omessa da EUCLIDE, che si limita sempre a considerare numeri semplici quando il ragionamento si conserva inalterato per un numero qualunque. Infatti nelle applicazioni (p. es. in VIII, 2) il teorema viene usato in forma generale.

La prop. 19 e questa servono per la dimostrazione della irrazionalità delle radici.

Si dimostra infatti che $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$, ove p e q sono primi fra loro, è irrazionale, se p e q non sono potenze n^{me} di numeri interi; ciò coi due teoremi seguenti:

1) Due frazioni uguali e ridotte ai minimi termini hanno uguale numeratore e uguale denominatore.

2) Se p e q sono due numeri primi fra loro, anche p^n e q^n sono primi fra loro.

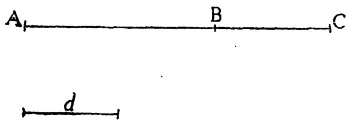
Questi due teoremi si dimostrano adesso per mezzo della univocità della decomposizione di un numero dato in fattori primi.

Le proposizioni VII, 19 e 27 contengono rispettivamente i teoremi 1) e 2), dimostrati però senza servirsi della decomposizione di un numero in fattori primi, che viene stabilita in VII, 30.

28.

Se due numeri sono primi fra loro, anche la loro somma è prima con ciascuno di essi. E, viceversa, se la somma di due numeri è prima con ciascuno di essi, anche i due numeri dati sono primi fra loro.

Si sommino infatti due numeri AB e BC, primi fra loro. Dico che anche AC è primo con ciascuno dei nu-



meri AB, BC. Infatti, se CA ed AB non fossero primi fra loro, esisterebbe un numero divisore comune dei numeri CA ed AB. Sia d questo numero.

Poichè d divide i numeri CA ed AB, dividerà anche la loro differenza BC. Ma divide anche BA. Dunque d divide i numeri AB e BC che sono primi fra loro, il che è impossibile. Pertanto nessun numero può essere divisore comune dei numeri CA ed AB. Dunque CA ed AB sono primi fra loro. Per la stessa ragione anche AC

e CB sono primi fra loro. Dunque CA è primo con ambedue i numeri AB e BC.

Viceversa, siano CA ed AB primi fra loro; dico che anche AB e BC sono primi fra loro.

Infatti, se AB e BC non fossero primi fra loro, avrebbero un altro numero per divisore comune. Sia d questo numero. Poichè d divide i numeri AB e BC, dividerà anche la loro somma CA. Ma divide anche AB. Dunque divide i numeri CA ed AB, che sono primi fra loro, il che è impossibile. Pertanto nessun numero può essere divisore comune dei numeri AB e BC. Dunque AB e BC sono primi fra loro; c. d. d.

Se a e b sono primi fra loro, $a + b$ è primo con a e b.

Infatti se $a + b$ ed a non fossero primi fra loro, avrebbero un divisore comune d.

Esso dividerà anche

$$(a + b) - a, \text{ cioè } b.$$

Quindi a e b avrebbero un divisore comune, contro l'ipotesi.

Similmente si dimostra che $a + b$ è primo con b.

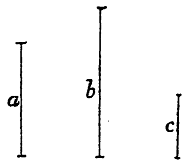
29.

Qualunque numero primo, è primo con qualunque altro numero che non sia da esso diviso.

Sia a un numero primo e non sia divisore del numero b. Dico che i numeri b ed a sono primi fra loro.

Infatti, se i numeri b ed a non fossero primi fra loro, avrebbero qualche numero per divisore comune.

Sia c questo divisore comune. Poichè c divide il numero b, ed a non divide b, i numeri c ed a non sono uguali fra loro. Ma, poichè c divide i numeri b ed a,



divide anche il numero a, che è primo, pur non essendo uguale ad esso; il che è impossibile.

Pertanto nessun numero può essere divisore comune dei numeri b ed a. Dunque a e b sono primi fra loro;

c. d. d.

Un numero primo è primo con tutti i numeri che esso non divide.

30.

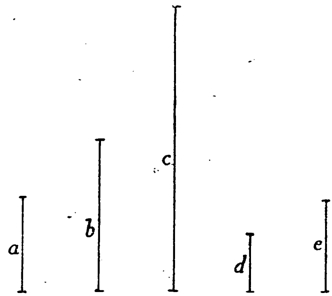
Se un numero primo divide il prodotto di due numeri, esso divide l'uno o l'altro di questi.

I due numeri a e b, moltiplicati fra loro, diano come prodotto il numero c. Ed un certo numero primo d divida il numero c. Dico che d divide l'uno o l'altro dei numeri a, b.

Supponiamo infatti che non divida il numero a. Il numero d è primo; dunque a e d sono primi fra loro [prop. 29]. Sia ora e composto di tante unità quante volte d è contenuto del numero c. Poichè d è contenuto tante volte nel numero c quante sono le unità del numero e, il numero c sarà il prodotto di d per e [def. 15].

Ma c è anche il prodotto di a per b. Dunque il prodotto di d per e è uguale al prodotto di a per b. Per cui [prop. 19] d sta ad a come b sta ad e.

Ma d ed a sono primi fra loro, ed i numeri primi sono anche i più piccoli [prop. 21] [tra tutti quelli che



stanno nello stesso rapporto] ed i più piccoli [tra tutti quelli che stanno nello stesso rapporto] sono equisottomultipli dei numeri che stanno in quel rapporto e precisamente il maggiore divide il maggiore ed il minore divide il minore [prop. 20], cioè l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente. Dunque d divide il numero b. Similmente si dimostrerebbe che il numero d, se non dividesse il numero b, dividerebbe il numero a. Dunque d divide l'uno o l'altro dei numeri a, b.

c. d. d.

Se c è primo e divide ab, divide a o b.

Infatti supponiamo che c non divida a. Allora c ed a sono primi fra loro (prop. 29).

Sia

$$ab = mc;$$

ne segue che

$$c : a = b : m \qquad \text{[prop. 19).}$$

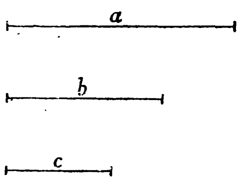
Quindi [propp. 20, 21] c divide b.
Similmente si dimostra che se c non divide b, deve dividere a.

31.

Qualunque numero composto ammette come divisore qualche numero primo.

Sia a un numero composto. Dico che a ha per divisore un numero primo.

Infatti, se a è un numero composto, avrà per divisore un altro numero; sia b questo numero. Se b fosse primo,



si sarebbe ottenuto quanto si cercava. Se è un numero composto, avrà per divisore un altro numero: sia questo c. E poichè c è divisore del numero b, e b è divisore del numero a, anche c è divisore del numero a. E se c è primo, si sarebbe ottenuto quanto si cercava. Se c è composto, avrà per divisore un altro numero.

Procedendo dunque con questo ragionamento, si troverà un numero primo che lo dividerà. Chè, se non si trovasse, infiniti numeri dividerebbero il numero a, ciascuno successivamente minore del precedente; il che non può accadere nei numeri. Pertanto si troverà un certo numero primo che, essendo divisore di quello che lo precede, sarà anche divisore del numero a. Dunque qualunque numero composto ha per divisore un numero primo; c. d. d.

Ogni numero composto ha per divisore qualche numero primo.

Se a è composto, avrà un divisore b; se b è composto, avrà un divisore c che è anche divisore di a. Se c è composto avrà un divisore d, e così di seguito, finchè si arriverà necessariamente ad un numero primo, poichè altrimenti si troverebbero infiniti divisori di a, successivamente l'uno minore dell'altro, il che è impossibile. Cfr. la nota alla def. 22.

Si può dare alla dimostrazione anche questa forma:

Se a è composto, avrà qualche divisore. Sia b il minore di questi. Dico che b è primo.

Infatti, se b fosse composto, avrebbe qualche divisore, p. es. c; cosicchè $c < b$ sarebbe anche divisore di a, contro l'ipotesi. Dunque b è primo.

La prop. 31 porta alla decomposizione di un numero qualsiasi in fattori primi: questa decomposizione è contenuta in un trattato inglese di WALLIS (pubblicato nel 1685, riprodotto in latino nel 1693, vol. II delle sue opere, pp. 483-529: *De combinationibus, alternationibus, et partibus aliquotis tractatus*), in cui è data la formula per trovare il numero dei divisori di un numero dato, e la somma di questi divisori.

L'unicità della decomposizione di un numero in fattori primi risulta, in sostanza, dalla prop. 30. La dimostrazione si può svolgere seguendo DIRICHLET: *Lezioni sulla teoria dei numeri.* (Trad. it. Venezia, 1881).

Sia m composto; sarà

$$m = p\,m' \quad (p \text{ primo})$$
$$m' = p'm'' \quad (p' \text{ primo})$$

cioè

$$m = pp'm'' \text{ ecc.}$$

Supponiamo che, seguendo due processi differenti, si sia trovato

$$m = pp'p'' \ldots$$
$$m = qq'q'' \ldots$$

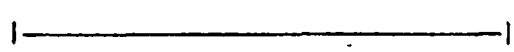
essendo p, $p' \ldots$, $q, q' \ldots$ numeri primi. Poichè il prodotto $pp'p'' \ldots$ deve essere divisibile per $qq' \ldots$ dovrà essere p. es. $p = q$ e similmente $p' = q'$ ecc.

L'applicazione della decomposizione dei numeri in fattori primi alla ricerca del massimo comun divisore, per quanto ci è noto, compare la prima volta in: IEAN PRESTET, *Nouveaux Elements des Mathematiques*. Vol. I, Livre VI, p. 159, 2ª ed., Paris, 1701.

32.

Qualunque numero, o è primo, od ha qualche divisore primo.

Sia abbia il numero a. Dico che il numero a o è primo od ha per divisore un numero primo.



a

Infatti, se a è primo, si è ottenuto quanto si cercava; se è composto, avrà per divisore un numero primo [prop. 31].

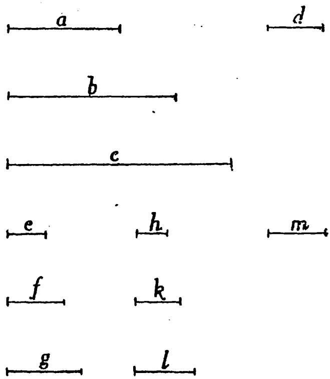
Dunque qualunque numero o è primo od ha per divisore un numero primo; c. d. d.

33.

Dati quanti si vogliano numeri, cercare i più piccoli tra quelli che stanno nello stesso rapporto.

Siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c. Bisogna dunque trovare i più piccoli tra quei numeri che stanno nello stesso rapporto di a, b, c. Ora a, b, c sono primi fra loro, o non lo sono.

Se a, b, c sono primi fra loro, essi sono i più piccoli tra tutti quelli che stanno nello stesso rapporto [prop. 31].



Nel caso contrario, sia d il massimo comun divisore dei numeri a, b, c ed i numeri e, f, g siano composti di tante unità quante volte d è contenuto rispettivamente nei numeri a, b, c. Perciò anche e, f, g saranno contenuti rispettivamente in a, b, c tante volte quante sono le unità del numero d [prop. 15].

Dunque e, f, g sono equisottomultipli rispettivamente dei numeri a, b, c. Pertanto e, f, g ed a, b, c stanno in proporzione [def. 20].

Dico che e, f, g sono i più piccoli [tra tutti i numeri che stanno nello stesso rapporto di a, b, c]. Se infatti non fossero i più piccoli tra i numeri aventi lo stesso rapporto di a, b, c, vi sarebbero dei numeri più piccoli dei numeri e,

f, g, aventi lo stesso rapporto di a, b, c. Siano h, k, l questi numeri.

Dunque h, k, l sono contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nei numeri a, b, c. Sia ora m composto di tante unità quante volte h è contenuto nel numero a.

Per cui anche k ed l sono contenuti rispettivamente in b e c tante volte quante sono le unità di m.

E poichè h è contenuto in a tante volte quante sono le unità di m, anche m è contenuto in a tante volte, quante sono le unità di h [prop. 15]. Per la stessa ragione m è sottomultiplo dei numeri b e c rispettivamente secondo i numeri k ed l.

Dunque m divide i numeri a, b, c. E poichè h è sottomultiplo del numero a secondo il numero m, il prodotto di h per m sarà a [def. 15].

Per la stessa ragione anche il prodotto di e per d sarà a. Pertanto il prodotto di e per d sarà eguale al prodotto di h per m. Per cui [prop. 19] e sta ad h come m sta a d.

Ma e è maggiore di h; per cui anche m è maggiore di d [prop. 13, V, 14]. Ed m divide i numeri a, b, c; il che è impossibile, poichè si è supposto che d sia il massimo comun divisore dei numeri a, b, c.

Dunque non vi saranno numeri più piccoli dei numeri e, f, g ed aventi lo stesso rapporto di a, b, c. Dunque e, f, g sono i più piccoli tra i numeri che stanno nello stesso rapporto di a, b, c; c. d. d.

Dati i numeri a, b, c, ... trovare degli altri m, n, p ... che siano i più piccoli possibili per cui

$$a : b : c = m : n : p.$$

Sia g il M. C. D. di a, b, c e si abbia

$$a = mg$$
$$b = ng$$
$$c = pg;$$

ne segue [def. 20] che

$$m : n : p = a : b : c;$$

m, n, p sono i numeri richiesti.

Supponiamo che non lo siano e che x, y, z siano tre numeri tali che

$$a : b : c = x : y : z$$

essendo

$$x < m, \quad y < n, \quad z < p.$$

Si avrà [prop. 20]

$$(1) \qquad \begin{cases} a = kx \\ b = ky \\ c = kz \end{cases}$$

(k essendo un numero intero).

Quindi

$$mg = kx$$

e perciò [prop. 19].

(2) $m : x = k : g$; e poichè $m > x$ anche $k > q$ e g non sarebbe il *M. C. D.* di a, b, c, contro l'ipotesi.

È da notare che l'applicazione della prop. 20 per ottenere le (1) richiede non solo che $x < m$, $y < n$, $z < p$, come è supposto nel testo, ma che x, y, z siano i più piccoli numeri per cui

$$x : y : z = a : b : c.$$

Per dedurre dalla (2) che $k > g$, essendo $m > x$, HEIBERG si riferisce alla prop. 13 del libro VII e 14 del libro V; ma HEATH osserva che, indipendentemente dal libro V, questa conclusione può ottenersi senz'altro applicando la definizione 20 alla proporzione

$$x : m = g : k,$$

per cui, se

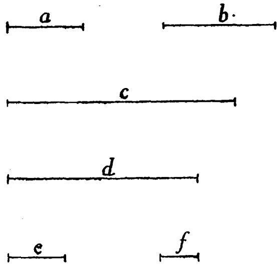
$$x = \frac{r}{s} m \quad \text{anche} \quad g = \frac{r}{s} k$$

$\left(\frac{r}{s}\right.$ essendo una frazione propria$\left.\right)$.

34.

Dati due numeri, trovare il loro minimo comune multiplo.

Si abbiano due numeri a, b. Bisogna dunque trovare il loro minimo comune multiplo. O i numeri a e b sono

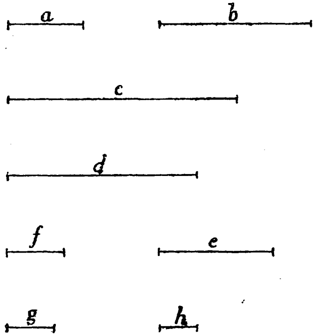


primi fra loro, o non lo sono. Supponiamo che siano primi fra loro e sia c il prodotto di a per b. Perciò c sarà anche il prodotto di b per a [prop. 16]. Dunque a e b dividono il numero c. Dico che questo è il più piccolo numero che essi dividono. Poichè altrimenti a e b dividerebbero un altro numero, minore di c. Sia d il numero che essi dividono. Sia ora e composto di tante unità quante volte a è contenuto nel numero d, e poi f composto di tante unità quante volte b è contenuto nel numero d.

Dunque d sarà tanto il prodotto di a per e, quanto il prodotto di b per f [def. 15]. Dunque il prodotto di a

per e è uguale al prodotto di b per f. Perciò a starà a b come f sta ad e [prop. 19].

Ma a e b sono primi fra loro, ed i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli [prop. 31] [tra tutti quelli



che stanno nello stesso rapporto], ed inoltre sono equisottomultipli di quelli che stanno nello stesso rapporto, cioè il maggiore divide il maggiore e il minore divide il minore [prop 20]. Dunque b divide il numero e, poichè il conseguente divide il conseguente. E poichè a, moltiplicato per i numeri b ed e, dà i numeri c e d, il numero b starà ad e come c sta a d [prop. 17].

Ma b divide il numero e. Perciò anche c deve dividere il numero d [def. 20], ossia il maggiore divide il minore, il che è impossibile. Dunque a e b non dividono nessun numero minore del numero c. Dunque c è il minimo comune multiplo di a e b.

Supponiamo ora che a e b siano primi fra loro, e siano f ed e i più piccoli tra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto di a e b [prop. 33]. Allora il prodotto di a per e

sarà uguale al prodotto di b per f [prop. 19]. Sia c il prodotto di a per e; esso sarà anche il prodotto di b per f. Perciò a e b dividono il numero c. Dico che questo è il più piccolo numero che essi dividono. Poichè altrimenti a e b dividerebbero un altro numero minore del numero c. Sia d il numero che essi dividono. E sia g composto di tante unità quante volte a è contenuto nel numero d, ed h composto di tante unità quante volte b è contenuto nel numero d. Dunque d sarà il prodotto di a per g, e sarà anche il prodotto di b per h [def. 15]. Perciò il prodotto di a per g sarà uguale al prodotto di b per h. Quindi a sta a b come h sta a g [prop. 19]. Ma a sta a b come f sta ad e. Dunque f sta ad e come h sta a g.

Ma f ed e sono i più piccoli [tra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto] e sono equisottomultipli dei numeri che stanno nello stesso rapporto, e precisamente il maggiore divide il maggiore e il minore divide il minore [prop. 20]. Pertanto e divide il numero g, e poichè a, moltiplicato per i numeri e e g, dà come prodotti i numeri c e d, il numero e starà a g come c sta a d [prop. 17].

Ma e divide il numero g. Perciò anche c divide il numero d [def. 20], cioè il maggiore divide il minore, il che è impossibile. Pertanto a e b non dividono nessun numero minore del numero c. Dunque c è il minimo comune multiplo di a e b; c. d. d.

Ricerca del m. c. m. di due numeri a, b.

Distinguiamo due casi:

1) Se a, b sono primi fra loro, il loro m. c. m. è ab.

Supponiamo infatti che il loro m. c. m. sia un numero $d < ab$.

Sarà
$$d = ma = nb \quad (m, n \text{ numeri interi});$$
ne segue
$$a : b = n : m \qquad \text{[prop. 19]},$$

ed essendo a, b primi fra loro (propp. 20, 21] b deve dividere m.

E
$$b : m = ab : am \qquad \text{[prop. 17]}.$$
$$= ab : d.$$

Quindi ab deve dividere d, il che è impossibile.

2) Se a, b non sono primi fra loro, siano m, n i più piccoli numeri tali che
$$a : b = m : n; \qquad \text{[prop. 33]};$$
ne segue
$$an = bm = c; \qquad \text{[prop. 19]};$$
c è il m. c. m. di a e b.

Supponiamo infatti che il loro m. c. m. sia un numero $d < c$.

Sarà
$$d = ap = bq \quad (pq \text{ numeri interi});$$
ne segue
$$a : b = q : p \qquad \text{[prop. 19]};$$
ed
$$m : n = q : p.$$

Quindi [propp. 20, 21] n deve dividere p.

Ed
$$n : p = an : ap = c : d;$$

quindi c deve dividere d, il che è impossibile.

Per la prop. 33 si ha
$$m = \frac{a}{g}$$
$$n = \frac{b}{g}$$

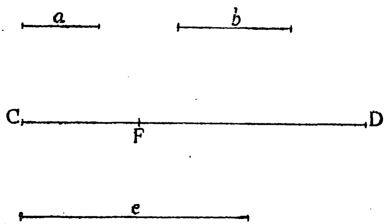
essendo g il M. C. D. di a e b.

Quindi il m. c. m. di a e b è
$$\frac{ab}{g}.$$

35.

Se due numeri ne dividono un altro, anche il loro minimo comune multiplo divide questo numero.

Infatti i due numeri a e b dividano un altro numero CD, ed il loro minimo comune multiplo sia e. Dico che anche il numero e divide il numero CD. Infatti, se e non



divide il numero CD, dividerà invece un certo numero DF e rimarrà un numero CF minore di e.

E poichè a e b dividono il numero e, ed e divide il numero DF, anche a e b divideranno il numero DF.

Ma essi dividono anche l'intero numero CD. Perciò divideranno anche la differenza CF, che è minore del numero e, il che è impossibile. Dunque non è possibile che e non divida il numero CD. Dunque lo divide; c. d. d.

Il m. c. m. di due numeri divide ogni altro loro multiplo comune.

Sia infatti c un multiplo comune di a e b e sia m il loro m. c. m.

Supponiamo che m non sia divisore di c; si avrà allora

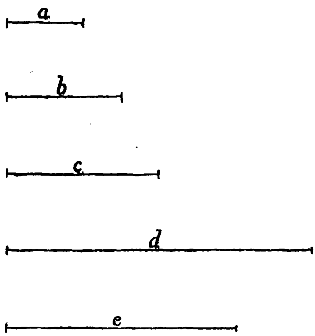
$$c = pm + r \qquad (r < m).$$

Cioè m è divisore di $c - r$; quindi a e b sono divisori di $c - r$; devono dunque dividere anche r, il che è impossibile, essendo $r < m$.

36.

Dati tre numeri, trovare il loro minimo comune multiplo.

Siano a, b, c i tre numeri dati. Bisogna dunque trovarne il minimo comune multiplo. Supponiamo che sia d il



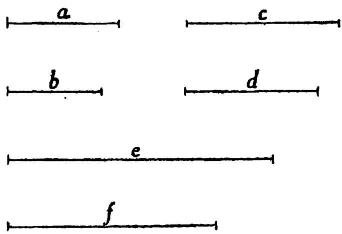
minimo comune multiplo dei due numeri a e b [prop. 34].

Ora, o c divide il numero d, o non lo divide. Supponiamo dapprima che lo divida. Ma anche a e b dividono il numero d. Dunque a, b, c dividono il numero d.

Dico che esso è il loro minimo comune multiplo. Se così non fosse, a, b, c dividerebbero un numero minore del numero d. Sia e questo numero. Poichè a, b, c dividono il numero e, anche a e b dividono il numero e.

Perciò anche il minimo comune multiplo di a e b dividerà il numero e [prop. 35]. Ma il minimo comune multiplo di a e b è d.

Dunque d divide il numero e, cioè un numero più grande ne divide uno più piccolo, il che è impossibile. Pertanto a, b, c non dividono nessun numero minore del



numero d. Dunque a, b, c hanno per minimo comune multiplo il numero d.

Supponiamo ora che c non divida il numero d e sia e il minimo comune multiplo di c e d [prop. 34]. Poichè a e b dividono il numero d, e d divide il numero e, anche a e b dividono il numero e. Pertanto a, b, c dividono il numero e. Dico che esso è il loro minimo comune multiplo. Infatti, se così non fosse, a, b, c dividerebbero un numero minore di e.

Sia f questo numero. Poichè a, b, c dividono il numero f, anche a e b dividono il numero f. Perciò anche il minimo comune multiplo di a e b dividerà il numero f [prop. 35]. Ma il minimo comune multiplo di a e b è d; dunque d divide f. Ma anche c divide il numero f. Pertanto d e c dividono il numero f. Perciò anche il minimo comune multiplo di c e d dividerà il numero f [id.]. Ma il minimo comune multiplo di c e d è e. Dunque e divide il numero f, cioè un numero più grande ne divide uno più piccolo, il che è impossibile.

Dunque i numeri a, b, c non dividono nessun numero minore del numero e. Dunque e è il minimo comune multiplo di a, b, c. c. d. d.

Ricerca del m. c. m. di tre numeri.

Siano a, b, c, i tre numeri dati e sia d il m. c. m. di a, b.

Distinguiamo due casi:

1) c divide d: allora d è il m. c. m. di a, b, c.

Supponiamo infatti che il loro m. c. m. sia un altro numero $e < d$.

Poichè a, b dividono e, anche il loro m. c. m. d deve dividere e, il che è impossibile, essendo $d > e$.

2) c non divide d: sia allora e il m. c. m. di c, d; esso è il m. c. m. di a, b, c.

Supponiamo infatti che il loro m. c. m. sia un altro numero $f < e$.

Poichè a, b dividono f, anche d divide f, e, per ipotesi, anche c divide f; dunque e deve dividere f, il che è impossibile essendo $e > f$.

37.

Se un numero ne divide un altro, questo è diviso anche dal numero che ha tante unità, quante volte il primo numero è contenuto nel secondo.

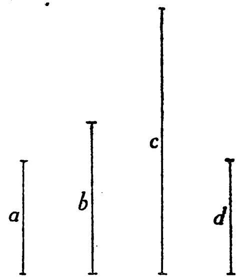
Il numero b divida il numero a.

Dico che a ha come divisore il numero che ha tante unità, quante volte b è contenuto in a. Sia c questo numero.

Poichè b è contenuto c volte in a ed anche l'unità d è contenuta c volte in c, l'unità d e il numero b sono equisottomultipli rispettivamente del numero c e del numero a.

Perciò l'unità d e il numero c saranno anche equisottomultipli rispettivamente del numero b e del numero a

[prop. 15]. Quindi il rapporto tra il numero b e l'unità d è uguale al rapporto tra i numeri a e c. Ma l'unità d è



contenuta b volte in b. Dunque c è quel sottomultiplo di a che che si ottiene dividendo a per b.

Quindi; c. d. d.

Se

$$a = b \cdot c, \quad c = \frac{a}{b}.$$

Infatti, poichè

$$a = b \cdot c \quad \text{e} \quad c = c \cdot 1,$$

si ha

$$1 : c = b : a. \qquad \text{(prop. 15).}$$

Perciò 1 e c sono equisottomultipli rispettivamente di b ed a. E

$$1 = \frac{b}{b},$$

dunque

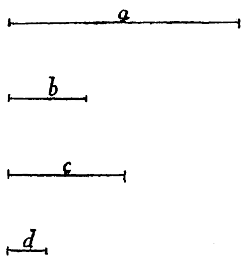
$$c = \frac{a}{b}.$$

38.

Se un primo numero è diviso da un secondo, è diviso anche dal numero che indica quante volte il secondo è contenuto nel primo.

Il numero a abbia un certo divisore b e b sia contenuto c volte in a. Dico che c divide a.

Infatti, poichè b è contenuto c volte in a, ed anche



l'unità d è contenuta c volte in c, il numero b è lo stesso sottomultiplo del numero a che l'unità d è del numero c.

Perciò l'unità d e il numero b sono equisottomultipli rispettivamente del numero c e del numero a. Perciò la unità d e il numero c sono equisottomultipli rispettivamente del numero b e del numero a [prop. 15].

Dunque c divide il numero a; c. d. d.

Se

$$c = \frac{a}{b}, \quad a = c \cdot b.$$

Infatti poichè

$$c = \frac{a}{b} \quad \text{ed} \quad 1 = \frac{c}{c}$$

si ha [prop. 15]

$$c : 1 = a : b.$$

Perciò c ed 1 sono equisottomultipli rispettivamente di a e b. E

$$b = 1 \cdot b.$$

Dunque

$$a = b \cdot c.$$

La precedente e questa riproducono sostanzialmente la dimostrazione della proprietà commutativa del prodotto; cioè, se

$$a = b \cdot c$$

si ha anche

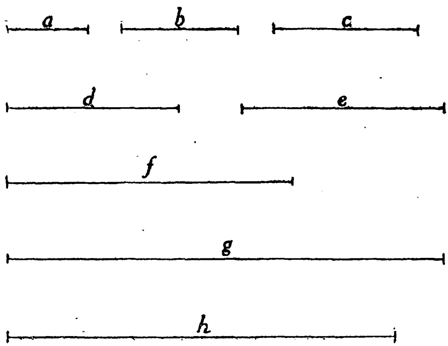
$$a = c \cdot b.$$

39.

Trovare il più piccolo numero avente divisori dati.

Siano a, b, c i divisori dati. Bisogna dunque trovare il più piccolo numero avente per divisori a, b, c.

I numeri d, e, f siano contenuti rispettivamente nell'unità tante volte, quante unità sono in a, b, c; e sia g il minimo comune multiplo di d, e, f. Allora g ha per divisori anche i numeri che indicano quante volte d, e, f



sono contenuti in g [prop. 37]: ma questi numeri sono rispettivamente a, b, c; dunque g è multiplo di a, b, c.

Dico che è il minimo. Infatti, se non lo fosse, vi sarebbe un altro numero, minore di g, avente per divisori a, b, c. Sia h questo numero. Poichè h ha per divisori a, b, c esso avrà per divisori anche i numeri [prop. 38] che indicano quante volte a, b, c sono contenuti in h [prop. 38]. Ma questi numeri sono rispettivamente d, e, f.

Dunque i numeri d, e, f dividono il numero h. Ed h è minore di g, il che è impossibile. Dunque non vi sarà un numero minore di g avente per divisori a, b, c. c. d. d.

È una ripetizione della ricerca del m. c. m.

LIBRO OTTAVO

PER CURA DI

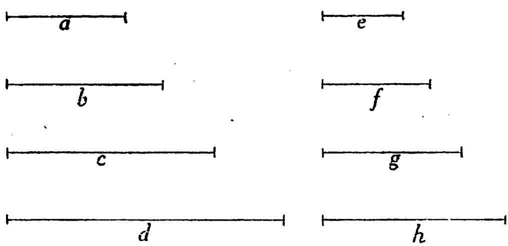
GUIDO RIETTI

Proposizioni.

1.

Se quanti si vogliano numeri sono in proporzione continua, ed i termini estremi sono primi fra loro, la proporzione è formata con i minimi termini possibili (cioè non si può trovare un'altra serie di numeri proporzionale a questi e minori di questi).

Si abbiano quanti si vogliano numeri a, b, c, d che siano in proporzione continua, ed a e d siano primi fra



loro. Dico che a, b, c, d sono i più piccoli possibili tra i numeri che hanno fra loro quel rapporto. Infatti, nel caso contrario, siano e, f, g, h minori di a, b, c, d e stiano nel medesimo rapporto.

Poichè a, b, c, d ed e, f, g, h sono in proporzione continua, *ex aequo*, a starà a d come e ad h [VII, 14].

Ma a e d sono primi fra loro e quindi i più piccoli possibili fra tutti i numeri che stanno nello stesso rapporto [VII, 21], e ne sono equisottomultipli, cioè il maggiore divide il maggiore ed il minore divide il minore, [VII, 20], ossia l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente.

Dunque a, che è maggiore, divide e, che è minore, il che è impossibile.

Dunque e, f, g, h non possono stare nello stesso rapporto di a, b, c, d, dei quali sono minori.

Dunque a, b, c, d ecc.; c. d. d.

Se $a:b = b:c = c:d = \ldots = g:l$ ed a, l sono primi fra loro, se esistono degli altri numeri

$$a', \; b', \; \ldots,$$

tali che

$$a':b' = b':c' = \ldots$$

ed

$$a:a' = b:b' = \ldots$$

si ha

(I) $$a < a', \quad b < b', \quad c < c', \quad \ldots$$

Infatti sarà

$$a:l = a':l', \qquad \text{(VII, 14)}$$

ed essendo a, l primi fra loro, sarà

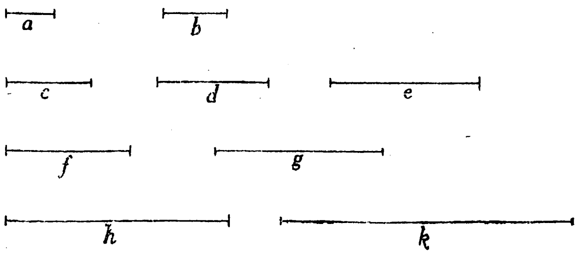
$$ma = a'$$
$$ml = l'$$

da cui segue (I).

2.

Trovare quanti si vogliano numeri in proporzione continua secondo un dato rapporto, i quali siano i più piccoli possibili.

Sia dato il rapporto di a, b ridotto ai minimi termini. Bisogna trovare quanti si vogliano numeri in proporzione continua secondo il rapporto dato e che siano i più piccoli possibili. Sia stabilito di trovarne quattro, e sia c il prodotto di a per sè stesso, d il prodotto di a per b, e il



prodotto di b per sè stesso, f il prodotto di a per c, g il prodotto di a per e, k il prodotto di b per e. Poichè a, moltiplicato per sè stesso, dà c, e moltiplicato per b dà d, il rapporto di a a b sarà uguale al rapporto di c a d [VII, 17]; e siccome a, moltiplicato per b, dà d, anche b, moltiplicato per a, dà d; ma b, moltiplicato per sè stesso, dà e, perciò il rapporto di a a b sarà uguale al rapporto di d a e [VII, 18]. Ma a sta a b come c sta a d, perciò c sta a d come d sta a e; e poichè a, moltiplicato per c, dà f, e moltiplicato per d dà g, il rapporto di c a d sarà uguale al rapporto di f a g [VII, 17]. Ma c sta a d come a sta a b, perciò a sta a b come f sta a g. Inoltre, poichè a, moltiplicato per d, dà g, e moltiplicato per e dà h, il rapporto di d ad e sarà uguale al rapporto di g ad h [VII, 17]. E siccome d sta ad e come a sta a b, il rapporto di a a b sarà uguale al rapporto di g ad h. E poichè a, moltiplicato per e, dà h, e b, moltiplicato per e, dà k, il rapporto di a a b sarà uguale a quello di

h a k. Ma a sta a b come f sta a g, come g sta ad h, perciò anche f sta a g come g sta ad h, come h sta a k.

Dunque c, d, e ed f, g, h, k sono in proporzione continua secondo il rapporto di a a b. Dico che essi sono i più piccoli possibili.

Infatti, poichè a e b, sono i più piccoli possibili tra tutti i numeri aventi uguale rapporto, essi sono primi fra loro [VII, 22]. Ed i loro quadrati sono rispettivamente c ed e; i loro cubi f e k.

Perciò c ed e, ed f e k sono primi fra loro [VII, 27],

Dunque [prop. 1], i numeri c, d, e ed f, g, h, k sono i più piccoli possibili fra quelli che hanno lo stesso rapporto di a a b; c. d. d.

COROLLARIO.

Da ciò risulta chiaramente che se tre numeri, in proporzione continua secondo un dato rapporto, sono i più piccoli possibili, i termini estremi della proporzione sono quadrati; e se i numeri sono quattro, i termini estremi sono cubi.

Trovare una progressione geometrica, avente una data ragione, ed i cui termini siano i più piccoli possibili.

Si debba trovare una serie di $n+1$ termini e la ragione, ridotta ai minimi termini, sia $\frac{a}{b}$.

La serie richiesta è allora

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2, \ldots,\ a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n.$$

Risulta senz'altro (VII, 17, 18) che la ragione della progressione è $\frac{a}{b}$. Che la progressione sia nei minimi termini risulta osservando che a e b sono primi fra loro (VII, 22). Quindi anche a^2 e b^2 e, in generale, a^n e b^n sono primi fra loro (VII, 27).

Dunque (prop. 1) i termini della progressione sono i più piccoli possibili.

ZEUTHEN osserva che l'uso della prop. 27 del libro VII mostra che il primo e l'ultimo termine devono essere potenze ennesime.

Il corollario tratta il caso di $n = 2, 3$.

In esso viene stabilita l'identità della costruzione di una proporzione continua (progressione geometrica) con l'elevamento a potenza, e per conseguenza della inserzione di termini in una proporzione di cui siano dati gli estremi, con l'estrazione di radice. D'ora in poi si potranno quindi esporre in linguaggio moderno, usando i segni di radice e di potenza, i risultati che nel testo vengono espressi sempre per mezzo delle proporzioni continue.

3.

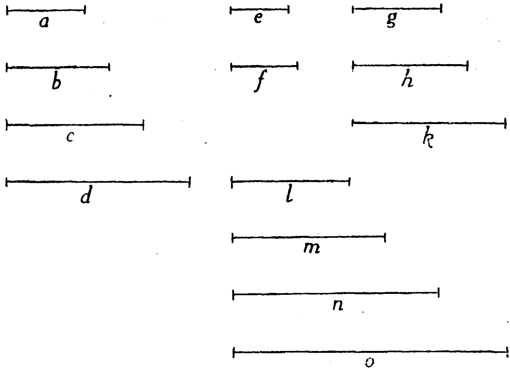
Se quanti si vogliano numeri in proporzione continua secondo un dato rapporto sono i più piccoli possibili, i termini estremi della proporzione sono primi fra loro.

Si abbiamo quanti si vogliano numeri a, b, c, d, in proporzione continua secondo un dato rapporto, i quali siano i più piccoli possibili. Dico che a e d sono primi fra loro.

Si prendano ora due numrei, e, f, che siano i più piccoli possibili tra tutti quelli che stanno nello stesso rapporto di a, b, c, d [VII, 33], poi se ne prendano tre, g, h, k e successivamente sempre uno di più [prop. 2] fino ad averne tanti quanti sono i numeri a, b, c, d. Siano l, m, n, o i numeri così trovati. Ora, essendo e ed f i più piccoli tra tutti i numeri aventi uguale rapporto, essi sono pirmi fra loro [VII, 22]. E poichè il quadrato di e è g, il quadrato di f è k [prop. 2, coroll.], il prodotto di e

per g è l, ed il prodotto di f per k è o [id.], anche g, k ed l, o sono primi fra loro [VII, 27].

E poichè a, b, c, d sono i più piccoli tra i numeri aventi uguale rapporto, e tali sono anche l, m, n, o, e la quan-



tità dei numeri a, b, c, d è uguale a quella dei numeri l, m, n, o, i numeri a, b, c, d sono rispettivamente uguali ai numeri l, m, n, o. Dunque a è uguale ad l, e d è uguale ad o. Ma l e o sono primi fra loro. Dunque anche a e d sono primi fra loro; c. d. d.

Si abbia

(I) $$a:b = b:c = \dots = k:l$$

ed i numeri a, b, c, ... siano i più piccoli possibili: allora a ed l sono primi fra loro.

Sia infatti $\alpha:\beta$ il rapporto $a:b$ ridotto ai minimi termini ed in base alla proposizione precedente si costruisca la proporzione

(II) $$\alpha^{n-1}:\alpha^{n-2}\beta = \dots = \alpha\beta^{n-2}:\beta^{n-1}.$$

Poichè α e β sono primi fra loro, tali sono anche α^{n-1} e β^{n-1} (VII, 22, 27) e poichè (I) e (II) devono coincidere si avrà

$$a = \alpha^{n-1}, \quad b = \beta^{n-1},$$

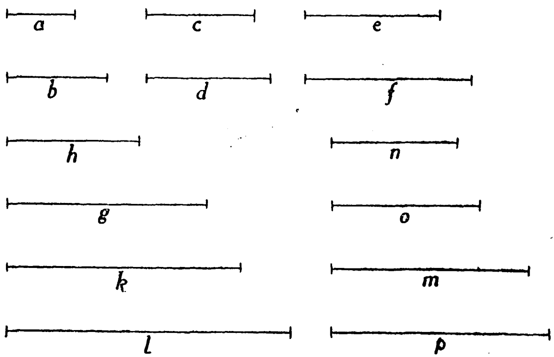
cioè a ed l sono primi fra loro.

4.

Dati quanti si vogliano rapporti ridotti ai minimi termini, trovare i più piccoli numeri che stiano in proporzione secondo i rapporti dati.

Siano i rapporti di a a b, di c a d, di e a f, ridotti ai minimi termini. Bisogna trovare i più piccoli numeri che stiano in proporzione secondo i rapporti di a a b, di c a d, di e a f. Sia g il minimo comune multiplo di b e c [VII, 34]. I numeri a, b siano equisottomultipli rispettivamente di h e g, e d, c equisottomultipli rispettivamente di k e g. Ora e, o dividerà k o non lo dividerà.

Supponiamo dapprima che lo divida. Ed f, e siano



equisottomultipli rispettivamente di l e k.

Poichè a e b sono equisottomultipli di h e g, il rapporto di a a b sarà uguale al rapporto di h a g [VII, def. 20, prop. 13].

Similmente il rapporto di c a d sarà uguale al rapporto di g a k; ed il rapporto di e ad f sarà uguale al rapporto di k a l.

Dunque h, g, k, l sono in proporzione secondo i rapporti assegnati. Dico che questi numeri sono i più piccoli possibili.

Infatti, se ciò non fosse, supponiamo che siano n, o, m, p i numeri cercati. Poichè a sta a b come n sta a o, ed il rapporto di a a b è ridotto ai minimi termini, segue che b divide o [VII, 20]. Per la stessa ragione c divide o.

Dunque b e c dividono o. E quindi anche il minimo comune multiplo di b, c divide o [VII, 35]. Il minimo comune multiplo di b, c è g; quindi g divide o, cioè un numero maggiore ne divide uno minore, il che è impossibile.

Non possono dunque esistere numeri minori di h, g, k, l che stiano in proporzione secondo i rapporti $a : b$, $c : d$, $e : f$.

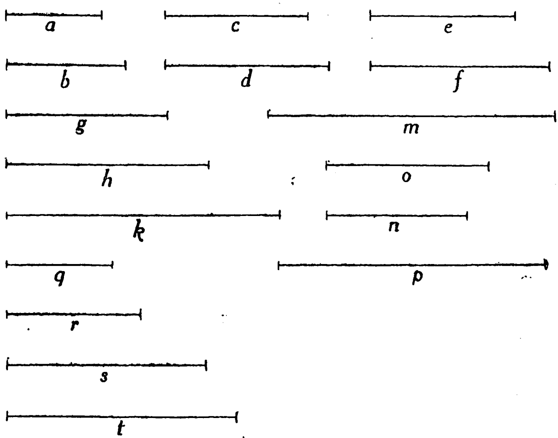
Supponiamo ora che e non divida k. Sia m il minimo comune multiplo di e, k [VII, 34]. E k, h, g siano equisottomultipli rispettivamente di m, n, o ed e, f siano equisottomultipli rispettivamente di m, p.

Poichè h, g sono equisottomutipli rispettivamente di n e o, il rapporto di h a g sarà uguale al rapporto di n a o [VII, def. 20, prop. 13]). Ma h sta a g come a sta a b, come n sta ad o. Similmente anche c sta a d come o sta ad m.

Inoltre, poichè e ed f sono equisottomultipli rispettivamente di m e p, il rapporto di e ad f sarà uguale al rapporto di m a p [VII, def. 20, prop. 13].

Dunque n, o, m, p, sono in proporzione secondo i rapporti assegnati. Dico che essi sono anche i più piccoli possibili.

Poichè, se ciò non fosse, sarebbero dei numeri minori di n, o, m, p in proporzione secondo i rapporti dati.



Siano q, r, s, t questi numeri. Poichè q sta ad r come a sta a b, ed il rapporto di a a b è ridotto ai minimi termini, segue [VII, 20] che b divide r.

Similmente anche c divide r. Dunque b e c dividono r ed anche il loro minimo comune multiplo divide r [VII, 35]. Ora il minimo comune multiplo di b, c è g.

Dunque g divide r. Ma g sta ad r, come k sta ad s; perciò k divide s [VII, def. 20]. Dunque e, k dividono s. Perciò anche il loro minimo comune multiplo divide s [VII, 35]. Ora il minimo comune multiplo di e, k è m.

Dunque m divide s, cioè un numero maggiore ne divide uno minore, il che è impossibile. Perciò non possono esistere numeri minori di n, o, m, p, che stiano in proporzione secondo i rapporti di a a b, di c a d, di e ad f.

Dunque n, o, m, p sono i più piccoli numeri che stiano in proporzione secondo i rapporti dati; c. d. d.

Dati più rapporti trovare i minimi numeri aventi quei rapporti. Siano $a:b$, $c:d$, $e:f$ i rapporti dati ridotti ai minimi termini. Sia g il *m. c. m.* di b, c e sia

$$g = mb = nc.$$

Consideriamo i numeri ma, $mb = nc$, nd; si ha:

$$ma:mb = a:b, \quad nc:nd = c:d.$$

Sia h il *m. c. m.* di nd, e, e sia

$$h = pnd = qe,$$

Consideriamo i numeri pma, $pmb = pnc$, $pnd = qe$, qf; si ha:

$$\begin{aligned} pma:pmb &= a:b \\ pnc:pnd &= c:d \\ qe:qf &= e:f; \end{aligned}$$

pma, pnc, qe, qf sono i numeri cercati.

Se non lo fossero, siano x, y, z, u dei numeri rispettivamente minori di quelli trovati e tali che

$$\begin{aligned} x:y &= a:b \\ y:z &= c:d \\ z:u &= e:f. \end{aligned}$$

Poichè i rapporti $a:b$, $c:d$, $e:f$ sono ridotti ai minimi termini, b divide y e c divide y; perciò g divide y.

Ma

$$g:nd = y:z$$

quindi nd divide z;

e poichè

$$e:f = z:u$$

e divide z.

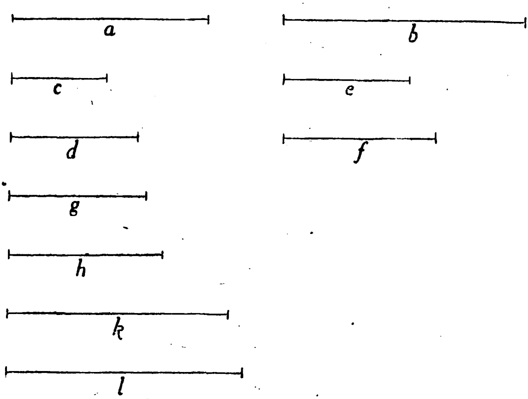
Perciò b divide z, il che è assurdo essendo $z < h = pnd$.

5.

I numeri piani hanno fra loro rapporto composto dei rapporti dei lati.

Siano a, b due numeri piani, i loro lati siano rispettivamente c, d ed e, f. Dico che a ha con b rapporto composto dei rapporti dei lati.

Infatti, dati i rapporti di c ad e e di d ad f, si prendano i numeri g, h, k che siano i più piccoli possibili in



proporzione continua secondo i rapporti di a a b, e di d ad f [prop. 4], in modo che c sta ad e come g ad h, e d stia ad f come h sta a k. Sia inoltre l il prodotto di d per e. Poichè d, moltiplicato per c, dà a, e moltiplicato per e dà l, il rapporto di c ad e sarà uguale al rapporto di a ad l [VII, 17]. Ma c sta ad e come g sta ad h; quindi g sta ad h come a sta ad l. Inoltre, poichè e, moltiplicato per d, dà l e moltiplicato per f dà b, il rapporto di d ad f sarà uguale al rapporto di l a b. Ma d sta ad f come h sta a k, quindi h sta a k come l sta a b. Si è dimostrato inoltre che g sta ad h come a sta ad l, dunque [VII, 14] g sta a k come a sta a b. Ma il rapporto di g a k è composto dei rapporti di c ad e e di d ad f, dunque il rapporto di a a b, è composto dei rapporti di c ad e e di d ad f; c. d. d.

Se

$$a = cd, \quad b = ef$$

allora

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{e}\frac{d}{f}.$$

Sia l il $m.$ $c.$ $m.$ di e, d e sia

$$l = me = nd.$$

Allora (prop. 4)

$$mc : me = c : e$$
$$nd : nf = d : f$$

ed mc, me, nf sono i minimi numeri per cui ciò avviene.

Ma (VII, 17)

$$dc : de = c : e = mc : me$$

e

$$ed : ef = d : f = nd : nf$$

perciò

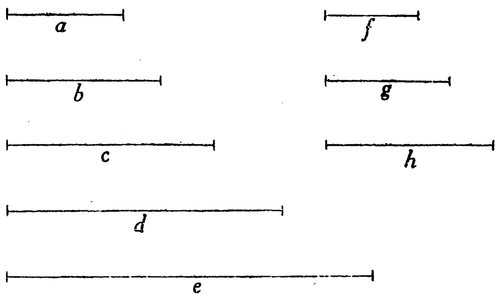
$$cd : ef = mc : nf.$$

6.

Se quanti si vogliano numeri sono in proporzione continua ed il primo di essi non divide il secondo, nessuno dei numeri dati può dividere un altro qualunque di essi.

Siano dati quanti si vogliano numeri in proporzione continua, a, b, c, d, e ed a non divida b. Dico che nessuno dei numeri dati può dividerne un altro.

È chiaro infatti, poichè a non divide b, che nessuno



dei numeri a, b, c, d, e divide il suo successivo. Dico che non può dividerne neppure un altro qualunque.

Supponiamo che ciò possa accadere, cioè, per esempio, che a divida c. Si prendano ora i numeri f, g, h, (tanti quanti sono i numeri a, b, c), i quali siano i più piccoli possibili fra tutti i numeri che stanno nello stesso rapporto di a, b, c [VII, 33]. Per conseguenza a starà a c come f ad h [VII, def. 14]. E poichè a sta a b come f sta a g ed a non divide b, neppure f divide g [VII, def. 20].

Dunque f non può essere l'unità, perchè l'unità divide ogni numero. Inoltre f e h sono primi fra loro [prop. 3] e f sta ad h come a sta a c. Dunque [VII, def. 20] neppure a divide c.

Similmente si dimostrerebbe che un altro qualunque dei numeri dati non può dividerne nessun altro; c. d. d.

Se a, b, c, ..., l è una serie di numeri in progressione geometrica ed a non divide b, non divide nessun altro numero della progressione.

Supponiamo che a divida, p. es., f, e siano x, y, z. u, v, w i più piccoli numeri aventi fra loro gli stessi rapporti di a, b, c, d, e, f.

Poichè $x:y = a:b$ ed a non divide b, x non divide y e quindi $x \neq 1$.

Inoltre è

$$x:w = a:f;$$

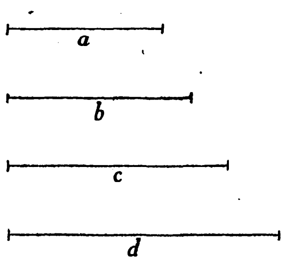
dove x e w sono, per ipotesi, primi fra loro; perciò a non divide f.

Si può dimostrare che un altro termine della progressione, p. es., b, non può dividerne uno successivo, considerando la progressione b, c, d, e, f ed osservando che, essendo $b:c = a:b$, b non divide c.

7.

Se quanti si vogliano numeri sono in proporzione continua, ed il primo di essi divide l'ultimo, divide anche il secondo.

Siano dati quanti si vogliano numeri in proporzione continua, a, b, c, d ed a divida d. Dico che a divide an-



che b. Infatti, se a non dividesse b, non potrebbe dividere nessun altro dei numeri dati [prop. 6]. Ma a divide d; dunque divide anche b; c. d. d.

Se a, b, c, ..., l è una serie di numeri in progressione geometrica ed a divide l, divide anche b.

Infatti se a non dividesse b, per la proposizione precedente, non dividerebbe neppure l, contro l'ipotesi.

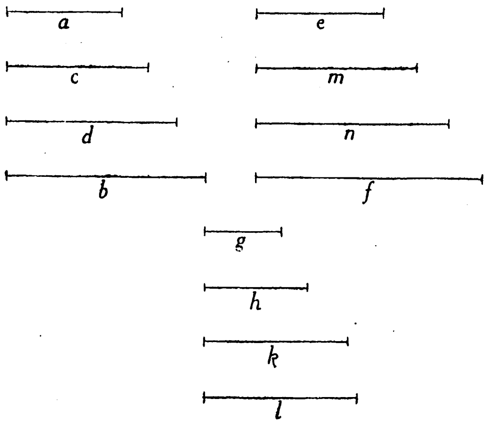
ZEUTHEN osserva che questa proposizione e la precedente stabiliscono che una frazione non può essere radice di un numero intero, ossia che $\sqrt[n]{a}$ non è razionale, se a non è potenza ennesima di un numero intero.

8

Se due numeri sono gli estremi di una proporzione continua, tutti i numeri che stanno fra loro nello stesso rapporto dei due numeri dati, sono gli estremi di una proporzione continua avente lo stesso numero di termini della prima.

I numeri a, b siano tali che a stia a c come c sta a d, come d sta a b. Ed i numeri a, b abbiano fra loro lo stesso rapporto dei numeri e, f. Dico che e, f sono gli estremi di una proporzione continua avente lo stesso numero di termini della proporzione data.

Infatti, si prendano tanti numeri quanti sono gli a, b, c, d, tali che siano i più piccoli tra quelli che stanno nello stesso rapporto di a, c, d, b; e siano g, h, k, l [VII, 33]. I numeri g ed l sono primi fra loro [prop. 3] e poichè a, c, d, b e g, h, k, l stanno nello stesso rapporto, e la quantità dei numeri a, c, d, b è uguale a quella dei numeri g, h, k, l, il rapporto di a a b sarà uguale al rapporto di g ad l. Ma a sta a b come e sta ad f; perciò g sta ad l come e sta ad f. Ma g ed l sono primi fra loro, perciò sono i più piccoli fra tutti quelli che stanno nello stesso rapporto [VII, 21] e quindi ne sono equisottomultipli, e precisamente il maggiore divide il maggiore e il minore



divide il minore [VII, 20] ossia l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente.

Dunque g ed l sono equisottomultipli rispettivamente di e ed f. E g, h, k sono equisottomultipli rispettivamente di e, m, n. Dunque g, h, k, l sono equisottomultipli rispettivamente di e, m, n, f. E g, h, k, l ed e, m, n, f stanno nello stesso rapporto [VII def. 20]. Ma anche g, h, k, l ed a, c, d, b stanno nello stesso rapporto. Dunque anche a, c, d, b ed e, m, n, f stanno nello stesso rapporto.

Ma a, c, d, b sono in proporzione continua perciò anche e, m, n, f sono in proporzione continua.

Dunque ecc.; c. d. d.

Se $a:b = e:f$ ed esistono n numeri x_1, x_2, ..., x_n tali che

$$a:x_1 = x_1:x_2 = ... = x_n:b$$

esisteranno altri n numeri x_1', x_2', ..., x_n' tali che

$$e:x_1' = x_1':x_2' = ... = x_n':f.$$

Siano infatti α, α_1, α_2, ..., α_n, β i più piccoli numeri che stanno nello stesso rapporto di a, x_1, ..., x_n, b (VII, 33); α sarà primo con β (prop. 3).

E poichè

$$\alpha:\beta = a:b = e:f$$

sarà

$$e = m\alpha$$

$$f = m\beta. \qquad \text{(VII, 20).}$$

Ne segue che

$$e:m\alpha_1 = m\alpha_1:m\alpha_2 = ... = m\alpha_n:f$$

c. d. d.

Con la notazione moderna questa proposizione si esprime così: Se

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

allora, nell'ipotesi che le radici si estraggano razionalmente:

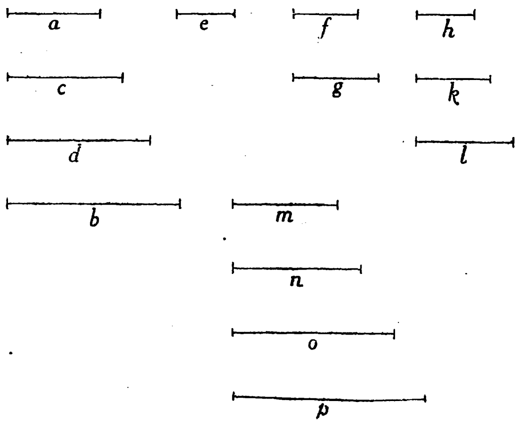
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{e}{f}}.$$

9.

Se due numeri primi fra loro sono gli estremi di una proporzione continua, esistono altre due proporzioni continue aventi per estremi l'unità e l'uno o l'altro dei numeri dati, e con lo stesso numero di termini della prima.

Siano a, b due numeri primi fra loro ed estremi di una proporzione continua, in modo che a stia a c come c sta a *d*, come *d* sta a *b*. Si consideri l'unità *e*; dico che *e*, *a* ed *e*, *b* sono gli estremi di altre due proporzioni continue aventi lo stesso numero di termini della prima.

Si prendano infatti due numeri *f*, *g* che siano i più piccoli fra tutti quelli aventi lo stesso rapporto di *a*, *c*, *d*, *b*. Se ne prendano poi tre, *h*, *k*, *l* e successivamente sempre uno di più finchè la loro quantità sia uguale a



quella dei numeri *a*, *c*, *d*, *b* [prop. 2]. Siano *m*, *n*, *o*, *p* questi numeri. È chiaro che *f*, moltiplicato per sè stesso, dà *h*, e moltiplicato per *h* dà *m;* e che *g*, moltiplicato per sè stesso, dà *l*, e moltiplicato per *l* dà *p* [prop. 2, coroll.].

E poichè *m*, *n*, *o*, *p* sono i più piccoli tra quelli che stanno nello stesso rapporto di *f* e *g*, e tali sono anche *a*, *c*, *d*, *b* [prop. 3] ed i numeri *m*, *n*, *o*, *p* sono tanti quanti sono i numeri *a*, *c*, *d*, *b*, i numeri *m*, *n*, *o*, *p* sono uguali rispettivamente ad *a*, *c*, *d*, *b*.

Dunque m è uguale ad a e p è uguale a b. E poichè f, moltiplicato per sè stesso, dà h, f è sottomultiplo di h secondo f [VII, def. 15]. Ma anche l'unità e è sottomultipla di f secondo f. Dunque e ed f sono equisottomultipli rispettivamente di f ed h. Perciò e sta ad f come f sta ad h [VII, def. 20].

Inoltre, poichè il prodotto di f per h è m, il numero h è sottomultiplo di m secondo f [VII, def. 15]. Ma anche l'unità e è sottomultipla di f secondo f. Dunque e ed h sono equisottomultipli rispettivamente di f ed m. Perciò e sta ad f come h sta ad m [VII, def. 20].

Si è dimostrato inoltre che e sta ad f come f sta ad h; e che e sta ad f come f sta ad h, come h sta ad m.

Ma m è uguale ad a. Dunque e sta ad f come f sta ad h, come h sta ad a. Per la stessa ragione anche e sta a g come g sta ad l, come l sta a b.

Dunque ecc.; c. d. d.

Se a e b sono primi fra loro ed esistono n numeri interi per cui

$$a:x_1 = x_1:x_2 = \dots = x_n:b \tag{I}$$

esistono anche n numeri x_1', x_2', ..., x_n' ed n numeri x_1'', x_2'', ..., x_n'' tali che

$$1:x_1' = x_1':x_2' = \dots = x_n':a$$

e

$$1:x_1'' = x_1'':x_2'' = \dots = x_n'':b.$$

Sia infatti $\alpha:\beta$ il rapporto comune considerato nella (I), ridotto ai minimi termini. Poichè a, b sono primi fra loro, x_1, x_2, ..., x_n sono i minimi numeri per cui si ha la (I) e saranno perciò uguali rispettivamente ad

$$\alpha^{n+1},\ \alpha^n\beta,\ \dots,\ \beta^{n+1} \qquad \text{(prop. 2, cor.)}$$

cioè

$$a = \alpha^{n+1}, \quad b = \beta^{n+1}.$$

Ora si ha

$$1:\alpha = \alpha:\alpha^2 = ... = \alpha^n:\alpha^{n+1}$$

e

$$1:\beta = \beta:\beta^2 = ... = \beta^n:\beta^{n+1}$$

ossia

$$x_1' = \alpha, \; ....$$
$$x_1'' = \beta, \; ....$$

In linguaggio moderno questa proposizione si esprime così:

Se, essendo a e b primi fra loro, esiste un numero razionale $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, a e b sono potenze ennesime di numeri interi e si ha:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

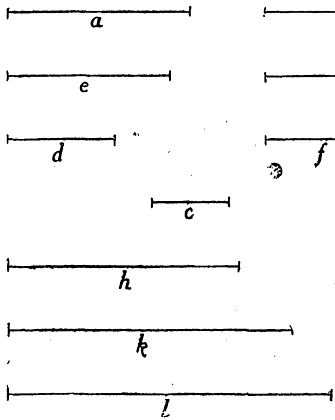
10.

Date due proporzioni continue, di ugual numero di termini, ed aventi per estremi l'unità ed altri due numeri, questi ultimi sono anch'essi gli estremi di una proporzione continua avente lo stesso numero di termini delle prime.

Dati due numeri a, b, l'unità c stia a d come d sta ad e, come e sta ad a; e l'unità c stia ad f come f sta a g come g sta a b.

Dico che anche a e b sono gli estremi di una proporzione continua avente lo stesso numero di termini delle precedenti. Sia infatti h il prodotto di d per f, k il prodotto di f per h. Poichè c sta a d come d sta ad e, i numeri *c* e *d* sono equisottomultipli rispettivamente di *d* ed *e* [VII, def. 20].

Ma l'unità *c* è sottomultiplo di *d* secondo *d*; perciò *d* è sottomultiplo di *e* secondo *d*, cioè, moltiplicato per sè



stesso, dà *e*. Inoltre poichè *c* sta a *d* come *e* sta ad *a*, *c* ed *e* sono equisottomultipli rispettivamente di *d* ed *a*. Ma l'unità *c* è sottomultiplo di *d* secondo *d*; perciò *e* è sottomultiplo di *a* secondo *d*, cioè il prodotto di *d* ed *e* è *a*.

Similmente *f*, moltiplicato per sè stesso, dà *g*, e moltiplicato per *g* dà *b*. E poichè il prodotto di *d* per sè stesso è *e*, ed il prodotto di *d* per *f* è *h*, il rapporto di *d* ad *f* sarà uguale al rapporto di *e* ad *h*. [VII, 17]. Ma *d* sta ad *f* come *h* sta a *g* [VII, 18]; perciò *e* sta ad *h* come *h* sta a *g*. E poichè *d*, moltiplicato per *e*, dà *a*, e moltiplicato per *h* dà *k*, il rapporto di *e* ad *h* sarà uguale al rapporto di *a* a *k* [VII, 17]. Ma *e* sta ad *h* come *d* sta ad f, perciò d sta ad f come a sta a k. Inoltre, il prodotto di d per h è k, ed il prodotto di f per h è l; quindi d sta ad f come k sta ad l [VII, 18]. Ma d sta ad f come a sta a k; perciò a sta a k come k sta ad l. E poichè f, moltiplicato per h, dà l, e moltiplicato per g dà b, il rapporto di h a g sarà uguale al rapporto di l a b. Ma h sta a g come d sta ad f; perciò d sta ad f come l sta a b. Si è dimostrato inoltre che d sta ad f come a sta a k, come k sta ad l; dunque a sta a k come k sta ad l, come l sta a b. Quindi a, k, l, b sono in proporzione continua.

Dunque, ecc....; c. d. d.

Si abbia

(I) $$1 : x_1' = x_1' : x_2' = \dots = x_n' : a$$

e

(II) $$1 : x_1'' = x_1'' : x_2'' = \dots = x_n'' : b.$$

Dico che esistono n numeri x_1, x_2, ..., x_n tali che

(III) $$a : x_1 = x_1 : x_2 = \dots = x_n : b$$

Siano $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\beta}$ rispettivamente i rapporti comuni di (I) e (II); sarà

(I′) $$1 : \alpha = \alpha : \alpha^2 = \dots = \alpha^n : \alpha^{n+1}$$

(II′) $$1 : \beta = \beta : \beta^2 = \dots = \beta^n : \beta^{n+1}$$

ove

$$a = \alpha^{n+1}, \quad b = \beta^{n+1}.$$

Moltiplicando fra loro (I′) e (II′) si ottiene

$$\alpha^{n+1} : \alpha^n\beta = \alpha^n\beta : \alpha^{n+1}\beta^2 = \dots = \alpha\beta^n : \beta^{n+1};$$

è dimostrata quindi l'esistenza di (III).

In linguaggio moderno questa proposizione si esprime così:

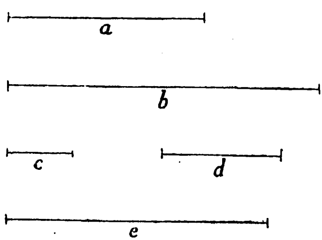
Se a e b sono potenze ennesime di numeri interi, $\frac{a}{b}$ è potenza ennesima di un numero razionale e si ha:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

11.

Fra due (numeri) quadrati esiste un numero medio proporzionale, ed i (numeri) quadrati stanno fra loro nella ragione duplicata dei lati.

Si abbiano i (numeri) quadrati a, b ed i loro lati siano rispettivamente c, d. Dico che fra a e b esiste un numero medio proporzionale, e che a ha con b ragione



duplicata di quella che c ha con d. Poichè a è numero quadrato ed il suo lato è c, il numero a sarà il prodotto di c per sè stesso. Per la stessa ragione b sarà il prodotto di d per sè stesso. E poichè c, moltiplicato per sè stesso, dà a, e moltiplicato per d dà e, come c sta a d, così a starà ad e [VII, 17].

Similmente, come c sta a d, così e sta a b, e quindi a sta ad e come e sta a b.

Dunque fra a e b vi è un medio proporzionale. Dico inoltre che a ha con b ragione duplicata di quella che c ha con d. Infatti, poichè i tre numeri a, e, b sono in proporzione continua, a ha con b ragione duplicata di quella che ha con e [V, def. 9].

Ma a sta ad e come c sta a d; dunque a ha con b ragione duplicata di quella che c ha con d; c. d. d.

Se $a = c^2$ e $b = d^2$ esiste tra a e b un medio proporzionale (cd) ed a sta a b nella ragione duplicata di c a d.

Infatti si ha

$$c^2 : cd = cd : d^2$$

ossia

$$a : cd = cd : b\,;$$

ne segue (V. def. 9) che

$$a : b = (a : cd) \cdot (a : cd)$$

ossia

$$a : b = (c : d) \cdot (c : d) = (c : d)^2.$$

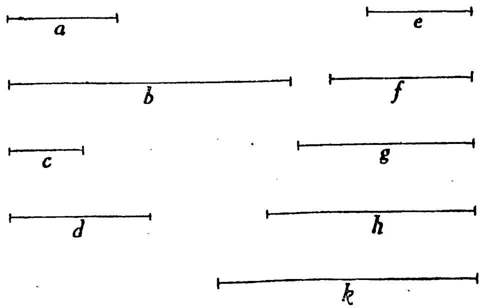
La proposizione è dunque un caso particolare della 10.

12.

Fra due (numeri) cubi esistono due numeri medi proporzionali, ed i (numeri) cubi stanno fra loro nella ragione triplicata dei lati.

Si abbiano i cubi a, b ed i loro lati siano rispettivamente c e d. Dico che fra a e b esistono due numeri medi proporzionali e che a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con d.

Sia infatti e il prodotto di c per sè stesso, f il prodotto di c per d, g il prodotto di d per sè stesso, h il prodotto di c per f, k il prodotto di d per f. Poichè a è un numero



cubo e il suo lato è c, ed il prodotto di c per sè stesso è e, il prodotto di c per e sarà a. Per la stessa ragione il prodotto di d per g sarà b. E poichè il prodotto di c per sè stesso è e, ed il prodotto di c per d è f, il numero c starà a d come e ad f [VII, 17].

Inoltre, poichè il prodotto di c per e è a, e quello di c per f è h, il numero e starà ad f come a ad h [VII, 17]. Ma e sta ad f come c a d; perciò anche c sta a d come a ad h; e poichè h è il prodotto di c per f, e k è il prodotto di d per f, il numero c starà a d come h sta a k [VII. 18].

Inoltre, poichè k è il prodotto di d per f e b è il prodotto di d per g, il numero f starà a g come k sta a b. Ma f sta a g come c a d, perciò anche c sta a d come a sta ad h, come h sta a k, come k sta a b. Dunque fra a e b esistono due numeri medi proporzionali h e k.

Dico inoltre che a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con d. Infatti, poichè i quattro numeri a, h, k, b

sono in proporzione, il numero a starà ad h come c sta a d; dunque a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con d; c. d. d.

Se $a = c^3$ e $b = d^3$ esistono tra a e b due medi proporzionali (c^2d e cd^2) ed a sta a b nella ragione triplicata di c a d.

Si ha cioè

$$a : c^2d = c^2d : cd^2 = cd^2 : b$$

e

$$a : b = (c : d) \cdot (c : d) \cdot (c : d) = (c : d)^3$$

(cfr. nota propp. 10, 11).

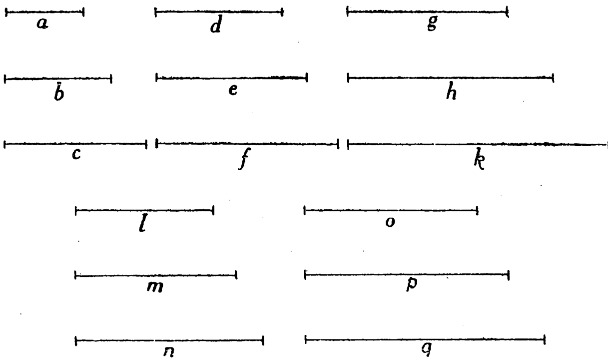
13.

Se quanti si vogliano numeri sono in proporzione continua, anche i loro quadrati ed i loro cubi e in generale i numeri che si ottengono moltiplicando sempre i numeri dati per sè stessi, sono in proporzione continua.

Si abbiano quanti si vogliano numeri in proporzione continua, a, b, c, tali cioè che a stia a b, come b sta a c; e sia d il prodotto di a per sè stesso, e il prodotto di b per sè stesso, f il prodotto di c per sè stesso, g il prodotto di a per d, h il prodotto di b per e, k il prodotto di c per f. Dico che anche i numeri d, e, f e g, h, k sono in proporzione continua.

Sia infatti l il prodotto di a per b, m il prodotto di a per l, n il prodotto di b per l, o il prodotto di b per c, p il prodotto di b per o, e q il prodotto di c per o.

Si dimostra, come nella proposizione precedente, che i numeri d, l, e e g, m, n, h sono in proporzione continua secondo il rapporto di a a b; ed inoltre che i numeri e, o, f ed h, p, q sono in proporzione continua secondo il rapporto di b a c. Ma a sta a b come b sta a c; perciò anche d, l, e ed e, o, f stanno nello stesso rapporto, e similmente g, m, n, h ed h, p, q, k.



E la quantità dei numeri d, l, e e g, m, n, h è rispettivamente uguale a quella dei numeri e, o, f ed h, p, q, k.

Dunque d sta ad e come e sta ad f [VII, 14], e g sta ad h come h sta a k; c. d. d.

Se

(I) $$a:b = bc = \dots$$

si ha anche

(II) $$a^2:b^2 = b^2:c^2 = \dots$$

e

(III) $$a^3:b^3 = b^3:c^3 = \dots$$

Si ha infatti

$$a^2:ab = ab:b^2 \qquad \left(\text{ragione } \frac{b}{a}\right)$$

$$a^3:a^2b = a^2b:ab^2 = ab^2:b^3$$

$$b^2:bc = bc:c^2 \qquad \left(\text{ragione } \frac{b}{c}\right)$$

$$b^3:b^2c = b^2c:bc^2 = bc^2:c^3.$$

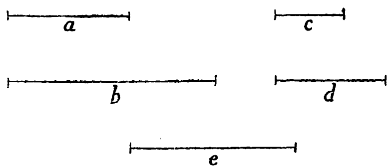
Quindi (VII, 14) seguono (II) e (III).

14.

Se un (numero) quadrato divide un altro (numero) quadrato, anche il lato del primo divide il lato del secondo; e viceversa, se un numero divide un altro numero, anche il quadrato del primo divide il quadrato del secondo.

Si abbiano i quadrati a, b ed i loro lati siano rispettivamente c, d. Dico che anche c divide d.

Sia infatti e il prodotto di c per d; a, e, b sono dunque in proporzione continua secondo il rapporto c, d



[prop. 11]. E poichè a, e, b sono in proporzione continua, ed a divide b, il numero a divide anche e [prop. 7]. Ma a sta ad e come c sta a d.

Dunque anche c divide d [VII, def. 20].

Supponiamo ora che c divida d. Dico che anche a divide b. Infatti si dimostra come prima che a, e, b sono in proporzione continua secondo il rapporto di c a d. E poichè c sta a d come a sta ad e, e c divide d, anche a divide e [VII, def. 20]. Ed a, e, b sono in proporzione continua; dunque anche a divide b.

Dunque, se ecc....; c. d. d.

Se a^2 divide b^2, a divide b, e viceversa, se a divide b, a^2 divide b^2.

(1) Si ha la proporzione continua:

$$a^2 : ab = ab : b^2.$$

Per ipotesi a^2 divide b^2 e quindi (prop. 7) a^2 divide ab. Ed è

$$a^2 : ab = a : b.$$

Dunque a divide b.

(2) Se a divide b anche a^2 divide ab. Ed è

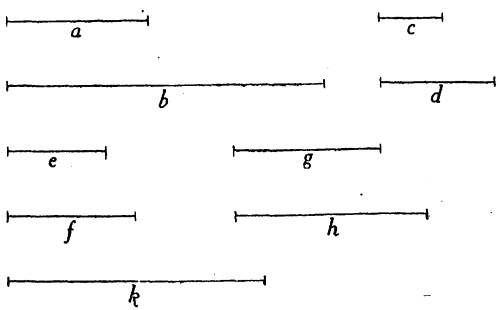
$$a^2 : ab = ab : b^2$$

e quindi ab divide b^2. Ne segue che a^2 divide b^2.

15.

Se un (numero) cubo divide un altro (numero) cubo, anche il lato del primo divide il lato del secondo; e viceversa, se un numero divide un altro numero, anche il cubo del primo divide il cubo del secondo.

Supponiamo che il (numero) cubo a divida il (numero) cubo b, ed i loro lati siano rispettivamente c e d. Dico che anche c divide d.



Sia infatti e il prodotto di c per sè stesso, g il prodotto di d per sè stesso, f il prodotto di c per d, h il prodotto di c per f, k il prodotto di d per f. È chiaro che i numeri e, f, g ed a, h, k, b sono in proporzione continua secondo il rapporto di c a d [prop. 12]. E poichè a, g, k, b sono in proporzione continua, ed a divide b, divide anche g; dunque anche c divide d.

Supponiamo ora che c divida d. Dico che anche a divide b. Si dimostra infatti, come prima, che i numeri a, g, k, b sono in proporzione continua secondo il rapporto di c a d. E poichè c divide d e c sta a d come a sta a g, anche a divide g [VII, def. 20].

Dunque a divide b; c. d. d.

Se a^3 divide b^3, a divide b, e viceversa, se a divide b, a^3 divide b^3.

(1) Si ha la proporzione continua:

$$a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3.$$

Per ipotesi a^3 divide b^3 e quindi (prop. 7) a^3 divide a^2b. Ed è

$$a^3 : a^2b = a : b.$$

Dunque a divide b.

(2) Per ipotesi a divide b; quindi a^3 divide a^2b. Ed è

$$a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3.$$

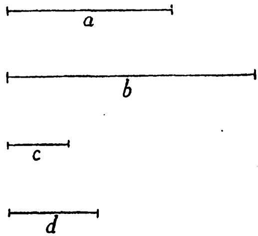
In questa proporzione ogni termine divide il successivo. Ne segue che a^3 divide b^3.

16.

Se un (numero) quadrato non divide un altro (numero) quadrato, neppure il lato del primo divide il lato del secondo; e viceversa, se un numero non divide un altro numero, neppure il quadrato del primo divide il quadrato del secondo.

Si abbiano i quadrati a, b rispettivamente di lati c e d, ed a non divida b. Dico che neppure c divide d.

Infatti, se c dividesse d, anche a dividerebbe b [prop. 14]. Ma a non divide b; dunque c non può dividere d.



Supponiamo ora che c non divida d. Dico che neppure a divide b.

Infatti, se a dividesse b anche c dividerebbe d [prop. 14]. Ma c non divide d; dunque a non può dividere b; c. d. d.

Se a^2 non divide b^2, a non divide b; e viceversa, se a non divide b, a^2 non divide b^2.

(1) Infatti, se a dividesse b, anche a^2 dividerebbe b^2 (prop. 14), contro l'ipotesi.

(2) E se a^2 dividesse b^2, anche a dividerebbe b (prop. 14), contro l'ipotesi.

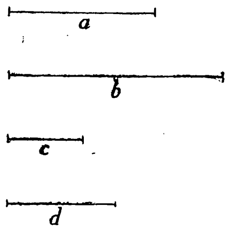
17.

Se un (numero) cubo non divide un altro (numero) cubo, neppure il lato del primo divide il lato del secondo; e viceversa, se un numero non divide un altro numero, neppure il cubo del primo divide il cubo del secondo.

Supponiamo infatti che il cubo a non divida il cubo

b; ed i lati di a e b siano rispettivamente c e d. Dico che c non divide d.

Infatti, se c dividesse d, anche a dividerebbe b [prop. 15]. Ma a non divide b; dunque c non può dividere d.



Supponiamo ora che c non divida d. Dico che neppure a divide b.

Infatti, se a dividesse b, anche c dividerebbe d [prop. 15]. Ma c non divide d; dunque a non può dividere b; c. d. d.

Se a^3 non divide b^3, a non divide b; e viceversa, se a non divide b, a^3 non divide b^3.

(1) Infatti se a dividesse b anche a^3 dividerebbe b^3 (prop. 15) contro l'ipotesi.

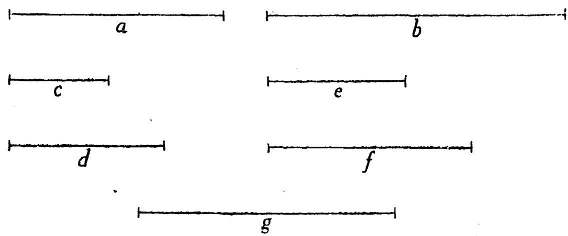
(2) E se a^3 dividesse b^3, anche a dividerebbe b (prop. 15), contro l'ipotesi.

ZÉUTHEN osserva che le proposizioni 14-17 costituiscono la base dei criteri di razionalità delle radici dei numeri interi.

18.

Fra due numeri piani simili esiste un numero medio proporzionale ed i due numeri piani stanno fra loro nella ragione duplicata dei lati.

Si abbiano due numeri piani simili a, b ed i loro lati siano rispettivamente c, d ed e, f.



Poichè sono numeri piani simili quelli che hanno i lati proporzionali [VII, def. 21], c starà a d come e ad f.

Dico che fra a e b esiste un medio proporzionale, e che a ha con b ragione duplicata di quella che c ha con e, o di quella che d ha con f.

Infatti poichè c sta a d come e sta ad f, permutando, c sta ad e come d sta ad f [VII, 13].

E poichè a è un numero piano di lati c, d, il prodotto di d per c sarà a; il prodotto di e per f sarà b.

Sia ora g il prodotto di d per c. Poichè d, moltiplicato per c, dà a, e moltiplicato per e dà g, il numero c starà ad e come a sta a g [VII, 17]. Ma c sta ad e come d sta ad f; perciò anche d sta ad f come a sta a g. Inoltre, poichè e, moltiplicato per d, dà g, e moltiplicato per f dà b, il numero d starà ad f come g sta a b. [VII, 17]. Ma si è dimostrato che d sta ad f come a sta a g; perciò anche a sta a g come g sta a b.

Dunque a, g, b sono in proporzione continua e fra a e b esiste un medio proporzionale.

Dico che anche a ha con b ragione duplicata di quella che c ha con e, o di quella che d ha con f.

Infatti, essendo a, g, b in proporzione continua, a ha con b ragione duplicata di quella che ha con g [V, def. 9]; ma a sta a g come c sta ad e, e come d sta ad f; dunque a ha con b ragione duplicata di quella che c ha con e, o che d ha con f; c. d. d.

Se $a = cd$, $b = ef$ e $c:d = e:f$ (I), esiste tra cd ed ef un medio proporzionale e cd sta ad ef in rapporto duplicato di c ad e o d ad f.

Da (I) segue (VII, 13)

$$c:e = d:f$$

e quindi

$$cd:de = de:ef \qquad \text{(VII, 17, 16)};$$

cioè esiste un medio proporzionale fra cd ed ef e cd sta ad ef nel rapporto duplicato di cd a de cioè di c ad e.

19.

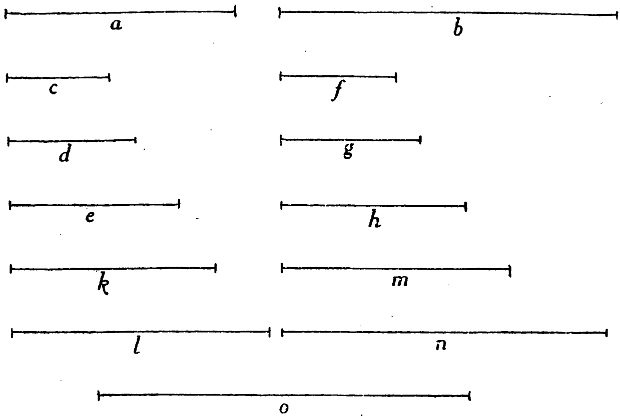
Fra due numeri solidi esistono due numeri medi proporzionali; ed i due numeri solidi stanno fra loro come i cubi dei lati.

Si abbiano due numeri solidi a, b ed i loro lati siano rispettivamente c, d, e ed f, g, h.

Poichè sono numeri solidi simili quelli aventi i lati proporzionali [VII, def. 21], e starà a d come f sta a g; e d starà ad e come g sta ad h.

Dico che fra a e b esistono due numeri medi proporzionali e che a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con f, o di quella che d ha con g o di quella che *e* ha con *h*. Sia infatti *k* il prodotto di *c* per *d*, ed *l* il prodotto di *f* per *g*; poichè *c* sta a *d* come *f* sta a *g*, i numeri *k* ed *l* sono piani simili [VII, def. 21].

Dunque fra *k* ed *l* esiste un medio proporzionale [prop. 18]. Sia questo *m*; il numero *m* sarà dunque uguale al



prodotto di *d* per *f*, come si è dimostrato nella proposizione precedente. E poichè *d*, moltiplicato per *c*, dà *k*, e moltiplicato per *f* dà *m*, il numero *c* starà ad *f* come *k* sta ad *m* [VII, 17]. Ma *k* sta ad *m* come *m* sta ad *l*. Quindi *k*, *m*, *l* sono in proporzione continua secondo il rapporto di *c* ad *f*; e poichè *c* sta a *d* come *f* sta a *g*, permutando *c* sta ad *f* come *d* sta a *g*. Per la stessa ragione anche *d* sta a *g* come *e* sta ad *h*. Perciò i numeri *k*, *m*, *l* stanno fra loro in proporzione continua secondo il rapporto di *c* ad *f*, o di *d* a *g*, o di *e* ad *h*.

Sia ora *n* il prodotto di *e* per *m*, ed *o* il prodotto di *h* per *m*. Poichè *a* è un numero solido ed i suoi lati sono

c, d, e, il numero e, moltiplicando il prodotto di c per d, dà a.

Ma il prodotto di c per d è k; dunque a è il prodotto di e per k. Similmente b è il prodotto di h per l. E poichè e, moltiplicando k, dà a, e moltiplicando m dà n, starà k ad m come a ad n [VII, 17]. Ma k sta ad m come c ad f, come d a g, come e ad h. Dunque e sta ad f come d sta a g, come e sta ad h, come a sta ad m. Inoltre, il prodotto di e per m è n, ed il prodotto di h per m è o; quindi e sta ad h come n sta ad o [VII, 18]. Ma e sta ad h come c sta ad f, e come d sta a g. Dunque c sta ad f come d da sta a g, come e sta ad h, come a sta ad m, come n sta ad o. Inoltre, poichè il prodotto di h per m è o, ed il prodotto di h per l è b, starà m ad l come o a b [VII, 17]. Ma m sta ad l come c sta ad f, come d sta a g, come e sta ad h, come o sta a b, come a sta ad n, come n sta ad o.

Dunque a, n, o, b sono in proporzione continua secondo i rapporti dei lati indicati sopra. Dico ora che a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con f, o che d ha con g, o che e ha con h. Infatti, poichè i quattro numeri a, n, o, b sono in proporzione, a avrà con b ragione triplicata di quella che ha con n [V, def. 10]. Ma a sta ad n come c sta ad f, come, d sta a g, come e sta ad h; dunque a ha con b ragione triplicata di quella che c ha con f, o che d ha con g, o che e ha con h;

c. d. d.

Se $a:b:c = d:e:f$ e $m = abc$, $n = def$, tra m ed n esistono due medi proporzionali ed m sta ad n in rapporto triplicato di a a d, o b ad e, o c ad f.

Come nella prop. 18 si ha:

$$ab : bd = bd (= ea) : de.$$

E poichè: (VII, 17)

$$abc : cbd = ab : bd = a : d$$
$$cbd : fbd = c : f$$
$$fbd : def = bd : de = b : e$$

segue che

$$abc : cbd = cbd : fbd = fbd : def$$

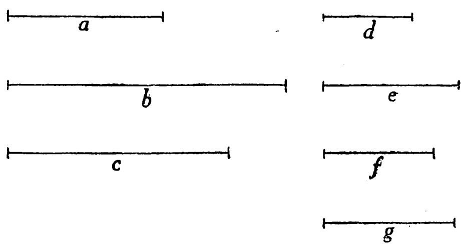
cioè esistono due medi proporzionali tra *abc* e *def* ecc.

20.

Se fra due numeri esiste un numero medio proporzionale, essi sono numeri piani simili.

Supponiamo che fra i due numeri *a*, *b* esista un numero *c* medio proporzionale. Dico che *a* e *b* sono numeri piani simili.

Siano *d* ed *e* i più piccoli possibili tra i numeri aventi



lo stesso rapporto di *a* e *c* [VII, 23]; *d* ed *e* sono quindi equisottomultipli rispettivamente di *a* e *c* [VII, 20]. Sia ora *f* composto di tante unità quante volte *d* sta in *a*. Allora *f*, moltiplicato per *d*, dà *a* [VII, def. 15].

Dunque a è un numero piano, i cui lati sono d ed f. Inoltre, poichè d ed e sono i più piccoli possibili tra i numeri aventi lo stesso rapporto di c e b, essi sono equisottomultipli rispettivamente di c e b [VII, 20]. Sia ora g composto di tante unità quante volte e sta in b. Sarà e sottomultiplo di b secondo g, ed il prodotto di g per e sarà b [VII, def. 15]. Dunque b è un numero piano di lati g ed e; e quindi a e b sono numeri piani. Dico che essi sono simili.

Infatti, poichè f, moltiplicando d, dà a; e moltiplicando e dà c, starà d ad e come a sta a c, cioè come c sta a b. Inoltre, poichè e, moltiplicando f, dà c, e moltiplicando g dà b, starà f a g come c a b [VII, 17]. Ma c sta a b come d sta ad e; quindi anche d sta ad e come f sta a g; e permutando, d sta ad f come e sta a g [VII, 13].

Dunque a e b sono numeri piani simili poichè i loro lati sono proporzionali [VII, def. 21]; c. d. d.

Se $a:b = b:c$. Dico che a e c sono numeri piani simili.
Sia $d:e$ il rapporto $a:c$ ridotto ai minimi termini e sia (VII, 20)

$$a = fd$$
$$b = ge.$$

Segue che (VII, 18)

$$d:e = a:c = f:g$$

da cui si ottiene (VII, 13)

$$d:f = e:g,$$

cioè a e b sono numeri piani simili.

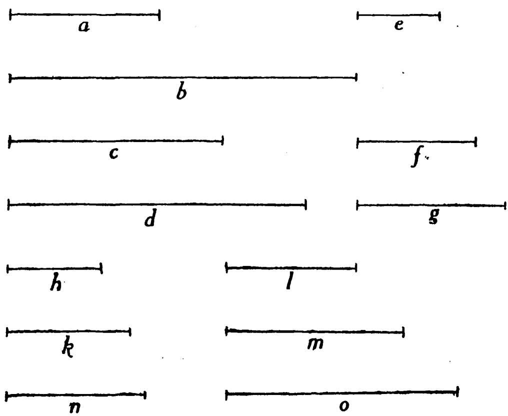
21.

Se fra due numeri esistono due numeri medi proporzionali, i numeri dati sono numeri solidi simili.

Fra i due numeri a, b esistano due medi proporzionali c e d. Dico che a e b sono numeri solidi simili.

Siano infatti e, f, g i più piccoli numeri che stanno nello stesso rapporto di a, c, d [prop. 21]; e e g sono dunque primi fra loro [prop. 3]. E poichè tra e e g esiste un medio proporzionale f, e e g sono numeri piani simili [prop. 20].

Siano h, k ed l, m rispettivamente i lati di e e di g. Per la proposizione precedente è chiaro che e, f, g sono



in proporzione continua, secondo i rapporti di h ad l e di k ad m. E poichè e, f, g sono i più piccoli numeri tra quelli che stanno nello stesso rapporto di a, c, d e sono tanti numeri quanti sono i numeri a, c, d, starà e a g come a a d. [VII, 14].

Ma e e g sono primi fra loro e quindi sono i più piccoli fra tutti quelli aventi uguale rapporto [VII, 21] e ne sono anche equisottomultipli, e precisamente il maggiore divide il maggiore, ed il minore divide il minore [VII, 20], cioè l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente. Dunque e e g sono equisottomultipli rispettivamente di a e d.

Sia ora n composto di tante unità quante volte e sta in a. Il prodotto di n per e sarà a [VII, def. 15]. Ma e è il prodotto di h per k; dunque n, moltiplicando il prodotto di h per k, dà a, cioè a è un numero solido di lati h, k, n. Inoltre, poichè e, f, g sono i più piccoli tra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto di c, d, b, i numeri e e g sono equisottomultipli rispettivamente di c e b [VII, 20]. Sia ora o composto di tante unità quante volte e sta in c. Dunque g è sottomultiplo di b secondo o, e b è il prodotto di o per g; ma g è il prodotto di l per m; dunque o, moltiplicando il prodotto di l per m, dà b, cioè b è un numero solido di lati l, m, o.

Dunque a e b sono numeri solidi. Dico che essi sono simili. Infatti, poichè n ed o, moltiplicando e, danno rispettivamente a e c, starà n ad o come a sta a e, cioè come e sta ad f [VII, 18]. Ma e sta ad f come h sta ad l come k sta ad m; perciò h sta ad l come k sta ad m, come n sta ad o. Ma h, k, n ed o, l, m sono rispettivamente i lati di a e di b. Dunque a e b sono numeri solidi simili [VII, def. 21]; c. d. d.

Se $a:c=c:d=d:b$, a e b sono numeri solidi simili.

Siano e, f, g i più piccoli numeri che stanno nello stesso rapporto di a, c, d.

Per le proposizioni 3 e 20 sarà

$$e=hk, \quad g=lm$$

dove

$$h:k=l:m;$$

e ancora per la prop. 20

$$e:g=h:l=k:m.$$

Ma (VII, 14)

$$a:d=e:g$$

ed essendo e, g primi fra loro (VIII, 3)

$$a=ne, \quad d=ng$$

e quindi

$$a=nhk, \quad d=nlm.$$

Inoltre

$$c:b=e:g$$

e quindi

$$c=oe, \quad b=og$$

e perciò

$$b=olm.$$

Ora (VII, 18)

$$e:f=a:c=ne:oe=n:o$$

e

$$e:f=h:l=k:m$$

perciò

$$n:o=h:l=k:m$$

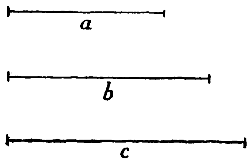
cioè a, b sono numeri solidi simili.

22.

Se tre numeri sono in proporzione continua, ed il primo di essi è un quadrato, anche il terzo è un quadrato.

Siano a, b, c tre numeri in proporzione continua, ed a sia un quadrato.

Dico che anche c è un quadrato. Infatti, poichè tra



a e c vi è un medio proporzionale b, i numeri a e c sono numeri piani simili [prop. 20]. Ma a è un quadrato; dunque anche c è un quadrato [VII, def. 21]; c. d. d.

Se

(I) $$a:b = b:c$$

ed

(II) $$a = m^2$$

anche

(III) $$c = n^2.$$

Infatti, da (I), (prop. 20), segue:

$$a = pq$$
$$c = rs,$$

avendosi

$$p:r = q:s.$$

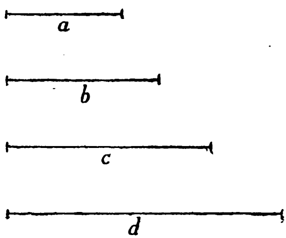
Quindi (VII, def. 21) da (II) segue (III).

23.

Se quattro numeri sono in proporzione continua, ed il primo di essi è un cubo, anche il quarto è un cubo.

Siano a, b, c, d quattro numeri in proporzione continua, ed a sia un cubo.

Dico che anche d è un cubo. Infatti, poichè tra a



e d vi sono due medi proporzionali b e c, i numeri a e d sono numeri solidi simili [prop. 21]. Ma a è un cubo; dunque anche d è un cubo [VII, def. 21]; c. d. d.

Se

(I) $$a:b = b:c = c:d$$

ed

(II) $$a = m^3$$

anche

(III) $$d = n^3$$

Infatti, da (I) (prop. 21) segue:

$$a = pqr$$
$$d = stu$$

avendosi

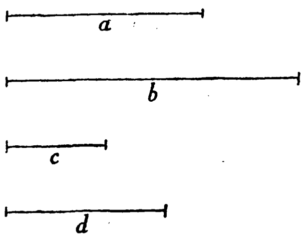
$$p:s = q:t = r:u.$$

Quindi (VII, def. 21) per (II) segue (III).

24.

Se il rapporto di due numeri è uguale al rapporto di due quadrati, ed il primo di essi è un quadrato, anche il secondo è un quadrato.

Supponiamo infatti che il rapporto di due numeri a, b sia uguale a quello di due quadrati c, d; ed a sia un quadrato. Dico che anche b è un quadrato.



Infatti, poichè c e d sono quadrati, essi sono numeri piani simili, e quindi fra c e d esiste un medio proporzionale [prop. 18]. Ma c sta a d come a sta a b; perciò anche fra a e b esisterà un medio proporzionale [prop. 8]. Ed a è un quadrato; dunque anche b è un quadrato [prop. 22]; c. d. d.

Se

$$a : b = c^2 : d^2$$

ed

$$a = m^2$$

anche

$$b = n^2.$$

Infatti

$$c^2 : cd = cd : d^2 \qquad \text{(prop. 18)}$$

quindi esiste un x tale che

$$a : x = x : b \qquad \text{(prop. 8).}$$

Perciò

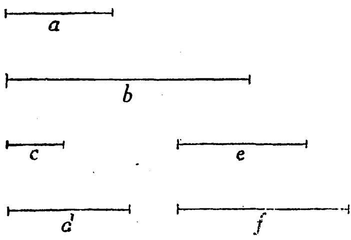
$$b = n^2. \qquad \text{(prop. 22).}$$

25.

Se il rapporto di due numeri è uguale al rapporto di due cubi, ed il primo di essi è un cubo, anche il secondo è un cubo.

Supponiamo che il rapporto di due numeri a, b sia uguale al rapporto di due numeri cubi c, d; ed a sia un cubo. Dico che anche b è un cubo.

Infatti, poichè c e d sono cubi, essi sono numeri solidi simili, e quindi fra c e d esistono due medi propor-



zionali [prop. 19]. Ma se fra c e d esistono due medi proporzionali, altrettanti ne esisteranno fra quei numeri che stanno nello stesso rapporto di c e d [prop. 8].

Dunque anche fra a e b esistono due medi proporzionali; siano e ed f. Poichè a, e, f, sono in proporzione continua, ed a è un cubo, anche b è un cubo [prop. 23];

c. d. d.

Se

$$a : b = c^3 : d^3$$

ed

$$a = m^3,$$

anche

$$b = n^3.$$

Infatti

$$c^3 : c^2 d = c^2 d : cd^2 = cd^2 : d^3 \qquad \text{(prop. 19);}$$

quindi esistono un x ed y tali che

$$a : x = x : y = y : b \qquad \text{(prop. 8).}$$

Perciò

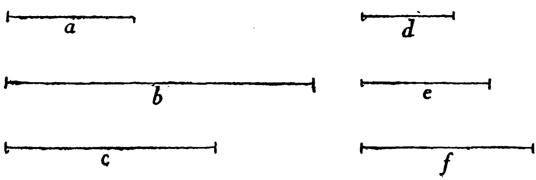
$$b = n^3 \qquad \text{(prop. 23).}$$

PEANO raggruppa le proposizioni 6, 7, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25 di questo libro sotto la forma seguente: « Se b^n è un multiplo di a^n, b è un multiplo di a ».

26.

Il rapporto di due numeri piani simili è uguale al rapporto di due quadrati.

Siano dati i numeri piani simili a e b. Dico che il loro rapporto è uguale al rapporto di due quadrati.



Infatti, poichè a e b sono numeri piani simili, fra di essi esiste un medio proporzionale [prop. 18]. Sia c; e siano d, e, f i più piccoli possibili fra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto di a, c, b [prop. 2]. I numeri d ed f sono dunque quadrati [prop. 2, coroll.]. E poichè d sta ad f come a sta a b, e d ed f sono quadrati, a e b stanno fra loro come due quadrati; c. d. d.

Se

$$a = mn$$
$$b = pq$$

ed

$$m:p = n:q \qquad (mq = pn)$$

dico che

(I) $$a:b = x^2:y^2.$$

Infatti

$$a:c = c:b \qquad \text{(prop. 18);}$$

e siano d e f i più piccoli numeri tali che

$$d:e:f = a:c:b. \qquad \text{(prop. 2)}$$

Sarà

$$d = x^2, \quad f = y^2 \qquad \text{(prop., 2 cor.)}$$

e poichè

$$a:b = d:f$$

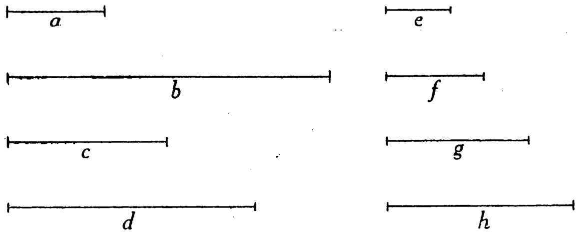
segue (I).

27.

Il rapporto di due numeri solidi simili è uguale al rapporto di due cubi.

Si abbiano i numeri solidi simili a e b. Dico che il loro rapporto è uguale al rapporto di due cubi.

Infatti, poichè a e b sono numeri solidi simili, fra di essi esistono due medi proporzionali [prop. 19]. Siano c e d, e siano e, f, g, h i più piccoli possibili fra tutti i numeri aventi lo stesso rapporto di a, b, c, d [prop. 2]. I numeri e ed h sono dunque cubi [prop. 2, coroll.].



E poichè e sta ad h come a sta a b, i numeri a e b stanno fra loro come due cubi; c. d. d.

Se

$$a = mnp$$
$$b = qrs$$

ed

$$m:q = n:r = ps;$$

dico che

(I) $$a:b = x^3:y^3.$$

Infatti

$$a:c = c:d = d:b \qquad \text{(prop. 19)}.$$

Siano e, f, g, h i più piccoli numeri tali che

$$e:f:g:h = a:c:d:b.$$

Sarà

$$e = x^3, \quad h = y^3, \qquad \text{(prop. 2, cor.)}$$

e poichè

$$a:b = e:h$$

segue la (I).

LIBRO NONO

PER CURA DI

GUIDO RIETTI

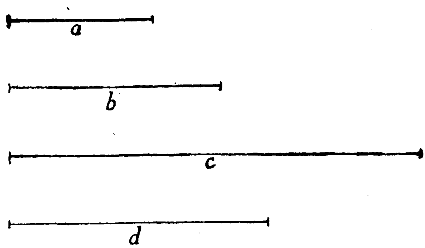
Proposizioni

1.

Il prodotto di due numeri piani simili è un quadrato.

Siano a, b due numeri piani simili e sia c il prodotto di a per b.

Dico che c è un quadrato. Sia infatti d il prodotto di a per sè stesso; e quindi d sia un quadrato. Poichè a, molti-



plicato per sè stesso dà d, e moltiplicato per b dà c, il numero a starà a b come d a c [VII, 17]. Ora, fra a e b, essendo numeri piani simili, esiste un numero medio proporzionale [VIII, 18]. Quindi [VIII, 8] esisterà un medio proporzionale anche fra d e c. Ma d è un quadrato, dunque anche c è un quadrato [VIII, 22]; c. d. d.

Se

$$a = p \cdot q, \quad b = r \cdot s$$

e

$$p : r = q : s,$$

il prodotto $a \cdot b$ è un quadrato.

Infatti [VII, 17]

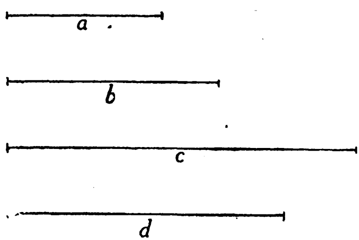
$$a : b = a^2 : a \cdot b$$

e [VIII, 18] fra a e b esiste un medio proporzionale; perciò [VIII, 8] ne esisterà uno anche fra a^2 ed $a \cdot b$ e quindi [VIII, 22] $a \cdot b$ è un quadrato.

2.

Due numeri il cui prodotto è un quadrato, sono numeri piani simili.

Siano dati i numeri a, b ed il loro prodotto c sia un quadrato. Dico che a, b sono numeri piani simili. Infatti, sia d il prodotto di a per sè stesso: allora d è un quadrato. E poichè a, moltiplicato per sè stesso, dà d, e moltiplicato per b dà c, starà a a b come d sta a c [VII, 17].



Quindi, d e c, essendo quadrati, sono anche numeri piani simili e fra loro esiste un medio proporzionale [VIII, 18].

Inoltre d sta a c come a sta a b; perciò anche tra a e b esiste un medio proporzionale [VIII, 18]. Ma se fra due numeri esiste un medio proporzionale, essi sono piani simili [VIII, 20]. Dunque a e b sono numeri piani simili;

c. d. d.

Se il prodotto $a \cdot b$ è un quadrato ed

$$a = p \cdot q, \quad b = r \cdot s$$

si ha

$$p : r = q : s.$$

Infatti [VIII, 17]

$$a : b = a^2 : a \cdot b$$

e [VIII, 18] fra a^2 ed $a \cdot b$ esiste un medio proporzionale; perciò ne esisterà uno anche fra a e b [VIII, 8] e quindi [VIII, 20] sarà

$$p : r = q : s.$$

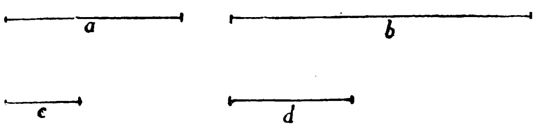
3.

Il quadrato di un cubo è un cubo.

Sia dato il cubo a e sia b il prodotto di a per sè stesso. Dico che b è un cubo.

Sia infatti c il lato di a e sia d il prodotto di c per sè stesso. Allora a sarà il prodotto di c per d; e poichè c, moltiplicato per sè stesso, dà d, c è sottomultiplo di d secondo c [VII, def. 15].

Ma anche l'unità è sottomultiplo di c secondo c. Quindi [VII, def. 20] l'unità sta a c come c sta a d. Inoltre, poichè c, moltiplicato per d, dà a, d è sottomul-



tiplo di a secondo c. Ma anche l'unità è sottomultiplo di c secondo c. Quindi l'unità starà a c come d sta ad a. Ma l'unità sta a c come c sta a d, perciò l'unità sta a c come c sta a d, e come d sta ad a. Dunque fra l'unità ed a esistono due medi proporzionali c e d.

Inoltre, poichè a, moltiplicato per sè stesso, dà b, a è sottomultiplo di b secondo a. Ma anche l'unità è sottomultiplo di a secondo a. Dunque l'unità sta ad a come a sta a b.

E fra l'unità ed a esistono due medi proporzionali. Lo stesso quindi ha luogo anche fra a e b [VIII, 8]. Ma se fra due numeri ci sono due medi proporzionali, ed il primo numero è un cubo, anche il secondo sarà un cubo [VIII, 23]. Il numero a è un cubo; dunque anche b lo sarà;

c. d. d.

$(a^3)^2$ è un cubo [cioè $(a^3)^2 = (a^2)^3$].

Infatti

$$1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3,$$

cioè esistono due medi proporzionali tra 1 ed a^3; ma si ha inoltre

$$1 : a^3 = a^3 : (a^3)^2$$

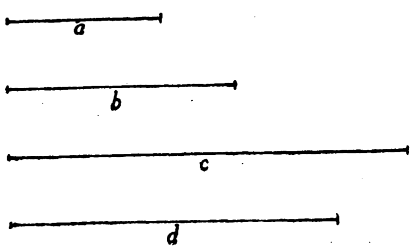
e quindi [VIII, 8] esistono due medi proporzionali anche tra a^3 ed $(a^3)^2$.

Perciò [VIII, 23] anche $(a^3)^2$ è un cubo.

4.

Il prodotto di un cubo per un altro cubo è un cubo.

Dati i cubi a, b, sia c il prodotto di a per b. Dico che



c è un cubo. Infatti sia d il prodotto di a per sè stesso; d è un cubo [prop. 3].

Poichè a, moltiplicato per sè stesso, dà d, e moltiplicato per b dà c, starà a a b come d a c [VII, 17].

Ora, a e b sono cubi; quindi sono anche numeri solidi simili; e fra a e b esistono due medi proporzionali [VIII, prop. 19].

Perciò anche fra d e c esistono due medi proporzionali [prop. 8].

E d è un cubo. Dunque anche c è un cubo; c. d. d.

Il prodotto $a^3 \cdot b^3$ è un cubo [cioè $a^3b^3 = (ab)^3$].
Infatti [VIII, 17]

$$a^3 : b^3 = (a^3)^2 : a^3b^3.$$

Ora, tra a^3 e b^3 esistono due medi proporzionali [VIII, 19]; quindi [VIII, 8] ne esistono due anche tra $(a^3)^2$ ed a^3b^3.

Perciò [VIII, 23] anche $a^3 \cdot b^3$ è un cubo.

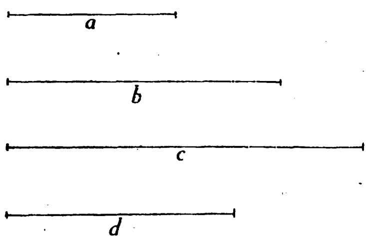
PEANO raggruppa le proposizioni VIII, 11, 12 e la presente sotto la forma:

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

5.

Se il prodotto di un cubo per un altro numero è un cubo, anche quel numero è un cubo.

Siano dati il cubo a ed un altro numero b ed il nu-



mero c, prodotto di a per b, sia un cubo. Dico che anche b è un cubo.

Sia infatti d il prodotto di a per sè stesso; d è un cubo [prop. 3]. E poichè a, moltiplicato per sè stesso, dà d, e moltiplicato per b dà c, starà a a b come d sta a c [VII, 17]. Ma d e c sono cubi, perciò sono anche solidi simili, e quindi fra d e c esistono due medi proporzionali [VIII, 19].

Inoltre d sta a c come a sta a b; quindi anche fra a e b esistono due medi proporzionali [VIII, 8]. Ma a è un cubo; dunque anche b è un cubo; c. d. d.

Se $a^3 \cdot b$ è un cubo, anche b è un cubo.

Infatti [prop. 3] $(a^3)^2$ è un cubo e si ha [VII, 17];

$$(a^3)^2 : a^3 b = a^3 : b.$$

Ora, tra $(a^3)^2$ ed $a^3 b$ esistono due medi proporzionali [VIII, 19]; quindi [VIII, 8] ne esisteranno due anche tra a^3 e b.

Perciò [VIII, 23] anche b è un cubo.

PEANO raggruppa le proposizioni VIII, 11, 12 e la presente sotto la forma

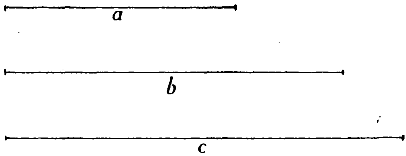
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

6.

Se il quadrato di un numero è un cubo, quel numero è un cubo.

Sia dato il numero a, ed il suo quadrato b sia un cubo. Dico che anche a è un cubo. Sia infatti c il prodotto di a per b; poichè c, moltiplicato per sè stesso, dà b, e moltiplicato per b dà c, il numero c è un cubo. E poichè b è il prodotto di a per sè stesso, il numero a è sottomultiplo di b secondo a. Ma anche l'unità è sottomultipla di a secondo a. Quindi l'unità sta ad a come a sta a b.

E poichè c è il prodotto di a per b, b è sottomultiplo di c secondo a. Ma anche l'unità è sottomultipla di a secondo a. Quindi l'unità sta ad a come b sta a c. Ma l'unità sta ad a come a sta a b, perciò a sta a b come b



sta a c. E poichè b e c sono cubi, essi sono anche numeri solidi simili; dunque fra b e c esistono due medi proporzionali [VIII, 19].

Inoltre b sta a c come a sta a b; dunque anche fra a e b esistono due medi proporzionali [VIII, 8]. Ma b è un cubo. Dunque anche a è un cubo; c. d. d.

Se a^2 è un cubo, anche a è un cubo.
Infatti

$$1 : a = a : a^2 = a^2 : a^3;$$

a^2 ed a^3 sono cubi e quindi [VIII, 19] esistono due numeri x, y tali che

$$a^2 : x = x : y = y : a^3;$$

esisteranno quindi anche due numeri x', y' [VIII, 8], tali che

(1) $$a : x' = x' : y' = y' : a^2;$$

segue che $a^2 : y' = y' : x' = x' : a$, e poichè a^2 è un cubo anche [VIII, 23] a è un cubo.

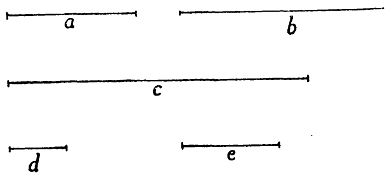
Il risultato si può ottenere applicando direttamente alla (1) la prop. 21 del libro VIII.

7.

Il prodotto di un numero non primo per un altro numero è un numero solido.

Sia dato il numero non primo *a*, ed un altro numero *b*, e sia *c* il prodotto di *a* per *b*. Dico che *c* è un numero solido.

Infatti, essendo *a* un numero non primo, vi sarà qualche numero che lo dividerà. Sia *d* un tale numero, e sia



sottomultiplo di *a* secondo il numero *e*. Per conseguenza *e*, moltiplicato per *d*, produce *a* [VII, def. 15].

Poichè *c* è il prodotto di *a* per *b*, ed *a* è a sua volta il prodotto di *d* per *e*, il prodotto di *d* per *e*, moltiplicato per *b*, dà *c*.

Due *c* è un numero solido ed i suoi lati sono *d*, *e*, *b*;

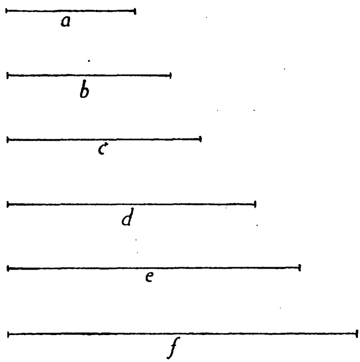
c. d. d.

8.

Data una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità, il terzo termine è un quadrato e sono quadrati anche il quinto, il settimo, ecc.; il quarto termine è un cubo e sono cubi anche il settimo, il decimo ecc.; il settimo poi è contemporaneamente cubo e quadrato e tali sono anche il tredicesimo, il diciannovesimo ecc.

Siano dati quanti si vogliano numeri *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* tali che l'unità stia ad *a* come *a* sta a *b*, come *b* sta a *c*, come *c* sta a *d*, come *d* sta ad *e*, come *e* sta ad *f*. Dico che il terzo termine *b* è un quadrato e che sono quadrati anche il quinto ecc; che il quarto termine c è un cubo e che sono cubi anche il settimo ecc.; che il settimo termine f è contemporaneamente cubo e quadrato e che tali sono il tredicesimo ecc.

Infatti, poichè l'unità sta ad a come a sta a b, l'unità ed a sono equisottomultipli rispettivamente di a e b [VII,



def. 20]. Ma l'unità è sottomultiplo di a secondo a; perciò anche a è sottomultiplo di b secondo a, ossia b è il prodotto di a per sè stesso [VII, def. 15].

Dunque b è un quadrato; e poichè b sta a c come c sta a d, e b è un quadrato, anche d è un quadrato [VIII, 22]. Per la stessa ragione anche f è un quadrato e nello stesso modo si dimostra che sono quadrati tutti i termini di posto dispari.

Dico ora che il quarto termine c è un cubo e che sono cubi anche il settimo ecc.

Infatti, poichè l'unità sta ad a come b sta a c, l'unità e b sono equisottomultipli rispettivamente di a e c. Ma l'unità è sottomultiplo di a secondo a; perciò anche b è sottomultiplo di c secondo a, ossia c è il prodotto di a per b.

E poichè b è il prodotto di a per sè stesso, e c è il prodotto di a per b, il numero c è un cubo. E siccome c sta a d come d sta ad e, come e sta ad f, anche f è un cubo [VIII, 23]. Ma si è già dimostrato che f è un quadrato; dunque il settimo termine è contemporaneamente cubo e quadrato. Nello stesso modo si dimostra che sono tali anche il tredicesimo ecc.; c. d. d.

Se 1, a_1, a_2, ..., a_n è una serie di numeri in progressione geometrica

a_2, a_4, a_6, ... sono quadrati;

a_3, a_6, a_9, ... sono cubi;

a_6, a_{12}, a_{18}, ... sono quadrati e cubi.

Infatti

$$1 : a_1 = a_1 : a_2 ;$$

ne segue che

$$a_2 = a_1^2 ;$$

e poichè

$$a_2 : a_3 = a_3 : a_4 \qquad \text{[VIII, 22]}$$

anche a_4 è un quadrato.

Similmente si dimostra che a_6, a_8, ... sono quadrati.

Si ha inoltre

$$1 : a_1 = a_2 : a_3 = a_1^2 : a_3 ;$$

ne segue che

$$a_3 = a_1^3 ;$$

e poichè

$$a_3 : a_4 = a_4 : a_5 = a_5 : a_6 , \qquad \text{[VIII, 23]}$$

anche a_6 è un cubo.

Similmente si dimostra che a_9, a_{12}, ... sono cubi.

Risulta quindi senz'altro che a_6, a_{12}, ... sono contemporaneamente quadrati e cubi.

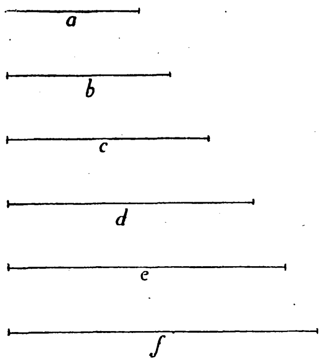
Il risultato è evidente se si scrive la progressione con la notazione moderna:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4, \ldots ,\ a^n .$$

9.

Se in una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità, il secondo termine è un quadrato, tutti gli altri sono quadrati. E se il secondo termine è un cubo, tutti gli altri sono cubi.

Siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c, d, e, f tali che l'unità stia ad a come a sta a b, come b sta a c, come c sta a d, come d sta ad e, come e sta ad f; ed a sia un quadrato. Dico che tutti i rimanenti numeri dati sono



quadrati. Si è già dimostrato [prop. 8] che il terzo termine b è un quadrato e che sono quadrati anche il quinto ecc. Dico che anche tutti i rimanenti termini sono quadrati.

Infatti, poichè a sta a b come b sta a c, ed a è un quadrato, anche c è un quadrato [VIII, 22].

Inoltre, poichè b sta a c come c sta a d, e b è un quadrato, anche d è un quadrato [VIII, 22]. Nello stesso modo si dimostra che anche tutti gli altri termini sono quadrati.

Supponiamo ora che a sia un cubo. Dico che anche tutti i rimanenti numeri dati sono cubi.

Si è già dimostrato [prop. 8] che il quarto termine c è un cubo e che sono cubi anche il settimo ecc. Dico che anche tutti i rimanenti termini sono cubi.

Infatti, poichè l'unità sta ad a come a sta a b, l'unità ed a sono equisottomultipli rispettivamente di a e b. Ma l'unità è sottomultiplo di a secondo a; perciò a è sottomultiplo di b secondo a, ossia b è il prodotto di a per sè stesso. E poichè a è un cubo ed il quadrato di un cubo è un cubo [prop. 3] anche b è un cubo. E poichè a sta a b come b sta a c, come c sta a d, ed a è un cubo, anche d è un cubo.

Nello stesso modo si dimostra che anche tutti gli altri termini sono cubi; c. d. d.

Se 1, a^2, a_2, a_3, a_4, ... è una serie di numeri in progressione geometrica, a_2, a_3, a_4, ... sono quadrati;

e se 1, a^3, a_2, a_3, a_4, ... è una serie di numeri in progressione geometrica, a_2 a_3 a_4, ... sono cubi.

1) Nella proposizione precedente si è dimostrato che a_2, a_4, a_6, ... sono quadrati.

Poichè

$$a^2 : a_2 = a_2 : a_3$$

anche a_3 [VIII, 22] è un quadrato.

Nello stesso modo si dimostra che sono quadrati anche a_5, a_7, ...

2) Nella proposizione precedente si è dimostrato che a_3, a_6, a_9, ... sono cubi.

Poichè

$$1 : a^3 = a^3 : a_2$$

segue che

$$a_2 = (a^3)^2$$

e quindi [prop. 3] a_2 è un cubo.

Inoltre

$$a_2 : a_3 = a_3 : a_4$$

e quindi [VIII, 23] anche a_4 è un cubo.

Nello stesso modo si dimostra che sono cubi anche a_5, a_7,.....
Il risultato è evidente con la notazione moderna; perchè i numeri delle due progressioni si scrivono

1) $1, a^2, a^4, a^6, \ldots, a^{2m}$
2) $1, a^3, a^6, a^9, \ldots, a^{3m}$.

In sostanza si prova così che per $m = 2, 3$ è

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

e sotto questa forma PEANO raggruppa insieme a questa anche le proposizioni VIII, 13 e IX, 3.

Al VACCA si deve l'importante osservazione che in questa e nella precedente proposizione EUCLIDE si serve del principio di induzione completa ([1]).

Esso è implicito nelle parole: « E nello stesso modo si dimostra che tutti gli altri termini sono quadrati ».

Il VACCA ha anche riconosciuto che il principio d'induzione completa e il suo uso sistematico, risale a FRANCESCO MAUROLICO (Messina, 1494-1575) ([2]).

La sua opera più importante è: *Arithmeticorum libri duo*; scritta nel 1557 e pubblicata nel 1575 nella collezione: « D. Francisci Maurolici Opuscula mathematica ». Nella prefazione egli rileva che nè EUCLIDE nè altri autori come GIAMBLICO, NICOMACO, BOEZIO, hanno trattato le questioni relative ai numeri poligonali e poliedrici e che i commentatori di EUCLIDE si sono limitati a riprodurre quanto era contenuto nei suoi *Elementi*. Egli invece si ripromette di esporre le sue cognizioni su questi numeri in *forma facile*; e ciò fa precisamente servendosi del principio d'induzione che egli applica per la dimostrazione di molte proposizioni.

([1]) Cfr. G. VACCA: *Sulla storia del principio d'induzione completa.* « Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche », Tomo XII, fasc. 2°, 1909.

([2]) Cfr. G. VACCA: *Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction.* « Bulletin of the American Mathematical Society », Vol. XVI, pag. 70-73, 1910.

Ad esempio egli dimostra (Proposizione 13) che: se a è un numero, allora

$$a^2 + (2a + 1) = (a + 1)^2$$

e servendosi di questo risultato dimostra in seguito (Proposizione 15) che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2a + 1) = (a + 1)^2.$$

MAUROLICO dimostra questa proposizione nel modo seguente:

« Nam per *P* 13, unitas imprimis cum impari sequente, facit quadratum sequentem, scilicet 4.

Et ipse 4 quadratus secundus cum impari tertio, scilicet 5, facit quadratum tertium, scilicet 9.

Itemque 9 quadratus tertius, cum impari quarto, scilicet 7, facit quadratum quartum scilicet 16. Et sic deinceps in infinitum, semper *P* 13 repetitam propositum demonstratur ».

MAUROLICO procede generalmente così: Applica il ragionamento ai primi numeri (quasi sempre ai primi cinque numeri) e poi conclude:

« et eodem syllogismo pro quovis alio assignato loco, utemur ad roborationem propositi ». (Prop. 65, pag. 30), oppure

« et a quinto loco transfertur syllogismus ad quemvis alium, ut propositio conclusit » (Prop. 67, pag. 33), o con altre frasi analoghe.

Dopo MAUROLICO il principio d'induzione è stato adoperato frequentemente dai matematici i quali in genere si limitano a richiamarlo come un « noto ragionamento ».

Ma nei tempi più recenti DEDEKIND ha approfondito la critica del suo significato.

Questo rimane chiarito dal considerare che la serie bene ordinata dei numeri naturali 1, 2, 3, ... può essere proseguita come fa CANTOR mercè l'aggiunta di successivi transfiniti ordinali

$$\omega,\ \omega + 1, \dots,\ 2\omega,\ 2\omega + 1, \dots .$$

La serie

$$1,\ 2,\ 3, \dots,\ \omega,\ \omega + 1, \dots,\ 2\omega,\ 2\omega + 1, \dots$$

rimane *bene ordinata* nel senso che non solo è dato un ordine dei suoi elementi, ma per ogni gruppo in essa contenuto esiste un primo elemento (condizione che equivale al postulato di CAMPANO. Cfr. la nota alla prop. VII, 2).

Ora per una serie bene ordinata che comprende numeri transfiniti, il principio d'induzione non vale più: una proprietà P che sussiste per il numero uno e della quale si può affermare che, sussistendo per x, deve sussistere per $x+1$, non resta affatto dimostrata per ω, $\omega+1$, ...

DEDEKIND esprime questa osservazione in altra maniera: se si riuniscono in una medesima classe C tutti i numeri soddisfacenti alla proprietà P, si può dire che

« una classe C la quale contenga il numero 1 e di cui si dimostri che contenendo x deve contenere $x+1$, conterrà la serie dei numeri naturali 1, 2, 3, ..., n, ..., ma non necessariamente i transfiniti ω, $\omega+1$, ... ».

Così essendo trasformato il concetto del principio d'induzione, esso appare come una proprietà della serie bene ordinata dei numeri naturali ovvero delle serie infinite bene ordinate che si possono porre in corrispondenza con quella; si può dire che il principio d'induzione caratterizza fra le serie infinite bene ordinate il *minimo infinito*.

Ciò posto DEDEKIND si propone di *dimostrare* il principio d'induzione ossia l'anzidetta proprietà della serie bene ordinata minima, dando prima di questa una definizione appropriata. A tale scopo egli considera una corrispondenza biunivoca T fra gli elementi di un insieme infinito I ed una sua parte propria I': ad un elemento A di I fuori di I', corrisponde un elemento A' di I', ad A' un nuovo elemento A'' e così via. La serie bene ordinata minima che è costituita dai successivi elementi $AA'A''A'''$.... resta definita per DEDEKIND come interferenza di tutti i possibili insiemi che soddisfano alla proprietà di contenere A e di contenere insieme ad ogni altro elemento il suo omologo in T. Per codesta serie-interferenza DEDEKIND dimostra quindi la proprietà espressa dal principio d'induzione.

PEANO [1], riprendendo il concetto di DEDEKIND, trova più semplice di postulare anzichè dimostrare la proprietà sopra indicata.

---

[1] Cfr. G. PEANO: *Arithmetices principia novo metodo exposita*, 1889.

Il postulato che esprime il principio d'induzione e vale a definire la serie bene ordinata dei numeri naturali assume dunque la forma seguente:

« Se una classe di elementi contiene il numero uno (ovvero lo zero) e dall'ipotesi che essa contenga n si deduce che essa deve contenere il successivo $n + 1$, questa classe contiene tutti i numeri ».

[Cfr. DEDEKIND: *Essenza e significato dei numeri*: Note III e IV di O. ZARISKI - Roma, Stock, 1926].

Il principio di induzione si trova in un interessante rapporto col postulato di CAMPANO (1) (esistenza di un minimo in un gruppo di numeri: condizione cantoriana che la serie dei numeri ordinali sia bene ordinata).

Infatti M. PIERI (2) ha rilevato che il principio di induzione può dedursi dal postulato anzidetto, purchè si ammetta che ogni numero diverso dal primo (1) possegga un precedente (di cui è successivo immediato). La deduzione si compie facilmente: se un gruppo di numeri G contiene 1, e dall'ipotesi ch'esso contenga n segue che contenga $n - 1$, si dimostra assurdo che esistano numeri non contenuti in G. Infatti, sia m il minimo fra tali numeri: allora il suo precedente $m + 1$ è contenuto in G. Ma, così essendo, anche $(m - 1) + 1 = m$ dev'essere contenuto in G.

Reciprocamente, ammesso il principio d'induzione, si può dimostrare che ogni numero possiede un precedente e che sussiste il postulato di CAMPANO. Questa deduzione non è svolta in PIERI, ma è stata indicata da G. VACCA e si trova in un articolo di M. T. ZAPELLONI (« Periodico di Matematiche », 1928, n.° 3) nel quale il postulato del minimo viene fatto risalire a CAMPANO, e dove si dà una revisione sintetica delle recenti ricerche critiche sui principi dell'aritmetica.

Accenniamo brevemente alla dimostrazione del postulato di CAMPANO:

Si suppone che la proprietà di contenere un minimo valga per

---

(1) Cfr. la nota alla prop. VII, 2.

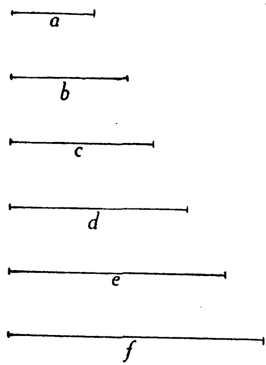
(2) *Sugli assiomi aritmetici*, in « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali ». Serie II, fasc. II, Catania, 1908.

ogni gruppo G quando in esso si trovi un numero $\leq n$. (Vale certo per $n = 1$). Si deduce che la stessa proprietà vale anche per un gruppo G contenente $n+1$. Infatti, se G non contiene alcun numero $\leq n$, $n+1$ è il suo minimo.

10.

Se in una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità, il secondo termine non è un quadrato, nessun altro termine della proporzione è un quadrato, tranne il terzo, il quinto ecc. E se il secondo termine non è un cubo, nessun altro termine della proporzione è un cubo, tranne il settimo, il decimo ecc.

Siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c, d, e, f tali che l'unità stia ad a come a sta a b, come b sta a c, come



c sta a d, come d sta ad e, come e sta ad f, ed a non sia un quadrato. Dico che nessun altro termine della proporzione è un quadrato, tranne il terzo, il quinto ecc.

Supponiamo infatti che c sia un quadrato; poichè anche b è un quadrato [prop. 8], i numeri b e c hanno fra loro la ragione di un numero quadrato ad un numero quadrato. Ma b sta a c come a sta a b; perciò a e b stanno fra loro come due quadrati. Quindi a e b sono numeri piani simili [VIII, 26].

Ma b è un quadrato; dunque anche a è un quadrato, contro l'ipotesi. Dunque c non è un quadrato. Nello stesso modo si dimostra che nessun altro termine della proporzione può essere un quadrato, tranne il terzo, il quinto ecc.

Supponiamo ora che a non sia un cubo. Dico che nessun altro termine della proporzione è un cubo, tranne il quarto, il settimo ecc.

Supponiamo infatti che d sia un cubo; poichè anche c è un cubo [prop. 8] e c sta a d come b sta a c, b e c stanno fra loro come due cubi. E c è un cubo; dunque anche b è un cubo [VII, 13; VIII, 25].

E poichè l'unità sta ad a come a sta a b, e l'unità è sottomultiplo di a secondo a, anche a è sottomultiplo di b secondo a, ossia b è il prodotto di a per sè stesso. Ora, se il quadrato di un numero è un cubo, esso è un cubo [prop. 6].

Dunque a è un cubo, contro l'ipotesi. Quindi d non è un cubo. Nello stesso modo si dimostra che nessun altro termine della proporzione può essere un cubo, tranne il quarto, il settimo ecc.; c. d. d.

Sia 1, a_1, a_2, ..., a_n una serie di numeri in progressione geometrica.

1) Se a_1 non è un quadrato, nessun altro termine della progressione è quadrato eccettuato a_2, a_4, a_6, ...

2) Se a_1 non è un cubo, nessun altro termine della progressione è cubo, eccettuato a_3, a_6, a_9, ...

1) Supponiamo infatti che a_3 sia un quadrato.

Si ha

$$a_2 : a_3 = a_1 : a_2$$

e [prop. 8] a_2 è un quadrato; ne segue [VIII, 24] che anche a_1 deve essere un quadrato, contro l'ipotesi.

2) Supponiamo che a_4 sia un cubo.

Si ha

$$a_3 : a_4 = a_2 : a_3$$

e [prop. 8] a_3 è un cubo; ne segue [VIII, 25] che anche a_2 deve essere un cubo. E poichè

$$1 : a_1 = a_1 : a_2 \quad \text{è} \quad a_2 = a_1^2 ;$$

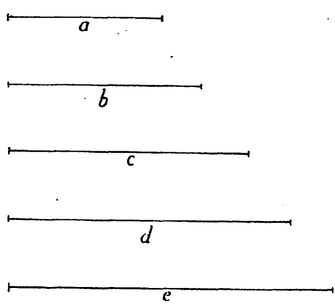
quindi anche a_1 [prop. 6] deve essere un cubo, contro l'ipotesi.

11.

Data una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità, il secondo è sottomultiplo dell'ultimo secondo uno dei termini intermedi.

Sia data l'unità a e quanti si vogliano numeri b, c, d, e, tali che a stia a b come b sta a c, come c sta a d, come d sta ad e.

Dico che b è sottomultiplo di e secondo uno dei numeri c, d. Infatti, poichè a sta a b come d sta ad e, a e d



sono equisottomultipli rispettivamente di b ed e. Quindi anche a e b sono equisottomultipli rispettivamente di d ed e [VII, 15].

Ma l'unità a è sottomultiplo di d secondo d. Dunque anche b è sottomultiplo di e secondo d.

Dunque....; c. d. d.

Corollario

Ed è chiaro che, dati a, b, c, d, e in proporzione continua, se b è sottomultiplo di e secondo il numero d, i numeri b e d si trovano alla stessa distanza, rispettivamente, dall'unità a e da e.

Se $1, a_1, a_2, \ldots a_n$ è una serie di numeri in progressione geometrica, si ha

$$a_n = a_r \cdot a_{n-r} \qquad (r < n).$$

[Euclide dimostra soltanto che

$$a_n = a_1 \cdot a_{n-1}$$

ed enuncia nel corollario il caso generale].

Si ha infatti

$$1 : a_1 = a_{n-1} : a_n$$

e quindi [VII, 15]

$$1 : a_{n-1} = a_1 : a_n ,$$

cioè

$$a_n = a_1 \cdot a_{n-1} .$$

Il corollario può dimostrarsi così:

Per ipotesi si ha

$$\begin{gathered} 1 : a_1 = a_r : a_{r+1} \\ a_1 : a_2 = a_{r+1} : a_{r+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-r-1} : a_{n-r} = a_{n-1} : a_n ; \end{gathered}$$

ne segue [VII, 14] che

$$1 : a_{n-r} = a_r : a_n ;$$

e quindi, come prima, risulta che

$$a_n = a_r \cdot a_{n-r}.$$

Con la notazione moderna si ha:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

12.

Data una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità, i divisori primi dell'ultimo termine sono anche divisori del secondo termine.

Siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c, d, tali che l'unità stia ad a come a sta a b, come b sta a c, come c sta a d.

Dico che i divisori primi di d sono anche divisori di a. Supponiamo che il numero primo e divida d. Dico che e divide a.

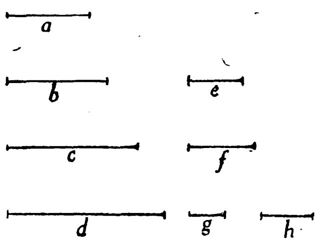
Supponiamo che non lo divida. Poichè e è primo, ed ogni numero primo è primo con ogni numero che esso non divide [VII, 29], e ed a sono primi fra loro.

Supponiamo che e sia sottomultiplo di d secondo f, cioè che e, moltiplicato per f, dia d. Poichè a è sottomultiplo di d secondo c [prop. 11, coroll.], a, moltiplicato per c darà d. Ma d è anche il prodotto di e per f, quindi il prodotto di a per c è uguale al prodotto di e per f, cioè a sta ad e come f sta a c [VII, 19].

Ma a ed e sono primi fra loro e quindi [VII, prop. 21] sono i più piccoli numeri che hanno quel rapporto. Perciò sono equisottomultipli dei numeri che hanno fra loro quel rapporto [VII, 20] e precisamente l'antecedente divide l'antecedente e il conseguente divide il conseguente.

Quindi *e* divide *c*. Supponiamo che ne sia sottomultiplo secondo *g*, cioè *c* sia il prodotto di *e* per *g*. Per la proposizione precedente anche *c* sarà il prodotto di *a* per *b*.

Dunque il prodotto di *a* per *b* sarà uguale al prodotto di *e* per *g*, cioè *a* starà ad *e* come *g* sta a *b* [VII, 19]. Ma *a* ed *e* sono primi fra loro, e perciò sono i più piccoli numeri che hanno fra loro quel rapporto [VII, 21]: quindi sono equisottomultipli dei numeri che hanno fra loro quel rapporto; e precisamente l'antecedente divide l' antecedente, ed il conseguente divide il conseguente [VII, 20]; quindi *e* divide *b*. Supponiamo che ne sia



sottomultiplo secondo *h*, cioè che *b* sia il prodotto di *e* per *h*. Ma *b* è anche il prodotto di *a* per sè stesso, quindi il prodotto di *e* per *h* è uguale al prodotto di *a* per sè stesso. Cioè *e* sta ad *a* come *a* sta ad *h*. Ma *a* ed *e* sono primi fra loro e quindi sono i più piccoli numeri aventi quel rapporto. Perciò sono equisottomultipli dei numeri che hanno il loro stesso rapporto, e precisamente l'antedente divide l'antecedente, ed il conseguente divide il consguente, cioè *e* divide *a*, contro l'ipotesi. Dunque *e* ed *a* non sono primi fra loro; avranno quindi qualche divisore comune [VII, def. 14]. E poichè per ipotesi *e* è primo, ed un numero primo non ha altri divisori all'infuori di sè stesso [VII, def. 11], e divide i numeri a ed e; e divide anche d; dunque e è divisore comune di a e d.

Similmente si dimostra che ogni altro divisore primo di d è anche divisore di a; c. d. d.

Se 1, a_1, a_2, ..., a_n è una serie di numeri in progressione geometrica, ed a_n ha un divisore primo p, questo è anche divisore di a_1.

Supponiamo infatti che ciò non accada; ne segue [VII, 29] che p ed a_1 sono primi fra loro.

Sia poi

$$a_n = m \cdot p;$$

poichè

$$a_n = a_1 \cdot a_{n-1} \qquad \text{[prop. 11]}$$

ne segue che

$$a_1 \cdot a_{n-1} = m \cdot p$$

da cui [VII, 19] si ottiene

$$a_1 : p = m : a_{n-1}.$$

E poichè a_1 e p sono primi fra loro [VII, 20, 21] p deve dividere a_{n-1}.

Sia

$$a_{n-1} = n \cdot p;$$

poichè

$$a_{n-1} = a_1 \cdot a_{n-2} \qquad \text{[prop. 11]}$$

ne segue che

$$a_1 \cdot a_{n-2} = n \cdot p$$

e quindi

$$a_1 : p = n : a_{n-2}.$$

Dunque p deve dividere a_{n-2}.

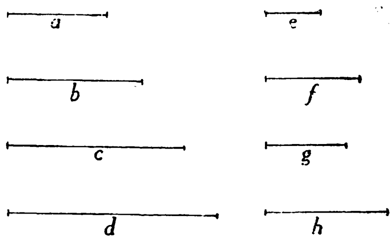
Ripetendo questo procedimento si arriva a dimostrare che p deve dividere a_1. Dunque p ed a_1 non possono essere primi fra loro, come si era supposto. E poichè p è primo, l'unico fattore comune di p ed a_1 è p; cioè p divide a_1.

13.

Data una proporzione continua di quanti si vogliano termini di cui il primo sia l'unità ed il secondo sia un numero primo, l'ultimo non ha altri divisori all'infuori dei termini che lo precedono nella proporzione.

Sia data la proporzione continua formata dall'unità e dai numeri a, b, c, d, ed a sia un numero primo. Dico che d non ha altri divisori all'infuori di a, b, c.

Supponiamo che un altro numero e diverso da a, b, c, divida d. È chiaro che e non è primo. Infatti, se lo fosse,



poichè divide d, dividerebbe anche a [prop. 12], che è primo, pur essendo diverso da a; il che è impossibile. Dunque e non è primo. Avrà quindi qualche divisore primo [VII, 32]. Dico che soltanto il numero primo a è divisore di e.

Infatti, se un altro numero fosse divisore di e, essendo e divisore di d, esso dividerebbe anche d, e quindi anche a che è primo [prop. 12] pur essendo diverso da a; il che è impossibile. Dunque non vi sono divisori primi di e all'infuori di a.

Supponiamo ora che e sia sottomultiplo di d secondo f. Dico che f è diverso da a, b, c.

Infatti, se f fosse uguale ad uno dei numeri a, b, c, essendo esso sottomultiplo di d secondo e, anche a o b o c sarebbe sottomultiplo di d secondo e. Ma ciascuno dei numeri a, b, c è sottomultiplo di d secondo uno dei numeri a, b, c [prop. 11]. Perciò e dovrebbe essere uguale ad uno dei numeri a, b, c, contro l'ipotesi. Dunque f è diverso da a, b, c.

Similmente si dimostra che a divide f, che non è un numero primo. Infatti, se f fosse primo, poichè divide d dividerebbe anche a che è primo [prop. 12], pur essendo diverso da a; il che è impossibile. Dunque f non è primo. Avrà quindi qualche divisore primo [VII, 32]. Dico che soltanto il numero primo a è divisore di f.

Infatti se un altro numero primo fosse divisore di f, essendo f divisore di d, esso dividerebbe anche d e quindi anche a [prop. 12] che è primo, pur essendo diverso da a; il che è impossibile. Dunque non vi sono divisori primi di f all'infuori di a. E poichè e è sottomultiplo di d secondo f, il prodotto di e per f sarà d. Ma d è anche il prodotto di a per c [prop. 11]. Dunque il prodotto di a per c è uguale al prodotto di e per f, cioè a sta ad e come f sta a c [VII, 19]. Ma a divide e; dunque f divide c. Supponiamo che ne sia sottomultiplo secondo g. Si dimostra, come prima, che g è diverso da a e b e che a divide g. E poichè f è sottomultiplo di c secondo g, il prodotto di f per g sarà c. Allora c che è anche il prodotto di a per b, è uguale al prodotto di f per g, cioè a sta ad f come g sta a b [VII, 19]. Ma a divide f; dunque g divide b. Supponiamo che ne sia sottomultiplo secondo g. Si dimostra, come prima, che h è diverso da a. E poichè g è sottomultiplo di b secondo h, il prodotto di g per h sarà b. Ma b è anche il prodotto di a per sè stesso [prop. VIII]. Dunque il prodotto di g per h è uguale al prodotto di a per sè stesso, cioè h

sta ad a come a sta a g [VII, 19]. Ma a divide g; dunque h divide a, che è primo, pur essendo diverso da a; il che è impossibile. Dunque d non ha altri divisori all'infuori di a, b, c; c. d. d.

Se 1, $a_1, \ldots. a_n$ è una serie di numeri in progressione geometrica, ed a_1 è un numero primo, a_n non ha altri divisori all'infuori di $a_1, a_2, \ldots., a_{n-1}$.

Supponiamo infatti che a_n abbia un divisore b diverso da $a_1, \ldots., a_{n-1}$; b non può essere primo poichè se lo fosse dividerebbe a_1 [prop. 12]; avrà un divisore primo [VII, 21], per es. p che sarà anche divisore di a_n e quindi [prop. 12] di a_1.

Dovrà quindi essere

$$p = a_1,$$

e b non può avere altri divisori.

Sia

$$a_n = b \cdot c;$$

c deve essere diverso da $a_1, \ldots., a_{n-1}$, poichè altrimenti [prop. 11] anche b coinciderebbe con uno dei numeri $a_1, \ldots., a_{n-1}$, contro l'ipotesi.

Si dimostra, ora come prima, che c non può essere primo ed ha un solo divisore primo che è a_1.

Ora, poichè [prop. 11]

$$b \cdot c = a_n = a_1 \cdot a_{n-1}$$

si ha

$$a : b = c : a_{n-1},$$

da cui risulta, poichè a divide b, che c divide a_{n-1}.

Sia

$$a_{n-1} = c \cdot d.$$

Si dimostra, come prima, che d è diverso da $a_1, \ldots., a_{n-1}$, che non può essere primo ed ha soltanto a_1 per divisore primo, e che divide a_{n-2}.

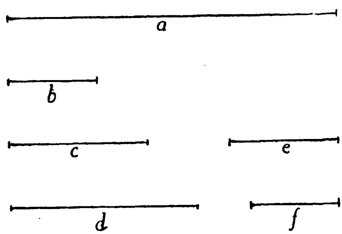
Così procedendo si arriva ad un ultimo fattore k che divide a_1, pur essendo diverso da a_1, il che è impossibile. È quindi assurda l'ipotesi che a_n possa avere un divisore diverso da $a_1, \ldots., a_{n-1}$.

14.

Dati dei numeri primi ed il loro minimo comune multiplo, questo non ha altri divisori primi all'infuori di quelli dati.

I numeri primi b, c, d, abbiano per minimo comune multiplo il numero a. Dico che nessun altro numero primo, oltre b, c, d divide a.

Supponiamo infatti che a sia diviso dal numero e, diverso da b, c, d e che e sia sottomultiplo di a secondo f. Il numero a sarà il prodotto di e per f. E poichè b, c, d



dividono a e se un numero primo divide il prodotto di due numeri, esso divide l'uno o l'altro di questi [VII, 30], b, c, d divideranno l'uno o l'altro dei numeri e ed f. Non possono divedere e che è primo e diverso da b, c, d. Dunque dividono f che è minore di a, il che è impossibile poichè si è supposto che a sia il minimo comune multiplo di b, c, d. Dunque...; c. d. d.

Unicità della decomposizione in fattori primi.

Siano dati i numeri primi b, c, d, ..., l e sia a il loro m. c. m. Dico che a non ha divisori primi oltre a quelli dati.

Supponiamo infatti che esso abbia un divisore primo p diverso da b, c, ..., l, e sia $a = pm$.

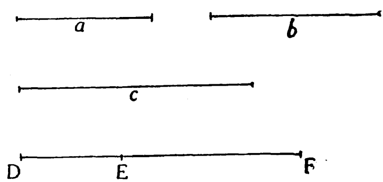
Poichè $b, c, \ldots, l$ dividono a, devono dividere uno dei due fattori p, m [VII, 30]; ma non possono dividere p; dunque devono dividere $m < a$, il che è contro l'ipotesi.

15.

Se tre numeri, in proporzione continua secondo un rapporto dato, sono i più piccoli possibili, la somma di due di essi è prima col rimanente.

Siano dati tre numeri a, b, c i quali stiano in proporzione continua secondo un rapporto dato e siano i più piccoli possibili. Dico che la somma di due di essi è prima col rimanente cioè che la somma di a e b è prima con c, la somma di b e c è prima con a, la somma di a e c è prima con b.

Consideriamo i due più piccoli numeri che hanno fra loro lo stesso rapporto di a, b, c [VII, 2]. Siano questi i numeri DE, EF. È chiaro che DE, moltiplicato per sè stesso dà a, moltiplicato per EF dà b, e che EF, moltiplicato per sè stesso dà c [VII, 2]. Poichè DE ed EF sono i più piccoli numeri che hanno quel rapporto, sono primi tra loro [VII, 22]; e quindi anche la loro somma è prima con ciascuno di essi [VII, 28]. Cioè DF è primo con DE



ed EF. Ma anche DE è primo con EF; dunque DF e DE sono primi con EF e quindi anche il loro prodotto [VII, 24] è primo con EF. Perciò il prodotto di FD

per DE è primo con EF, e quindi anche con il quadrato di EF [VII, 25]. Ma il prodotto di FD per DE è uguale al quadrato di DE insieme con il prodotto di DE per EF [II, 3]; perciò la somma del quadrato di DE con il prodotto di DE per EF è un numero primo con il quadrato di EF. Ma il quadrato di DE è a, il prodotto di DE per EF è b, il quadrato di EF è c. Quindi la somma di a con b è prima con c.

Similmente si dimostra che anche la somma di b con c è prima con a. Per dimostrare che anche la somma di a con c è prima con b, si osservi che essendo DF primo con DE ed EF, anche il suo quadrato è primo con il prodotto di DE per EF [VII, 25].

E poichè il quadrato di DF è uguale alla somma del quadrato di DE con il quadrato di EF e con il doppio del prodotto di DE per EF [II, 4], questa somma è prima con il prodotto di DE per EF.

Ne segue che anche la somma del quadrato di DE con il quadrato di EF e con il prodotto di DE per EF è prima con il prodotto di DE per EF, ed anche la somma dei quadrati di DE ed EF è prima con questo prodotto.

Ma il quadrato di DE è a, il prodotto di DE per EF è b, il quadrato di EF è c. Dunque la somma di a con c è prima con b; c. d. d.

Se a, b, c sono i numeri più piccoli possibili che stanno in progressione geometrica secondo un rapporto dato, sono primi fra loro

$$c+b \text{ e } a, \quad c+a \text{ e } b, \quad a+b \text{ e } c.$$

Sia infatti $\frac{\alpha}{\beta}$ il rapporto dato ridotto ai minimi termini; sarà

$$\frac{a}{c}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

e perciò

$$a=\alpha^2, \quad b=\alpha\beta, \quad c=\beta^2 \qquad \text{[VIII, 2].}$$

E poichè α e β sono primi fra loro anche $\alpha + \beta$ è primo con α e con β [VII, 28]; perciò

$$\alpha + \beta \text{ e } \alpha \text{ sono primi con } \beta$$

e quindi

$$(\alpha + \beta)\alpha \text{ è primo con } \beta \qquad \text{[VII, 24]}$$

ed anche [VII, 25] con β^2; cioè

$$\alpha^2 + \alpha\beta \text{ è primo con } \beta^2$$

ossia

$$a + b \text{ è primo con } c.$$

Similmente si dimostra che

$$\alpha\beta + \beta^2 \text{ è primo con } \alpha^2,$$

ossia che

$$b + c \text{ è primo con } a.$$

Finalmente, essendo

$$\alpha + \beta \text{ primo con } \alpha \text{ e con } \beta,$$

segue che

$$(\alpha + \beta)^2 \text{ è primo con } \alpha\beta \qquad \text{[VII, 24, 25]},$$

cioè

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ è primo con } \alpha\beta.$$

Ne segue che

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ è primo con } \alpha\beta,$$

ossia che

$$a + b \text{ è primo con } c.$$

Quest' ultimo passaggio può essere dimostrato per assurdo (COMMANDINO).

Supponiamo che

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ ed } \alpha\beta$$

non siano primi fra loro.

Esisterà un divisore comune x che sarà anche divisore comune di

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ ed } \alpha\beta;$$

dunque

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ ed } \alpha\beta$$

non sono primi fra loro come era stato dimostrato.

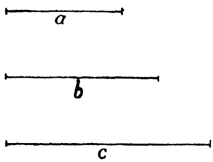
16.

Se due numeri sono primi fra loro, non esiste un terzo proporzionale dopo di essi.

I due numeri a, b siano primi fra loro. Dico che non esiste un terzo proporzionale dopo a e b.

Supponiamo infatti che esista un numero c tale che a stia a b come b sta a c.

Per ipotesi a e b sono primi fra loro e quindi sono i più piccoli fra i numeri che hanno quel rapporto [VII,



21]; allora sono equisottomultipli dei numeri che hanno tale rapporto [VII 20] e precisamente l'antecedente divide l'antecedente, ed il conseguente divide il conseguente. Quindi a divide b; ma a divide anche sè stesso; dunque è divisore comune di a e b che sono primi fra loro, il che è assurdo.

Dunque non può essere che a stia a b come b sta a c;

c. d. d.

Se a e b sono primi fra loro non esiste un terzo proporzionale dopo a e b.

Supponiamo infatti che esista un numero intero x tale che

$$a : b = b : x.$$

Poichè a e b sono primi fra loro [VII, 20, 21] a (antecedente) deve dividere b (antecedente), il che è impossibile.

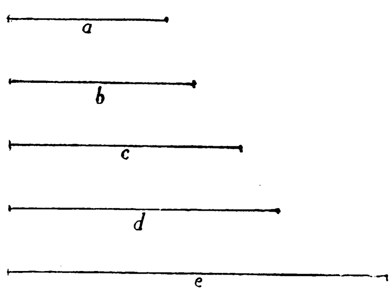
CAMPANO aggiunge a questa un gruppo di 13 proposizioni, nell'ultima delle quali dimostra che un segmento è incommensurabile con la sua sezione aurea. Egli adopera qui il procedimento euclideo delle sottrazioni successive, riconoscendone la periodicità, che esclude l'esistenza di un minimo, il quale corrisponderebbe alla comune misura dei due segmenti. [Cfr. la nota alla prop. VII, 2, e l'articolo di M. T. ZAPELLONI: *Il postulato di Campano e i fondamenti dell'aritmetica*, in « Per. di Mat. », maggio, 1928].

17.

Data una proporzione continua di quanti si vogliano termini, i cui termini estremi siano primi fra loro, non esiste un quarto proporzionale dopo il primo, il secondo e l'ultimo termine.

Siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c, d tali che a stia a b come b sta a c, come c sta a d, ed a, d siano primi fra loro.

Dico che non esiste un quarto proporzionale dopo a, b, d. Supponiamo infatti che esista un numero e tale che a



stia a b come d sta ad e. Permutando [VII, 13], a sta a d come b sta ad e.

Ora a, d sono primi fra loro e quindi sono i più piccoli fra i numeri che hanno quel rapporto [VII, 21]. Perciò sono equisottomultipli fra i numeri che hanno il loro stesso rapporto [VII, 20] e precisamente l'antecedente divide l'antecedente, ed il conseguente divide il conseguente. Quindi a deve dividere b. Ma a sta a b come b sta a c; perciò [VII, def. 20] b divide c; e quindi a divide c. E poichè b sta a c come c sta a d, e b divide c, anche c divide d [VII def. 20]. Ma a divide c; quindi divide anche d; e divide anche sè stesso. Dunque a è divisore comune di a e d che sono primi fra loro, il che è impossibile;

Dunque...; c. d. d.

Se a_1, a_2, ..., a_n è una serie di numeri in progressione geometrica, ed a_1, a_n sono primi fra loro, non esiste un quarto proporzionale dopo a_1, a_2, a_n.

Supponiamo infatti che esista un numero x tale che

$$a_1 : a_2 = a_n : x;$$

ne segue

$$a_1 : a_n = a_2 : x$$

e quindi [VII, 20, 21] a_1 deve dividere a_2.

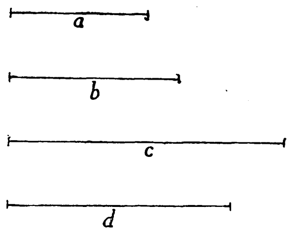
Perciò a_2 divide a_3 [VII, def. 20], e quindi a_1 divide a_3 ed anche a_n, il che è impossibile.

18.

Dati due numeri, stabilire la condizione perchè abbiano un terzo proporzionale.

Siano dati due numeri a, b. Si deve trovare il terzo proporzionale. Ora, i numeri a, b o sono primi fra loro, o non lo sono. Se a, b sono primi fra loro si è già dimostrato [prop. 16] che non esiste un terzo proporzionale. Se a, b non sono primi fra loro, poniamo c uguale al quadrato di b; distinguiamo due casi: o a divide c, o non lo divide.

Supponiamo che a sia sottomultiplo di c secondo d, cioè che c sia uguale al prodotto di a per d. Poichè c è il quadrato di b, il prodotto di a per d sarà uguale al qua-



drato di b. Quindi a sta a b come b sta a d [VII, 19], e così si è trovato un terzo proporzionale dopo a e b.

Supponiamo invece che a non divida c. Dico che in questo caso non si può trovare un terzo proporzionale dopo a e b. Supponiamo che si possa trovare e sia d questo numero. Il prodotto di a per d sarà allora uguale al quadrato di b, che è c: quindi c sarà il prodotto di a per d, cioè a è sottomultiplo di c secondo d, il che è assurdo poichè si è supposto che a non dividesse c.

Dunque non è possibile trovare un terzo proporzionale dopo a e b, se a non divide c; c. d. d.

Dati due numeri a, b determinare la condizione perchè esista un terzo proporzionale dopo di essi.

1) Se a e b sono primi fra loro non esiste un terzo proporzionale [prop. 16].

2) Se a e b non sono primi fra loro la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un terzo proporzionale c è che a divida b^2.

Infatti se $b^2 = ac$ ne segue [VII, 19]

$$a : b = b : c;$$

e viceversa se

$$a : b = b : c$$

ne segue [VII, 19]

$$ac = b^2.$$

Il risultato è evidente se i tre termini della proporzione si scrivono

$$a, \ a\frac{b}{a}, \ a\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

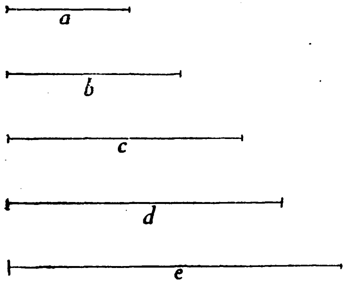
19.

Dati tre numeri, stabilire la condizione perchè abbiano un quarto proporzionale.

Siano dati tre numeri a, b, c e si debba stabilire la condizione perchè abbiano un quarto proporzionale. Si possono avere i seguenti casi: o a, b, c non stanno in proporzione continua ed a, c sono primi fra loro; o a, b, c stanno in proporzione continua ed a, c non sono primi fra loro; o a, b, c non stanno in proporzione continua ed a, c non sono primi fra loro; o a, b, c stanno in proporzione continua ed a, c sono primi fra loro. Per quest'ultimo caso si è già dimostrato [prop. 17] che non si può trovare un quarto proporzionale.

Supponiamo ora che i numeri dati non stiano in proporzione continua, a e c essendo primi fra loro. Dico che anche in questo caso non si può trovare un quarto proporzionale. Supponiamo infatti che esista un numero d tale che a stia a b come c sta a d; e b stia a c come d sta ad e. Allora a sta a c come c sta ad e [VII, 14]. Ma a e c sono primi fra loro e quindi sono i più piccoli numeri che hanno quel rapporto [VII 21]; perciò sono equisottomultipli dei numeri che hanno fra loro quel rapporto [VII, 20], e precisamente, il precedente divide il precedente ed il conseguente divide il conseguente. Così a deve dividere c, e poichè divide anche sè stesso, è divisore comune di a e c che sono primi fra loro; il che è impossibile.

Dunque non si può in questo caso trovare un quarto proporzionale. Supponiamo ora che a, b, c siano in pro-



porzione continua e che a, c non siano primi fra loro. Dico che in questo caso si può trovare un quarto proporzionale. Sia infatti d il prodotto di a per b.

Supponiamo dapprima che a sia sottomultiplo di d secondo e, cioè che d sia il prodotto di a per e. Allora il prodotto di a per b sarà uguale al prodotto di a per e; e così si è trovato un quarto proporzionale dopo a, b, c. Supponiamo ora che a non divida d. Dico che non si può trovare un quarto proporzionale. Supponiamo infatti che esista un numero e tale che a stia a b come c sta ad e. Allora il prodotto di a per e sarà uguale al prodotto di b per c [VII, 19]. E poichè il prodotto di b per c è d, anche il prodotto di a per e è d. Cioè a è sottomultiplo di d secondo e, il che è assurdo, poichè si è supposto che a non divida d. Dunque in questo caso non si può trovare un quarto proporzionale.

Supponiamo ora che a, b, c non stiano in proporzione continua e che a, c non siano primi fra loro. Sia d il prodotto di b per c. Si dimostra, come prima, che se a divide d si può trovare un quarto proporzionale, e che ciò non è possibile se a non divide d; c. d. d.

Dati tre numeri a, b, c trovare la condizione perchè abbiano un quarto proporzionale.

EUCLIDE considera i casi seguenti:

1) a, b, c non sono in proporzione continua ed a, c sono primi fra loro.

2) a, b, c sono in proporzione continua ed a, c non sono primi fra loro.

3) a, b, c non sono in proporzione continua ed a, c non sono primi fra loro.

4) a, b, c sono in proporzione continua ed a, c sono primi fra loro.

Nel caso 4, non esiste un quarto proporzionale, come è stato già dimostrato nella prop. 17.

Nei casi 1, 2, 3 il quarto proporzionale esiste.

Ma pel caso 1, il testo contiene la seguente dimostrazione sbagliata, per provare che non esiste un quarto proporzionale:

Si supponga che d sia tale che

$$a : b = c : d$$

e si prenda un altro numero e tale che

$$b : c = d : e.$$

Ne segue che

$$a : c = c : e$$

per cui a deve dividere c [VII, 20] il che è contro l'ipotesi che a sia primo con c.

Ora con questo si è dimostrato soltanto che se d è quarto proporzionale dopo a, b, c, non esiste nessun intero e per cui

$$b : c = d : e,$$

ma non si è dimostrato che non esiste un quarto proporzionale d dopo a, b, c.

E già dalla proposizione 16 risulta che non può esservi un intero e per cui

$$a : c = c : e,$$

mentre un ragionamento analogo a quello che si fa nei casi 2 e 3 serve a provare che anche nel caso 1, il quarto proporzionale veramente esiste.

La dimostrazione pei casi 2 e 3 procede come segue:

Si consideri il prodotto bc; se a divide bc sia

$$bc = ad$$

da cui

$$a : b = c : d;$$

d è quindi il quarto proporzionale dopo a, b, c. Se però a non divide bc non esiste un quarto proporzionale dopo a, b, c. Infatti se esistesse un x tale che

$$a : b = c : x$$

si avrebbe

$$ax = bc$$

ed a dividerebbe bc.

In ogni caso, perchè esista un quarto proporzionale basta che a divida bc.

Fra i commentatori, alcuni, come CLAVIO e BORELLI hanno rilevato l'errore relativo al caso 1) e corretto il testo; altri, come COMMANDINO e CAMPANO non lo osservano e mantengono inalterato il testo euclideo.

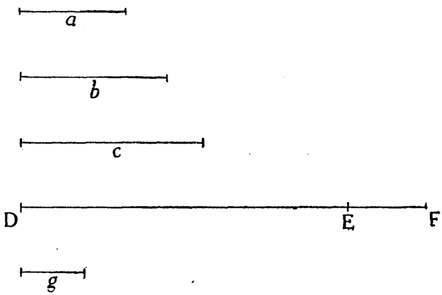
20.

La serie dei numeri primi è illimitata.

Siano dati quanti si vogliano numeri primi a, b, c. Dico che i numeri primi sono in numero maggiore di a, b, c. Sia DE il minimo comune multiplo di a, b, c [VII, 36], ed al numero DE si aggiunga l'unità EF.

DF è primo o non è primo. Se DF è primo si hanno i numeri primi a, b, c, DF, che sono in numero maggiore di a, b, c. Se DF non è primo vi sarà un numero primo che lo dividerà [VII, 31].

Sia g questo numero. Dico che g è diverso da a, b, c. Se ciò non fosse, poichè a, b, c dividono DE, anche g dividerebbe DE. Ma g divide anche DF. Dunque deve



dividere anche la loro differenza, cioè l'unità EF, il che è assurdo. Dunque g è diverso da a, b, c ed è primo. Si hanno quindi i numeri primi a, b, c, g che sono in numero maggiore di a, b, c; c. d. d.

La serie dei numeri primi è illimitata.

Siano dati i numeri primi 2, 3, 5, ..., p.

Sia

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots\ p$$

e si consideri il numero $m + 1$.

Possono darsi due casi:

1) $m + 1$ è primo; si è quindi trovato un numero primo maggiore di p.

2) $m + 1$ non è primo, e allora ha qualche divisore primo [VII, 31], per es. q.

Non può essere

$$q = 2,\ 3,\ 5, \ldots,\ p$$

poichè q dividerebbe m ed $m + 1$ e dovrebbe quindi dividere anche la loro differenza, cioè 1, il che è impossibile.

Dunque q è un numero primo maggiore di p.

Questa dimostrazione si può modificare sostituendo ad m (prodotto di tutti i numeri primi fino a p) il prodotto $p!$ di tutti i numeri fino a p (od anche un suo multiplo).

La dimostrazione si svolge nello stesso modo.

Un'altra dimostrazione è dovuta ad EULERO [*Introductio in Analysin infinitorum*, Vol. I, Cap. XV, Lione 1797]. Egli deduce la infinità dei numeri primi dall'equazione

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p}\right)\dots}$$

dove n assume il valore di tutti i numeri interi positivi e p il valore di tutti i numeri primi; il primo membro è infinito ed il secondo membro sarebbe finito se i numeri primi fossero in numero finito.

Un'altra dimostrazione è dovuta a HACKS.

Si consideri la frazione irriducile che esprime la somma

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

dei reciproci dei numeri primi fino a p.

Il numeratore r non è evidentemente divisibile per nessuno dei numeri primi da 2 a p; quindi o è un numero primo maggiore di p o è un multiplo di un numero primo maggiore di p.

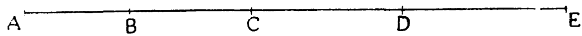
21.

La somma di quanti si vogliano numeri pari è un numero pari.

Siano dati quanti si vogliano numeri pari AB, BC, CD, DE. Dico che anche la loro somma AE è un numero pari.

Infatti, poichè i singoli numeri AB, BC, CD, DE

sono pari, essi si possono dividere per metà [VII, def. 6]; perciò anche la loro somma AE si può dividere per metà.



Ma è numero pari quello che si può dividere in due parti uguali [id.].

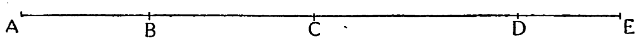
Dunque AE è pari; c. d. d.

22.

La somma di un numero pari di numeri dispari è un numero pari.

Sia dato un numero pari di numeri dispari, AB, BC, CD, DE. Dico che anche la loro somma AE è un numero pari.

Infatti, poichè i numeri AB, BC, CD, DE sono dispari, sottraendo da ciascuno di essi l'unità si otterranno



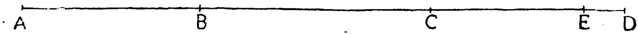
dei numeri pari [VII def. 7]. Perciò anche la somma di questi sarà pari [prop. 21]. Ma anche il numero delle unità che si sono sottratte dai numeri dati è pari. Dunque la somma AE è pari; c. d. d.

23.

La somma di un numero dispari di numeri dispari è un numero dispari.

Sia dato un numero dispari di numeri dispari, AB, BC, CD. Dico che anche la loro somma AD è un numero dispari.

Infatti da CD si sottragga l'unità DE. La differenza CE è pari [VII, def. 7]. Ed anche CA è pari [prop. 22].

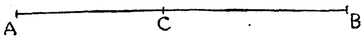


Perciò AE è pari [prop. 21]; dunque, essendo DE l'unità, AD è dispari [VII, def. 7]; c. d. d.

24.

La differenza tra due numeri pari è un numero pari.

Dal numero pari AB si sottragga il numero pari BC. Dico che la differenza CA è pari. Infatti, poichè AB è



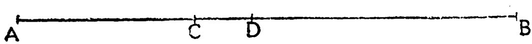
pari, esso è divisibile per metà [VII, def. 6]. Per la stessa ragione anche BC è divisibile per metà.

Dunque anche la differenza CA è pari; c. d. d.

25.

La differenza tra un numero pari ed un numero dispari è un numero dispari.

Dal numero pari AB si sottragga il numero dispari BC. Dico che la differenza CA è dispari. Infatti da BC



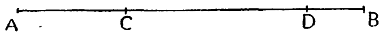
si sottragga l'unità CD. Il numero DB è quindi pari [VII, def. 7]; ed anche AB è pari. Perciò la differenza AD

è pari [prop. 24]. Dunque, essendo CD l'unità, CA è dispari [VII, def. 7]; c. d. d.

26.

La differenza tra due numeri dispari è un numero pari.

Dal numero dispari AB si sottragga il numero dispari BC. Dico che la differenza CA è pari. Infatti da AB si



sottragga l'unità BD. La differenza AD è pari. Ed anche CD è pari [VII, def. 7].

Dunque la differenza CA è pari [prop. 24]; c. d. d.

27.

La differenza tra un numero dispari ed un numero pari è un numero dispari.

Dal numero dispari AB si sottragga il numero pari BC. Dico che la differenza CA è dispari. Infatti da AB

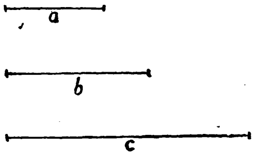
si sottragga l'unità AD: il numero DB è pari [VII def. 7]. Ed anche BC è pari. Dunque la differenza CD è pari [prop. 24]; e quindi CA è dispari [VII, def. 7]; c. d. d.

28.

Il prodotto di un numero dispari per un numero pari è un numero pari.

Dato il numero dispari *a* ed il numero pari *b*, sia *c* il prodotto di *a* per *b*. Dico che *c* è pari.

Infatti, poichè *c* è il prodotto di *a* per *b*, il numero *c* è la somma di tanti numeri uguali a *b* quante sono le



unità di *a* [VII, def. 15]. E *b* è pari; dunque *c* è somma di numeri pari. E la somma di quanti si vogliano numeri pari è pari [prop 21];

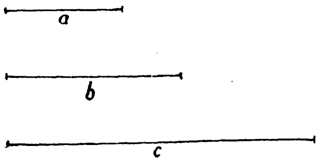
Dunque *c* è pari; c. d. d.

29.

Il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari.

Siano dati i numeri dispari *a*, *b* e sia c il prodotto di *a* per *b*. Dico che *c* è dispari.

Infatti poichè *c* è il prodotto di *a* per *b*, il numero *c*



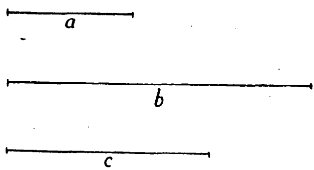
è la somma di tanti numeri uguali a *b* quante sono le unità di *a* [VII, def. 15]. Ma *a* e *b* sono dispari. Dunque *c* è somma di un numero dispari di numeri dispari; e quindi *c* è dispari [prop. 23]; c. d. d.

30.

Se un numero dispari divide un numero pari, divide anche la sua metà.

Il numero dispari a divida il numero pari b. Dico che a divide anche la metà di b. Supponiamo infatti che a sia sottomultiplo di b secondo c.

Dico che c non può essere dispari. Supponiamo infatti



che lo sia. Poichè a è sottomultiplo di b secondo c, il prodotto di a per c sarà b.

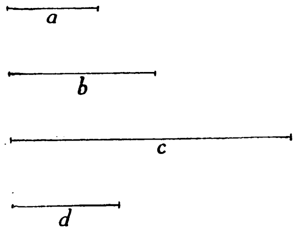
Dunque b è somma di un numero dispari di numeri dispari; e allora b è dispari [prop. 23], contro l'ipotesi. Perciò c non può essere dispari, e quindi è pari, ed a è sottomultiplo di b secondo un numero pari. Dunque a divide anche la metà di b; c. d. d.

31.

Se un numero dispari è primo con un altro numero, è primo anche col doppio di esso.

Il numero dispari a sia primo con un altro numero b, e sia c il doppio di b. Dico che a è primo con c.

Infatti, se a, c non fossero primi fra loro, avrebbero un divisore comune; sia d questo divisore. Poichè a è dispari, anche d è dispari. E d divide c, che è pari; quindi divide anche la metà di c; ma la metà di c è b; dunque



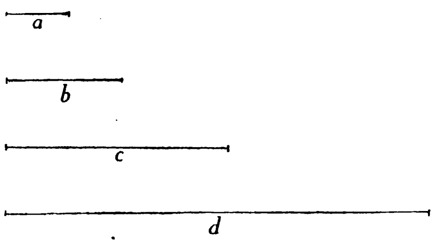
d divide b; ma divide a; allora divide a e b che sono primi fra loro; il che è impossibile.

Dunque non è possibile che a non sia primo con c; cioè a e c sono primi fra loro; c. d. d.

32.

Moltiplicando il 2 per sè stesso un qualsiasi numero di volte si ottengono numeri soltanto parimente pari.

Siano b c, d, dei numeri ottenuti moltiplicando a



(uguale a 2) per sè stesso; dico che b, c, d, sono soltanto parimente pari.

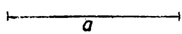
È evidente che b, c, d sono parimente pari, poichè sono ottenuti moltiplicando 2 per sè stesso. Dico che sono soltanto parimente pari. Si prenda infatti l'unità. Poichè, a partire dall'unità, son dati alquanti numeri in proporzione continua, ed il numero *a*, prossimo all'unità, è primo, il maggiore dei numeri *a*, *b*, *c*, *d*, cioè *d* non è misurato che dai numeri *a*, *b*, *c* [prop. 13].

E poichè i numeri *a*, *b*, *c* sono pari, *d* è soltanto parimente pari [VII, def. 8]. Similmente si può dimostrare che *b* e *c* sono soltanto parimente pari; c. d. d.

33.

Se la metà di un numero è dispari; esso è soltanto parimente dispari.

Sia dato il numero *a*, e la sua metà sia dispari; dico che *a* è soltanto parimente dispari. È evidente che *a* è parimente dispari, poichè la sua metà è dispari [VII, def. 9].



Dico che esso è soltanto parimente dispari.

Infatti, se *a* fosse anche parimente pari, il suo quoziente per un numero pari sarebbe un numero pari [VII, def. 8]; cosicchè la sua metà, pur essendo dispari, sarebbe divisa da un numero pari, il che è assurdo.

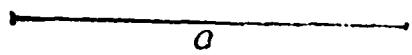
Dunque *a* è soltanto parimente dispari; c. d. d.

34.

Se un numero non è ottenuto moltiplicando il 2 per sè stesso un qualsiasi numero di volte, e la sua metà non è dispari, esso è contemporaneamente parimente pari e parimente dispari.

Supponiamo infatti che il numero *a* non sia ottenuto moltiplicando il *2* per sè stesso un certo numero di volte, e che la sua metà non sia dispari; dico che *a* è contemporaneamente parimente pari e parimente dispari.

È evidente che *a* è parimente pari, poichè la sua metà non è dispari [VII, def. 8]. Dico che esso è anche pari-



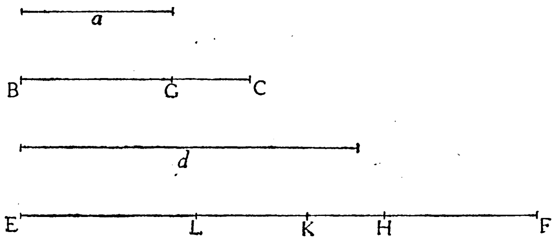
mente dispari. Infatti, se si divide *a* per metà, e poi per metà la sua metà, e così di seguito, si arriverà ad un numero dispari il cui prodotto per un numero pari darà *a*. Poichè, se ciò non accadesse, si arriverebbe al numero *2*, ed allora *a* sarebbe il prodotto di *2* per sè stesso un certo numero di volte, il che è contro l'ipotesi. Dunque *a* è parimente dispari; ma si è visto che è anche parimente pari. Dunque *a* è contemporaneamente parimente pari e parimente dispari; c. d. d.

35.

Se quanti si vogliano numeri sono in proporzione continua, la differenza tra il secondo ed il primo termine della proporzione sta al primo come la differenza tra l'ultimo ed il primo sta alla somma dei precedenti.

Siano dati quanti si vogliano numeri *a*, *BC*, *d*, *EF*, in proporzione continua, e da *BC* ed *EF* si sottraggano rispettivamente *BG* ed *FH* uguali ad *a*. Dico che *GC* sta ad *a* come *EH* sta alla somma di *a* con *BC* e con *d*.

Poniamo infatti *FK* uguale a *BC*, ed *FL* uguale a *d*. Poichè *FK* è uguale a *BC*, ed *FH* è uguale a *BG*, sarà *HK* uguale a *GC*. E poichè *EF* sta a *d* come *d* sta a *BC*, come *BC* sta ad *a* [VII, 13], e *d* è uguale ad *FL*, *BC* è uguale ad FK, a è uguale ad FH, il numero EF starà ad FL come LF sta ad FK, come FK sta ad FH. Quindi, scomponendo, EL sta ad LF come LK sta ad FK, come



KH sta ad FH [VII, 11, 13]. E poichè un precedente sta ad un conseguente come la somma dei precedenti sta alla somma dei conseguenti [VII, 12], KH starà ad FH come la somma di EL, LK, KH sta alla somma di LF, FK, HF. Ma KH è uguale a CG, FH è uguale ad a, e la somma di LF, FK, HF è uguale alla somma di d, BC, a. Quindi CG sta ad a come EH sta alla somma di d, BC, a. Dunque, ecc. c. d. d.

Somma di una progressione geometrica.

Sia data la progressione geometrica

$$a,\ aq,\ aq^2, \dots,\ aq^{n-1},\ aq^n.$$

Si ha

$$aq^n : aq^{n-1} = aq^{n-1} : aq^{n-2} = \dots = aq : a,$$

da cui

$$(aq^n - aq^{n-1}) : aq^{n-1} = (aq^{n-1} - aq^{n-2}) : aq^{n-2} = \dots = (aq - a) : a$$

e quindi [VII, 12]

$$(aq^n - a) : (aq^{n-1} + \dots + a) = (aq - a) : a$$

da cui, posto

$$S_n = a + \dots + aq^{n-1},$$

$$S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

La formula di EUCLIDE permette il passaggio al limite nel caso di infiniti termini, e dà

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}.$$

La scoperta che una progressione geometrica di un numero infinito di termini può avere una somma finita (serie convergente) risale ai famosi argomenti di ZENONE d'Elea nel primo dei quali si trova

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots..$$

L'argomento di Achille conduce al problema generale della somma della progressione geometrica di ragione $q < 1$.

In ARCHIMEDE si trova, per la quadratura della parabola, la serie geometrica

$$1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots..$$

Un'altra maniera di dare la somma di un numero finito di termini di una progressione geometrica nel caso di $q < 1$ è stata indicata da VIETA, sotto la forma

$$q = \frac{s_n - g_1}{s_n - g_n}$$

dove $g_i = aq^{i-1}$ e nel passaggio al limite si ritrova la nota formula sopra ricordata.

La regola di VIETA è data anche da FERMAT sotto quest'altra forma:

$$(g_1 - g_1 q) : g_1 q = g_1 : (s_\infty - g_1).$$

In EUCLIDE non si trova cenno di serie aritmetiche, mentre la serie geometrica è qui considerata solo per la ricerca del numero perfetto nella proposizione successiva.

Esempi di serie aritmetiche s'incontrano nel *Papyrus Rind* (circa 2000 a. C.), (in cui si trovano anche serie geometriche).

Secondo TEONE i Pitagorici sapevano sommare le serie che appaiono nella figurazione dei numeri triangolari

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$$
$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1).$$

La formula generale era nota certamente al tempo di ARCHIMEDE, che se ne vale per calcolare la somma della serie dei quadrati.

In LEONARDO PISANO si trovano le formule

$$s_n = \frac{n}{2}(g_1 + g_2) = \frac{g_1 + g_2}{2} n$$

rispettivamente per n pari e dispari, ed in WALLIS si danno molte considerazioni su queste serie.

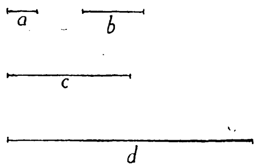
36.

Se, a partire dall'unità, son dati quanti si vogliano numeri in proporzione duplicata, e la loro somma è un numero primo, il prodotto di questa somma per l'ultimo dei numeri dati è un numero perfetto.

A partire dall'unità siano dati quanti si vogliano numeri a, b, c, d, finchè la loro somma e sia un numero primo. E sia FG il prodotto di e per d.

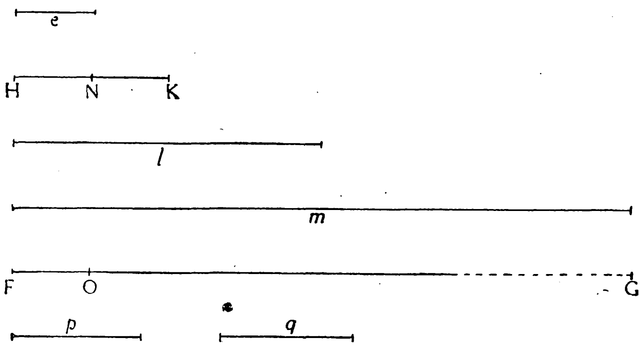
Dico che FG è un numero perfetto. Si consideri la serie di numeri in proporzione duplicata e, HK, l, m, costituita di tanti termini quanti sono i numeri a, b, c, d. *Ex aequo* [VII, 14], a starà a d, come e sta ad m, quindi il prodotto di e per d sarà uguale al prodotto di a per m. [VII, 19]. E poichè il prodotto di e per d è FG, anche il prodotto di a per m sarà uguale ad FG. Dunque m è sottomultiplo di FG secondo a.

E poichè a è uguale a 2 il numero FG è il doppio di m. E così e è il doppio di HK; HK è il doppio di l; l è il doppio di m, m è il doppio di FG. Ora, da HK ed FG



si sottraggono rispettivamente i numeri HN ed FO, ambedue uguali ad e.

Allora NK starà ad e come OG sta alla somma di m, l, HK, e [prop. 35]; ma anche FO è uguale ad e;



ed e è la somma di a, b, c, d e l'unità. Quindi FG è la somma di e, HK, l, m, a, b, c, d e l'unità e tutti questi numeri sono divisori di FG. Dico che FG non ha altri divisori all'infuori di questi.

Supponiamo che esista un numero p diverso da a, b, c, d, e, HK, l, m, che sia divisore di FG e sia FG il prodotto di g per p. Poichè anche il prodotto di e per d è uguale ad FG, il numero e starà a q come p sta a d [VII, 19]. E poichè i numeri a b, c, d sono in proporzione continua, a partire dall'unità, d ha per divisori soltanto i numeri a, b, c [prop. 13]. Si è supposto che p sia diverso da a, b, c; dunque p non divide d e perciò neppure e divide q [VII, def. 20]; ma e è primo, ed ogni numero primo è primo con tutti i numeri che non divide [VII, 29]: perciò e è primo con q. Qindi e e q sono i più piccoli numeri che hanno quel rapporto [VII, 21], perciò sono equisottomultipli dei numeri che hanno fra loro quel rapporto: e precisamente l'antecedente divide l'antecedente, ed il conseguente divide il conseguente. E poichè e sta a q come p sta a d, i numeri e e q sono equisottomultipli rispettivamente di p e d. Ma d ha per divisori soltanto a, b, c; dunque q deve essere uguale ad uno dei numeri a, b, c.

Sia q uguale a b. Poichè e, HK, l e b, c, d stanno fra loro nello stesso rapporto, il numero b starà a d come e sta ad l [VII, 14]. Perciò il prodotto di b per l sarà uguale a quello di d per e [VII, 19]. Ma il prodotto di d per e è uguale a quello di q per p; quindi anche il prodotto di b per l sarà uguale a quello di q per p.

Dunque q sta a b come l sta a p. E poichè si è supposto q uguale a b, dovrebbe essere anche l uguale a p, il che è assurdo, poichè, per ipotesi, p è diverso da tutti i numeri dati a, b, c.

Dunque nessun numero, all'infuori di a, b, c, d, e, HK, l, m e dell'unità, divide FG. Si è inoltre dimostrato che FG è uguale alla somma dell'unità con a, b, c, d, e, HK, l, m. Dunque [VII, def. 22] FG è un numero perfetto;

c. d. d.

Se

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$$

è un numero primo, il prodotto

$$2^{n-1} \cdot S_n$$

è un numero perfetto.

Si consideri la progressione geometrica

$$S_n, \quad 2S_n, \ldots, \quad 2^{n-1}S_n.$$

Si ha [prop. 35]:

$$(2S_n - S_n) : S_n = (2^{n-1}S_n - S_n) : (S_n + \ldots + 2^{n-2}S_n)$$

da cui si ottiene

$$S_n + 2S_n + \ldots + 2^{n-2}S_n = 2^{n-1}S_n - S_n$$

cioè

$$(1) \quad 2^{n-1}S_n = S_n + 2S_n + \ldots + 2^{n-2}S_n + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}.$$

Tutti i termini del secondo membro della (1) sono evidentemente divisori di $2^{n-1}S_n$.

Bisogna dimostrare che $2^{n-1}S_n$ non ha altri divisori all'infuori di questi.

Supponiamo che esista un numero x, diverso da tutti i termini del secondo membro di (1) tale che

$$2^{n-1}S_n = x \cdot m;$$

ne segue [VII, 19] che

$$S_n : m = x : 2^{n-1}.$$

Ora 2^{n-1} ha per divisori soltanto i numeri 1, 2, ..., 2^{n-2} [prop. 13]; quindi x non è divisore di 2^{n-1} e per conseguenza S_n non è divisore di m [VII def. 20].

Ma S_n è primo, dunque [VII, 29] è primo con m.

Perciò [VII, 20, 21] m è divisore di 2^{n-1}.

Sia

$$m = 2^r.$$

Poichè i termini della serie

$$2, \quad 2^2, \ldots, \quad 2^{n-1}$$

sono proporzionali a quelli della serie

$$S_n, \quad 2S_n, \ldots, \quad 2^{n-2}S_n,$$

si ha [VII, 14]

$$2^r : 2^{n-1} = S_n : 2^{n-r-1}S_n$$

da cui segue [VII, 19] che

$$2^r \cdot 2^{n-r-1} S_n = 2^{n-1} \cdot S_n = x \cdot m.$$

Risulta quindi

$$x = 2^{n-r-1} \cdot S_n$$

contro l'ipotesi.

Dunque $2^{n-1} \cdot S_n$ non ha altri divisori all'infuori dei termini del secondo membro della (1), cioè $2^{n-1} \cdot S_n$ è un numero perfetto.

NICOMACO afferma che con la regola euclidea si possono trovare tutti i numeri perfetti. Dello stesso parere è GIAMBLICO il quale però ritiene erroneamente che in ciascuno degli intervalli, 1, 10, 100, 1000 ecc. vi sia un numero perfetto. Osserva però giustamente che i numeri perfetti terminano alternativamente con 6 e 8.

DESCARTES [*Oeuvres* II, Paris 1898, p. 429] afferma di poter dimostrare che ogni numero perfetto pari è del tipo euclideo ed ammette la possibilità dell'esistenza di numeri perfetti dispari.

EULERO [*De numeris amicabilibus*. « Comm. Arith. » 2, 1849, 630] dimostra che ogni numero perfetto pari è del tipo euclideo e dà la forma che dovrebbero avere i numeri perfetti dispari.

Su questo argomento scrissero fra gli altri P. A. LEBESGUE [« Nouv. Ann. Math. » 3, 1884, 552];

GIOV. NOCCO [*Alcune teorie su' numeri pari impari e perfetti*, Lecce 1863];

J. CARVALLO credette di avere dimostrato l'impossibilità dell'esistenza di numeri perfetti dispari, ma le sue considerazioni non sono esatte;

SYLVESTER [« Comptes rendus », Paris 106, 1888, 403] e SERVAIS [« Mathesis », 8, 1888, 135] dimostrarono che non esistono numeri perfetti dispari con soli tre o quattro fattori primi distinti.

Non si conoscono, fino ad oggi, numeri perfetti dispari, ma l'impossibilità della loro esistenza non è ancora stata rigorosamente dimostrata.

L. E. DICKSON [« Amer. Math. Monthly » 18, 1911, 109] ha dato una semplice dimostrazione del fatto che ogni numero perfetto pari è del tipo euclideo:

Sia $2^n q$ un numero perfetto essendo q dispari ed $n > 0$.

Allora

$$(2^{n+1} - 1)\, s = 2^{n+1} q$$

ove s è la somma di tutti i divisori di q. Cosicchè

$$s = q + d$$

ove

$$d = \frac{q}{2^{n+1} - 1}.$$

Quindi d è un divisore intero di q, cosicchè q e d sono i soli divisori di q. Quindi $d = 1$ e q è primo.

Per quanto si riferisce al calcolo effettivo dei numeri perfetti, NICOMACO conosceva quattro numeri perfetti: 6, 28, 496, 8128.

Il 5°, 6°, 7°, 8° numero perfetto si trovano segnalati nel XV e XVI secolo.

In J. PRESTET [« Nouveaux élémens de math. » 1, Paris 1689, 155] ed in EULERO [« Nouveaux mém. Acad. Berlin » 3, 1772] si trovano indicati i primi otto numeri perfetti.

P. SECLHOFF e J. PEROUSIN hanno indicato il nono numero perfetto.

Accanto ai numeri perfetti furono considerati altri tipi di numeri e cioè le coppie di *numeri amici*, tali cioè che ciascuno di essi è uguale alla somma dei divisori dell'altro.

Di questo argomento si occuparono molti matematici, come CARDANO, TARTAGLIA, FERMAT, DESCARTES, EULERO, SCHOOTEN.

INDICE

LIBRO V:

INTRODUZIONE . . . . Pag. 1
Termini . . . . » 5
Proposizioni . . . . » 23

LIBRO VI:

Termini . . . . » 75
Proposizioni . . . . » 79

LIBRO VII:

Termini . . . . » 167
Postulati . . . . » 175
Proposizioni . . . . » 177

LIBRO VIII:

Proposizioni . . . . » 251

LIBRO IX:

Proposizioni . . . . » 301