Enriques, Federigo

Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (VI) **XII** (1930), pp. 3-6.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1930 (Anno VIII).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigate.* Nota [1] del Socio F. ENRIQUES.

Alcune conferenze tenute all'Università di Roma mi hanno dato occasione a ritornare sui teoremi fondamentali per la teoria delle superficie che son contenuti nella memoria scritta in collaborazione con Castelnuovo per gli « Annali di Matematica » (1901) e nell'altra mia memoria del Circolo Matematico di Palermo: *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (1905). Mi è avvenuto così di ricostruire la dimostrazione dei teoremi di riferibilità a rigata, unificando i risultati espressi nelle due memorie, rendendo assai più semplice la trattazione della prima e evitando le critiche a cui possono andare incontro alcuni ragionamenti della seconda.

Esporrò qui soltanto le linee generali di questa ricostruzione, che sarà poi sviluppata dal prof. H. Geppert, il quale – avendo seguito le mie conferenze – collabora già da qualche tempo con me per dare a tutta la materia l'ordine più conveniente.

Come fondamento della ricerca pongo il teorema che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a = -p$ $(p > 0)$ posseggono un fascio irrazionale di curve, C, razionali o irrazionali, del genere p.

(1) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1930.

Designando con π il genere delle C e con Δ il numero delle C dotate di punto doppio, l'espressione dell'invariante di Zeuthen–Segre ci dà:

$$\Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}$$

dove $p^{(1)}$ designa il genere lineare della superficie. Di qui

$$(1) \qquad \Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)}.$$

Ma è facile riconoscere che, per $p > 0$, la superficie è tale che sopra di essa l'aggiunzione non si può estinguere. La dimostrazione si fa anzitutto per $p > 1$ e poi anche per $p = 1$. Infatti per $p > 1$, qualsiasi curva appartenente alla superficie (contenendo un'involuzione del genere p) ha il genere $\geqq 2p-1$, e quindi possiede certo ∞^{p-2} curve aggiunte.

Per $p = 1$, basta osservare che, qualora l'aggiunzione – a partire da un sistema lineare qualsiasi di curve – si estinguesse, conducendo ad un ultimo sistema aggiunto di curve ellittiche, quest'ultimo sistema dovrebbe essere ∞^1 almeno, ovvero essere aggiunto d'un sistema lineare di curve di genere 2, $|L|$: allora $|L|$ apparterrà a una serie continua $\{L\}$ composta di ∞^1 sistemi lineari disequivalenti, ciascuno dei quali avrà una curva aggiunta ellittica, e perciò (essendo $p_g = 0$) si troveranno sopra la superficie ∞^1 curve ellittiche K, formanti una serie ellittica di grado $n \geqq 1$. Dall'esistenza di tali curve ellittiche K di grado $n \geqq 1$, si deduce facilmente che la superficie è riferibile a una rigata, essendo $\pi = 0$ (per $n > 1$ avremo un fascio di curve ellittiche con punti base, per $n = 1$ il sistema doppio $|2K|$ sarà di genere due e condurrà alla rappresentazione della superficie su un piano doppio).

Resta dunque stabilito che per le nostre superficie con $p_g = 0$ e $p_a = -p < 0$, l'aggiunzione non si può estinguere, e pertanto che $p^{(1)} > 0$.

Così lo studio delle superficie su cui l'aggiunzione si estingue si può limitare al caso razionale e alla trattazione che per questo caso dette già il Castelnuovo, semplificata poi in successive memorie di Castelnuovo-Enriques. La conoscenza del fascio irrazionale sopra la superficie ha reso superflui i ragionamenti più approfonditi a cui si era dovuti ricorrere nella citata memoria comune degli « Annali ».

Procedendo poi nell'esame delle superficie con un fascio irrazionale di curve C, ed avendo ormai provato che $p^{(1)} \geqq 1$, si deduce senz'altro dalla (1):

o $\quad \pi = 0$ (rigate), $\quad$ ovvero $\quad \Delta = 0, p = 1, p^{(1)} = 1$.

Pertanto resta solo da studiare il caso $p = 1$, che – all'infuori dell'ipotesi $\pi = 0$ – dà luogo a supporre $\pi = 1$ o $\pi > 1$.

Il caso $\pi = 1$ si esaurisce com'è indicato nella mia memoria del Circolo di Palermo. Per $\pi > 1$, il ragionamento ivi svolto deve essere ripreso ed emendato in un punto (p. 7 della Nota) perchè, dopo avere costruito una *curva parabicanonica* K è facile convincersi che, se questa non appartenga ad un fascio, non si può costruirne un'altra distinta e disequivalente.

Ecco dunque come condurremo la discussione. La nostra superficie F possiede, per ipotesi, un fascio ellittico di curve di genere π senza punti doppi. Sopra una curva C del fascio si ha un certo numero s di serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricanoniche, cioè serie disequivalenti dalla bicanonica, i cui doppi coincidono nella serie quadricanonica. Codeste serie si scambiano, in generale, l'una nell'altra, al variare di C nel fascio ellittico di F. Ma, in corrispondenza ad ogni C, si può costruire razionalmente un gruppo di s curve C' birazionalmente identiche, ciascuna delle quali risponda alla C stessa ed ad una delle s $g_{4\pi-4}$ definite sopra di essa. In tal guisa si potrà sostituire alla nostra superficie F una F' coi medesimi caratteri – rappresentata sulla F multipla senza curva di diramazione – che contiene parimente un fascio di curve C' di genere π, senza punti doppi, su ciascuna delle quali viene definita razionalmente una serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ semiquadricanonica. Sulla superficie F' consideriamo le curve M che segano sulle C' gruppi della detta serie $g_{4\pi-4}$. Le curve 2M segando sulle C' gruppi della serie quadricanonica, è facile riconoscere che il sistema continuo $\{2M\}$ equivale alla somma di un certo numero di curve C' e d'una curva paraquadricanònica, la cui esistenza ci prova come quella della curva parabicanonica nella mia Nota citata di Palermo.

Avremo pertanto

$$\{2M\} \equiv \{rC' + 2K\},$$

designando con K la curva parabicanonica.

Ora, se r è pari, i caratteri di $\{M\}$ sono quelli stessi di $\left\{\frac{r}{2}C + K\right\}$ e quindi si prova egualmente l'esistenza d'una M spezzata in tante curve C' e in una curva Θ parasemiquadricanonica: questa curva, come la K, è ellittica ma disequivalente da K e perciò *distinta* da essa; ora le due curve equivalenti 2Θ e $2K$ permettono di costruire in F' un fascio lineare di curve ellittiche (come nella mia Nota di Palermo); ne risulta poi che tutte le C' e quindi anche tutte le C di F, hanno eguali moduli, ecc.

Ma che cosa accade se r è dispari? In questo caso non si arriva più alla conclusione voluta; però si riconosce tosto che allora il genere delle C e delle C', π, deve essere dispari:

$$\pi = 2\rho - 1.$$

Dunque il nostro ragionamento vale per π pari. Se π è dispari, conviene considerare in luogo delle serie semiquadricanoniche sulle C, le serie che moltiplicate per un altro intero t ($\neq 2$) danno il t–plo della serie bicanonica. Il ragionamento si svolge in modo affatto analogo e conduce allo scopo tutte le volte che π sia divisibile per t. Basta dunque aver preso t eguale ad un divisore, per esempio al più piccolo divisore primo, di π.

La conclusione a cui si è condotti è quella stessa che si trova nella citata Nota di Palermo:

Le superficie con $p_g = 0$, $p_a = -1$, che non siano riferibili a rigata appartengono alla famiglia delle superficie ellittiche (con ∞^1 trasformazioni in sè), rappresentabili sopra un cilindro ellittico multiplo con un certo numero di sezioni piane parallele di diramazione. E infine le condizioni di riferibilità a rigata d'una superficie sono espresse dall'annullamento del quadrigenere e del sestigenere

$$P_4 = P_6 = 0 .$$