Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Algebra elementare [Vol. I: ad uso dei Ginnasi superiori e del corso inferiore degli Istituti magistrali inferiori]

Zanichelli, Bologna, 1931. (Edizioni successive varie)

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

ALGEBRA ELEMENTARE

VOLUME PRIMO

AD USO DEI GINNASI SUPERIORI

E DEL CORSO INFERIORE DEGLI ISTITUTI TECNICI

LABORAVI · FIDENTER

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

1931 - IX

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - IX-1931-IX

Capitolo I.

I numeri relativi

Definizioni.

1. Tutti sappiamo che i numeri, i quali comprendono, oltre lo 0 (zero), gli interi

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

e i numeri fratti o frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots,$$

servono a contare gli oggetti e a misurare le grandezze, come la lunghezza di una strada o l'area di un campo o il volume di un mucchio di ghiaia o il peso di un corpo, ecc.

Ma molte volte si è condotti a considerare grandezze, che, pur essendo fra loro comparabili (o, come si suol dire, *omogenee*), si possono computare in *due sensi* diversi, l'uno *opposto* dell'altro: somme incassate o pagate, crediti o debiti, guadagni o perdite, temperature al di sopra o al di sotto dello zero, latitudini boreali o australi, longitudini occidentali od orientali, ecc.

In tutti questi casi i calcoli si rendono più rapidi e più significativi, ricorrendo ai cosiddetti *numeri relativi*, cioè contrassegnati col + o col — .

Prendiamo uno degli esempi dianzi accennati. Un cassiere, che, al suo sportello, fa volta per volta incassi o pagamenti, può sul suo registro di cassa distinguere gli uni dagli altri, scrivendo le somme incassate e pagate in due colonne diverse:

Incassi		Pagamenti	
L.	—	L.	350
»	720	»	—
»	1500	»	—
»	—	»	800
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Ma può anche registrare tutte queste somme, le une dopo le altre, in una medesima colonna, distinguendo quelle incassate da quelle pagate in un modo qualsiasi, p. es. scrivendo in nero le prime, in rosso le seconde; ma siccome gli incassi accrescono il fondo di cassa, mentre i pagamenti lo diminuiscono, il cassiere troverà più naturale registrare gli incassi con numeri *da aggiungere*, cioè contrassegnati col $+$, e i pagamenti con numeri *da togliere*, cioè contrassegnati col $-$:

Operazioni di cassa

L.	$-$ 350
»	$+$ 720
»	$+$ 1500
»	$-$ 800
. . . . .	. . . . .

Similmente per i crediti e i debiti, per i guadagni e le perdite. Nel caso delle temperature si sogliono contrassegnare col $+$ quelle sopra zero, col $-$ quelle sotto, e si parla senz'altro di $+15^\circ$ C. o di -3° C. ecc. E se, come si fa talvolta, si conviene di contrassegnare col $+$ le latitudini boreali e le longitudini occidentali (e quindi col $-$ le latitudini australi e le longitudini orientali) si hanno, ad es., per le città qui sotto notate le latitudini e le longitudini (rispetto al meridiano di Roma [Monte Mario] e a meno di $1'$) indicate accanto a ciascuna:

Roma	lat.	$+41^\circ 54'$	long.	0°
Torino	»	$+45^\circ 30'$	»	$-4^\circ 48'$
Trieste	»	$+45^\circ 40'$	»	$+1^\circ 18'$
Trapani	»	$+38^\circ 3'$	»	$+0^\circ 1'$
Lecce	»	$+40^\circ 21'$	»	$+5^\circ 41'$
Tripoli	»	$+30^\circ 20'$	»	$+0^\circ 40'$
Asmara	»	$+15^\circ 20'$	»	$+26^\circ 20'$
Mogadiscio . .	»	$+2^\circ 2'$	»	$+32^\circ 45'$
Madrid	»	$+41^\circ$	»	$-16^\circ 10'$
Londra	»	$+51^\circ 24'$	»	$-12^\circ 36'$
Parigi	»	$+49^\circ$	»	$-10^\circ 10'$
Berlino	»	$+52^\circ$	»	$+0^\circ 53'$
Vienna	»	$+48^\circ 30'$	»	$+3^\circ 35'$
Leningrado . .	»	$+59^\circ 59'$	»	$+17^\circ 48'$

2. Come già si è accennato dapprincipio, i numeri contrassegnati col $+$ o col $-$ si dicono *relativi*; e più precisamente (escluso lo 0) si chiamano *positivi* i numeri che hanno il segno $+$, *negativi* quelli che hanno il segno $-$. Quanto allo 0, siccome, per ogni specie di grandezze, aggiungere o togliere 0 è la stessa cosa, $+0$ non si distingue da -0, cioè $+0$ e -0 sono eguali, cosicchè davanti allo 0 è in ogni caso inutile mettere il segno.

Per contrapposto ai numeri relativi, si dicono *assoluti* i numeri privi di segno, che sinora abbiamo considerato nell' Aritmetica.

Ad ogni numero relativo corrisponde un ben determinato numero assoluto, che si ottiene da esso, sopprimendo il segno $+$ o $-$, e che si chiama il *valore assoluto* del numero relativo considerato; così il valore assoluto di $+5$ è 5, di -3 è 3, ecc. Lo 0, considerato come numero relativo, ha valore assoluto nullo e segno indeterminato.

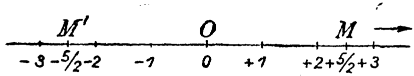
Viceversa ogni numero assoluto, che non sia 0, dà luogo a due diversi numeri relativi, secondo che gli si premette il segno $+$ o $-$; e questi due numeri relativi, aventi lo stesso valore assoluto e segni contrari, si dicono fra loro *opposti*.

Due numeri relativi (diversi da zero) *sono uguali solo quando hanno lo stesso valore assoluto e lo stesso segno.*

3. Agli esempi già indicati di grandezze misurabili con numeri relativi conviene aggiungerne un altro, da cui si è condotti ad una rappresentazione geometrica dei numeri relativi, che tornerà molte volte utile nel seguito.

Pensiamo una strada, per es. la via Emilia, che passa per Bologna e va da Piacenza a Rimini; e immaginiamo che lungo di essa, per tutta la sua lunghezza, siano collocate le pietre chilometriche (come in realtà è fatto per qualche tratto) e che su ciascuna pietra sia segnata la rispettiva distanza, in km., da Bologna, sia nel tratto da Bologna a Rimini, sia in quello da Bologna a Piacenza. A distinguere le une dalle altre queste distanze, contate a partire da Bologna nei due sensi, si può convenire di indicare con numeri positivi quelle da Bologna verso Rimini e con numeri negativi quelle da Bologna verso Piacenza. Si dirà allora che la distanza, in km., da Bologna a Forlì è $+61{,}8$, quella da Bologna a Reggio Emilia -65.

Pensando, invece che alla via Emilia, ad una strada immaginaria, tutta rettilinea e indefinitamente prolungata nei due sensi, arriviamo alla seguente *rappresentazione geometrica dei numeri relativi.* Segnata sul foglio una retta, fissiamo su di essa un punto O *(origine)* e, adottata un'unità di misura, per es. il cm., conveniamo di misurare con *numeri positivi* le distanze da O *verso destra* (cioè nel senso indicato in figura con una freccia), con *numeri negativi* quelle da O *verso sinistra.* Per avere le distanze $+1$, $+2$, $+3$,... bisognerà riportare, a partire da O verso destra, l'unità di misura 1,



2, 3,... volte rispettivamente, mentre i punti a distanza -1, -2, -3,... si otterranno riportando 1, 2, 3,... volte l'unità da O verso sinistra. E in modo analogo si rappresenteranno i numeri relativi fratti. L'origine O corrisponde al numero 0, e due numeri opposti $\left(\text{per es. } +\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ sono rappresentati da due distanze OM, OM', uguali ma da parti opposte rispetto ad O.

Si ha così una *retta graduata*; ed è di questo tipo la cosiddetta *scala*, di cui sono forniti varî strumenti, p. es. i termometri, mentre quella dei barometri, come pure la scala grafica delle carte topografiche o geografiche, è graduata soltanto con numeri positivi o, meglio, assoluti.

Di una retta graduata si dice *senso* o *verso positivo* quello, in cui si conviene di valutare le distanze da O con numeri positivi (nel caso della fig. quello indicato dalla freccia), *senso* o *verso negativo* l'opposto.

Addizione e sottrazione dei numeri relativi

4. I numeri relativi, come già i numeri assoluti, si possono sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere; ma naturalmente qui bisogna tener conto anche dei loro segni.

Cominciando dall'*addizione*, avvertiamo anzitutto che anche nel caso dei numeri relativi il risultato dell'addizione si dice *somma* e i numeri che si addizionano o sommano, si chiamano *addendi* o *termini* della somma; e l'operazione di addizione si seguita ad indicare col segno $+$.

Ora la regola per sommare due numeri relativi è senza altro suggerita da uno qualsiasi degli esempi del n. 1 od anche dalla rappresentazione dei numeri relativi su di una retta graduata (n. prec.).

Torniamo, per fissare le idee, ad un cassiere. Se egli fa, l'uno dopo l'altro, due incassi o due pagamenti, il risultato per la cassa è quello stesso, che si avrebbe se il cassiere riscotesse o, rispettivamente, pagasse in una sola volta le due somme riscosse o pagate separatamente. Così, se le due somme incassate sono di L. 350 e L. 975 o quelle pagate sono di L. 275 e L. 1000, è naturale scrivere

$$[+350]+[+975]=+1325, \quad [-275]+[-1000]=-1275,$$

dove si è chiuso ciascun addendo in parentesi quadre [ ], per distinguere il $+$ o $-$, che gli spetta secondo che è positivo o negativo, dal segno $+$ che indica l'addizione.

Supponiamo, in secondo luogo, che il cassiere faccia, l'uno dopo l'altro, un incasso e un pagamento. Può darsi che si tratti di due somme uguali, e allora, a conti fatti, non si ha nessuna variazione nella situazione di cassa: il risultato complessivo delle due operazioni è nullo e si scriverà, ad es., $[+750]+[-750]=0$.

Se poi si tratta di due somme diverse, bisogna distinguere due casi, secondo che è maggiore la somma incassata o quella pagata. Nel primo caso è come se venisse incassata la differenza fra la somma effettivamente riscossa e quella pagata; nel secondo caso invece è come se venisse pagata la differenza fra la somma pagata e quella riscossa. Così si è condotti a scrivere, per es.,

$$[+450]+[-200]=+250, \quad [+175]+[-500]=-325.$$

A conseguenze perfettamente analoghe si perviene, se si pensa, anzichè agli incassi e ai pagamenti, ai cammini, che su di una retta graduata può percorrere, a partire dall'origine O, un punto M (immagine in piccolo di un pedone, che cammini su di una strada rettilinea). Se M percorre successivamente 3 unità di lunghezza verso destra (o verso sinistra) e poi altre 2 unità nel medesimo senso, è come se percorresse, tutte di seguito in quel medesimo senso, $3+2$ unità. Supponiamo invece che il punto, sempre partendo da O, percorra prima un certo numero di unità in un senso e poi un certo altro numero di unità nel senso opposto. Se i cammini percorsi nei due sensi opposti sono uguali, il punto M si ritrova alla fine in O (cioè ha compiuto un cammino utile nullo). Escluso questo caso, esso finirà col trovarsi da quella parte di O, nel cui senso ha compiuto il cammino (assoluto) maggiore: così, ad es., si scriverà

$$[+3]+[+2]=+5, \quad [-3]+[-2]=-5,$$
$$[+3]+[-3]=0,$$
$$[+3]+[-2]=+1, \quad [-3]+[+2]=-1.$$

Queste osservazioni conducono alla seguente

Regola. *La somma di due numeri relativi di ugual segno è quel numero, che ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi e lo stesso loro segno. La somma di due numeri relativi di segno contrario è il numero, che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti dei due addendi e il segno di quello di essi, che ha il valore assoluto maggiore.*

In particolare la somma di un qualsiasi numero relativo e dello zero è uguale al numero dato (in accordo col significato concreto che in ogni caso ha la aggiunta dello zero).

Quando gli addendi hanno valori assoluti fratti, e segni contrari bisogna, come prima cosa, ridurre questi valori assoluti allo stesso denominatore per riconoscere quale dei due addendi abbia valore assoluto maggiore e, quindi, quale sia il segno, che spetta alla somma. Per es.

$$\left[-\frac{8}{5}\right]+\left[+\frac{2}{3}\right]=\left[-\frac{24}{15}\right]+\left[+\frac{10}{15}\right]=-\frac{14}{15}.$$

5. In accordo con la regola precedente, la somma di due numeri opposti, come $+8$ e -8 o $-\frac{3}{4}$ e $+\frac{3}{4}$, ecc., è sempre uguale a 0.

Viceversa, *se due numeri relativi hanno per somma* 0, *essi sono necessariamente opposti.* Infatti i due numeri debbono avere, anzitutto, segni contrari, perchè la somma di due numeri entrambi positivi o negativi è, per la regola del n. prec., positiva o, rispettivamente, negativa. E i loro valori assoluti, dovendo avere differenza nulla, sono necessariamente uguali.

6. Quando si è imparato a sommare due numeri relativi, si possono ugualmente sommare tre o quattro o quanti si vogliono numeri relativi. Come nel caso dei numeri assoluti, si sommano anzitutto i primi due addendi, poi alla somma così ottenuta (secondo la regola del n. prec.) si somma il terzo addendo, poi al nuovo risultato si somma il quarto, ecc.

Per es., si vogliano sommare i numeri $+7$, -15 e $+3$: se, analogamente a quanto si faceva talvolta in Aritmetica, si indica con la parentesi $([+7]+[-15])$ la somma già eseguita di $+7$ e -15, la somma dei tre addendi considerati è, per definizione, uguale a

$$([+7]+[-15])+[+3];$$

e, siccome si ha

$$[+7]+[-15]=-8,\quad [-8]+[+3]=-5,$$

risulta

$$([+7]+[-15])+[+3]=-5.$$

Importa avvertire che, invece di

$$([+7]+[-15])+[+3],$$

si suole scrivere più semplicemente

$$[+7]+[-15]+[+3];$$

e così, anche in ogni altro caso, la somma di quanti si vogliono addendi relativi si indica scrivendo di seguito questi addendi, mettendo fra ciascuno e il successivo il segno $+$ dell' addizione.

7. Riprendiamo l' esempio del cassiere. Egli ogni sera, alla chiusura degli sportelli, per verificare la situazione di cassa, fa la somma di tutti gli incassi e pagamenti eseguiti nella giornata. Ma, per rendere poi più rapido questo conto, egli, senza attendere la sera, può, per es. ad ogni ora, fare il conto delle operazioni di incasso e di pagamento compiute in quell' ora, riservandosi di fare più tardi la somma totale delle somme parziali così mano mano ottenute. Egli giungerà in tal modo allo stesso risultato, che avrebbe ottenuto, eseguendo tutta in una volta la somma complessiva.

Questo fatto evidente si può enunciare, dicendo che *la somma di quanti si vogliono numeri relativi non cambia, se ad alcuni di questi addendi si sostituisce la loro somma eseguita.*

È questa (come già nel caso dei numeri assoluti) la cosiddetta *proprietà associativa* della somma.

Ad es. $[-13]+[+9]+[-5]=[-13]+([+9]+[-5])$ $=[-13]+[+4]$.

Applicando la stessa proprietà associativa in senso inverso, si ha *che la somma di quanti si vogliono numeri relativi non cambia, se ad un addendo si sostituisce una somma uguale ad esso.*

8. Vale per la somma dei numeri relativi (come già nel caso di quelli assoluti) un' altra proprietà altrettanto evidente. Se in due giornate diverse, il cassiere eseguisce, sia pure in ordine differente, gli stessi incassi e gli stessi pagamenti, il risultato finale di queste operazioni di cassa è, nelle due giornate, il medesimo.

Cioè *la somma di quanti si vogliono numeri relativi non dipende dall' ordine, in cui se ne prendono gli addendi.*

Questa (come già si sa dal caso dei numeri assoluti) è la *proprietà commutativa* della somma.

Così, ad es., tanto $[+8]+[-17]$ quanto $[-17]+[+8]$ è uguale a -9; tanto $[-25]+[+9]+[-13]$, quanto $[+9]+[-25]+[-13]$ è uguale a -29, ecc.

Tenendo conto insieme della proprietà commutativa e di quella associativa, si ha che, *quando si debbono sommare più addendi, di cui alcuni siano positivi e gli altri negativi, si può cominciare col sommare da una parte tutti gli addendi positivi, dall' altra tutti quelli negativi; e poi sommare le due somme, parziali, di segno contrario, così ottenute.* Il calcolo riesce più rapido, perchè ogni somma di numeri di ugual segno si riduce in sostanza ad una somma ordinaria.

9. Passiamo alla *sottrazione*, che è l' operazione inversa dell' addizione. Anche qui, come nel caso dei numeri assoluti, il risultato della sottrazione si dice *differenza*; il numero che si vuol sottrarre si chiama *sottraendo*, quello su cui si vuol eseguire la sottrazione si chiama *minuendo*. La sottrazione si seguita ad indicare col segno —.

Se si pensa alla rappresentazione dei numeri relativi su di una retta graduata (n. 3) e si riflette che sommare, ad es., $+3$ ad un numero relativo vuol dire spostarsi di 3 unità di lunghezza verso destra, si capisce che per sottrarre $+3$ basterà spostarsi di 3 unità verso sinistra; e similmente, come sommare -3 ad un numero relativo vuol dire spostarsi di 3 unità verso sinistra, così sottrarre -3 vorrà dire spostarsi di 3 unità verso destra.

Ma precisiamo meglio questa osservazione. Dati due numeri relativi, per es. $+15$ e -27, sottrarre -27 *(sottraendo)* da $+15$ *(minuendo)* vuol dire trovare un numero relativo (*differenza*), che, sommato col sottraendo -27, dia come risultato il minuendo $+15$. Ora si vede subito che questa differenza non è altro che la somma del minuendo $+15$ e dell'opposto $+27$ del sottraendo -27. Infatti per la proprietà associativa della somma (n. 7)

$$([+15]+[+27])+[-27]=[+15]+([+27]+[-27]),$$

e siccome si ha (n. 5)

$$[+27]+[-27]=0,$$

si conclude appunto

$$([+15]+[+27])+[-27]=+15.$$

Perciò indicando con $[+15]-[-27]$ la differenza di $+15$ e -27, si ha

$$[+15]-[-27]=[+15]+[+27].$$

Similmente si trova

$$[+15]-[+27]=[+15]+[-27],\quad [-15]-[-27]=[-15]+[+27],$$
$$[-15]-[+27]=[-15]+[-27].$$

Resta così giustificata la

Regola. *Per sottrarre da un numero relativo un altro numero relativo, basta sommare al minuendo l'opposto del sottraendo.*

In particolare, sottraendo da un qualsiasi numero relativo lo 0, si riottiene quel numero; sottraendo dallo 0 un qualsiasi numero relativo, si ottiene l'opposto di questo numero.

Così $[+7]-0=+7$, $[-7]-0=-7$; $0-[+12]=-12$, $0-[-12]=+12$.

10. Qui va fatta un'osservazione molto importante. Nel caso dei numeri assoluti si poteva sottrarre un numero da un altro, solo quando il sottraendo era minore del minuendo o, al più, uguale ad esso. Invece, nel caso dei numeri relativi, risulta dalla regola del n. prec. (come del resto da ognuna delle rappresentazioni concrete date dianzi per i numeri relativi) che *da un qualsiasi numero relativo si può sottrarre qualsiasi altro numero relativo.* In altre parole possiamo dire che, mentre nel caso dei numeri assoluti si presentavano delle *sottrazioni impossibili*, per i numeri relativi la sottrazione *è sempre possibile.*

11. La differenza di due numeri relativi uguali (siano essi positivi o negativi) è sempre uguale a 0; in ogni altro caso la differenza di due numeri relativi è necessariamente positiva o negativa. Secondo che si presenta il primo o il secondo caso, si dice che il minuendo *è maggiore* o, rispettivamente *minore* del sottraendo. Si ha così una regola, o criterio, per disporre tutti i numeri relativi in *ordine crescente*, ed importa comprender bene, una volta per tutte, questo ordinamento.

Se si prendono due numeri entrambi positivi, per es. $+4$ e $+9$, si ha

$$[+9]-[+4]=+5, \quad [+4]-[+9]=-5,$$

cioè il maggiore è $+9$; e si scrive $+9>+4$, $+4<+9$. Similmente si riconosce, anche in ogni altro caso, che *di due numeri positivi è maggiore quello che ha il valore assoluto maggiore*, cosicchè l'ordine crescente dei numeri positivi è (in accordo col loro significato concreto) quello stesso dei valori assoluti.

Se invece si prendono un numero positivo ed uno negativo, per es. $+5$ e -8, si ha

$$[+5]-[-8]=+13, \quad [-8]-[+5]=-13,$$

cosicchè il maggiore è $+5$; e ciò si esprime, scrivendo $+5>-8$, $-8<+5$. In questo stesso modo si riconosce che *ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo.*

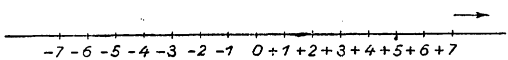
Consideriamo infine due numeri entrambi negativi, per es. -3 e -10: si ha

$$[-3]-[-10]=+7, \quad [-10]-[-3]=-7.$$

È dunque maggiore -3; cioè $-3>-10$, $-10<-3$. Nello stesso modo si vede che, in ogni caso, *di due numeri negativi è maggiore quello, che ha il valore assoluto minore.*

Lo 0 è maggiore di tutti i numeri negativi e minore di tutti i numeri positivi.

Per avere un'immagine concreta di questo ordinamento dei numeri relativi basta pensare ad una retta graduata (n. 3) e immaginare di percorrerla nel senso positivo: si incontrano così successivamente i numeri relativi nel loro ordine crescente.



Di due numeri relativi quali si vogliono è sempre maggiore quello, che sulla retta graduata, percorsa nel senso positivo, si trova dopo l'altro.

12. Supponiamo che da un numero relativo, per es. da -6, si voglia sottrarre -2, e poi al risultato sommare -4, e poi ancora sottrarre dal nuovo risultato $+5$. Il risultato finale di queste addizioni e sottrazioni di numeri relativi, se si usano, al solito, le parentesi per indicare le operazioni eseguite, andrebbe denotato con

$$\{([-6]-[-2])+[-4]\}-[+5].$$

Ma, analogamente al caso in cui si trattava di sole addizioni (n. 6), si usa scrivere più semplicemente

(1) $$[-6]-[-2]+[-4]-[+5].$$

Ora ricordiamo che, secondo la regola del n. 9, ogni sottrazione fra numeri relativi si riduce ad un' addizione: sottrarre -2 è lo stesso che sommare $+2$, sottrarre $+5$ è lo stesso che sommare -5. Perciò abbiamo

$$[-6]-[-2]+[-4]-[+5]=[-6]+[+2]+[-4]+[-5].$$

Si può dunque dire che, quando si tratta di numeri relativi, l'addizione e la sottrazione costituiscono in sostanza una medesima operazione. Essa si chiama *addizione algebrica*; e tutte le volte che, come nell'esempio (1), si considerano più numeri relativi e alcuni si prendono come addendi, gli altri come sottraendi, si dice che si fa una *somma algebrica*. Dall'esempio or ora considerato risulta che *per ridurre una somma algebrica ad una somma vera e propria di numeri relativi, basta sostituire ad ogni numero relativo, che vi compaia come sottraendo, il suo opposto come addendo*; in altre parole, *basta cambiare ogni segno di sottrazione in un segno di addizione, cambiando, nel medesimo tempo, il segno del numero relativo che andava sottratto.*

Moltiplicazione e divisione dei numeri relativi

13. Anche per i numeri relativi il risultato della moltiplicazione si dice *prodotto* e i numeri che si moltiplicano si chiamano *fattori*. Più precisamente, nel caso di due fattori, il numero che si moltiplica si dice *moltiplicando*, quello per cui si moltiplica *moltiplicatore*. Come in Aritmetica, la moltiplicazione si indica col segno $\times$.

Alla regola per moltiplicare due numeri relativi si è condotti nel modo più naturale, quando ci si proponga di *definire il prodotto in maniera che per questa nuova specie di moltiplicazione si conservino le stesse proprietà fondamentali, che valgono per la moltiplicazione dei numeri assoluti.*

Cominciamo coll'osservare che, quando in una qualsiasi classe di grandezze misurabili con numeri relativi, ci si limita a considerare soltanto grandezze misurate da numeri positivi (per es. soli incassi o soli crediti o sole temperature sopra lo zero, ecc.) il segno diventa superfluo, e sulle corrispondenti misure si può operare, come se si trattasse di numeri assoluti. Perciò si è intanto condotti a *prendere come prodotto di due numeri positivi il numero positivo, che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori.* E similmente, si *prende uguale a zero il prodotto dello zero per un qualsiasi numero positivo.*

Così si avrà, ad es.,

$$[+7]\times[+3]=+21,\quad \left[+\frac{2}{3}\right]\times\left[+\frac{5}{7}\right]=+\frac{10}{21},$$
$$[+9]\times 0=0,\quad 0\times[+12]=0,\ \text{ecc.}$$

Volendo allora definire il prodotto di un numero negativo per uno positivo, ad es. di -5 per $+3$, ricordiamo anzitutto che il numero -5 è caratterizzato dalla uguaglianza (n. 5)

$$[+5]+[-5]=0.$$

Perciò il prodotto della somma $[+5]+[-5]$ per $+3$ va posto uguale a zero. D'altra parte nel caso dei numeri assoluti il prodotto di una somma per un numero si può anche calcolare, moltiplicando per quel numero i singoli addendi e poi sommando i prodotti parziali così ottenuti (*proprietà distributiva*). Se vogliamo che questa stessa proprietà valga anche per la moltiplicazione dei numeri relativi, dobbiamo definire il prodotto di -5 per $+3$ in modo che risulti

$$[+5]\times[+3]+[-5]\times[+3]=0;$$

e ciò vuol dire (n. 5) che al prodotto $[-5]\times[+3]$ dobbiamo dare il valore opposto a quello di $[+5]\times[+3]$, cioè il valore -15:

$$[-5]\times[+3]=-15.$$

E se vogliamo che, come per i numeri assoluti, il prodotto non dipenda dall'ordine in cui si prendono i fattori, il medesimo valore -15 va attribuito anche a $[+3]\times[-5]$: cioè

$$[+3]\times[-5]=-15.$$

Analogamente in tutti i casi, in cui si tratta di moltiplicare due numeri relativi di cui uno sia positivo e l'altro negativo: cioè si è condotti a *prendere come prodotto di due numeri relativi di segno contrario quel numero* **negativo,** *che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori.*

Resta, infine, il caso, in cui entrambi i fattori siano negativi, per es. -5 e -3. Riprendiamo l'uguaglianza

$$[+5]+[-5]=0.$$

Se, vogliamo che il prodotto dello zero per un qualsiasi numero negativo risulti ancora nullo e che il prodotto di una somma per un numero negativo sia ancora uguale alla somma dei prodotti parziali, che si ottengono, moltiplicando per quel numero gli addendi, dobbiamo definire $[-5]\times[-3]$ in modo, che risulti

$$[+5]\times[-3]+[-5]\times[-3]=0,$$

cioè dobbiamo assumere come valore di $[-5]\times[-3]$ l'opposto del valore di $[+5]\times[-3]$, vale a dire precisamente $+15$. E poichè tutto ciò si può ripetere per il prodotto di due numeri negativi quali si vogliano, si è condotti a *prendere come prodotto di due numeri negativi il numero* positivo, *che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori.*

Risulta così giustificata la seguente

Regola. *Il prodotto di due numeri relativi è quel numero, che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due fattori ed è positivo o negativo, secondo che i due fattori hanno segni uguali o contrari.*

Occorre fissar bene l'attenzione sulla *regola dei segni*, che si può enunciare dicendo:

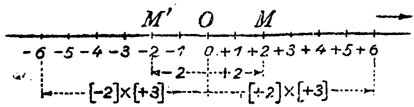
Nella moltiplicazione, + *per* + *e* — *per* — *fanno* +; + *per* — *e* — *per* + *fanno* —.

Giova inoltre rilevare subito queste due conseguenze immediate della regola di moltiplicazione:

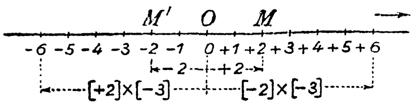
a) *Moltiplicare un numero relativo per* -1 *equivale a cambiargli segno.*

b) *Il prodotto di due numeri, di cui uno, almeno, sia nullo,* è 0; mentre *il prodotto di due numeri relativi, entrambi diversi da* 0, *non è mai nullo.*

14. Per esercizio, vediamo come si possa interpretare la moltiplicazione di due numeri relativi, quando il moltiplicando si rappresenti, su di una retta graduata (n. 3), per mezzo della corrispondente distanza OM, la quale, come sappiamo, va presa da una parte o dall'altra dell'origine fissa O, secondo il rispettivo segno. Moltiplicare il numero relativo rappresentato da OM per un numero positivo, ad es. per $+3$, vuol



dire prendere, a partire da O, la distanza tripla di OM e *dalla stessa parte rispetto ad O.* Invece moltiplicare lo stesso numero relativo rap-



presentato da OM per -3 vuol dire prendere ancora, a partire da O, la distanza tripla di OM, ma *dalla parte opposta, rispetto all'origine O.*

15. Per fare il prodotto di tre o più fattori si moltiplica il primo per il secondo, poi il prodotto parziale così ottenuto per il terzo, e così via.

Per es., il prodotto di -8, $+12$, -4 è

$$([-8]\times[+12])\times[-4];$$

ma si indica più semplicemente con

$$[-8]\times[+12]\times[-4].$$

Esso è uguale a $+384$.

In ogni caso il valore assoluto del prodotto è, per la regola del n. 13, uguale al prodotto dei valori assoluti dei fattori; e il segno dipende dal numero dei fattori negativi. Se questi fattori negativi sono in numero *pari*, il prodotto risulta *positivo*; se invece essi sono in numero *dispari*, il prodotto risulta *negativo.*

Va anche notato che *per cambiare segno ad un prodotto basta cambiare segno ad uno dei fattori o ad un numero dispari di fattori*; mentre, *cambiando segno, in un prodotto, ad un numero pari di fattori, si conserva inalterato il valore del prodotto.*

16. Dalla regola del n. 13 risulta altresì che: *In un prodotto di tre o più fattori si può sostituire al posto di due o più fattori il loro prodotto eseguito, senza che cambi nè il valore assoluto, nè il segno del prodotto totale.* È questa (come nel caso dei numeri assoluti) la *proprietà associativa* del prodotto.

Così, ad es.,

$$[-7]\times[+9]\times[-6]=[-7]\times([+9]\times[-6])=$$
$$=[-7]\times[-54].$$

E, ancora per la regola del n. 13, è manifesto che seguita a valere, anche per i numeri relativi, la *proprietà commutativa* del prodotto: *Il prodotto di quanti si vogliono numeri relativi non dipende dall'ordine, in cui si moltiplicano i fattori.*

Per es., $[-8]\times[+5]$ e $[+5]\times[-8]$ sono entrambi uguali a -40; $[-3]\times[-7]\times[+5]$ e $[+5]\times[-7]\times[-3]$ sono entrambi uguali a $+105$, ecc.

Infine sussiste anche per la moltiplicazione dei numeri relativi, la *proprietà distributiva* rispetto alla somma, cioè: *Per moltiplicare per un numero relativo la somma di due (o più) addendi, pur essi relativi, si può anche cominciare col moltiplicare per quel numero i singoli addendi, e poi sommare fra loro i prodotti parziali così ottenuti.* Così, ad es.,

$$([-7]+[+9])\times[-3]=[-7]\times[-3]+[+9]\times[-3].$$

Ciò in sostanza risulta dal fatto che alla regola per la moltiplicazione dei numeri relativi siamo appunto arrivati, proponendoci di conservare valida anche questa proprietà (n. 13). Ma se non si vuol tener conto di ciò e si preferisce vedere come dalla regola stessa del n. 13 discenda direttamente la proprietà distributiva, basta fare le seguenti riflessioni. Si ricordi anzitutto che, nel caso dei numeri assoluti, la moltiplicazione è distributiva, come si sa dall'Aritmetica, non soltanto *rispetto della somma,* ma anche *rispetto della differenza.* Ora, passando al caso dei numeri relativi, si tratta di far vedere che, quando si ha come moltiplicando una somma di due numeri relativi e come moltiplicatore un qualsiasi numero relativo, si arriva al medesimo risultato sia moltiplicando per il dato moliplicatore la somma eseguita, sia moltiplicando per esso separatamente i due addendi e poi facendo la somma dei due prodotti parziali (relativi) così ottenuti. Ora è prima di tutto manifesto che nell'uno e nell'altro modo si ottiene pel risultato il medesimo valore assoluto, perchè il valore assoluto della somma data è uguale alla somma o alla differenza dei valori assoluti dei due addendi, e, dovendosi moltiplicare questa somma o differenza di valori assoluti per il valore assoluto del moltiplicatore, si può senz'altro applicare la proprietà distributiva.

Quanto poi al segno, supponiamo dapprima che il moltiplicatore sia positivo, nel qual caso il prodotto, per la regola del n. 13, deve risultare dello stesso segno della somma da moltiplicare. Per la stessa ragione ciascuno dei due prodotti parziali ha il medesimo segno dell'addendo, da cui proviene, e, in ogni caso, risulta maggiore in valore assoluto quel prodotto parziale, che corrisponde all'addendo di valore assoluto maggiore, cosicchè il segno della somma dei due prodotti parziali è quello stesso della somma data, cioè appunto quello che spetta al prodotto voluto. Se poi il moltiplicatore è negativo, i due prodotti parziali hanno, rispettivamente, segno contrario agli addendi, da cui provengono, e la loro somma ha segno contrario alla somma data, come appunto deve accadere, secondo la regola dei segni, per il prodotto, che si vuol calcolare.

17. Passiamo infine alla *divisione*. Come nel caso dei numeri assoluti, dividere un dato numero (*dividendo*) per un altro (*divisore*) vuol dire trovare un terzo numero (*quoziente*), che moltiplicato per il divisore dia il dividendo.

Ricordando la regola per la moltiplicazione dei numeri relativi (n. 13), si vede subito che il valore assoluto del quoziente deve essere uguale al quoziente del valore assoluto del dividendo per quello del divisore.

Quanto al segno, se il dividendo è positivo, il quoziente, per la regola dei segni della moltiplicazione (n. 13), deve avere lo stesso segno del divisore; mentre invece, se il dividendo è negativo, il quoziente deve essere di segno contrario del divisore. Si hanno dunque per il dividendo, il divisore e il quoziente le seguenti combinazioni di segno:

Dividendo	Divisore	Quoziente
+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	+

Si riconosce così che *anche nella divisione* $+$ *per* $+$ *e* $-$ *per* $-$ *fanno* $+$; *e* $+$ *per* $-$ *e* $-$ *per* $+$ *fanno* $-$; e possiamo enunciare la seguente:

Regola. *Il quoziente di due numeri relativi è quel numero, che ha come valore assoluto il quoziente del valore assoluto del dividendo per quello del divisore, ed è positivo o negativo, secondo che dividendo e divisore hanno segni uguali o contrari.*

Anche per i numeri relativi l'operazione di divisione si denota col segno :, od anche scrivendo il dividendo al di sopra e il divisore al di sotto di una lineetta orizzontale. Così si ha, ad es.,

$$[+7] : [+10] = \frac{+7}{+10} = +\frac{7}{10}, \quad [+8] : [-2] = \frac{+8}{-2} = -4,$$

$$[-15] : [-9] = \frac{-15}{-9} = +\frac{5}{3}, \quad \left[-\frac{2}{3}\right] : \left[+\frac{5}{7}\right] = \frac{-\frac{2}{3}}{+\frac{5}{7}} = -\frac{14}{15}, \text{ ecc.}$$

18. Importa osservare che, anche per i numeri relativi come per quelli assoluti, *la divisione per* 0 *è un'operazione priva di senso.* Infatti la divisione per 0 di un numero diverso da 0, come, ad es., $\frac{-4}{0}$, è *impossibile,* perchè non esiste nessun numero relativo, che moltiplicato per 0, dia -4; mentre la divisione di 0 per 0 è *inderminata,* perchè ogni numero, moltiplicato per 0 dà 0.

Perciò *la divisione per* 0 *va sempre esclusa.*

19. Due numeri, il cui prodotto sia uguale a $+1$, si dicono fra loro *reciproci*: tali sono, ad es., $+5$ e $+\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$, ecc.

Dalle regole per la moltiplicazione e per la divisione dei numeri relativi (nn. 13, 17) risulta che *dividere un numero per un altro è lo stesso che moltiplicarlo per il reciproco di questo secondo numero.*

Perciò, ricordando anche la proprietà distributiva della moltiplicazione (n. 16), si vede che *per dividere una somma algebrica per un numero relativo basta dividere per questo numero i singoli addendi della somma e poi sommare i quozienti parziali così ottenuti.*

Semplificazioni di scrittura.

20. Quando si è ben capito il significato dei numeri relativi e si sono imparate, in modo sicuro, le operazioni su di essi, si possono adottare, senza pericolo di equivoci, alcune semplificazioni di scrittura, che sono molto comode nei calcoli e che perciò sono accettate da tutti.

a) Consideriamo una qualsiasi somma algebrica (n. 12), per es.

$$[-7]-[+5]+[+13]-[-9]. \tag{2}$$

Si è già notato al n. 12 che una tal somma algebrica si può sempre scrivere come una somma vera e propria: basta sostituire ad ogni numero relativo, che vi compaia come sottraendo, il suo opposto come addendo. Così, nel caso precedente, basta scrivere

$$[-7]+[-5]+[+13]+[+9]. \tag{3}$$

Ora, siccome ciascun addendo ha in sè il suo segno, che, per parlare alla buona, indica se si tratti di un numero « da aggiungere » o di un numero « da togliere », diventano superflui i vari segni $+$, che stanno fra i singoli addendi relativi. Perciò invece della (3) si usa scrivere più semplicemente

$$-7-5+13+9.$$

Analogamente in ogni altro caso: cioè, in ogni somma algebrica, i numeri, che eventualmente vi compaiono come sottraendi, si riducono ad addendi (cambiandone il segno), e poi si scrivono semplicemente tutti gli addendi, l'uno dopo l'altro, ciascuno col proprio segno.

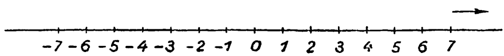
b) Un' altra convenzione, suggerita dall' intento di semplificare le scritture, è quest' altra. Davanti ai numeri positivi il segno $+$ di regola *si sottintende,* salvo, naturalmente, quando si tratti di un addendo di una somma algebrica. Anzi, anche in questo caso si tralascia il segno $+$ davanti ad un numero positivo, se esso è il primo addendo di una somma algebrica. Così, invece di

$$+3,\ +\frac{2}{5},\ +6-15+10,\ [+4]\times[-8],\ \frac{+5}{-4},\ \text{ecc.},$$

si scrive rispettivamente

$$3,\ \frac{2}{5},\ 6-15+10,\ 4\times[-8],\ \frac{5}{-4},\ \text{ecc.}$$

Così una scala graduata (n. 3) si rappresenterà nel modo seguente:



È necessario avere ben presente che, come già si è detto, il segno $+$ davanti ai numeri positivi resta così semplicemente *sottinteso* e non soppresso, cosicchè bisogna tenerne conto nelle operazioni (p. es. nella moltiplicazione e nella divisione) secondo le regole stabilite in questo Capitolo.

Capitolo II.

Principi del calcolo letterale.

Convenzioni fondamentali.

1. Nel capitolo precedente, estendendo il concetto di numero (assoluto), che già avevamo dall'Aritmetica, abbiamo introdotto i numeri relativi (positivi e negativi) e abbiamo imparato ad eseguire su di essi le operazioni fondamentali, cioè l'addizione algebrica, la moltiplicazione e la divisione. *D'or innanzi, parlando di numeri, intenderemo sempre che si tratti di numeri relativi.*

È questa una delle caratteristiche essenziali dell'*Algebra* in confronto dell'*Aritmetica.* Ma ve n'è un'altra, che importa capir bene.

Nelle Scuole medie inferiori, quando abbiamo imparato le regole per misurare le grandezze geometriche (superficie poligonali, circonferenze e cerchi, solidi), abbiamo visto come fosse utile esprimere queste regole per mezzo di « formule », indicando, caso per caso, con lettere le lunghezze dei segmenti, che definiscono le dimensioni delle grandezze considerate. Così, se si indicano con b ed h le lunghezze della base e dell'altezza di un parallelogramma, la regola per trovarne l'area è espressa dalla formuletta

$$b \times h;$$

se b ed h indicano le lunghezze della base e dell'altezza di un triangolo, l'area è data da

$$\frac{1}{2} b \times h;$$

e similmente l'area di un trapezio è data da

$$\frac{1}{2}(b+b')\times h,$$

se b e b' ne denotano le lunghezze delle basi, h l'altezza; la lunghezza di una circonferenza e l'area del cerchio sono date, rispettivamente, da

$$2\pi r, \quad \pi r^2,$$

dove r indica la lunghezza e π (pi greco) rappresenta il noto numero fisso, che fornisce il rapporto della lunghezza di una qualsiasi circonferenza a quella del suo diametro e che è dato, per approssimazione, da 3, 14 o, meglio, da 3, 1416; e così via.

Ognuno di noi ha certamente riconosciuto l'utilità di queste formule per esprimere le regole di misura; esse non solo forniscono altrettanti risultati *generali*, cioè validi ugualmente in tutti i possibili casi particolari, ma suggeriscono immediatamente la via da tenere per risolvere molti problemi sulle figure, alle quali si riferiscono: per es., trovare l'altezza di un triangolo di cui si conoscono l'area e la base, o il raggio di una circonferenza, di cui si conosce la lunghezza, ecc.

Analoghi vantaggi, come risulterà sempre più chiaramente dal séguito dei nostri studi di Matematica e poi di Fisica, si raggiungono, in ogni specie di problemi, studiandoli *in generale*, cioè non sui dati particolari che volta per volta possono essere prefissati, bensì indicando i numeri, che misurano le grandezze date e quelle che si cercano, con lettere, e cercando di esprimere la soluzione con formule, che possano servire in tutti i problemi del medesimo tipo, e diversi fra loro solo per i valori particolari dei dati.

Ora l'Algebra elementare, nella sua prima parte, di cui qui intendiamo occuparci, si propone appunto di studiare sistematicamente i procedimenti di calcolo su numeri (relativi) indicati con lettere e le formule, cui così si perviene. Questi calcoli e queste formule possono corrispondere a problemi svariati di Geometria o di Fisica; ma da queste possibili interpretazioni l'Algebra per se stessa prescinde, occupandosi soltanto di trasformare, semplificare e confrontare le formule, considerate in generale.

2. Conveniamo, dunque, di indicare d'or innanzi con le lettere minuscole (corsive) a, b, c,... altrettanti numeri relativi, *ciascuno col suo segno e col suo valore assoluto.* Di questi a, b, c,... ci serviremo, come se fossero numeri relativi determinati, ma ragioneremo sempre in modo, che tutto ciò, che diremo, resti vero, qualunque valore numerico (relativo) si pensi attribuito ad a, a b, a c,...

Questo modo convenzionale di indicare i numeri per mezzo di lettere si chiama *notazione letterale* od anche *algebrica*; e, similmente, si chiama *calcolo letterale* od *algebrico* quello in cui si usa codesta notazione.

3. L' opposto del numero a si indica con $-a$, cosicchè, viceversa, l' opposto di $-a$ è a (I, n. 2) (1). Ora si suol dire che « $-a$ ha in evidenza il segno $-$ »; e, per contrapposto, si dice che « dinnanzi ad a è sottinteso il segno in evidenza $+$ ». Ma *bisogna ben guardarsi dal confondere il segno $-$ che è messo in evidenza davanti ad una lettera, o il segno $+$ che vi si sottintende, col segno (vero o proprio) del numero relativo, indicato caso per caso da quella lettera.* Come a può, secondo i casi, rappresentare indifferentemente un numero positivo o negativo, lo stesso va detto di $-a$: se ad a si dà il valore 5, $-a$ vuol dire -5; se il valore di a è -5, quello di $-a$ è 5.

---

(1) In questo modo richiamiamo il n. 2 del Capitolo I.

Proprietà fondamentali delle operazioni e loro conseguenze immediate.

4. È chiaro che, quando i numeri si denotano con lettere, il risultato di una qualsiasi operazione su di essi (addizione algebrica, moltiplicazione o divisione) non si può che *indicare*. Si potrà *calcolarlo effettivamente*, solo quando si fisserà un valore per ciascuna delle lettere considerate.

Ogni scrittura, che indichi il risultato di una o più operazioni, da eseguirsi su numeri rappresentati da lettere, si dice una *espressione letterale* o *algebrica*.

Si capisce che, quanto è maggiore il numero delle operazioni che si vogliono indicare, tanto più complicate risultano le espressioni letterali, che così si ottengono. Ora si possono assegnare delle regole generali, le quali permettono di dare alle varie possibili espressioni le forme più semplici e più comode per poter poi calcolarne il valore, quando si dà un valore determinato a ciascuna delle lettere, che vi compaiono. Lo studio ordinato di queste regole è appunto lo scopo del Calcolo letterale, di cui ci occuperemo in questo Capitolo e nei tre seguenti (III, IV e V).

Codeste regole discendono tutte, direttamente o indirettamente, dalle proprietà fondamentali delle operazioni, che già conosciamo; e in questo Capitolo cominceremo coll' esprimere queste proprietà fondamentali con lettere, anzichè con numeri, per poi dedurne le prime e più facili conseguenze.

5. La somma di due numeri relativi a e b si indica, naturalmente, con $a+b$; e, così, la somma di a e $-b$ con $a-b$, la somma di a, b, c con $a+b+c$, quella di $a, -b, c$ con $a-b+c$, quella di $-a, -b, c$ con $-a-b+c$, ecc. Si tratta sempre di somme algebriche (I, nn. 12,20), e in ciascuna di esse i singoli addendi, presi ciascuno col rispettivo segno (sottinteso o in evidenza), si dicono *termini* della somma. Così i termini di $a+b$ sono a e b, quelli di $a-b$ sono a e $-b$, ecc.

È della massima importanza che il principiante fin da queste più semplici espressioni letterali, si impratichisca in modo sicuro a calcolare il valore, che ciascuna di esse assume, quando ai suoi termini si danno valori numerici particolari. Per es., se ad a e b si danno rispettivamente i valori 7 e -10, $a+b$ vuol dire -3, $a-b$ vuol dire 17; se $a=3$, $b=-5$, $c=12$, il valore di $a+b+c$ è $3-5+12$ cioè 10, quello di $a-b+c$ è $3+5+12$, cioè 20, quello di $-a-b+c$ è $-3+5+12$, cioè 14, ecc.

6. Le *proprietà commutativa* ed *associativa* della somma (I, nn. 7, 8) sono espresse rispettivamente dalle due uguaglianze

$$a+b=b+a \qquad \text{(proprietà commutativa)} \tag{1}$$

$$a+b+c=a+(b+c) \qquad \text{(proprietà associativa),} \tag{2}$$

dove, nella seconda uguaglianza, si è indicata con $(b+c)$ la somma eseguita di b e c.

Ad esse possiamo aggiungere la proprietà caratteristica dello zero (rispetto alla somma), espressa dall'uguaglianza

$$a+0=a.$$

Nelle (1), (2) abbiamo supposto che i termini delle somme avessero tutti in evidenza il segno; ma le stesse uguaglianze seguitano a valere quando per qualcuno di essi (od anche per tutti) sia messo in evidenza il segno $-$. Così per la proprietà commutativa

$$a-b=-b+a, \quad -a-b=-b-a, \quad \text{ecc.},$$

e per quella associativa

$$\begin{aligned} a-b+c&=a+(-b+c), \\ a-b-c&=a+(-b-c), \ \text{ecc.} \end{aligned} \tag{3}$$

7. Dalle proprietà commutativa ed associativa della somma risultano immediatamente le seguenti conseguenze:

a) Come in una somma algebrica si può sostituire a più termini la loro somma (proprietà associativa) così, viceversa, *per sommare due somme algebriche basta formare un' unica somma algebrica con tutti i termini di quelle date, presi ciascuno col segno che ha in evidenza.* Per es.

$$(a-b+c)+(-d+e+f)=a-b+c-d+e+f.$$

b) L' opposta di una somma algebrica è la somma degli opposti dei suoi termini; o, in altre parole, *per cambiare segno ad una somma algebrica, basta cambiar segno a tutti i suoi termini.*

Consideriamo la somma $a-b+c$. Diciamo che l' opposta è $-a+b-c$.

Basta far vedere (I, n. 5) che la somma di queste due somme è uguale a 0. Infatti si ha successivamente

$$\begin{aligned}(a-b+c)+(-a+b-c) &= a-b+c-a+b-c \\ &\qquad \text{(osservazione precedente)} \\ &= a-a-b+b+c-c \\ &\qquad \text{(proprietà commutativa)} \\ &= 0+0+0=0.\end{aligned}$$

c) Di qui risulta che *per sottrarre una somma algebrica, basta cambiar segno a tutti i suoi termini,* Infatti per sottrarre un numero basta sommare il suo opposto (I, n. 9). Così

$$a-(-b+c-d)=a+b-c+d.$$

8. Passiamo alla moltiplicazione, ed anzitutto ricordiamo che già in Aritmetica talvolta la moltiplicazione si è denotata, anzichè col segno $\times$, con un semplice punto interposto fra i fattori. Così anche nel calcolo letterale si può scrivere $a \cdot b$ invece di $a \times b$, o $a \cdot b \cdot c$ invece di $a \times b \times c$, ecc.; ma di regola, ancora più semplicemente, i prodotti si indicano scrivendo l'uno dopo l'altro i fattori, senza interporvi alcun segno, cioè con ab o abc, ecc. Per es., l'espressione ab, per $a=5$, $b=-7$, vuol dire -35, la abc, per $a=-2$, $b=5$, $c=3$, vuol dire -30, ecc.

Se qualcuno dei fattori letterali ha in evidenza il segno $-$, questo segno va naturalmente conservato e (per evitare confusioni) ognuno di questi fattori si deve scrivere entro parentesi; così il prodotto di a e $-b$ si scrive $a(-b)$, quello di $-a$ e b si scrive $(-a)b$, quello di $-a$ e $-b$ si scrive $(-a)(-b)$.

Ma queste scritture si possono semplificare perchè *nella moltiplicazione vale per i segni in evidenza dei fattori letterali la stessa regola che per i segni propri dei fattori numerici* (I, n. 13). Infatti, si ricordi che, quando in un prodotto di numeri relativi si cambia segno ad un sol fattore, anche il prodotto cambia segno, mentre il prodotto resta inalterato se si cambia segno a due fattori (I, n. 15). Si vede così senz'altro che tanto $a(-b)$ quanto $(-a)b$ hanno per opposto il prodotto ab, mentre $(-a)(-b)$ è uguale ad ab, cioè

$$a(-b)=-ab, \quad (-a)b=-ab, \quad (-a)(-b)=ab.$$

Perciò, d'or in avanti, quando dovremo moltiplicare fra loro più fattori letterali, di cui qualcuno abbia in evidenza il segno $-$, sopprimeremo questi segni $-$, mettendo in evidenza davanti al prodotto il segno dovuto, cioè precisamente il segno $+$ (che può essere sottinteso) o il segno $-$, secondo che è pari o dispari il numero dei fattori letterali che hanno in evidenza il segno $-$. Così invece di $a(-b)c$ scriveremo $-abc$, invece di $a(-b)(-c)$ scriveremo abc, ecc.

9. Le *proprietà commutativa, associativa* e *distributiva* della moltiplicazione sono espresse rispettivamente dalle

(4)	$ab=ba$	(proprietà commutativa),
(5)	$abc=a(bc)$	(» associativa),
(6)	$(a+b)c=ac+bc$	(» distributiva).

E a queste uguaglianze possiamo aggiungere quelle che esprimono le proprietà caratteristiche (rispetto alla moltiplicazione) dell' unità positiva 1 e dello 0

$$a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0.$$

La seconda si enuncia in parole dicendo che un prodotto è certamente nullo, se è nullo anche uno solo dei suoi fattori; e va ricordato che questa proprietà del prodotto si può invertire, cosicchè, anche nel calcolo letterale, *condizione necessaria e sufficiente perchè sia nullo un prodotto si è che sia nullo uno* (almeno) *dei suoi fattori* (legge di annullamento del prodotto).

Le uguaglianze (4), (5), (6) esprimono proprietà generali della moltiplicazione; perciò esse valgono anche se qualcuno dei fattori o dei termini, che vi compaiono, ha in evidenza il segno —; così, ad es., per la proprietà distributiva abbiamo

$$(a+b)(-c) = -ac - bc, \quad (a-b)c = ac - bc,$$
$$(a-b)(-c) = -ac + bc, \text{ ecc.}$$

10. Importa rilevare alcune immediate conseguenze delle proprietà (4), (5), (6) della moltiplicazione.

a) *La proprietà distributiva della moltiplicazione vale rispetto ad ogni somma algebrica, qualunque sia il numero dei suoi termini.* Così, ad es.,

$$(7) \qquad \begin{aligned} &(a+b+c)d = ad + bd + cd, \\ &(a-b+c)d = ad - bd + cd, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Quando al prodotto di una somma algebrica per un numero si applica la proprietà distributiva, come è indicato nelle uguaglianze precedenti, si dice che « si scioglie la parentesi ».

b) Le uguaglianze (7) si possono scrivere in senso inverso

$$ad + bd + cd = (a + b + c)d,$$
$$ad - bd + cd = (a - b + c)d, \text{ ecc.}$$

Si vede così che, *se tutti i termini di una somma algebrica hanno un fattore letterale comune, la somma data è uguale al prodotto di questo fattore per la somma algebrica dei fattori residui dei singoli termini, presi ciascuno col segno del termine rispettivo.*

Quando si applica la proprietà distributiva del prodotto in questo senso inverso, si dice che dalla somma algebrica considerata « si raccoglie il fattor comune ».

c) La proprietà distributiva della moltiplicazione, ove si tenga conto anche della proprietà commutativa, si può esprimere, anzichè con la (6), con la uguaglianza

$$(6') \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

Supponiamo allora di voler moltiplicare fra loro due somme algebriche, per es. $a - b + c$ per $d - f$. Considerando per un momento la prima somma come eseguita, abbiamo per la (6′)

$$(a - b + c)(d - f) = (a - b + c)d - (a - b + c)f,$$

onde poi, applicando a ciascuno di questi due ultimi prodotti la proprietà distributiva, si trova

$$(8) \qquad (a - b + c)(d - f) = ad - bd + cd - af + bf - cf.$$

Vediamo così che *per moltiplicare fra loro due somme algebriche basta far la somma di tutti i prodotti parziali, che si ottengono, moltiplicando ciascun termine della prima per ciascun termine della seconda.*

Anche in questo caso si dice che « si sciolgono le parentesi ».

E a queste uguaglianze possiamo aggiungere quelle che esprimono le proprietà caratteristiche (rispetto alla moltiplicazione) dell' unità positiva 1 e dello 0

$$a \cdot 1 = a, \quad a \cdot 0 = 0 .$$

La seconda si enuncia in parole dicendo che un prodotto è certamente nullo, se è nullo anche uno solo dei suoi fattori; e va ricordato che questa proprietà del prodotto si può invertire, cosicchè, anche nel calcolo letterale, *condizione necessaria e sufficiente perchè sia nullo un prodotto si è che sia nullo uno* (almeno) *dei suoi fattori* (legge di annullamento del prodotto).

Le uguaglianze (4), (5), (6) esprimono proprietà generali della moltiplicazione; perciò esse valgono anche se qualcuno dei fattori o dei termini, che vi compaiono, ha in evidenza il segno —; così, ad es., per la proprietà distributiva abbiamo

$$(a+b)(-c) = -ac - bc, \quad (a-b)c = ac - bc,$$
$$(a-b)(-c) = -ac + bc, \text{ ecc.}$$

10. Importa rilevare alcune immediate conseguenze delle proprietà (4), (5), (6) della moltiplicazione.

a) La proprietà distributiva della moltiplicazione vale rispetto ad ogni somma algebrica, qualunque sia il numero dei suoi termini. Così, ad es.,

$$(7) \qquad \begin{aligned} (a+b+c)d &= ad + bd + cd, \\ (a-b+c)d &= ad - bd + cd, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Quando al prodotto di una somma algebrica per un numero si applica la proprietà distributiva, come è indicato nelle uguaglianze precedenti, si dice che « si scioglie la parentesi ».

b) Le uguaglianze (7) si possono scrivere in senso inverso

$$ad + bd + cd = (a + b + c)d,$$
$$ad - bd + cd = (a - b + c)d, \text{ ecc.}$$

Si vede così che, *se tutti i termini di una somma algebrica hanno un fattore letterale comune, la somma data è uguale al prodotto di questo fattore per la somma algebrica dei fattori residui dei singoli termini, presi ciascuno col segno del termine rispettivo.*

Quando si applica la proprietà distributiva del prodotto in questo senso inverso, si dice che dalla somma algebrica considerata « si raccoglie il fattor comune ».

c) La proprietà distributiva della moltiplicazione, ove si tenga conto anche della proprietà commutativa, si può esprimere, anzichè con la (6), con la uguaglianza

$$(6') \qquad a(b + c) = ab + ac.$$

Supponiamo allora di voler moltiplicare fra loro due somme algebriche, per es. $a - b + c$ per $d - f$. Considerando per un momento la prima somma come eseguita, abbiamo per la (6')

$$(a - b + c)(d - f) = (a - b + c)d - (a - b + c)f,$$

onde poi, applicando a ciascuno di questi due ultimi prodotti la proprietà distributiva, si trova

$$(8) \qquad (a - b + c)(d - f) = ad - bd + cd - af + bf - cf.$$

Vediamo così che *per moltiplicare fra loro due somme algebriche basta far la somma di tutti i prodotti parziali, che si ottengono, moltiplicando ciascun termine della prima per ciascun termine della seconda.*

Anche in questo caso si dice che « si sciolgono le parentesi ».

Nella pratica, per evitare di tralasciare qualcuno dei prodotti parziali, conviene procedere con ordine. Noi d' or innanzi terremo di regola l'ordine seguito nell'esempio or ora considerato, cioè moltiplicheremo ordinatamente tutti gli addendi della prima somma per il primo addendo della seconda, poi per il secondo, poi per il terzo, e così via.

11. Prima di andare innanzi conviene riflettere un momento sul significato delle varie uguaglianze (1)–(8) dianzi scritte. Prendiamo, ad es., la prima e più semplice di tutte

$$a+b=b+a;$$

essa dice che le due espressioni $a+b$, $b+a$, comunque si scelgano i valori dei due numeri relativi a e b, assumono valori uguali. Lo stesso si può ripetere per tutte le altre uguaglianze (2)–(7): in ciascuna di esse abbiamo due espressioni letterali diverse (*membri* dell' uguaglianza), una scritta prima del segno $=$ (*primo membro*), l' altra dopo (*secondo membro*); e in tutti i casi la uguaglianza considerata assicura che queste due espressioni assumono lo stesso valore, comunque si scelgano, fra i numeri relativi, i valori da attribuire alle lettere a, b, c,..., che vi compaiono.

Ora due espressioni letterali, che, *per qualsiasi scelta* dei valori da attribuirsi alle lettere in esse contenute, assumono valori uguali, si dicono *identiche*. Ed ogni uguaglianza tra due espressioni letterali identiche si chiama un' *identità*.

Perciò le uguaglianze (1)–(8) sono altrettante identità.

12. Il quoziente di due numeri a e b si indica col solito segno $a:b$ o, più spesso, con $\frac{a}{b}$ (che si legge « a biesimi » o « a diviso b » od anche « a fratto b »). Se ad a e b si danno i valori 4 e 5, $\frac{a}{b}$ vuol dire $\frac{4}{5}$; per $a=3, b=-7$, $\frac{a}{b}$ vuol dire $-\frac{3}{7}$; per $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{7}$, $\frac{a}{b}$ vuol dire $-\frac{14}{15}$, ecc.

Va ricordato che il quoziente di due numeri ha senso, purchè il divisore sia diverso da zero (I, n. 18). Perciò *nel calcolo letterale, mentre una lettera può di solito rappresentare un numero relativo qualsiasi (e quindi anche nullo), si deve sempre escludere per essa il valore zero, quando questa lettera si voglia usare come divisore.*

Ricordiamo inoltre che il quoziente $\frac{a}{b}$ è per definizione tale che moltiplicato per b deve dare a; si ha dunque per definizione

$$\frac{a}{b}b = a.$$

Se il dividendo, o il divisore, od entrambi, hanno in evidenza il segno —, vale anche qui per i segni in evidenza la solita regola (I, n. 17), cioè

$$\text{(9)} \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

Per dimostrare la prima di queste identità si tenga conto che il quoziente $\frac{-a}{b}$ di $-a$ per b è definito dalla

$$\frac{-a}{b}b = -a;$$

e se a ciascuno dei due numeri uguali, che qui si hanno nei due membri, cambiamo segno, otteniamo ancora due numeri uguali, cioè

$$\left(-\frac{-a}{b}\right)b = a.$$

Ora questa identità dice che l'opposto di $\frac{-a}{b}$, moltiplicato per b dà a, cioè coincide col quoziente $\frac{a}{b}$ di a per b. Si ha quindi veramente

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

Le analoghe dimostrazioni delle altre due identità (9) si svolgano per esercizio.

13. Ogni quoziente letterale $\frac{a}{b}$ si dice una *frazione algebrica*; a e b, che possono essere indifferentemente numeri interi o fratti, positivi o negativi (con la esclusione del valore 0 per b), si chiamano i *termini* della frazione algebrica, e, più precisamente, a si dice il *numeratore* e b il *denominatore*.

Insomma, si usa per le frazioni algebriche la stessa nomenclatura che per quelle ordinarie; e ciò è giustificato dal fatto che, come apparirà dai teoremi che dimostreremo nei prossimi numeri, valgono per le frazioni algebriche regole di calcolo perfettamente analoghe a quelle ben note per le frazioni ordinarie.

Qui intanto osserviamo che ogni frazione algebrica del tipo $\frac{a}{1}$, cioè avente per denominatore 1, non è altro, per definizione, che a; e viceversa, ogni numero a, quando torni comodo, si può scrivere, o pensare, sotto la forma $\frac{a}{1}$.

14. *Una frazione algebrica non cambia valore, quando se ne moltiplicano ambo i termini per uno stesso numero, purchè diverso da zero*; cioè, se $c \gtrless 0$, si ha in ogni caso

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Infatti vale per definizione l'identità (n. 12)

$$\frac{a}{b} b = a,$$

e se i due numeri uguali $\frac{a}{b} b$ ed a si moltiplicano per uno stesso numero, si hanno ancora due numeri uguali; cioè

$$\frac{a}{b} bc = ac.$$

Ora poichè b e c sono entrambi diversi da 0 (il primo perchè si è preso come divisore, il secondo per ipotesi), è pur diverso da 0 il numero bc, e la identità precedente dice che $\frac{a}{b}$ è il quoziente di ac per bc, cioè appunto

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}.$$

Scambiando in questa identità i due membri, cioè scrivendo

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b},$$

vediamo che *una frazione algebrica non cambia valore se si dividono ambo i termini per uno stesso numero, diverso da zero.*

15. *Più frazioni algebriche si possono sempre ridurre allo stesso denominatore.*

Se si hanno due sole frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, basta moltiplicare ambo i termini della prima per il denominatore d della seconda, ed ambo i termini della seconda per il denominatore b della prima. Si ha così (n. prec.)

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd},\quad \frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}.$$

Similmente più di due frazioni algebriche si riducono allo stesso denominatore, moltiplicando ambo i termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.

Notiamo, in particolare, che un qualsiasi numero a si può scrivere sotto forma di frazione, avente per denominatore un numero b prefissato ad arbitrio (purchè diverso da zero). Infatti

$$a=\frac{ab}{b}.$$

16. *Per sommare più frazioni algebriche aventi lo stesso denominatore, basta scrivere la frazione che ha per denominatore il denominatore comune degli addendi e per numeratore la somma algebrica dei numeratori.* Per es., nel caso di due frazioni, si ha

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \tag{10}$$

Invero, poichè il secondo membro indica il quoziente di $a+c$ per b, cioè il numero che, moltiplicato per b dà $a+c$, basta far vedere che, anche moltiplicando per b il primo membro, si ottiene $a+c$. Ora si ha veramente

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)b=\frac{a}{b}b+\frac{c}{b}b=a+c.$$

17. *Quando si vogliono sommare più frazioni algebriche aventi denominatori diversi, basta ridurle prima allo stesso denominatore* (n. 15) *e poi sommarle,* secondo la regola del n. prec. Per es.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Analogamente

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}, \quad -\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{-ad+bc}{bd}, \text{ ecc.}$$

18. *Il prodotto di più frazioni algebriche è la frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori dei fattori e per denominatore il prodotto dei loro denominatori.* Per es., nel caso di due frazioni,

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Poichè $\frac{ac}{bd}$, quoziente di ac per bd, è il numero che, moltiplicato per bd, dà ac, basta far vedere che anche $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$, moltiplicato per bd, dà ac. Ora, applicando prima la proprietà commutativa, poi quella associativa, si ha

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}bd=\frac{a}{b}b\frac{c}{d}d=ac.$$

Naturalmente se qualcuna delle frazioni, che si vogliono moltiplicare, ha in evidenza il segno $-$, bisogna mettere in evidenza davanti al prodotto il segno $-$, o sottointendere il segno $+$, secondo la solita regola dei segni del prodotto (n. 8). Così

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=-\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{d}\right)=-\frac{ac}{bd},\quad \left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}.$$

19. Di una frazione algebrica $\frac{a}{b}$ si dice *reciproca* la $\frac{b}{a}$, che si ottiene dalla data scambiandone i due termini o, come talvolta si dice, capovolgendola; cosicchè per essere sicuri che abbia senso la reciproca di una frazione $\frac{a}{b}$ bisogna escludere il valore zero anche per il numeratore a.

Si riconosce subito che *il prodotto di due frazioni reciproche è uguale ad 1.* Infatti

$$\frac{a}{b}\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1.$$

In altre parole la reciproca $\frac{b}{a}$ di una frazione $\frac{a}{b}$ è il quoziente di 1 per la frazione data.

20. *Il quoziente di due frazioni algebriche è uguale al prodotto della frazione assunta come dividendo per la reciproca della frazione assunta come divisore,* cioè

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Basta far vedere che moltiplicando $\frac{ad}{bc}$ per $\frac{c}{d}$ si ottiene $\frac{a}{b}$; ed invero si ha

$$\frac{ad}{bc}\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Capitolo III.

Potenze.

1. Dopo le somme algebriche di più termini letterali e i prodotti e i quozienti di due numeri, pur essi rappresentati da lettere, le espressioni più semplici sono le *potenze*, che si definiscono come in Aritmetica.

In questo Capitolo ci proponiamo anzitutto di studiare le regole di calcolo di queste potenze. Poi, in accordo con lo spirito di generalità che informa l'Algebra, le estenderemo a casi, che in Aritmetica non si potevano presentare.

Potenze ad esponente positivo.

2. Dati un numero relativo a ed un numero intero positivo (o assoluto) n, si dice *potenza* n^{ma} di a il prodotto di n fattori uguali ad a. Essa si denota con a^n; cioè si pone, per definizione,

$$a^n = \underset{1\,2\,3\,\ldots\,n}{aaa\ldots a}.$$

I numeri a ed n chiamansi rispettivamente *base* ed *esponente* della potenza, e, talvolta si dice che la potenza a^n è ottenuta « elevando a all'esponente n ». La prima potenza (o di esponente 1) è per definizione uguale alla base e perciò si indica semplicemente con a (tralasciando l'esponente 1, superfluo). Come in Aritmetica, la seconda potenza $a^2 = aa$ e la terza $a^3 = aaa$ si chiamano anche, rispettivamente, *quadrato* e *cubo*, perchè, come sappiamo, a^2 ed a^3, quando si prescinde dal segno di a, danno l'area del quadrato di lato a e, rispettivamente, il volume del cubo di spigolo a.

Dalla regola dei segni risulta che *le potenze di esponente pari di un numero relativo* (sia esso positivo o negativo) *sono tutte positive,* mentre *le potenze di esponente dispari sono positive o negative, secondo che è positiva o negativa la base* (I, n. 15).

Le potenze dello zero sono tutte uguali a zero; *ed una potenza non può essere nulla, se non è nulla la base* (I, n. 13).

3. Dalla definizione discendono immediatamente per le potenze alcune proprietà, le quali danno luogo ad altrettante regole di calcolo, che vanno ben ricordate. Le stabiliremo in questo n. e nei seguenti nn. 4-7.

Per elevare un prodotto ad un dato esponente, basta elevare a quell'esponente i singoli fattori; cioè:

$$(ab \ldots h)^n = a^n b^n \ldots h^n.$$

Per semplicità dimostreremo questa identità nel caso, in cui si tratta di elevare alla terza potenza il prodotto di due fattori; in ogni altro caso si ragiona in modo analogo.

Per dimostrare che

$$(ab)^3 = a^3 b^3,$$

si ricordi che per definizione

$$(ab)^3 = ababab,$$

e al secondo membro si applichi prima la proprietà commutativa (portando in principio i tre fattori a) e poi quella associativa (sostituendo ad aaa e bbb rispettivamente a^3 e b^3).

4. *Per elevare una frazione algebrica ad un dato esponente, basta elevare a quell'esponente i due termini della frazione,* cioè

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (2)$$

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del n. prec. Si svolga per esercizio.

5. *Il prodotto di due potenze della stessa base è uguale a quella potenza di questa medesima base, che ha per esponente la somma degli esponenti delle potenze date*, o, in forma più breve, *per moltiplicare due potenze della stessa base, basta sommare gli esponenti* (proprietà additiva degli esponenti); cioè, se m ed n sono due numeri interi positivi quali si vogliono,

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{3}$$

Infatti il primo membro indica il numero, che si ottiene moltiplicando il prodotto di m fattori a per il prodotto di altri n fattori a, e, per la proprietà associativa del prodotto, il risultato è quello stesso che si ottiene moltiplicando fra loro $m+n$ fattori a.

6. *Per elevare una potenza ad un nuovo esponente, basta moltiplicare il primitivo esponente per il nuovo*, cioè

$$(a^n)^m = a^{nm}. \tag{4}$$

È questa un' immediata conseguenza del teorema del n. prec. Infatti per definizione

$$(a^n)^m = \underset{1}{a^n}\,\underset{2}{a^n} \ldots \underset{m}{a^n},$$

e sommando, a secondo membro, gli esponenti, si ottiene appunto la (4).

7. *Il quoziente di due potenze della stessa base, di cui la prima abbia esponente maggiore della seconda, è uguale a quella potenza della medesima base, che ha per esponente la differenza degli esponenti delle due potenze*, o, in forma più rapida, *per dividere una potenza per un' altra potenza della stessa base e di esponente minore, basta sottrarre questo espo-*

nente da quello della prima potenza; cioè, se m ed n sono due numeri interi, di cui il primo sia maggiore del secondo,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (m > n). \tag{5}$$

Per dimostrarlo basta osservare che se $m > n$, la potenza a^m si può scrivere $a^{(m-n)+n}$ ossia, per il n. 5, $a^{m-n}a^n$, cosicchè il primo membro della (5) diventa

$$\frac{a^{m-n}a^n}{a^n};$$

e, dividendo ambo i termini di questa frazione algebrica per a^n, si ottiene appunto a^{m-n}.

Potenze ad esponente nullo o negativo.

8. L'identità dimostrata al n. prec.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{5}$$

è valida solo se l'esponente m del numeratore è maggiore dell'esponente n del numeratore.

Ora osserviamo che se, invece, è $m = n$, il primo membro come quoziente di due numeri uguali si riduce ad 1, mentre al secondo membro si presenta la scrittura a^0, che, secondo la definizione di potenza (n. 2), non ha alcun significato. Se si vuole che la identità (5) risulti verificata anche quando $m = n$, si è condotti ad attribuire, *per convenzione*, al segno a^0, qualunque sia a, il valore 1 e a chiamarlo « potenza di a ad esponente nullo ».

9. Ad un'altra convenzione si è analogamente guidati, se si vuole rendere valida la stessa identità (5) anche nel caso, in cui m, anzichè maggiore od uguale ad n, sia minore. Supponiamo, per es., $m = 3$, $n = 5$. In tal caso il primo membro della (5), assume il valore

$$\frac{a^3}{a^5},$$

ossia (come risulta dividendo numeratore e denominatore per a^3)

$$\frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}.$$

Invece a secondo membro, sostituendo materialmente 3 al posto di m e 5 al posto di n, si ottiene la scrittura

$$a^{3-5} = a^{-2},$$

che non ha alcun significato. Per rendere valida anche in questo caso la (5) basta far la *convenzione* che il segno a^{-2} rappresenti il reciproco di a^2, cioè porre per definizione

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

Così perchè la (5) sussista per qualsiasi scelta dei numeri interi positivi m ed n, converremo di indicare con a^{-p}, qualunque sia l'intero positivo p, il reciproco di a^p, cioè porremo

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Per es.:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \quad \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 10^3 = 1000,$$

$$(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1, \text{ ecc.}$$

Anche a^{-p} si chiamerà « potenza di base a » e il numero negativo $-p$ se ne dirà ancora l'*esponente*.

Va notato che ogni potenza a^{-p} ad esponente negativo è una *frazione algebrica*, avente per denominatore una potenza ad esponente positivo della stessa base. *Perciò tutte le volte che una lettera si eleva ad un esponente negativo bisogna escludere per questa lettera il valore zero* (II, n. 12).

10. Con la definizione delle potenze ad esponente nullo o negativo si è resa valida l'identità

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \tag{5}$$

per ogni coppia m, n di interi positivi o nulli; e si riconosce agevol-

In ogni caso, quando in un monomio si sono eseguite le semplificazioni indicate sull'esempio precedente si dice, che il monomio si è scritto in « forma ridotta » o semplicemente « ridotto »; cosicchè ogni monomio ridotto, è dato dal prodotto di un fattore numerico (relativo) e di un certo numero di potenze a basi letterali diverse (e aventi tutte il segno sottinteso $+$). Il fattore numerico col suo segno (sottinteso o in evidenza) si chiama *coefficiente* del monomio; e talvolta si dice segno di un monomio quello del suo coefficiente. Il prodotto dei fattori rappresentati da lettere si dice « *parte letterale* » del monomio.

Se in un monomio il coefficiente numerico si riduce a 1 o a -1, il suo valore assoluto 1 non si scrive tra i fattori del monomio e resta solo la parte letterale, davanti a cui nel primo caso si sottintende il segno $+$, nel secondo si mette in evidenza il segno $-$: così il monomio a^2b^3c ha il coefficiente 1, il monomio $-ab^3$ ha il coefficiente -1.

Di regola nel seguito i monomi si scriveranno in forma ridotta.

2. Dato un monomio, scritto in forma ridotta, si dice « *grado* » di esso « *rispetto ad una sua lettera* » l'esponente, con cui questa lettera vi compare, e si dice « *grado totale* » o semplicemente « *grado* » del monomio la somma dei suoi gradi rispetto alle varie lettere da esso contenute. Così il monomio

$$-3a^2b^3c$$

è di grado 2 (o 2°) rispetto ad a, di grado 3 (o 3°) rispetto a b, di grado 1 (o 1°) rispetto a c; e il suo grado (totale) è $2+3+1=6$ (o 6°).

Talvolta, come vedremo meglio in seguito, si è condotti a considerare più monomi, formati con le medesime lettere, e a confrontarne i gradi rispetto a codeste lettere. Si prendano, ad es., i due monomi $-5a^2bc^2$ e $2a^3b^5$; rispetto ad a essi sono dei gradi 2 e 3, rispetto a b dei gradi 1 e 5; quanto alla lettera c, il primo monomio è di grado 2, mentre il secondo non la contiene. Ma se si ricorda che, qualunque sia c, si ha $c^0 = 1$ (III, n. 8), il secondo monomio si può, per un momento, pensare scritto $a^3b^5c^0$, e si è condotti a dire che esso, rispetto a c, è di grado 0. Ciò vale in generale; cioè *un qualsiasi monomio si dice di grado* 0 *rispetto ad ogni lettera, che non vi sia contenuta.*

In particolare i numeri si possono dire monomi di grado 0 rispetto ad ogni lettera, che si voglia considerare.

3. Due monomi si dicono *simili* se contengono le medesime lettere, ciascuna al medesimo esponente. In altre parole, sono simili due monomi, che, scritti in forma ridotta, differiscono, al più, per il coefficiente. Sono ad es. simili i monomi $3a$ e $-5a$, o $10a^2b^3$ e $-4a^2b^3$, ecc.

In particolare vanno considerati simili fra loro due monomi uguali, come pure tutti i numeri (pensati come monomi di grado 0).

Due monomi simili, che abbiano coefficienti opposti, come, ad es., $3a^2b^3$ e $-3a^2b^3$, si dicono senz'altro *opposti*, in quanto per qualsiasi scelta dei valori delle lettere, che vi compaiono, assumono valori assoluti uguali e segni contrari.

Operazioni sui monomi.

4. La somma algebrica di più monomi non si può di regola che indicare, scrivendo l'uno dopo l'altro i monomi addendi, ciascuno col suo segno in evidenza; così, ad es., la somma dei tre monomi $4a^2b$, $-3ab^2$, $2ab$ si indicherà con

$$4a^2b - 3ab^2 + 2ab.$$

Ma talvolta la somma di più monomi si può semplificare.

Consideriamo anzitutto due monomi opposti come $3a^2b^3$ e $3a^2b^3$. Per qualsiasi scelta dei valori delle lettere a e b, essi assumono valori assoluti uguali e segni contrari; perciò la loro somma risulta nulla, comunque si pensino prefissati i valori di a e b. Ciò si esprime dicendo che la somma dei due monomi è *identicamente nulla.*

Abbiamo dunque che, quando si debbono sommare più monomi, e due di essi sono opposti, questi due addendi si possono senz'altro sopprimere. Come si suol dire, *in una somma algebrica di monomi, due monomi opposti si elidono a vicenda.*

Supponiamo in secondo luogo che si vogliano sommare due monomi simili (ma non opposti), per es. $-4ab^4$ e $9ab^4$.

Il primo si può considerare come il prodotto di -4 per ab^4, il secondo come il prodotto di 9 per lo stesso monomio letterale ab^4. Perciò la loro somma

$$-4ab^4+9ab^4$$

si può anche scrivere, per la proprietà distributiva della moltiplicazione,

$$(-4+9)ab^4,$$

ossia, eseguendo la somma algebrica dei due coefficienti,

$$5ab^4.$$

Similmente

$$\frac{1}{3}a^2b^3-5a^2b^3=\left(\frac{1}{3}-5\right)a^2b^3=-\frac{14}{3}a^2b^3.$$

Enunciando la regola in generale, abbiamo che *la somma algebrica di più monomi simili si può sempre ridurre a quel monomio simile ai dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi addendi.*

Perciò tutte le volte che nei calcoli si incontra una somma algebrica di monomi, bisogna verificare se fra di essi vi siano monomi simili o, in particolare, coppie di monomi opposti: le coppie di monomi opposti si sopprimono, e in ogni caso i monomi simili si riducono secondo la regola or ora enunciata. È questa la cosiddetta *riduzione dei termini simili.*

5. Per moltiplicare fra loro due o più monomi, si forma un unico prodotto coi fattori, numerici e letterali, dei monomi dati; e al solito, il prodotto così ottenuto si scrive sotto forma ridotta. Per es.

$$(3a^3bc^2)\times(-5ab^2) = -15a^4b^3c^2.$$

È manifesto che in ogni caso: 1) *Il coefficiente del monomio prodotto è uguale al prodotto dei coefficienti dei monomi fattori*; 2) *l'esponente, che ogni lettera assume nel prodotto, è la somma degli esponenti, che essa ha nei singoli fattori* (contando per zero il suo esponente in quei monomi fattori, in cui essa eventualmente manca).

In altre parole, *il prodotto di più monomi è, rispetto a ciascuna sua lettera, di grado uguale alla somma dei gradi dei diversi monomi fattori rispetto a quella lettera. E il grado totale del prodotto è similmente uguale alla somma dei gradi totali dei monomi fattori.*

6. Passiamo alla divisione dei monomi; ed anzitutto, ricordando l'avvertenza del n. 12 del Cap. II, facciamo notare che, quando si vuol dividere un monomio per un altro, *bisogna escludere il valore* 0 *per ciascuna delle lettere, che compaiono nel monomio divisore.*

Dopo ciò, le regole che vanno applicate nella divisione dei monomi, risultano evidenti, se si tien conto che per dividere un prodotto per un suo fattore basta sopprimere questo fattore, e che il quoziente di due potenze di egual base è la potenza della medesima base, che ha per esponente la differenza dei due esponenti (III, n. 7).

Ciò premesso, importa rilevare che solo in casi speciali il quoziente di due monomi è ancora un monomio, mentre in generale esso è rappresentabile soltanto per mezzo della frazione algebrica, che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore.

Cerchiamo, dunque, di vedere quando si verifichi il primo caso, cioè quando succeda che dati due monomi, esiste un terzo monomio (*quoziente*), che, moltiplicato pel secondo (*divisore*) dà il primo (*dividendo*). Basta ricordare la regola della moltiplicazione dei monomi (n. prec.) per riconoscere che, affinchè si verichi questo caso è necessario che il dividendo contenga *tutte* le lettere del divisore, elevate ciascuna ad un esponente *maggiore* o, almeno, *uguale* a quello, che essa ha nel divisore.

Viceversa, *se sono dati due monomi, di cui il primo contenga tutte le lettere del secondo, e ciascuna ad un esponente maggiore od uguale a quello che essa ha nel secondo, è manifesto che il quoziente del primo monomio pel secondo è il monomio, in cui il coefficiente è il quoziente dei coefficienti del dividendo e del divisore e la parte letterale si ottiene da quella del dividendo, sottraendovi dall' esponente di ciascuna sua lettera l' esponente, che questa ha nel divisore* (III, n. 7). Naturalmente restano inalterati gli esponenti di quelle lettere, che non compaiono nel divisore, mentre spariscono quelle, che hanno nei due monomi il medesimo esponente. Per es.,

$$\frac{3a^4b^2c^3}{-4a^3b^2c} = -\frac{3}{4}a^{4-3}b^{2-2}c^{3-1} = -\frac{3}{4}ac^2.$$

Tutte le volte che il quoziente di un monomio per un altro è ancora un monomio si dice che il primo è *divisibile* per il secondo.

7. Quando un monomio non è divisibile per un altro, il quoziente del primo per il secondo non si può rappresentare, come già si è accennato, se non per mezzo di una frazione algebrica. Ma se i monomi dati hanno comune qualche lettera, la frazione algebrica, che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore, si può semplificare. Infatti è in tal caso facile trovare un monomio, per cui entrambi i monomi dati siano divisibili; e nella frazione algebrica si possono dividere ambo i termini per questo loro divisore comune (II, n. 13), il quale è certamente diverso da zero, perchè già si è dovuto escludere il valore 0 per *tutte* le lettere del denominatore (n. prec.). Si considerino, ad es.,

i due monomi

$$4a^5b^2c^3d \quad \text{e} \quad -3a^3b^2c^7e^3.$$

È manifesto che essi sono entrambi divisibili per $a^3b^2c^3$; e, dividendo per esso ambo i termini della frazione, si trova

$$\frac{4a^5b^2c^3d}{-3a^3b^2c^7e^3} = \frac{4a^2d}{-3c^4e^3}.$$

Il monomio $a^3b^2c^3$ si è ottenuto, *prendendo, nei due monomi dati, tutte* (*e sole*) *le lettere comuni, ciascuna elevata al più piccolo degli esponenti, con cui essa compare nei due monomi.*

La stessa regola vale anche in ogni altro caso, ed il monomio così trovato si può caratterizzare, fra tutti i monomi per cui sono divisibili i due monomi dati, come quello, che *è di massimo grado rispetto ad ogni sua lettera.* Esso perciò si chiama il *massimo comun divisore* dei due monomi.

8. Ove si tenga conto del significato convenzionale delle potenze ad esponente negativo (III, n. 9), il quoziente di due monomi, anche quando il dividendo non sia divisibile per il divisore, si può scrivere sotto forma di un prodotto di potenze (ad esponenti positivi e negativi). Per es.:

$$\frac{4a^5b^2c^3d}{-3\,a^3b^2c^7e^3} = \frac{4a^2d}{-3c^4e^3} = -\frac{4}{3}\,a^2c^{-4}de^{-3}.$$

Ma l'espressione così ottenuta non è un monomio, bensì ancora una frazione algebrica, perchè implica le divisioni per c^4 ed e^3, mentre un monomio deve essere, per definizione (n. 1) un semplice *prodotto* (di fattori numerici e letterali).

Polinomi.

9. Si dice *polinomio* ogni somma algebrica di due o più monomi. Questi monomi si possono supporre non tutti simili fra loro, perchè, se fossero tali, la loro somma sarebbe riducibile ad un unico monomio (n. 4). *Termini* del polinomio sono i monomi, di cui esso è la somma algebrica (presi ciascuno col suo segno, sottinteso o in evidenza).

Di regola conviene scrivere i polinomi « in forma ridotta »; cioè prima di tutto si scrivono in forma ridotta i singoli termini (n. 1), e poi si riducono i termini simili (n. 4). Se, dopo ciò, il polinomio comprende 2 o 3 o 4... termini, il polinomio, si chiama, più specialmente, *binomio* o *trinomio* o *quadrinomio*, ecc. Per es., $a + b$ e $3a^2b + 2ab^3$ sono binomi; $a^3 - 3ab^2 + 4$ è un trinomio e così via.

10. Di un polinomio, scritto in forma ridotta, si dice « *grado rispetto ad una delle sue lettere* », il massimo dei gradi dei suoi termini rispetto a codesta lettera. E, analogamente, si dice « *grado totale* » o, semplicemente, « *grado* » del polinomio il massimo dei gradi totali dei suoi termini. Così, ad es., il polinomio

$$a^2 - 4ab^3 + 3a^2b + 5b + 1$$

è di 2° grado rispetto ad a, di 3° rispetto a b; ed è di grado (totale) 4.

Un polinomio, di cui tutti i termini siano di ugual grado, si dice *omogeneo*; per es., il trinomio

$$a^2 + 3ab - 5b^2$$

è omogeneo (di 2° grado).

Operazioni sui polinomi.

11. I polinomi non sono che somme algebriche. Valgono, quindi, per essi le medesime regole di calcolo, che abbiamo stabilito nel Cap. II sulle somme algebriche, come $a + b$, $a - b + c$, ecc., di cui ogni termine era costituito da una sola lettera. Anche queste somme erano altrettanti polinomi, e la sola differenza fra questo caso elementare e quello dei polinomi in generale sta nella circostanza che i singoli termini, anzichè semplici lettere, possono essere prodotti di fattori (numerici e letterali).

Così, dati due o più polinomi quali si vogliano, la loro somma algebrica si ottiene, formando un' unica somma con tutti i termini dei singoli polinomi da sommare (II, n. 7*b*); Per es..

$$(a^3 + 3ab^2 - 2b) - (-4a^3 + ab^2) = a^3 + 3ab^2 - 2b + 4a^3 - ab^2.$$

E in questo, come in ogni altro caso, dopo avere scritto la somma totale, bisogna guardare se in essa sia possibile qualche riduzione di termini simili (n. 4). Nell' esempio precedente sono simili il primo e il quarto termine della somma totale, come pure il secondo e l' ultimo, e, riducendoli, si trova:

$$(a^3 + 3ab^2 - 2b) - (-4a^3 + ab^2) = 5a^3 + 2ab^2 - 2b.$$

12. Il prodotto di due polinomi è dato (II, n. 10*c*) dalla somma di tutti i prodotti parziali che si ottengono, moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo (e tenendo, naturalmente, conto dei segni che questi termini hanno in evidenza). Al solito nella somma così ottenuta vanno eseguite tutte le possibili riduzioni di termini simili. Qualche esempio notevole sarà indicato al prossimo paragrafo.

13. Infine il quoziente di due polinomi non si può, di regola, che indicare colla frazione algebrica, che ha per termini il dividendo e il divisore, e *in ogni caso vanno esclusi per le lettere, che compaiono nel divisore, quei valori, per cui esso si annulla.*

Per queste frazioni algebriche, aventi come termini due polinomi, valgono le stesse regole di calcolo, che nel Cap. II (nn. 12-19) abbiamo stabilito per le frazioni $\frac{a}{b}$. Così una frazione algebrica, anche a termini polinomiali, non cambia valore (per ogni possibile scelta nelle lettere, che vi compaiono) se si moltiplicano i due termini per uno stesso monomio o polinomio, *purchè si escludano per le lettere di questo monomio o polinomio quei valori, per cui esso si annulla.* Profittando di questa proprietà, due o più frazioni algebriche si possono ridurre al medesimo denominatore (II, n. 14) e quindi sommare algebricamente (II, n. 15).

Similmente due frazioni algebriche quali si vogliono si moltiplicano o si dividono l'una per l'altra con le stesse regole dei nn. 17-19 del citato Cap. II.

14. Tutte le volte che nei calcoli si incontra una frazione algebrica, convien cercare, se pure è possibile, di semplificarla. Daremo in proposito qualche regola generale nel prossimo Capitolo per il caso, in cui i termini della frazione siano polinomi di un tipo speciale. Qui ci limitiamo ad osservare che talvolta, tenendo presenti le considerazioni dei nn. 6, 7 sulla divisibilità dei monomi, si riesce a riconoscere che tutti i termini del numeratore e tutti quelli del denominatore sono divisibili per un medesimo monomio; ed allora si possono dividere per questo monomio il numeratore e il denominatore (cioè tutti i termini dell'uno e dell'altro). Così nella frazione algebrica

$$\frac{3a^2b^3 - 5a^2b^2 - 2a^3b}{2ab^2 - 6a^2b}$$

tutti i termini del numeratore e del denominatore sono divisibili per ab; onde, sopprimendo in tutti questo divisore comune, si trova

$$\frac{3ab^2 - 5ab - 2a^2}{2b - 6a}.$$

Si avverta che questa divisione dei due termini della frazione per ab è lecita. Infatti, perchè abbia senso la frazione data bisogna escludere quei valori di a e b che annullano il denominatore, e siccome questo ammette come fattore ab, va escluso, in particolare, il valore 0 tanto per a quanto per b. E questa osservazione vale in tutti i casi analoghi.

Identità notevoli.

15. Come applicazione delle regole di calcolo sui polinomi, stabiliremo qui alcune identità, che tornano spesso utili, e che perciò bisogna tenere a memoria.

Calcoliamo anzitutto il quadrato $(a+b)^2$ di un binomio $a+b$, cioè il prodotto di questo binomio per se stesso. Secondo la regola (vale a dire, moltiplicando ciascun termine di $a+b$ per ciascun termine di $a+b$) troviamo

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2;$$

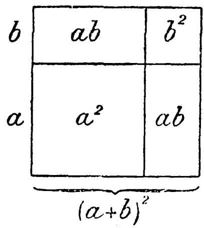
e, riducendo il secondo e il terzo termine, fra loro simili, concludiamo

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1}$$

Abbiamo dunque la seguente

Regola. *Il quadrato di un binomio è uguale alla somma dei quadrati dei due termini e del doppio del loro prodotto.*

Se a e b sono positivi e si interpretano come lunghezze di due segmenti, la identità (1) esprime il seguente teorema geometrico (vedasi l'annessa figura): *Il quadrato della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti, aumentata del doppio del loro rettangolo.*



Come esercizio si verifichi che per il quadrato di un trinomio vale la formula

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Di questa identità si può dare un'interpretazione simile a quella data per la (1).

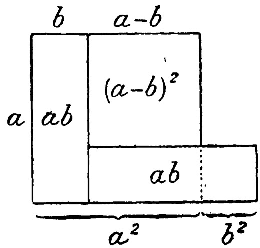
16. In modo analogo ad $(a+b)^2$ si può calcolare il quadrato $(a-b)^2$ di $a-b$; ma, anche senza eseguire il calcolo, basta osservare che la identità (1) vale per qualsiasi scelta dei valori di a e b, e, quindi in particolare, anche se al posto di b si prende $-b$. Poichè si ha $2a(-b) = -2ab$, $(-b)^2 = b^2$, si trova

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{2}$$

Se a e b sono positivi ed è $a > b$, l'identità (2), scritta sotto la forma

$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2,$$

esprime il seguente teorema geometrico (vedasi l'annessa figura): *Il quadrato della differenza di due segmenti disuguali, aumentato del*



doppio del loro rettangolo, è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti.

17. Calcoliamo similmente il cubo $(a + b)^3$ di un binomio. Basta moltiplicare per $a + b$ il quadrato $(a + b)^2$; onde, tenendo conto della (1), si trova successivamente

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3;\end{aligned}$$

e quindi, riducendo i termini simili (secondo e quarto, terzo e quinto)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{3}$$

da cui, cambiando segno a b nei due membri. si deduce

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{4}$$

Queste due identità (3) e (4), ove a e b siano positivi (e nella seconda sia $a > b$), si possono interpretare geometricamente come due teoremi sul cubo della somma e, rispettivamente, della differenza di due segmenti.

18. Un' altra formula notevole si ottiene, moltiplicando fra loro la somma $a + b$ per la differenza $a - b$ degli stessi due numeri a, b. Si trova

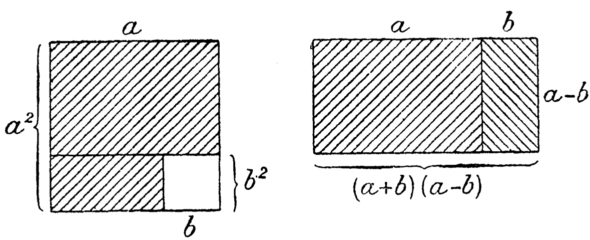
$$(a + b)(a - b) = a^2 + ba - ab - b^2;$$

ossia, in quanto il secondo e terzo termine, come opposti, si elidono,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \tag{5}$$

Si ha dunque che *il prodotto della somma di due addendi per la loro differenza è uguale alla differenza dei quadrati dei due addendi.*

Supposti a e b positivi e $a > b$, la identità (5) esprime il seguente teorema geometrico (vedasi l' annessa figura): *La differenza dei quadrati di due segmenti disuguali è equivalente al rettangolo, che ha per lati la somma e la differenza dei due segmenti.*



19. Le formule precedenti sono, naturalmente, applicabili anche a binomi, i cui termini non siano ciascuno dati da una sola lettera, bensì da monomi (o anche da altre espressioni) quali si vogliano. Così ad esempio si ha, in virtù della (1),

$$(3a^2b + 2ab^2)^2 = 9a^4b^2 + 12a^3b^3 + 4a^2b^4.$$

Notiamo poi che della (5) si fa spesso uso per decomporre in due fattori la differenza di due espressioni, ciascuna delle quali si possa considerare come il quadrato di un monomio o di un polinomio o di un' altra espressione qualsiasi. Come esercizio, si verifichi l' esattezza della seguente catena di identità, tenendo conto dell' osservazione or ora fatta e delle formule (1), (2):

$$
\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = \\
&= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) = \\
&= ([a + b]^2 - c^2)([a - b]^2 - c^2) = \\
&= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c).
\end{aligned}
$$

Capitolo V.

Polinomi ordinati secondo le potenze di una indeterminata.

Polinomi ordinati e principio d'identità.

1. In ogni problema geometrico o fisico i valori di certe grandezze sono conosciuti o, come si suol dire, sono *dati*: e ci si propone di trovare, tenendo conto delle condizioni enunciate dal problema, i valori di certe altre grandezze non conosciute. Se il problema si vuol risolvere con l'Algebra, i valori di queste grandezze si denotano con lettere, le quali si dicono le *incognite* del problema; ed è invalso l'uso di usare a questo scopo le ultime lettere dell'alfabeto x, y, z (il che non toglie che talvolta, se torna comodo, si usino anche altre lettere).

Per semplicità supponiamo che ci sia stato proposto un problema, in cui si abbia un'unica incognita, che indicheremo con x. Per risolvere il problema con l'Algebra bisogna, come spiegheremo meglio nel prossimo Capitolo, cominciare con lo scrivere le relazioni, che, secondo l'enunciato del problema, debbono intercedere fra i dati e l'incognita, che pel momento si lascia indeterminata; e si è così condotti ad indicare il risultato di certe operazioni, da eseguirsi l'una dopo l'altra, sui dati e su codesta indeterminata x.

Questo risultato sarà una certa espressione contenente la x. Se le operazioni da eseguirsi, l'una dopo l'altra, sulla x sono soltanto *addizioni algebriche* e *moltiplicazioni*, l'espressione si dice *intera* rispetto alla x; si dice, invece *fratta*, se fra codeste operazioni compare anche qualche *divisione*, in cui il divisore sia la stessa x o qualche espressione intera rispetto ad essa. Le regole di calcolo letterale apprese nei Capitoli precedenti, permettono già, in generale, di semplificare nei vari casi siffatte espressioni, ma qui ci proponiamo di aggiungere altre regole, più particolarmente adatte al caso di queste espressioni contenenti una indeterminata.

Cominciamo con l'osservare che se si tratta di un'espressione intera (cioè se le operazioni indicate sulla x sono soltanto addizioni algebriche e moltiplicazioni), basta sciogliere le eventuali parentesi per ridurre l'espressione o ad un monomio, che sia il prodotto di un coefficiente (numerico) per una certa potenza della x, o ad una somma algebrica di monomi di questo genere, come ad es.

$$-3x^2+5+2x^3-4+7x^2-2x.$$

Ogni polinomio di questo tipo si dice un « polinomio nella indeterminata x ».

Se poi l'espressione è fratta (cioè se fra le operazioni da essa indicate compare qualche divisione per x o per un'espressione intera rispetto ad essa), si otterrà (dopo sciolte le eventuali parentesi) o una frazione algebrica contenente la x nel denominatore, o una somma algebrica di frazioni di questo genere; e basterà ridurre tutti i termini allo stesso denominatore ed eseguire la somma (IV, n. 13) per ridurre in ogni caso la data espressione ad un'unica frazione algebrica, avente come termini due polinomi nella indeterminata x.

È dunque sui polinomi di questo tipo che va fissata la nostra attenzione; e in questo Capitolo ci occuperemo appunto di tali polinomi e delle varie operazioni su di essi.

Riprendiamo, per fissare le idee, il polinomio nella indeterminata x pocanzi scritto, cioè

$$-3x^2+5+2x^3-4+7x^2-2x.$$

Naturalmente in un tale polinomio la prima cosa da farsi sarà la riduzione degli eventuali termini simili; e così, nell'esempio precedente, riducendo fra loro il primo e il quinto termine, come pure il secondo e il quarto, si scriverà

$$4x^2 + 1 + 2x^3 - 2x.$$

Dopo di ciò, per rendere più semplici e rapidi i calcoli, conviene scrivere i termini del polinomio in un ordine opportuno, cioè, precisamente, *nell'ordine in cui l'esponente della indeterminata x, nei successivi termini, va decrescendo dal massimo al minimo.* Per es. il polinomio dianzi considerato si scriverà

$$2x^3 + 4x^2 - 2x + 1.$$

Un polinomio in una indeterminata, i cui termini siano scritti in quest'ordine, si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti della x.*

In un polinomio così ordinato il primo termine è quello di grado massimo e, perciò, uguale al grado del polinomio; l'ultimo termine è quello di grado minimo, e se, come nell'esempio precedente, si riduce ad un puro numero, cioè non contiene l'indeterminata o, come si suol dire, è di grado 0 rispetto alla x (III, n. 2), si chiama il *termine noto.* I coefficienti degli altri termini (presi, ciascuno, col proprio segno) si dicono senz'altro i *coefficienti del polinomio*; ed anzi spesso, parlando dei coefficienti di un polinomio, si intende includere fra essi anche il termine noto.

I polinomi in una indeterminata x si possono anche ordinare nell'ordine inverso di quello dianzi considerato, cioè secondo le potenze crescenti della indeterminata. Ma noi di regola ci atterremo al primo ordinamento.

2. Dianzi abbiamo considerato polinomi in una indeterminata, i cui coefficienti fossero numeri conosciuti; ma in molte questioni di Algebra conviene ragionare, in generale, su polinomi i cui coefficienti siano denotati con lettere. Così un polinomio di 1° grado nella x (binomio) si può scrivere

$$ax + b,$$

un polinomio di 2° grado (trinomio)

$$ax^2 + bx + c;$$

e, quando si tratta di un polinomio di un grado qualsiasi n, i suoi coefficienti, per lo più, si denotano tutti con una medesima lettera a o b o c, ecc., contrassegnata con un indice che designa il posto occupato dal corrispondente termine, a partire dal primo, contrassegnato con 0. Usando, ad es., per i coefficienti la lettera a, un polinomio di grado n si scrive di solito

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

cioè, in ciascun termine, si prende come indice del coefficiente la differenza fra il grado del polinomio e quello del termine considerato.

In tutti questi casi bisogna tener presente la differenza, che corre fra la x e le lettere a, b, c o a_0, a_1, $a_2, \dots$, con cui si denotano i coefficienti: mentre la x rimane indeterminata, cioè suscettibile di ogni possibile valore, le lettere assunte come coefficienti rappresentano numeri, che possono bensì essere stati scelti dapprincipio in un modo qualsiasi, ma in ogni caso si suppongono dati, e non possono più cambiare in tutta la questione, che si considera.

3. Nel seguito, parlando di polinomi, intenderemo, anche quando non lo diremo esplicitamente, che si tratti di polinomi in una indeterminata x, ridotti e ordinati secondo le potenze decrescenti della x.

Spesso per semplicità indicheremo un tale polinomio con una lettera maiuscola A o B, ecc.; e quando vorremo mettere in evidenza l'indeterminata x, da cui il polinomio dipende, scriveremo $A(x)$, $B(x)$, ecc. Se poi in un polinomio $A(x)$ si intenderà attribuito alla x un dato valore c, si indicherà il valore, che corrispondentemente assumerà il polinomio, con $A(c)$.

Per es., se si indica con $A(x)$ il polinomio

$$3x^2 - 4x + 5,$$

$A(1)$ vuol dire $3 - 4 + 5$, cioè 2, $A(2)$ vuol dire $3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 5$, cioè 9, ecc.

In ogni caso $A(0)$, cioè il valore che $A(x)$ assume quando alla x si dà il valore 0, è il termine noto di $A(x)$, e, quindi, risulta nullo sempre e solo quando questo termine noto manca, cioè quando in $A(x)$ il termine di grado minimo è di 1° grado o di grado superiore.

4. È manifesto che due polinomi di ugual grado ed aventi ordinatamente uguali i coefficienti dei termini di ugual grado in x assumono, per qualsiasi scelta del valore della indeterminata, valori uguali, cioè sono identici (II, n. 11).

Importa rilevare che sussiste anche la proposizione inversa, cioè il seguente **principio d'identità dei polinomi:** *Se due polinomi in una stessa indeterminata x, assumono valori uguali per qualsiasi valore attribuito alla x, sono necessariamente dello stesso grado e hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei termini di ugual grado nella x.*

In altre parole, se A e B sono due polinomi in una stessa indeterminata, l'identità $A = B$ implica necessariamente che A e B si riducono allo stesso polinomio.

5. Questo teorema si dimostrerà immediatamente, quando avremo stabilito la seguente proposizione più semplice: *Un polinomio nella x, che assuma il valore zero per qualsiasi valore di questa indeterminata, ha necessariamente nulli tutti i coefficienti*, cioè si riduce al puro numero 0.

Si riconosce subito che il teorema è vero per i binomi di 1° grado $ax + b$. Se, infatti, questo binomio deve assumere il valore 0, qualunque sia il valore dato ad x, deve risultare nullo, in particolare, quando ad x si dà il valore 0, cioè deve essere $b = 0$, e il binomio si riduce ad ax. Ma questo monomio deve annullarsi ancora per ogni valore dato ad x, in particolare per $x = 1$, onde si ha $a = 0$ e il binomio si riduce a 0.

Stabilito così il teorema per i binomi di 1° grado, si dimostra che esso vale anche in ogni altro caso possibile, facendo vedere che dall'ipotesi che il teorema sia vero per i polinomi di un certo grado n discende che esso è pur vero per quelli di grado $n + 1$ (dimostrazione da n ad $n + 1$ o per induzione).

Per semplicità, svilupperemo il ragionamento nel caso, in cui, stabilito il teorema per i binomi di 1° grado, si vuole estenderlo ai trinomi di 2° grado

(1) $$ax^2 + bx + c = 0.$$

Supponiamo, dunque, che questo trinomio si annulli per qualsiasi valore di x. Se in esso, dappertutto dove sta scritto x, scriviamo invece $2x$, otteniamo il nuovo trinomio

$$a \cdot (2x)^2 + b \cdot 2x + c,$$

che, ove si eseguiscano le operazioni indicate, assume la forma

(2) $$4ax^2 + 2bx + c.$$

D' altra parte anche questo nuovo trinomio si deve annullare per ogni valore della x, perchè il valore, che esso assume quando alla x si dà un qualsiasi valore k, è quello stesso che il primitivo trinomio (1) assumeva per $x = 2k$ ed è quindi, per ipotesi, nullo. Ma poichè entrambi i trinomi (1) e (2) si annullano per qualsiasi valore di x, lo stesso accade del polinomio, che si ottiene, moltiplicando il trinomio (1) per 4 e sottraendo dal risultato il trinomio (2), cioè:

$$\begin{aligned} & 4\,(ax^2 + bx + c) - (4ax^2 + 2bx + c) = \\ & = 4\,ax^2 + 4bx + 4c - 4ax^2 - 2bx - c = \\ & = 4ax^2 - 4ax^2 + 4bx - 2bx + 4c - c = \\ & = 2bx + 3c\,; \end{aligned}$$

e questo è un binomio di 1° grado, cosicchè, per la prima parte della dimostrazione, sono necessariamente nulli i due coefficienti $2b$, $3c$ e, quindi, b e c; e il trinomio (1) si riduce ad ax^2. Poichè esso deve ancora annullarsi per ogni valore di x, si vede subito (per es. prendendo $x = 1$) che anche a è necessariamente nullo, e il teorema è dimostrato anche per i trinomi di 2ª grado.

Con questo stesso ragionamento (cioè con la sostituzione di $2x$ ad x) si dimostra, come s' è accennato dapprincipio, che dall' ipotesi che il teorema valga per i polinomi di un grado n discende che esso vale altresì per i polinomi di grado immediatamente superiore, onde il teorema risulta stabilito per tutti i possibili polinomi.

6. Ciò premesso, è facile dimostrare il principio di identità (n. 3). Supponiamo, infatti, che certi due polinomi, per es. i due polinomi, rispettivamente di 2° e 3° grado,

$$ax^2 + bx + c \quad , \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d',$$

assumano valori uguali per qualsiasi valore dato alla x. Ciò vuol dire che il polinomio che si ottiene sottraendo il primo dal secondo, vale a dire

$$\begin{aligned} &a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' - (ax^2 + bx + c) = \\ &= a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' - ax^2 - bx - c = \\ &= a'x^3 + (b' - a)x^2 + (c' - b)x + d' - c \end{aligned}$$

deve annullarsi, qualunque sia il valore che si attribuisce alla x; e, quindi, per il teorema del n. prec. debbono essere nulli tutti i suoi coefficienti a', $b' - a'$, $c' - b'$, $d' - c$, cioè deve essere

$$a' = 0, \quad b' = a, \quad c' = b, \quad d' = c,$$

e i due polinomi dati si riducono allo stesso polinomio.

Addizione dei polinomi ordinati.

7. A far meglio comprendere e ritenere le regole per le operazioni sui polinomi ordinati giova premettere un' osservazione. Un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di una indeterminata si può considerare come una estensione della ordinaria scrittura dei numeri interi, nel consueto sistema decimale. Invero tutti ben sappiamo che, ad es., con la scrittura 3452 si indica la somma di 3 migliaia, 4 centinaia, 5 decine e 2 unità; cioè, ricordando che $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, si ha

$$3452 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.$$

Si può dunque dire che ogni numero intero vien così rappresentato come il valore, che un certo polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di una indeterminata x (a coefficienti interi compresi fra 0 e 9) assume quando alla x si attribuisce il valore 10.

Ora le operazioni sui polinomi ordinati si dispongono e si eseguiscono in modo perfettamente analogo a quello, che tutti abbiamo imparato fin dall' Aritmetica pratica per le operazioni sui numeri interi. Anzi va rilevato che queste regole di Aritmetica pratica non sono (come ognuno riconoscerà) che conseguenze particolari delle considerazioni che nei prossimi numeri svolgeremo intorno alle operazioni sui polinomi ordinati.

8. Per sommare due o più polinomi ordinati giova scriverli l'uno sotto l'altro, mettendo in colonna ordinatamente i termini di ugual grado nella x, cioè i termini simili, in modo che poi, nel calcolare la somma, le corrispondenti riduzioni si possano eseguire a memoria. Per es., l'addizione dei due polinomi

$$5x^3 - 6x^2 + 3x - 4, \quad 4x^2 - 2x + 7$$

si dispone ed eseguisce nel modo seguente:

$$\begin{array}{rrrr} 5x^3 & -\ 6x^2 & +\ 3x & -\ 4 \\ & 4x^2 & -\ 2x & +\ 7 \\ \hline 5x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & +\ 3 \end{array}$$

Se in un addendo manca qualche termine, il posto corrispondente si lascia in bianco, come è mostrato da quest' altro esempio:

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & -\ 2x^3 & & +\ 4x & -\ 8 \\ & x^3 & -\ 3x^2 & & +\ 2 \\ \hline x^4 & -\ x^3 & -\ 3x^2 & +\ 4x & -\ 6 \end{array}$$

Se poi da un polinomio si vuole sottrarne un altro, l'operazione si dispone nello stessso modo, ma sotto il minuendo si scrive per lo più l'*opposto del sottraendo*, cioè il polinomio che da esso si ottiene, cambiando segno a tutti i termini (II, n. 7*b*); e dopo di ciò si esegue la somma nel modo or ora indicato. Così per calcolare la differenza

$$4x^3 - 7x^2 + 2x + 3 - (2x^3 + 5x^2 - x + 4)$$

si scrive

$$\begin{array}{rrrr} 4x^3 & -\ 7x^2 & +\ 2x & +\ 3 \\ -\ 2x^3 & -\ 5x^2 & +\ x & -\ 4 \\ \hline 2x^3 & -\ 12x^2 & +\ 3x & -\ 1 \end{array}$$

È manifesto che: 1) *la somma algebrica di due o più polinomi di grado diverso risulta di grado uguale al maggiore dei gradi degli addendi*; 2) *se si sommano due o più polinomi di ugual grado, i termini di massimo grado si riducono e* *possono anche elidersi, cosicchè la somma può risultare di grado minore di tutti gli addendi.*

Moltiplicazione dei polinomi ordinati.

9. Per moltiplicare due polinomi si dispongono l'uno sotto l'altro, come se si volessero sommare, e poi, sotto il solito tratto orizzontale, si scrive nella prima riga la somma algebrica dei prodotti dei termini del moltiplicando (presi nel loro ordine) per il primo termine del moltiplicatore, e si ha così il « primo prodotto parziale »; nelle righe successive si scrivono ordinatamente gli altri analoghi prodotti parziali del moltiplicando per i successivi termini del moltiplicatore, e si ha cura di disporre in colonna i termini simili; infine si fa la somma totale dei vari prodotti parziali così ottenuti, eseguendo (possibilmente a memoria) le riduzioni dei termini simili, che si trovano nelle singole colonne. Esempio:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -\,2x^2 & +\,x & -\,5 \\
 & & & -\,4x^2 & -\,3x & +\,2 \\
\hline
-\,12x^5 & +\,8x^4 & -\,4x^3 & +\,20x^2 & & \\
 & -\,9x^4 & +\,6x^3 & -\,3x^2 & +\,15x & \\
 & & +\,6x^3 & -\,4x^2 & +\,2x & -\,10 \\
\hline
-\,12x^5 & -\,x^4 & +\,8x^3 & +\,13x^2 & +\,17x & -\,10
\end{array}
$$

Anche in questa operazione conviene lasciare in bianco i posti dei termini eventualmente mancanti, sia nei due polinomi, che si vogliono moltiplicare, sia nei successivi prodotti parziali. Esempio:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
2x^4 & -\,x^3 & & +\,3x & +\,1 & & \\
 & & & x^2 & -\,4x & -\,3 & \\
\hline
2x^6 & -\,x^5 & & +\,3x^3 & +\,x^2 & & \\
 & -\,8x^5 & +\,4x^4 & & -\,12x^2 & -\,4x & \\
 & & -\,6x^4 & +\,3x^3 & & -\,9x & -\,3 \\
\hline
2x^6 & -\,9x^5 & -\,2x^4 & +\,6x^3 & -\,11x^2 & -\,13x & -\,3
\end{array}
$$

10. È evidente l'analogia di questo modo di disporre la moltiplicazione di due polinomi ordinati con quello consueto della moltiplicazione di due numeri interi. Solo in questo ultimo caso le moltiplicazioni parziali del moltiplicando per le successive cifre del moltiplicatore (coefficienti, in esso, delle varie potenze del 10) si fanno *a partire dalla destra*, anzichè dalla sinistra, per rendere possibili i cosiddetti *riporti*. Per es., quando si moltiplica 425 per 73, l'ordinaria scrittura

$$\begin{array}{r} 425 \\ 73 \\ \hline 1275 \\ 2975 \\ \hline 31025 \end{array}$$

non è che un modo più conciso di rappresentare l'operazione:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4.10^2 + & 2.10 + & 5 \\ & & & 7.10 + & 3 \\ \hline & 10^3 + & 2.10^2 + & 7.10 + & 5 \\ 2.10^4 + & 9.10^3 + & 7.10^2 + & 5.10 & \\ \hline 3.10^4 + 10^3 + & 0.10^2 + & 2.10 + & 5 & \end{array}$$

11. *Fra i vari termini del prodotto di due polinomi quello che si ottiene moltiplicando fra loro i due termini di massimo grado del moltiplicando e del moltiplicatore non si può mai ridurre con alcun altro*, perchè tutti questi termini risultano di grado minore. D'altra parte codesto termine, che non si elide mai, è di grado uguale alla somma dei gradi dei due polinomi dati. Perciò *il prodotto di due (o più) polinomi in una stessa indeterminata è di grado uguale alla somma dei gradi dei fattori.*

Similmente, nel prodotto di due polinomi, non si può mai ridurre con altri termini quello, che si ottiene moltiplicando fra loro i due termini di *minimo grado* nella indeterminata.

Invece i rimanenti termini (cioè quelli di grado minore del massimo e maggiore del minimo) in generale si riducono e possono anche elidersi a vicenda tutti quanti. Per es., qualunque sia a, si trova

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\ x - a \\ \hline x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x \\ - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - a^4 \\ \hline x^4 - a^4 \end{array}$$

Come esercizio si dimostri che, comunque si scelgano l'intero positivo n e il numero a, si ha

$$(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})(x - a) = x^n - a^n,$$
$$(x^{2n-1} - ax^{2n-2} + a^2x^{2n-3} + \dots + a^{2n-2}x - a^{2n-1})(x + a) = x^{2n} - a^{2n},$$
$$(x^{2n} - ax^{2n-1} + a^2x^{2n-2} + \dots - a^{2n-1}x + a^{2n})(x + a) = x^{2n+1} + a^{2n+1}.$$

Divisione dei polinomi ordinati e frazioni algebriche.

12. Il quoziente di due polinomi ordinati in una stessa indeterminata x si può, al solito, rappresentare per mezzo della frazione algebrica, che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore, con la consueta avvertenza che vanno esclusi per la x i valori, per cui il divisore si annulla. Ma questa frazione algebrica si può in molti casi semplificare; e qui ci proponiamo appunto di studiare queste possibili semplificazioni.

È senz'altro manifesto che la maggiore semplificazione si ha, quando il polinomio dividendo è uguale al prodotto del divisore per un altro polinomio, giacchè in tal caso il quoziente dei due polinomi dati si riduce a questo terzo polinomio. Considerato, ad es., il prodotto

$$(2x^2 - 4x + 3)(3x + 5) = 6x^3 - 2x^2 - 11x + 15$$

si ha

$$\frac{6x^3 - 2x^2 - 11x + 15}{3x + 5} = 2x^2 - 4x + 3,$$
$$\frac{6x^3 - 2x^2 - 11x + 15}{2x^2 - 4x + 3} = 3x + 5.$$

Si è così condotti a studiare anzitutto come, dati due polinomi, si riconosca se uno di essi sia uguale al prodotto dell'altro per un terzo polinomio, e, in caso affermativo, come si possa trovare questo terzo polinomio, quoziente dei due dati.

13. Premettiamo una definizione e qualche osservazione.

Dati due polinomi A e B, in una stessa indeterminata, si dice che A è *divisibile* per B, tutte le volte che A si può ottenere, moltiplicando B per un altro polimonio Q, cioè sussiste l'identità

$$A = BQ. \tag{3}$$

In altre parole, il polinomio A è divisibile per il polinomio B, quando il quoziente $\frac{A}{B}$ è ancora un polimonio (nella stessa indeterminata).

Dalla identità (3), che deve intercedere fra i tre polinomi A (dividendo), B (divisore) e Q (quoziente) risulta (n. 11) che *il divisore deve sempre essere di grado minore o, al massimo, uguale a quello del dividendo*, e che, *in ogni caso, il grado del quoziente è uguale alla differenza fra il grado del dividendo e quello del divisore.*

Se in particolare il dividendo e il divisore sono di ugual grado, il quoziente non può essere che di grado 0, cioè deve ridursi ad un numero q e si ha l'identità

$$A = qB.$$

Va pur notato che, se A è divisibile per B e q denota un qualsiasi numero (purchè diverso da 0), A è divisibile anche per qB, perchè dalla identità (3) discende subito quest'altra

$$A = (qB)\left(\frac{1}{q}\,Q\right).$$

Infine osserviamo che, qualunque sia il polinomio A, si ha, indicando con q un qualsiasi numero, diverso da 0, l'identità

$$A = q\left(\frac{1}{q} A\right),$$

cioè un polinomio va considerato divisibile per qualsivoglia numero diverso da 0 (polinomio di grado 0).

14. Dopo queste premesse passiamo ad occuparci del problema accennato alla fine del n. 12, cioè, dati due polinomi (nella stessa indeterminata x) A e B, di cui il primo sia di grado maggiore o, almeno, uguale a quello del secondo, proponiamoci di vedere come si possa riconoscere se A sia divisibile per B; e, in caso affermativo, come si possa determinare il polinomio Q, quoziente di A per B. Si tratta di un problema analogo a quello che si presenta in Aritmetica, quando, dati due numeri interi (assoluti) si vuol riconoscere se il maggiore sia divisibile per il minore.

Qui per maggiore semplicità ci riferiremo ad un esempio, e, precisamente, prenderemo come dividendo il polinomio, già considerato al n. 12,

$$A = 6x^3 - 2x^2 - 11x + 15$$

e come divisore il polinomio

$$B = 3x + 5,$$

per il quale A è divisibile, in quanto, come si è visto direttamente al n. citato, è uguale al prodotto di B per $2x^2 - 4x + 3$ (quoziente Q).

Esaminando attentamente le relazioni, che intercedono fra i termini di questi tre polinomi A, B, Q, in virtù della identità

$$A = BQ, \tag{3}$$

vedremo come si possa procedere, anche in ogni altro caso, per trovare, *tutte le volte che sia possibile*, il polinomio quoziente di due dati polinomi.

Riprendiamo dunque per i nostri tre polinomi l'identità (3); e, dopo aver sostituita a Q la sua espressione, applichiamo al prodotto a secondo membro la proprietà distributiva e, per maggiore semplicità di scrittura, invertiamo in ciascun prodotto parziale l'ordine dei fattori. Abbiamo così per la identità questa nuova forma:

$$A = 2x^2B - 4xB + 3B. \tag{4}$$

Per il principio d'identità dei polinomi (n. 4) debbono coincidere, a calcoli fatti, nei due membri i coefficienti dei termini di ugual grado. Ora il termine di massimo grado nel secondo membro si ottiene, moltiplicando il primo termine di B per $2x^2$, cioè per il primo termine del quoziente Q (n. 11); perciò, viceversa, questo primo termine di Q si può trovare, dividendo il primo termine del dividendo A pel primo termine del divisore B (*prima divisione parziale*).

Dopo ciò sottraiamo dal dividendo A il prodotto $2x^2B$ del divisore B pel termine trovato del quoziente, e chiamiamo *primo resto parziale* la differenza $R_1 = A - 2x^2B$, che per l'identità (4), è data da

$$R_1 = -4xB + 3B. \tag{5}$$

In questo primo resto parziale, il termine di massimo grado, come risulta dalla (5) stessa, è dato dal prodotto del primo termine di B per il secondo termine $-4x$ del quoziente, cosicchè, viceversa, questo secondo termine di Q si trova dividendo il primo termine di R_1 pel primo termine di B. E siamo condotti ad eseguire su R_1 operazioni perfettamente analoghe a quelle eseguite pocanzi su A: sottraendo da R_1 il prodotto $-4xB$ del divisore B per il nuovo termine $-4x$ di Q, otteniamo un secondo resto parziale R_2, che, per la identità (5), si riduce ad

$$R_2 = 3B, \tag{6}$$

cioè proprio al prodotto di B per l'ultimo termine 3 del quoziente, cosicchè questo termine si trova, al solito, dividendo il primo termine del resto parziale R_2 per il primo termine di B; ma quando si passa a calcolare il terzo resto parziale R_3, sottraendo da R_2 il prodotto di B per l'ultimo termine di Q, si ottiene, in virtù della (6), una differenza identicamente nulla, e il procedimento è finito.

Le operazioni dianzi descritte si dispongono, in pratica, nel modo seguente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
A = & 6x^3 & -\ 2x^2 & -\ 11x & +\ 15 & 3x + 5 \qquad = B \\
\cline{6-6}
 & -\ 6x^3 & -\ 10x^2 & & & 2x^2 - 4x + 3 = Q \\
\cline{2-5}
R_1 = & & -\ 12x^2 & -\ 11x & +\ 15 & \\
 & & 12x^2 & +\ 20x & & \\
\cline{3-5}
R_2 = & & & 9x & +\ 15 & \\
 & & & -\ 9x & -\ 15 & \\
\cline{4-5}
R_3 = & & & & 0 &
\end{array}
$$

Questa operazione si dice *divisione del polinomio A per il polinomio B*; e i ragionamenti fatti sull'esempio precedente mostrano che, tutte le volte che un polinomio A è divisibile per un altro polinomio B, l'operazione dianzi descritta conduce, dopo un certo numero di divisioni parziali (precisamente tante quanti sono i termini del quoziente), ad un resto parziale identicamente nullo. Il quoziente è sempre dato dalla somma algebrica dei monomi ottenuti come quozienti nelle successive divisioni parziali. Per es., se si prendono come dividendo ancora il polinomio A di pocanzi e come divisore B il binomio $2x^2 - 4x + 3$, cioè il quoziente di or ora, si è condotti alla operazione seguente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
A = & 6x^3 & -\ 2x^2 & -\ 11x & +\ 15 & 2x^2 - 4x + 3 = B \\
\cline{6-6}
 & -\ 6x^3 & +\ 12x^2 & -\ 9x & & 3x + 5 \qquad = Q \\
\cline{2-5}
R_1 = & & 10x^2 & -\ 20x & +\ 15 & \\
 & & -\ 10x^2 & +\ 20x & -\ 15 & \\
\cline{3-5}
R_2 = & & & & 0 &
\end{array}
$$

Naturalmente si trova come quoziente il binomio $3x + 5$, che dianzi si era preso come divisore.

15. Nel n. prec. abbiamo considerato due polinomi A, B, di cui già sapevamo che il primo era divisibile per il secondo. Ma se si prendono due polinomi A e B quali si vogliono e, supposto che A sia di grado maggiore od uguale di B, si divide A per B nel modo indicato al n. prec., quale risultato possiamo ottenere?

Dimostreremo qui anzitutto che *se la divisione di A per B, nel senso dianzi descritto, conduce, dopo un certo numero di divisioni parziali, ad un resto identicamente nullo, A è divisibile per B, e,* quindi per il n. prec., *il quoziente dei due polinomi è dato dalla somma dei monomi ottenuti nelle successive divisioni parziali.*

Ragioniamo anche questa volta su di un esempio e prendiamo

$$A = 3x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 6, \quad B = 3x^2 + x - 2.$$

Dividendo A per B, secondo il n. prec., otteniamo:

$$\begin{array}{rr|l}
A = & 3x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 6 & 3x^2 + x - 2 = B \\
 & - 3x^5 - x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{x^3 - 2x^2 + 3} \\ \cline{2-2}
R_1 = & - 6x^4 - 2x^3 + 13x^2 + 3x - 6 & \\
 & 6x^4 + 2x^3 - 4x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
R_2 = & 9x^3 + 3x - 6 & \\
 & - 9x^2 - 3x + 6 & \\ \cline{2-2}
R_3 = & 0 &
\end{array}$$

Abbiamo dunque che, dopo tre divisioni parziali, si perviene ad un resto identicamente nullo. Orbene, se si denotano anche questa volta con R_1, R_2 rispettivamente i primi due resti parziali, risulta dal modo in cui essi sono stati ottenuti che si ha

$$A - x^3B = R_1, \quad R_1 + 2x^2B = R_2, \quad R_2 - 3B = 0$$

ossia

$$A = x^3B + R_1, \quad R_1 = -2x^2B + R_2, \quad R_2 = 3B;$$

e basta sostituire nella seconda identità ad R_2 la sua espressione data dalla terza, e poi nella prima l'espressione di R_1 così ottenuta, per concludere

$$A = x^3B - 2x^2B + 3B;$$

cioè

$$A = (x^3 - 2x^2 + 3)B.$$

Si ha dunque veramente che A è divisibile per B e il quoziente è dato dalla somma $x^3 - 2x^2 + 3$ dei successivi quozienti parziali.

È manifesto che si arriva nello stesso modo alla medesima conclusione tutte le volte che, dividendo un polinomio per un altro, si perviene, dopo un certo numero di divisioni parziali, ad un resto identicamente nullo.

16. Resta da considerare il caso, in cui la divisione di un polinomio A per un altro B (di grado non maggiore) non conduca ad un resto parziale identicamente nullo, cioè il *caso in cui A non sia divisibile per B*. Si tratta di una questione perfettamente analoga a quella, che si presenta in Aritmetica quando si divide un numero intero per un altro, che non sia un suo divisore.

È certo ad ogni modo che la divisione di A per B, anche quando non conduca ad un resto parziale identicamente nullo, deve ad un certo punto necessariamente arrestarsi. Infatti ad ogni divisione parziale, il resto parziale diminuisce di grado, cosicchè inevitabilmente si finisce coll'arrivare ad un resto parziale di grado minore del divisore e, quindi, tale che il suo termine di massimo grado non è più divisibile per il primo termine del divisore.

Per vedere a quali conclusioni si pervenga in questo caso, riferiamoci ancora una volta ad un esempio; prendiamo

$$A = 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 5x + 1, \quad B = 2x^2 + 3x - 1.$$

Eseguendo la divisione otteniamo:

$$\begin{array}{ll|l}
A = & 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 5x + 1 & 2x^2 + 3x - 1 = B \\ \cline{3-3}
 & -6x^4 - 9x^3 + 3x^2 & 3x^2 - x + 5 = Q \\ \cline{2-2}
R_1 = & \qquad -2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 & \\
 & \qquad\ \ 2x^3 + 3x^2 - x & \\ \cline{2-2}
R_2 = & \qquad\qquad 10x^2 + 4x + 1 & \\
 & \qquad\quad -10x^2 - 15x + 5 & \\ \cline{2-2}
R = & \qquad\qquad\qquad -11x + 6 &
\end{array}$$

Qui l'operazione si arresta, dopo tre divisioni parziali, perchè si arriva ad un resto parziale $-11x + 6$ di 1° grado, mentre il divisore è di 2° grado. Questo ultimo resto parziale (analogamente a quanto si fa in Aritmetica per i numeri interi) si chiama senz'altro il *resto* della divisione del polinomio A per il polinomio B; e, il polinomio $Q = 3x^2 - x + 5$, somma dei successivi quozienti parziali, si chiama *quoziente intero* di A per B.

Dal modo stesso, in cui, partendo da A e B, si sono ottenuti il polinomio Q e il resto della divisione, che indicheremo senz'altro con R, risulta fra questi quattro polinomi una identità fondamentale. Per trovarla, indichiamo al solito con R_1, R_2 rispettivamente i due resti parziali, successivamente ottenuti prima di R; abbiamo allora, come risulta dal procedimento tenuto,

$$A - 3x^2B = R_1, \quad R_1 + xB = R_2, \quad R_2 - 5B = R,$$

ossia

$$A = 3x^2B + R_1, \quad R_1 = -xB + R_2, \quad R_2 = 5B + R;$$

e sostituendo nella seconda identità ad R_2 la sua espressione fornita dalla terza, e nella prima ad R_1 l'espressione così ottenuta, troviamo

$$A = 3x^2B - xB + 5B + R = (3x^2 - x + 5)B + R,$$

cioè

$$A = BQ + R.$$

È questa l'*identità fondamentale, che intercede fra dividendo, divisore, quoziente intero e resto* (perfettamente analoga a quella, che vale in Aritmetica nel caso dei numeri interi).

È manifesto che le considerazioni dianzi svolte su di un esempio e le conclusioni, cui siamo così pervenuti, valgono ugualmente per due polinomi A, B quali si vogliono (quando A sia di grado non minore di B e non sia divisibile per esso).

17. Giova riassumere la precedente discussione (nn. 14-17) nel seguente enunciato: *Dati due polinomi A, B in una stessa indeterminata, di cui il primo sia di grado non minore del secondo, si divide A per B con le operazioni seguenti:*

1°) *Si ordinano entrambi i polinomi secondo le potenze decrescenti della indeterminata.*

2°) *Si divide il primo termine di A per il primo termine di B e si sottrae da A il prodotto di B per il « quoziente parziale » così ottenuto. La differenza è il « primo resto parziale ».*

3°) *Si divide il primo termine di questo resto parziale per il primo termine di B e si sottrae dal primo resto parziale il prodotto di B per questo « secondo quoziente parziale » e si ottiene il « secondo resto parziale ».*

4°) *Si ripete il procedimento fino a quando si perviene ad un resto parziale identicamente nullo oppure di grado minore del divisore.*

Nel primo caso A è divisibile per B ed il quoziente è la somma Q dei quozienti parziali successivamente ottenuti, talchè si ha

$$A = BQ.$$

Nel secondo caso i polinomi A e B sono legati alla somma Q dei quozienti parziali (quoziente intero) *e all' ultimo resto parziale R* (resto della divisione) *dalla identità*

$$A = BQ + R, \tag{7}$$

dove (giova ripeterlo) *il resto R è di grado minore del divisore B.*

Se m ed n sono i gradi di A e B rispettivamente, con $m \geq n$, il grado di Q è, in ogni caso, uguale ad $m - n$; e, quando A non è divisibile per B, e quindi vale la (7), il resto è di grado minore di n (cioè, secondo i casi, di grado 0 o 1 o 2 ... o $n - 1$). Si può anche dire che A è divisibile per B ogni qualvolta il resto della divisione di A per B sia identicamente nullo.

Notiamo, in particolare, che: *se A e B sono dello stesso grado n, il quoziente intero risulta di grado* 0, cioè si riduce ad un numero (e il resto è di grado $n - 1$ o minore): *se A è di un qualsiasi grado n e B di 1° grado, il quoziente intero è di grado $n - 1$ e il resto si riduce ad un numero* (diverso da 0 se A non è divisibile per B, nullo nel caso contrario).

Aggiungiamo un' ultima avvertenza. Se A non è divisibile per B, non bisogna confondere il quoziente intero Q di A per B col quoziente vero e proprio di A per B: questo è dato dalla frazione algebrica $\frac{A}{B}$ e, moltiplicato per il divisore B, dà il dividendo A, mentre il quoziente intero Q, moltiplicato per B, non dà A, bensì, in forza della identità (7), la differenza $A - R$ fra il dividendo ed il resto. Tuttavia nell' uso, quando non vi sia pericolo di equivoco, il quoziente intero Q si dice anche semplicemente « quoziente » di A per B.

18. Per semplicità, negli esempi dei nn. prec. abbiamo sempre considerato polinomi a coefficienti tutti interi; ma naturalmente tutto ciò che si è detto vale anche per polinomi a coefficienti frazionari; anzi in generale, anche partendo da polinomi a coefficienti interi, si ottengono quozienti e resti a coefficienti frazionari. Si consideri, ad es., la divisione seguente:

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 3 & 4x^2 - 3x + 5 \\ \cline{2-2}
-3x^4 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{15}{4}x^2 & \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{41}{64} \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{1}{4}x^3 - \frac{11}{4}x^2 - 4x - 3 & \\
\quad -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{16}x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -\frac{41}{16}x^2 - \frac{69}{16}x - 3 & \\
\qquad\qquad \frac{41}{16}x^2 - \frac{123}{64}x + \frac{205}{64} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -\frac{399}{64}x + \frac{13}{64} &
\end{array}$$

Indicheremo negli Esercizi qualche artificio, che, nel caso di polinomi a coefficienti interi, permette di evitare nelle successive divisioni parziali la introduzione di coefficienti frazionari.

19. Si è visto che il quoziente intero Q ed il resto R della divisione di due polinomi A e B (di cui il primo abbia grado non minore del secondo e non sia divisibile per esso) sono tali che: 1°) il grado del resto R è minore di quello del divisore B; 2°) sussiste l'identità

$$A = BQ + R. \tag{7}$$

Ci proponiamo di dimostrare che queste due proprietà sono *caratteristiche* del quoziente e del resto; cioè *tutte le volte che in un modo qualsiasi* (senza ricorrere alla divisione) *si trovano due polinomi Q' ed R' tali che il secondo sia di grado minore di B e, di più, sussista l'identità*

$$A = BQ' + R', \tag{7'}$$

i due polinomi Q' ed R' sono necessariamente identici al quoziente Q e al resto R rispettivamente.

Infatti, essendo, per ipotesi, R' di grado minore di B, risulta anzitutto dalla identità (7′) che il termine di massimo grado di A è uguale al prodotto dei termini di massimo grado di B e Q' (n. 11), cosicchè quest'ultimo polinomio è, come Q, di grado uguale alla differenza di quelli di A e B. Perciò se, per fissare le idee, supponiamo che A sia di 5° grado e B di 2°, Q e Q' sono entrambi di 3° grado ed R ed R', al massimo, di 1°.

D'altra parte dalle (7), (7′) si deduce l'identità

$$BQ + R = BQ' + R',$$

e quindi anche, sottraendo da ambo i membri $BQ' + R$, la

$$BQ - BQ' = R' - R \quad \text{ossia} \quad B(Q - Q') = R' - R. \tag{8}$$

Ora in quest'ultima identità il polinomio $R' - R$ è, al pari di R ed R', di grado non maggiore di 1 (n. 17). Perciò nel polinomio a primo membro $B(Q - Q')$, identico ad $R' - R$, debbono risultare nulli, per il principio di identità (n. 4), i coefficienti di tutti i termini di grado maggiore di 1. Ora se indichiamo con b_0x^2 il termine di massimo grado di B (con $b_0 \gtrless 0$) e poniamo

$$Q = q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x + q_3 \quad , \quad Q' = q'_0x^3 + q'_1x^2 + q'_2x + q'_3,$$

si ha

$$Q - Q' = (q_0 - q'_0)x^3 + (q_1 - q'_1)x^2 + (q_2 - q'_2)x + q_3 - q'_3,$$

cosicchè il termine di massimo grado in $B(Q - Q')$ è dato (n. 11) dal prodotto dei termini di massimo grado di B e $Q - Q'$, cioè da $b_0(q_0 - q_0')x^5$, onde, trattandosi di un termine di grado maggiore di 1, si ha

$$b_0(q_0 - q'_0) = 0,$$

e quindi, essendo $b_0 \gtrless 0$, risulta $q_0 - q'_0 = 0$, cioè $q_0 = q'_0$.

Perciò $Q - Q'$ si riduce a

$$Q - Q' = (q' - q'_1)x^2 + (q_2 - q'_2)x + q_3 - q'_3,$$

e il termine di massimo grado in $B(Q - Q')$ è $b_0(q_1 - q'_1)x^4$, e poichè anche questo è di grado maggiore di 1, si ha necessariamente

$$b_0(q_1 - q'_1) = 0,$$

e quindi $q_1 - q'_1 = 0$ ossia $q_1 = q'_1$.

Così continuando, si riconosce che è anche $q_2 = q'_2$, $q_3 = q'_3$; cioè Q e Q' sono identici. E dopo ciò dalla identità (8) risulta che $R' - R$ deve essere identicamente nullo, vale a dire che anche R ed R' sono necessariamente identici, come appunto si voleva dimostrare.

In particolare dal teorema così stabilito discende che *se sussiste l'identità $BQ = BQ'$, si ha necessariamente quest'altra $Q = Q'$.*

20. Dopo ciò torniamo alle frazioni algebriche $\frac{A}{B}$, i cui termini sono polinomi in una stessa indeterminata (cfr. n. 12).

Se il grado del numeratore è maggiore od uguale a quello del denominatore, la frazione si dice *impropria*, mentre si dice *propria* se il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

Ora la divisione dei polinomi permette di *ridurre ogni frazione algebrica impropria alla somma di un polinomio e di una frazione propria.* Infatti, indicando al solito con Q ed R il quoziente intero e il resto della divisione di A per B, si ha

$$A = BQ + R,$$

onde risulta

$$\frac{A}{B} = \frac{BQ + R}{B},$$

e, tenendo conto che per dividere una somma per un numero basta dividere per quel numero i singoli addendi e che per dividere un prodotto per un suo fattore basta sopprimere questo fattore, si conclude

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

dove, come ben sappiamo, il grado di R è minore di quello di B, cosicchè la frazione algebrica $\frac{R}{B}$ è propria.

Vien così meglio chiarita la ragione per cui, al n. 16, il polinomio Q si è chiamato « quoziente intero » dei due polinomi A e B. Esso è la parte intera (n. 1) del quoziente $\frac{A}{B}$ di A per B.

21. Si sa dall'Aritmetica che una frazione è *irreducibile* quando i suoi due termini sono primi fra loro (vale a dire, non hanno alcun altro divisore comune oltre l'unità); e che per rendere irreducibile una frazione qualsiasi (o ridurla ai minimi termini) occorre e basta dividerne ambo i termini per il loro massimo comun divisore.

Anche le frazioni algebriche, sono suscettibili di una riduzione analoga. Per chiarirla bisogna prima definire il « massimo comun divisore » di due polinomi in una stessa indeterminata, al quale si perviene con un procedimento di divisioni successive, analogo a quello che in Aritmetica pratica si è imparato per trovare il massimo comun divisore di due numeri interi (assoluti).

Come vedremo nei prossimi numeri, un tale procedimento conduce a riconoscere che, dati due polinomi quali si vogliono, A e B, si verifica necessariamente uno di questi due casi; *o non esiste alcun polinomio* (di grado maggiore di 0) *per cui A e B siano entrambi divisibili*, cioè, come si suol dire, i due polinomi non hanno alcun divisore comune, e in tal caso A e B si dicono *primi* fra loro; oppure *fra i divisori comuni di A e B ne esiste uno ben determinato che è divisibile per tutti gli altri ed è, fra tutti, quello di maggior grado;* e questo polinomio si chiama il *massimo comune divisore* (M. C. D.) di A e B.

Avvertiamo subito che veramente se M è il M. C. D. di A e B, questi due polinomi sono (n. 13) entrambi divisibili anche per qM, qualunque sia il numero q (purchè diverso da zero); ma due divisori comuni come M e qM, cioè diversi soltanto per un fattore numerico, non si considerano come distinti l'uno dall'altro.

22. Siano dunque dati due polinomi, nella stessa indeterminata, A e B, di cui, per fissare le idee, supporremo il primo di grado non minore del secondo. Se A è divisibile per B, questo secondo polinomio è manifestamente il M. C. D. di A e B, perchè ogni loro divisore comune è, in particolare, divisore di B, nè può, quindi, esistere alcun divisore comune, che sia di grado maggiore di B; e d'altra parte, se B' è un divisore comune di A e B di grado uguale a B, ma non identico ad esso, il quoziente di B per B' si riduce ad un numero (n. 13), cosicchè i due divisori B e B' per la convenzione fatta alla fine del n. prec., non vanno considerati come distinti l'uno dall'altro.

23. Escluso il caso che A sia divisibile per B, indichiamo al solito con R il resto della divisione di A per B talchè, denotando con Q il quoziente intero, si abbia l'identità

$$A = BQ + R. \tag{7}$$

Diciamo anzitutto che *se A e B sono entrambi divisibili per un polinomio C, anche il resto R è divisibile per C.*

Infatti, per l'ipotesi fatta, esistono due polinomi Q_1, Q_2, tali che valgono insieme le due identità

$$A = CQ_1, \quad B = CQ_2,$$

cosicchè la (7) si può anche scrivere

$$CQ_1 = CQ_2 Q + R,$$

ossia, sottraendo da ambo i membri $CQ_2 Q$,

$$CQ_1 - CQ_2 Q = R,$$

o, infine,

$$C(Q_1 - Q_2 Q) = R,$$

onde risulta che R è veramente divisibile per C.

Viceversa, *se B ed R sono entrambi divisibili per un polinomio C, anche A è divisibile per C.*

Infatti, avendosi per ipotesi

$$B = CQ_2, \quad R = CQ_3,$$

dove Q_2 e Q_3 sono due certi polinomi, la (7) si può scrivere

$$A = CQ_2 Q + CQ_3 \quad \text{ossia} \quad A = C\ (Q_2 Q + Q_3).$$

24. Ciò premesso, applichiamo ai due polinomi A e B il « procedimento delle divisioni successive », cioè: Diviso A per B, indichiamo, questa volta, con R_1 il resto, e dividiamo B per R_1. Se B non è divisibile per R_1, indichiamo con R_2 il resto della nuova divisione e dividiamo R_1 per R_2. Se R_1 non è divisibile per R_2, indichiamo con R_3 il nuovo resto e così via.

Questo procedimento, dopo un certo numero di divisioni, ha necessariamente termine. Infatti, se n è il grado del polinomio B, il primo resto R_1 è, al massimo, di grado $n - 1$, il secondo resto R_2 è, al massimo, di grado $n - 2$, e così via. Perciò potrà accadere che i successivi resti $R_1, R_2, R_3 \ldots$, decrescendo man mano di grado, finiscano (dopo n divisioni al più) con un resto di grado 0, cioè con un numero. E, se non si verifica questo caso, accadrà necessariamente, che la successione dei resti finisce prima, cioè ad un certo punto si otterrà un resto R_p, di grado almeno uguale ad 1, che non dà luogo ad un resto successivo, in quanto risulta divisibile per esso il resto precedente R_{p-1}.

Esaminiamo separatamente questi due casi.

25. Supponiamo, dunque, in primo luogo che, dopo un certo numero $p \leq n$ di divisioni, si trovi un resto R_p, che sia un semplice numero. *In tal caso i due polinomi A e B sono necessariamente primi fra loro* (n. 21), cioè non hanno nessun divisore comune (di grado ≥ 1). Infatti ogni divisore comune di A e B dovrebbe essere, per il primo teorema del n. 23, divisore anche di R_1, e quindi, come divisore comune di B ed R_1, anche di R_2, e così pure di $R_3, \ldots$, fino ad R_p, e ciò è assurdo, perchè R_p è un numero.

26. Esaminiamo, in secondo luogo, il caso, in cui la successione dei resti finisce con un resto R_p di grado almeno uguale ad 1, e ricordiamo che ciò si verifica, quando il resto precedente R_{p-1} risulta divisibile per R_p. *In tal caso l'ultimo resto R_p è il M. C. D. di A e B.*

Infatti, in quanto R_{p-1} è divisibile per R_p, ed R_p è il resto che si ottiene dividendo per R_{p-1} il resto precedente R_{p-2}, si ha anzitutto che anche questo R_{p-2}, per il secondo teorema del n. 23, è divisibile per R_p; e nello stesso modo risalendo a ritroso la successione dei resti, si vede che R_p è divisore comune di tutti i resti e quindi anche di B ed A. Per far vedere che questo divisore comune R_p di A e di B è il loro M. C. D., osserviamo che ogni divisore comune C di A e B è, come si è notato al n. prec., divisore comune anche di R_1, $R_2, \ldots$, fino ad R_p, e, quindi in particolare, non può essere di grado maggiore di R_p. Se poi è di grado uguale ad R_p, dovendo pur sempre essere un divisore di esso, non ne differisce che per un fattore numerico (n. 13) e perciò non va considerato distinto da esso (n. 21).

27. Riassumendo le conclusioni ottenute nei numeri precedenti, abbiamo che: *Se il procedimento delle divisioni successive, applicato a due polinomi A e B, termina con un resto numerico, i due polinomi sono primi fra loro; se termina con un resto di grado maggiore od uguale ad* 1, *questo resto è il M. C. D. di A e B.*

Risulta di qui, viceversa, che *se due polinomi A e B sono primi fra loro, il procedimento delle divisioni successive, applicato ad A e B, termina con un resto numerico*, giacchè in caso contrario l'ultimo resto sarebbe di grado ≥ 1 e sarebbe un divisore comune di A e B, anzi il loro M. C. D.

28. Importa aggiungere un' osservazione. *Se due polinomi A e B non sono primi fra di loro ed M è il loro M. C. D., i quozienti di A e B per M sono primi fra loro.*

Infatti, indicati con A_1 e B_1 questi due quozienti, abbiamo le due identità

$$A = A_1 M, \quad B = B_1 M. \tag{9}$$

Se A_1 e B_1 non fossero primi fra loro, ammetterebbero qualche divisore comune M' (di grado ≥ 1) e sussisterebbero due nuove identità

$$A_1 = A'M', \quad B = B'M' \tag{10}$$

dove A', B' denotano certi due polinomi. Ma allora, sostituendo nelle (9) ad A_1 e B_1 le loro espressioni date dalle (10), otteremmo le

$$A = A'M'M, \quad B = B'M'M,$$

da cui risulterebbe che A e B sono divisibili entrambi per il polinomio $M'M$, che, in quanto M' è di grado ≥ 1, è di grado maggiore di M, loro M. C. D., e ciò è assurdo.

29. Dopo ciò torniamo ancora una volta alle frazioni algebriche, aventi per termini due polinomi nella stessa indeterminata x.

Una frazione $\frac{A}{B}$ di questa specie si dice *irreducibile* se i suoi termini A e B sono primi fra loro.

Ora è facile vedere *come ogni frazione, che già non sia irreducibile, si possa rendere tale.* Se infatti nella frazione algebrica i due termini A e B hanno qualche divisore comune, si indichi con M il loro M. C. D. e siano A_1 e B_1 i quozienti di A e B, rispettivamente, per M, talchè si abbia

$$A = A_1 M, \quad B = B_1 M.$$

Perciò la frazione algebrica $\frac{A}{B}$ si può scrivere

$$\frac{A_1 M}{B_1 M}.$$

Ora ricordiamo che, affinchè la frazione data abbia un senso, bisogna escludere quegli eventuali valori della inderminata x, per cui si annulla il denominatore B. Restano così esclusi, in particolare, quegli eventuali valori di x per cui si annulla M, che è un fattore di B. Quindi per tutti i valori di x, per i quali la frazione $\frac{A}{B}$ ha senso, il polinomio M è certamente diverso da 0, e si può, senza alterare il valore della frazione, dividerne ambo i termini per M, ossia « sopprimere il fattore comune M ». Si ha dunque (per ogni possibile valore di x che non annulli B)

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1},$$

dove, in quanto A_1 e B_1 sono primi fra loro (n. prec.), la frazione a secondo membro è irreducibile.

Divisione di un polinomio per un binomio di 1° grado.

30. In molti problemi di Algebra si è condotti a dividere un polinomio $A(x)$ nella inderminata x per un binomio della forma $x - c$, dove c denota un numero dato.

Se n è il grado di $A(x)$, sappiamo che il quoziente intero $Q(x)$ di $A(x)$ per $x-c$ è di grado $n-1$, mentre il resto deve essere di grado 0, cioè deve ridursi ad un puro numero r, che risulta nullo sempre e soltanto quando $A(x)$ sia divisibile per $x-c$. Sappiamo altresì che fra il dividendo $A(x)$, il divisore $x-c$, il quoziente $Q(x)$ e il resto r sussiste l'identità (n. 17)

$$A(x) = (x-c)\ Q(x) + r. \tag{11}$$

Da questa identità discende una conseguenza molto notevole. Poichè si tratta di un'uguaglianza, che si mantiene vera per qualsiasi valore della x, rimane tale, in particolare, quando ad x si attribuisce il valore c. Ora, dando ad x, nella (11), questo valore e indicando al solito con $A(c)$ il valore che così assume $A(x)$, si ottiene l'uguaglianza numerica

$$A(c) = r.$$

Abbiamo dunque che *il resto della divisione di un polinomio per il binomio $x-c$ è il valore, che il polinomio assume quando ad x si attribuisce il valore c.*

Perciò, in particolare, se $A(x)$ è divisibile per $x-c$, risulta $A(c)=0$: e, viceversa, se è $A(c)=0$, è nullo il resto della divisione di $A(x)$ per $x-c$, cioè $A(x)$ è divisibile per $x-c$. Si ha, quindi, chè *affinchè un polinomio sia divisibile per un binomio $x-c$, è necessario e sufficiente che il polinomio si annulli per $x=c$.*

31. Proponiamoci di calcolare effettivamente il quoziente intero $Q(x)$ e il resto r della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x-c$; e, per non complicare inutilmente i calcoli, supponiamo A di 3° grado;

$$A(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Il quoziente sarà un certo polinomio di 2° grado

$$Q(x) = q_0x^2 + q_1x + q_2; \tag{12}$$

e poichè l'identità (11), sotto la condizione che r sia un numero, caratterizza il quoziente intero ed il resto (n. 19), si tratta di determinare i coefficienti q_0, q_1, q_2 di Q e il numero r, in modo che sussista l'identità (11), cioè, più precisamente, in modo che, quando, tenendo conto dell'espressione (12) di Q, si eseguiscano i calcoli indicati a secondo membro, e nel risultato si riducano i termini simili, si pervenga ad un polinomio di 3° grado, i cui coefficienti siano ordinatamente uguali a quelli dei termini di ugual grado di $A(x)$. Eseguiamo dunque anzitutto il prodotto di $Q(x)$ per $x - c$:

$$\begin{array}{r}
q_0x^2 + q_1x + q_2 \\
x - c \\
\hline
q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x \qquad\quad \\
- q_0cx^2 - q_1cx - q_2c \\
\hline
q_0x^3 + (q_1 - q_0c)x^2 + (q_2 - q_1c)x - q_2c
\end{array}$$

Abbiamo dunque

$$(x - c)Q(x) + r = q_0x^3 + (q_1 - q_0c)x^2 + (q_2 - q_1c)x + r - q_2c;$$

ed uguagliando i coefficienti di questo polinomio ordinatamente a quelli dei termini di egual grado di $A(x)$, perveniamo alle uguaglianze

$$\begin{cases} q_0 = a_0, \\ q_1 - q_0c = a_1, \\ q_2 - q_1c = a_2, \\ r - q_2c = a_3; \end{cases}$$

od anche

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} q_0 = a_0, \\ q_1 = q_0c + a_1, \\ q_2 = q_1c + a_2, \\ r = q_2c + a_3. \end{cases}$$

Se nella seconda di queste uguaglianze si sostituisce a q_0 il valore a_0 dato dalla prima; e similmente, nella terza a q_1 il valore dianzi ottenuto, e così via, si ottengono queste altre uguaglianze:

$$\begin{cases} q_0 = a_0, \\ q_1 = a_0c + a_1, \\ q_2 = (a_0c + a_1)c + a_2 = a_0c^2 + a_1c + a_2, \\ r = (a_0c^2 + a_1c + a_2)c + a_3 = a_0c^3 + a_1c^2 + a_2c + a_3. \end{cases}$$

Esse forniscono i coefficienti del quoziente ed il resto, espressi ciascuno per mezzo di c e dei coefficienti del dividendo. L'ultima, in particolare, conferma il fatto, già rilevato al n. precedente, che il resto r non è altro che il valore assunto da $A(x)$ per $x = c$.

32. Per il calcolo pratico del quoziente $Q(x)$ e del resto r, conviene fissare l'attenzione sulle uguaglianze (13). Da esse risulta senz'altro la cosiddetta **Regola del Ruffini**: *Quando un polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di un'indeterminata x si divide per un binomio $x - c$, nel quoziente, ordinato anch'esso nello stesso modo, il primo* *coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo, e ciascuno degli altri si ottiene moltiplicando quello immediatamente precedente per c e aggiungendo il coefficiente di ugual posto del dividendo. Il termine noto si ottiene quando si arriva ad utilizzare il penultimo coefficiente del dividendo; e, se si applica ancora una volta la stessa regola, si ottiene il resto della divisione.*

L' applicazione di questa regola si rende più comoda, disponendo l' operazione nel modo indicato dalla seguente tabelletta, dove si intende che ciascuno dei q, come pure r, sia ottenuto come somma dei numeri che gli stanno sopra:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ c & & q_0c & q_1c & q_2c \\ \hline & q_0 & q_1 & q_2 & r \end{array}$$

Per es., la divisione di $3x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ per $x - 2$ si dispone e si eseguisce nel modo seguente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & & 6 & 4 & 12 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 17 \end{array}$$

Il quoziente è $3x^2 + 2x + 6$ e il resto è 17.

Se nel dividendo manca qualche termine, bisogna aver cura di segnare nella prima riga, al posto del rispettivo coefficiente, lo 0; e in ogni caso si deve tener presente che c denota non già il termine noto del binomio divisore (avente il primo coefficiente uguale ad 1), bensì il suo opposto. Così, per dividere $2x^5 + 63x^2 - 85$ per $x + 3$, l' operazione si dispone e si eseguisce come segue:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & 0 & 0 & 63 & 0 & -85 \\ -3 & & -6 & 18 & -54 & -27 & 81 \\ \hline & 2 & -6 & 18 & 9 & -27 & -4 \end{array}$$

Il quoziente è dunque $2x^4 - 6x^3 + 18x^2 + 9x - 27$ e il resto è -4.

33. Con la regola del RUFFINI si possono anche calcolare il quoziente ed il resto della divisione di un polinomio A per un qualsiasi binomio di 1° grado $ax + b$. Infatti questo binomio si può scrivere, raccogliendo il fattore a,

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right),$$

cosicchè, indicando $-\frac{b}{a}$ con c, si ha

$$ax + b = a(x - c). \tag{14}$$

Se allora si calcolano con la regola del RUFFINI il quoziente Q e il resto r di A per $x - c$, sussiste l'identità

$$A(x) = (x - c) Q(x) + r. \tag{11}$$

Ma questa identità si può anche scrivere

$$A(x) = a(x - c) \frac{1}{a} Q(x) + r,$$

ossia, tenendo conto della (14),

$$A(x) = (ax + b) \frac{1}{a} Q(x) + r.$$

Si ha dunque (n. 19) che il quoziente di A per $ax + b$ è $\frac{1}{a} Q$, mentre il resto è lo stesso r di prima.

Cenno sui polinomi in più indeterminate.

34. I problemi, che si risolvono col sussidio dell'Algebra, possono riguardare, come vedremo nel seguito, non una sola incognita, bensì due od anche più. Così nei calcoli letterali, cui si è condotti per risolvere tali problemi, si incontrano anche polinomi in due o più indeterminate x, y, z.... Limitiamoci qui a qualche osservazione sui polinomi in due indeterminate x, y.

Ogni polinomio di questa specie è una somma algebrica di monomi o termini, ciascuno dei quali è il prodotto di un coefficiente (dato numericamente o anche rappresentato da una lettera) e di certe due potenze della x e della y. Una di queste potenze può anche mancare, ossia, come si suol dire, essere di esponente 0, e allora si ha un termine dipendente soltanto dall'altra indeterminata. Se poi le due potenze della x e della y sono entrambe di esponente 0, il termine si riduce ad un numero (eventualmente rappresentato da una lettera) e si ha il *termine noto* del polinomio.

Anche per questi polinomi la prima cosa da farsi è la riduzione dei termini simili (n. 4); e dopo di ciò vanno considerati di ogni polinomio i gradi rispetto alla x e rispetto alla y e il grado (totale). Per es. il polinomio

$$3x^3y^2 - 2x^2y^2 + x^4y + 7x - 4x^3y - 5 \tag{15}$$

è di 4° grado rispetto alla x, di 2° grado rispetto alla y, di grado (totale) 5°. Un polinomio di 1° grado, dopo la riduzione dei termini simili, non può contenere che tre termini (al più), uno di 1° grado in x, uno di 1° grado in y e un termine noto; esso sarà del tipo $ax + by + c$.

Per rendere più spediti e facili i calcoli giova ordinare in modo opportuno anche i polinomi in più indeterminate. Si noti che in un polinomio di questa specie si possono avere termini non simili (e quindi irriducibili fra loro), aventi il medesimo grado totale. Per es., nel polinomio precedente il primo e il terzo termine sono di 5° grado e il secondo e il quinto sono di 4° grado. Orbene, per ordinare un polinomio in due indeterminate, si comincia col raggruppare i termini di ugual grado totale, e si hanno così tanti polinomi parziali ciascuno dei quali è *omogeneo* in x ed y (IV, n. 10). Questi polinomi parziali si considerano l'uno dopo l'altro nell'ordine, per es., decrescente dei loro gradi; e, infine, in ciascuno di essi i termini si ordinano secondo le potenze decrescenti di una delle indeterminate, per es., della x (onde, in quanto la somma degli esponenti delle due indeterminate è in ognuno di essi costante, i termini di ogni polinomio parziale risultano ordinati secondo le potenze crescenti della y). Così il polinomio (15) si scriverà

$$x^4y + 3x^3y^2 - 4x^3y - 2x^2y^2 + 7x - 5.$$

È pure ordinato il polinomio di 2° grado

$$3x^2 - 4xy + 5y^2 + x - 2y + 1.$$

35. Quanto alle operazioni sui polinomi in x ed y, supposti ordinati nel modo or ora detto, conviene disporre l'addizione e la moltiplicazione come nel caso dei polinomi in una sola indeterminata (nn. 8, 9); e si ha anche in questo caso che il grado della somma è uguale o minore del massimo grado degli addendi, e il grado del prodotto è sempre uguale alla somma dei gradi dei fattori.

Il quoziente di due polinomi A e B, si può sempre rappresentare per mezzo della frazione algebrica $\frac{A}{B}$, con l'avvertenza che vanno escluse per x ed y quelle coppie di valori, per cui si annulla il denominatore B.

In taluni casi particolari è facile, con un po' di pratica, riconoscere la possibilità di qualche semplificazione. Per es., può accadere che, esaminando i gradi con cui x ed y compaiono nei singoli termini di A e B, od anche tenendo conto di formule note di moltiplicazione come quelle dei numeri 15-19 del Cap. IV, si ravvisi che A e B hanno a divisore comune un certo monomio (o polinomio) H, cioè si abbia $A = A_1H$, $B = B_1H$, dove A_1 e B_1 denotano certi due nuovi polinomi in x e y. Allora la frazione $\frac{A}{B}$ si può scrivere

$$\frac{A_1H}{B_1H},$$

cioè, come si suol dire, « si può raccogliere H a fattor comune di ambo i termini ».

Ma per tutte le coppie di valori x e y, per cui la frazione ha senso, H è certamente diverso da 0, perchè per ogni eventuale coppia di valori, per cui esso si annulli, si annulla anche il denominatore B, che ammette H come fattore. Perciò, sempre quando abbia senso la frazione $\frac{A}{B}$, si possono dividerne ambo i termini per H e si ha l'identità

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1},$$

cioè « si può sopprimere a numeratore e denominatore il fattore comune H ».

Capitolo VI.

Equazioni di primo grado.

Preliminari e definizioni.

1. Delle regole di calcolo letterale apprese nei Capitoli precedenti possiamo ormai valerci per la *risoluzione dei problemi*, la quale costituisce lo scopo principale dell'Algebra.

Proponiamoci, per es., di *trovare un numero tale che il suo quadruplo, diminuito di* 18, *dia* 50.

In questo problema si ha un numero *incognito*, mentre sono *dati* i numeri 18 e 50. Se indichiamo il numero incognito con x, il suo quadruplo è rappresentato da $4x$; e il problema richiede che la differenza $4x - 18$ risulti uguale a 50, cioè che x renda soddisfatta la condizione espressa dall'uguaglianza

$$4x - 18 = 50.$$

Ognuno capisce come si possa procedere per trovare il valore di x; se la differenza $4x - 18$ deve dare 50, vuol dire che $4x$ deve essere uguale a $50 + 18$, cioè

$$4x = 50 + 18;$$

e allora il valore di x si trova prendendo la 4^a parte di $50 + 18$, cioè

$$x = \frac{50 + 18}{4} = \frac{68}{4} = 17.$$

2. Consideriamo qualche altro problema, altrettanto semplice, in cui i dati siano rappresentati da lettere.

a) Quattro numeri a, b, c, d si dicono costituire, nell' ordine scritto, una *proporzione* (o *progressione*) *aritmetica*, quando

$$a - b = c - d.$$

Ora dalla uguaglianza delle due differenze $a - b$, $c - d$ risulta che sono uguali anche le somme che si ottengono da esse aggiungendo $b + d$ ad entrambe, cioè

$$a - b + b + d = c - d + b + d \quad \text{ossia} \quad a + d = b + c.$$

Si ha dunque che *in una proporzione aritmetica la somma degli estremi è uguale a quella dei medi.*

Allora dati i primi tre numeri o termini a, b, c di una proporzione aritmetica, come si trova il quarto? Indicatolo con x, si deve avere

$$a + x = b + c,$$

e poichè la somma di x e di a deve dare $b + c$, esso è uguale alla differenza di $b + c$ e di a, cioè

$$x = b + c - a.$$

Come caso particolare della proporzione aritmetica si ha la *proporzione aritmetica continua* di tre numeri a, b, c, quando

$$a - b = b - c,$$

da cui, aggiungendo alle due differenze uguali $a - b$, $b - c$ la somma $b + c$, si deduce

$$a - b + b + c = b - c + b + c \quad \text{ossia} \quad a + c = 2b;$$

e allora b si dice *media aritmetica* fra a e c.

Per trovare la media aritmetica di due dati numeri a e c, occorre e basta trovare un numero x, soddisfacente alla condizione espressa dall' uguaglianza

$$2x = a + c;$$

e poichè il doppio di x deve essere uguale ad $a + c$, x sarà la metà di questa somma, cioè

$$x = \frac{a+c}{2}.$$

b) Quattro numeri a, b, c, d si dicono costituire, nell'ordine scritto, una *proporzione (o progressione) geometrica* (o, semplicemente una *proporzione*), se il quoziente dei primi due è uguale a quello degli altri due, cioè se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Poichè i due numeri $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sono uguali, tali risultano anche i loro prodotti per bd, e poichè $\frac{a}{b}bd = ad$, $\frac{c}{d}bd = bc$, si conclude

$$ad = bc,$$

cioè *in una proporzione geometrica il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medi.*

Già nell'Aritmetica si sono studiate queste proporzioni, e si sono incontrati numerosi problemi, che si risolvono colla determinazione del quarto proporzionale dopo tre numeri dati (regole del tre, di interesse, di ripartizione, di miscuglio). La sola novità che qui si incontra sta nel fatto che i numeri, di cui si tratta, possono essere indifferentemente positivi o negativi.

Per determinare il numero incognito x, che è quarto proporzionale dopo tre numeri dati a, b, c, basta osservare che dall'uguaglianza di condizione

$$ax = bc$$

risulta che x è il quoziente di bc per a, cioè

$$x = \frac{bc}{a}.$$

c) Vi è una terza specie di proporzioni, già considerata dagli antichi Pitagorici (circa 500 anni a. C.) e da essi chiamata *armonica* per la sua relazione con la teoria del suono. Quattro numeri a, b, c, d si dicono costituire, nell'ordine scritto, una *proporzione armonica*, quando i loro reciproci sono in proporzione aritmetica, cioè quando

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d},$$

ossia

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Perciò, dati tre numeri a, b, c, per trovare il quarto armonico x, bisogna soddisfare all'uguaglianza di condizione

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c};$$

da cui risulta che deve essere

(1)
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}.$$

Ma

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}-\frac{bc}{abc}=\frac{a(b+c)-bc}{abc},$$

cosicchè la (1) si può scrivere

$$\frac{1}{x}=\frac{a(b+c)-bc}{abc},$$

e il quarto armonico è dato da

$$x=\frac{abc}{a(b+c)-bc}.$$

3. In ciascuno dei problemi dianzi risolti si trattava di trovare un certo numero incognito, che abbiamo sempre indicato con x; e, ciascuna volta, la condizione imposta dal problema si traduceva in una certa relazione o uguaglianza tra la *incognita* x e i *dati* del problema (assegnati numericamente o rappresentati, più in generale, con lettere).

Ora è della massima importanza rilevare e ben comprendere la differenza essenziale, che corre fra le uguaglianze così ottenute

$$(2) \qquad 4x - 18 = 50, \quad a + x = b + c, \quad 2x = a + c, \quad ax = bc, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

e le uguaglianze fra espressioni letterali considerate nei Capitoli precedenti, quali, ad es.,

$$(3) \qquad x + a = a + x, \quad (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2, \quad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2, \quad \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a.$$

Queste ultime uguaglianze, come si è notato fin dapprincipio (II, n. 11) e ripetuto, ad ogni occasione, sono *identità*, cioè *valgono comunque si fissino, caso per caso, i valori delle lettere che vi compaiono* (con la sola avvertenza di escludere, quando intervenga qualche frazione algebrica, quei valori delle lettere, per cui eventualmente si annulli il denominatore). In sostanza, in ognuna di queste identità compaiono, nei due membri, due *forme diverse* di una *medesima* espressione letterale, riducibili l'una all'altra con le operazioni del calcolo algebrico.

Invece le (2), una volta fissati, come si suppone, i valori dei dati a, b, c, ..., che vi compaiono, *non valgono per qualsiasi valore della incognita, bensì soltanto per valori particolari*, che sono appunto quelli chiesti dal corrispondente problema. Si può anche dire che in ognuna delle (2) si hanno nei due membri dell'eguaglianza due espressioni letterali *non identiche*, cioè due espressioni che per valori presi a caso per la x assumono valori diversi; e si tratta di trovare quei *valori particolari* della incognita, per cui codeste due espressioni prendono il medesimo valore.

Insomma, mentre le (3) sono *incondizionatamente vere* ed affermano ciascuna una proposizione o teorema generale, le (2) sono *uguaglianze condizionali* per la incognita, ed esprimono, in qualche modo, una domanda.

Per contrapposto alle identità, le (2) si chiamano *equazioni nell'incognita* x. E in ogni caso si dice *equazione* in una incognita x ogni uguaglianza condizionale fra due espressioni (contenenti o l'una o l'altra od entrambi la x) per mezzo della quale si cerchi di determinare questa incognita.

Giova aggiungere che talvolta, nell'applicare l'Algebra alla risoluzione dei problemi, si è condotti a considerare fra l'incognita x e i dati qualche relazione, di cui poi ci si accorge che è soddisfatta da qualsiasi valore della x, cioè si riduce ad una identità. Una tale uguaglianza non costituisce più un'equazione vera e propria, nel senso or ora definito; tuttavia si continua a chiamarla con questo nome. Solo, tenendo conto che essa non impone nessuna condizione alla x, si suol dire un'*equazione indeterminata*.

Se con $A(x)$ e $B(x)$ si indicano due espressioni, contenenti l'incognita x, ogni equazione si può scrivere

$$A(x) = B(x).$$

Come per le identità (II, n. 11), le due espressioni $A(x)$ e $B(x)$ si dicono rispettivamente *primo* e *secondo membro* dell'equazione; e se $A(x)$ e $B(x)$, o tutte e due, sono somme di più termini, ciascuno di questi si chiama senz'altro *termine* dell'equazione.

Di un'equazione si dice *soluzione*, o anche *radice*, ogni numero (od espressione letterale, formata coi dati), che, attribuito come valore all'incognita, faccia assumere ai due membri dell'equazione valori uguali. Così per l'equazione

$$4x - 18 = 50$$

è soluzione il numero 17; per l'equazione

$$ax = bc$$

è soluzione l'espressione

$$\frac{bc}{a},$$

e così via. Di ogni soluzione di un'equazione spesso si dice che « soddisfa » all'equazione od anche che la « verifica ».

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni.

Giova notare fin d'ora che si possono incontrare equazioni, che non ammettono nessuna soluzione e che perciò si dicono *impossibili* od anche *assurde*. Tale è, ad es., $x^2 = -4$, perchè, qualunque valore (positivo o negativo) si prenda per l'incognita x, il suo quadrato risulta positivo e non può, quindi, mai risultare uguale a -4.

Dobbiamo, infine, aggiungere un'avvertenza importante. Può darsi che fra i termini di un'equazione compaia qualche frazione algebrica. Per es., nell'equazione

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

del n. 2, c sono fratti tutti i termini. In ogni caso, perchè l'equazione abbia senso, bisogna escludere per le lettere che compaiono nei denominatori (siano esse incognite o, per ipotesi, date) quei valori, per cui codesti denominatori si annullano. Così nell'esempio precedente va escluso il valore 0 sia per i dati a, b, c, sia per l'incognita x.

Equazioni equivalenti.

4. Due equazioni nella stessa incognita si dicono *equivalenti*, se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, e viceversa.

Importa tener ben presente che, per concludere che due equazioni sono equivalenti, non basta assicurarsi che tutte le soluzioni di una di esse soddisfa all'altra, perchè può darsi benissimo che questa seconda equazione abbia anche altre soluzioni, che non rendano soddisfatta la prima. Per es. delle due equazioni

$$2x - 3 = 1, \quad 2x^2 - 3 = 3x^2 - 5x + 3$$

si verifica facilmente che la prima ammette la soluzione $x = 2$ e questa soltanto, mentre la seconda è bensì soddisfatta anch'essa da $x = 2$, ma ammette inoltre la soluzione $x = 3$, che non soddisfa alla prima.

Risulta in ogni caso dalla definizione, che *due equazioni equivalenti ad una terza sono equivalenti anche fra loro.*

5. Poichè due equazioni equivalenti hanno le medesime soluzioni, è chiaro che quando si vuol risolvere un'equazione, si può sempre considerare, in luogo di quella data, un'altra equazione qualsiasi, *purchè equivalente ad essa*; e ciò, naturalmente, torna vantaggioso se la nuova equazione è più semplice della data.

Indicheremo qui e al n. 7 due facili artifici, che permettono di dedurre da una data equazione un'altra equivalente. Si tratta di conseguenze immediate delle regole del calcolo letterale; e del resto siamo già stati condotti spontaneamente ad applicarle nella risoluzione delle equazioni particolarmente semplici, incontrate nei problemi dei nn. 1, 2.

Dimostriamo anzitutto il cosiddetto **principio del trasporto dei termini**: *Da un'equazione si ottiene un'equazione equivalente, trasportando un qualsiasi suo termine dal membro, in cui si trova, all'altro, purchè gli si cambi segno.*

È ciò che abbiamo fatto al n. 1, quando dall'equazione

$$4x - 18 = 50$$

siamo passati alla

$$4x = 50 + 18.$$

Per ragionare in generale, supponiamo che in un'equazione, il cui primo membro sia una certa espressione $A(x)$, il secondo membro sia la somma di due termini $B(x)$, $C(x)$, cioè consideriamo l'equazione

$$A(x) = B(x) + C(x). \tag{4}$$

Si tratta di far vedere che quest'equazione è equivalente alla

$$A(x) - C(x) = B(x), \tag{5}$$

cioè che ogni soluzione della (4) soddisfa alla (5) e, viceversa, ogni soluzione della (5) soddisfa alla (4).

Per dimostrare la prima parte, indichiamo con c una qualsiasi soluzione della (4); ciò vuol dire che le due espressioni $A(x)$ e $B(x) + C(x)$ assumono lo stesso valore, quando in esse si attribuisce alla x il valore c; in altre parole si ha l'uguaglianza fra numeri

$$A(c) = B(c) + C(c). \tag{6}$$

Ora, sottraendo da ambo i membri di questa uguaglianza fra numeri il numero $C(c)$, si deduce l'uguaglianza

$$A(c) - C(c) = B(c), \tag{7}$$

la quale ci assicura appunto che c è anche soluzione della (5).

Viceversa, questo stesso ragionamento permette di concludere che ogni soluzione della (5) soddisfa alla (4); perchè, come la (5) si deduce dalla (4) aggiungendo ad entrambi i suoi membri l'espressione $-C(x)$, così la (4) si deduce dalla (5), aggiungendo ad entrambi i suoi membri $C(x)$.

6. D'or innanzi, quando diremo di « trasportare » un termine da un membro all'altro di un'equazione, sottintenderemo che, secondo il teorema prec., gli si cambi simultaneamente segno.

Conviene rilevare subito due immediate conseguenze di codesto teorema.

a) Quando è data un equazione, il teorema prec. si può applicare a *tutti* i termini di uno dei due membri, per es. del secondo; cioè si possono trasportare tutti questi termini al primo membro. Si vede così che ad ogni equazione si può dare la forma

$$A(x) = 0,$$

dove $A(x)$ denota una certa espressione in x.

b) Supponiamo che nei due membri di un'equazione compaia uno stesso termine (beninteso col medesimo segno nei due membri). Ad es., si consideri un'equazione della forma

$$A(x) + C(x) = B(x) + C(x).$$

Per il teorema del n. prec., si ottiene un'equazione equivalente trasportando il termine $C(x)$ dal secondo membro al primo. Si ottiene così l'equazione

$$A(x) + C(x) - C(x) = B(x),$$

cioè

$$A(x) = B(x).$$

Abbiamo dunque che *se i due membri di un'equazione contengono uno stesso termine, questo termine si può sopprimere.*

7. Dimostriamo, in secondo luogo, che: *Da un'equazione si ottiene un'equazione equivalente, moltiplicando o dividendo ambo i membri della data per uno stesso numero diverso da zero, od anche per un'espressione letterale, purchè questa espressione non contenga l'incognita e non sia nulla.*

L'equazione data si supponga senz'altro ridotta alla forma (n. prec.)

$$A(x) = 0, \tag{8}$$

e si indichi con q un numero diverso da 0 od anche un'espressione letterale, che, per altro, in accordo coll'ipotesi del teorema, non contenga la x e non sia nulla. Osserviamo che, in quanto dividere per q è lo stesso che moltiplicare per $\frac{1}{q}$, e $\frac{1}{q}$ soddisfa alle stesse condizioni supposte per q, basta dimostrare il teorema per il caso della moltiplicazione. Dobbiamo dunque far vedere che la (8) è equivalente all'equazione

$$qA(x) = 0. \tag{9}$$

A tal fine, cominciamo con l'indicare con c una soluzione della (8). Ciò vuol dire che, quando ad x si attribuisce il valore c, l'espressione $A(x)$ assume il valore 0, cioè sussiste l'uguaglianza numerica

$$A(c) = 0. \tag{10}$$

Perciò sussiste anche l'uguaglianza

$$qA(c) = 0, \tag{11}$$

che assicura appunto che c è soluzione anche della (9).

Viceversa, questa stessa osservazione permette di riconoscere che ogni soluzione della (9) soddisfa anche alla (8); perchè come la (9) si deduce dalla (8), moltiplicandone ambo i membri per q, così la (8) si deduce dalla (9), moltiplicandone ambo i membri per $\frac{1}{q}$.

8. Prima di applicare i teoremi precedenti alla effettiva risoluzione di equazioni, convien dare qualche altra definizione.

Un'equazione si dice *intera*, se è ottenuta uguagliando fra loro due polinomi nella incognita o (quando tutti i termini siano portati a primo membro) uguagliando a zero un polinomio in codesta incognita. Si dice invece *fratta*, se fra i termini compare qualche frazione algebrica, contenente l'incognita nel denominatore.

Se un' equazione è intera, se ne trasportino tutti i termini a primo membro. Secondo che il polinomio, che così si ottiene a primo membro, risulta, quando sia ridotto, di grado 1 o 2 o 3 ... rispetto all'incognita, anche l'equazione si dice, rispettivamente, di 1° o 2° o 3° ... *grado*. Per es., le equazioni

$$5 - 2x = -7x + 2, \quad 3 - 2x - 2x^2 = x(5 - 2x) + 4,$$
$$(x + 1)^2 - 3 = (x - 2)(3 - 2x),$$

ove si trasportino tutti i termini a primo membro e si eseguiscano le riduzioni possibili, diventano rispettivamente

$$5x + 3 = 0, \quad -7x - 1 = 0, \quad 3x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Le prime due sono, dunque, di 1° grado, la terza di 2° grado.

Nel seguito di questo Capitolo ci occuperemo esclusivamente di equazioni di 1° grado o riducibili ad equazioni di 1° grado.

Esempi di equazioni di primo grado e regola di risoluzione.

9. Già nel risolvere i problemi dei nn. 1, 2 abbiamo incontrato alcuni esempi semplicissimi di equazioni di 1° grado in un'incognita. Qui considereremo altri esempi meno semplici, per trarne poi la regola generale di risoluzione.

1) Prendiamo l'equazione

$$4(3x - 2) = 2(4x - 3) + 3(4 - x). \tag{12}$$

Sciogliamo nei due membri le parentesi:

$$12x - 8 = 8x - 6 + 12 - 3x;$$

riduciamo a secondo membro i termini simili:

$$12x - 8 = 5x + 6;$$

trasportiamo il termine del secondo membro, che contiene la x, al primo, e il termine noto del primo membro al secondo (n. 5):

$$12x - 5x = 8 + 6;$$

riduciamo ancora i termini simili:

$$7x = 14,$$

e finalmente dividiamo ambo i membri per 7 (n. 7):

$$x = \frac{14}{7} = 2. \tag{13}$$

Così dall'equazione data abbiamo dedotto, l'una dopo l'altra, tutta una serie di equazioni, applicando semplicemente le regole del calcolo letterale e i due teoremi dei nn. 5, 7. Perciò ciascuna di queste equazioni è equivalente alla precedente, e sono quindi equivalenti anche la (12), da cui siamo partiti, e la (13), cui siamo arrivati.

Poichè è ben chiaro che quest'ultima non è soddisfatta che dal valore 2 dell'incognita, anche l'equazione proposta ammette questa soluzione, e nessun'altra all'infuori di essa.

Siamo dunque senz'altro sicuri che l'equazione (12), ove vi si attribuisca alla incognita x il valore 2, deve risultare soddisfatta. Tuttavia avvertiamo, come norma generale, che quando si è risolta un'equazione, è consigliabile verificare alla fine se il valore trovato soddisfa effettivamente l'equazione proposta. Ci si assicura così della esattezza dei calcoli eseguiti; e, ad ogni modo, questa verifica costituisce per i principianti un ottimo esercizio.

Naturalmente, per compiere questa verifica si calcolano separatamente i valori, che i due membri dell'equazione assumono, quando in ciascuno di essi si attribuisce alla incognita il valore trovato; e codesti due valori debbono risultare uguali. Così, nel caso della equazione (12), ponendo nei due membri $x = 2$, si trova rispettivamente

$$4(3 \cdot 2 - 2) = 16, \quad 2(4 \cdot 2 - 3) + 3(4 - 2) = 16.$$

2) $$\frac{5x + 3}{3} - \frac{16 - 5x}{7} = 37 - 4x.$$

Qui compaiono dei divisori e conviene farli scomparire, o, come si suol dire, convien « liberare l'equazione dai divisori ».

A questo scopo, basta moltiplicare ambo i membri per 21, prodotto (ed anzi minimo multiplo comune) dei divisori 3 e 7; si ha così:

$$7(5x+3)-3(16-5x)=21(37-4x).$$

Procedendo poi come nel caso precedente, troviamo, l'una dopo l'altra, le seguenti equazioni, equivalenti fra loro e alla data:

$$\begin{aligned} 35x+21-48+15x &= 777-84x, \\ 50x-27 &= 777-84x \\ 134x &= 804 \\ x &= \frac{804}{134}=6. \end{aligned}$$

L'equazione proposta ammette dunque la soluzione $x=6$ e nessun'altra.

3) $$(7-x)(x+3)=(x+9)(5-x).$$

Sciogliendo nei due membri le parentesi e riducendo i termini simili, troviamo:

$$-x^2+4x+21=-x^2-4x+45.$$

I due membri sono dunque ciascuno di 2° grado; ma poichè in entrambi i membri il termine di 2° grado è $-x^2$, questi due termini si elidono a vicenda e si possono senza altro sopprimere (n. 6, *b*). Si ha così l'equazione di 1° grado

$$4x+21=-4x+45,$$

da cui, col solito procedimento, si traggono successivamente queste altre:

$$\begin{aligned} 4x+4x &= 45-21 \\ 8x &= 24 \\ x &= \frac{24}{8}=3. \end{aligned}$$

4) $5(3x + 2) - 3(4x - 1) = 7(x - 1) - 2(2x - 5)$.

Procedendo come nell'esempio 1), troviamo:

$$15x + 10 - 12x + 3 = 7x - 7 - 4x + 10$$
$$3x + 13 = 3x + 3.$$

Ma qui si presenta un *caso di eccezione*: se si trasporta dal secondo membro al primo il termine in x e dal primo al secondo il termine noto, il coefficiente dell'incognita si riduce a 0, e si ottiene l'eguaglianza condizionale

$$0 \cdot x = -10, \tag{14}$$

alla quale non è possibile soddisfare con alcun valore di x, perchè, qualunque valore si prenda, il suo prodotto per 0 dà 0 e non mai -10. Si tratta dunque di un'equazione *impossibile* od *assurda* (n. 3); e tale necessariamente è anche la 4), da cui siamo partiti. Infatti, se essa ammettesse una soluzione, questa dovrebbe soddisfare, in forza dei teoremi dei nn. 5, 7, anche alla (14).

5) $6(3x - 1) + 2(4 - 7x) = 3(4x + 2) - 4(2x + 1)$.

Si ottiene, nel solito modo, successivamente

$$18x - 6 + 8 - 14x = 12x + 6 - 8x - 4$$
$$4x + 2 = 4x + 2;$$

o infine, trasportando al solito il termine in x dal secondo membro al primo e il termine noto dal primo al secondo,

$$0 \cdot x = 0; \tag{15}$$

e si presenta un nuovo *caso di eccezione*, in qualche modo contrario a quello precedente. La (15) è soddisfatta da ogni possibile valore di x, perchè ogni numero, moltiplicato per 0, dà 0. Altrettanto accade della 5), da cui siamo partiti, perchè, in forza dei teoremi dei nn. 5, 7, le 5) e (15) sono fra loro equivalenti. La 5) non è dunque una vera e propria equazione, bensì una identità. Tuttavia, come già si è detto al

n. 3, si continua, per estensione, a chiamarla un' equazione; solo, in quanto non impone alla x alcuna condizione, si dice un' equazione *indeterminata.*

10. I procedimenti usati nei vari esempi del n. prec. si possono applicare in ogni altro caso. Possiamo quindi enunciare in generale la seguente

Regola. - *Per risolvere un' equazione di 1° grado (a coefficienti numerici) in una incognita si eseguiscono le seguenti operazioni:*

1°) *se l' equazione contiene dei coefficienti frazionari, essa si libera dai divisori, moltiplicandone ambo i membri per il prodotto (o, meglio, per il minimo multiplo comune) dei denominatori;*

2°) *si sciolgono le eventuali parentesi;*

3°) *si trasportano tutti i termini contenenti l' incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo;*

4°) *si riducono, in ambo i membri, i termini simili;*

5°) *se, a calcoli fatti, il coefficiente dell' incognita nell' unico termine, che così risulta a primo membro, è diverso da zero, l' equazione ammette una soluzione (ed una sola), la quale si ottiene dividendo per questo coefficiente della incognita il termine noto, che costituisce il secondo membro; se, invece, il coefficiente della incognita risulta uguale a zero, l' equazione è impossibile (cioè priva di soluzioni) o indeterminata (cioè un' identità), secondo che il termine noto è diverso da zero o nullo.*

Non si deve credere che le operazioni enumerate in questa regola vadano *sempre* eseguite nel preciso ordine qui indicato. A seconda dei casi, può convenire, nella esecuzione di codeste operazioni, l' uno o l' altro dei vari ordini possibili; e nella scelta dell' ordine più opportuno non si può essere guidati da criteri generali, bensì soltanto dalla pratica, che si acquista col lungo esercizio.

Ma in ogni caso bisogna finire col trasportare tutti i termini contenenti l' incognita in un membro, e tutti i termini noti nell'altro. Quando si è fatto ciò, si dice che l'equazione si è ridotta a *forma normale*. Essa allora assume l'aspetto

$$ax = b,$$

dove a e b denotano due numeri (od anche due espressioni letterali non contenenti l'incognita).

E non sarà inutile ripetere che *l'equazione ammette una soluzione ed una sola se è* $a \gtrless 0$, *e la soluzione è data in tal caso da*

$$x = \frac{b}{a}.$$

Se invece è $a = 0$ *e* $b \gtrless 0$, *l'equazione è impossibile; se, infine, è* $a = b = 0$, *l'equazione è indeterminata.*

11. Al n. 9 abbiamo considerato esclusivamente equazioni di 1° grado a coefficienti numerici, mentre nella risoluzione algebrica dei problemi si è spesso condotti ad equazioni, i cui coefficienti sono (tutti o, almeno, in parte) espressioni letterali. Anche queste equazioni si risolvono, applicando la regola del n. prec.; ma può darsi che per valori speciali delle lettere, che compaiono nei coefficienti, l'equazione risulti impossibile o indeterminata, e bisogna precisare bene questi casi di eccezione. È questa la cosiddetta *discussione* dell'equazione.

Consideriamo qualche esempio.

1) Sia data l'equazione

$$\frac{x}{a} = c - \frac{x}{b},$$

dove a e b rappresentano due numeri, che si suppongono dati. Naturalmente, perchè i vari termini di questa equazione abbiano senso bisogna escludere tanto per a quanto per b il valore 0. Sotto questa ipotesi, applichiamo all'equazione data la regola del n. prec., cioè cominciamo col moltiplicare ambo i membri per il prodotto ab dei denominatori:

$$bx = abc - ax;$$

poi trasportiamo a primo membro il termine in x del secondo, e riduciamo i termini simili:

$$(a + b)x = abc.$$

Se è $a + b \gtrless 0$, cioè $b \gtrless -a$, l'equazione è possibile e determinata, e basta dividere ambo i membri per $a + b$ per trovare la soluzione

$$x = \frac{abc}{a+b}.$$

Se invece è $a + b = 0$, si presentano i casi di eccezione; e precisamente, osservando che (in quanto a e b sono per ipotesi diversi da 0) il termine noto abc si annulla solo quando sia $c = 0$, si riconosce che per $a + b = 0$ e $c \gtrless 0$ l'equazione è impossibile, per $a + b = 0$ e $c = 0$ essa è indeterminata.

2) $$(a + x)(b + x) = a(b + c) + \frac{a^2c}{b} + x^2.$$

Anzitutto, perchè l'equazione abbia senso, bisogna supporre $b \gtrless 0$. Notiamo poi che in questo caso non conviene cominciar dal liberare l'equazione dai divisori, ma piuttosto dallo sciogliere le parentesi. Si trova successivamente

$$ab + bx + ax + x^2 = ab + ac + \frac{a^2c}{b} + x^2$$

$$(a + b)x = ac + \frac{a^2c}{b};$$

e poichè

$$ac + \frac{a^2c}{b} = \frac{abc + a^2c}{b} = \frac{ac(a + b)}{b},$$

si ottiene per la data equazione la forma normale

$$(a + b)x = \frac{ac(a + b)}{b}.$$

Se $a+b \gtrless 0$, cioè se $b \gtrless -a$, si trova, dividendo ambo i membri per $a+b$, la soluzione

$$x=\frac{ac}{b}.$$

Se poi è $a+b=0$, si annullano tanto il coefficiente di x, quanto il termine noto, e l'equazione è indeterminata.

3) $$(x-a)(2x-b)^2=(x-b)(2x-a)^2.$$

Eseguiamo anzitutto i due quadrati (IV, n. 16):

$$(x-a)(4x^2-4bx+b^2)=(x-b)(4x^2-4ax+a^2);$$

sciogliamo le parentesi:

$$\begin{aligned}4x^3-4ax^2-4bx^2+4abx+b^2x-ab^2=\\=4x^3-4bx^2-4ax^2+4abx+a^2x-a^2b;\end{aligned}$$

sopprimiamo nei due membri i termini a due a due uguali (n. 6, b):

$$b^2x-ab^2=a^2x-a^2b;$$

infine trasportiamo i termini in x a primo membro, quelli noti a secondo, e poi raccogliamo in ciascun membro i fattori comuni:

$$b^2x-a^2x=ab^2-a^2b,$$

$$(b^2-a^2)x=ab(b-a). \tag{16}$$

Perchè quest'equazione ammetta una soluzione ed una sola occorre e basta che sia $b^2-a^2 \gtrless 0$; ma per la nota identità del n. 18 del Cap. IV,

$$b^2-a^2=(b-a)(b+a), \tag{17}$$

onde si riconosce che, affinchè sia $b^2-a^2 \gtrless 0$, è necessario e sufficiente che siano diversi da 0 entrambi i binomi $b-a$ e $b+a$, cioè che b sia diverso tanto da a quanto da $-a$. Sotto questa ipotesi, dividendo ambo i membri della (16) per $b^2 - a^2$, si ottiene la soluzione

$$x = \frac{ab(b-a)}{b^2 - a^2}.$$

Ma, tenendo conto della (17), si ha

$$\frac{ab(b-a)}{b^2-a^2} = \frac{ab(b-a)}{(b-a)(b+a)}, = \frac{ab}{b+a},$$

e perciò, sotto l'ipotesi $b^2 - a^2 \gtrless 0$, la data equazione ammette la soluzione

$$x = \frac{ab}{b+a},$$

e questa soltanto.

Restano i casi di eccezione $b + a = 0$ e $b - a = 0$. Se è $b + a = 0$, cioè $b = -a$, la (16) si riduce a

$$0 \cdot x = 2a^3,$$

ed è quindi impossibile per $a \gtrless 0$, indeterminata per $a = 0$.

Se poi è $b - a = 0$, ossia $b = a$, la (16) diventa senz'altro indeterminata.

12. Sinora abbiamo considerato soltanto equazioni intere, mentre nei problemi, come vedremo fra un momento con qualche esempio, si incontrano spesso equazioni fratte.

Supponiamo, dunque, data un' equazione fratta, cioè un'equazione che abbia fra i suoi termini almeno una frazione algebrica, contenente l'incognita nel denominatore, e trasportiamone tutti i termini a primo membro. Può darsi che con ciò i termini fratti si elidano a vicenda tutti quanti, e allora si ricade su di un'equazione intera. In caso contrario i vari termini dell'equazione si possono ridurre al medesimo denominatore e poi sommare (IV, n. 13); e in tal modo l'equazione data assume la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, \tag{18}$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ denotano due polinomi nella incognita x.

Basta allora ricordare che il quoziente di due numeri è nullo sempre (e soltanto) quando è nullo il dividendo, mentre il divisore è diverso da 0, per riconoscere che *le soluzioni della* (18) *saranno tutte (e sole) quelle soluzioni dell'equazione intera* $A(x) = 0$, *che non sono, nello stesso tempo, soluzioni della* $B(x) = 0$.

Per le applicazioni pratiche è utile riflettere come si ottengano i due termini $A(x)$ e $B(x)$ della frazione algebrica a primo membro della (18). Per fissare le idee si immagini che l'equazione data abbia soltanto due termini, entrambi fratti, e sia, per es.,

$$\frac{M(x)}{N(x)} + \frac{M_1(x)}{N_1(x)} = 0,$$

dove M, N, M_1, N_1 denotano certi quattro polinomi in x.

Riducendo i due termini allo stesso denominatore e sommandoli, si ottiene

$$\frac{M(x)N_1(x) + M_1(x)N(x)}{N(x)N_1(x)} = 0.$$

Il polinomio, che dianzi abbiamo chiamato $A(x)$, è qui

$$M(x)N_1(x) + M_1(x)N(x),$$

ed è precisamente la somma dei prodotti, che si ottengono, moltiplicando i vari termini dell'equazione data per il prodotto dei loro denominatori. Il polinomio, che dianzi abbiamo indicato con $B(x)$ è il prodotto $N(x)N_1(x)$ dei denominatori dei termini dell'equazione data. Analogamente in ogni altro caso.

Abbiamo, dunque, la regola seguente: *Per risolvere un'equazione fratta;* 1) *se ne trasportano tutti i termini a primo membro;* 2) *si moltiplicano ambo i membri per il prodotto dei denominatori dei vari termini;* 3) *si risolve l'equazione intera così ottenuta; e delle soluzioni, cui si perviene in tal modo, si conservano solo quelle, che non annullano il prodotto dei denominatori.*

È chiaro che le operazioni 1) e 2) si possono eseguire anche in ordine inverso, cioè prima la 2) e poi la 1).

13. Per chi conosce le nozioni sulla divisibilità dei polinomi, svolte nei nn. 19-33 del Cap. prec. e, in particolare, possiede il concetto di M. C. D. di due polinomi (V, n. 21) è facile vedere come si possa sempre semplificare un'equazione fratta della forma (18), in modo da essere sicuri che nessuna delle soluzioni dell'equazione $A(x)=0$ renda soddisfatta anche la $B(x)=0$.

Infatti, se la frazione algebrica $\frac{A(x)}{B(x)}$ non è già irreducibile (V, n. 29), si può sempre rendere tale, dividendone ambo i termini per il loro M. C. D. Per semplicità, supponiamo che già la $\frac{A(x)}{B(x)}$ goda di questa proprietà. Ora sappiamo che, affinchè un polinomio si annulli per $x=c$, è necessario e sufficiente che esso sia divisibile per $x-c$ (V, n. 30). Perciò, se accadesse che $A(x)$ e $B(x)$ si annullassero entrambi quando ad x si attribuisce un certo stesso valore c, essi sarebbero tutti e due divisibili per $x-c$, cioè, contro l'ipotesi, non sarebbero primi fra loro.

14. Applichiamo le considerazioni del n. 12 a qualche esempio.

1) $$x+2=\frac{x^2-2x+4}{x-2}.$$

Qui per la x va escluso il valore 2, per il quale il secondo membro non ha senso.

Stabilita questa esclusione, cominciamo col liberare l'equazione dal divisore, moltiplicando ambo i membri per $x-2$. Otteniamo così l'equazione intera

$$(x-2)(x+2)=x^2-2x+4,$$

ossia, essendo (IV, n. 18) $(x-2)(x+2)=x^2-4$,

$$x^2-4=x^2-2x+4$$

e quindi

$$-4=-2x+4.$$

Si tratta qui di un'equazione di 1° grado, che, risolta con la regola del n. 10, dà $x=4$; e poichè questo valore è diverso dal valore 2, per cui si annulla il denominatore $x-2$, è certo che $x=4$ è soluzione anche della equazione data, come, del resto, si verifica direttamente.

2) $$\frac{2x+38}{x+12}+1=\frac{6x+8}{2x+1}.$$

In questo caso, prima di liberare l'equazione dai divisori, bisogna escludere i valori di x, per cui essi si annullano, cioè -12 e $-\frac{1}{2}$. Con questa esclusione, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione data per $(x+12)(2x+1)$. Otteniamo così

$$(2x+38)(2x+1)+(x+12)(2x+1)=(6x+8)(x+12),$$

e successivamente, secondo la solita regola,

$$4x^2+76x+2x+38+2x^2+24x+x+12=6x^2+8x+72x+96,$$
$$6x^2+103x+50=6x^2+80x+96,$$
$$23x=46,$$
$$x=2.$$

3) $$\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x-c}.$$

Esclusi per x i valori a, b, c, moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per il prodotto $(x-a)(x-b)(x-c)$ dei denominatori. Otteniamo

$$a(x-b)(x-c)-b(x-a)(x-c)=(a-b)(x-a)(x-b)$$

e quindi, successivamente,

$$a(x^2-bx-cx+bc)-b(x^2-ax-cx+ac)=(a-b)(x^2-ax-bx+ab),$$
$$-c(a-b)x=-(a-b)(a+b)x+(a-b)ab.$$

Se è $a=b$, quest'equazione, e quindi anche la data, si riduce ad un'identità. Escluso questo caso particolare, si trova, dividendo ambo i membri per $a-b$,

$$-cx=-(a+b)x+ab,$$

ossia

$$(a + b - c)x = ab; \tag{19}$$

e quindi, supposto $a + b - c \gtrless 0$, cioè $c \gtrless a + b$, si ha per l'equazione data la soluzione

$$x = \frac{ab}{a + b - c}.$$

Se poi è $c = a + b$, si riconosce dalla (19) che l'equazione è impossibile o indeterminata, secondo che il prodotto ab è diverso da 0 o nullo.

Problemi di primo grado.

15. Si dice di 1° grado ogni problema, che trattato con l'Algebra, si traduce in equazioni di 1° grado nelle incognite. Ci occuperemo pel momento dei problemi ad una sola incognita; e per la risoluzione di tali problemi cominceremo col dare alcune norme, che varranno poi anche nel caso di più incognite.

Quando si vuol risolvere un problema col sussidio dell'Algebra, bisogna anzitutto *fissare la grandezza, che conviene assumere come incognita.* Spesso l'enunciato stesso del problema suggerisce senza ambiguità quale sia questa incognita; talvolta, invece, vi è una certa libertà di scelta e, in questi casi, non si può essere guidati da criteri generali, ma piuttosto da quella pratica, che si acquista soltanto col lungo esercizio. In ogni caso, se le grandezze in questione sono geometriche o fisiche, è necessario *stabilire in modo preciso quale unità di misura si intenda adottare per l'incognita prescelta,* in relazione con quelle eventualmente indicate dal problema per le grandezze date.

Dopo ciò, indicata l'incognita con una lettera, per es., con x, si scrive la relazione, che, secondo l'enunciato del problema, deve intercedere fra la x e i dati (che, secondo i casi, possono essere assegnati numericamente, o rappresentati da lettere): cioè, come si suol dire, *si mette in equazione il problema.*

Infine l'equazione così ottenuta (che qui supponiamo di 1° grado) *si risolve.* Se i dati sono assegnati numericamente, tali risultano i coefficienti dell'equazione e, quindi anche, la corrispondente soluzione; e, di solito, il numero ottenuto risponde senz'altro al problema. Ma talvolta il significato stesso dell'incognita impone al suo valore qualche limitazione: per es., un numero d'uomini non può essere che intero e positivo (o, meglio, assoluto), un peso non può essere che positivo, l'età di un figlio non può essere che minore di quella del padre, ecc. Se il numero ottenuto, risolvendo l'equazione, non soddisfa a tali limitazioni, va rifiutato, e il problema si dovrà dire *impossibile*, perchè non ammette soluzione.

Se poi i dati sono rappresentati da lettere, risultano espressi per mezzo di lettere anche i coefficienti dell'equazione; ed allora, affinchè quest'equazione ammetta una soluzione (ed una sola), deve essere soddisfatta dai dati, come già si è visto in qualcuno degli esempi dei nn. 11, 14, una limitazione, cioè deve risultare diverso da 0 il coefficiente, che viene assunto dalla x nell'equazione ridotta a forma normale. Ed anche quando si ammette verificata dai dati questa condizione e si è trovata l'espressione letterale della soluzione, può accadere, come si è detto pocanzi, che, in forza del significato stesso della incognita, una tale espressione debba soddisfare a qualche altra condizione (di natura aritmetica o di segno o di disuguaglianza, ecc.), la quale imponga qualche nuova limitazione ai valori delle lettere, che rappresentano i dati. Sono oggetto della cosiddetta *discussione del problema*, la determinazione precisa di tutte queste limitazioni per i dati letterali, e l'esame ordinato e completo di tutti i casi, cui può dar luogo la scelta dei valori numerici di questi dati.

Nei prossimi nn. illustreremo con alcuni esempi di problemi le considerazioni e le norme qui esposte in generale.

16. *Un numero intero* (assoluto) *è composto di due cifre, la cui differenza è* 5; *se si cambiano di posto le due cifre, si ottiene un numero, che è soltanto i* $\frac{3}{8}$ *del primo: trovare questo numero.*

Prendiamo come incognita x la cifra delle unità del primo numero; poichè questo numero deve essere maggiore del secondo (che non è che i $\frac{3}{8}$ di esso), la sua cifra delle decine deve essere $x+5$ (e non $x-5$), cosicchè il numero delle sue unità è $10(x+5)+x$, mentre quello del secondo numero è $10x+(x+5)$, e si deve avere

$$10x+(x+5)=\frac{3}{8}[10(x+5)+x].$$

Risolvendo, secondo la regola del n. 10, quest'equazione di 1° grado, si trova $x=2$, e il numero cercato è 72. Infatti si ha $27=\frac{3}{8}72$.

Si osservi che, anche prima di mettere in equazione il problema, si poteva notare che, in quanto la incognita x denota la cifra delle unità di un numero di due cifre, avente per cifra delle decine $x+5$, non sono ammissibili per la x, in forza del suo stesso significato, che i valori 0 o 1 o 2 o 3 o 4; e qualora poi l'equazione avesse condotto ad un valore di x diverso da questi, il problema sarebbe stato impossibile. Per es., se ci si proponesse il problema analogo al precedente, in cui, in luogo del dato $\frac{3}{8}$, si prefissassero i $\frac{4}{5}$, si sarebbe condotti all'equazione

$$10x+(x+5)=\frac{4}{5}[10(x+5)+x],$$

la quale ammette bensì una soluzione ed una sola, ma questa è data da $x=\frac{175}{11}$ e non ha senso, in relazione al problema proposto, il quale è perciò impossibile.

17. *Un serbatoio d'acqua è munito di due rubinetti di afflusso e di uno scarico. Se chiudendo lo scarico, si tenesse*

aperto soltanto il primo rubinetto, il serbatoio si riempirebbe in 8 ore, e se si tenesse aperto soltanto il secondo rubinetto, si riempirebbe invece in 12 ore. Infine, se il serbatoio fosse pieno e, tenendo chiusi i due rubinetti, si aprisse solo lo scarico, si vuoterebbe in 24 ore. Quante ore occorrono, per riempire il serbatoio, tenendo simultaneamente aperti i due rubinetti e lo scarico?

Prendiamo come incognita x il numero di queste ore, e per comodità di ragionamento indichiamo con c la capacità del serbatoio, per es., in litri, cioè il volume, misurato in litri, dell' acqua, che occorre per riempirlo. Poichè il primo rubinetto riempirebbe da solo il serbatoio in 8 ore cioè verserebbe c litri d' acqua, in un' ora ne versa $\frac{c}{8}$ e quindi in x ore versa $\frac{cx}{8}$ litri. Similmente il secondo rubinetto in x ore versa $\frac{cx}{12}$ litri, mentre lo scarico, nello stesso tempo, ne sottrae $\frac{cx}{24}$; e siccome in capo ad x ore il serbatoio deve risultare pieno si deve avere

$$\frac{cx}{8}+\frac{cx}{12}-\frac{cx}{24}=c,$$

cioè, dividendo ambo i membri per c,

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{12}-\frac{x}{24}=1,$$

Risolvendo quest' equazione si trova $x=6$. Occorrono dunque 6 ore.

Risolviamo lo stesso problema *in generale*, cioè lasciando indeterminati i dati ed indicando, ad es., con p, q, r i tre numeri (di ore) dianzi prefissati come uguali, rispettivamente, ad 8, 12, 24. Naturalmente i tre numeri p, q, r, per il loro stesso significato, vanno supposti positivi. Con lo stesso ragionamento svolto or ora, il problema si traduce nell'equazione

$$\frac{x}{p}+\frac{x}{q}-\frac{x}{r}=1 \quad \text{ossia} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)x=1.$$

Perchè quest'equazione ammetta una soluzione (ed una sola), occorre e basta che il coefficiente della x sia diverso da 0. e sotto questa ipotesi la soluzione è data da

$$x=\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}=\frac{pqr}{qr+rp-pq}.$$

Ma per il significato, che in questo problema ha l'incognita x (misura, in ore, di un certo tempo, a partire dall'istante, in cui si aprono simultaneamente i due rubinetti e lo scarico) il suo valore deve risultare positivo. Si ha dunque che, affinchè il problema ammetta una soluzione (ed una sola) è necessario e sufficiente che i dati rendano soddisfatta la condizione

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}>0 \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{r}.$$

18. *Un professore di educazione fisica, per far eseguire agli alunni della sua scuola, a classi riunite, un saggio di ginnastica collettiva, vuol disporli in quadrato, e ad un primo tentativo gli sopravanzano 11 alunni; prova ad aggiungere a ciascuna riga e a ciascuna colonna un alunno e, per completare il quadrato, gli mancano 14 alunni. Quanti sono gli alunni di quella scuola?*

Indichiamo con x il numero di alunni, che nel primo tentativo sono stati messi in ciascuna riga e in ciascuna colonna del quadrato: il numero totale degli alunni è allora espresso da x^2+11. Nel secondo tentativo è stato aggiunto un alunno a ciascuna riga e a ciascuna colonna, cosicchè il medesimo numero complessivo degli alunni è anche espresso da $(x+1)^2-14$; si deve dunque avere

$$x^2+11=(x+1)^2-14.$$

È questa l'equazione in cui si traduce il problema, e, risolvendola, si trova $x=12$. Gli alunni sono 12^2+11 (ossia 13^2-14) cioè 155.

Consideriamo il problema *in generale*, sostituendo ad 11 e 14 due numeri interi assoluti m ed n quali si vogliono. L'equazione è allora

$$x^2 + m = (x + 1)^2 - n,$$

e, ridotta a forma normale, diventa

$$2x = m + n - 1.$$

Essendo in ogni caso diverso da 0 il coefficiente della x, quest'equazione ammette sempre una soluzione (ed una sola), la quale è data da

$$x = \frac{m + n - 1}{2}.$$

Ma qui per la x, che denota un numero di alunni, non sono ammissibili che valori interi (assoluti). Perciò il problema è possibile sotto la condizione che il numero intero assoluto $m + n - 1$ risulti divisibile per 2, ossia **pari.** Deve dunque essere dispari la somma $m + n$, cioè i due numeri dati m ed n debbono essere uno pari e l'altro dispari.

19. *Si divida il numero* 153 *in due parti, che stiano fra loro come* 4 *sta a* 5.

Indicata con x una delle due parti, l'altra sarà $153 - x$ e si dovrà avere

$$\frac{x}{153 - x} = \frac{4}{5}.$$

Risolvendo quest'equazione, si trova $x = 68$; le due parti, in cui va diviso 153, sono dunque 68 e 85.

Anche in questo caso risolviamo il problema in generale, cioè proponiamoci di dividere un qualsiasi numero (relativo) N in due parti, che stiano fra loro come certi due dati numeri (relativi) m ed n. Si è così condotti all'equazione

$$\frac{x}{N - x} = \frac{m}{n},$$

che, ridotta a forma normale, diventa

$$(m + n)x = mN.$$

Si riconosce così che il problema ammette una soluzione (ed una sola) la quale è data da

$$x = \frac{mN}{m + n},$$

salvo quando sia $m+n=0$, nel qual caso l'equazione è impossibile se è $N \gtrless 0$, indeterminata se è $N=0$. Ed è facile capire la ragione di questi due casi di eccezione. Se è $m+n=0$ vuol dire che i due numeri dati m ed n sono fra loro opposti, cosicchè debbono risultare tali anche le due parti, in cui va diviso il numero dato N; ora se questo N è diverso da zero, non è possibile decomporlo nella somma di due numeri fra loro opposti (la quale risulta sempre nulla), mentre se N è nullo, si può sempre considerare come la somma di un qualsiasi numero e del suo opposto.

Osserviamo infine che anche quando i tre numeri dati N, m ed n siano, come nel caso numerico considerato dapprincipio, tutti e tre interi e positivi, le due parti, in cui risulta diviso N, sono in generale frazionarie; se si vuole che anch'esse siano intere, bisogna prefissare i dati N, m, n in modo che il prodotto mN sia divisibile per $m+n$.

20. *Un levriere ha scovato una lepre. Nel medesimo tempo, in cui il levriere fa 3 salti, la lepre ne fa 4; e 2 salti del levriere valgono quanto 3 di quelli della lepre. Se questa, quand'è scovata, si trova già a 50 suoi salti dal levriere, quanti salti dovrà fare il levriere per raggiungerla?*

Conviene prendere come incognita x non già il numero dei salti richiesto, bensì la sua terza parte; così il numero di salti che dovrà fare il levriere sarà $3x$, mentre $4x$ indicherà il numero di salti, che nello stesso tempo farà la lepre. Ora per semplificare il ragionamento indichiamo per un momento con l la lunghezza, per es., in decimetri, di un salto di lepre. Quella di un salto di levriere (in quanto 2 di questi salti equivalgono a 3 di quelli di lepre) sarà $\frac{3}{2}l$. Lo spazio percorso del levriere in $3x$ salti sarà dunque dato da $\frac{9}{2}lx$, e, siccome il levriere raggiunge in tal modo la lepre, codesto spazio dovrà risultare uguale alla somma del vantaggio che già aveva la lepre (50 suoi salti, cioè $50l$ decimetri) e dello spazio da essa percorso, fuggendo, in $4x$ suoi salti, cioè $4xl$ decimetri. Otteniamo dunque l'equazione

$$\frac{9}{2}lx = (50+4x)l,$$

ossia, dividendo per l ambo[illegible]i membri,

$$\frac{9}{2}x = 50 + 4x.$$

Risolvendo quest' equazione si trova $x = 100$; sono dunque 300 i salti che deve fare il levriere per raggiungere la lepre.

21. *Un reggimento di fanteria esce dalla caserma alle 5 del mattino per una esercitazione di marcia e si avvia alla meta al passo regolamentare di 5 km. all' ora. Dopo un' ora e mezzo, un ciclista viene mandato a portare un ordine al colonnello e corre lungo la stessa strada a 20 km. all' ora. A che ora il ciclista raggiungerà il reggimento?*

Indichiamo con x il tempo, misurato in ore (e frazioni decimali di ora), che trascorre fra l' uscita del reggimento dalla caserma e l' istante in cui esso è raggiunto dal ciclista. In questo intervallo di tempo x il reggimento, che ad ogni ora fa 5 km., ha percorso $5x$ km. Per percorrere la stessa distanza, il ciclista ha a sua disposizione il tempo $x - \frac{3}{2}$ e, poichè ad ogni ora egli percorre 20 km., si deve avere

$$5x = 20\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Risolvendo quest' equazione, si trova $x = 2$. Il ciclista raggiunge il reggimento alle ore 7.

22. *A mezzogiorno un camion parte da un paese A per un altro paese B, che dista da A 115 km., e va a 15 km. all' ora. Un' ora dopo parte da B per A, lungo la stessa strada, un' automobile, che fa 60 km. all' ora. Quando si incontreranno il camion e l' automobile?*

Indichiamo con x il tempo, che passa fra la partenza del camion e il suo incontro con l' automobile, e supponiamolo misurato in ore e frazioni decimali di ora. In questo tempo il camion, che ad ogni ora fa 15 km. percorre, a partire da A, $15x$ km. Poichè l'automobile parte da B un'ora dopo, essa corre soltanto per $x - 1$ ore e, in quanto va a 60 km. all'ora, percorre $60(x - 1)$ km. Siccome x ore dopo il mezzogiorno il camion e l'automobile s'incontrano, vuol dire che la somma delle due distanze percorse, in senso opposto, dall'uno e dall'altra, deve risultare uguale alla distanza fra A e B, cioè a 115 km. Si ha così l'equazione

$$15x + 60(x - 1) = 115,$$

che, risolta, dà $x = 2\frac{1}{3}$. Il camion e l'automobile s'incontrano $2^h 20^m$ dopo la partenza del camion, cioè alle $14^h 20^m$.

23. I due ultimi problemi (e, in un certo senso, anche quello del n. 20) si possono considerare come casi particolari di uno stesso problema generale, che trova molte applicazioni interessanti e che perciò ci proponiamo di studiare. Ma occorre qualche premessa.

Nei problemi precedenti abbiamo parlato di un reggimento, che marcia a 5 km. all'ora, di un ciclista, che corre a 20 km. all'ora, di un camion, che va a 15 km. all'ora, ecc. Questi modi di dire appartengono al linguaggio corrente, ma conviene precisarne bene il senso. Il reggimento, il ciclista, il camion, ecc., su strada piana, procedono di regola in modo che (almeno in media) ad ogni unità di tempo, per es. ad ogni ora, percorrono ciascuno lo stesso cammino. Per ragionare in generale raffiguriamoci la strada come una linea, ad es. come una retta, e il reggimento o il ciclista o il camion ecc. come un punto M, che percorre codesta retta e che diremo genericamente un « punto mobile » o semplicemente « un mobile ». Orbene si dice che un mobile M si muove di *moto uniforme*, se (come nei vari esempi dianzi considerati) percorre ad ogni unità di tempo lo stesso cammino o *spazio*. E in tutti questi casi, si chiama *velocità* del mobile quel numero che misura lo spazio percorso nell'unità di tempo. Naturalmente bisogna fissare quale unità di misura si voglia adottare sia per il tempo che per lo spazio; per es., se si prendono rispettivamente l'ora (h.) e il chilometro (km.), la velocità risulta data in chilometri all'ora o per ora (e si scrive « km./h. »); se invece si prendono il secondo (sec.) ed il metro (m.), la velocità viene espressa in metri al secondo o per secondo (m./sec.), e così via.

Se, per parlare in generale, indichiamo con v la velocità del mobile, lo spazio che esso percorre in 2, 3, 4,... unità di tempo è dato, rispettivamente da $2v$, $3v$, $4v$,...; in un qualsiasi tempo x esso percorre lo spazio vx, cosicchè, se si indica lo spazio con s, si ha fra spazio e tempo la relazione

$$s = vx, \tag{20}$$

che si dice l'*equazione del moto* (uniforme) del mobile considerato.

24. Ma nei problemi per lo più non basta sapere quale sia, in valore assoluto, il cammino percorso dal mobile in un dato tempo, bensì in generale, interessa trovare quale posizione il mobile occupi sulla retta in un generico istante, quando si sappia che esso in un istante dato è passato per una data posizione.

A tal fine bisogna valutare tanto gli spazi come i tempi (e quindi le velocità) con numeri relativi. Immaginiamo, dunque, che la retta, su cui si muove M, sia graduata (I, n. 3), e, per considerare dapprima il caso più semplice, prendiamo come origine O (degli spazi) la data posizione, in cui si sa che M si è trovato in un certo dato istante, e conveniamo di contare i tempi a partire da questo stesso istante (origine dei tempi).

Sulla retta si intende prefissato, ad arbitrio, uno dei due versi come positivo, e può accadere che il mobile M si muova precisamente in questo verso (moto progressivo). In tal caso la velocità, che per definizione, è data dal cammino percorso da M fra l'istante 0 e l'istante 1 (o, ciò che è lo stesso fra gli istanti 1 e 2, o 2 e 3, ecc.) va presa positiva e, se v è il suo valore, l'equazione (20) del n. prec., cioè la

$$s = vx \tag{20}$$

dà senz'altro, ad ogni istante x, la distanza da O, a cui si trova, in quell'istante, il mobile M. Così per il reggimento del n. 21 si ha $s = 5x$, per il camion del n. 22 si ha $s = 15x$.

Anzi, se si immagina che M non parta da O, bensì venga più di lontano, la stessa equazione (20) dà anche la posizione, in cui M si è, istante per istante, trovato prima dell'istante $x = 0$, assunto come origine dei tempi. Infatti è anzitutto chiaro che gli istanti precedenti l'istante 0 vanno indicati con numeri negativi; e, precisamente, l'istante -1 o -2 o -3 ecc. denota quello, che precede l'istante 0 di 1 o 2 o 3 ecc. unità di tempo; ed è altresì manifesto che in codesti istanti il mobile M si trovava alla distanza da O, misurata, rispettivamente, da $-v$ o $-2v$ o $-3v$, ecc. In altre parole, anche per valori negativi del tempo x, sussiste fra spazio e tempo la relazione (20).

Ma può anche darsi che M percorra la retta nel verso negativo (moto retrogrado). In tal caso la velocità, che deve pur sempre misurare il cammino percorso da M fra gli istanti 0 ed 1 (o, ciò, che è lo stesso, fra gli istanti 1 e 2 o 2 e 3, ecc.) va presa negativa; ma, ove si indichi ancora con v questa velocità negativa, seguita manifestamente a valere fra spazio e tempo la stessa relazione (20); per $x > 0$, cioè dopo l'istante 0, vx risulta negativo, cioè M si trova dalla parte negativa di O, mentre per $x < 0$, cioè prima dell'instante 0, M si trova dalla parte positiva di O.

25. Passiamo, dopo ciò, al caso generale, in cui si sa che un punto M, animato di una data velocità v (positiva o negativa, secondo che il moto è progressivo o retrogrado), in un dato istante x_0 (posteriore o anteriore all'istante assunto come origine dei tempi, secondo che è $x_0 > 0$ o $x_0 < 0$) si trova ad una data distanza s_0 da O (e, quindi, dalla parte positiva o negativa di O, secondo che è $s_0 > 0$ o $s_0 < 0$). A quale distanza da O si troverà M in un altro istante qualsiasi x?

Per fissare le idee supponiamo $x > x_0$. Fra l'istante x_0 e l'istante x passa il tempo $x - x_0$, e in questo tempo M percorre il cammino $v(x - x_0)$, che sarà positivo o negativo secondo il segno della velocità v. Ma M è partito dalla distanza s_0 da O, cosicchè, alla fine di codesto tempo $x - x_0$, cioè all'istante x, si troverà alla distanza da O, che si ottiene sommando (algebricamente) ad s_0 il nuovo cammino $v(x - x_0)$. Insomma, l'equazione del moto di M, cioè la relazione fra lo spazio s e il tempo x, sarà data, in questo caso generale, dalla

$$s = v(x - x_0) + s_0. \tag{21}$$

Così, per il ciclista del n. 21 (ove sulla retta, che rappresenta il cammino percorso dal reggimento, si prenda come verso positivo quello di marcia) si ha $s = 20\left(x - \frac{3}{4}\right)$; per l'automobile del n. 22 (ove sulla retta, che rappresenta la strada da A a B, si prenda come senso positivo quello da A verso B) si ha $s = -60(x - 1) + 115$.

Naturalmente la (21), come già la (20), vale sia prima, sia dopo l'istante 0, cioè tanto per valori positivi, quanto per valori negativi del tempo x. E da essa risulta che, nell'istante 0, il mobile M si trova alla distanza da O misurata da $-vx_0 + s_0$: esso è dunque dalla parte positiva o negativa di O secondo che questo numero $-vx_0 + s_0$ è > 0 o < 0. Se poi, per caso, questo numero risulta nullo, vuol dire che nell'istante 0 il mobile si trova precisamente nell'origine O degli spazi. E in quest'ultimo caso, scrivendo la (21) sotto la forma

$$s = vx - vx_0 + s_0$$

e tenendo conto che è $-vx_0 + s_0 = 0$, si riconosce che la (21) si riduce alla (20).

26. Dopo queste premesse, possiamo occuparci del problema generale, al quale accennammo al n. 23.

Su di una retta si muovono di moto uniforme due mobili M ed M' e siano v e v' le rispettive velocità (che naturalmente supponiamo note non solo in valore assoluto, ma anche in segno). *Si conoscano inoltre le posizioni M_0, M_0', che sulla retta occupano, rispettivamente, i due mobili M ed M' in certi due dati istanti* (che possono essere diversi o coincidere). *In quale istante accade che i due mobili occupino sulla retta la stessa posizione?*

Per semplicità adottiamo sulla retta come origine degli spazi s la posizione particolare M_0, prefissata per M, e conveniamo di contare i tempi dall'istante, in cui M si trova in codesta posizione. L'equazione del moto di M è allora (n. 24) la

$$s = vx. \tag{20}$$

Se, in base ai dati, è s_0' la distanza di M_0' dal punto M_0, assunto come origine degli spazi, ed è x_0' l'istante, in cui (rispetto all' origine dei tempi or ora adottata) M' si trova nella posizione M_0', l'equazione del moto di M' è data (n. 25) dalla

$$s = v'(x - x_0') + s_0'. \tag{21'}$$

Per risolvere il problema proposto bisogna trovare quell'istante x, in cui le due espressioni vx e $v'(x - x_0') + s_0'$ assumono lo stesso valore: cioè si è condotti all'equazione

$$vx = v'(x - x_0') + s_0', \tag{22}$$

che è evidentemente di 1° grado. Ridotta a forma normale, essa assume l'aspetto

$$(v - v')x = - v'x_0' + s_0',$$

onde si riconosce che purchè sia $v - v' \gtrless 0$, cioè a patto che i due mobili abbiano velocità diverse, la (22) ammette una soluzione (ed una sola), data da

$$x = \frac{- v'x_0' + s_0'}{v - v'}. \tag{23}$$

È questo l'istante cercato; e se i due mobili percorrono la retta nello stesso senso (come il reggimento e il ciclista del n. 21), cioè se le velocità v e v' sono di ugual segno, si tratta dell'istante, in cui uno dei due mobili *raggiunge* l'altro; se invece i due mobili si muovono in senso contrario (come il camion e l'automobile del n. 22), cioè se v e v' sono di segno opposto, nell'istante (23) i due mobili *s'incontrano*.

Secondo il segno, l'istante (23) segue o precede l'istante 0; e nei problemi concreti, ove l'enunciato imponga qualche limitazione di disuguaglianza all'istante richiesto, può anche darsi che la soluzione (23) dell'equazione non renda soddisfatta tali limitazioni e che perciò il problema risulti impossibile.

27. Dianzi abbiamo escluso il caso $v - v' = 0$, in cui i due mobili hanno la stessa velocità. È facile vedere il perchè dei casi di eccezione che così si presentano.

Sotto l'ipotesi $v - v' = 0$, l'equazione (22) è impossibile o indeterminata, secondo che è $-v'x'_0 + s_0 \gtrless 0$, oppure $-v'x'_0 + s_0' = 0$. Ora si ricordi (n. 25) che $-v'x_0' + s'_0$ è, in forza della (21'), la distanza da M_0, a cui M' si trova nell'istante 0. Se è $-v'x_0' + s_0 \gtrless 0$, vuol dire che nell'istante 0 i due mobili si trovano distanziati l'uno dall'altro; e, siccome si muovono entrambi con la medesima velocità (e, in particolare, nello stesso senso) è chiaro che essi, durante tutto il moto, mantengono sempre la medesima distanza l'uno dall'altro e non possono mai occupare sulla retta la stessa posizione. Se poi è $-v'x'_0 + s_0' = 0$, i due mobili, che nell'istante 0, si trovano entrambi in M_0, e procedono pur sempre alla medesima velocità, si muovono, durante tutto il moto, di conserva, cioè occupano ad ogni istante la stessa posizione.

28. Fra gli esercizi verranno proposti vari problemi del tipo dianzi considerato, e le considerazioni qui esposte varranno, caso per caso, di guida nella risoluzione e nella discussione.

Sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite.

29. Sinora abbiamo studiato soltanto problemi ed equazioni in una sola incognita. Ma vi sono problemi, in cui ci si propone di determinare due o più grandezze non conosciute, e che, perciò, quando si trattano con l'Algebra, conducono ad equazioni in altrettante incognite.

Noi qui ci limiteremo a considerare equazioni in due sole incognite, ma le generalità, che esporremo in questo n., valgono in ogni caso.

Un'equazione in due incognite x e y è un'uguaglianza condizionale della forma

$$A(x, y) = B(x, y), \tag{24}$$

dove $A(x, y)$ e $B(x, y)$ denotano due date espressioni, contenenti x e y. Dicesi *soluzione* della (24) ogni coppia di valori, che sostituiti rispettivamente ad x e y, fanno assumere alle due espressioni $A(x, y)$ e $B(x, y)$ un medesimo valore.

Alle equazioni in due incognite si estende la definizione di equivalenza (n. 4), dicendosi *equivalenti* due equazioni nelle stesse incognite x e y, quando ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, e viceversa.

Si estendono altresì i teoremi dei nn. 5-7; in particolare, si può anche in queste equazioni trasportare un termine da un membro all' altro, purchè gli si cambi segno.

L' equazione (24) si dice *intera*, se sono intere entrambe le espressioni $A(x, y)$ e $B(x, y)$, cioè se esse sono due polinomi in x e y. Si dice invece *fratta*, se in $A(x, y)$ o in $B(x, y)$ o in entrambe compare, come termine, qualche frazione algebrica, contenente a denominatore almeno una delle incognite.

Di un' equazione intera si dice *grado* quello del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportano tutti i termini dell' equazione (e si riducono gli eventuali termini simili).

Nel seguito di questo Capitolo ci limiteremo a considerare equazioni di 1° grado. Una tale equazione si dice ridotta a *forma normale*, quando si sono trasportati a primo membro tutti i termini contenenti le incognite, a secondo tutti i termini noti. Perciò un' equazione di 1° grado in due incognite x e y, quando sia ridotta a forma normale, assume l' aspetto

$$ax + by = c,$$

dove a, b, c denotano tre numeri dati (od anche tre date espressioni letterali, non contenenti le incognite).

30. Prendiamo, ad es., l' equazione (di 1° grado, normale)

$$3x + 2y = 12. \tag{25}$$

Si vede subito che una tale equazione ammette infinite soluzioni. Se, per es., si dà ad x il valore 0, si ottiene per la y l'equazione (in una sola incognita)

$$2y = 12,$$

la cui soluzione è $y = 6$, cosicchè una soluzione della (25) è data da $x = 0$, $y = 6$. Se invece si dà ad x il valore 1, si ha per y l'equazione

$$3 + 2y = 12,$$

che è soddisfatta da $y = \frac{9}{2}$; ed $x = 1$, $y = \frac{9}{2}$ è una nuova soluzione della (25).

Insomma, dato ad arbitrio, un valore alla x, risulta determinato un valore per la y, che si ottiene risolvendo la data equazione, come se fosse, un'equazione nella sola incognita y. Così tutte le soluzioni della (25) sono date dalle coppie di valori, che vengono assunti da

$$x \quad \text{e} \quad y = \frac{12 - 3x}{2},$$

quando ad x si attribuiscono tutti i possibili valori.

Consideriamo, allora, un'altra equazione di 1° grado nelle stesse incognite x e y, per es., la

$$4x - y = 5.$$

Anche questa ammette infinite equazioni; ma possiamo chiederci se le due equazioni considerate ammettano qualche soluzione comune, cioè se esista qualche coppia di valori, che, sostituiti rispettivamente ad x e y nelle due equazioni, le rendano soddisfatte entrambe.

Quando ci si propone di trovare le soluzioni comuni a due equazioni nelle stesse incognite, si dice che « si fa sistema delle due equazioni » od anche che « si fanno coesistere le due equazioni »; e le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni si dicono senz'altro *soluzioni del sistema.*

Risolvere il sistema vuol dire trovarne tutte le possibili soluzioni.

Un sistema si rappresenta di solito, scrivendone le equazioni, l'una sotto l'altra e unendole con una graffa. Così, nel caso delle due equazioni dianzi considerate, si scrive

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - y = 5. \end{cases}$$

31. Come nel caso delle equazioni (n. 4), due sistemi si dicono *equivalenti*, quando tutte le soluzioni del primo soddisfano anche al secondo e, viceversa, ogni soluzione del secondo soddisfa anche al primo.

E per risolvere i sistemi si procede in modo analogo a quello tenuto per le equazioni (nn. 9, 10), cioè si cerca di passare dal sistema dato ad altri sistemi equivalenti, man mano più semplici, fino ad ottenerne uno, che permetta di riconoscerne agevolmente la soluzione (o le soluzioni).

Nel caso dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite si possono seguire tre metodi, che sostanzialmente si equivalgono, e che ci permetteranno di riconoscere che ogni sistema siffatto *in generale* (cioè all'infuori di qualche caso particolare di eccezione) ammette una soluzione ed una sola.

32. *Metodo di sostituzione.* Riprendiamo il sistema del n. 30

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - y = 5. \end{cases} \tag{26}$$

Si tratta di trovare per x e y due valori, che rendano soddisfatte entrambe queste equazioni. Se si tien conto soltanto della prima, le sue soluzioni, come si è visto al n. 30, sono date dalle coppie di valori, che si ottengono da

$$x \quad \text{e} \quad y = \frac{12 - 3x}{2}, \tag{27}$$

attribuendo ad x tutti i possibili valori. Di queste coppie di valori dobbiamo considerare soltanto quelle, che soddisfano anche alla seconda equazione. Ora esprimendo che la coppia di valori (27) soddisfa a questa seconda equazione, cioè sostituendo in essa al posto della y l'espressione

$$\frac{12-3x}{2},$$

si trova l'equazione

$$4x - \frac{12-3x}{2} = 5, \tag{28}$$

la quale contiene la sola incognita x ed è di 1° grado. Essa definisce quel valore di x, per cui le (27) danno una soluzione comune delle due equazioni, cioè una soluzione del sistema. Risolvendo la (28), si trova $x = 2$ e, sostituendo questo valore di x nella seconda delle (27), si ottiene $y = 3$. Il sistema dato ammette dunque la soluzione $x = 2$, $y = 3$; e, in forza dello stesso ragionamento, non ne può ammettere altra.

Il metodo così spiegato si può enunciare con la seguente

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite x ed y col metodo di sostituzione, si risolve una delle due equazioni rispetto ad una delle incognite, per es., la y, come se la x fosse conosciuta, e l'espressione così ottenuta si sostituisce al posto di y nell'altra equazione. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, che, risolta, dà il valore di questa incognita. Quello della y si ottiene sostituendo codesto valore di x nella rispettiva espressione dianzi trovata.*

33. *Metodo di confronto.* Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15, \\ 5x - 4y = 13. \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, si trova che tutte le soluzioni della prima sono date dalle coppie di valori

(29) $$x, \quad y = \frac{15 - 4x}{6},$$

dove ad x si diano tutti i valori possibili. Similmente tutte le soluzioni della seconda equazione sono date dalle coppie di valori

(30) $$x, \quad y = \frac{5x - 13}{4},$$

dove ancora si attribuiscano ad x tutti i possibili valori. Per avere una soluzione del sistema (cioè comune alle due equazioni) bisogna trovare un valore di x tale che faccia assumere lo stesso valore alle due espressioni fornite per la y dalle (29) e (30). Si è così condotti all'equazione

(31) $$\frac{15 - 4x}{6} = \frac{5x - 13}{4},$$

che contiene la sola x ed è di 1° grado. Risolvendola si trova $x = 3$; dopo di che il valore di y si trova ponendo $x = 3$ nell'una o nell'altra delle espressioni di y date dalle (29) e (30). Risulta $y = \frac{1}{2}$, onde il sistema ammette la soluzione $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$, e nessun'altra.

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite col metodo di confronto si risolvono entrambe le equazioni rispetto ad una stessa incognita, per es., rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, e si uguagliano le due espressioni così ottenute per la y. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, la quale, risolta, fornisce il valore di questa incognita. Quello di y si ottiene, sostituendo questo valore di x in una qualsiasi delle due espressioni di y dianzi trovate.*

34. In ognuno dei due metodi precedenti si perviene alla risoluzione del sistema, deducendo da esso una nuova equazione (la (28) nel primo metodo, la (31) nel secondo), che contiene soltanto una delle incognite (la x): questa equazione si dice ottenuta dal sistema *eliminando* l'altra incognita (cioè la y). Il terzo metodo, che ci resta da spiegare, conduce direttamente a questa eliminazione. Ma è necessario premettere una definizione e un teorema, che interessano non soltanto per i sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, di cui qui ci occupiamo, bensì anche per sistemi più generali.

35. Date due equazioni $A=0$ e $A'=0$, si dice *combinazione lineare* di esse ogni equazione della forma $qA+q'A'=0$, dove q e q' denotano due numeri quali si vogliono, non entrambi nulli. Questi due numeri si dicono i *moltiplicatori* della combinazione lineare. Per es., prendendo $q=1$ e $q'=1$ oppure $q=1$ e $q'=-1$, si hanno le due combinazioni lineari

$$A+A'=0 \quad \text{e} \quad A-A'=0,$$

che si dicono ottenute dalle due equazioni date $A=0$ e $A'=0$, « sommandole » o, rispettivamente, « sottraendole membro a membro ».

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema: *Un qualsiasi sistema di due equazioni $A=0$ e $A'=0$ è equivalente ad ogni sistema della forma*

$$A=0, \quad qA+q'A'=0, \tag{32}$$

dove q e q' denotano due numeri quali si vogliono, purchè q' sia diverso da 0.

Infatti ogni soluzione del sistema $A=0$, $A'=0$ fa assumere il valore 0 ad entrambe le espressioni A e A'; perciò essa annulla anche l'espressione $qA+q'A'$, cioè soddisfa al sistema (32). Viceversa, ogni soluzione di questo sistema, annullando insieme le due espressioni A e $qA+q'A'$, fa assumere il valore 0 anche alla $q'A'$ e quindi, essendo per ipotesi $q' \gtrless 0$, alla stessa A'; cioè soddisfa al sistema dato $A = 0$, $A' = 0$.

35. Giova aggiungere una osservazione. Al n. prec. abbiamo considerato un sistema della forma $A = 0$, $A' = 0$, cioè abbiamo supposto che in entrambe le equazioni tutti i termini fossero stati portati a primo membro, mentre nelle equazioni di 1° grado, ridotte a forma normale, i termini noti si lasciano a secondo membro. Ora è facile riconoscere che per formare una combinazione lineare di due equazioni normali non occorre portare i termini noti a primo membro. Invero, supponiamo di avere due equazioni della forma

$$A = c, \quad A' = c',$$

dove c e c' denotano i rispettivi termini noti. Per formarne una combinazione lineare di moltiplicatori q e q', dovremmo, secondo la definizione del n. prec., cominciar col trasportare i termini noti a primo membro e poi considerare l'equazione

$$q(A - c) + q'(A' - c') = 0.$$

Ma sciogliendo le parentesi e ritrasportando il termine noto al secondo membro, quest'ultima equazione si scrive

$$qA + q'A' = qc + q'c',$$

e, come si vede, si può ottenere direttamente, come combinazione lineare delle due equazioni date, sotto la loro forma normale.

36. *Metodo dei coefficienti uguali* o *della combinazione lineare*. Consideriamo il sistema

$$(33) \qquad \begin{cases} 5x + 3y = -3, \\ -2x + 4y = 22. \end{cases}$$

Si è visto or ora che si ottiene un sistema equivalente sostituendo ad una delle due equazioni, per es., alla seconda, una qualsiasi combinazione lineare delle (33), (purchè sia diverso da 0 il moltiplicatore della seconda). Ora si possono sempre scegliere i moltiplicatori in modo che nella nuova equazione, risulti eliminata (cioè venga a mancare) una delle due incognite. Per es., se si vuole eliminare dalle (33) la y, basta moltiplicare ambo i membri della prima equazione per il coefficiente 4 della y nella seconda ed ambo i membri della seconda per il coefficiente 3 della stessa y nella prima, e poi sottrarre membro a membro le equazioni così ottenute. Invero, le due date equazioni, quando se ne moltiplicano ambo i membri, rispettivamente, per i due moltiplicatori indicati, diventano

$$\begin{cases} 4\cdot 5x + 4\cdot 3y = -12, \\ -3\cdot 2x + 3\cdot 4y = 66, \end{cases}$$

e, sottratte membro a membro, danno l'equazione nella sola x

$$26x = -78,$$

che, risolta, dà $x = -3$. Dopo di ciò, attribuendo ad x questo valore in una delle due equazioni (33), per es. nella prima, si trova la

$$-15 + 3y = -3 \quad \text{ossia} \quad 3y = 12,$$

la quale dà $y = 4$.

Del resto a questo valore della y si può giungere anche direttamente, eliminando, in modo analogo, fra le (33) la x: basta moltiplicare ambo i membri della prima di codeste equazioni per 2 e quelli della seconda per 5 (con che i coefficienti della x nelle due equazioni risultano opposti) e poi sommarle membro a membro. Si trova così la

$$26y = 104,$$

da cui risulta appunto $y = 4$.

In pratica, per eseguire comodamente il calcolo, giova scrivere accanto a ciascuna equazione il rispettivo moltiplicatore, disponendo, ad es., l'operazione nel modo seguente

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5x + 3y = -3 \\ 3 & -2x + 4y = 22 \\ \hline - & 20x + 12y = -12 \\ & -6x + 12y = 66 \\ \hline & 26x \qquad = -78 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 5x + 3y = -3 \\ 5 & -2x + 4y = 22 \\ \hline + & 10x + 6y = -6 \\ & -10x + 20x = 110 \\ \hline & 26y = 104 \end{array}$$

o, più semplicemente,

$$\begin{array}{r|l} 4 & 5x + 3y = -3 \\ -3 & -2x + 4y = 22 \\ \hline & 26x \qquad = -78 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 5x + 3y = -3 \\ 5 & -2x + 4y = 22 \\ \hline & 26y = 104 \end{array}$$

Se nelle date equazioni i due cofficienti della incognita, che si vuole eliminare, sono interi e hanno qualche fattore comune, giova scegliere i due moltiplicatori in modo che il valore assoluto comune dei nuovi coefficienti di codesta incognita risulti uguale al minimo multiplo comune dei valori assoluti dei coefficienti primitivi. Per es.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 9x - 6y = 4 \\ 3 & 15x + 8y = 6 \\ \hline & 81x \qquad = 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -5 & 9x - 6y = 4 \\ 3 & 15x + 8y = 6 \\ \hline & 54y = -2 \end{array}$$

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite col metodo dei coefficienti uguali si moltiplicano ambo i membri delle due equazioni per moltiplicatori (diversi da 0) tali, che i coefficienti di una delle incognite, per es., della y, risultino fra loro uguali od opposti. Dopo di ciò, sottraendo o, rispettivamente, sommando membro a membro le due equazioni così ottenute, si perviene ad una equazione, che contiene soltanto la x e, risolta, dà il valore di questa incognita. La y si determina sia sostituendo il valore trovato per la x in una delle date equazioni, sia eliminando da queste, in modo analogo, la x.*

37. Per ciascuno dei sistemi considerati sin qui (nn. 32-36) abbiamo trovato una soluzione (ed una sola); ma si possono anche presentare *casi di impossibilità* e *casi di indeterminazione*.

Prendiamo, ad es., il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ -6x + 8y = 5; \end{cases}$$

e proviamo a risolverlo con uno qualsiasi dei due metodi dianzi indicati, per es., col metodo di confronto (n. 33). Risolvendo entrambe le equazioni rispetto alla y e uguagliando le due espressioni così ottenute, troviamo l' equazione

$$\frac{3x-2}{4} = \frac{6x+5}{8},$$

che liberata dai divisori, diventa

$$6x - 4 = 6x + 5,$$

ed è un' equazione impossibile, in quanto, ridotta a forma normale, assume l' aspetto

$$6x - 6x = 9 \quad \text{ossia} \quad 0 \cdot x = 9.$$

Non esiste, dunque, nessun valore di x, che insieme con un conveniente valore di y, renda soddisfatte le due date equazioni: il sistema è *impossibile.*

E il fatto si spiega facilmente osservando, che se si dividono ambo i membri della seconda equazione per -2, si ottiene l' equazione equivalente

$$3x - 4y = -\frac{5}{2},$$

la quale contraddice alla prima delle date, in quanto richiede che l' espressione $3x - 4y$, la quale per la prima deve assumere il valore 2, risulti, invece, uguale a $-\frac{5}{2}$.

Consideriamo in secondo luogo il sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5, \\ 8x - 12y = -20. \end{cases}$$

Applicando ancora il metodo di confronto, si è condotti all'equazione nella sola x

$$\frac{2x+5}{3}=\frac{8x+20}{12}$$

che, liberata dai divisori, diventa

$$8x+20=8x+20$$

e si riduce ad una identità. Ciò vuol dire che l'incognita x non risulta soggetta ad alcuna condizione; o, in altre parole, ad ogni possibile valore di x si può associare un valore per y, che insieme con esso renda soddisfatto il sistema: il sistema è *indeterminato*. E il fatto risulta evidente, se si osserva che le due equazioni date sono fra loro equivalenti, in quanto la seconda si deduce dalla prima, moltiplicandone ambo i membri per -4.

Discussione dei sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite.

38. Gli esempi dei nn. prec. ci hanno mostrato che per un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite sono possibili vari casi: in generale esso ammette una soluzione (ed una sola); ma può anche non ammetterne nessuna, oppure ammetterne infinite. Qui, discutendo in generale un tale sistema, faremo vedere che questi sono i soli casi possibili, e assegneremo dei criteri, che permettono di decidere, anche senza risolvere il sistema, a quale dei casi esso corrisponda.

Il sistema, ove si immagini ridotto a forma normale e si denotino i coefficienti con lettere, si può scrivere

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c', \end{array}\right.$$

dove a, b, c, a', b', c' rappresentano sei numeri dati (od anche sei espressioni letterali, non contenenti le incognite x, y). Per semplificare la discussione supporremo, che i coefficienti a, b, a', b' delle incognite siano tutti e quattro diversi da 0; e notiamo che, quando si annulla uno di questi coefficienti, il sistema comprende un'equazione in una sola delle incognite, onde risulta facile discuterlo, caso per caso. D'altra parte possiamo aggiungere che i risultati, cui si perviene in questi casi speciali, rientrano in quelli, che qui otterremo, ragionando nel caso generale.

Ammesso, dunque, che nessuno dei coefficienti delle incognite sia nullo, risolviamo il sistema (34) col metodo dei coefficienti uguali e cominciamo con l'eliminare la y, considerando la combinazione lineare delle (34), che ha per moltiplicatori b' e $-b$ (entrambi, per ipotesi, diversi da 0):

$$\begin{array}{r|l} b' & ax + by = c \\ -b & a'x + b'y = c' \\ \hline & (ab' - a'b)x = cb' - c'b \end{array} \tag{35}$$

Affinchè l'equazione nella sola x così ottenuta sia possibile (e determinata) è necessario e sufficiente (n. 10) che sia

$$ab' - a'b \gtrless 0. \tag{36}$$

Esamineremo poi i casi di eccezione, che si presentano quando è

$$ab' - a'b = 0.$$

Qui intanto, supponendo soddisfatta la (36), ricordiamo che il sistema dato è equivalente (n. 35) a quello formato dalla (35) e da una qualsiasi delle (34); perciò il valore di x, che, associato ad un conveniente valore di y, dà una soluzione del sistema, è quello che soddisfa alla (35), cioè

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}. \tag{37}$$

Per trovare il corrispondente valore di y si potrebbe tener conto di una qualsiasi delle equazioni date (34); ma è più semplice eliminare da esse la x. Troviamo così

$$\begin{array}{r|l} -a' & ax + by = c, \\ a & a'x + b'y = c', \\ \hline & (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{array} \tag{35'}$$

L'equazione nella sola y, che così otteniamo, ha, come coefficiente della incognita y, la stessa espressione $ab' - a'b$, che abbiamo trovato nella (35), come coefficiente della incognita x. Perciò sotto l'ipotesi (36), la (35') è anch'essa possibile (e determinata); e, ragionando come poc'anzi, si riconosce che la sua soluzione, cioè

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \tag{38}$$

dà il valore di y, che insieme col valore (37) di x rende soddisfatto il sistema.

Concludiamo, dunque, che sotto l'ipotesi (36), il sistema (34) ammette una soluzione (ed una sola), data dalle formule (37), (38).

39. Passiamo al caso dianzi escluso

$$ab' - a'b = 0.$$

Sotto questa ipotesi, l'equazione

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \tag{35}$$

che, come si è visto al n. prec., si ottiene dalle date, eliminando la y, è (n. 10) impossibile o indeterminata, secondo che $cb' - c'b$ è diverso da 0 o nullo.

Ma il sistema dato è, anche qui, equivalente (n. 35) a quello formato dalla (35) e da una qualsiasi delle (34), per es. la prima. Perciò, quando si ha simultaneamente

$$ab' - a'b = 0, \quad cb' - c'b \gtrless 0 \tag{39}$$

non esiste nessun valore di x, che insieme con un conveniente valore di y, renda soddisfatto il sistema (34), il quale risulta *impossibile*. Se invece si ha insieme

$$ab' - a'b = 0, \quad cb' - c'b = 0, \tag{40}$$

l'incognita x non è soggetta ad alcuna condizione ed il sistema (34) ammette come soluzioni tutte quelle della sua prima equazione, cioè tutte le coppie di valori di

$$x, \quad y = \frac{c - ax}{b},$$

dove ad x si attribuiscano tutti i possibili valori.

Ma qui nasce spontanea una domanda: come può succedere che tutte le soluzioni della prima delle equazioni (34) rendano senz'altro soddisfatta anche la seconda?

Per rispondere a questa domanda e, al tempo stesso, per chiarire la ragione del caso d'impossibilità, che si presenta quando si verificano le condizioni (39), bisogna esaminare in modo più preciso le (39) e (40). La condizione $ab' - a'b = 0$ si può anche scrivere $ab' = a'b$ o (in quanto a e b si sono supposti diversi da 0)

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

cosicchè, indicando con k il valore comune di questi due rapporti, si ha

$$\frac{a'}{a} = k, \quad \frac{b'}{b} = k \tag{41}$$

e quindi

(42) $$a' = ak, \quad b' = bk.$$

Perciò la seconda delle equazioni (34) si può scrivere

$$akx + bky = c',$$

ossia (in quanto k, insieme con a' e b', è diverso da 0)

$$ax + by = \frac{c'}{k},$$

e il sistema dato assume l'aspetto

(34′) $$\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = \dfrac{c'}{k}. \end{cases}$$

Ciò premesso, riprendiamo il caso d'impossibilità, che si presenta quando si verificano le condizioni (39). La seconda di esse si può scrivere

$$c \gtrless c' \frac{b}{b'},$$

od anche, in forza della seconda delle (41),

$$c \gtrless \frac{c'}{k},$$

ed allora si comprende bene come il sistema (34′), cioè lo stesso sistema dato, sia impossibile: mentre la prima delle due equazioni richiede che si trovino due valori di x e y, i quali facciano assumere all'espressione $ax + by$ il valore c, la seconda impone che la medesima espressione, per gli stessi valori di x e y, prenda il valore $\frac{c'}{k}$, diverso da c.

Se, invece, sussistono le (40), che caratterizzano il caso d'indeterminazione, dalla seconda di esse risulta

$$c = c' \frac{b}{b'},$$

ossia, per la seconda delle (41),

$$c = \frac{c'}{k},$$

e le due equazioni, che costituiscono il sistema (34′) coincidono. Insomma nel caso d'indeterminazione le due equazioni del sistema sono fra loro equivalenti.

40. Prima di riassumere, in un enunciato, i risultati della precedente discussione, giova aggiungere un' osservazione.

Si è visto al n. prec. che quando sussistono le (40), si ha. per un certo numero k (diverso da 0)

$$a' = ak, \quad b' = bk, \quad c' = ck.$$

Perciò in tal caso il binomio $ac' - a'c$, da noi incontrato insieme con $ab' - a'b$ e $cb' - c'b$, assume il valore

$$ack - akc,$$

cioè si annulla anch' esso. Viceversa, se insieme, con la $ab' - a'b = 0$, (n. prec.) che implica $a' = ak$, $b' = bk$, sussiste la $ac' - a'c = 0$, da quest' ultima si deduce

$$c' = c\frac{a'}{a} \quad \text{ossia} \quad c' = ck,$$

e si riconosce che il binomio $cb' - c'b$, riducendosi a

$$cbk - ckb,$$

si annulla anch' esso. Abbiamo dunque che *quando i quattro coefficienti* a, b, a', b' (supposti tutti diversi da 0) *verificano la condizione*

$$ab' - a'b = 0$$

e si considerano anche i termini noti c *e* c', *sono possibili per i binomi*

$$cb' - c'b, \quad ac' - a'c$$

soltanto due casi: o sono entrambi diversi da zero o si annullano tutti e due.

Se allora, riprendiamo le due equazioni (35), (35') n. 38, che dal sistema (34) si deducono, eliminando rispettivamente la y e la x, cioè le

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \quad (ab' - a'b)y = ac' - a'c,$$

vediamo, che, nei casi di eccezione, caratterizzati dalla condizione $ab' - ab' = 0$, esse sono o *tutte e due impossibili* o *tutte e due indeterminate.*

41. Possiamo oramai riassumere la discussione precedente nel seguente enunciato: *Sia dato un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite e sia ridotto a forma normale:*

$$(34) \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

*Se il binomio $ab' - a'b$ è diverso da zero, il sistema ammette **una** soluzione (ed una sola), data da*

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Se invece il binomio $ab' - a'b$ è nullo, sono possibili due casi: i due binomi $cb' - c'b$ e $ac' - a'c$, che compaiono nelle formule precedenti, come numeratori, sono entrambi diversi da zero oppure sono entrambi nulli. Nel primo caso il sistema è impossibile, nel secondo è indeterminato ed ammette tutte (e sole) *le soluzioni di una qualsiasi delle sue due equazioni* (fra loro equivalenti).

42. Le formule risolutive dianzi indicate si ricordano più facilmente, usando una particolare notazione (che si può estendere al caso di equazioni di 1° grado in quante si vogliono incognite e che assume perciò in matematica una notevole importanza). I binomi $ab' - a'b$, $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, che si presentano in codeste formule, si chiamano ciascuno (al pari di ogni binomio analogo) il *determinante* dei quattro numeri che vi compaiono, e si denotano, rispettivamente, con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Insomma, dati quattro numeri, disposti in quadrato, si dice loro *determinante* il numero, che si ottiene sottraendo dal prodotto dei due numeri, posti diagonalmente a sinistra in alto e a destra in basso, il prodotto degli altri due.

Possiamo allora dire che il sistema (34) è possibile (e determinato) quando è diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

dei coefficienti delle incognite (presi nella disposizione, in cui si presentano nelle due equazioni, ridotte a forma normale e ordinate nello stesso modo rispetto ad x e y). E in tal caso la soluzione è data da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

In entrambe queste espressioni il denominatore è il determinante dei coefficienti delle incognite; e in ciascuna di esse il numeratore è il determinante, che da quello dei coefficienti si ottiene, sostituendo ai coefficienti della incognita, che si considera, i rispettivi termini noti (portati a secondo membro).

Problemi di primo grado in due incognite.

43. *Un numero di due cifre è eguale a 7 volte la somma delle sue cifre; mentre, se da esso si sottrae 36, si ottiene il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso. Qual'è quel numero?*

Indichiamo, nel numero cercato, con x la cifra delle decine, con y quella delle unità, talchè il numero valga $10x + y$ unità. Esprimendo che questo numero, è uguale a 7 volte la somma $x + y$ delle sue cifre e che, d'altra parte, sottraendo da esso 36, si ottiene $10y + x$, si è condotti alle due equazioni

$$10x + y = 7(x + y), \quad 10x + y - 36 = 10y + x,$$

che, ridotte a forma normale, danno il sistema

$$\left\{\begin{aligned} 3x - 6y &= 0, \\ 9x - 9y &= 36, \end{aligned}\right.$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y &= 0, \\ x - y &= 4. \end{aligned}\right.$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione la prima si trova $y = 4$; e, quindi, in base alla prima equazione, $x = 8$. Il numero cercato è 84.

44. *Trovare i due termini di una frazione, la quale si riduca a* $\frac{5}{7}$ *quando se ne aumenta il numeratore di* 10, *a* $\frac{11}{13}$ *quando se ne diminuisce il denominatore di* 26.

Denotando, rispettivamente, con x e y il numeratore e il denominatore della frazione cercata, si deve avere

$$\frac{x + 10}{y} = \frac{5}{7}, \quad \frac{x}{y - 26} = \frac{11}{13}.$$

Liberando le due equazioni dai divisori (e, quindi, escludendo per y i valori 0 e 26) si trovano le due equazioni

$$7x + 70 = 5y, \quad 13x = 11(y - 26),$$

ossia

$$\begin{cases} 7x - 5y = -70, \\ 13x - 11y = -286. \end{cases}$$

Con uno qualsiasi dei metodi di risoluzione indicati (nn. 32, 33, 36) si ottiene $x = 55$, $y = 91$. La frazione cercata è dunque $\frac{55}{91}$.

45. *Vien divisa in parti uguali fra un certo numero di operai una gratificazione. Se essi fossero 6 di più, riceverebbero ciascuno 10 lire di meno; se fossero 3 di meno riceverebbero ciascuno 10 lire di più. Quanti sono questi operai? Quanto ricevono ciascuno?*

Denotiamo con x il numero di operai, con y la somma, in lire, che riceve ciascuno di essi. In forza dell'enunciato del problema, abbiamo fra le x ed y le due equazioni

$$(x + 6)(y - 10) = xy, \quad (x - 3)(y + 10) = xy$$

ossia

$$xy + 6y - 10x - 60 = xy, \quad xy - 3y + 10x - 30 = xy,$$

o, infine, in forma normale

$$\begin{cases} -10x + 6y = 60, \\ 10x - 3y = 30. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni, troviamo

$$3y = 90 \quad \text{e quindi} \quad y = 30;$$

onde, in base ad una qualsiasi delle due equazioni, otteniamo $x = 12$. Gli operai sono, dunque, 12 e ricevono ciascuno L. 30.

46. *Un treno, partito dalla città A verso la città B, è costretto, dopo 45 minuti di corsa regolare, ad arrestarsi per un improvviso guasto alla locomotiva, e resta fermo 30 minuti. Riparato il guasto, riprende la corsa con una velocità che è i $\frac{9}{10}$ di quella che aveva prima dell'arresto, e arriva a B con 39 minuti di ritardo. Se il treno avesse dovuto arrestarsi (sempre per 30 minuti) dopo altri 27 km. di corsa regolare, sarebbe arrivato a B con 36 minuti di ritardo. Qual'è la distanza fra A e B? Qual'era la velocità del treno prima dell'arresto?*

Chiamiamo x questa velocità incognita, misurata in km./h., e y la distanza fra A e B, misurata in km. Perciò il treno avrebbe dovuto impiegare nel suo viaggio da A a B $\frac{y}{x}$ ore (dove la divisione per x è certamente lecita, in quanto x per il suo significato non può essere nulla). Poichè si è arrestato dopo 45 minuti di viaggio (cioè $\frac{3}{4}$ d'ora), aveva già percorso $\frac{3}{4}x$ km., onde gliene rimanevano ancora da percorrere $y - \frac{3}{4}x$; e siccome questo tratto è stato percorso alla velocità di $\frac{9}{10}x$ km./h., il tempo impiegato a percorrerlo è stato di ore

$$\frac{y - \frac{3}{4}x}{\frac{9}{10}x} = \frac{20y - 15x}{18x}.$$

Questo tempo, aumentato dei 45 minuti di corsa regolare e dei 30 minuti di arresto, cioè, in tutto, di $\frac{5}{4}$ d'ora, deve dare il tempo $\frac{y}{x}$ (che il treno avrebbe dovuto impiegare da A a B), aumentato dei 39 minuti di ritardo, cioè, in ore, di $\frac{13}{20}$. Otteniamo così intanto l'equazione

$$\frac{20y - 15x}{18x} + \frac{5}{4} = \frac{y}{x} + \frac{13}{20}.$$

Se invece il treno avesse dovuto arrestarsi dopo altri 27 km., il tratto di viaggio residuo sarebbe stato di km. $y - \frac{3}{4}x - 27$: e a percorrere il tratto di corsa regolare il treno avrebbe impiegato ore $\frac{3}{4} + \frac{27}{x}$. Poichè il ritardo sarebbe stato di 36 minuti, cioè di $\frac{3}{5}$ di ora, si è analogamente condotti alla seconda equazione

$$\frac{20y - 15x - 540}{18x} + \frac{5}{4} + \frac{27}{x} = \frac{y}{x} + \frac{3}{5}.$$

Liberando le due equazioni dai divisori e riducendole a forma normale, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 10y - 21x = 0, \\ 20y - 33x = 540; \end{cases}$$

che, risolto con uno qualsiasi dei metodi indicati (nn. 32, 33, 36), dà $x = 60$, $y = 126$. Si trova dunque che la distanza fra A e B è di km. 126 e che, prima dell'arresto, il treno correva a 60 km./h. (dopo, a 54 km./h.).

Cenni sui sistemi di equazioni di primo grado in più di due incognite.

47. I metodi appresi ai nn. 32, 33, 36 per la risoluzione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, servono anche a risolvere i sistemi analoghi di quante si vogliono equazioni di 1° grado in altrettante incognite.

Ci limiteremo qui a qualche considerazione sui sistemi di tre equazioni di 1° grado in tre incognite x, y, z. Per risolvere un tale sistema, si può procedere nel modo seguente. Da due delle equazioni date, per es.

dalle prime due, si deduce, con uno qualsiasi dei metodi dei nn. 32. 33, 36, un'equazione che contenga soltanto due delle incognite, per es. x e y (cioè si elimina la z); e, similmente, si deduce un'altra equazione che contenga solo x e y, partendo, anzichè dalle due prime equazioni del sistema, dalla terza e da una delle altre due. Risolvendo il sistema delle due equazioni in x e y, così ottenute, si trovano i valori di queste due incognite; e basta sostituire codesti valori in una qualsiasi delle equazioni del sistema, per avere un'equazione nella sola z. la quale permette di trovare il valore di questa terza incognita.

In generale un tale sistema ammette *una soluzione* (ed una sola): ma naturalmente possono anche qui presentarsi *casi di impossibilità* o *di indeterminazione*: ma di tali eventualità ci riserviamo di indicare qualche esempio negli Esercizi, e qui ci accontenteremo di applicare il procedimento dianzi accennato a due sistemi, aventi effettivamente una soluzione (ed una sola).

48. Prendiamo, per es., il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -2, \\ 3x + 4y - 2z = 16, \\ 2x - y + 3z = 9. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro dalla seconda equazione, moltiplicata per 2, la prima troviamo la

$$5x + 6y = 34;$$

e similmente, sommando membro a membro alla prima equazione, moltiplicata per 3, la terza, moltiplicata per 4, otteniamo la

$$11x + 2y = 30.$$

Risolvendo il sistema in x e y, formato da queste due ultime equazioni, troviamo $x = 2$, $y = 4$. Sostituendo questi valori nella seconda delle equazioni date, perveniamo all'equazione nella sola z

$$6 + 16 - 2z = 16$$

da cui risulta $z = 3$. Il sistema dato ammette, dunque, la soluzione

$$x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3.$$

49. Proponiamoci il problema seguente: *Si ha una somma di L. 745, costituita di monete d'argento da 5, 10 e 20 lire. Il numero complessivo delle monete da 5 e 20 lire è inferiore di 1 al doppio di quello delle monete da 10 lire, mentre il numero complessivo delle monete da 10 e*

20 lire supera di 2 quello delle monete da 5 lire. Trovare il numero delle monete di ciascuna specie.

Indichiamo con x, y, z i numeri delle monete da 5, 10, 20 lire rispettivamente. Poichè l'ammontare della somma è di L. 745, dev'essere anzitutto

$$5x + 10y + 20z = 745.$$

D'altra parte, in quanto il numero complessivo $x + z$ delle monete da 5 e 20 lire deve essere inferiore di 1 al doppio $2y$ del numero delle monete da 10 lire, risulta

$$x + z = 2y - 1.$$

Infine, dovendo il numero complessivo $y + z$ delle monete da 10 e 20 lire superare di 2 il numero x delle monete da 5 lire, si ha

$$y + z = x + 2.$$

Dividendo ambo i membri della prima equazione per 5 e riducendo anche le altre due a forma normale si ottiene il sistema

$$(43) \qquad \begin{cases} x + 2y + 4z = 149, \\ x - 2y + z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita z basta sommare membro a membro alla prima equazione la terza, moltiplicata per 4, e poi sommare membro a membro la seconda e la terza equazione. Si perviene così al sistema in x e y

$$\begin{cases} 5x - 2y = 141, \\ 2x - 3y = -3, \end{cases}$$

che, risolto con uno qualsiasi dei metodi dei nn. 32, 33, 36, dà $x = 39$, $y = 27$; dopo di che, sostituendo questi valori di x e y in una delle equazioni del sistema (43), per es., nella terza, si trova $z = 14$. Si conclude dunque che le monete da 5, 10, 20 lire sono, rispettivamente, 39, 27, 14.

ESERCIZI

Capitolo I

1. Calcolare:

$$[+17]+[-9],\quad [-13]+[+8],\quad [-16]+[-12],$$

$$\left[+\frac{1}{5}\right]+\left[-\frac{1}{6}\right],\quad \left[-\frac{3}{4}\right]+\left[+\frac{13}{6}\right],\quad [-0{,}25]+[-2{,}75],$$

$$[+35]+[-28]+[-83],\quad [-30]+[+19]+[-6],$$

$$\left[-\frac{3}{5}\right]+\left[+\frac{2}{7}\right]+\left[-\frac{4}{15}\right],\quad [+23{,}2]+[-37{,}9]+[-12{,}4].$$

2. Calcolare:

$$[+19]-[-13],\quad [-72]-[+28],\quad [-35]-[-48],$$

$$\left[+\frac{22}{35}\right]-\left[-\frac{13}{14}\right],\quad \left[-\frac{3}{4}\right]-\left[+\frac{5}{12}\right],\quad \left[-\frac{8}{9}\right]-\left[-\frac{7}{24}\right],$$

$$[+236{,}25]-[-173{,}75],\quad [-83{,}2]-[+49{,}7],\quad [-38{,}5]-[-63{,}7].$$

3. Un termometro segna -13°. La sua temperatura viene anzitutto innalzata di 17° e poi si abbassa di 1° ad ogni 5 minuti. Quale temperatura segnerà dopo un quarto d'ora? Dopo quanto tempo segnerà -4°?

4. Tenendo conto che la longitudine del meridiano di Greenwich, rispetto a quello di Roma, è $-12^\circ 27'$, calcolare le longitudini rispetto al meridiano di Greenwich delle città indicate a p. 3. Similmente calcolare le longitudini di quelle medesime città, rispetto al meridiano dell'Etna, tenendo conto che la longitudine di questo meridiano rispetto a quello di Roma è $+2^\circ 31'$.

5. Calcolare:

$$[+25]+[-38]-[-45]-[+84],$$

$$\left[-\frac{2}{3}\right]-\left[+\frac{4}{15}\right]+\left[-\frac{7}{10}\right]-\left[-\frac{8}{9}\right],$$

$$[-42]-([+18]-[-27]+[-36]),$$

$$\left[-\frac{88}{105}\right]-\left(\left[-\frac{2}{7}\right]-\left[-\frac{4}{35}\right]-\left[+\frac{2}{3}\right]\right).$$

6. Calcolare:

$$[+23]\times[-8],\quad [-35]\times[+9],\quad [-23]\times[-12],$$

$$\left[+\frac{2}{3}\right]\times\left[-\frac{4}{5}\right],\quad \left[-\frac{12}{21}\right]\times\left[+\frac{35}{36}\right],\quad \left[-\frac{7}{8}\right]\times\left[-\frac{4}{21}\right],$$

$$[+3{,}23]\times[-6{,}12],\quad [-4{,}3]\times[+5{,}2],\quad [-7{,}4]\times[4{,}2].$$

7. Calcolare:

$$[-12]-[-4]\times([+8]-[-4]+[+15]),$$
$$([+25]-[-18])\times([-18]+[-12]),$$
$$\left(\left[-\frac{1}{3}\right]-\left[-\frac{1}{2}\right]\right)\times\left(\left[+\frac{1}{7}\right]-\left[+\frac{1}{8}\right]\right),$$
$$([+0{,}3]+[-2{,}8])\times([-3{,}4]-[-7{,}6]).$$

8. Calcolare:

$$[+12]:[-4],\quad [-18]:[+12],\quad [-86]:[-64],$$
$$\left[-\frac{4}{5}\right]:\left[+\frac{3}{8}\right],\quad \left[-\frac{7}{9}\right]:\left[+\frac{3}{14}\right],\quad \left[-\frac{12}{25}\right]:\left[-\frac{5}{4}\right],$$
$$[+17{,}52]:[-24],\quad [-4{,}9]:[+3{,}5],\quad [-10{,}89]:[-0{,}99].$$

9. Calcolare:

$$7-13+5,\quad -2{,}012+4{,}345-3{,}128-0{,}024,\quad \frac{1}{3}-\frac{5}{4}+\frac{3}{8},$$
$$15-(21-38)-32,\quad -6-\{12-(24-36)\},$$
$$8\times(-5),\quad \left(-\frac{2}{7}\right)\times 9,\quad (-9{,}5)\times(-4{,}7),$$
$$\frac{8{,}5}{-6{,}4},\quad \frac{-7{,}2}{2{,}5},\quad \frac{-\frac{16}{25}}{-\frac{5}{4}},$$
$$\left(2-\frac{3}{4}-5\right):\frac{-4}{5}+(3-11)\frac{-3}{4},$$
$$\left[\left(3-7-\frac{1}{2}\right):\frac{-3}{-4}-\left(-3+\frac{2}{3}+4\right)\frac{-3}{5}\right]:\frac{-1}{4}.$$

10. Quali sono i valori approssimati per eccesso, con due cifre decimali esatte, di

$$-\frac{7{,}5}{9{,}3},\quad \frac{-8{,}24}{-5{,}4}?$$

Capitolo II

11. Calcolare il valore assunto da ciascuna delle seguenti espressioni, quando si prenda

$$a=1,\quad b=-2,\quad c=3,\quad d=-4,\quad e=5,\quad f=-6,$$

oppure

$$a=-\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{4},\quad c=-\frac{3}{5},\quad d=-\frac{1}{2},\quad e=2,\quad f=-1:$$

1. $6a-2b-3c+d$, 2. $-4a-b+7c-2d$,

3. $7ab-3cd+4ef$, 4. $-8abc+bcd-3cde-2def$,

5. $\frac{4a}{b} - \frac{9b}{c} + \frac{7c}{d} - \frac{d}{f}$, 6. $\frac{12a}{bc} - \frac{b}{3ed} + \frac{3c}{de} - \frac{10e}{af}$.

7. $\frac{2a-3b}{c} - \frac{4b+c}{d} + \frac{2d-e}{2f}$, 8. $\frac{a-b+c}{-d+e-f}$,

9. $\frac{a+c}{c-a} - \frac{b+d}{d-b} + \frac{d+f}{f-d}$, 10. $\frac{a-b+c-d}{c-d+e-f}$.

12. Si sciolgano le parentesi nelle seguenti espressioni; e si tenga presente che, quando, come nelle espressioni 3-9, si hanno più coppie di parentesi, l'una dentro l'altra, sarà di regola opportuno che il principiante, per evitare errori, cominci dallo sciogliere le parentesi interne, poi quelle prossime a queste e così via, fino ad arrivare alle parentesi esterne:

1. $a - b + (-c + d - e)$, 3, $a - b - (c + d - e)$,
3. $a - \{ b + (c - d) \}$, 4. $a - \{ -b - (c - d) \}$,
5. $a - \{ b + [c - (d - e)] \}$. 6. $a - \{ b - [c + (d - e)] \}$,
7. $a - \{ a - [a - (a - 1)] \}$, 8. $a - \{ a + [a - (a + 1)] \}$,
9. $(a + b)(c - d)$, 10. $(a - b)(c - d)$,
11. $(a - b + c)(d + e - f)$, 12. $(a - b)(c + d)(e - f)$.

13. Giuoco. Pensa un numero, raddoppialo, aggiungi 8, dividi per 2, sottrai il numero pensato; avrai 4 (¹). Perchè?

14. Giuoco. Pensa un numero, moltiplica per 2, aggiungi 5, moltiplica per 5, aggiungi 10 e moltiplica per 10, e dimmi il risultato. Se da questo sottraggo 350 e divido il nuovo risultato per 100, ho il numero pensato. Perchè? Questo giuoco si trova nel *De divinationibus* di Leonardo da Vinci.

15. Giuoco. Scrivi un numero (intero assoluto) di tre cifre decrescenti di 1 per volta; capovolgi; fa la differenza fra i due numeri. Avrai 198. Perchè? [Il numero, indicando con a una delle cifre da 1, a 7, si può scrivere $100(a+2) + 10(a+1) + a$, ecc.].

16. Giuoco. Scrivi un numero (intero assoluto) di tre cifre, di cui la prima superi l'ultima almeno di 2 e l'ultima sia differente da 0; inverti l'ordine delle cifre, fa la differenza dei due numeri, e a questa differenza aggiungi la medesima con le cifre invertite. Troverai 1089. Perchè? [Se a, b, c sono le cifre del numero scritto (con $a > c + 1 > 1$), la differenza fra codesto numero e quello invertito è $99(a - c)$. Bisogna invertire questo numero che, avendosi $1 < a - c < 8$, è certamente di tre cifre; e per far questo è necessario trovarne le tre cifre. A tal fine

---

(¹) Questo giuoco e i tre seguenti sono tolti dall'interessante e divertente opuscolo di G. Peano, *Giuochi di Aritmetica e problemi interessanti*, Torino, G. B. Paravia & C.

basta scriverlo $100(a-c)-(a-c)=100(a-c-1)+100-(a-c)=$ $=100(a-c-1)+9\cdot 10+10-a+c$: la cifra delle centinaia è $a-c-1$, quella delle diecine è 9, quella delle unità è $10-a+c$; ecc.].

Capitolo III

17. Calcolare i valori di a^2 e a^3 per $a=-3$ o $a=-\frac{2}{7}$ o $a=-6{,}5$.

18. Eseguire le operazioni indicate nelle seguenti espressioni:

$$a^3a^4,\quad ((a^2)^3)^4,\quad \frac{a^n}{a},\quad \frac{a^2}{a^n},\quad \frac{a^{n+3}}{a^3},\quad \frac{a^{n+3}}{a^n},\quad \frac{a^{n+1}}{a^{n-1}},\quad \frac{a^{2n}}{a^{n-2}},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 b^2,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{c}\right)^2,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^3,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^5:\left(\frac{b}{c}\right)^3.$$

19. Scrivere sotto forma di prodotti di potenze (ad esponente relativo) le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3,\quad \frac{a^2}{b^3}\,\frac{c}{d^4},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2:\left(\frac{c}{d}\right)^5,$$
$$(a^4b^{-3})^{-2},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-3},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{c}\right)^{-4},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^5:\left(\frac{c}{d}\right)^{-2}.$$

Capitolo IV

20. Scrivere sotto forma ridotta i seguenti monomi:

$$a\,\frac{1}{5}\,ba3c,\quad -ab^3 0{,}5c\left(-\frac{1}{2}\right)b(-a^2),\quad \frac{15}{28}\,b^2\left(-\frac{7}{3}\right)(-a)^3\left(-\frac{4}{5}\right)c.$$

21. Quali sono i gradi rispetto alle singole lettere e i gradi totali dei seguenti monomi?

$$\frac{2}{7}\,b\,\frac{21}{5}\,(-c^2)\,a\,(-b)^2\,a^3,\quad 0{,}2ab0{,}3c0{,}1cb,\quad -a\left(\frac{3}{4}\right)^2 b^2\left(-\frac{3}{4}\right)c^4a.$$

22. Sommare i monomi:

1. $3a,\quad -a,\quad 5a,\quad -4a,$
2. $0{,}5a,\quad -\frac{3}{4}a,\quad 0{,}75a,\quad -\frac{1}{2}a,$
3. $\frac{1}{3}a,\quad \frac{2}{5}b,\quad -\frac{7}{15}b,\quad -\frac{4}{15}a,$
4. $-2a^2b,\quad 7ab^2,\quad 5ab^2,\quad -4ab^2.$

23. Moltiplicare i monomi:

1. $-3a,\quad \frac{1}{15}b,$
2. $3ab^2,\quad -2ab,\quad 4b^2,$
3. $\frac{1}{3}a^2b,\quad -\frac{2}{5}ab^3c,\quad \frac{5}{4}b^2c^2,$
4. $0{,}3ab,\quad -0{,}04bc,\quad 2{,}5ac.$

24. Scrivere sotto forma ridotta i monomi:

$$(2a^3b^4c)^2, \quad \left(-\frac{3}{4}a^3b^2\right)^4, \quad (0{,}7ab^2c^5)^3.$$

25. Dividere:

1. $6a^3bc^2$ per $-2abc$, 2. $-\frac{2}{7}ab^4c^3$ per $5ab^2c$,

3. $3a^2b^3c$ per $-\frac{1}{9}ab^2c$, 4. $0{,}06a^4b^2c^3$ per $0{,}3a^2b^2c^2$.

26. Semplificare le frazioni algebriche:

$$\frac{-8a^5b^2c^3}{4a^3b^4c^3}, \quad \frac{\frac{1}{3}a^2b^4c}{\frac{3}{2}a^4bc^5}, \quad \frac{-a^3bc^2}{0{,}25a^5b^2c^3}.$$

27. Sommare i polinomi seguenti, riducendo, caso per caso, gli eventuali termini simili:

1. $3a-2b, \quad -4a+5b,$
2. $5a-3b+c, \quad b-3a-3c, \quad 2c-a+2b.$
3. $4a^2-3b^2, \quad 2a^2-5b^2, \quad b^2-a^2, \quad 4b^2-2a^2,$
4. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \quad 2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^3, \quad a^3-ab^2+2b^3,$
5. $a^3-2a^2b+ab^2+b^3, \quad 3a^2b+a^3, \quad 2b^3-a^2b-2a^3,$
6. $a^2+b^4+c^3, \quad -4a^2-5c^3, \quad 8a^2-7b^4+10c^3, \quad 6b^4-6c^3.$

28. Sottrarre:

1. $4a-10b$ da $7a-14b$,
2. $2a-2b-3c$ da $-6a-2b+c$,
3. $-5a^2-6a+3$ da $2a^2-a-4$,
4. $a^2+2ab+5ac-3b^2-2c^2$ da $a^2-3ab-b^2+bc-2c^2$.

29. Moltiplicare:

1. $a-1$ per $a+2$ per $a+3$,
2. $2a^3-4a^2b+5ab^2$ per $-3a^2bc$,
3. $3a^3-2a^2b+4ab^2-b^3$ per $a^2-3ab-b^2$,
4. $\frac{5}{6}a^3-\frac{2}{3}a^2b+\frac{1}{6}ab^2$ per $12a^2-6ab+6b^2$,
5. $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$ per $a-b$,
6. $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$ per $a+b$,
7. $a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6$ per a^2-b^2,
8. $a^8-a^6b^2+a^4b^4-a^2b^6+b^8$ per a^2+b^2,
9. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ per $a+b+c$,
10. $a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc$ per $a-b+c$.

30. Porre in evidenza in ciascuno dei seguenti polinomi il fattore monomiale comune:

1. $6a^3 - 8a^2 - 10a$, 2. $25a^4b^3 - 15a^2b^4 + 35a^3b^3$,

3. $3a^4b^4 - 15ab^5 + 18a^3b^2 - 3ab^2$, 4. $\frac{2}{9}a^5b^2 - \frac{4}{3}a^2b^3 + \frac{8}{27}a^3b^4$.

31. Verificare le seguenti identità:

1. $(a-b)(a-c) = a^2 - (b+c)a + bc$,
2. $(a-b)(a-c)(a-d) = a^3 - (b+c+d)a^2 + (bc+cd+db)a - bcd$,
3. $(a-b)(b-c)(c-a) = ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c)$,
4. $(a+b)(b+c)(c-a) + (b+c)(c+a)(a-b) + (c+a)(a+b)(b-c) +$
$$+ (a-b)(b-c)(c-a) = 0.$$

32. Semplificare le frazioni algebriche:

$$\frac{3a^2b - 4ab^2}{2a^2b - 5ab^2}, \quad \frac{a^3b^2 - 2a^2b^3}{6a^3b - 3a^4}.$$

33. Ridurre ciascuna delle espressioni seguenti ad una frazione algebrica:

1. $\frac{3a-b}{15} + \frac{4b-2c}{12} - \frac{3c-2a}{9}$, 2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a}$,

3. $1 + \frac{2a-b}{3a-2b}$, 4. $a - \frac{a^2}{a-b}$,

5. $\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}$, 6. $\frac{p}{a^2bc} + \frac{q}{ab^2c} + \frac{r}{abc^2}$,

7. $\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-c)}$, 8. $\left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\frac{a}{a-b} - 1\right)$,

9. $\frac{1}{a+1} : \left(1 - \frac{1}{a+1}\right)$, 10. $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a^2 + \cfrac{1}{a^3}}}$.

34. Calcolare i seguenti quadrati e cubi (IV, nn. 15-17):

1. $(3a+4b)^2$, 2. $\left(\frac{1}{2}ab^2 - \frac{2}{3}a^2b\right)^2$,

3. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$, 4. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c}\right)^2$,

5. $\left(\frac{1}{2}a - 2b + \frac{2}{3}c\right)^2$, 6. $\left(\frac{1}{3}a - 3b\right)^3$.

35. Verificare le seguenti identità, che, ove a e b si suppongano numeri assoluti e si interpretino come lunghezze di segmenti, esprimono in forma algebrica le proposizioni 5-10 del II Libro degli *Elementi di*

Euclide [1]. L'alunno cerchi di ricostruire, in base a queste identità, gli enunciati di tali teoremi di Geometria.

$$1.\ ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$2.\ (a+b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2,$$

$$3.\ (a+b)^2 + a^2 = 2(a+b)a + b^2,$$

$$4.\ 4(a+b)a + b^2 = (2a+b)^2,$$

$$5.\ a^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right\},$$

$$6.\ (a+b)^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2\right\}.$$

36. Se 5 numeri interi assoluti sono consecutivi, il quadrato del medio è uguale al prodotto degli estremi, aumentato di 4.

37. Se 4 numeri interi assoluti sono consecutivi, il loro prodotto è uguale sia al quadrato del prodotto dei medi, diminuito di 1, sia al quadrato del prodotto degli estremi, aumentato di 1.

38. Verificare l'identità:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Di qui, in forza dell'inverso del teorema di Pitagora, risulta che se a e b sono due numeri interi assoluti quali si vogliano, purchè sia $a > b$, i tre numeri interi assoluti $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$ danno le lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, o, come si suol dire, costituiscono una *terna pitagorica* di numeri interi assoluti. Tali sono, ad es., 3, 4, 5 (per $a = 2$, $b = 1$); 8, 6, 10 (per $a = 3$, $b = 1$); 5, 12, 13 (per $a = 3$, $b = 2$); ecc. Viceversa si dimostra (con un ragionamento elementare e facile) che tutte le possibili terne pitagoriche di numeri interi assoluti si ottengono in questo modo.

39. Si eseguiscano le operazioni indicate nelle seguenti espressioni, tenendo conto del n. 18 del Cap. IV:

1. $(2a - 3b)(2a + 3b)$, 2. $(0{,}2a^2 + 0{,}3b^2)(0{,}2a^2 - 0{,}3b^2)$,

3. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, 4. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$,

5. $\{(a+b)(a-b) - [a(a+b) - b(a-b)]\}^3$,

[1] Cfr. F. Enriques, *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, I; Bologna, Zanichelli.

6. $(a^2 - a + 1)(a^2 - a - 1)(a^4 + 2a^3 + a^2 + 1)$,

7. $\{ a^2 - ab - [b^2 - ab - (c^2 - bc)] + bc \} (a^2 + b^2 - c^2)$,

8. $(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)(a^6 - b^6)$,

9. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$,

10. $\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{a-1}{a+1} + \dfrac{a}{a^2-1} - \dfrac{a-1}{a^2+2a+1}$,

11. $\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2} + \dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b}$,

12. $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$,

13. $\left(\dfrac{a}{bc} - \dfrac{b}{ac} - \dfrac{c}{ab} - \dfrac{2}{a}\right)\left(1 - \dfrac{2c}{a+b+c}\right)$.

40. Trasformare ciascuna delle espressioni seguenti in un prodotto di espressioni intere o in una potenza di un' espressione intera (IV, nn. 15-19):

1. $4a^2 + 12ab + 9b^2$,
2. $9a^4 - 2a^2b^2 + \dfrac{1}{9}b^4$,
3. $(a+b)^2 - a^2 + b^2$
4. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$,
5. $9a^2 - 16b^2$,
6. $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$,
7. $(a+b)^2 - c^2$,
8. $(7a - 5b)^2 - (2a + 3b)^2$,
9. $25a^4b^2 - c^2d^6$,
10. $(a - b - c)^2 - (b - c - a)^2$.
11. $25(a+b)^2 - 16(a-b)^2$,
12. $a^8 - b^8$.

41. Verificare le identità:

1. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$,
2. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$,
3. $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$,
4. $(ac - bd)^2 - (ad - bc)^2 = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$,
5. $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2$,
6. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$,
7. $(a + b + c + d)(a + b - c - d) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2(ab - cd)$,
8. $4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 =$
$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)$,
9. $(a^2 + b^2 + c^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (ap + bq + cr)^2 =$
$= (aq - bp)^2 + (br - cq)^2 + (cp - ar)^2$,

10. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2=$
$=4(a^2+b^2+c^2)$,

11. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$,

12. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$,

13. $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=24abc$.

42. Sofisma (1). Tutti i numeri sono uguali. Infatti, siano a e b due numeri quali si vogliano, e si ponga $a-b=c$. Moltiplicando ambo i membri per $a-b$, avremo

$$a^2-2ab+b^2=ac-bc,$$

da cui successivamente

$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc, \quad a(a-b-c)=b(a-b-c),$$

e quindi $a=b$. Dov' è l' errore?

Altro ragionamento sofistico per stabilire la stessa affermazione falsa. Siano a e b due numeri quali si vogliano, e sia c la loro media aritmetica, cioè

$$\frac{a+b}{2}=c.$$

Si avrà

$$a+b=2c,$$

e, moltiplicando ambo i membri per $a-b$,

$$a^2-b^2=2ac-2bc,$$

da cui successivamente

$$a^2-2ac=b^2-2bc, \quad a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2, \quad (a-c)^2=(b-c)^2,$$

ossia $a-c=b-c$ e quindi $a=b$. Si trovi anche qui il passaggio errato.

43. Sofisma. La somma non gode della proprietà commutativa. Infatti, siano a e b due numeri disuguali quali si vogliano e sia c un terzo numero, pur esso qualsiasi. Avremo

$$c-a \gtrless c-b,$$

da cui

$$(c-a)^2 \gtrless (c-b)^2.$$

(1) Questo esercizio e i due seguenti sono tolti dall'opuscolo di C. Toffoletti, *Sofismi matematici*, Livorno, R. Giusti, 1916.

Se per c prendiamo la media aritmetica di a e b, avremo

$$c-a=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}, \quad c-b=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2},$$

onde

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \gtrless \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

e, sviluppando e moltiplicando ambo i membri per 4,

$$b^2-2ab+a^2 \gtrless a^2-2ab+b^2$$

ossia

$$b^2+a^2 \gtrless a^2+b^2.$$

Anche in questo caso si trovi l'errore del ragionamento.

44. Sofisma. Dati due numeri a e b, se è $a>b$, è anche $b>a$. Infatti, dall'ipotesi $a>b$ segue $a-b>b-a$. Ma sappiamo che $(a-b)(a-b)=$ $=(b-a)(b-a)$, cosicchè sussiste la proporzione

$$a-b:b-a=b-a:a-b;$$

e poichè, se in una proporzione un antecedente è maggiore del suo conseguente, anche l'altro antecedente è maggiore del suo conseguente, dall'ultima disuguaglianza scritta discende $b-a>a-b$ e, quindi successivamente, $2b>2a$, $b>a$.

Dov'è l'errore?

Capitolo V

45. Per poter concludere che due polinomi $A(x)$, $B(x)$, in una stessa indeterminata x, coincidono (cioè sono dello stesso grado ed hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei termini di ugual grado) non è necessario sapere, come si è supposto nel testo (V, n. 4) che essi assumono valori uguali *per qualsiasi scelta del valore della* x, bensì vale il seguente teorema, che costituisce una nuova forma del « principio d'identità dei polinomi » e che, per essere applicato, richiede soltanto un numero finito di verifiche: 1) *Due polinomi nella stessa indeterminata, i quali siano entrambi di grado non maggiore di un certo numero* n, *coincidono se assumono valori uguali per* $n+1$ *valori diversi della indeterminata.*

Considerando il polinomio $A-B$, si riconosce in modo perfettamente analogo a quello del n. 6 del Cap. V, che per stabilire questo teor. basta dimostrare che: 2) *un polinomio in una indeterminata* x, *il quale sia di grado non maggiore di* n *e abbia il valore* 0 *per* $n+1$ *valori diversi della* x, *è identicamente nullo* (cioè ha nulli tutti i suoi coefficienti). Ora quest'ultimo teorema discende come facile corollario da una proposizione, che nel testo (V, n. 30) è stata dedotta dalla teoria della divisibilità dei polinomi (nonchè dal principio d'identità), ma che, come qui faremo vedere [1], si può anche stabilire direttamente.

Si tratta del seguente teorema: 3) *Un polinomio $A(x)$, il quale si annulli quando alla x si dia un certo valore c, si può scrivere sotto la forma*

$$A(x) = (x - c)A_1(x), \tag{1}$$

dove $A_1(x)$ denota un polinomio di grado immediatamente inferiore ad A, avente, per il termine di massimo grado, il medesimo coefficiente di A.

Daremo della dimostrazione una rapida traccia, lasciando all'alunno volonteroso la cura di svilupparla in tutti i particolari.

Il teor. è evidente se $c = 0$, giacchè, se A si annulla per $x = 0$, vuol dire che A manca di termine noto, e si ha quindi senz'altro la (1). Supponiamo dunque $A(c) = 0$ con $c \gtrless 0$ e, posto

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n,$$

chiamiamo y una nuova indeterminata, legata alla x della relazione

$$y = x - c, \tag{2}$$

e quindi tale che, viceversa, sia

$$x = y + c. \tag{3}$$

Ponendo, in $A(x)$, $y + c$ al posto di x, otteniamo l'espressione

$$A(y + c) = a_0(y + c)^n + a_1(y + c)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(y + c) + a_n.$$

Ora, anche senza sviluppare le singole potenze $(y + c)^n$, $(y + c)^{n-1}$, ... del binomio $y + c$, si riconosce che ciascuna di esse dà un polinomio in y, di grado uguale al rispettivo esponente, in cui il termine di massimo grado ha il coefficiente 1. Perciò $A(y + c)$ è un polinomio in y di grado n, il cui termine di massimo grado ha lo stesso coefficiente a_0 di $A(x)$. D'altra parte $A(y + c)$ per $y = 0$ assume il valore $A(c)$, che per ipotesi è nullo. Si ha dunque

$$A(y + c) = yA'(y), \tag{4}$$

dove $A'(y)$ è un polinomio in y di grado $n - 1$, avente a_0 come coefficiente del termine di grado $n - 1$. Dopo ciò, se nei due membri della (4) rimettiamo $x - c$ al posto di y, otteniamo

$$A(x) = (x - c)A'(x - c)$$

---

[1] F. Enriques, *Sul principio d'identità dei polinomi*. Per. di Matematica s. IV, vol. X, 1930; pp. 172-173.

e per le stesse osservazioni fatte or ora, abbiamo che $A(x-c)$ è un polinomio in x di grado $n-1$, avente a_0 come coefficiente del termine di grado $n-1$, come appunto si voleva dimostrare.

Ciò premesso si dimostra agevolmente il teor. 2). Supponiamo che il polinomio $A(x)$, di grado non maggiore di n, si annulli per $n+1$ valori c_1, c_2, ..., c_{n+1} della x, fra loro tutti diversi. Diciamo intanto che $A(x)$ è necessariamente di grado minore di n, cioè che il suo coefficiente a_0 del termine di grado n è necessariamente nullo. Infatti, in quanto $A(x)$ si annulla per $x=c_1$, si può scrivere

$$A(x)=(x-c_1)A_1(x) \tag{5}$$

dove A_1 è di grado immediatamente inferiore ad A ed ha a_0 come coefficiente del termine di grado $n-1$. Ma $A(x)$ si annulla anche per $x=c_2$, cosicchè, in forza della (5) ed essendo $c_2 \gtrless c_1$, si ha $A_1(c_1)=0$ e quindi

$$A_1(x)=(x-c_2)A_2(x), \tag{6}$$

dove A_2 è di grado immediatamente inferiore ad A_1 ed ha a_0 come coefficiente del termine di grado $n-1$. E, in base alle (5), (6), si ha

$$A(x)=(x-c_1)(x-c_2)A_2(x).$$

Così continuando e tenendo conto successivamente che A si annulla anche per c_3, c_4, ..., c_n, si trova che

$$A(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ \ldots .\ (x-c_n);$$

dopo di che basta ricordare che A si annulla anche per c_{n+1} e che c_{n+1} è diverso da c_1, c_2, ..., c_n, per concludere che a_0 è necessariamente nullo. Il polinomio A è dunque di grado non maggiore di $n-1$; onde, riapplicando lo stesso ragionamento (ed utilizzando solo n degli $n+1$ valori c_1, c_2, ..., c_{n+1}, per cui esso si annulla) si riconosce che è pur nullo a_1, e così successivamente, a_2, a_3, ..., a_{n+1} e il polinomio A è identicamente nullo.

46. Sommare i polinomi seguenti:

1. $3x-2$, $4-5x$, $7x-11$, $x+9$,
2. $4x^2-3b^2$, $2x^2+a^2$, $-3x^2+4b^2$, $-2x^2-2ab$,
3. x^3-4x^2+5x-3, $2x^3-7x^2-14x+5$, $-x^3+9x^2+x+8$,
4. $-x^4+2x^3-4x^2+8x+5$, $-2x^3+3x^2-7x-9$, $3x^2-x+3$,
5. $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}x^3+3x^2-\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$,
6. $0{,}3x^4-2{,}5x^2-0{,}6x+4{,}3$, $-1{,}4x^4+2{,}5x^3+5x^2-3{,}4x-2{,}4$.
7. $x^3-2ax^2+a^2x+a^3$, x^3+3ax^2, $2a^3-ax^2-2x^3$,
8. $2ab-3ax^2+2a^2x$, $12ab+10ax^2-6a^2x$, $-8ab+ax^3-5a^2x$.

47. Sottrarre:

1. $4x + 10a$ da $7a - 14x$,
2. $5x^2 - 6x + 2$ da $7x^2 - 8x + 1$,
3. $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x - 1$ da $3x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 4x + 3$,
4. $0{,}75x^2 + 1{,}2x + 2{,}96$ da $x^2 + x + 3$,
5. $-3x^3 + 3ax^2 - 3a^2x - 2a^3$ da $-2x^3 + 6ax^2 - a^3$,
6. $4x^3 - 2x^2 - 2x - 14 - (2x^3 - 8x^2 + 4x + 16)$ da $7x^3 - 2x^2 + 2x + 2$.

48. Moltiplicare i polinomi seguenti:

1. $3x^2 - 4x + 5$, $9 - 2x$,
2. $x^2 + 3ax$, $x + 3a$,
3. $1 + 4x - 10x^2$, $1 - 6x + 3x^2$,
4. $x^3 - 7x + 5x + 1$, $2x^2 - 4x + 1$,
5. $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$,
6. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$,
7. $a^2 + 2ax - x^2$, $a^2 + 2ax + x^2$,
8. $x^2 - ax + a^2$, $x^2 + ax + a^2$, $x^4 - a^2x^2 + a^4$.

49. Eseguire le seguenti divisioni di polinomi, e, in ogni caso, verificare con una moltiplicazione l'esattezza del risultato:

1. $(6x^2 + x - 15) : (2x - 3)$,
2. $(6x^3 - x^2 + 11x + 4) : (3x + 1)$,
3. $(-4x^3 + 15x^2 - 13x + 3) : (-x^2 + 3x - 1)$,
4. $(2x^4 - 3x^3 + 3x - 2) : (2x^2 - 3x + 2)$,
5. $(3x^5 - 7x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 13x + 12) : (3x^2 - x + 3)$,
6. $(x^7 - 5x^5 + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2) : (x^4 - 3x^2 + 2x + 1)$,
7. $(x^3 - 3abx + a^3 + b^3) : (x + a + b)$,
8. $(x^3 - [a + b + c]x^2 + [ab + ac + bc]x - abc) : (x - c)$,
9. $(x^3 - 2ax^2 + [a^2 + ab - b^2]x - a^2b + ab^2) : (x - a + b)$,
10. $(a^2x^4 + [2ac - b^2]x^2 + c^2) : (ax^2 - bx + c)$.

50. Eseguire le seguenti divisioni e, in ogni caso, verificare l'esattezza del risultato, ricorrendo alla relazione fondamentale tra dividendo, divisore, quoziente e resto (V, n. 17):

1. $(6x^2 + x - 2) : (3x - 4)$,
2. $(4x^3 + 23x^2 + 7x - 1) : (4x + 3)$,
3. $(10x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x + 1) : (5x^2 + 2x - 3)$,
4. $(2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 14x - 10) : (2x^2 - 3x + 2)$,
5. $(6x^5 - x^3 + 5x^2 + 1) : (2x^3 - 3x + 2)$,
6. $(6x^5 + 5x^4 - 18x^3 + 10x^2 + 5x - 1) : (3x^3 - 2x^2 + 1)$,
7. $(5x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1) : (5x^3 - 4x^2 + x - 2)$,

8. $(x^6 + a^5x + a^6):(x^2 - a^2)$,
9. $(x^5 + ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5):(x^3 + a^3)$,
10. $(x^8 + a^4x^4 - a^6x^2 - a^8):(x^4 + a^2x^2 + a^4)$.

51. Dimostrare che nella divisione di un polinomio per un altro, secondo la regola del n. 17 del Cap. V: 1) se si moltiplica per un numero q il dividendo, risultano moltiplicati per q anche il quoziente intero ed il resto; 2) se si moltiplica per un numero q il primo o secondo o terzo,.... dividendo parziale, risultano moltiplicati per q anche il resto e tutti i termini del quoziente a partire dal secondo o dal terzo o dal quarto,... rispettivamente. [Sono conseguenze immediate della relazione fondamentale fra dividendo, divisore, quoziente intero e resto; V, n. 17].

Queste osservazioni tornano utili, in quanto, nel corso della divisione di due polinomi a coefficienti interi, permettono di evitare che si presentino coefficienti frazionari, come, secondo la regola, inevitabilmente accade, quando il primo coefficiente del dividendo dato o di uno dei successivi dividendi parziali non è divisibile per il primo coefficiente b_0 del divisore. In tali casi si può preventivamente moltiplicare il dividendo dato o il dividendo parziale per b_0 (o per il minimo multiplo comune di b_0 e del primo coefficiente del dividendo dato o del dividendo parziale), salvo poi tener conto che, ad operazione ultimata, andrà diviso per b_0 (o per codesto minimo multiplo) il resto, cui si sarà pervenuti, come pure ciascuno dei termini del quoziente intero, a partire dal primo che si sarà ottenuto dopo la moltiplicazione suindicata. Per es. si voglia dividere

$$2x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 5 \quad \text{per} \quad 3x^2 - 4x^2 + 1.$$

Qui per evitare nel corso della divisione, coefficienti frazionari, bisogna moltiplicare per 3 tanto il dividendo, quanto ciascuno dei due successivi dividendi parziali. L'operazione si può disporre nel modo seguente, che non richiede ulteriori spiegazioni:

$$\begin{array}{lrrrrrr|l}
3 & 2x^5 & -\,x^4 & +\,2x^3 & & -\,4x & -\,5 & 3x^3 - 4x^2 + 1 \\
\hline
 & 3\cdot 2x^5 & -\,3x^4 & +\,6x^3 & & -\,12x & -\,15 & 2x^2 + 5x + 38 \\
 & -\,3\cdot 2x^5 & +\,8x^4 & & -\,2x^2 & & & \\
\hline
3 & & 5x^4 & +\,6x^3 & -\,2x^2 & -\,12x & -\,15 & \\
\hline
 & & 3\cdot 5x^4 & +\,18x^3 & -\,6x^2 & -\,36x & -\,45 & \\
 & & -\,3\cdot 5x^4 & +\,20x^3 & & -\,5x & & \\
\hline
3 & & & 38x^3 & -\,6x^2 & -\,41x & -\,45 & \\
\hline
 & & & 3\cdot 38x^3 & -\,18x^2 & -\,123x & -\,135 & \\
 & & & -\,3\cdot 38x^3 & +\,152x^2 & & -\,38 & \\
\hline
 & & & & 134x^2 & -\,123x & -\,173 &
\end{array}$$

Il resto e il quoziente intero della divisione dei polinomi dati risultano rispettivamente uguali a

$$\frac{1}{3^3}(134x^2-123x-173)=\frac{134}{27}x^2-\frac{41}{9}x-\frac{173}{27},$$

$$\frac{1}{3}2x^2+\frac{1}{3^2}5x+\frac{1}{3^3}38=\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{38}{27}.$$

Si verifichi l'esattezza del risultato, ricorrendo alla solita relazione fondamentale (V, n. 17).

52. Dimostrare che se prima di dividere un polinomio per un altro, si moltiplicano dividendo e divisore per uno stesso numero, il quoziente intero rimane inalterato e il resto risulta moltiplicato per quel numero (V, n. 17).

Questa osservazione torna utile, quando si tratta di dividere, l'uno per l'altro, due polinomi in cui compaiono coefficienti frazionari. In tal caso si possono moltiplicare entrambi i polinomi per un multiplo comune (e converrà prendere il minimo) dei denominatori dei coefficienti frazionari, e, dopo eseguita la divisione dei due polinomi a coefficienti interi così ottenuti, conservare inalterato il quoziente intero e dividere il resto per il moltiplicatore intero dianzi adottato.

Se, per es., si vuol dividere

$$\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x+1 \quad \text{per} \quad \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},$$

conviene sostituire a questi due polinomi quelli, che si ottengono, moltiplicandoli entrambi per 6, cioè

$$2x^4+3x^3-9x^2+8x+6, \quad 3x^2-2x+4.$$

Nella divisione di questi due polinomi conviene applicare l'artificio indicato nell'eserc. prec. e disporre l'operazione come segue:

$$\begin{array}{l rrrrr|l}
3 & 2x^4 & +3x^3 & -9x^2 & +8x & +6 & 3x^2-2x+4 \\
 & 3\cdot 2x^4 & +9x^3 & -27x^2 & +24x & +18 & 2x^2+13x-79 \\
 & -3\cdot 2x^4 & +4x^3 & -8x^2 & & & \\
3 & & 13x^3 & -35x^2 & +24x & +18 & \\
 & & 3\cdot 13x^3 & -105x^2 & +72x & +54 & \\
 & & -3\cdot 13x^3 & +26x^2 & -52x & & \\
3 & & & -79x^2 & +20x & +54 & \\
 & & & -3\cdot 79x^2 & +60x & +162 & \\
 & & & 3\cdot 79x^2 & -158x & +316 & \\
 & & & & -98x & +478 &
\end{array}$$

Tenendo conto delle avvertenze date in questo eserc. e nel prec., si conclude che il resto ed il quoziente della divisione dei due polinomi dati sono uguali rispettivamente a

$$\frac{1}{6\cdot 3^3}(-98x+478)=-\frac{49}{81}x+\frac{239}{81},$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2x^2+\frac{1}{3^2}\cdot 13x-\frac{1}{3^3}79=\frac{2}{3}x^2+\frac{13}{9}x-\frac{79}{27}.$$

Si verifichi l'esattezza del risultato (V, n. 17).

53. Trovare il massimo comun divisore dei polinomi seguenti:

1. $2x^3+x^2-5x+2,\quad x^2-2x-8,$
2. $3x^4-15x^3-4x^2+22x-10,\quad x^3+3x^2-39x-5,$
3. $x^7-2x^6-2x^5+6x^4-3x^3+3x^2-6x+3,\quad x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1.$

Si avverta, che siccome il M. C. D. di due o più polinomi è sempre determinato a meno di un fattore costante, che si può prendere ad arbitrio (V, n. 21) e d'altra parte i quozienti che si ottengono col procedimento delle divisioni successive non hanno alcuna importanza per la determinazione del M. C. D., è sempre lecito (quando torna comodo) moltiplicare, in ciascuna divisione successiva, per un conveniente numero l'uno o l'altro dei due polinomi od anche tutti e due (eserc. 51, 52).

54. Eseguire le seguenti somme di frazioni algebriche:

1. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a},$ 2. $\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a},$

3. $\frac{1+3x}{1-3x}-\frac{1-3x}{1+3x},$ 4. $\frac{a}{x(a-x)}-\frac{x}{a(a-x)},$

5. $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}-\frac{2ax}{a^2-x^2},$

6. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1},$

7. $\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-2},$

8. $\frac{a-x}{a+x}+\frac{a+x}{a-x}-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2},$

9. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-3)(x-4)}-\frac{2}{(x-2)(x-4)},$

10. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x+2)}-\frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)},$

11. $\frac{1}{x-a}+\frac{x-a}{x^2+ax+a^2}+\frac{ax-2x^2}{x^3-a^3},$

12. $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}+\frac{4a}{x^2-a^2}-\frac{2a}{x^2+a^2}.$

55. Eseguire, applicando la regola del Ruffini (V, n. 32) le seguenti divisioni di polinomi:

1. $(x^2 + x - 6):(x - 2)$,
2. $(3x^2 + 7x + 12):(x + 3)$,
3. $(2x^3 + 7x^2 - 3x + 4):(x + 4)$,
4. $(6x^4 - 13x^3 + 8x^2 + x - 6):(2x - 3)$,
5. $(2x^2 - 3x + 4):(x + 1)$,
6. $(x^3 + 4x^2 - 5):(x - 1)$,
7. $(3x^4 - 2x^2 + x - 1):(x + 2)$,
8. $(4x^5 - 3):(3x + 2)$.

56. In ciascuno dei seguenti casi, determinare il numero a in modo che la divisione risulti esatta:

1. $(x^2 - x + a):(x - 4)$,
2. $(2x^3 + 3x^2 - 8x + a):(x + 3)$,
3. $(6x^2 - 3x + 4x + a):(2x - 1)$,
4. $(12x^3 + 5x^2 + x + a):(4x + 3)$.

Capitolo VI

57. Risolvere le seguenti equazioni (di 1° grado o riducibili ad equazioni di 1° grado):

1. $3x - 8 = 5x + 6$,
2. $20 - 2x = x + 2$,
3. $3x + 23 = 78 - 2x$,
4. $0{,}265x + 0{,}379 = 0{,}425x - 0{,}419$,
5. $7(x - 18) = 3(x - 14)$,
6. $5(x - 7) + 63 = 9x$,
7. $59(x - 7) = 61(9 - x) - 2$,
8. $72(x - 5) = 63(5 - x)$,
9. $x + \frac{x}{2} = 11 - \frac{x}{3}$,
10. $\frac{x}{3} - \frac{x}{8} + \frac{1}{6} = \frac{x}{4} + \frac{1}{12}$,
11. $\frac{4x}{3} + 24 = 2x + 6$,
12. $10[3(2 + x) - 10] = 5x + 10$,
13. $8 - 3[2 + 3(x + 1)] = 2 - 4[2(x - 1) + 5]$,
14. $\frac{2x + 3}{2} + \frac{4(2x + 3)}{3} = \frac{3}{2}(2x + 3) + \frac{5}{3}$,

    [si prenda come incognita $2x + 3$].
15. $\frac{3x - 1}{2} - \frac{2x - 5}{3} + \frac{x - 3}{4} - \frac{x}{6} = x + 1$,
16. $\frac{\frac{1}{2}x - 3}{5} + \frac{\frac{3}{4}x - 10}{2} + \frac{4 - x}{4} = \frac{10 - x}{6}$,
17. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$,
18. $(9x - 2)^2(x + 3) = (3x + 2)^2(9x + 11)$,

19. $\frac{x-5}{7}+\frac{x^2+6}{3}=\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2-x+1}{6}+3,$

20. $(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)+3(4x-2)(x+1),$

21. $(a-x)(a+b)=(b-x)(a-b),$

22. $a(ax-b)+b(b-ax)=a^2-b^2,$

23. $(a-b)(x-c)-(b-c)(x-a)-(c-a)(x-b)=0,$

24. $x(x-a)+x(x-b)=x(x-a)(x-b),$

25. $(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2,$

26. $(x+2a)(x-a)^2=(x+2b)(x-b)^2,$

27. $(x+a)(2x+b+c)^2=(x+b)(2x+a+c)^2,$

28. $(x-a)(x-b)(x+2a+2b)=(x+2a)(x+2b)(x-a-b),$

29. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c),$

30. $(x-a)^3(x+a-2b)=(x-b)^3(x-2a+b),$

31. $\frac{a}{b}(a-x)-\frac{b}{a}(b+x)=x,$

32. $\frac{a}{b}(a-x)+\frac{b}{a}(x-b)=x,$

33. $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x+a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2},$

34. $\frac{x-a}{a-b}+\frac{x-2b}{a+b}=\frac{a^2+ab+2b^2}{a^2-b^2},$

35. $\frac{x+2b}{a-b}-\frac{x-4b}{a+b}=\frac{4bx-10b^2}{a^2-b^2},$

36. $\dfrac{x}{a+\dfrac{a+ab}{a-b}}+1=\frac{x}{a+1}+\frac{1}{a},$

37. $\frac{12}{x}=\frac{1}{12x}=\frac{29}{24},$

38. $\frac{6}{x-3}=\frac{5}{x-4},$

39. $\frac{24}{x+2}+\frac{15}{5-x}=0,$

40. $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6},$

41. $x-\frac{x^2+3}{x+2}=2,$

42. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26},$

43. $\frac{2x-6}{3x-8}=\frac{2x-5}{3x-7},$

44. $\frac{4x+17}{x+3}+\frac{3x-10}{x-4}=7,$

45. $\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{2-x}=\frac{6}{3x+2},$

46. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8},$

47. $\frac{4x+1}{4x+2}+\frac{13}{4(x^2-4)}=\frac{3x-1}{3(x-2)},$

48. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x,$

49. $\frac{a}{a-x}+\frac{b^2}{c(x-a)}=\frac{ac-b^2}{c},$

50. $\frac{ab}{cx}+\frac{bc}{ax}+\frac{ca}{bx}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$

51. $\frac{a-x}{b}-\frac{x^2-a^2}{bx}=\frac{a}{x}-\frac{2x}{b},$

52. $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{x}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{a-2b}{2a-b},$

53. $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{b}}{\dfrac{x}{b}-\dfrac{b}{a}}=\frac{a}{a-b},$

54. $\dfrac{1+ax}{1-ax}=\dfrac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2}$, 55. $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{ax+f}{cx+g}$,

56. $\dfrac{a-2x}{6x-b}=\dfrac{a-x}{3x-b}$, 57. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{a-b}{x^2-ab}$,

58. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}$,

59. $\dfrac{x+a}{x^2+ax+c}=\dfrac{x+b}{x^2+bx+d}$,

60. $\dfrac{x-a}{x-a-1}-\dfrac{x-a-1}{x-a-2}=\dfrac{x-b}{x-b-1}-\dfrac{x-b-1}{x-b-2}$.

58. Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{x^2+8x+12}+\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{3}{x^2+7x+6}.$$

[Si decompongano i tre denominatori in fattori di 1° grado, cercando il M. C. D. del primo e del secondo e quello del primo e del terzo].

59. In ciascuno dei seguenti casi si determini il numero a in modo che la divisione risulti esatta:

1. $(x^2+ax-12):(x-3)$; 2. $(2x^3+7x^2+ax+5):(x+5)$;
3. $(ax^2-3x-12):(2x-3)$; 4. $(9x^4+15x^3+ax^2-x+15):(3x+5)$.

60. Discutere le seguenti equazioni:

1. $\dfrac{4x+1}{3x-2}=1-\dfrac{x+3}{2-3x}$; 2. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=1-\dfrac{x}{x+2}$;

3. $(a+b)(b+x)-(a-b)(a-x)=2bx$.

61. Nell'equazione

$$5(2b-ax)+6(5x-b)=12,$$

si determini anzitutto a in modo che essa risulti impossibile, e poi si determinino a e b in modo che l'equazione risulti indeterminata.

62. Quale numero aumentato di m (per es. di 5) dà il suo multiplo secondo m?

63. Per quale numero (intero assoluto) si deve dividere 829 per avere come quoziente intero 24 e come resto 4?

64. Un numero è tale che se si accresce di a (per es. di 3) il suo multiplo secondo m (per es. 8), si ottiene lo stesso risultato che diminuendo di b (per es. di 9) il multiplo di quello stesso numero secondo n (per es. 11). Qual'è quel numero?

65. Dividendo l'uno per l'altro due numeri interi assoluti si ottiene come quoziente (intero) 3 e come resto 86. Trovare i due numeri, sapendo che la loro differenza è 312.

66. In un garage, fra automobili e motociclette, sono depositate 23 macchine e il numero complessivo delle ruote è 74. Quante sono le automobili e quante le motociclette?

67. Un agricoltore prende in affitto, al prezzo annuo di L. 8825, un podere di 13 ha. Questo terreno è di due qualità: per la migliore il prezzo d'affitto annuo per ha. è di L. 725, per l'altra è di L. 650. Quanti ha. vi sono per ciascuna qualità di terreno?

68. In una sala sono riuniti signori e signore, i primi in numero triplo delle seconde. Dopo che sono usciti 8 signori, ciascuno con la propria signora, il numero dei signori risulta 5 volte quello delle signore. Quanti signori e quante signore si trovavano dapprincipio in quella sala?

69. Ad un ritrovo intervengono uomini, donne e fanciulli, in tutto n persone (per es. 34), di cui gli uomini superano le donne di a (per es. di 5) mentre gli adulti, nel loro complesso, superano i fanciulli di b (per es. di 12). Quanti sono gli uomini, quante le donne, quanti i fanciulli?

70. Due miniere di carbone A e B sono collegate da un tronco ferroviario di 153 km. A qual punto della linea si dovrà costruire una fabbrica, perchè, tenendo conto delle spese di trasporto per ferrovia (proporzionali al percorso), il Cardiff, pagato in A 20 scellini la tonnellata e l'antracite pagata in B 31 scellini la tonnellata, vengano a costare, posti in fabbrica, lo stesso prezzo per tonnellata?

71. Una contadina porta al mercato un certo numero di ova, col proposito di venderle a 35 cent. l'uno. Per via ne rompe 6 e, vendendo ciascuna delle rimanenti a 40 cent., intasca 50 cent. meno di quanto sperava, partendo da casa. Quante erano le ova?

72. Un numero intero assoluto di 6 cifre ha come prima cifra il 2. Se questa cifra 2 si porta dal primo all'ultimo posto, il numero si cambia nel suo triplo. Qual'è questo numero? [Si prenda come incognita il numero che da quello cercato si ottiene, sopprimendovi la prima cifra].

73. Trovare due numeri, di cui tanto la somma, quanto il quoziente sia 9.

74. Si moltiplichi un numero per 5; dal prodotto si sottragga 24; il resto si divida per 6 e al quoziente così ottenuto si aggiunga 13. Se come risultato si ottiene lo stesso numero da cui si è partiti, qual'è questo numero?

75. I re di una dinastia hanno portato 9 nomi diversi. Il primo di questi nomi fu preso da $\frac{1}{3}$ dei re, il secondo da $\frac{1}{4}$, il terzo da $\frac{1}{8}$, il quarto da $\frac{1}{12}$, e ciascuno degli altri nomi è stato assunto da un solo re. Quanti furono i re di quella dinastia?

76. Un tiratore di carabina spara 20 colpi e paga 50 centesimi ad ogni colpo fallito, mentre ne riceve 75 tutte le volte che fa centro. Quante volte fa centro se finisce col pagare L. 2,50?

77. Un tale ha speso 4 L. meno dei $\frac{3}{5}$ di quanto aveva in tasca, poi 3 L. più di $\frac{1}{4}$ di quanto gli era rimasto, e, infine, L. 1,20 più dei $\frac{2}{5}$ del nuovo resto. Se dopo ciò si trova in tasca L. 24, quanto aveva dapprincipio?

78. Dividere il numero 180 in 4 parti tali, che si ottenga il medesimo risultato sia aggiungendo 5 alla prima, sia sottraendo 5 dalla seconda, sia moltiplicando per 5 la terza, sia dividendo per 5 la quarta. [Si assuma come incognita il risultato comune delle quattro operazioni dianzi indicate].

79. In un opificio lavorano 28 uomini, 20 donne e 10 ragazzi. Se la paga settimanale complessiva (per 6 giornate di lavoro) è di L. 6528, e la paga di due uomini eguaglia quella di 3 donne, come pure quella di 5 ragazzi, qual'è la paga giornaliera di ciascun uomo, di ciascuna donna, di ciascun ragazzo?

80. Una donna compera un certo numero di ova, pagandone una metà al prezzo di L. 1 al paio e l'altra metà al prezzo di L. 1 ogni tre ova. Poi vende tutte queste ova a L. 4 la diecina, e si trova ad aver perduto L. 1. Quante erano le ova?

81. Un padre, morendo, dispone che una certa somma di denaro venga ripartita fra i suoi figli nel modo seguente: al primogenito a lire, più $\frac{1}{n}$ del rimanente; al secondogenito $2a$ lire, più $\frac{1}{n}$ del nuovo residuo; al terzogenito $3a$ lire, più $\frac{1}{n}$ del nuovo residuo; e così via. Sapendo che in questo modo la somma risulta ripartita per intero e che le quote dei singoli figli risultano fra loro uguali, si trovi a quanto ammontava la somma e quanti erano i figli.

Si risolva prima il problema in un caso numerico; per esempio per $a = 3000$, $n = 6$.

Questo problema per $a = 1$ ed $n = 7$ si trova nel *Liber Abaci* di Leonardo Pisano; e per a ed n quali si vogliano è stato risolto da Eulero (cfr. G. PEANO, op. cit. a p. 153).

82. Un trapezio, in cui la base maggiore e l'altezza sono lunghe rispettivamente cm. 35,7 e cm. 18,4, ha l'area di cm.^{2} 533,6. Qual'è la lunghezza della base minore?

83. La stessa quantità di carbone che una macchina consuma, a fuoco continuo, in 22 giorni, viene similmente consumata da un' altra macchina in 26 giorni. Per quanti giorni (e quante ore) si possono far funzionare simultaneamente quelle due macchine con quella stessa quantità di carbone?

84. Di un triangolo rettangolo si conoscono la lunghezza a di un cateto e la somma s delle lunghezze dell' altro cateto e dell' ipotenusa. Trovare le lunghezze di questi due lati.

85. Di un triangolo rettangolo si conoscono la lunghezza a di un cateto e la differenza d delle lunghezze dell' ipotenusa e dell' altro cateto. Trovare queste due ultime lunghezze.

86. Quanto è lungo il lato di un quadrato, la cui area diminuisce di m.^{2} 2,75, quando si diminuisce il lato di 50 centimetri?

87. In un cono (circolare retto), la cui base ha il diametro di cm. 10, il lato (o apotema) supera l' altezza di 1 cm. Qual' è il volume del cono?

88. Un giardino di forma quadrata viene cintato con un muro di cm. 40 di spessore e perde così m.^{2} 84 della sua area. Qual' è il suo lato e quale l' area libera rimasta?

89. Di quanto bisogna allungare il lato maggiore di un rettangolo, i cui lati sono di cm. 55 e cm. 50, perchè risulti simile ad un rettangolo, avente i lati di cm. 24 e cm. 15?

90. Un serbatoio d' acqua, alimentato da due condutture, si riempie in 3 ore quando queste due condutture funzionano insieme, in 5 ore quando funziona soltanto la prima. In quante ore si riempirebbe, se si facesse funzionare soltanto la seconda conduttura?

91. A quale temperatura centigrada un termometro Réaumur e un termometro Fahrenheit segnano il medesimo numero di gradi? [Si ricordi che a 0° *C.*, 100° *C.* corrispondono, rispettivamente, 0° ***R.***, 80° ***R.*** e 32° ***F.***, 212° ***F.***].

92. Un ciclista, mantenendo sempre la stessa velocità, alle $14\frac{3}{4}$ si trova a 15 km. dal suo punto di partenza e alle $15\frac{1}{4}$ a 24 km. A quale ora è partito?

93. Fra l' istante, in cui da una vetta si vede brillare una mina sul fianco opposto della montagna, e l' istante, in cui si percepisce il rombo dello scoppio, passano 3 secondi e $\frac{1}{2}$. Si determini la distanza fra quella vetta e il luogo, dove è stata fatta brillare la mina, ammettendo che il suono si propaghi nell' aria colla velocità di 333 m./sec. e che la velocità della luce sia così grande, che si possa ritenere di aver visto lo scoppio nell' istante stesso, in cui è avvenuto.

94. A fa con B una gara di corsa, e, dando a B un vantaggio iniziale di 100 m., si trova, dopo 5 minuti di corsa, 150 m. più avanti di B. Se la velocità di A è uguale ai $\frac{6}{5}$ di quella di B, quale è stata la velocità di ciascuno dei due corridori e quale il rispettivo percorso?

95. Un automobilista vuol percorrere 165 km. in 3 ore. Ma dopo un'ora di viaggio è costretto, per un arresto del motore, a sostare per 20 minuti. Quale velocità dovrà tenere nella seconda parte del viaggio?

96. Due viandanti e due ciclisti percorrono una stessa strada nello stesso senso (oppure in senso opposto). La velocità del primo è di v km./h., quella del secondo è di v' km./h. Quando e a qual punto del loro percorso l'uno raggiungerà l'altro (oppure si incontreranno) se sono partiti da due luoghi, la cui distanza è di k km.?

$v = 4$	3	3,6	3,9	14,1	13,5
$v' = 5$	4	4,2	4,7	16,5	17,8
$k = 2{,}7$	4,2	3,9	3,87	3,4	3.

97. Due viandanti o ciclisti si sono messi in cammino su di una medesima strada, partendo insieme da uno stesso luogo, il primo con la velocità di c m./sec., l'altro con la velocità di c' m./sec., e tutti e due nel medesimo senso (oppure in senso opposto). Quando accadrà che la loro distanza sia di h m.?

$c = 8$	1,6	1,3	5	4,8	1
$c' = 5$	1,4	0,8	1,5	1,2	4
$h = 78$	1000	700	3000	18000	150.

98. Due viandanti, partiti nello stesso istante, da due luoghi diversi, camminano su di una stessa strada con la velocità di 3,8 km./h. il primo, e di 4,2 km./h. il secondo, l'uno incontro all'altro (oppure nello stesso senso). A quale distanza si trovavano inizialmente, se si incontrano (oppure l'uno raggiunge l'altro) dopo 3^h, oppure dopo $1^h 20^m$, oppure dopo 36^m?

99. Su di una pista chiusa di m. 1440 di circuito partono insieme, da uno stesso punto, due cavalieri, colle velocità rispettive di v e v' m./sec. nello stesso senso (o in senso opposto), Quando e dove l'uno vien raggiunto dall'altro (oppure si incontrano)?

$v = 6{,}5$	6	6	5,8	4,5	2,4
$v' = 5{,}5$	4	4,8	6,2	6,3	4,7.

100. Due viandanti partono, con le velocità di v e v' m./sec. rispettivamente, da due luoghi distanti k km. e si vanno incontro. Quando e dove si incontrano, se il secondo parte un'ora dopo del primo, oppure 20 minuti prima?

$v =$	1,4	1,5	1,45	1,55
$v' =$	1,6	1,2	1,25	1,35
$k =$	25,74	13,5	12,51	22,5.

101. Un pedone parte da un luogo A e s'incammina alla velocità di v km./h.; m minuti dopo, vien mandato a raggiungerlo un ciclista, che corre a v' km./h. Quando e dove lo raggiungerà?

$v =$	4	3	4	3	3,5	3,6
$v' =$	14	15	16	17	14,7	18
$m =$	29	10	15	28	40	96.

102. A mezzogiorno le lancette delle ore e dei minuti, in un qualsiasi orologio, sono sovrapposte. A quale ora si sovrappongono ancora per la prima volta? Quante volte e a quali ore si sovrappongono fra il mezzogiorno e la mezzanotte?

103. Alle 3 le lancette di un qualsiasi orologio sono ad angolo retto (e quella delle ore precede quella dei minuti). A quale ora, per la prima volta, le due lancette si ritrovano ad angolo retto e nello stesso verso? A quale ora per la prima volta si ritrovano ad angolo retto, ma in senso inverso (cioè in modo che la lancetta delle ore segua quella dei minuti)? Quante volte e a quali ore si verificano fra il mezzogiorno e la mezzanotte queste due circostanze?

104. Su di una circonferenza si muovono di moto uniforme, a partire da una stessa posizione (e nel medesimo istante), due punti con le velocità (angolari) rispettive di a e a' gradi/sec., in senso opposto (oppure nello stesso senso). Quando si incontreranno (oppure l'uno raggiungerà l'altro)?

$a =$	5	15	5,4	16,8	192	111
$a' =$	7	9	12,6	12	48	39.

Si tenga conto che di un punto M, il quale descriva una circonferenza di centro O di moto uniforme (cioè percorrendo archi uguali in tempi uguali), si dice *velocità angolare* il numero di gradi descritti intorno ad O dal raggio OM nell'unità di tempo.

105. Quando e dove accadrà, sotto le ipotesi dell'eserc. prec., che i due punti distino di un quarto di circonferenza?

106. Su di una circonferenza si muovono di moto uniforme, due punti, a partire da due posizioni, la cui distanza angolare è di 60°. Vanno nello stesso senso e le loro velocità angolari sono, rispettivamente, di a ed a' gradi/sec. Quando accadrà che l'uno raggiunga l'altro, se inizialmente precede il più lento? Quando, se inizialmente precede il più rapido?

$a = 15$	37,5	1,75	1,85	120	180
$a' = 3$	22,5	0,25	0,65	90	39.

107. Su di una pista circolare due ciclisti, partendo simultaneamente da uno stesso punto, corrono in senso opposto (oppure nel medesimo senso): il primo compie l'intero giro in s secondi, il secondo in s' secondi. Dopo quanti secondi s'incontreranno (oppure l'uno raggiungerà l'altro)?

$s = 60$	90	56	36	60	112
$s' = 30$	60	42	45	84	144.

108. Il carrello di una carrozza ferroviaria risente, ad ogni passaggio da una rotaia alla successiva, una scossa facilmente percettibile al viaggiatore. Se ciascuna rotaia è lunga 15 m., per quanti secondi bisognerà contare codeste scosse, perchè il numero ottenuto fornisca la velocità del treno in km./h.?

109. In una manovra un reggimento di fanteria marcia, con la velocità di 5 km./h., contro il partito avversario. Un ciclista, che va 5 volte più veloce, si stacca dal reggimento e, dopo avere avvistato la pattuglia di punta di un reggimento avversario a 600 m. dal punto più avanzato da lui raggiunto, torna indietro e si riunisce al suo reggimento due ore e mezzo dopo la partenza. Si domanda a quale distanza dal nostro reggimento si trova, in codesto istante, il reggimento avversario, se anch'esso marcia a 5 km./h.

110. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni di 1° grado (o riducibili a sistemi di questo tipo):

1. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 11 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + 4y = 28 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 6x - 7y = 0 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - \dfrac{y}{2} = 11 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + 3y = 7 \\ \dfrac{4x-2}{5} = 3y - 4 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x + \dfrac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \dfrac{x-4}{6} = 29 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} + \dfrac{14}{y} = 10\dfrac{1}{2} \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{y-x}{2} = 9 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+y}{9} = 5 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + x = 15 \\ \dfrac{x-y}{5} + y = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{7x}{6} + \dfrac{5y}{3} = 34 \\ \dfrac{7x}{8} + \dfrac{3y}{4} = \dfrac{5y}{8} + 12 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{8} + \dfrac{y-2}{5} = 2 \\ 2x + \dfrac{2y-5}{3} = 21 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5} = 10 - \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{4y-3x}{6} = \dfrac{3x}{4} + 1 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 0{,}08x - 0{,}21y = 0{,}33 \\ 0{,}12x + 0{,}75y = 3{,}54 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y = x - 6 \\ 3x - 0{,}5y = 28 - 0{,}25y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 4y = 7 \\ \dfrac{x}{3y} + \dfrac{11}{10} = \dfrac{4x-5y}{5y} \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{x-5} + 14 = 0 \\ \dfrac{3y-10(x-1)}{6} + \dfrac{x-y}{4} + 1 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{4x-y-2} = -1 \\ \dfrac{2y-x-3}{3x+3y-2} = 3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{x+1}{y-1} - \dfrac{x-1}{y} = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} = 28 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+4y+2} + \dfrac{1}{2x-3y-2} = 1 \\ \dfrac{8}{3x+4y+2} - \dfrac{2}{2x-3y-2} = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y = a + b \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$ 24. $\begin{cases} (a+c)x - by = bc \\ x + y = a + b \end{cases}$

25. $\begin{cases} x + y = c \\ ax - by = c(a-b) \end{cases}$ 26. $\begin{cases} a(x+y) + b(x-y) = 1 \\ a(x-y) + b(x+y) = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} ax + by = c \\ a^2x + b^2y = c^2 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2 \end{cases}$

29. $\begin{cases} (a+h)x + (b-h)y = c \\ (b+k)x + (a-k)y = c \end{cases}$ 30. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b} + \dfrac{y-b}{a} = 0 \\ \dfrac{x+y-b}{a} + \dfrac{x-y-a}{b} = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a \\ \dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases}$ 34. $\begin{cases} \dfrac{x}{a^2-1} - \dfrac{y}{b^2-1} = b^2 - a^2 \\ \dfrac{x}{b^2+1} + \dfrac{y}{a^2+1} + 2 = a^2 + b^2. \end{cases}$

111. Discutere i sistemi seguenti:

1. $\begin{cases} 12x - 9y = 2 \\ 3y - 4x = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 12x - 16y + 3 = 0 \\ 4y - 3x = 0{,}75 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{x + 2y}{17} = y - x \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (a + b)x = (a - b)y \\ b(x + y) = 1 + a(y - x). \end{cases}$

112. Determinare a in modo che il sistema seguente risulti impossibile:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 1 \\ (3 - a)x - 2y = 2. \end{cases}$$

113. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2y + (3 - a)y = b, \end{cases}$$

e prima si determini a in modo che esso risulti impossibile, poi si determinino a e b in modo che il sistema risulti indeterminato.

114. In un triangolo un angolo è di $57°30'$, mentre la differenza degli altri due è di $11°50'$. Trovare le ampiezze di questi due angoli.

115. Se in un triangolo si aumentano un lato di 5 cm. e la corrispondente altezza di 8 cm., l'area cresce di 165 cm^2; se invece si aumenta lo stesso lato di 2 cm. e si diminuisce la corrispondente altezza di 6 cm., l'area diminuisce di 63 cm^2. Trovare l'area del triangolo.

116. Alcuni amici, dovendo pagare il conto di un pranzo collettivo in una trattoria, osservano che se fossero 2 di più pagherebbero ciascuno, per lo stesso importo complessivo, 2 lire di meno, mentre pagherebbero ciascuno 3 lire di più se fossero 2 di meno. Quanti sono quegli amici e quanto paga ciascuno?

117. Se A desse a B 75 lire, essi avrebbero la stessa somma di denaro. Se invece B desse 25 lire ad A, questi avrebbe il triplo di B. Quante lire ha ciascuno?

118. Un agricoltore vende 10 q. di frumento e 6 q. di grano turco e percepisce L. 1410. Vende poi, agli stessi prezzi, 8 q. di frumento e 15 q. di grano turco e percepisce L. 1689. A qual prezzo per quintale ha venduto il frumento e a quale il grano turco?

119. In una cantina vi sono due qualità di vino. Se si mescolasse la prima qualità colla seconda nel rapporto da 2 a 3 il vino così tagliato verrebbe a costare L. 1,68 al litro; se invece si mescolasse la prima qualità alla seconda nel rapporto da 3 a 2, il vino tagliato verrebbe a costare L. 1,62 al litro. Quali sono i costi per hl. delle due qualità di vino?

120. Un numero (intero assoluto) di due cifre è uguale al quadruplo della somma delle sue cifre; e d'altra parte, se ad esso si aggiunge 18, si ottiene il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso. Trovare questo numero.

121. Un numero (intero assoluto) di due cifre, diminuito di 45, dà il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso, ed è, d'altra parte, uguale agli $\frac{8}{3}$ di questo secondo numero. Trovare quel numero.

122. Due operai, lavorando insieme, possono compiere un certo lavoro in 30 giorni; ma dopo 18 giorni uno di essi abbandona il lavoro, e l'altro lo completa, impiegando 20 giorni di più. In quanti giorni avrebbe condotto a termine quello stesso lavoro ciascuno dei due operai, lavorando da solo?

123. Un agricoltore vuol preparare per l'inverno 100 q. di foraggio, mescolando fieno maggengo e paglia. Il maggengo costa L. 17,5 al quintale, la paglia L. 5,5. Se quell'agricoltore vuole che il foraggio di mistura gli venga a costare L. 10 al quintale, quanti quintali di maggengo e quanti di paglia deve mescolare?

124. Tre botti hanno complessivamente la capacità di l. 2250. Le prime due sono piene e la terza è vuota; e per riempire quest'ultima, bisogna versarvi il contenuto della prima e $\frac{1}{4}$ di quello della seconda, oppure il contenuto della seconda e $\frac{2}{5}$ di quello della prima. Quali sono le capacità in hl. delle tre botti?

125. Se in una frazione si aumenta il numeratore di 1 e si diminuisce il denominatore di 1, la nuova frazione risulta uguale ad 1. Se invece il numeratore si aumenta del denominatore e il denominatore si diminuisce del numeratore, la nuova frazione risulta uguale a 4. Quali sono i termini della frazione primitiva?

126. A e B hanno ciascuno un certo numero di gettoni. A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e subito dopo B dà ad A tanti gettoni quanti ad A ne sono rimasti. Poi ricominciano daccapo: cioè A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e B dà ad A tanti gettoni, quanti ad A ne sono rimasti. Dopo ciò A e B si trovano ad avere ciascuno 16 gettoni. Quanti ne avevano ciascuno dapprincipio? [Si osservi che il problema si può anche trattare come in una sola incognita, perchè dallo stesso enunciato risulta che A e B hanno complessivamente 32 gettoni].

127. Due treni, lunghi rispettivamente, m. 125 e m. 155, corrono in senso inverso su due binari paralleli e impiegano a sfilare completamente l'uno rispetto all'altro (dall'istante, in cui si trovano affiancati i fanali delle due locomotive, a quello, in cui si trovano affiancati i fanali delle due carrozze di coda) 10 secondi. Se corressero nello stesso senso, impiegherebbero a sfilare l'uno rispetto all'altro 70 secondi. Quali sono, in km./h., le velocità dei due treni?

128. Risolvere i sistemi:

1. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=-1 \\ x+4y+9z=-11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=15 \\ y+z=25 \\ x+z=20 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-y=10 \\ 5x-7z=1 \\ 4x+9z=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{6y-4x}{3z-7}=1 \\ \dfrac{5z-x}{2y-3z}=1 \\ \dfrac{y-2z}{3y-2x}=1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{z}=1 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x+y+z=a \\ x-y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x+a=y+b=z+c \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=h \\ a^2x+b^2y+c^2z=h^2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} a(-yz+zx+xy)=xyz \\ b(yz-zx+xy)=xyz \\ c(yz+zx-xy)=xyz \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0 \\ bcx+cay+abz=1. \end{cases}$

129. Riconoscere che dei seguenti sistemi il primo è impossibile, il secondo è indeterminato:

$$\begin{cases} x-4y+6z=0 \\ 2x+3y-4z=1 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+10y-2z=5 \\ 3x-5y+7z=10. \end{cases}$$

130. Un negoziante nella primavera dell'anno scorso ha acquistato 250 hl. di vino di tre qualità diverse, pagandole rispettivamente L. 1,75, L. 2, L. 2,50 al litro e spendendo, complessivamente, L. 53250. Quest'anno compera ancora le medesime quantità di codeste stesse qualità di vino, pagandole per altro L. 1,50, L. 1,80, L. 2,20 al litro e spendendo in tutto

L. 46900. Quanti ettolitri di vino ha acquistato, entrambe le volte, di ciascuna delle tre qualità?

131. Un numero di tre cifre è 61 volte la somma delle sue cifre, e diminuisce di 495, se le sue cifre si scrivono in ordine inverso. Inoltre la somma delle cifre estreme è tripla della cifra di mezzo. Qual'è questo numero?

132. *A* e *B*, lavorando insieme per 9 giorni, guadagnano L. 405; *A* e *C*, lavorando insieme per 12 giorni, guadagnano L. 564; *B* e *C*, lavorando insieme per 7 giorni guadagnano L. 294. Quanto guadagna al giorno ciascuno di essi?

133. Un ciclista va in 6 ore ed $\frac{1}{4}$ da un paese *A* ad un paese *B*, che dista 112 km. La strada da *A* a *B* è in parte piana, e, per il resto, parte in salita, parte in discesa; e la pendenza della salita è uguale a quella della discesa. Il ciclista in piano va a 18 km./h., in salita a 12 km./h., e in discesa a 24 km./h.; e se con queste stesse velocità andasse da *B* ad *A* impiegherebbe 6 ore e 55 minuti. Quanti chilometri di strada piana, quanti di salita, quanti di discesa vi sono fra *A* e *B*? (Borel-Stäckel).

[Il problema si può risolvere come in due sole incognite].

134. Trovare un numero (intero assoluto) di tre cifre, che aumenta di 360 quando si scambiano le prime due cifre, e di 99 quando si scambiano la prima e la terza, mentre diminuisce di 27 quando si scambiano le due ultime cifre. [Si osservi che il sistema di equazioni, cui si è così condotti è indeterminato; ma, in forza della condizione implicita nell'enunciato che i valori delle tre incognite (cifre del numero voluto) risultino numeri interi assoluti compresi tra 1 e 9, il problema ammette soltanto un numero finito di soluzioni (precisamente 5)].

INDICE

CAP. I. — **I numeri relativi.**

CAP. II. — **Principi del calcolo letterale.**

CAP. III. — **Potenze.**

CAP. IV. — **Monomi e polinomi.**

CAP. V. — **Polinomi ordinati secondo le potenze di una indeterminata.**

CAP. VI. — **Equazioni di primo grado.**

ESERCIZI