Enriques, Federigo

Geometria [par 1-11]

in Enciclopedia Italiana, **XVI**, 1932, pp. 623-627.

partitamente fenomeni in sé stessi continui; e serve quindi soprattutto per aiuto mnemonico e per comodità di locuzione. Ma, in ogni modo, non è più artificiale di quanto sia, ad es., la divisione del tempo storico. Come la storia dell'uomo è stata divisa in antica, medievale e moderna, e a queste partizioni si sono aggiunte poi la contemporanea e la preistorica, così anche la storia della Terra è stata divisa in una parte antica (*primaria* dei vecchi autori, *paleozoica* di oggi), una intermedia (*secondaria* o *mesozoica*) e una più recente (*terziaria* o *cenozoica*), e il progresso degli studî rese poi necessaria l'aggiunta di un termine anteriore agli altri (*arcaico* o *archeozoico*) e di un termine più recente degli altri (*quaternario* o *antropozoico* o *neozoico*). La partizione, dapprima riferita al complesso degli strati sedimentarî, secondo la divisione che risale a Giovanni Arduino (1760), venne più tardi riferita alle epoche in cui gli strati stessi si erano formati. A queste maggiori divisioni fu convenuto di dare il nome di *ere*, e ciascuna di esse, nei primi decennî del secolo scorso, fu divisa in un certo numero di *periodi*. Il quadro generale delle ere e dei periodi, quale oggi è comunemente accettato, è il seguente:

Era Archeozoica (o Protozoica, o Arcaica)	Periodo Arcaico
	» Algonkico
Era Paleozoica (o Primaria)	Periodo Cambrico
	» Silurico
	» Devonico
	» Carbonico
	» Permico
Era Mesozoica (o Secondaria)	Periodo Triassico
	» Giurassico
	» Cretacico
Era Cenozoica (o Terziaria)	Periodo Paleogenico (Eocene e Oligocene)
	» Neogenico (Miocene e Pliocene)
Era Neozoica (o Quaternaria)	Periodo Pleistocenico
	» Attuale o Recente.

CARATTERISTICHE FONDAMENTALI DELLE ERE. – Queste caratteristiche si possono sintetizzare schematicamente così:

Archeozoica: formazione dei nuclei delle zolle continentali; ripetuti corrugamenti orogenici, di cui almeno due principali, seguiti (almeno in parte) da glaciazioni; origine della vita; sviluppo di alghe e d'invertebrati.

Paleozoica: due grandi corrugamenti orogenici, seguiti da glaciazioni di cui la seconda più intensa ed estesa; dopo le glaciazioni, ritorno di clima caldo e da ultimo arido; comparsa e sviluppo delle crittogame vascolari (che nella seconda metà dell'era originano i grandi depositi di carbon fossile), dei pesci, degli anfibî, e da ultimo dei rettili.

Mesozoica. – Fin quasi alla fine dell'era, quiete orogenica, clima caldo, dominio delle gimnosperme e dei rettili acquatici, terrestri e volanti; comparsa degli uccelli e di piccoli mammiferi. Verso la fine dell'era, orogenesi parziale con rincrudimento climatico; comparsa e rapido sviluppo delle angiosperme.

Cenozoica: climi progressivamente più differenziati; corrugamento e sollevamento delle grandi catene montuose attuali; rapida evoluzione e dominio delle angiosperme, e segnatamente delle erbe e degli alberi a foglia caduca; dominio dei mammiferi che si sono evoluti con sorprendente sviluppo e sostituiti ai rettili in massima parte estinti.

Neozoica: ripetute espansioni glaciali, seguite da ritorni a climi moderati; sollevamenti postumi dei grandi corrugamenti montuosi; formazione delle pianure alluvionali e stabilimento dell'attuale morfologia terrestre; comparsa e sviluppo dell'uomo e della sua cultura.

Rappresentando con grafiche gli avvenimenti principali della storia fisica del globo e dell'evoluzione degli organismi, si rileva facilmente una notevole corrispondenza fra le crisi orogeniche e quelle climatiche; e si nota altresì come alle crisi corrispondano quelle che con felice espressione sono state chiamate pulsazioni della vita, vale a dire le fasi più salienti dell'evoluzione organica: sempre però con un anticipo (biologicamente necessario) delle principali fasi evolutive del mondo vegetale su quelle del mondo animale.

LUNGHEZZA DEL TEMPO GEOLOGICO. – Nulla sappiamo di concreto a questo proposito. Si tratta senza dubbio di durata estremamente lunga, rispetto alla nostre unità di misura; ma i tentativi di misurarla hanno dato risultati discordi. Per l'intervallo decorso dal principio dell'era paleozoica a oggi, i risultati variano da qualche decina a qualche centinaio di milioni di anni e anche più; per la stessa era neozoica, suscettibile di minori incertezze, le stime oscillano fra alcune decine e parecchie centinaia di migliaia di anni. Riguardo alla lunghezza relativa delle singole ere, una qualche indicazione grossolana può essere fornita dallo spessore massimo della relativa serie sedimentaria, potendosi fino a un certo punto ritenere che, nell'insieme, i grandi cumuli di depositi sedimentarî abbiano richiesto periodi di formazione proporzionali al loro spessore; la somma degli spessori massimi è stata calcolata a 37 km. per il Paleozoico, 21 per il Mesozoico, 18 per il Cenozoico, e poco più di un migliaio di metri per il Neozoico. Dell'Arcaico non conosciamo lo spessore, perché in nessun punto è venuta in luce la primitiva corteccia terrestre; ma quel tanto che ci è noto basta per farci ritenere che esso abbia spessore superiore a tutto il resto della serie sedimentaria; e che pertanto la lunghezza del periodo intercorso fra l'inizio della sedimentazione e il principio dell'era paleozoica sia superiore a quella delle ere paleozoica, mesozoica, cenozoica e neozoica tutte insieme. M. Go.

GEOMANZIA (dal gr. γῆ « terra » e μαντεία « divinazione »). – Metodo di divinazione, mediante punti, originariamente tracciati sulla sabbia, tuttora in grande onore tra i popoli musulmani. Gli Arabi, che la chiamano *'ilm ar-raml* (« scienza della sabbia »), la introdussero in Europa, dove ebbe larga diffusione sin dopo il Rinascimento. Le figure ottenibili secondo le regole, sono sedici, ciascuna con un nome e un significato speciale, che serve all'interpretazione dell'oroscopo. Dante (*Purg.*, XIX, 14) si riferisce appunto a una di queste figure, che era chiamata *fortuna maggiore*.

GEOMETRIA (gr. γεωμετρία). – 1. *Le origini*. – Geometria significa etimologicamente « misura della terra », e rimane ancora traccia di questo significato nella denominazione di « geometri » data ai periti agrimensori. Appunto da un problema di catasto Erodoto fa nascere la geometria in Egitto sotto il regno di Sesostri (Ramêššeše II, circa 1300 a. C.). Racconta (II, 109) che si era divisa la superficie del suolo in tanti appezzamenti rettangolari sottoposti a un tributo annuale, ma l'inondazione del Nilo avendo coperto una parte delle proprietà, si dovette procedere a una nuova misura delle superficie. Così, dice, è nata la geometria, che passò poi in Grecia. E Proclo riprende la tradizione. Questa tradizione contiene un nucleo di verità storica, cioè che la geometria fu coltivata dagli Egiziani e dai Babilonesi fino da un'epoca antichissima, che precede forse di duemila anni gl'inizî della scienza greca. Gli studiosi hanno scoperto importanti papiri (il papiro Rhind, e recentemente il papiro di Mosca) che contengono la risoluzione di problemi geometrici: aree di figure piane, diversi casi del teorema di Pitagora, e finanche il volume del tronco di tetraedro e della sfera; risultati che sembrano offerti come nozioni empiriche, ma che potrebbero indicare un anteriore sviluppo razionale della scienza.

2. *Evoluzione della geometria greca*. – Ora, secondo il riferimento di Proclo nel commento a Euclide, la geometria egiziana sarebbe stata portata in Grecia da Talete di Mileto (circa 600 a. C.). Il quale, a giudicare dai risultati che gli vengono attribuiti come scoperte, avrebbe conosciuto e messo in opera alcuni metodi di geometria pratica, come la valutazione delle distanze per mezzo della *triangolazione* (data una base AB e gli angoli che i raggi visuali AC e BC fanno con AB, si calcolano AC e BC). Ma i più grandi progressi della geometria greca sono dovuti alla scuola pitagorica.

Pitagora stesso avrebbe scoperto che la somma degli angoli d'un triangolo è eguale a due retti, e stabilita in generale la relazione che lega i quadrati dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo rettangolo: il cosiddetto « teorema di Pitagora ». Anzi lo Zeuthen suppone che, appunto in vista di ciò, egli abbia costruito il primo esempio di quelle catene di deduzioni che caratterizzano lo sviluppo della geometria come scienza razionale. Col metodo deduttivo la geometria pitagorica conseguì brillanti risultati, che per estensione coprono quasi intero il campo della geometria elementare classica: in particolare la costruzione dell'esagono e del pentagono regolari, le proprietà delle figure simili e le trasformazioni che dànno, sotto forma geometrica, la soluzione delle equazioni di 2° grado.

Verso il 450 a. C. comincia ad apparire una prima esposizione sistematica degli elementi di geometria per opera di Ippocrate di Chio. Un frammento di uno scritto sulle *lunule* appartenente a questo, ci è stato conservato da Simplicio, e reca ancora testimonianza diretta del grado assai elevato raggiunto a quell'epoca dalla scienza. Tuttavia l'edificio pitagorico non era costruito sulla base d'una concezione razionale degli enti geometrici; si ha motivo di ritenere che, partendo da una concezione empirica delle figure elementari – il punto pensato a somiglianza di un granellino di sabbia, la linea come filo sottile e d'altra parte come serie di punti, ecc. – quei matematici presupponessero che due linee o grandezze ammettano sempre una comune misura. Soltanto la scoperta che la diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili dovette provocare una revisione d'idee, segnando una crisi della scienza. Questa crisi ha d'altronde un significato più generale, investendo in pari tempo la fisica, e si esprime nell'opera della scuola d'Elea con Parmenide e Zenone. I famosi *logoi* di Zenone dànno forma matematica precisa ai paradossi, cui si urta la concezione monadica della geometria accolta dai Pitagorici, secondo la quale dovrebbe esistere un punto esteso ovvero un minimo di estensione, che costituirebbe in qualche modo un infinitesimo attuale. Come tipo di codesti argomenti basti ricordare «l'Achille» (cfr. GIUOCO: Giuochi matematici; ZENONE). Dalla stessa critica nascono i principî dell'analisi infinitesimale: si dovette scoprire allora la somma della progressione geometrica d'infiniti termini; e forse a questo risultato, in ogni modo certo a un processo infinito, si collega la scoperta successiva fatta da Democrito del volume della piramide.

Le testimonianze serbano ancora memoria di un periodo di lavoro alquanto oscuro, in cui le discussioni e i paradossi dell'infinito – urto di mentalità opposte di empiristi e razionalisti – s'intrecciano a risultati positivi, per esempio in ordine alla classificazione degl'incommensurabili e al teorema (di Teeteto) sulla decomponibilità univoca dei numeri in fattori primi, che vi si collega.

Per dare fondamenti rigorosi alla geometria occorreva in specie stabilire una teoria generale dei rapporti, comprendente il caso incommensurabile, e porre criterî di confronto e d'equivalenza delle aree e dei volumi non decomponibili in un numero finito di parti eguali. Questo compito sembra essere stato assolto nella prima metà del sec. IV a. C. da Eudosso di Cnido; al quale si suole attribuire la teoria delle proporzioni esposta nel libro V di Euclide e il cosiddetto metodo d'*esaustione*: procedimento per assurdo in cui si deduce l'eguaglianza di due grandezze dall'impossibilità che esista una differenza, e mercé cui si dimostra, per esempio, la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei raggi (v. INTEGRALE, CALCOLO).

3. *Gli elementi di Euclide: principî.* – Verso il 300 a. C., al termine di un secolo di critica, in cui l'esigenza del rigore logico si era sviluppata fino a un punto che non fu più superato fino a tempi recentissimi, comparve nella scuola alessandrina l'opera che costituisce il trattato classico della geometria antica: gli *Elementi d'Euclide* (v. EUCLIDE). Questi elementi offrono un'esposizione organica, logicamente ordinata, che comprende le parti fondamentali della geometria e dell'aritmetica, cioè quelle nozioni matematiche che stanno a base di ogni superiore sviluppo. L'opera è divisa in tredici libri: i primi quattro libri e il VI concernono la geometria piana, mentre il V, che riceve applicazione nel VI, contiene la teoria generale delle grandezze e dei loro rapporti; i tre libri VII, VIII, IX, sono dedicati all'aritmetica, il X alla classificazione degl'incommensurabili e i seguenti XI, XII e XIII alla geometria solida. Al trattato sono stati aggiunti altri due libri, il primo dei quali apparterrebbe a Ipsicle (circa 150 a. C.). Il sistema euclideo, rigorosamente deduttivo, dipende da alcuni principî che sono formulati: nelle spiegazioni dei *termini* o definizioni, nei *postulati* (ciò che si chiede di ammettere) e nelle *nozioni comuni*.

I «termini», almeno per quanto si riferisce ai concetti primi (punto, linea retta, ecc.), non si possono ritenere come vere definizioni nel senso strettamente logico della parola (v. DEFINIZIONE); ma sono in parte descrizioni che richiamano la genesi psicologica delle idee, in parte formule dichiarative della posizione assunta dal geometra di fronte a un precedente conflitto storico: p. es. la def. I, 1 «il punto è ciò che non ha parti» e la I, 2 «le linee sono lunghezze senza larghezza» dichiarano in maniera negativa il senso ideale degli enti geometrici, quale risulta affermato dai matematici in seguito alla polemica eleatico-pitagorica. Della prima definizione dice appunto Proclo nel suo commento che è conforme al criterio di Parmenide, per cui le definizioni negative convengono ai principî. Le prime proprietà e relazioni degli enti geometrici, insufficientemente espresse nei «termini», sono enunciate da Euclide nei «postulati» e nelle «nozioni comuni». I postulati affermano in generale la possibilità di certe costruzioni elementari, e quindi l'*esistenza* (o l'unicità) di enti soddisfacenti a certe condizioni fondamentali: così i primi tre, della retta per due punti e del cerchio di dato centro e raggio. Il post. 4 (tutti gli angoli retti sono eguali fra loro) – secondo l'interpretazione dello Zeuthen in rapporto alla prop. I, 14 – porterebbe l'unicità del prolungamento della retta, mentre l'unicità del segmento congiungente due punti appare tacitamente ammessa nella prop. I, 4 e si trova enunciata esplicitamente in alcune redazioni o edizioni successive del testo. Il postulato 5, che occupa un posto speciale nella critica posteriore, dice che «due rette del piano, le quali tagliate da una terza formino angoli da una stessa parte la cui somma sia minore di due retti, prolungate da questa parte s'incontrano», e porta l'unicità della parallela per un punto a una retta data, permettendo d'invertire i teoremi sull'eguaglianza degli angoli alterni, interni o esterni, formati da due parallele con una trasversale. Ne deriva quindi il teorema sulla somma degli angoli d'un triangolo, ecc.

Le «nozioni comuni» sono quei principî di significato scientifico generale, che Aristotele definiva col termine pitagorico di «assiomi»; e vi è qualche indizio per ritenere che il nome dato loro da Euclide provenga da un'anteriore trattazione di Democrito, che fu autore d'un libro di *Elementi* perduto per noi, in cui pure si ravvisa qualche somiglianza con l'ordine euclideo. Queste nozioni si riferiscono all'eguaglianza e diseguaglianza delle cose (grandezze): cose eguali a una terza sono eguali fra loro, somme e differenze di cose eguali sono eguali, cose (figure) che si sovrappongono sono eguali, il tutto è maggiore della parte.

Qui deve essere rilevato che Euclide considera l'eguaglianza delle figure sempre in grandezza; così per lui due triangoli o due figure piane sono eguali quando hanno la stessa superficie, e analogamente per i solidi. La relazione di eguaglianza geometrica in *grandezza* a *forma*, che oggi si designa più precisamente come «congruenza», non viene definita esplicitamente negli *Elementi*: due figure congruenti sono designate come «simili ed eguali». E avuto riguardo alla def. VI, 1 (le figure rettilinee sono simili quando hanno gli angoli eguali e i lati proporzionali) e alla III, 1 (due cerchi si dicono eguali se hanno egual raggio) si può dire che, nel concetto euclideo, la congruenza si ridurrebbe all'eguaglianza dei segmenti e degli angoli che definiscono la figura; riuscendo così caratterizzata dai postulati che all'uopo ha dichiarati esplicitamente l'analisi di D. Hilbert (1899). Di una definizione generale delle figure eguali o congruenti come sovrapponibili col movimento non vi è traccia in Euclide, il quale anzi si astiene di solito dall'uso del movimento, ricorrendovi solo una volta (prop. I, 4), quasi di nascosto, per riconoscere l'eguaglianza dei triangoli con due lati e l'angolo compreso eguali.

Si avverta infine che l'ultima delle nozioni comuni, «il tutto è maggiore della parte», nella mente d'Euclide serve da un lato a esprimere le proprietà lineari della retta, onde si può parlare d'un ordine naturale dei suoi punti; mentre d'altro lato sta a fondamento della teoria dell'eguaglianza delle superficie, ove si adopera in specie per invertire i teoremi sull'eguaglianza dei parallelogrammi e triangoli di egual base e altezza, ecc. Si deve pur dire che, nonostante la cura del rigore, i principî di Euclide sono, in qualche parte, manchevoli: che i termini, come già si è detto, non sono vere definizioni, e che il sistema si basa, non solo sui principî esplicitamente dichiarati, ma anche sopra altre premesse inespresse, che l'analisi moderna ha messe in rilievo. Il difetto più notevole concerne appunto gli assiomi che caratterizzano l'ordine naturale dei punti della retta, cioè le sue proprietà lineari, e la partizione del piano per mezzo della retta (proprietà superficiali del piano).

4. *Contenuto degli Elementi.* – Sulla base dei principî anzidetti, di qualche assioma tacitamente ammesso come evidente e dei principî che vengono aggiunti nei libri successivi, procede lo sviluppo delle deduzioni di Euclide. Il libro I contiene le relazioni di eguaglianza e di diseguaglianza dei triangoli, i teoremi sulle parallele, sulla somma degli angoli di un poligono, sull'eguaglianza delle superficie dei parallelogrammi o dei triangoli di egual base e altezza, e, quasi come conclusione, il teorema di Pitagora. Il libro II insegna l'*algebra geometrica*, cioè l'insieme delle relazioni d'eguaglianza fra le superficie dei rettangoli, che traducono sotto forma geometrica la maggior parte della teoria delle equazioni di secondo grado, la quale è poi completata nel libro VI, prop. 28-29. Nel libro III si trova la teoria del cerchio: intersezioni e contatti, angoli iscritti, ecc.; nel IV la costruzione dei poligoni regolari iscritti o circoscritti al cerchio: triangolo, quadrato, pentagono, esagono e pentadecagono; nel V la teoria generale delle grandezze e i loro rapporti, cioè – sotto forma geometrica – il calcolo sui numeri irrazionali; nel VI le proporzioni geometriche, i triangoli simili, ecc. I tre libri seguenti (VII, VIII, IX) sono consacrati all'aritmetica: proporzioni fra numeri interi, massimo comun divisore, decomposizione dei numeri in fattori primi, ecc. Il libro X contiene, sotto forma geometrica, un'accurata classificazione degl'incommensurabili che risultano da radicali quadratici sovrapposti. Ed è importante rilevare che appunto dallo studio di questa teoria hanno ricevuto impulso nel sec. XVI gli algebristi italiani, risolutori dell'equazione cubica, siccome hanno messo in luce recentemente E. Bortolotti e G. Vacca. I libri XI e XII svolgono i principî della geometria dello spazio, e in particolare i rapporti di volume dei prismi e delle piramidi, dei cilindri e dei coni, e la proporzionalità della sfera al cubo del suo diametro. A completare queste teorie manca solo ciò che vi ha aggiunto Archimede: i metodi per calcolare con successive approssimazioni il rapporto π della circonferenza al diametro, e la determinazione del volume e della superficie della sfera. Il libro XIII di Euclide ci dà infine la costruzione dei cinque poliedri regolari convessi.

5. *Commenti e critica.* – Gli elementi di Euclide trovano commentatori e critici fino dall'antichità. Osservazioni di Archimede, di Apollonio, d'Erone, di Gemino, ecc., sono giunte a noi attraverso scrittori greci e arabi (Proclo, Teone Smirneo, Anarizio). Il trattato euclideo, lasciato da parte per la sua difficoltà durante il Medioevo, viene ripreso, edito e commentato fino dagli albori del Rinascimento. Il primo commento di Campano sembra risalire al 1280 ed è stato stampato a Venezia nel 1482. Seguono i commenti di Zamberti (1516), Tartaglia (1543), Péletier (1557),

Candalla (1566), Commandino (1572), Clavio (1574), Cataldi (1613-25), Barrow (1655), e la serie si prolunga con commentatori e critici di tutti i paesi fino ai nostri giorni. Ricordiamo soltanto, fra i più recenti, I. Todhunter, M. Simon, Th. Heath (1909), F. Enriques (1925 segg.). Si può dire che, salvo le revisioni critiche e i rifacimenti didattici, il testo euclideo rimane anche per i moderni come trattato classico della geometria piana elementare. Complementi e perfezionamenti più notevoli sono stati introdotti nella geometria solida da A.-C. Clairaut, A. Cauchy, A.-M. Legendre, R. Baltzer, ecc. Dal punto di vista logico, la critica dei principî ha superato la posizione di Euclide (v. ASSIOMA; DEFINIZIONE). In particolare la critica relativa al post. V ha dato luogo a uno sviluppo di alto interesse scientifico e filosofico: la geometria non euclidea, di cui più oltre.

6. *Complementi moderni.* – Per quel che concerne l'organismo della geometria euclidea vogliamo notare due ordini di perfezionamenti o di complementi portati dalla scienza moderna, cioè: il nuovo assetto dato alla teoria dell'equivalenza dei poligoni e gli sviluppi recenti della teoria delle proporzioni nel senso degli antichi.

La critica (con J.-M.-C. Duhamel) distingue esplicitamente due sensi diversi dell'eguaglianza delle figure: eguaglianza in grandezza e forma (*congruenza*) e eguaglianza in grandezza (di superficie o solidi), a cui si dà il nome di *equivalenza*. Secondo Euclide l'equivalenza, anche per i poligoni rettilinei, è un concetto primitivo, che viene caratterizzato da un certo numero di criterî diversi, quali sono gli assiomi che affermano l'eguaglianza di somme o differenze di superficie eguali. Invece è stato notato dal Gerwien (in *Journal* del Crelle, X, 1833) che poligoni equivalenti sono sempre decomponibili in un numero finito di parti (poligonali) congruenti. Si può quindi sviluppare tutta la teoria dell'equivalenza delle figure piane poligonali partendo da questa semplice definizione: « equivalenti sono due poligoni decomponibili in poligoni eguali (congruenti) ». Questo sviluppo, che a prima vista urta contro difficoltà d'ordine critico, ha ricevuto ormai un assetto perfettamente logico. (Vedi l'art. di U. Amaldi, *Sull'equivalenza*, nelle *Questioni* citate nella bibliografia). Conviene aggiungere che la teoria così costruita non si estende alle figure piane curvilinee. Qui anzi un teorema di M. Rethy (*Math. Annalen*, XXXVIII, 1891) porge la condizione necessaria e sufficiente perché due superficie eguali siano decomponibili in un numero finito di parti congruenti. Nemmeno la teoria costruita nel piano per i poligoni si estende ai poliedri. Infatti, per riconoscere l'eguaglianza dei solidi delle piramidi di base e altezza eguali, si adoperano, fin dalle antiche trattazioni classiche, infiniti procedimenti; e un teorema di M. Dehn (1900) prova che non è possibile, in generale, decomporre due piramidi equivalenti in un numero finito di parti congruenti.

Per quel che concerne i nuovi sviluppi recati alla teoria delle proporzioni nel senso degli antichi, giova ricordare che in Grecia, dopo la crisi della geometria pitagorica susseguente alla scoperta degl'incommensurabili, vi fu la tendenza a sostituire sistematicamente la considerazione delle proporzioni con altre teorie indipendenti dalla nozione di rapporto o di misura. Ora in questo senso appunto procedono gli sviluppi moderni – di Rajola Pescarini, R. Hoppe, H. Grassmann, D. Hilbert, F. Schur, B. Levi, ecc. – dove si mostra come l'intera teoria delle proporzioni fra segmenti possa ricondursi sia alla nozione dell'equivalenza dei rettangoli, sia a una relazione di posizione definita mediante il parallelismo (teorema dei triangoli omotetici). In questo ordine d'idee viene profondamente analizzato e chiarito il significato di alcune proposizioni come quella dei triangoli omotetici e il teorema di Pappo-Pascal sull'esagono iscritto in una coppia di rette, in rapporto alle proprietà (commutativa, ecc.) delle proporzioni. Si veda per ciò l'art. di G. Vailati, *Sulla teoria delle proporzioni*, nelle citate *Questioni*, I, 1.

7. *Gl'inizî della geometria superiore nell'antichità.* – La stessa considerazione delle figure elementari della geometria suggerisce nuovi problemi, la cui risoluzione richiede necessariamente metodi superiori. Tali sono i problemi famosi della *duplicazione del cubo*, della *trisezione dell'angolo* (v. COMPASSO; CUBO; TRISEZIONE), e, il più celebre di tutti, della *quadratura del cerchio* (v. CERCHIO). Narra un alessandrino, che si vuol far passare per Eratostene, in una lettera a Tolomeo Evergete, che nella tragedia di un antico poeta, Minosse chiede di raddoppiare il sepolcro che doveva accogliere Glauco e che era un cubo di 100 piedi di spigolo; perciò egli credeva doversi raddoppiare semplicemente lo spigolo. Più tardi i Delî, spinti dall'oracolo a raddoppiare l'ara di Apollo, s'incontrarono nella stessa difficoltà; onde al problema della duplicazione del cubo è rimasto il nome di « problema di Delo ». Queste leggende testimoniano della celebrità presto acquisita da un problema, che si affaccia come analogo alla duplicazione del quadrato, ma non può essere risolto come questo col semplice uso della riga e del compasso.

Ippocrate di Chio riportò la difficoltà dallo spazio al piano riconducendo la duplicazione, o in generale la moltiplicazione, del cubo all'inserzione di due medie proporzionali fra due segmenti a e b. Il problema riesce in tal guisa soltanto trasformato. Riuscì poi a risolverlo Archita di Taranto mediante le intersezioni di tre superficie di rivoluzione: un cilindro, un cono retto e un toro (superficie generata dalla rotazione di un cerchio attorno a un asse che non passi per il centro). Anche per la trisezione dell'angolo, non riuscendosi a risolvere il problema con retta e circolo, si ricorse presto ad altre curve, e specie a quella che, per essere stata adoperata più tardi a quadrare il circolo, ha ricevuto il nome di *quadratrice* (v. DINOSTRATO), della quale si vuole scopritore Ippia d'Elide, il sofista.

Più tardi gli stessi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo condussero a certe curve di terzo e di quarto grado che sono la *cissoide* di Diocle (v. DIOCLE) e la *concoide* di Nicomede (v. NICOMEDE). Ma il progresso più importante che si collega a codesti problemi è l'impulso dato allo studio delle *coniche* (v.). La ricerca delle due medie proporzionali fu ricondotta appunto all'intersezione di due coniche da Menecmo, discepolo di Eudosso di Cnido. Quindi le coniche formarono oggetto di studio da parte di Aristeo, di Euclide e di Archimede, e trovarono il loro sistematore in Apollonio Pergeo (v.). In tal guisa si ritrovano già negli antichi gl'inizî della geometria superiore.

Da un'altra parte ancora la geometria elementare dava impulso a ricerche che tendono a superarla. Alludiamo al problema delle aree e dei volumi, che già nel caso della quadratura del cerchio mette il matematico di fronte a un'analisi infinitesimale. In questi problemi, dopo Euclide, si è spinto innanzi soprattutto Archimede, a cui si debbono, come abbiamo detto, la scoperta del volume e della superficie della sfera, e inoltre la quadratura della parabola, e in generale la soluzione di problemi, nei quali si può ravvisare l'inizio dei metodi onde è uscita la moderna analisi infinitesimale (vedi INTEGRALE, CALCOLO).

8. *Contributi moderni ai problemi classici.* – Sui problemi classici della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo e della quadratura del cerchio, come pure su un altro problema connesso col secondo, cioè la costruzione dei poligoni regolari, le matematiche moderne hanno portato nuova luce.

In primo luogo si è riusciti a dimostrare rigorosamente che la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo sono problemi dipendenti dalla risoluzione di un'equazione algebrica cubica, la quale non può in generale risolversi mediante estrazione di radici quadrate, onde risulta la conseguenza che quei problemi non possono risolversi col semplice uso della riga e del compasso. Si ha insomma la conferma logica di una impossibilità che già fin dai geometri antichi era stata presentita. Questo risultato discende per noi dalla geometria analitica di Descartes e dalla teoria delle equazioni algebriche (v. COMPASSO).

Anche il problema della costruzione dei poligoni regolari ha ricevuto nei tempi moderni una soluzione esauriente (v. CERCHIO). Già gli Arabi (al-Bīrūnī, Abū l-Giūd al principio del sec. XI) insegnano a ricondurre la costruzione dell'ennagono regolare a un'equazione di terzo grado. Tale ordine di questioni è ripreso da L. Pacioli, L. Ferrari, G. Cardano, R. Bombelli e poi da Keplero. In specie Ferrari riconduce a un'equazione di 3° grado l'equazione dell'ettagono; e di codesta equazione si occupa a lungo Keplero (*Harmonices mundi*, I, prop. 45).

La teoria generale dei poligoni regolari costruibili con riga e compasso è stata sviluppata da C. F. Gauss, che riduce il problema di costruire il poligono di n lati alla soluzione dell'equazione binomia $x^n = 1$. La questione si riconduce al caso di n primo; e si dimostra precisamente che sono costruibili con riga e compasso soltanto i poligoni di un numero primo di lati della forma $n = 2^r + 1$. Dopo i poligoni regolari di 3 e 5 lati, s'incontra così il poligono costruibile di 17 lati, e poi quello di 257.

Quanto alla quadratura del cerchio, i progressi portati dalla critica moderna consistono non soltanto negli sviluppi infiniti che in varî modi si ottengono per il numero π, ma anche nella dimostrazione rigorosa che la quadratura anzidetta (o, il che equivale, la costruzione della semicirconferenza rettificata, di lunghezza π) non può essere ottenuta con la riga e col compasso e nemmeno con l'intersezione di curve algebriche, perché π non è radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Questo teorema che, proseguendo le ricerche di C. Hermite, è stato stabilito da F. Lindemann nel 1882, chiude definitivamente l'era dei tentativi infruttuosi per riuscire alla quadratura del cerchio.

9. *Geometria non euclidea.* – Abbiamo accennato alla critica dei geometri intorno al post. V d'Euclide, il cosiddetto postulato delle parallele. Già negli autori greci (p. es. in Gemino) e poi negli arabi, si vede fatto il tentativo di eliminare il postulato, sostituendo alla definizione euclidea delle rette parallele (rette d'un piano che prolungate non s'incontrano) un'altra definizione: rette d'un piano fra loro equidistanti. E fra i moderni questo tentativo viene ripreso da P. A. Cataldi e da Vitale Giordano da Bitonto. Ma si tratta di un tentativo illusorio. È vero che dall'assumere due rette equidistanti del piano si possono trarre le stesse conseguenze che derivano dal postulato euclideo; ma quella assunzione nasconde in effetto un postulato, cioè che la linea, luogo dei punti equidistanti da una

retta e da una parte di essa, sia anch'essa una retta. Come bene ha spiegato G. Saccheri, vi è qui la *fallacia della definizione complessa*, poiché di nessuna figura che risponda a condizioni complesse è lecito affermare che esista: l'esistenza costituisce appunto quell'ipotesi che si pretendeva di avere eliminata. Fra i critici del postulato delle parallele si deve annoverare il geometra inglese J. Wallis, il quale ha rilevato che il postulato euclideo (in aggiunta agli altri principî che lo precedono) costituisce la condizione necessaria perché esistano figure simili e disuguali, cosicché potrebbe sostituirsi con l'ipotesi che esistano, per es., triangoli simili non eguali fra loro.

Più tardi (nel sec. XVIII) la questione ha fatto notevoli progressi per la critica del Saccheri e di J.-H. Lambert. Il primo ha riconosciuto che il postulato euclideo equivale all'ipotesi che esista un quadrilatero con quattro angoli retti (ovvero anche un triangolo in cui la somma degli angoli è uguale a due retti). Se si costruisce un quadrilatero con tre angoli retti, il quarto angolo potrà risultare a priori retto, acuto o ottuso. Nella prima ipotesi c'è il sistema euclideo. La terza ipotesi conduce facilmente a un assurdo, contraddicendo alla nozione che abbiamo della retta come linea aperta di lunghezza infinita. Infine la seconda ipotesi, che l'autore si sforza, sofisticamente, di riconoscere assurda, conduce in realtà a un sistema geometrico logicamente possibile, che appunto i successori di Saccheri riconosceranno col nome di geometria non euclidea. Pertanto il risultato più importante di tali ricerche si può compendiare nel teorema di Saccheri-Legendre che la somma degli angoli d'un triangolo è sempre eguale a due retti (geometria euclidea) ovvero sempre minore (o anche sempre maggiore, se si lascia cadere il postulato della retta linea aperta, infinita).

Le ricerche sopra menzionate preludono alla costruzione della geometria non euclidea che è stata realizzata circa un secolo fa da C. F. Gauss, N. I. Lobačevskij e J. Bólyai. Se si assumono i principî (definizioni, assiomi e postulati) che costituiscono le premesse delle prime 27 proposizioni euclidee (teoria dell'uguaglianza dei triangoli) e si lascia cadere il post. V d'Euclide, di cui viene fatto uso soltanto nella prop. 28, si presentano tre ipotesi: 1. o le rette di un piano sono sempre secanti; 2. o tra le rette di un piano che passano per un punto esterno a una retta data vi sono infinite rette secanti e infinite rette non secanti, e quindi due rette limiti di separazione fra le une e le altre, a cui si può dare propriamente il nome di parallele; 3. o infine tutte le rette uscenti da un punto segano un'altra retta data, a eccezione di una sola che è la parallela (e quest'ipotesi ricade in quella di Euclide).

L'ipotesi 1. è in effetto contraddittoria con la nozione della retta come linea aperta; e infatti Euclide riesce a dimostrare l'esistenza di una parallela, senza far uso del suo postulato V. Per tale motivo Lobačevskij e Bólyai lasciano cadere la detta ipotesi come impossibile. Invece essi sviluppano le conseguenze dell'ipotesi 2. dimostrando che essa dà luogo a un sistema logicamente possibile in cui la somma degli angoli di un triangolo è sempre minore di due retti. Lo sviluppo della trigonometria non euclidea, e poi le interpretazioni della geometria non euclidea, di cui diremo più avanti, valgono a dimostrare che codesto sistema non potrà mai condurre a un assurdo logico, e pertanto che è vano il tentativo di dedurre il postulato delle parallele dagli altri principî della geometria euclidea. In altre parole si riconosce così l'indipendenza logica del detto postulato dalle anteriori premesse.

La geometria non euclidea ha ricevuto un nuovo grande impulso dalla critica di Bernardo Riemann (1826-1866), il quale ha sviluppato una teoria affatto generale degli spazî o varietà a più dimensioni a curvatura variabile, in cui è data in qualche modo una metrica (teorema di Pitagora assunto come vero nell'infinitesimo). Da questa teoria risulta che la geometria euclidea del piano può essere interpretata come geometria sopra una superficie di curvatura costante negativa, l'interpretazione essendo valida in piccolo, cioè per regioni limitate del piano: una linea retta di questa regione trova riscontro in una geodetica della superficie. Questa interpretazione è stata brillantemente illustrata in un classico saggio di E. Beltrami (in *Giorn. di Mat.*, VI, 1868) e D. Hilbert ha dimostrato più tardi (in *Trans. Amer. Math. Society*, II, 1901) che non si può dare una simile interpretazione in grande, cioè non esistono superficie a curvatura costante negativa prive di singolarità, sopra cui valga nella sua interezza il sistema geometrico di Lobačevskij.

La critica di Riemann porta un'altra conseguenza, cioè che accanto al sistema di Lobačevskij-Bólyai è anche possibile un altro sistema di geometria dove le rette del piano sono sempre secanti, cioè non esistono parallele. Solo che, conservando in genere gli altri principî della geometria euclidea, conviene modificare l'ipotesi che la retta sia una linea aperta e concepirla come linea chiusa, e pertanto illimitata, ma di lunghezza finita.

Questi due sistemi non euclidei hanno poi trovato un'interpretazione rispetto alla geometria proiettiva nella metrica di A. Cayley rispetto a una quadrica. Si ha il sistema di Lobačevskij assumendo come quadrica assoluta una quadrica a punti ellittici; e invece il sistema di Riemann assumendo una quadrica immaginaria, definita da una polarità reale. Il caso euclideo risponde alla scelta di una quadrica che degenera come inviluppo in una conica immaginaria. Intorno a queste interpretazioni hanno recato luce in modo particolare le ricerche di F. Klein (cfr. n. 32 *b*).

10. *Il problema dello spazio.* – La costruzione della geometria non euclidea assume un alto significato scientifico e filosofico in ordine al problema dello spazio. Mentre la dottrina di E. Kant considera lo spazio (ordine della sensibilità esterna) come una forma a priori dell'intuizione, e ritiene perciò che gli assiomi siano verità necessarie, presupposti di ogni interpretazione possibile dell'esperienza, Gauss e Lobačevskij sono condotti a vedere negli assiomi e postulati un contenuto di fatto, cioè una verità sperimentale. Per essi, in particolare, la questione se lo spazio fisico sia euclideo o non euclideo non può essere decisa a priori. Lo spazio possibile dipende nell'ipotesi non euclidea da un parametro k (o da $1/k =$ $=$ curvatura); e solo per $k = \infty$ si riduce al caso euclideo. Quindi la risposta sulla validità o meno del postulato d'Euclide deve venire da un'accurata misura della somma degli angoli d'un triangolo; ove tale somma si riscontri, anche per un solo triangolo, minore di due retti, varrà la geometria di Lobačevskij; invece la verifica che essa sia eguale a due retti, non potendo mai farsi in maniera rigorosa, non varrà mai a giustificare il postulato d'Euclide se non in maniera approssimativa. Gauss esamina per ciò il triangolo geodetico (i cui lati sono, all'incirca, km. 69, 86, 197) Broken, Hohehagen, Inselberg, e Lobačevskij ferma la sua attenzione sulle parallassi delle stelle e ne trae la conclusione che il parametro k vale $k >$ 170.000 volte il diametro dell'orbita terrestre; misure più accurate delle stesse parallassi portano il detto numero oltre il milione, sicché lo spazio risulta sensibilmente euclideo nell'ordine di approssimazione in cui la curvatura $1/k$ può assumersi come zero. La questione sul significato fisico della geometria è stata dibattuta, in varî sensi, da B. Riemann, H. I. Helmholtz, W. K. Clifford, F. Klein, H. Poincaré, F. Enriques, ecc. La risposta dipende dal senso che si voglia attribuire agli enti geometrici in rapporto agli oggetti dell'esperienza fisica. Infine si arriva alla conclusione che la geometria non può essere considerata in maniera astratta, ma deve ritenersi come parte della fisica; e per conseguenza la soluzione del problema dello spazio deve cercarsi nel dominio della meccanica. Appunto a questo spirito è informata la teoria della relatività generale di A. Einstein, che interpreta la dinamica come geometria di uno spazio generale in cui è definita una metrica con curvatura variabile (cfr. RELATIVITÀ).

11. *Altre ricerche di assiomatica: geometria non archimedea.* – Il postulato d'Euclide delle parallele non è il solo a cui si sia attaccata la critica dei geometri moderni. Una volta accolto il concetto che i postulati siano, dal punto di vista logico, le premesse arbitrarie di un sistema ipotetico-deduttivo, e che dal punto di vista fisico debbano valutarsi in rapporto all'esperienza, ne emerge che anche altri principî della geometria possono esser posti in discussione, sia dal punto di vista della costruzione astratta, sia in ordine alle esigenze sperimentali. Da quest'ultimo punto di vista basterà citare le speculazioni intorno alla connessione dello spazio (forme di Clifford-Klein). L'idea che ispira questi sviluppi è che l'esperienza necessariamente limitata che possiamo avere delle proprietà spaziali può essere estesa in diversi modi quando si passa da una regione allo spazio nella sua totalità. Per es. una superficie che goda di certe proprietà nell'intorno di ogni suo punto può avere tuttavia connessioni diverse. Valga l'esempio del cilindro in confronto al piano: in piccolo, la superficie cilindrica e la superficie piana hanno la stessa geometria, ma le due geometrie differiscono per l'ambiente preso nella sua totalità. Fra le ricerche critiche che hanno dato luogo in questi ultimi tempi a sviluppi assai notevoli, vogliamo almeno menzionare quelle da cui è uscita la cosiddetta geometria non archimedea. Col nome di postulato di Archimede si suol designare un principio, che pur figura nella def. V, 4 d'Euclide e che risale verosimilmente a Eudosso: date due grandezze, esiste sempre un multiplo dell'una maggiore dell'altra. Applicato ai segmenti, questo postulato esprime la condizione perché l'insieme dei punti della retta sia contenuto in un continuo, nel senso di J. W. R. Dedekind. Esso nega in sostanza l'esistenza d'un infinito o d'un infinitesimo attuale delle lunghezze.

Ora, la questione se sia possibile l'infinito o l'infinitesimo attuale non ha cessato di essere discussa dai tempi antichi fino ai nostri giorni. In particolare i geometri hanno dibattuto lungamente la questione se l'angolo di contingenza, formato da due linee tangenti, debba ritenersi come nullo ovvero come infinitamente piccolo rispetto all'angolo rettilineo (v. ANGOLO). Discussioni di tal genere s'incontrano in Campano, Péletier, Candalla, Cardano, Clavio, Galileo fino a Newton, col risultato di chiarire il concetto della curvatura d'una linea. La questione è stata ripresa alla fine del secolo scorso da G. Veronese, il quale è riuscito a costruire un sistema di geometria perfettamente coerente, in cui anzi è valida la geometria proiettiva ordinaria, per cui non è soddisfatto il postulato di Archimede. La costruzione è stata poi chiarita dal punto di vista aritmetico mercé i monosenî di T. Levi-Civita. Più tardi D. Hilbert ha dato un largo sviluppo alla geometria non archimedea, indagando i rapporti di mutua dipendenza delle proposizioni fondamentali entro questo sistema. E queste ricerche sono state proseguite dalla sua scuola, e specialmente da M. Dehn.

Cfr. L. Th. Heath, *The thirteen books of Euclid's elements*, 2ª ed., Cambridge 1926; *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, col concorso di diversi collaboratori, ed. da F. Enriques, Bologna, I (I-IV), 1925; II (V-IX), 1930. - Per la storia della geometria antica: H. G. Zeuthen, *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge*, Parigi 1902; G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano 1914; L. Th. Heath, *A History of Greek mathematics*, Oxford 1921. - Per le questioni sui principî della geometria: *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da F. Enriques, I, II, 3ª ed., Bologna 1924-25; F. Enriques, *Prinzipien der Geometrie*, in *Encykl. der math. Wiss.*, III AB 1, Lipsia 1907; G. Veronese, *Fondamenti di geometria*, Padova 1891; D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7ª ed., Lipsia 1931. - Sulla geometria non euclidea: R. Bonola, *La geometria non euclidea*, Bologna 1906; id., *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee*, nelle già cit. *Questioni* raccolte da F. Enriques, II, 1, Bologna 1925. - Sul problema dello spazio: H Helmholtz, *Über die Axiome der Geometrie*, Brunswick 1876; idem, *Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, in *Wissenschaft. Abhandlungen*, II, Lipsia 1883; id., *Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, *ibid.*; id., *Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze*, *ibid.*; W. K. Clifford, *The common sense of the exact sciences*, Londra 1883, trad. ital., Milano 1886; H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Parigi 1902; F. Enriques, *Problemi della scienza*, 2ª ed., Bologna 1926. F. En.

NUOVI METODI E NUOVI INDIRIZZI FINO A CIRCA LA METÀ DEL SECOLO XIX.

12. *Metodo sintetico e metodo analitico.* – Nella geometria dell'antichità, alla quale il Medioevo non portò contributi d'idee essenzialmente nuove, il processo deduttivo che dalle premesse fondamentali (postulati) conduce alle proprietà delle varie figure, si svolge mediante considerazioni riguardanti direttamente queste stesse figure, le quali nel corso dei ragionamenti non vengono mai perdute di vista. Il calcolo viene adoperato solo per esprimere relazioni tra i numeri che misurano certe grandezze, e ricavare queste relazioni l'una dall'altra. È il metodo geometrico puro, o sintetico. A esso fa riscontro il metodo analitico (v. ANALITICA, GEOMETRIA; COORDINATE), nel quale i punti di una retta, di un piano, dello spazio, o più generalmente gli enti geometrici (rette, piani, cerchi, sfere,...) di un sistema continuo qualsiasi, s'individuano per mezzo di certi numeri, detti coordinate, in corrispondenza biunivoca e continua col sistema degli enti medesimi; e le proprietà delle figure di punti (linee, superficie,...) o di rette, cerchi,... di cui si tratta si traducono ad es. nel fatto che le coordinate dei punti, rette... di queste figure soddisfano una o più equazioni assegnate. La deduzione successiva di queste proprietà, ossia delle equazioni che le traducono analiticamente, le une dalle altre, e la determinazione d'una figura, cioè delle sue coordinate o della sua equazione, in base a condizioni assegnate, si effettuano con procedimenti di calcolo. Il metodo analitico, o *geometria analitica*, consiste pertanto nello studio sistematico della geometria per mezzo del calcolo, ossia dell'analisi (v. ANALISI). Una stessa questione geometrica si può trattare sia con l'uno sia con l'altro metodo; e gli sviluppi di calcolo della trattazione analitica sono spesso la traduzione delle considerazioni geometriche, che occorrono nella trattazione sintetica. Entrambi i metodi hanno il loro vantaggi. Il metodo analitico ha un algoritmo spesso comodo e facile; in alcune questioni, per es. nella teoria delle curve e superficie algebriche e nella geometria differenziale, si è dimostrato preferibile per la maggior semplicità con cui se ne possono introdurre i concetti principali. Ravvicinando inoltre, sotto uno stesso tipo di equazioni, enti geometrici differenti, consente anche alla geometria tutta la generalità e l'astrazione dell'analisi. Esso conduce però talvolta a perder d'occhio il vero oggetto della geometria: le figure e le costruzioni; il Cremona scrisse che è « studiare la geometria per isbieco, nelle applicazioni del calcolo ». Viceversa il metodo sintetico, ragionando sulla figura, presenta qualche volta il pericolo di limitare la trattazione al caso singolo che si esamina, o a un numero ristretto di casi. Tuttavia anch'esso, ravvivato e sveltito con vedute più generali, atte a evitare minute distinzioni di casi, ha avuto parte importantissima nello sviluppo della geometria moderna; specialmente nella prima metà del sec. XIX con la costruzione della geometria proiettiva (nn. 18, 19). Oggi la questione del metodo ha perduto ogni importanza. Ciò che interessa, sono i risultati nuovi, qualunque sia il metodo con cui siano conseguiti; ma è sempre utile se i due metodi possono scambievolmente completarsi e illuminarsi.

13. *Il metodo sintetico nel sec. XVII.* – Nella prima metà del sec. XVII troviamo già in G. Desargues (1593-1662) e B. Pascal (1623-1662) i primi germi di nozioni e metodi più generali, principalmente l'uso delle proiezioni (v. DESCRITTIVA, GEOMETRIA: n. 2) che dovevano costituire due secoli dopo la base della geometria proiettiva. Desargues per primo considera le diverse specie di coniche (ellisse, parabola, iperbole) come varietà di un'unica curva (v. CONICHE): concetto rispondente a un maggiore spirito di generalità, e al bisogno di raggruppare più verità in una; e alle coniche trasporta per proiezione proprietà del cerchio. In base alla nozione di *punto di fuga*, già usata in prospettiva, considera un sistema di rette complanari parallele come analogo al sistema delle rette passanti per uno stesso punto, che può ottenersene per proiezione. E per un quadrangolo piano inscritto in una conica, studia la relazione fra i sei punti intersezione dei lati e della conica con una stessa retta, oggi nota sotto il nome d'*involuzione* (n. 25). Di Pascal è particolarmente noto il teorema dell'*Esagrammo mistico*: « In ogni esagono semplice inscritto in una conica le coppie di lati opposti s'incontrano in punti allineati »; relazione caratteristica fra sei punti di una conica, dedotta per proiezione dal caso del cerchio. Lo spirito di questi metodi continua in Ph. de La Hire (1640-1718); nell'*Enumeratio linearum tertii ordinis* di Newton (1643-1727), nella quale è dimostrato che le 72 specie di queste curve (ma l'enumerazione non è completa) possono tutte ottenersi come proiezioni di una delle cinque *parabole campaniformi* o *divergenti* (v. CUBICHE); come anche nel *Traité de perspective* di J.-H. Lambert (1728-1777).

14. *Origini del metodo analitico.* – Il metodo analitico ha principio anch'esso nella prima metà del sec. XVII, a opera principalmente di R. Descartes (v.) e di P. Fermat (1601-1665). Descartes nella sua *Géométrie* (1637; preceduto in ciò da R. Bombelli; v. ALGEBRA: nn. 6, 20, 23) sostituisce sistematicamente a un segmento la sua misura, ed eseguisce geometricamente sopra i segmenti le operazioni algebriche sui numeri che li misurano; concepisce una linea piana come generata secondo una certa legge, in opposizione alla concezione greca, puramente contemplativa, della curva pensata *ab initio* in tutta la sua estensione, e ne riferisce il punto generico P a una retta, sia pure scelta in relazione al problema di cui si tratta, mediante la lunghezza $AM = x$ su quella retta e lo spostamento $MP = y$ in direzione costante; imposta analiticamente i problemi geometrici, e cerca di ricondurne la soluzione alla determinazione di uno o più segmenti incogniti, esprimendo con equazioni le relazioni fra questi segmenti e segmenti noti, e riducendo così il problema alla risoluzione di questo sistema di equazioni. Pur in forma imperfetta, era così gettato il ponte tra la geometria greca e l'analisi, permettendo loro di giovarsi reciprocamente: vera pietra miliare nella storia del pensiero scientifico. Il concetto dell'equazione di una linea piana, e in particolare lo studio delle coniche come luoghi rappresentati da equazioni di 2º grado, si trova pure in Fermat, nella memoria *Ad locos planos et solidos isagoge*, pubblicata nel 1679, ma compilata prima della *Géométrie* di Descartes.

15. *Il metodo analitico fino a tutto il sec. XVIII.* – Il periodo di circa 150 anni che corre da Descartes alla fine del sec. XVIII è caratterizzato da un rigoglioso sviluppo del metodo analitico, per la maggior attrattiva che esercitavano i nuovi procedimenti, e la maggior facilità con cui permettevano di risolvere problemi generali già affacciatisi nella scienza. Verso la fine del sec. XVII, dal connubio dell'algebra con la nozione di limite, sorgeva il calcolo infinitesimale, già venuto maturando nei procedimenti di B. Cavalieri (1598-1647) e di E. Torricelli (1608-47), definitivamente acquisito con Newton e Leibniz (1646-1716), e notevolmente ampliato nel sec. XVIII a opera principalmente di Eulero (1707-83) e Lagrange (1737-1813). Così la geometria analitica poté usare e interpretare geometricamente tutti i procedimenti dell'analisi, sia algebrica sia infinitesimale. Sotto certe condizioni, sempre soddisfatte nei casi più comuni, ogni funzione di una variabile è rappresentata geometricamente da una linea piana (v. CURVE); la derivazione della funzione in un punto equivale geometricamente alla costruzione della tangente alla linea in questo punto (v. DIFFERENZIALE, CAL-