Enriques, Federigo

Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche

vol. **parte I**

Cedam, Padova, 1932. (raccolte da L. Campedelli)

R. UNIVERSITÀ DI ROMA

FEDERIGO ENRIQUES

LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

RACCOLTE DAL

Dott. LUIGI CAMPEDELLI

PARTE PRIMA

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
GIÀ LITOTIPO - PADOVA 1932 - X

F. [illegible]

Printed in Italy

OFFICINE GRAFICHE DELLA « CEDAM » - PADOVA 1932 - X

INDICE

Capitolo II – Sistemi covarianti e invarianti.

Capitolo III – Le superficie aggiunte.

CAPITOLO IV – IL GENERE NUMERICO ED IL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH PER LE SUPERFICIE.

CAPITOLO V – SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE E IN PARTICOLARE SULLE SUPERFICIE REGOLARI.

FINITO DI STAMPARE NEL FEBBRAIO DEL 1932-X

INTRODUZIONE

1. – GENERALITÀ, TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI

Indicheremo costantemente con F la superficie algebrica (irriducibile) cui ci riferiremo, per lo svolgimento del nostro studio. La F apparterrà ad uno spazio lineare S_r di dimensione r conveniente: vedremo in seguito quando, e con quali conseguenze per la F, si possa supporre $r=3$ senza portare con ciò una vera e propria restrizione non necessaria (§3): In tal caso scriveremo l'equazione della F indifferentemente sotto la forma:

$$f(x, y, z) = 0$$

o:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

secondo che intenderemo di riferirci a coordinate cartesiane ordinarie o generali proiettive, e la f rappresenterà, rispettivamente, un polinomio di grado <u>m</u> in x, y, z, o una forma dello stesso grado in x_1, x_2, x_3, x_4.

Riterremo senz'altro noti i concetti proiettivi di <u>ordine, classe, superficie polari</u>, ecc., della F, e ricordiamo che la F può presentare diversi tipi di <u>singolarità</u>.

Una linea γ luogo di punti multipli (secondo i) per la sezione piana generica della F, costituisce una <u>*curva multipla*</u> (di molteplicità i) della F.

Dicesi invece *punto multiplo isolato* (di molteplicità s) di F, un punto, non appartenente alla linea multipla, tale che ogni piano generico per esso determini una sezione avente ivi un punto s-plo.

Questi due tipi di singolarità possono anche, in qualche modo, riguardarsi sovrapposti in certi <u>punti singolari</u> sopra la linea multipla: se accada che sulla γ si trovi un punto particolare O tale che la curva sezione di F con un piano per O abbia ivi una singolarità non giustificata dall'appartenere O alla linea γ.

Inoltre le singolarità di una superficie possono complicarsi per la presenza di linee e punti singolari infinitamente vicini, dando luogo ad una grande varietà di casi (⁜).

Ricorderemo ora brevemente il concetto di *trasformazione birazionale*. Siano $x_0, x_1, \dots, x_r$ ed $y_0, y_1, \dots, y_s$, due gruppi di variabili che possiamo considerare come coordinate omogenee di un punto x in uno spazio lineare S_r, ad r dimensioni, e di un punto y in un spazio S_s a s dimensioni; sta-

---

(⁜) <u>*Cfr. Enriques-Chisini*</u>. Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche" Bologna - Vol. II° - libro IV° cap. IV° - §§ 34, 35.

biliamo fra queste variabili delle relazioni della forma:

(1) $\rho\, y_i = \varphi_i\,(x_0, x_1, \dots, x_r)$ $(i = 0, 1, \dots, s)$

dove le φ_i sono forme algebriche, dello stesso grado, nelle x, e ρ è un fattore di proporzionalità; si avrà allora una *trasformazione razionale* tra lo spazio S_r ed una certa varietà algebrica di S_s. In essa al punto generico x di S_r corrisponde un (sol) punto y di S_s, in guisa che mentre x descrive, in S_r, una curva, o una superficie, ..., algebrica V, il punto y descrive in S_s (in generale) una linea, una superficie, ..., algebrica V' che corrisponde a V. E il punto generico y di V' può provenire da un solo punto, o da più punti x (anche in numero infinito) di V. Se ha luogo il primo caso, è possibile - mediante le (1) e le equazioni che definiscono la V in S_r - esprimere a loro volta le variabili x in funzione razionale delle y, con relazioni della forma:

(2) $\sigma\, x_k = \psi_k\,(y_0, y_1, \dots, y_s)$ $(k = 0, 1, \dots, r)$. Le (1) e le (2) definiscono una *corrispondenza, o trasformazione birazionale* tra V e V'.

In particolare si può avere una trasformazione birazionale (o *Cremoniana*), fra due spazi lineari (aventi ugual dimensione): le (1) e (2) definiscono una tale trasformazione fra due S_r se $r = s$ e se, inoltre, le (1) si possono dedurre dalle (2), e inversamente, per tutti i valori di x e di y.

Notiamo infine che, evidentemente, la trasformazione prodotto di due o più trasformazioni birazionali, è una trasformazione birazionale.

2. - SCIOGLIMENTO DELLE SINGOLARITA'

Questo premesso, mostriamo con alcuni esempi, come, mediante una opportuna trasformazione birazionale, si possano sciogliere alcune delle singolarità presentate dalla superficie F, cioè come si possa passare ad una F', birazionalmente identica alla F, e non presentante più certe singolarità che possedeva la F.

Supponiamo che la F abbia una curva doppia nodale γ, e consideriamo le superficie φ di un ordine l sufficientemente alto, che passino (semplicemente) per γ.

Per accertarsi dell'esistenza di tali superficie φ, non contenenti come parte la F, basta osservare che alla imposta condizione soddisfano, ad esempio, le polari di F.

Le φ costituiscono un sistema lineare $|\varphi|$, che avrà una certa dimensione r; riferiamo proiettivamente le superficie φ agli iperpiani di un iperspazio ad r dimensioni S_r, il che si ottiene ponendo

$$y_i = \varphi_i \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

dove $(y_0\, y_1 \dots y_r)$ sono le coordinate proiettive omogenee del punto generico di S_r, e $\varphi_0 = 0$; $\varphi_1 = 0 \dots, \varphi_r = 0$ indicano le equazioni di $r+1$ superficie φ, linearmente indipendenti.

Per un punto P generico di F passano ∞^{r-1} superficie di $|\varphi|$, alle quali corrispondono in S_r gli iperpiani di una stella di centro P': onde al variare di P in F, P' descrive una superficie F' di S_r, che risulterà in generale in corrispondenza biunivoca con F.

Sia, allora, Q un punto generico della curva doppia γ, e siano α e β i piani ivi tangenti ad F. Alle ∞^{r-1} superficie φ tangenti al piano α in Q, corrisponde in S_r una stella di centro Q'; analogamente gli iperpiani corrispondenti alle ∞^{r-1} superficie φ tangenti a β in Q, determinano un secondo punto Q'': ed i due punti Q' e Q'' (semplici per F') devono evidentemente riguardarsi come trasformati di Q (*). Quando Q varia descrivendo

---

(*) - Il punto Q è il punto generico di γ e quindi i due piani α e β (essendo γ linea nodale) sono distinti; tuttavia, in generale, esisteranno su γ dei punti nei quali i due piani tangenti coincidono: questi punti prendono il nome di *punti cuspidali (pinch-points, points-pince)*. Così, ad esempio, una superficie F di ordine m, dotata di una retta doppia $\underline{a}$ possiede, in generale, su questa 2(m-2) punti cuspidali. Infatti un piano per $\underline{a}$ sega F secondo una curva residua d'ordine m-2 che incontra $\underline{a}$ in m-2 punti, quindi fra i due piani passanti per $\underline{a}$ che toccano F in un medesimo punto variabile di $\underline{a}$, intercede una corrispondenza [m-2, m-2], che ha appunto 2(m-2) elementi uniti (*Cfr. Enriques Chisini - op. cit. - vol II° - pagina 578*).

Tornando al caso nostro, se Q è un punto cuspidale i due punti Q' e Q'' coincidono in un unico punto semplice (in generale) per F'.

la curva γ, i punti Q' e Q'' descrivono una curva γ', semplice per F' (*).

Considerazioni analoghe possono ripetersi relativamente a curve multiple di F con molteplicità maggiore di due.

Come altro esempio supponiamo che la F possieda un _punto doppio conico_ O, (in cui il cono quadrico _tangente_ sia irriducibile): in modo analogo a quello sopra seguito, trasformiamo ancora la F in una superficie F' con l'aiuto di un sistema lineare ∞^r di superficie φ, passanti semplicemente per O.

Sopra la F' al punto O di F, corrisponde una curva semplice: infatti, le ∞^{r-1} superficie φ tangenti in O ad una generatrice $\underline{g}$ del cono ivi tangente ad F, determinano in S_r una stella ∞^{r-1} d'iperpiani il cui centro O' è un punto (semplice) di F, il quale al variare della g nel cono suddetto descrive la curva θ che devesi riguardare come trasformata di O. Possiamo notare che la θ è una conica, poichè una φ generica di $|\varphi|$, ha in comune con la F due punti dell'intorno di O (i due punti corrispondenti alle generatrici comuni al piano tangente in O alla φ, e al cono tangente in O alla F), e quindi l' S_{r-1} corrispondente a φ, incontra la curva trasformata di O in due punti.

(*) Sopra la γ' le coppie di punti Q', Q'' costituiscono _coppie neutre_, cioè presentanti una sola condizione alle curve trasformate delle sezioni di F con le superficie di un sistema lineare non avente punto base in Q. Ed in corrispondenza ai punti cuspidali di γ, si hanno in γ' coppie neutre costituite di due punti infinitamente vicini.

Analogamente un punto i-plo conico (con cono tangente irriducibile) di F, per il quale si facciano passare le superficie trasformanti φ, darà luogo ad una curva irriducibile, semplice, d'ordine $\underline{i}$, della F'.

Se il cono tangente in un punto multiplo O di F è invece riducibile risulta pure riducibile la curva che gli corrisponde su F'. Così ad un punto doppio *biplanare* (generale) corrisponde su F' una coppia di rette uscenti da uno stesso punto, semplice per F'.

Una curva θ di F' corrispondente ad un punto O (semplice o multiplo) di F è *curva fondamentale* rispetto al sistema trasformato del sistema delle sezioni piane di F (più in generale: del sistema segato su F da un sistema lineare di superficie non aventi in O punto base), poichè la θ presenta una sola condizione alle curve di tal sistema su F'.

Un esempio più significativo di scioglimento delle singolarità, si ha considerando una superficie F avente un punto doppio *uniplanare* O (il più generale della sua specie): allora, come è noto(*), la F possiede nell'intorno di primo ordine di O, *tre punti doppi infinitamente vicini* O_1, O_1', O_1''. Passiamo dalla F ad una superficie F' mediante una trasformazione analoga a quella sopra descritta, che si otterrà riferendoci ad un sistema lineare di superficie φ aventi un punto base in O, (punto fondamentale della trasformazione), ma non passanti per O_1, O_1', O_1''. Sopra la F'

(*) Cfr. *Enriques-Chisini* - op. cit. - vol. II - pag. 597.

al punto O corrisponde una retta semplice, e la F' ha tre punti doppi, (in generale) conici, in tre punti (distinti) di tale retta. Con una opportuna successiva trasformazione birazionale della F', questi tre punti si cambiano in curve; e quindi la primitiva singolarità della F in O viene completamente sciolta.

Come altro esempio, che ci presenta il caso delle <u>curve multiple infinitesime, infinitamente vicine ad un punto</u>, supponiamo che la F possieda un <u>tacnodo</u> O (punto tale che in ogni piano per O si abbia un tacnodo della curva sezione), cioè la F possieda in ogni sezione piana per O, vicino al punto doppio O, un altro punto doppio; il luogo di questo punto doppio variabile, infinitamente vicino ad O, è costituito da una *retta doppia infinitesima* la quale si cambia in una retta doppia mediante una trasformazione avente in O un punto fondamentale isolato: e questa retta doppia si scioglie a sua volta con una trasformazione successiva.

Queste considerazioni ci fanno intuire la possibilità di liberare la F di ogni singolarità, mediante opportune trasformazioni birazionali. Ed infatti: se $|\varphi|$ è un sistema lineare di superficie, di dimensione r abbastanza grande, le quali (non contenendo come parte la F), passino per tutti i punti multipli e le linee multiple di F, trasformando projettivamente $|\varphi|$ nel sistema degli iperpiani di S_r, si ha ivi una superficie F', birazionalmente identica alla F, sulla quale in generale le singolarità della F sono sciolte; sicchè se queste non presentano complicazioni dovute a singolarità infinitamente vicine (punti multipli e linee multiple infinitesime infinitamente vicine a punti multipli; linee multiple infinitamente vicine a linee multiple; ecc.), la superficie F' riesce priva di singolarità. È vero che in realtà sulla F' possono nascere singolarità nuove, poichè una <u>coppia neutra</u>, ovvero una <u>curva fondamentale</u> per il sistema di curve segate su F da |φ|, daranno luogo a un punto doppio o multiplo di F': ma, in generale, prendendo le φ di ordine sufficientemente elevato in modo che r risulti abbastanza grande, l'esistenza di siffatte coppie neutre o curve fondamentali, può essere evitata. Allora la F' avrà delle singolarità soltanto in corrispondenza a singolarità infinitamente vicine a quelle proprie di F, per cui si sono fatte passare le superficie φ. In tal caso però assoggetteremo la F' a una trasformazione analoga a quella eseguita su F, a partire da un sistema di superficie, o ipersuperficie, passanti per le sue curve e i suoi punti multipli propri.

Così continuando si perviene infine ad una superficie affatto priva di singolarità, in un conveniente iperspazio.

Che effettivamente il processo di trasformazione indicato abbia termine colla risoluzione completa di tutte le singolarità, viene dimostrato rigorosamente da B. Levi (Atti della R. Accad. di Torino, 1897) e da O. Chisini (Rendic. Accad. dei Lincei, 1917), alle note dei quali rimandiamo.(*)

Ci limitiamo qui ad enunciare il teorema fondamentale:

Ogni superficie F, dotata di qualsiasi singolarità, si può sempre trasformare birazionalmente in un'altra priva di singolarità (appartenente ad un iperspazio di conveniente dimensione.)(**)

(*) Cf. anche Albanese -: Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in un'altra priva di punti multipli. - Rend. Circolo Mat. di Palermo - Tomo XLVIII - 1924.

(**) Per maggiori particolari e notizie storiche sull'argomento cf. Enriques Chisini op. cit. - vol. II° - libro IV, cap. IV, § 40.

3.- SUPERFICIE DOTATA DI SINGOLARITÀ NORMALI

Dalla proprietà precedente segue subito che <u>una superficie algebrica si può trasformare birazionalmente, in un'altra dotata soltanto di curva doppia nodale e punti tripli, che appartengono alla curva doppia e sono tripli anche per essa</u>; in ciascun punto triplo si ha un cono tangente costituito dalle tre faccie (distinte) di un triedro i cui spigoli sono tangenti alla curva doppia. E sopra questa si ha un numero finito di punti cuspidali, che saranno i più generali della loro specie.

Ci limiteremo qui ad indicare il concetto della dimostrazione di questo teorema, senza fermarci ad esaminarne minutamente i particolari.

Cominciamo col trasformare la F in una superficie $\bar{F}$ priva di singolarità, e sia S_t lo spazio al quale essa appartiene. Se $t > 5$, si proietti la $\bar{F}$ da un punto generico, O, di S_t, in un S_{t-1}: la superficie proiezioni potrà acquistare un punto multiplo, soltanto in corrispondenza di una retta per O che si appoggi ad $\bar{F}$ in due o più punti: ma le ∞^4 corde di $\bar{F}$ generano una varietà a 5 dimensioni che non contiene il punto generico O, quindi la superficie proiezione riesce priva di punti multipli come l'obbiettiva. Ne segue che possiamo senz'altro ritenere $t = 5$. Allora per un punto generico O di S_5 passa soltanto un numero finito di corde della $\overline{F}$ (le corde sono ∞^4 e il passaggio per un punto porta quattro condizioni): onde per proiezione da O su di un S_4 si ottiene una superficie F' dotata di un numero finito di punti doppi. Osserviamo ora che anche le corde di F' riempiono una varietà a cinque dimensioni la quale è invece immersa in un S_4, onde per un punto O' generico di S_4 passano ∞^1 di tali corde. E conseguentemente proiettando la F' da O' in un S_3, la superficie proiezione F'' risulta dotata di linea doppia nodale γ.

Si noti che le proiezioni, da O', dei punti doppi di F' vanno anch'esse a cadere in punti della linea γ (le rette proiettanti fanno parte del cono di corde di F' avente vertice in O'), nei quali si distinguono generalmente due falde come in ogni altro punto generico.

Passiamo ora al computo delle trisecanti uscenti dal centro di proiezione O'.

Per un punto P generico della F' conduciamo un S_3 pure generico: questo sega la F' lungo una curva (necessariamente) gobba Γ, ed è noto che da un punto generico di una curva gobba esce soltanto un numero **finito** (eventualmente nullo) di trisecanti della curva stessa(*). Ricordando che gli iperpiani della stella di centro P sono

---

(*) Ciò segue dalla proprietà: « *Non esiste curva sghemba nella quale ogni corda sia almeno trisecante* » (Cfr. Enriques-Chisini: op. cit. - vol. II - pag. 289).

∞^3 e che si distribuiscono in una semplice infinità di reti, costituite dai sistemi doppiamente infiniti di iperpiani uscenti da una medesima retta per P, si ha subito che da P esce una semplice infinità di rette trisecanti la F'. Ne segue che le trisecanti della F' costituiscono una varietà a 4 dimensioni, e quindi per il punto generico O' di S_4 passa un numero finito di tali trisecanti: onde la linea doppia γ possiede un numero finito di punti tripli che sono tali anche per la F'.

4.- GEOMETRIA SOPRA LE SUPERFICIE

Le considerazioni che precedono hanno particolare importanza per la <u>geometria delle trasformazioni birazionali</u>.

Come naturale estensione della *geometria projettiva* (teoria delle sostituzioni lineari ed omogenee fra due gruppi di variabili) si presenta lo studio delle proprietà di una superficie F, invarianti per trasformazione birazionale: questo è appunto lo scopo della <u>geometria sopra la superficie F</u>.

Data una qualunque superficie F, l'insieme di tutte le superficie in corrispondenza birazionale con F, dicesi costituire la <u>classe</u> cui appartiene F, e si indica con [F].

Possiamo quindi dire che la geometria sopra una superficie F è lo studio delle proprietà comuni a tutte le superficie di [F] (*)

Le trasformazioni birazionali alterano, in generale, tutti i caratteri proiettivi, come la dimensione dello spazio cui la superficie appartiene, il suo ordine, le sue singolarità, ... ; e poichè per lo studio della geometria sopra una superficie F è indifferente riferirci ad F piuttosto che ad una qua-

(*) - Osserviamo che le considerazioni che faremo ragionando sopra una superficie F valgono, in generale, per una totalità algebrica irriducibile doppiamente infinita di elementi qualsiansi, o, come brevemente si dice, per un <u>ente algebrico doppiamente infinito</u>.

lunque superficie della sua classe, potremo scegliere come modello una superficie appartenente ad uno spazio di dimensione conveniente, o una superficie dotata di singolarità opportune.

Così le considerazioni svolte nel § 2 ci permetteranno di supporre la F priva di singolarità ed appartenente ad un certo iperspazio S_t ($t \geq 5$); oppure se vogliamo considerare la F appartenente allo spazio ordinario potremo supporre le sue singolarità costituite esclusivamente dalla curva nodale con punti tripli.

Del resto, in ultima analisi, la possibilità di poter avere nella classe [F] una superficie $\bar{F}$ priva di singolarità, ci permetterà sempre di ragionare sul modello considerato F, qualunque esso sia, come se fosse anch'esso privo di singolarità. Basta, infatti, concependo la F come trasformata di $\bar{F}$, considerare ogni punto multiplo di F come sciolto in modo opportuno, conformemente a ciò che ad esso corrisponde sopra la $\bar{F}$ (cfr. § 2).

Per esempio, un punto P generico di curva doppia si riguarderà come l'insieme di due punti semplici (costituenti una coppia neutra per il sistema delle sezioni piane - cfr. nota (*) al § 2, pag. 7), accidentalmente coincidenti su quel particolare modello proiettivo considerato per la classe [F]. E un punto cuspidale di codesta curva sarà da considerarsi senz'altro come un punto semplice.

Invece un punto multiplo isolato ordinario O (con cono tangente irriducibile) si riguarderà come una curva semplice divenuta infinitesima sul nostro modello, e luogo dei punti infinitamente vicini ad O nelle direzioni delle generatrici del cono ivi tangente. Ed analogamente per ogni altra singolarità.

5.- CURVE ECCEZIONALI

Alle considerazioni svolte intorno al modo di riguardare le singolarità delle superficie, dal punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali, conviene aggiungere un'altra osservazione.

Nel passare da una superficie F ad una superficie F' mediante una trasformazione birazionale, può accadere che un punto <u>semplice</u> O di F si cangi in una curva ω di F' (cfr. § 2): allora vi sarà in generale una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'intorno di O su F (direzioni tangenti ad F in O) ed i punti di ω, quindi la curva ω sarà <u>razionale</u>. La curva ω dicesi <u>curva eccezionale</u>.

Vediamo alcuni esempi.

Supponiamo che la superficie F sia razionale, cioè che sia rappresentabile biunivocamente sul piano, il quale quindi appartiene alla classe [F], e può assumersi come <u>modello</u> della classe stessa (§4). Ora è noto che nel piano, un punto semplice si può sempre trasformare in una retta, mediante una trasformazione quadratica; ne segue dunque che esistono su F infinite curve eccezionali rappresentate dalle rette e dalle curve trasformabili in rette mediante una trasformazione birazionale del piano in sè (*)

Come altro esempio consideriamo una super-

(*) Cfr. <u>Enriques</u> - <u>Chisini</u> - op. cit. - vol. III - libro V - § 21.

ficie rigata F, che possiamo senz'altro supporre essere un cono di vertice V. Se O è un punto (semplice) di F, consideriamo un sistema lineare ∞^3 di superficie passanti semplicemente per O e unisecanti le generatrici di F, per esempio un sistema di monoidi di vertice V, (il quale abbia un punto base semplice in O). Mediante tale sistema la F si può trasformare in una superficie rigata F', (§ 2) dove alla retta VO corrisponde un punto e al punto O corrisponde una retta.

Infatti i monoidi del sistema predetto che passano per un punto P della generatrice VO di F, distinto da O e da V, contengono la VO per intero, perciò sulla F' alla retta VO corrisponde un unico punto O'. Si vede facilmente che al punto O risponde la generatrice della rigata F' per O': i punti di questa corrispondono ai punti infinitamente vicini ad O, sul piano tangente ad F.

Ne segue che le generatrici di una superficie rigata costituiscono delle <u>curve eccezionali</u>.

Si può dimostrare che, esclusi i due precedenti casi delle superficie rigate e delle superficie razionali, le eventuali curve eccezionali di una superficie non possono essere che in numero finito, e vedremo come esse si possono eliminare tutte insieme mediante una trasformazione birazionale.

Abbiamo osservato che una curva eccezionale è necessariamente razionale: questo fatto però non è invertibile, cioè non ogni curva razionale della F può considerarsi ottenuta per trasformazione birazionale da un punto semplice di una superficie F', birazionalmente identica alla F (§ 20).

È facile mostrare la cosa con un esempio. Infatti, tornando al caso delle superficie razionali, è noto che nel piano esistono curve razionali (d'un certo ordine $n \geq 6$) non trasformabili birazionalmente nell'intorno di un punto, le quali sono caratterizzate dall'esistenza di alcune loro curve aggiunte successive d'ordine $n-6$, ecc.. Così accade, ad esempio, per una curva del settimo ordine, dotata di 15 punti doppi (e quindi avente genere zero), le cui seconde aggiunte sono le ∞^2 rette del piano(*)

(*) Cfr. Enriques-Chisini - l. c. sopra.

CAPITOLO I°

SISTEMI LINEARI DI CURVE

6.- *FASCIO LINEARE*

Si abbia una superficie F, che per semplicità di discorso supponiamo appartenere allo spazio ordinario. Consideriamo una funzione razionale t (non costante) del punto variabile su F:

$$(1) \qquad t = \frac{\varphi(x\,y\,z)}{\psi(x\,y\,z)}$$

Assegnato a t un valore determinato t_0 (arbitrario), esistono ∞^1 punti di F soddisfacenti alla (1). Il loro luogo C si dice *curva di livello* della funzione razionale t, su F. Variando il valore t_0 assegnato a t, si ottiene su F una semplice infinità di tali curve che si dice costituire un *fascio lineare* e si indica con $|C|$.

Tra le C del fascio figura la curva $t=0$ ($\varphi=0$) che dicesi *curva degli zeri*, e la curva $t=\infty$ ($\psi=0$) che dicesi *curva dei poli*.

Osserviamo che il fascio $|C|$ definito dalla (1), è dato ugualmente dalla funzione razionale su F:

$$\tau = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

La sostituzione lineare ha il solo effetto di cambiare il valore di t che spetta ad ogni singola curva di $|C|$: ne segue che tutte le C figurano ugualmente nel fascio, e che quindi la curva degli zeri e la curva dei poli non sono curve particolari per esso. Anzi la scelta arbitraria di tali curve ($\tau = 0$, $\tau = \infty$) insieme alla curva unità ($\tau = 1$), determinano la sostituzione precedente.

Se la t e la τ hanno la stessa curva degli zeri e dei poli, esse differiscono per una costante moltiplicativa (*).

Notiamo inoltre che la (1) è definita soltanto rispetto al modulo f, e quindi affinchè due diverse funzioni $\frac{\varphi}{\psi}$ e $\frac{\varphi_1}{\psi_1}$, rappresentino sopra F lo stesso fascio, deve aversi

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_1}{\psi_1}$$

in tutti i punti di F, e perciò:

$$(2) \quad \varphi \psi_1 - \psi \varphi_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } f.),$$

cioè:

$$\varphi \psi_1 - \psi \varphi_1 = A f$$

(*) Cfr. Enriques-Chisini - op. cit. - vol. III - pag. 12.

dove A rappresenta un conveniente polinomio.

Le curve di $|C|$ hanno tutte lo stesso ordine, ma può accadere che per una di esse l'ordine si riduca apparentemente: tale curva allora si spezza, venendo a contenere una parte all'infinito.

Per eliminare questa riduzione apparente, quando non si voglia ricorrere ad una trasformazione proiettiva della superficie, basta fare uso di coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4: in tal modo nella (1) la φ e la ψ divengono forme quadernarie dello stesso ordine nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4. Così, ad esempio, se nella (1) il polinomio φ era di grado inferiore a ψ, passando a coordinate omogenee, φ viene moltiplicato per una conveniente potenza di x_4, e quindi della curva degli zeri fa parte la curva sezione di F col piano all'infinito, contata un certo numero di volte.

Alla definizione del fascio $|C|$ si può dare forma proiettiva scrivendo la (1) nel modo seguente:

$$(3) \qquad \varphi - t\psi = 0 \quad ;$$

questa rappresenta un fascio di superficie, le quali segano la F lungo le curve di $|C|$. E la (2) ci dice che lo stesso fascio $|C|$ può essere segato sulla F da diversi fasci di superficie.

Il fascio (3) avrà una curva base Γ, la quale, in generale, incontrerà la F in un numero finito di punti per i quali passano tutte le C: ogni tale punto O è un punto d'indeterminazione <u>essenziale</u> per la funzione razionale (1), che presenta ivi una singolarità non eliminabile per continuità; infatti avvicinandosi al punto O lungo le varie C, si perviene a diversi valori limite di t. Si può dire che in ogni punto O' infinitamente vicino ad O su F, la t ha un valore determinato, uguale al valore che essa assume lungo la C tangente alla direzione OO'.

Il punto O avrà per la curva generica C di |C|, una certa molteplicità <u>i</u>, e si dirà <u>punto base i-plo del fascio lineare</u> |C|.

Può anche accadere che la curva base Γ (od una sua parte, se è riducibile) sia situata sulla F: allora la Γ si potrà considerare come <u>componente fissa</u> di ogni curva C del fascio lineare (<u>riducibile</u>) |C|; oppure potremo senz'altro prescindere da Γ, considerando il sistema |C| come costituito dalle sole intersezioni variabili della F con le superficie (3).

7.- SISTEMI LINEARI

La definizione di fascio lineare di curve su F, si può generalizzare in quella di <u>sistema lineare |C|</u>, di dimensione $r > 1$. Tale dicendosi il sistema di curve segate su F da un sistema lineare di superficie (o ipersuperficie):

$$(1) \quad \lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_R \varphi_R = 0$$

E tra la dimensione r di $|C|$ e quella R del sistema (1), si ha la relazione:

$$r = R - h - 1$$

se ∞^h sono le superficie di (1) che contengono come parte la F (formanti necessariamente un sistema lineare.)

Immediatamente si estendono al sistema lineare più volte infinito $|C|$, i concetti di <u>curva componente fissa delle C</u>, e di <u>punti base di |C|</u>; osservando però che, in generale, tanto questi che quella mancheranno.

Anche il sistema $|C|$ si può definire in modo intrinseco rendendolo indipendente dal carattere proiettivo di F, in maniera del tutto analoga a quella seguita nel caso del fascio lineare (§6).

Siano date r funzioni razionali del punto variabile su F, le quali abbiano tutte la stessa curva polare, e che, per semplicità, supponiamo rappresentate da:

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \; ; \; t_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \; ; \; \dots \; ; \; t_r = \frac{\varphi_r}{\varphi_0}$$

Facciamo inoltre l'ipotesi che esse siano <u>linearmente indipendenti su F</u>, cioè che <u>non</u> sia possibile determinare $r+1$ costanti (non tutte nulle), $a_0, a_1, \dots, a_r$, tali che si abbia identicamente:

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_r \varphi_r \equiv 0 \quad (\text{mod. } f)$$

Allora la curva di livello su F della funzione

$$h_0 = h_1 t_1 + h_2 t_2 + \dots + h_r t_r \, ,$$

al variare dei rapporti di r parametri h al rimanente, descrive il sistema lineare $|C|$, <u>di dimensione r</u>. L'equivalenza di quest'ultima definizione con la precedente è immediata.

La <u>dimensione r</u> del sistema $|C|$ è dunque data dal numero dei parametri indipendenti dai quali può farsi dipendere la determinazione di una curva C di $|C|$, e quindi ci dà anche il numero dei punti generici della superficie che individuano una curva del sistema.

Limitandoci ora al caso di un sistema lineare $|C|$ _irriducibile_ (tale cioè che la sua curva generica C sia irriducibile), definiremo altri due suoi caratteri, pure _invarianti_ per trasformazioni birazionali. Diremo _genere effettivo_ di $|C|$ il genere della sua curva generica C: e _grado effettivo_ di $|C|$ il numero delle intersezioni variabili di due curve C generiche (*). La definizione del grado naturalmente suppone che sia $r \geq 1$. Per $r = 1$ - caso del fascio lineare - il grado è nullo, poichè ogni punto comune a due curve del fascio appartiene a tutte le C.

Notiamo infine che tra la dimensione r e il grado n di un sistema lineare $|C|$, si ha la relazione

$$r \leq n + 1 .$$

Consideriamo infatti la serie lineare g_n^{r-1} segnata sopra una qualunque curva C di $|C|$, dalle rimanenti curve del sistema (fuori dei punti base): si deve avere $r - 1 \leq n$, donde appunto $r \leq n + 1$.

La g_n^{r-1} determinata nel modo ora detto è di fondamentale importanza nello studio di un sistema lineare, e dicesi _serie caratteristica_ di $|C|$ su C (_Segre_).

(*) Questa definizione si estenderà anche ai sistemi riducibili $|C|$, dicendosi _grado effettivo_ di $|C|$ il numero delle intersezioni variabili delle parti variabili di due sue curve generiche.

8.- PROPRIETÀ CARATTERISTICA DEI SISTEMI LINEARI

Se r è la dimensione del sistema lineare $|C|$, r punti generici di F determinano una curva del sistema, che li contiene. In particolare nel caso di $r = 1$: per un punto generico della superficie passa una ed una sola curva del fascio.

Però questa proprietà non è caratteristica, poichè possono ben esistere sopra F dei fasci o sistemi (algebrici) semplicemente infiniti di curve, tali che per un punto generico di F passi una sola curva del sistema, che non sieno lineari: basta perciò che gli elementi (curve) del fascio costituiscano un ente algebrico di genere diverso da zero (non razionale); il fascio lineare $\varphi + \lambda\psi = 0$ è razionale, le sue curve corrispondendo biunivocamente ai valori del parametro λ.

Un esempio è fornito dal sistema delle generatrici di una rigata, di genere maggiore di zero. Un altro esempio si ottiene nel modo seguente: si prenda nello spazio a quattro dimensioni S_4, un sistema ∞^1 di piani, di genere $\pi > 0$; ad esempio, l'insieme dei piani costituenti un cono di seconda specie (sistema ∞^1 di piani per un S_1) e di genere π (ottenuto proiettando da un S_1 generico i punti di una curva di S_4, di genere

Π); e sopra il piano generico α del sistema prendiamo una curva C variabile con continuità al variare del piano α nel sistema. Il luogo di queste curve C è una superficie F di S_4, sopra la quale le C costituiscono un fascio di genere Π.

Per caratterizzare il fascio lineare basta aggiungere alla proprietà del fascio (un punto determina una curva) la proprietà di essere razionale.

Infatti si abbia un sistema (algebrico) semplicemente infinito di curve sopra F, tale che per un punto generico passi una sola curva del sistema, e le curve del sistema siano poste in corrispondenza biunivoca con i valori di un parametro t. Allora preso un punto P di F resta individuata una curva che, a sua volta, determina un valore di t. Quindi t sarà necessariamente funzione algebrica ad un sol valore, e perciò razionale, del punto variabile su F: le curve del fascio sono le curve di livello della t.

Applichiamo queste considerazioni al seguente esempio: un sistema ∞^1 di curve, tale che per un punto generico della F passi una ed una sola sua curva, ed avente un punto base semplice O (in un punto semplice di F) è un fascio lineare. Infatti le curve di questo sistema si possono porre in corrispondenza biunivoca col fascio razionale delle loro tangenti in O (*)

(*) Lo studioso risponderà per esercizio alla domanda: come si modifica la dimostrazione precedente nel caso che le curve del fascio abbiano in O la stessa tangente? (Si pensi alle parabole osculatrici).

Mentre per $r = 1$ la proprietà che per un punto generico passi una sola curva del sistema, non caratterizza da sola il fascio lineare, ciò accade invece per la proprietà analoga nel caso di $r > 1$. Sussiste cioè il teorema (di Enriques) che ci limiteremo ad enunciare: *sopra una superficie F, un sistema algebrico ∞^r, con $r > 1$, di curve irriducibili tale che per r punti generici di F passi una sola curva del sistema, è necessariamente un sistema lineare* (*).

(*) Cfr. *Enriques*: Una questione sulla linearità ...., Rendic. della R. Accad. dei Lincei, luglio 1893. La dimostrazione trovasi pure con qualche semplificazione in Segre: Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico ....., Annali di Matematica, s^e^ II, tomo XXII, 1894.

Possiamo darne un rapido cenno. Supponiamo, da prima, che sia $r = 2$. Due curve C del sistema si incontrano in n punti, onde sulla F viene determinato un sistema ∞^2 di gruppi di n punti. Rappresentiamoli biunivocamente coi punti di una superficie F', la quale risulta così in corrispondenza $[1, n]$ con la F: sulla F' le curve C sono tali che per due punti generici di F' ne passa una sola, e due di

9. - ESTENSIONE DEI TEOREMI DI BERTINI

Ai sistemi lineari di curve sopra una superficie si estendono i due noti teoremi di Bertini, relativi ai sistemi di curve piane (*)

Teorema primo: *In un sistema lineare di curve irriducibili sopra una superficie, la curva generica non può avere punti multipli variabili* (non appartenenti alla linea multipla della superficie).

Può ripetersi sostanzialmente la stessa dimostrazione seguita pel caso delle curve piane nel citato trattato di Enriques - Chisini (**), poichè le considerazioni ivi svolte hanno carattere differen-

---

to generico di F' costituiscano un fascio lineare. Ne segue che la F' è birazionalmente identica al piano, e le C corrispondendo alle ∞^2 rette del piano, formano una rete lineare.

Per $r = 3$ estragghiamo dal sistema dato le due reti lineari costituite dalle C passanti per due punti A e B di F, e riferiamole projettivamente ai piani di due stelle di centri A' e B' in un S_3, in modo che ad ogni C per A e B corrisponda uno stesso piano per A' B'. La F si trasforma in tal modo in una F' di S_3, sulla quale il sistema ∞^3 della C è costituito dalle sezioni piane.

Analogamente si passa da r ad $r+1$.

(*) Cfr. Enriques: Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche - (Memorie della Società italiana delle Scienze - 1896).

ziale. E, come in quel caso, basta osservare che se la curva generica del sistema ha un punto doppio, le curve infinitamente vicine ad essa, hanno ivi un punto fisso che risulta quindi essere un punto base.

Ricordiamo ora che un sistema lineare $|C|$ di curve riducibili, avente dimensione r, si dice <u>composto con un fascio</u> (K) (razionale o no) quando ogni curva C risulta costituita da ν $(\geq r)$ curve di (K). I gruppi di ν curve K che formano una stessa C danno luogo ad una <u>involuzione</u> γ_ν^r, di dimensione r ed ordine ν, nell'ente semplicemente infinito delle curve di (K).

Per $r \geq 1$ è evidente che il sistema riducibile $|C|$ è di grado zero; inversamente si ha che <u>un sistema lineare $|C|$, di dimensione $r > 1$, il quale abbia grado zero è composto con un fascio</u>.

Infatti per un punto generico P della superficie passano ∞^{r-1} curve di $|C|$, le quali, non potendo avere intersezioni variabili, per la genericità di P, avranno necessariamente in comune una curva K passante per P. Resta intanto dimostrato che $|C|$ è un sistema riducibile. Consideriamo allora il sistema di tutte le curve K componenti le C di $|C|$: per un punto generico P della superficie passerà un certo numero h di curve K; ma di queste: due non possono essere componenti di una stessa C perchè altrimenti tale C avrebbe in P un punto doppio (almeno), contrariamente al primo teorema; nè d'altra parte, per essere il sistema di grado zero, possono appartenere a due diverse curve C di $|C|$. Onde necessariamente $h=1$. E quindi il sistema delle K, essendo tale che per un punto generico passa una sola sua curva, costituisce un fascio (razionale o no) (§8).

In quanto al caso $r=1$, se il fascio $|C|$ è <u>riducibile</u> ed è privo di parte fissa, si ha ancora che esso è composto con un fascio (K), lineare o no.

Si ha allora il:

<u>Teorema secondo</u>: <u>*Un sistema lineare riducibile, privo di componente fissa, è necessariamente composto con un fascio.*</u>

Per quanto precede basta dimostrare che il sistema dato $|C|$ è di grado zero, e per questo, manifestamente, occorre far vedere che i punti base di un qualunque fascio lineare, estratto da $|C|$, sono pure punti base dell'intero sistema dato.

Infatti un tal fascio è riducibile e privo di parte fissa, e quindi è composto con un fascio (K) (lineare o no). Ne segue che se un punto P (semplice per F) è punto base del fascio di C, lo è pure di (K); ma allora per P passano, in particolare, le varie componenti K di una stessa curva C, la quale perciò ha in P un punto multiplo, onde (teor. primo) P è necessariamente un punto base di $|C|$.

10.- SUPERFICIE IMMAGINE DEI SISTEMI LINEARI

Abbiamo già studiato i sistemi lineari di grado zero: passiamo ora al caso di un sistema $|C|$ di grado $n > 0$. Per quanto abbiamo visto la dimensione r di $|C|$ è maggiore di 1: onde per un punto generico P di F passano infinite curve di $|C|$, costituenti un sistema lineare di dimensione $r-1$.

In generale questo sistema ∞^{r-1} sarà di grado $n-1$, cioè accadrà che le curve di $|C|$ passanti per un punto P non passeranno di conseguenza per alcun altro punto variabile con P: diremo allora che il sistema $|C|$ è <u>semplice</u>.

Supponiamo invece che le curve di $|C|$ passanti per un punto generico $P \equiv P_1$ abbiano di conseguenza comuni altri $\nu-1$ punti: $P_2, P_3, \dots, P_\nu$ - fuori dei punti base di $|C|$.

Allora anche tutte le curve di $|C|$ passanti, ad esempio, per P_2 devono avere comuni tutti i punti rimanenti $P_1, P_3, \dots, P_\nu$, e nessun altro punto, dato che tra le curve per P_2 c'è l'intero sistema delle curve per P_1.

Dunque il gruppo $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ gode della proprietà di essere individuato da uno qualunque dei suoi punti, e quindi al variare di P su F genera una <u>involuzione</u> (d'ordine ν) doppiamente infinita. Si dice allora che il sistema $|C|$ <u>appartiene all'involu-</u>

zione d'ordine ν; allora evidentemente il grado n è un multiplo di ν: $n = h\nu$.

Come esempio consideriamo un sistema lineare doppiamente infinito (rete); le curve della rete passanti per un punto P costituiscono un fascio, che ha grado zero: onde se il grado della rete è uguale ad uno, essa costituisce un sistema lineare semplice, e la superficie F risulta razionale; escluso questo caso la rete appartiene ad una involuzione (di ordine > 1). Ciò non si verifica, invece, che eccezionalmente per i sistemi di dimensione $r > 2$, i quali, in generale, sono semplici. Tuttavia anche per $r > 2$ è facile trovare esempi di sistemi appartenenti ad una involuzione; se ne ha subito uno considerando il sistema segato su F (di S_3) dagli ∞^5 coni quadrici aventi il vertice in un punto assegnato.

Ora sopra la F sia dato un sistema lineare semplice $|C|$, di dimensione r e grado n (con $r \geqslant 2$, $n > 0$).

Riferiamo proiettivamente le curve di $|C|$ agli iperpiani S_{r-1} di un iperspazio S_r, ad r dimensioni: ad un punto generico di F base per un sistema ∞^{r-1} di curve C (di $|C|$) corrispondono in S_r gl'iperpiani per un punto P; ed un punto P così ottenuto nasce da un solo punto di F fuori della eventuale componente fissa di $|C|$: il luogo dei punti P è una superficie F' di S_r riferita punto per punto alla data F, sulla quale le (parti variabili delle) trasformate delle curve C di $|C|$ vengono segate dagli iperpiani di S_r. Diremo che la F' è *la superficie immagine della classe* $[F]$, *che ha per sezioni (iperpiane) le curve* C *di* $|C|$. È importante notare che *le proprietà invariantive del sistema* $|C|$ *sulla* F, *si traducono in proprietà proiettive della superficie* F' e *viceversa*. Un S_{r-2} generico ha in comune con la F' un numero di punti eguale al numero dei punti variabili comuni alla due curve C, su F, che corrispondono a due iperpiani per quell' S_{r-2}, onde: *l'ordine della* F' *è il grado* n *di* $|C|$.

La trasformazione indicata può ancora effettuarsi se il sistema lineare $|C|$ (di dimensione maggiore d'uno, e grado non nullo) non è semplice ma appartiene ad una involuzione, d'ordine ν: soltanto allora l'immagine F' di F non è più riferita biunivocamente alla F, ma risulta invece una superficie (ν-pla) posta in corrispondenza $[1, \nu]$ con la F; ed il suo ordine è $\frac{n}{\nu}$.

Vi è un'altra trasformazione che si applica partendo da sistemi $|C|$ *semplici o no*, e riesce biunivoca quando il grado di $|C|$ sia $n > 0$; ci sarà utile per il seguito il conoscerla.

Si consideri sulla F, accanto al sistema $|C|$, un fascio razionale di curve tale che una curva di esso, passante per un punto generico, non debba contenere di conseguenza nessuno degli altri alle altre curve di $|C|$ per quel punto. Ciò posto, riferiamo proiettivamente le curve di $|C|$ agli iperpiani per un punto O in S_{r+1}, e le curve del fascio suddetto agli iperpiani per un S_{r-1}, non contenente O, di S_{r+1}: un punto generico della F è base per un sistema ∞^{r-1} di curve C ed appartiene ad <u>una</u> curva del fascio; gli corrisponde quindi in S_{r+1} un punto P determinato come intersezione di una retta per O e di un iperpiano per l' S_{r-1}. Nasce così in S_{r+1} una superficie F' riferita punto per punto alla F; e sulla F' le trasformate delle curve del sistema $|C|$ sono segate dagli iperpiani per O, ossia si ha una <u>superficie F', immagine di F in S_{r+1}, sulla quale le curve C vengono segate dagli iperpiani della stella di centro O</u>: un S_{r-1} per O sega la F' in <u>n</u> punti variabili.

Si noti che se il grado di $|C|$ è nullo (e la sua dimensione $r > 1$) la F' costruita innanzi si riduce, in generale, ad un cono multiplo di vertice O.

È ormai ovvio come questi procedimenti si possano estendere in vari modi. Per esempio se si hanno su F tre fasci lineari, riferendoli proiettivamente a tre fasci di S_3, si ottiene, in generale, una superficie F' birazionalmente identica alla F(*), sulla quale i fasci dati sono segati dai tre fasci di piani. Analogo risultato si ha quando sulla F siano dati più di 3 fasci lineari, pervenendo in tal caso ad una F' di un conveniente iperspazio.

11.- CURVE EQUIVALENTI E SISTEMI LINEARI COMPLETI

Sopra la F due curve (dello stesso ordine) si dicono *equivalenti* quando appartengono ad uno stesso sistema lineare, di dimensione ≥ 0. Ad esempio due curve che siano la completa intersezione della F con due superficie φ e ψ, dello stesso ordine, sono sempre equivalenti, poichè fanno parte del fascio segnato su F dalle superficie $\varphi + \lambda\psi = 0$. Invece un esempio di curve non equivalenti è dato da due generatrici di una rigata non razionale, o, più in generale, da due curve appartenenti ad un fascio irrazionale (§ 8). Per due curve C e K la relazione di equivalenza si esprime con la scrittura:

$$C \equiv K$$

Osserviamo che <u>due curve equivalenti distinte C e K, possono sempre considerarsi rispettivamente come curva degli zeri e curva dei poli di una funzione razionale sulla superficie</u>. Basta per questo osservare che nel sistema lineare di superficie che segano su F il sistema lineare a cui appartengono C e K, le due superficie passanti per C e K individuano un fascio(*).

La relazione d'equivalenza tra curve sod-

(*) Se C e K coincidessero la funzione razionale del punto variabile su F, così definita, si ridurebbe ad una costante su tutta la superficie, fuori di quella linea singolare C su cui risulterebbe indeterminata.

disfa, oltre che alla proprietà riflessiva e simmetrica, alla terza delle proprietà fondamentali dell'uguaglianza: la proprietà <u>transitiva</u>, espressa da:

<u>Se $C \equiv K$ e $C \equiv L$ anche $K \equiv L$.</u>

Infatti se <u>t</u> è la funzione razionale su F, che ha la curva K come curva degli zeri, e la C come curva dei poli; e se <u>τ</u> ammette rispettivamente le curve C ed L come curva degli zeri e curva polare; la funzione

$$t\tau$$

diviene infinita lungo la L e nulla sulla K.

Si ha la proprietà fondamentale:

<u>Sopra una superficie F, la totalità delle curve equivalenti ad una data curva C, costituisce un sistema lineare</u> che dicesi <u>sistema lineare completo</u>.

Questo sistema si ottiene come insieme delle curve di livello d'una funzione razionale: combinando linearmente le funzioni razionali, indipendenti sopra F, che hanno come curva dei poli la C.

Dalla proprietà transitiva dell'equivalenza segue che <u>il sistema completo $|C|$ viene definito ugualmente a partire da una qualunque delle sue curve.</u>

È ovvio che il sistema completo si può anche definire come un sistema lineare che non può essere contenuto in un altro di dimensione maggiore, costituito da curve di uguale ordine.

Il concetto di equivalenza si estende poi, in relazione ad eventuali punti base, come segue.

Sopra una curva C fissiamo un gruppo H di punti. Diremo che la C ed un'altra curva K sono <u>equivalenti rispetto al gruppo H</u>, quando appartengono ad uno stesso sistema lineare per cui i punti H sono punti base.

Se la curva C possiede un punto s-plo, questo si potrà includere nel gruppo H imponendogli una molteplicità $i \leq s$: e la K dovrà avere ivi un punto i-plo (almeno).

Ora all'equivalenza relativa ad un gruppo si estendono facilmente le proprietà precedenti.

Il sistema costituito da tutte le curve equivalenti a C rispetto ad un gruppo H, si dirà <u>sistema completo rispetto ad H</u>, e viene sempre definito da una qualunque delle sue curve, quando si conosca sopra di essa il gruppo base H.

Le funzioni razionali su F, aventi in C la curva dei poli, dalla cui combinazione lineare risulta definito quel sistema, dovranno avere in H punti di indeterminazione essenziali (cfr. §7).

In seguito parlando del sistema completo individuato da una data curva C, senza ulteriori specificazioni, intenderemo, di solito, di riferirci all'insieme di tutte le curve equivalenti a C nel senso più generale senza imporre che esse debbano passare per dati punti base.

Può bensì accadere che tutte le curve equivalenti a una data C, vengano necessariamente ad avere su questa dei punti fissi - punti base del sistema $|C|$ - che riguarderemo allora come <u>virtualmente non esistenti</u>, ritenendo la loro presenza puramente accidentale.

Analogamente se il sistema $|C|$, completo rispetto ad un assegnato gruppo di punti H, ha come punti base non solo quelli di H, ma anche altri che non sono stati imposti: questi ultimi si considereranno ancora come <u>punti base accidentali</u> o <u>virtualmente inesistenti</u>.

Più particolarmente supponiamo che la C possieda un punto O s-plo e consideriamo il sistema completo $|C|$ avente in O un punto base di <u>assegnata</u> molteplicità $\underline{i}$ $(i \leq s)$, cioè il sistema costituito da tutte le curve equivalenti alla C, cui s'impone di avere in O un punto i-plo. In generale la curva <u>generica</u> di $|C|$ avrà effettivamente in O un punto di molteplicità $\underline{i}$ e non superiore; qualora invece accada che quella curva presenti sempre ivi un punto j-plo con $j > i$ (e $j \leq s$), cioè che il sistema $|C|$ abbia in O un punto base di molteplicità maggiore all'assegnata, si dirà che il punto base O ha per $|C|$ <u>molteplicità virtuale</u> $\underline{i}$ e <u>molteplicità effettiva</u> (<u>accidentale</u>) $\underline{j}$.

Passeremo ora a riconoscere il significato che spetta ai punti base virtualmente inesistenti, o con molteplicità effettiva maggiore della virtuale, rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie.

12.- CONVENZIONI SUI PUNTI BASE

Sia |C| un sistema lineare irriducibile avente un punto base in un punto semplice O di F.

Con una trasformazione birazionale della superficie, si muti il punto O in una curva cv: questa curva deve o no considerarsi come parte delle trasformate di C?

Facili considerazioni di continuità conducono a fissare che:

1) la cv non deve ritenersi come parte delle trasformate delle C se il punto O è un punto base assegnato (di molteplicità effettiva uguale alla virtuale) per il sistema |C|;

2) all'opposto la cv deve ritenersi parte fissa di tutte le trasformate della C qualora il punto semplice O sia virtualmente inesistente; in generale se O ha una molteplicità virtuale i ed una molteplicità effettiva j > i, la cv dovrà figurare j - i volte nelle trasformate delle C.

Per giustificare questa convenzione (per esempio nel caso del punto semplice) converrà riferirci alla superficie F' trasformata di F e considerare su questa le curve C' che si ottengono dalle C, lasciando da parte la cv. È chiaro che il sistema |C|, trasformato del sistema completo |C'|, sarà sopra F un sistema completo rispetto al punto base O; se invece si vuole avere sopra F un sistema completo più ampio che non abbia in O punto base, bisogna necessariamente sommare alla C' la cv, cioè considerare sulla F' il sistema completo cui appartengono le curve C' + cv. Se accidentalmente questo sistema completo non risulti più esteso, ma contenga la cv come parte fissa, avremo un sistema riducibile, e perciò la presenza di un punto base O virtualmente inesistente per |C|, dovrà ancora ritenersi come un caso di riducibilità di questo sistema: a tutte le curve C si aggiunge la curva infinitesima costituita dall'intorno del punto O. Invece quando O sia un punto base (semplice) assegnato, l'intorno di O non fa parte di esse, ma ha con ciascuna C un solo punto a comune.

13.- SUPERFICIE NORMALI

Al concetto di sistema lineare completo si associa quello di superficie normale: così dicesi una superficie appartenente ad un dato iperspazio S_s (e non ad un S_{s-1}) quando non possa riguardarsi come ottenuta per proiezione da una superficie dello stesso ordine, appartenente ad uno spazio di dimensioni maggiori.

Supponiamo che il sistema completo $|C|$ (irriducibile) sia semplice, e consideriamone la superficie immagine F (di S_r) sulla quale le curve C sono segate dagli iperpiani (§10). La superficie F non può essere proiezione di una superficie $\bar{F}$, dello stesso ordine, appartenente ad un S_{r+1}, da un centro di proiezione O esterno ad $\bar{F}$.

Infatti qualora ciò accadesse, sulla $\bar{F}$ (che è in corrispondenza biunivoca con F) il sistema $|C|$ sarebbe segato dagli iperpiani S_r passanti per O: onde $|C|$ sarebbe contenuto nel sistema lineare ∞^{r+1} segnato su $\bar{F}$ dall'intero sistema degli iperpiani di S_{r+1}, contrariamente all'ipotesi che $|C|$ sia completo. A più forte ragione F non può essere projezione di una superficie dello stesso ordine di un S_s con $s > r+1$.

Il ragionamento si estende al caso in cui il sistema $|C|$ appartenga ad una involuzione (§10).

Si ha cioè che la superficie immagine di un sistema lineare completo, irriducibile, è una superficie normale (semplice o multipla).

Dalla unicità del sistema lineare completo che contiene un sistema lineare dato, segue che una superficie d'ordine n, di uno spazio qualsiasi, che non sia normale, si può dedurre come proiezione da una superficie normale, che è definita a meno di una trasformazione proiettiva.(*)

(*) Per la proprietà analoga per le curve, e per delucidazioni sulla sua interpretazione cfr. Enriques-Chisini op. cit. libro V, § 5 (vol. III).

14.- ESEMPI

La considerazione delle superficie normali permette di costruire degli esempi che valgono ad illustrare le convenzioni fatte in ordine ai sistemi completi e loro punti base.

Poichè sopra una superficie normale gli iperpiani S_{r-1} segano un sistema completo di curve che è evidentemente privo di punti base, si consideri una superficie F, di un certo ordine n, normale in uno spazio S_r $(r > 3)$. Proiettando la F da un suo punto semplice O, si ottiene una superficie F', d'ordine $n-1$ di S_{r-1} che è pure normale in questo spazio. Al sistema completo delle sezioni iperpiane C' di F', corrisponde su F il sistema delle sezioni iperpiane C passanti per il punto base assegnato O, sistema completo rispetto ad O. Se si vuole avere sopra F il sistema più ampio delle sezioni iperpiane C (senza punti base) giova considerare su F' non più il sistema completo determinato da una C', bensì quello che è determinato dalla C' + ω, designando ω la retta eccezionale che si ottiene su F' come traccia del piano tangente ad F in O.

In modo analogo, partendo da una superficie F, di un certo ordine n, che sia normale in uno spazio S_r con $r > 4$, possiamo dedurne una nuova superficie F'' d'ordine $n-2$, normale in un S_{r-2}, proiettando la F da due suoi punti semplici A, B, cui corrisponderanno su F'' due rette sghembe α e β. Al sistema completo senza punti base delle curve C'' sezioni iperpiane di F'', corrisponde su F il sistema delle sezioni iperpiane per A, B: sistema *completo rispetto ai due punti base assegnati A, B.*

Ma può accidentalmente accadere che nello S_r la retta AB, congiungente i due punti A e B di F, vada ad incontrare la F stessa in un terzo punto D. Allora il sistema delle curve C, completo rispetto ad A e B, viene a possedere un punto base virtualmente inesistente in D. La superficie F' che si ottiene proiettando la F da A, avrà ora un punto doppio O traccia della retta AB, in cui si sovrappongono le immagini di B e D; la proiezione F'' di F' da O (che è la proiezione della F stessa fatta da A e B,) risulterà non più dell'ordine $n-2$, bensì dell'ordine $n-3$; ma su di essa si avrà una retta δ immagine del punto D, la quale va aggiunta a tutte le sezioni iperpiane C'' di F''.

Da questo esempio è facile dedurre altri esempi di superficie sopra cui un sistema possegga un solo punto base accidentale (cioè un punto base virtualmente inesistente che non sia conseguenza di altri punti base assegnati). A tale scopo si riprende-
re la superficie F e si trasformerà in modo che A e B

diventino curve eccezionali senza che D si trasformi in una curva; per questo basterà, ad esempio, valersi invece che degli iperpiani, delle quadriche di S_r passanti per A e B.

15.- SOMMA E DIFFERENZA DI SISTEMI LINEARI: TEOREMA DEL RESTO

Osserviamo che <u>somme di curve equivalenti sono equivalenti</u>; cioè da:

$$C \equiv K \quad , \quad L \equiv M$$

si deduce:

$$C + L \equiv K + M$$

Infatti esiste una funzione razionale t che ha per curva dei poli la C, e come curva degli zeri la K, e una funzione τ che ha per curva polare la L e per curva degli zeri la M; quindi la funzione $t\tau$ ha come curva dei poli la $C + L$, e come curva degli zeri la $K + M$. (⁜)

Ciò premesso consideriamo i due sistemi $|C|$ ed $|L|$; diremo loro <u>sistema somma</u> il sistema lineare <u>completo</u> $|C + L|$. (⁜ ⁜)

Al sistema somma $|C + L|$ appartengono quindi tutte le curve che si ottengono associando ad una C del sistema $|C|$, una curva K del sistema $|K|$: ma queste curve riducibili, in generale, non lo esauriscono, cioè, in generale (e <u>sempre</u> se si tratta di siste-

---

(⁜) E se C e K risultano equivalenti rispetto ad un gruppo di punti G, ed L e M rispetto ad un gruppo G_1, l'equivalenza $C + L \equiv K + M$ sussiste rispetto al grup-
$G + G_1$.

mi distinti ∞^1 almeno), la dimensione del sistema somma supera la somma delle dimensioni dei sistemi addendi (anche completi).

Dal concetto di somma segue la nozione di <u>sistema lineare differenza tra due sistemi lineari</u>: l'operazione di sottrazione essendo definita come l'inversa di quella di addizione.

Precisiamo la cosa.

Sia dato un sistema $|K|$, del quale faccia parte una curva spezzata $K = C + L$: diremo allora <u>sistema residuo</u> della curva C rispetto a $|K|$, il sistema <u>completo</u> $|L|$, individuato dalla curva L residua di C rispetto a K.

È senz'altro evidente che <u>se una curva $K = C + L$ del sistema completo $|K|$, contiene (parzialmente) una C di $|C|$, ogni altra curva di $|C|$ fa parte di una curva di $|K|$.</u>

Ne segue il teorema del resto: <u>Il sistema lineare $|L|$ residuo di una curva C, rispetto ad un sistema $|K|$, è pure residuo di ogni altra curva equivalente a C.</u> (*)

Il sistema lineare (completo) $|L|$ si dice <u>sistema differenza tra $|K|$ e $|C|$</u>, od anche <u>sistema residuo di $|C|$ rispetto a $|K|$</u>, e si indica col simbolo

$$|L| = |K - C|$$

Esso è insomma definito dalla relazione:

$$|K| = |L + C|$$

Osservazione 1ª.

La definizione precedente è legata ad un presupposto d'esistenza, perchè – contrariamente a quanto accade per la somma – la differenza fra due curve in generale non ha significato.

Ma talvolta riesce utile parlare di *curve virtuali* definite dall'operazione di differenza anche quando la sottrazione sia effettivamente impossibile.

Si ottiene ciò, ritenendo la relazione:

$$C - K \equiv L - M$$

come perfettamente equivalente alla:

$$C + M \equiv K + L$$

anche se il simbolo $C - K$ di per se non significhi nulla, perchè la C non contenga come parte la K (e quindi anche la L non conterrà M).

In questa maniera le curve virtuali vengono definite come i *numeri negativi* (secondo la teoria degli *operatori* di *Peano*,) cioè come possibili addendi. Sommare la curva virtuale $C - K$ ad un sistema $|D|$, vuol dire sommargli C e sottrargli K, il che riuscirà in generale possibile per sistemi sufficientemente ampi.

virtuali $C-K \equiv L-M$ porta l'equivalenza dei sistemi

$$|D+C-K| = |D+L-M|,$$

essendo:

$$|D+(C-K)| = |D+C-K|.$$

Osservazione 2ª

Dato un sistema $|C|$ avente un punto base O di molteplicità $\underline{i}$, dalla definizione di somma, e dalle convenzioni fatte al §12, segue subito che il sistema

$$|C+O|$$

è il sistema completo definito dalla curva C rispetto al punto base O, computato con molteplicità $(i-1)$.

Analogamente: sottrarre da un sistema $|C|$ un suo punto base i-plo, O, significa considerare il sistema di tutte le curve C che posseggono in O un punto $(i+1)$-plo.

16.- SUL GENERE E IL GRADO DEI SISTEMI LINEARI

Consideriamo un sistema lineare di curve irriducibili $|C|$ (∞^1 almeno), sulla superficie F: se $|C|$ è privo di punti base il suo <u>grado</u> è definito come numero $\underline{n}$ delle intersezioni di due C. Se $|C|$ possiede dei punti base, per esempio $\underline{i}$ punti base semplici, fra le $\underline{n}$ intersezioni di due C sono questi $\underline{i}$ punti fissi, e ne rimangono fuori $n' = n - i$.

Che cosa si deve assumere come grado del sistema $|C|$? il numero $\underline{n}$ o il numero $\underline{n'}$?

È ovvio che la convenzione da fare dipende dal voler considerare i punti base di $|C|$ come punti base assegnati, o come virtualmente inesistenti.

Nel primo caso definiremo come <u>grado virtuale</u> di $|C|$ il numero $\underline{n'}$, nel secondo caso il numero $\underline{n}$. In ogni caso il <u>grado effettivo</u>, secondo una definizione già data innanzi (§ 8), sarà dato da $\underline{n'}$.

Queste convenzioni si estendono subito al caso di punti base con molteplicità qualsiansi.

<u>Se un sistema lineare irriducibile sopra la superficie F è privo di punti base, o possiede punti base con molteplicità virtuali uguali alle effettive, il suo grado virtuale è uguale al grado effettivo. Invece per ogni punto base di mol-</u>

grado virtuale cresce in confronto al grado effettivo di $j^2 - i^2$.

La nozione del grado virtuale si estende poi ai sistemi lineari riducibili ed anche ai sistemi di dimensione zero, sulla base della relazione che permette di calcolare il grado del sistema somma di due sistemi, come vedremo più innanzi.

Definiamo intanto il *genere*.

Sia $|C|$ un sistema lineare di curve irriducibili, privo di punti base multipli: allora il genere di una C generica si dice *genere del sistema $|C|$*. Se invece le C hanno tutte un punto i-plo ($i > 1$), che necessariamente cadrà in un punto base O (cfr. § 9), si potranno *a priori* proporre due definizioni del genere di $|C|$:

1°) il genere effettivo π della C generica; ovvero:

2°) l'espressione $\pi + \dfrac{i(i-1)}{2}$, che dà il *genere virtuale* del più ampio sistema di curve dello stesso ordine, e privo di punti base, che contiene C.

Ora il genere effettivo π dovrà anche dirsi *genere virtuale* per il sistema $|C|$ avente in O un punto i-plo *assegnato*: se invece il punto base O è per $|C|$ virtualmente inesistente, il genere virtuale dovrà assumersi uguale a $\pi + \dfrac{i(i-1)}{2}$.

In generale, per ogni punto base di molteplicità effettiva j superiore alla virtuale i, il genere virtuale del sistema $|C|$ cresce in confronto al genere effettivo di

$i(i-1) \qquad i(i-1)$

Più avanti estenderemo il concetto di genere virtuale ai sistemi lineari riducibili.

17.- CARATTERI DEL SISTEMA SOMMA

Consideriamo il sistema $|C|$ somma dei due sistemi irriducibili $|C_1|$ e $|C_2|$:

$$|C| = |C_1 + C_2|;$$

e per semplicità supponiamo, da prima, che non esistano punti base.

Se $\underline{n_1}$ ed $\underline{n_2}$ sono, rispettivamente, i gradi di $|C_1|$ e $|C_2|$, e se $\underline{i}$ è il numero dei punti comuni ad una curva C_1 e ad una C_2, il grado $\underline{n}$ di $|C|$ è evidentemente dato da:

$$(a) \qquad n = n_1 + n_2 + 2i,$$

essendo

$$(C_1 + C_2)(C_1 + C_2) = (C_1\, C_1) + (C_2\, C_2) + 2(C_1 C_2).$$

Questa formula si estende al caso in cui uno dei due sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$, od anche ambedue, abbiano dei punti base, prendendo come gradi n, n_1, n_2, i <u>gradi virtuali</u>, e definendo opportunamente il <u>numero virtuale</u> $\underline{i}$ delle <u>intersezioni</u> $(C_1\, C_2)$. Il caso che occorre considerare è quello in cui $|C_1|$ e $|C_2|$ abbiano un punto base in comune O, il quale figura dunque fra le intersezioni di una C_1 con una C_2: se in O i due sistemi hanno molteplicità effettiva uguale alla virtuale, il punto O non deve computarsi nel numero virtuale delle intersezioni di C_1, C_2; all'opposto, se O - τ_1-plo per le C_1 e τ_2-plo per le C_2 - è un punto base puramente accidentale per i due sistemi, o, in generale, se ha per essi delle molteplicità virtuali s_1 ($s_1 \leq \tau_1$), ed s_2 ($s_2 \leq \tau_2$), tali che $s_1 s_2 < \tau_1 \tau_2$, allora il punto O figura nel numero virtuale delle intersezioni di C_1 e C_2, contando per $\tau_1 \tau_2 - s_1 s_2$.

Questa convenzione risulta dal modo come sono definite le molteplicità virtuali dei punti base di $|C_1 + C_2|$, e quindi il grado del sistema.

Un'altra relazione importante è quella che lega i generi (virtuali) π_1 e π_2, dei sistemi irriducibili $|C_1|$ e $|C_2|$, al genere (virtuale) π del loro sistema somma $|C|$, supposto pure irriducibile (*)

Sopra la superficie F (che, per semplicità, supponiamo appartenere allo spazio ordinario), le curve C_1 siano dell'ordine $\underline{m}_1$, e le C_2 dell'ordine $\underline{m}_2$; e $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ siano gli ordini di molteplicità di uno stesso punto base, rispettivamente, per il sistema $|C_1|$ e $|C_2|$.

Proiettiamo da un centro di proiezione arbitrario O, le curve C_1, C_2 e C, sopra uno stesso

(*) Il che accade sempre, ad eccezione del caso in cui $|C_1|$ e $|C_2|$ siano fasci coincidenti.

piano pure arbitrario: allora dalla curva proiezione di C_1 si ha subito:

$$\Pi_1 = \frac{(m_1-1)(m_1-2)}{2} - h_1 - k_1 - \sum \frac{s_1(s_1-1)}{2},$$

essendo $\underline{h}_1$ il numero dei punti doppi (equivalenti ai punti multipli) di C_1, situati sulla linea doppia di F,(*) e k_1 il numero dei suoi punti doppi apparenti (corde di C_1 uscenti da O).

Analogamente, con lo stesso significato per $\underline{h}_2$ e $\underline{k}_2$ relativamente a C_2, si ha:

$$\Pi_2 = \frac{(m_2-1)(m_2-2)}{2} - h_2 - k_2 - \sum \frac{s_2(s_2-1)}{2}.$$

In quanto alla curva C generica del sistema $|C_1 + C_2|$, essa è dell'ordine $m_1 + m_2$, e i suoi punti multipli provenienti dalla linea doppia di F, quando al limite la C si spezzi in C_1 e C_2, dànno luogo a punti multipli di C_1 e C_2 pure provenienti dalla linea doppia, e quindi saranno in numero equivalente ad $h_1 + h_2$ punti doppi; analogamente il numero dei punti doppi apparenti di C sarà $k_1 + k_2 + \ell$, dove con $\underline{\ell}$ abbiamo indicato il numero dei punti doppi apparenti che provengono dalle rette per O che si appoggiano a C_1 e C_2.

(*) Ricordiamo che la curva generica di un sistema lineare irriducibile non può avere, fuori dei punti base, punti multipli che non appartengano alla linea doppia della superficie (§ 9).

Conseguentemente si ha:

$$\pi = \frac{(m_1 + m_2 - 1)(m_1 + m_2 - 2)}{2} - h_1 - h_2 -$$

$$- k_1 - k_2 - l - \sum \frac{(s_1 + s_2)(s_1 + s_2 - 1)}{2} .$$

Ma se con i continuiamo ad indicare il numero (virtuale) dei punti comuni a C_1 e C_2, si ha:

$$m_1 m_2 = l + i + \sum s_1 s_2 .$$

Da queste uguaglianze segue la formula di Noether:

$$(b) \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 ,$$

che ci da appunto la relazione che volevamo stabilire.(*)

(*) Cfr. Picard et Simart Théorie des fonctions algebriques de deux variables indipendantes. t. II, p.106 - Paris, Gauthier-Villars, 1900 - ed anche Enriques-Chisini, op. cit. vol. III pagg. 399 e seg.

18.- CARATTERI VIRTUALI

Da $|C| = |C_1 + C_2|$, segue

$$|C_2| = |C - C_1|$$

e le precedenti relazioni (a) e (f), noti n ed n_1, π e π_1, permettono di calcolare, rispettivamente, n_2 e π_2; ciò conduce a definire il genere e il grado virtuali di $|C_2|$ anche se questo sia riducibile o di dimensione nulla, poichè in ogni caso si prova che il valore dei due caratteri n_2 e π_2, riesce indipendente da ciò che vi è d'arbitrario nella costruzione del sistema $|C_2|$ come differenza di due altri.

Infatti, sia $|C|$ un qualunque sistema lineare, comunque riducibile e di dimensione ≥ 0: consideriamo un sistema $|K|$, irriducibile, di genere π e grado n, tale che il sistema somma $|C+K|$ riesca pure irriducibile. Vogliamo provare che i due caratteri x e y (genere virtuale e grado virtuale di $|C|$) definiti dalle relazioni:

$$(f) \qquad \pi + x + i - 1 = \pi'$$

$$(a) \qquad n + y + 2i = n'$$

riescono indipendenti dalla scelta arbitraria di $|K|$.

Perciò si consideri invece di $|K|$, un altro qualunque sistema lineare irriducibile $|L|$, di genere π_1 e grado n_1, tale che sommato a $|C|$ dia un sistema $|C+L|$ irriducibile, di genere e grado π_1', n_1'. Detto i_1 il numero (virtuale) delle intersezioni di una C e di una L, si verifica subito che i valori di x ed y dati dalle relazioni soprascritte, coincidono con quelli forniti da:

$$\pi_1 + x + i_1 - 1 = \pi_1'$$

$$n_1 + y + 2i_1 = n_1'.$$

Basta infatti applicare le formule (a) e (f) del §17, al sistema:

$$|C+K+L| = |C+K| + |L| = |C+L| + |K|.$$

Dopo ciò anche le formule (a) e (f) del paragrafo precedente, per la determinazione del genere e grado virtuali del sistema somma di due sistemi lineari completi, si estenderanno ad ogni caso, senza più alcuna limitazione per i sistemi addendi.

Osserviamo, in particolare, che il grado virtuale di un sistema $|C|$, secondo la definizione precedente può anche essere dato da un numero negativo; necessariamente in tal caso il sistema $|C|$ ha dimensione zero, cioè è costituito da una sola curva.

Riepilogando, abbiamo la conclusione seguente:

Per ogni sistema lineare, comunque riducibile, di dimensione ≥ 0, appartenente alla superficie F, sono definiti due caratteri virtuali, detti genere e grado, invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie. La definizione è tale che ricade nella definizione del genere e del grado effettivi per ogni sistema irriducibile non avente dei punti base dotati di molteplicità effettiva superiore alla rispettiva molteplicità virtuale. Essa è inoltre tale che sommando due qualunque sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$, rispettivamente di genere virtuale π_1, π_2, e di grado n_1, n_2, ed essendo i il numero virtuale delle intersezioni di una C_1 con una C_2, si ottiene un sistema lineare $|C_1 + C_2|$ di genere:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1 \tag{ℓ}$$

e di grado

$$n = n_1 + n_2 + 2i. \quad (*) \tag{a}$$

(*) Cfr. F. Enriques: Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche - Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino - vol. XXXVII - 1901.

19.- NOTA

Nelle considerazioni svolte nel paragrafo precedente abbiamo senz'altro ammesso che dato un sistema $|C|$, comunque riducibile, si possa determinare sempre un sistema *irriducibile* $|K|$ tale che $|C+K|$ sia ancora irriducibile. Ci si rende subito conto della cosa nel modo seguente. Se S_r è lo spazio al quale appartiene F, potremo sempre costruire in S_r una superficie (di ordine m convenientemente grande) che passi per una curva C di $|C|$ e che incontri ulteriormente la F in una curva *irriducibile* K. Allora se H è il gruppo dei punti base di $|C|$, le ipersuperficie d'ordine m passanti per H, segnano su F un sistema lineare *irriducibile* (in generale non completo) che è contenuto (totalmente) in $|C+K|$, onde anche questo risulta *irriducibile*.

20.- APPLICAZIONI ED ESEMPI

Vediamo ora alcune applicazioni delle definizioni e dei risultati stabiliti al § 18.

Determiniamo il grado delle curve eccezionali: a tal uopo, consideriamo un sistema $|C|$, completo e semplice, avente in un punto O (semplice per la superficie) un punto di molteplicità $\underline{s}$. Detto n il grado di $|C|$, ed y l'incognito grado di $|O|$, dalla relazione (a) del § 18 si ha:

$$n + y + 2s = n - 1 + 2s$$

essendo (come è subito visto - cfr § 15) $n - 1 + 2s$ il grado di $|C + O|$. Segue $y = -1$.

Inquanto al genere π della curva eccezionale si troverebbe, in modo analogo, che è nullo ($\pi = 0$), ma ciò è già noto *a priori* per essere una tal curva razionale. Dunque *le curve eccezionali hanno genere zero e grado - 1.*

Come altro esercizio consideriamo il caso in cui la superficie F possieda, in un punto O, un punto multiplo isolato, di molteplicità s, il quale, per trasformazione birazionale, da luogo ad una *curva fondamentale* Θ del sistema $|C|$ trasformato di quello delle sezioni piane di F.

Per semplicità supponiamo che il detto punto O, sia un punto conico ordinario, il cui cono tangente non abbia generatrici multiple.

Vogliamo determinare il genere x, ed il grado y di 0. Indichiamo con π il genere di $|C|$, e sia π_1 quello del sistema $|C_1| = |C - 0| = |C - \theta|$ residuo di θ rispetto a $|C|$; le C_1 sono segnate su F dai piani per 0, e quindi si ha:

$$\pi_1 = \pi - \frac{s(s-1)}{2}$$

Inoltre è chiaro che il numero $\underline{i}$ delle intersezioni di una C_1 con θ (uguale al numero dei punti di C_1 che cadono in 0) è s, onde da $|C| = |C_1 + \theta|$, per la (b) del §18, segue:

$$\pi_1 + x + s - 1 = \pi$$

da cui:

$$x = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

Sia invece n il grado di $|C|$ (uguale all'ordine di F), ed n_1 quello di $|C_1|$; si ha:

$$n_1 = n - s\,,$$

infatti due C_1 piane hanno in comune un numero di punti uguale al numero delle intersezioni - fuori di P - della retta comune ai loro piani con la F. Quindi la (a) del citato §18, ci dà:

$$n_1 + y + 2s = 0 \quad , \quad y = -s .$$

Dunque, riepilogando, <u>in generale, la curva infinitesima che costituisce l'intorno di un punto s-plo isolato di una superficie, ha genere $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$, e grado virtuale $-s$.</u>

In particolare per un punto doppio isolato si ha

$$x = 0 , \qquad y = -2 ;$$

abbiamo così un nuovo esempio che ci mostra che <u>non tutte le curve razionali sono eccezionali</u> (§ 5).

I risultati precedenti si estendono al caso di un punto multiplo isolato <u>conico</u> in cui il cono tangente possegga qualche generatrice multipla; ma le formule dànno il <u>genere virtuale</u> del cono (come se fosse privo di generatrici multiple), ossia dell'intorno di O, in luogo del suo genere effettivo.

Invece si può avere una eccezione essenziale nel caso di un punto multiplo isolato per cui il cono tangente si riduce ad un cono multiplo.

Prendiamo come esempio il <u>tacnodo</u> che è uno speciale punto doppio uniplanare, già definito nel § 2.

Designando con O tale punto, il genere della sezione piana per O diminuisce rispetto al genere della sezione generica, non più di una, ma di due unità (possedendo tale sezione un'altro punto doppio infinitamente vicino ad O), ed è $\underline{i} = 2$, e quindi il genere di O risulta $\underline{x} = +1$ (*), ed il grado $\underline{y} = -2$.

Studiamo ora il caso in cui il punto multiplo O di F, appartenga alla sua linea multipla. Per fissare le idee supponiamo, ad esempio, che O sia un punto triplo (per F) situato sopra una linea doppia ordinaria. Detto ancora $|C|$ il sistema delle sezioni piane di F, e $|C_1| = |C - O|$ il sistema residuo di O rispetto a $|C|$, osserviamo che se π è il genere di $|C|$ e π_1 quello di $|C_1|$, si ha:

$$\pi_1 = \pi - 2 ,$$

e quindi il genere virtuale $\underline{x}$ di O, è dato da:

$$\pi_1 + x + 2 = \pi$$

da cui $x = 0$.

Il punto O ha quindi genere virtuale ed effettivo uguali. Per il grado di O ritroviamo il valore $y = -3$.

In generale si capisce di qua che il genere virtuale di un punto multiplo O, dovrà valutarsi tenendo conto dell'abbassamento che proviene dal passaggio per esso della curva multipla (e non, in generale, da altre singolarità accidentali.)

(*) D'accordo col fatto che l'intorno del tacnodo è rappresentato sopra un ente razionale doppio, con quattro elementi di diramazione: tale è il fascio delle tangenti alla superficie nel tacnodo, in cui si distinguono le quattro rette tangenti ai rami della sezione della superficie col piano tangente.

21.- SERIE CARATTERISTICA VIRTUALE (*)

L'ordine di idee che porta ad estendere la definizione del genere e del grado di un sistema lineare con l'introduzione dei caratteri virtuali, conduce anche ad una estensione significativa del concetto della serie caratteristica.

Ricordiamo che la *serie caratteristica* di un sistema lineare irriducibile $|C|$, è stata definita nel § 7 come la serie segata sopra una generica curva C dalle rimanenti curve del sistema (Segre). Qui giova a noi considerare la serie caratteristica (eventualmente resa) completa.

Ora l'anzidetta definizione della serie caratteristica viene meno per un sistema $|C|$ di dimensione zero, che consti cioè di una sola curva (irriducibile) C. Ma in molti casi (se il genere virtuale di C è maggiore di zero) si riesce a definire sopra questa, la serie caratteristica virtuale.

Alla curva C aggiungiamo un qualunque sistema irriducibile $|K|$ tale che anche il sistema $|C+K|$ risulti irriducibile.

Diremo allora *serie caratteristica virtuale sopra C*, la serie residua della serie segata da $|K|$ su C, rispetto alla serie (completa) segnata su C da $|C+K|$.

È ovvio che la serie caratteristica virtuale

(*) Cfr. F. Severi - Osservazioni sui sistemi continui di curve - Atti dell'Accad. di Torino - Vol. XXIX - anno 1904.

così definita, coincide o è contenuta nella serie caratteristica completa effettiva, qualora C sia contenuta in un sistema $|C|$ di dimensione maggiore di zero.

Ora occorre dimostrare che in ogni caso la anzidetta serie caratteristica è indipendente dal sistema ausiliario $|K|$ del quale ci siamo serviti per definirla. Infatti consideriamo in luogo di $|K|$ un altro sistema $|L|$; sarà

$$|(C+K)+L| = |(C+L)+K| = \\ = |C+K+L|.$$

Quindi se, sopra la C, alla serie segnata da $|C+K|$ si aggiunge quella segata da $|L|$, si perviene alla stessa serie cui si giunge sommando alla serie segnata da $|C+L|$ quella segnata da $|K|$; perciò coincidono pure le serie che si ottengono sottraendo da queste, la serie segata da $|K+L|$.

La considerazione della serie caratteristica virtuale acquista particolare interesse quando la curva data appartiene ad un <u>sistema continuo</u> $\{C\}$ non lineare, poichè sempre accade che <u>le curve del sistema $\{C\}$ infinitamente vicine ad una di esse, segano sopra questa gruppi della serie caratteristica</u>.

Per dimostrarlo si prenda entro il sistema $\{C\}$ una curva fissa $\bar{C}$ ed una curva variabile C che faremo tendere a $\bar{C}$, e si introduca poi un sistema ausiliario $|K|$: la serie cui appartiene il gruppo $(\bar{C}\,C)$, si ottiene sopra $\bar{C}$ come residua della serie segata da $|K|$ rispetto alla serie segata da $|C+K|$; ma è ovvio che quando C diventa infinitamente vicina a $\bar{C}$ si definisce in tal guisa la serie caratteristica.

CAPITOLO II

SISTEMI COVARIANTI E INVARIANTI

22.- CURVE JACOBIANE

Sopra la superficie F (che possiamo supporre priva di qualsiasi singolarità,) consideriamo un sistema lineare irriducibile |C| di dimensione 2 (rete).

Il luogo dei punti della superficie che sono doppi per una curva della rete, è una linea algebrica C_j che diremo *jacobiana* della rete. La C_j si può anche definire come luogo dei punti di contatto di due curve della rete: infatti il fascio da esse determinato contiene una curva con punto doppio nel punto di contatto.

Nel piano è noto che la *jacobiana* di una rete di curve dell'ordine m (≥ 0), è una curva dell'ordine $3m-3$: ed ha, in generale, un punto di molteplicità $3i-1$ in un punto base i-plo della rete. Così un punto base semplice O è, in generale, doppio per la jacobiana: ma se, per esempio, le curve della rete hanno in O una tangente fissa, ivi la jacobiana ha invece un punto triplo (con quella tangente fissa)! (*)

Ora queste proprietà si conservano inalterate anche sopra una qualunque superficie F, come appare senz'altro evidente osservando che esse hanno carattere differenziale e che quindi alla superficie – considerata in un intorno sufficientemente ristretto di un suo punto – si può sostituire il paraboloide osculatore di ordine conveniente, che è razionale, cioè rappresentabile biunivocamente sul piano.

Le curve jacobiane godono della seguente proprietà fondamentale: *Le reti contenute in un medesimo sistema lineare irriducibile $|C|$, di dimensione $r \geq 2$, hanno curve jacobiane equivalenti fra loro* (cioè appartenenti ad un medesimo sistema lineare)

Estragghiamo da $|C|$ due reti qualsiansi, e confrontiamo le loro jacobiane: dimostriamo anzitutto che esse sono equivalenti se le due reti hanno in comune un fascio, sicchè il loro <u>sistema congiungente</u> (**) è un sistema lineare ∞^3. Al-

---

(*) Cfr: Enriques - Chisini - op. cit. libro III - cap. I. § 5 - (Vol. II).

(**) Sistema <u>congiungente</u> di due sistemi lineari ∞^r ed ∞^s, contenuti in uno stesso sistema lineare, dicesi il sistema lineare <u>minimo</u> che li contiene entrambi. Questo sistema ha la dimensione $r+s-i$, essendo i la dimensione del sistema comune ad ambedue, loro <u>intersezione</u>. Dal punto di vista della geometria astratta questa af-loro, preso sulla F un punto generico P, esiste una curva $\bar{C}$ di questo sistema congiungente (e quindi di $|C|$) avente ivi un punto doppio: questa curva insieme al fascio comune alle due reti date, individua una rete di $|C|$, la cui jacobiana passa per P. Ed al variare di $\bar{C}$ (nel sistema congiungente suddetto), la rete da essa individuata in tal modo, varia in un fascio (di reti)(*). Ma poichè si ha corrispondenza biunivoca fra le reti di questo fascio e le loro jacobiane, ne segue che anche queste ultime si possono porre in corrispondenza biunivoca con i valori di un parametro λ. Si viene così ad aver costruito un sistema ∞^1 di curve jacobiane (tra le quali evidentemente si trovano le jacobiane delle due reti date), tale che per un punto generico P di F passa una jacobiana del sistema, e si ha corrispondenza biunivoca tra queste e i valori d'un parame-

---

fermazione si traduce in una nota proposizione sugli iperspazi; se due spazi S_r ed S_s sono contenuti in uno spazio minimo S_t, essi si intersecano secondo un S_i, dove $i = r + s - t$.

(*) Il ragionamento precedente si chiarisce, sotto forma projettiva, assumendo le curve C del nostro sistema congiungente segate dai piani dello spazio ordinario; le due reti essendo date da due stelle di piani di centri A e B. Quindi il nominato fascio di reti corrisponde al sistema delle reti determinate dalle stelle i cui centri appartengono alla retta $p = AB$. In ogni punto P della F c'è un piano tangente che incontra p in un punto.

tro 1: onde tale sistema è un fascio razionale; e ciò dimostra l'equivalenza delle jacobiane delle due particolari reti estratte da $|C|$.

Prendiamo ora invece in $|C|$ due reti generiche, $|C_1|$ e $|C_2|$, non aventi in comune un fascio. Consideriamo entro $|C|$ la rete ausiliaria $|C_3|$ che si ottiene congiungendo un fascio di $|C_2|$ con una curva C_1 di $|C_1|$. La $|C_3|$ e la $|C_2|$ hanno, per costruzione, un fascio in comune e quindi le loro jacobiane sono equivalenti. La dimostrazione della equivalenza delle jacobiane di $|C_1|$ e $|C_2|$, si riconduce così a mostrare l'equivalenza delle jacobiane delle reti $|C_1|$ e $|C_3|$, che hanno in comune la C_1. Prendiamo allora in $|C_1|$ una seconda curva $\bar{C}_1$ (distinta da C_1), e così pure in $|C_3|$ prendiamo un'altra curva C_3 (distinta da C_1): e sia $|C_4|$ la rete individuata dalle tre curve $\bar{C}_1$, C_1, C_3. La $|C_4|$ ha in comune con $|C_1|$ il fascio individuato dalle curve $C_1, \bar{C}_1$, e con $|C_3|$ il fascio determinato da C_1 e C_3: quindi le jacobiane di $|C_1|$ e di $|C_3|$ sono ambedue equivalenti alla jacobiana di $|C_4|$, e perciò equivalenti fra loro (*).

(*) Nella geometria astratta il ragionamento si trasforma così: dati in un iperspazio qualunque, due piani α e β, esiste sempre un piano γ incidente ad α secondo una retta ed avente un punto comune con β; e c'è poi sempre un piano δ che passa per questo punto comune e incontra α e γ secondo due rette. Le doppie di piani α e δ, δ e γ, γ e β, appartengono rispettivamente a spazi congiungenti di tre dimensioni.

Concludendo: abbiamo mostrato che le jacobiane di due reti qualunque estratte da $|C|$ sono equivalenti, e quindi tutte le jacobiane delle reti di $|C|$ sono equivalenti fra loro.

23.- SISTEMA JACOBIANO

Il sistema completo $|C_j|$ al quale appartengono le jacobiane C_j delle reti estratte da $|C|$, dicesi sistema jacobiano del sistema lineare $|C|$.

Questa definizione è senz'altro perfetta quando il sistema $|C|$ non abbia punti base, intendendosi allora di completare il sistema delle jacobiane C_j, senza impor loro alcun punto base. Quando $|C|$ abbia dei punti base conviene precisare le molteplicità che ivi verranno assegnate per le curve del sistema $|C_j|$.

Siccome in generale un punto i-plo per una rete è $(3i-1)$-plo per la sua jacobiana, converremo che ogni punto base i-plo di $|C|$, sia un punto base di molteplicità virtuale $3i-1$ per $|C_j|$, estendendo la convenzione ai punti infinitamente vicini che eventualmente formino il gruppo base di $|C|$. Così, per esempio, se $|C|$ possiede un punto base semplice con tangente fissa, cioè due punti base semplici infinitamente vicini, la jacobiana della rete generica di $|C|$, avrà effettivamente in O un punto triplo e la tangente fissa OO' (cfr. § 22) ma il sistema di queste curve sarà contenuto in un sistema, generalmente più ampio, con due punti base in O e in O', che costituirà il nostro sistema jacobiano completo $|C_j|$.

All'infuori di quelli che nascono dai punti base di $|C|$ nel modo suddetto, il sistema jacobiano $|C_j|$ è (virtualmente) privo di punti base.

Abbiamo fino a qui supposto che il sistema $|C|$ fosse irriducibile; consideriamo ora invece il caso in cui $|C|$ contenga una componente fissa K: allora ogni punto P di K si può riguardare come un punto base con tangente fissa per ogni rete estratta da $|C|$, e quindi ivi la sua jacobiana ha un punto triplo, cioè <u>la curva K contata tre volte, fa parte della jacobiana di ogni rete estratta da $|C|$</u>, quindi se diciamo C_j la jacobiana della parte variabile (<u>irriducibile</u>) di una tale rete, il sistema jacobiano di $|C|$ è il sistema completo $|C_j + 3K|$.(*)

(*) A posteriori una verifica dell'esattezza di questo risultato per i sistemi di curve piane, si può avere nel modo seguente. Se m_1 è l'ordine della componente variabile di C, e m_2 quello della sua componente fissa K, la jacobiana C_j è dell'ordine $3m_1 - 3$, e la jacobiana di C deve essere dell'ordine $3(m_1 + m_2) - 3$, e questo è appunto l'ordine della curva $C_j + 3K$.

24. TEOREMA FONDAMENTALE

L'osservazione con la quale abbiamo terminato il paragrafo precedente ci permette di dimostrare un teorema (di *Enriques*) che è fondamentale per questa teoria. Si ha che:

<u>Dati sopra la F, due sistemi lineari irriducibili $|C|$ e $|K|$, ambedue virtualmente privi di punti base</u> (e di dimensioni almeno uguali a 2), <u>il sistema jacobiano $|(C+K)_j|$ del loro sistema somma $|C+K|$ è dato</u> da:

$$(1)\quad \underline{|(C+K)_j|} = \underline{|C_j+3K|} = \underline{|3C+K_j|}.$$

Infatti nel sistema $|C+K|$ è contenuto il sistema $|C|+K$ con la curva K fissa, ed il sistema $C+|K|$ con la curva fissa C, i quali hanno per sistemi jacobiani, rispettivamente, i sistemi:

$$|C_j+3K| \quad , \quad |K_j+3C|;$$

ma questi sistemi coincidono fra loro e con il sistema $|(C+K)_j|$ in quanto due sistemi (privi di punti base) contenuti in un terzo, hanno lo stesso sistema jacobiano, che è quello del sistema contenente.

Questo teorema deve essere lievemente modificato nel caso in cui i due sistemi dati non sono ambedue privi di punti fissi.

Supponiamo, per semplicità, che soltanto il sistema $|C|$ possieda un punto base i-plo, O: allora non c'è nulla da modificare nel ragionamento precedente in quanto si voglia costruire il sistema jacobiano di $|C+K|$, a partire da una rete di curve che contenga come parte fissa una K, perchè la jacobiana $C_j + 3K$ di una tale rete ha in O la stessa molteplicità $3i-1$ che spetta a $|(C+K)_j|$: ma se invece si considera la jacobiana di una rete che ha come parte fissa una C, questa avrà in O la molteplicità $3i$ invece che $3i-1$, e bisogna quindi sommarle il punto O per avere la curva generica del sistema $|(C+K)_j|$, e quindi:

$$|(C+K)_j| = |C_j + 3K| = |K_j + 3C + O|.$$

In generale se il sistema $|C|$ possiede più punti base $O_1, O_2, O_3, \ldots$; ed il sistema $|K|$, è pure dotato di un numero qualunque di punti base $\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3, \ldots$; si ha:

$$|(C+K)_j| = |C_j + 3K + \Sigma\bar{O}| = |K_j + 3C + \Sigma O|,$$

dove la sommatoria ΣO si deve limitare a tutti i punti base di $|C|$, che non sono pure punti base per $|K|$; e analogamente $\Sigma\bar{O}$ ai punti $\bar{O}$ distinti dai punti O.

La definizione di sistema jacobiano (§ 23) di un sistema $|C|$, è subordinata all'ipotesi che $|C|$ sia irriducibile e abbia dimensione maggiore o uguale a 2.

Il <u>teorema fondamentale</u> consente ora di togliere questa restrizione. Dato un <u>qualunque</u> sistema $|C|$, si sommi ad esso un sistema $|L|$ (che possiamo supporre privo di punti base), tale che $|C+L|$ sia irriducibile ed abbia dimensione ≥ 2; da

$$|(C+L)_j| = |C_j + 3L|,$$

segue

$$|C_j| = |(C+L)_j - 3L|,$$

relazione che definisce in ogni caso, il sistema $|C_j|$ jacobiano di $|C|$. Resta però da mostrare che il sistema $|C_j|$ è indipendente dal sistema ausiliario $|L|$: infatti se a $|L|$ si sostituisce un altro sistema $|M|$, nelle medesime condizioni, si ha:

$$|(C+L+M)_j| = |(C+L)_j + 3M| = |(C+M)_j + 3L|$$

e quindi

$$|(C+L)_j - 3L| = |(C+M)_j - 3M|.$$

25. - SISTEMA CANONICO: GENERE SUPERFICIALE E GENERE LINEARE

Tornando al caso - più semplice - in cui i sistemi $|C|$ e $|K|$ siano ambedue privi di punti base, la relazione (1) del paragrafo precedente, si può scrivere:

$$|C_j - 3C| = |K_j - 3K|$$

Il sistema $|C_j - 3C|$, virtualmente così definito (di cui rileveremo più tardi le condizioni di esistenza effettiva) è indipendente da $|C|$, e quindi è invariante per una trasformazione che muti la F in F', qualora sopra nessuna delle due superficie esistano punti fondamentali che si mutino in curve eccezionali dell'altra. Anche se $|C|$ ha punti base (per esempio un punto base i-plo, O), il sistema residuo $|C_j - 3C|$ non varia al variare di $|C|$, se si prescinde dalla curva infinitesima (d'ordine zero) costituita dall'intorno di O, avendosi ora:

$$|C_j - 3C| = |K_j - 3K + O|.$$

Per vedere cosa accada nel caso in cui sulla F esista una curva eccezionale ω (d'ordine $\underline{i}$) che si muti in un punto (semplice) O' di F', cominciamo col dimostrare che <u>ogni curva eccezionale ω,</u>

di F, appartiene come parte fissa al sistema $|C_j - 3C|$, supposto esistente.

Infatti se $|C|$ è il sistema delle sezioni piane di F (come sempre possiamo supporre) la ω ha $3i$ intersezioni con $3C$ e $3i-1$ con C_j (*) e quindi la $C_j - 3C$ incontra la ω in -1 punti, il che significa appunto che ogni $C_j - 3C$ contiene per intero la ω.

Ne segue che il sistema $|C_j - 3C|$ è invariante a meno di curve eccezionali; precisamente: se si muta la F nella F', per poter riguardare sopra la F' il sistema $|C'_j - 3C'|$, come trasformato del sistema $|C_j - 3C|$ di F, si devono aggiungere su F' alle curve propriamente trasformate delle $C_j - 3C$, le curve eccezionali di F'; mentre spariscono le curve eccezionali di F che si riducono a punti di F'.

Volendo quindi ottenere da $|C_j - 3C|$ - supposto esistente - un sistema assolutamente invariante per trasformazioni birazionali, conviene prescindere dalle curve eccezionali (il che non cambia la dimensione del sistema).

Il sistema residuo che ne risulta dicesi sistema canonico della superficie (**)

(*) Sopra la F', il sistema trasformato di $|C|$ ha in O' un punto base i-plo, che è di molteplicità $3i-1$ per lo jacobiano.

(**) Se il sistema canonico ha sopra F un punto base semplice O (virtualmente inesistente), quando si passi ad una superficie trasformata F', su cui O si muti in una curva eccezionale ω, la ω verrà a far parte per due ragioni delle curve $|C_j - 3C|$ di F'. - Ciò anche in conformità del fatto - sopra stabilito - che ogni curva eccezionale ha -1 intersezioni con le curve di $|C_j -$

Se lo indichiamo con $|K|$ si ha quindi, con notazioni evidenti:

$$|C_j - 3C| = |K + \Sigma \omega|.$$

Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti, costituisce un _invariante per trasformazioni birazionali_ della superficie F, e dicesi _genere geometrico_ della F; lo indicheremo con p o p_g. Inoltre chiamasi _genere lineare_ di F, e si designa con $p^{(1)}$, il genere (virtuale) delle curve canoniche, supposte esistenti.

Confrontiamo i caratteri del sistema canonico $|K|$ con quelli di $|C_j - 3C| = |K + \Sigma \omega|$: le loro dimensioni sono uguali ed hanno il valore $p_g - 1$. Invece, se $p^{(1)}$ è il genere di $|K|$, e $\bar{p}^{(1)}$ quello di $|C_j - 3C|$, si ha:

$$\bar{p}^{(1)} = p^{(1)} - \sigma,$$

indicando con σ il numero delle curve eccezionali (*:) (le quali

---

3C| (e precisamente: la ω ha un punto comune con la parte variabile della $C_j - 3C$, e -2 intersezioni con la 2ω, dato che ω è di grado -1, cfr. § 20). In questo caso la ω dovrà togliersi soltanto una volta da $|C_j - 3C|$, lasciandola figurare come componente fissa del sistema canonico $|K|$.

Le curve eccezionali nascenti da punti base virtualmente inesistenti di $|K|$ si diranno _curve eccezionali singolari_. Per semplicità noi non terremo conto della loro eventuale esistenza (Un esempio di sistema canonico dotato di punto base virtualmente inesistente trovasi in _Castelnuovo et Enriques_: _Sur quelques récents resultats dans la teorie des surfaces algebriques_ - n° 22 - Math. Annalen Bd. 48)

(*:) Non singolari (cfr. nota precedente).

debbono essere in numero finito facendo parte di tutte le curve di $|C_j - 3C|$, nell'ipotesi d'esistenza di questo sistema). Infatti ogni curva eccezionale - componente fissa di $|C_j - 3C|$ senza intersezioni colle sue parti canoniche - aggiunta a $|K|$ ne diminuisce di una unità il genere (cfr. § 17 e § 20).

Analogamente, detto $p^{(2)}$ il grado di $|K|$, e $\bar{p}^{(2)}$ quello di $|C_j - 3C|$, si ha:

$$\bar{p}^{(2)} = p^{(2)} - \sigma .$$

Quindi, mentre $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ sono *invarianti assoluti* per trasformazioni birazionali della superficie, $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$ sono *invarianti relativi* in quanto cambiano ogni qual volta, con una trasformazione birazionale, si generano o si perdono curve eccezionali.

Qui occorre una importante osservazione. Mentre il genere ed il grado $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ del sistema canonico, sono definiti soltanto nell'ipotesi dell'esistenza di questo sistema ($p_g > 0$), invece $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$, come caratteri (virtuali) del sistema virtuale $|C_j - 3C|$, si possono calcolare indipendentemente da questa ipotesi. Allora se la superficie F possiede un numero finito σ di curve eccezionali, definiremo per F i caratteri $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ in base alle relazioni:

$$\bar{p}^{(1)} = p^{(1)} - \sigma , \quad \bar{p}^{(2)} = p^{(2)} - \sigma ,$$

e questi caratteri ricadranno nel genere e nel grado del sistema canonico per $p_g > 0$, e ne costituiranno invece una generalizzazione quando sia $p_g = 0$. E $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ riusciranno sempre invarianti assoluti.(*)

Soltanto nel caso in cui la superficie possegga un numero infinito di curve eccezionali, non risultano definiti, per questa via, gli invarianti assoluti al posto degli invarianti relativi $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$: si potrebbe riuscirci considerando i valori massimi assunti da $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$ al variare di F con trasformazioni birazionali, come ha proposto Castelnuovo(**). Ma la possibilità di classificare (Castelnuovo-Enriques) completamente - come vedremo - le famiglie di superficie che ammettono infinite curve eccezionali (superficie razionali e superficie rigate), toglie ogni importanza a tale caso d'eccezione.

Vale in ogni caso la relazione:

$$\bar{p}^{(2)} = \bar{p}^{(1)} - 1.$$

Questa formula è una conseguenza del teorema fondamentale (§ 24), e quindi potrebbe essere qui dimostrata, ma converrà stabilirla più tardi (§ 29)

(*) Enriques: Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche - Memorie della Soc. Ital. delle Scienze (detta dei 40) - s. 3 - t. 10 - 1896 - p. 1.

(**) Cfr. G. Castelnuovo: Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo. Rend. Lincei - 5 e 20 giugno 1897 (serie V - vol. 6 - pag. 372, 406).

valendoci dell'uso di simboli e notazioni che introdurremo. In conclusione $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$ (e perciò anche $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$) costituiscono, in sostanza, un solo invariante.

Il ricordato teorema fondamentale che ci ha portato allo studio del sistema canonico, conduce analogamente a considerare altri sistemi *invarianti*, $|2C_j - 6C|$; $|3C_j - 9C|$, ...; che si presentano come multipli del sistema canonico e che perciò diconsi *pluricanonici*.

La loro considerazione è importante specialmente quando sia $p_g = 0$, perchè allora, mentre manca il sistema canonico, può accadere che esista un sistema i-canonico, e che quindi il *plurigenere* P_i (numero delle curve i-canoniche linearmente indipendenti) sia diverso da zero (Per un esempio di ciò, vedi § 33).

26.- SISTEMA AGGIUNTO

Lo jacobiano $|C_j|$ costituisce un sistema covariante di $|C|$; e se a $|C_j|$ si sommano o si sottraggono comunque delle curve C si ottengono sempre sistemi covarianti di $|C|$.

Fra questi abbiamo considerato in particolare il sistema $|C_j - 3C|$, che ci ha dato il sistema canonico, indipendente da $|C|$, cioè <u>invariante</u>.

Ora, nella serie dei sistemi covarianti sopra indicati, si presenta naturale di considerare il sistema $|C'| = |C_j - 2C|$, che è, fra i sistemi propriamente covarianti, il più semplice.

Il sistema $|C'|$ si dirà <u>sistema aggiunto</u> a $|C|$, e diremo anche che le C' sono <u>curve aggiunte alle C</u>.

Quindi il sistema canonico, aumentato delle curve eccezionali, è dato da:

$$|C_j - 3C| = |C' - C|,$$

(supposto $|C|$ privo di punti base).

Se la superficie è un piano e il sistema $|C|$ è un sistema di curve d'ordine <u>n</u>, dotato di punti base con molteplicità qualsiansi, le curve C' diventano le curve d'ordine <u>$n-3$</u> passanti <u>$i-1$</u> volte per ogni punto base i-plo, cioè le curve <u>aggiunte</u> alle C

nel senso di Brill e Noether. Di queste curve aggiunte Castelnuovo ha dimostrato l'invarianza per trasformazioni cremoniane dell'intero piano, valendosi delle trasformazioni quadratiche generatrici del gruppo Cremona: questa invarianza risulta pure dalla nostra definizione.(*)

Anche sopra una F qualunque, ogni punto base i-plo per $|C|$ ha molteplicità virtuale $i-1$ per le aggiunte C'.

La relazione fondamentale per i sistemi jacobiani (§ 24) si può esprimere come relazione fondamentale per i sistemi aggiunti.

Consideriamo due sistemi $|C|$ ed $|L|$, virtualmente privi di punti base, si ha:

$$|(C+L)'| = |C'+L| = |L'+C|.$$

Se il sistema $|C|$ possiede, ad esempio, un punto base O, questa relazione si modifica nel modo seguente:

$$|(C+L)'| = |C'+L| = |L'+C+O|,$$

facilmente generalizzabile.

Accanto al sistema $|C'|$ si può considerare il secondo aggiunto di $|C|$: $|C''|$; e in modo analogo i successivi sistemi aggiunti. E si ha per il sistema aggiunto di ordine ν di $|C+L|$:

(*) Cfr. Enriques-Chisini - op. cit. - vol. III - libro V - cap. II - § 21.

$$|(C+L)^{(v)}| = |C^{(v)} + L| = |L^{(v)} + C| .$$

Supposto il sistema $|C|$ virtualmente privo di punti base, la relazione fondamentale ci dà:

$$|(C+C')'| = |2C'| = |C+C''| ,$$

da cui:

$$|C''-C| = |2(C'-C)| ,$$

cioè <u>le curve bicanoniche si ottengono estraendo $|C|$ dal sistema secondo aggiunto $|C''|$</u>. E così analogamente per le curve pluricanoniche.

27.- ANCORA SUL SISTEMA AGGIUNTO

Una variante della definizione di <u>sistema aggiunto</u>, data nel paragrafo precedente, s'incontra in <u>Severi</u> (*):

Da un sistema lineare dato, estraggbiamo un fascio $|C|$, e consideriamo sulla superficie F un secondo fascio di curve $|L|$: siano $\bar{C}$ ed $\bar{L}$ due curve determinate qualunque, rispettivamente di $|C|$ ed $|L|$. Le tre curve $\bar{C}+\bar{L}$, $\bar{C}+L$ ed $\bar{L}+C$ individuano una rete, della cui jacobiana $(C+L)_j$ fa parte, come è noto (§ 22), la curva (C, L) dei contatti di una curva C con una L; e, precisamente, si ha:

$$(C+L)_j = (C, L) + \bar{C} + \bar{L}.$$

Quindi il sistema jacobiano di $|C+L|$ è $|(C+L)_j| = |(C, L) + C + L|$.

Ma per il teorema fondamentale e per la nostra definizione, è:

$$|C'+L| = |(C+L)'| = |(C+L)_j - 2C - 2L|$$

di cui:

$$|C'| = |(C, L) - C - 2L|,$$

(*) Cfr. <u>F. Severi</u>: Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà. - Atti Ist. Veneto - Tomo LXV, parte II (1906) - pag. 625.

che è appunto la definizione assunta da Severi, il quale dimostra direttamente l'indipendenza del sistema così definito dalla scelta arbitraria del fascio ausiliario $|L|$.

Segue anche per il sistema canonico:

$$|C' - C| = |(C_1 L) - 2C - 2L|.$$

28.- PROPRIETÀ DELLE CURVE AGGIUNTE

Dato un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere π (>1), privo di punti base, le curve C' aggiunte ad esso segano, sopra una C generica, gruppi della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$.

Supponiamo, per semplicità, che il sistema $|C|$ sia di dimensione maggiore di uno. Designando con n il grado di $|C|$, una rete generica di curve contenuta in $|C|$, sega sopra una C generica della rete stessa una serie (caratteristica) g^1_n i cui $2n + 2\pi - 2$ punti doppi (*) sono le intersezioni della jacobiana della rete colla suddetta C. Ora il gruppo dei $2n + 2\pi - 2$ punti suddetti è necessariamente non speciale su C, e quindi (**) individua una serie lineare completa di dimensione $2n + \pi - 2$: $g^{2n+\pi-2}_{2n+2\pi-2}$, che è segnata su C, eventualmente non per intero, dal sistema $|C_j|$. Se $\pi > 1$, la $g^{2n+\pi-2}_{2n+2\pi-2}$ contiene il doppio g_{2n} della serie g^1_n, e la serie residua è la serie canonica di C (***), la quale è quindi segata da $|C_j - 2C| = |C'|$.

Ricordando che il sistema canonico $|K|$ aumentato delle curve eccezionali della superficie F, è il sistema residuo di $|C|$ rispetto al suo aggiunto $|C'|$ (§ 26), dal teorema precedente segue che le curve canoni-

(*) cfr. Enriques-Chisini - op. cit. vol. III - pag. 59.

(**) cfr. Enriques-Chisini - op. cit. vol. III - pag. 85.

(***) cfr. Enriques-Chisini - op. cit. vol. III - pag. 57.

che completate dalle curve eccezionali, segano sulla curva generica di un sistema irriducibile |C|, privo di punti base, gruppi residui della serie caratteristica (rispetto alla serie canonica).

Se ne deduce in particolare: *la serie caratteristica $g_{p^{(2)}}^{p_g-2}$ del sistema canonico |K|, sopra una superficie senza curve eccezionali, è autoresidua*, cioè il suo doppio costituisce la serie canonica $g^{p^{(1)}-1}_{2p^{(1)}-2}$ della curva K di |K|, quindi $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$.

Osserviamo infine che, qualora il sistema |C| possieda, ad esempio, un punto base O di molteplicità virtuale $\underline{i}$ – onde |C'| ha in O un punto di moltepIicità (virtuale) $i-1$ – il teorema generale precedente sussiste ancora, ma il gruppo delle intersezioni di una C' con una C, costituirà sopra C un gruppo canonico soltanto prescindendo dalle $i(i-1)$ intersezioni assorbite dal punto O.

Conseguentemente dato un sistema lineare irriducibile |C|, dotato di punti base, le curve canoniche, completate dalle curve eccezionali, segheranno sopra una C gruppi residui della serie caratteristica cui si aggiunga ogni punto base i-plo (contato come $\underline{i}$ punti semplici)(*) In particolare se i punti base di |C| sono semplici, non si ha che da aggiungere questi punti, come fissi, alla serie caratteristica.

(*) In questo caso infatti il sistema canonico, aumentato delle curve eccezionali, è dato da |C' - C - O| (§§ 25, 26)

29.- RELAZIONE FRA GENERE E GRADO DEL SISTEMA CANONICO

Come corollario del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, abbiamo trovato che nel caso in cui la superficie F sia priva di curve eccezionali, i suoi caratteri $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ sono legati dalla relazione:

$$(1) \qquad p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

Ora questa è affatto generale essendo sempre verificata, purchè quei caratteri siano definiti (superficie con un numero finito di curve eccezionali); ed in ogni caso - come abbiamo accennato al § 25 - si ha:

$$\bar{p}^{(2)} = \bar{p}^{(1)} - 1$$

Infatti, detti π' ed n', rispettivamente, il genere ed il grado del sistema aggiunto $|C'|$, da:

$$|C'| = |(C_j - 3C) + C|$$

segue (cfr. § 17 e § 28):

$$\begin{cases} \pi' = \pi + \bar{p}^{(1)} + (2\pi - 2 - n) - 1 = \bar{p}^{(1)} + 3(\pi - 1) - n \\ \\ n' = n + \bar{p}^{(2)} + 2(2\pi - 2 - n) = \bar{p}^{(2)} + 4(\pi - 1) - n \end{cases}$$

Si ha inoltre (§ 26):

$$|(C+C')'|=|2C'|=|C+C''|,$$

quindi il grado di $|2C'|$, come numero delle intersezioni di due curve $C'+C'$, è dato da $4n'$, ed è uguale al numero dei punti comuni ad una $2C'$ e ad una $C+C''$, si ha cioè (§ 28):

$$4n' = 4\pi - 4 + 4\pi' - 4$$

ossia:

$$n' - \pi' = \pi - 2,$$

donde la (1).(*)

Nota Bibliografica

Il genere (geometrico) p_g di una superficie F_n, d'ordine n, è stato introdotto da prima da A. Clebsch(**) e da M. Nöther(***) come numero degli integrali doppi di prima specie(****) appartenenti alla superficie e quindi come numero dei polinomi integrandi che sono dati da super-

(*) Cfr. Enriques -: Introduzione.... Memoria citata a pag. 86

(**) Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. 1868.

(***) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens.... I, II, Math. Annalen Bd. 2, 8, 1869, 1874.

(****) Cfr. ad es. Picard et Simart - op. cit. t. I - chap. VII.

ficie d'ordine $n-4$ passanti per la curva doppia di F_n: infatti vedremo (§ 32) che le curve segate su F_n da codeste superficie (superficie aggiunte alla F_n) d'ordine $n-4$, danno appunto le curve canoniche di F_n.

Nöther ha dato una dimostrazione algebrica diretta dell'invarianza di tali curve, rispetto a trasformazioni birazionali di F_n.

Federigo Enriques in una prima memoria del 1893 (*), ha dimostrato geometricamente questo teorema dell'invarianza, in base alla proprietà delle curve canoniche di segare sulla curva generica di un sistema irriducibile $|C|$ gruppi residui della serie caratteristica (cfr. § 28). Nella stessa memoria vengono anche introdotte, e studiate in generale, le curve C' aggiunte a $|C|$, definendole mediante la proprietà di segare sopra la C gruppi canonici e in base alle relazioni che esse hanno con le curve fondamentali del sistema (cfr. cap. III).

Questa definizione delle curve aggiunte viene ripresa e sviluppata da Enriques in una memoria successiva del 1896 (**), nella quale viene dato per la prima volta il teorema fondamentale da noi esposto nel § 24, che costituisce una vera generalizzazione dell'invarianza del sistema canoni-

(*) Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche, Mem. dell'Acc. d. Scienze di Torino, s^e 2^a, t. 44, 1893.

(**) Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche, Mem. della Società ital. d. Scienze s^e III - t. X - 1896.

co, conducendo, in particolare, alla considerazione dei sistemi pluricanonici sopra le superficie di genere zero.

La via che abbiamo seguito partendo dalla considerazione della jacobiana di una rete, è svolta da F. Enriques in una nota del 1901. (*)

(*) Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche, Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino, vol. 37 (1901), pag. 19.

CAPITOLO III

LE SUPERFICIE AGGIUNTE

30.- INTRODUZIONE

Abbiamo visto (§ 28) che le curve C' aggiunte a |C| segano gruppi canonici sulle curve C.

Ci proponiamo ora di ricercare se, e fino a qual punto, tale proprietà sia caratteristica per le curve aggiunte.

Per questo converrà intanto vedere come si possa costruire proiettivamente il sistema aggiunto a |C|, studiando dapprima il caso in cui |C| sia il sistema lineare delle sezioni piane di una superficie F. Ne risulterà anche la costruzione proiettiva del sistema completo individuato da una curva qualunque.

31. SUPERFICIE AGGIUNTE E SISTEMI COMPLETI

Consideriamo una superficie F, d'ordine $\underline{n}$, appartenente allo spazio ordinario, la quale sia dotata di una linea multipla γ, di moltepolicità $\underline{i}$, a falde distinte. E supponiamo che la F non possegga altre singolarità se non quelle che cadono in punti di γ e che risultano, eventualmente, dal passaggio di più rami di γ per un punto multiplo (*punti multipli inessenziali*).(*)

Soddisfa, per esempio, a queste condizioni la superficie dotata di *curva doppia nodale con punti tripli* che sono anche tripli per la superficie, (in ognuno di tali punti i tre rami della curva non essendo tangenti ad uno stesso piano - cfr. §3): a questa superficie, per semplicità di discorso, ci riferiremo sempre nelle considerazioni che seguono.

Diremo *superficie, d'ordine ℓ, aggiunte alla F* le superficie φ_ℓ passanti $i-1$ volte per la linea i-pla γ di F.

Quindi per $i=2$ le φ_ℓ passeranno semplicemente per γ.

Le φ_ℓ costituiscono un sistema lineare che gode della importante proprietà espressa dal se-

(*) Evidentemente un tale punto (*punto multiplo improprio* - cfr. § 35) non abbassa il genere delle sezioni piane di F passanti per esso. Cfr. *Enriques-Chisini*: op. cit. - libro IV - cap. IV - § 35 (vol. II).

guente:

Teorema: _Il sistema lineare di tutte le superficie aggiunte φ_e, di un medesimo ordine l, sega su F (fuori della linea doppia) un sistema lineare completo $|L|$._

Sia L l'intersezioni (fuori di γ) di F con una sua aggiunta φ_e, e sia M una curva (di F) equivalente alla L: evidentemente il nostro teorema risulta dimostrato se riusciamo a far vedere che anche la M è segata da una φ_e.

Se la curva doppia γ di F è dell'ordine $\underline{d}$, la L ha ordine $ln - 2d$, e così pure la M: inoltre un piano generico α sega la F lungo una curva C e la φ_e passante per L, lungo una curva C_e che è, evidentemente, _curva aggiunta_ alla C e passa per il gruppo G_{en-2d} dei punti comuni ad L e ad α. Consideriamo allora la serie completa $|g_{en-2d}|$ segnata su C dalle aggiunte C_e, ed osserviamo che ad essa appartiene il gruppo G'_{en-2d} degli $l_n - 2d$ punti comuni alla M e al piano α, poichè dall'equivalenza di M ed L segue l'equivalenza dei loro gruppi d'intersezioni con C. Onde _per G'_{en-2d} passa almeno una C_e aggiunta a C._

Distinguiamo ora due casi secondo che è $l < n$ o $l \geq n$.

I° caso: $l < n$. Per G'_{en-2d} passa una sola aggiunta $\bar{C}_e$: e quindi se facciamo variare il piano α e per ogni sua posizione costruiamo questa $\bar{C}_e$, si ottiene un sistema algebrico ∞^3 (complesso) di curve $\bar{C}_e$ dello spazio. Per un punto generico P passano ∞^1 curve del complesso il cui luogo è una superficie di un certo ordine i, che vogliamo determinare. A tal uopo osserviamo che, per il noto principio della conservazione del numero (*), l'ordine i non cambia se si fa variare la M con continuità; in particolare (essendo L ed M equivalenti e quindi suscettibili di ottenersi l'una dall'altra con continuità) i rimane inalterato se al predetto complesso relativo ad M, si sostituisce l'analogo relativo ad L. Ma quest'ultimo è costituito dalle ∞^3 sezioni piane di $\mathcal{C}_e$, e per esso è $i = 0$. Ne segue che per un punto generico dello spazio non passa nessuna $\bar{C}_e$, e quindi le $\bar{C}_e$ riempiono necessariamente una varietà a due dimensioni, cioè una superficie $\bar{\mathcal{C}}$. Diciamo che la $\bar{\mathcal{C}}$ è dell'ordine l e non superiore: infatti la $\bar{\mathcal{C}}$ si può considerare come generata da una $\bar{C}_e$ mentre il suo piano α ruota intorno ad una retta generica r, e quindi la sezione di α con $\bar{\mathcal{C}}$ non può essere costituita che dalla $\bar{C}_e$ aumentata eventualmente della retta r (da contarsi un certo numero di volte); onde la r verrebbe a far parte di $\bar{\mathcal{C}}$ il che è assurdo per essere r retta generica dello spazio.

Inoltre, dal modo stesso come l'abbiamo

(*) Cfr. Enriques - Chisini: op. cit. vol. II, pag. 284.

costruita, appare evidente che la $\mathcal{C}_e$, passante per M, è una *aggiunta* alla F: quindi in questo primo caso il nostro teorema risulta dimostrato.

<u>II° caso</u>: $l \geq n$. In questo caso, evidentemente, si hanno infinite curve aggiunte C_e passanti per il gruppo G'_{en-2d} le quali costituiscono un sistema lineare di dimensione

$$\frac{(s+1)(s+2)}{2}$$

con $s = l - n$.

Allora fissiamo nel piano α un punto (generico) Q, e sia $\bar{C}_e$ la curva del predetto sistema, che ha in Q un punto di molteplicità $s+1$ (la $\bar{C}_e$ esiste sempre ed è unica). Facendo variare il piano α nella stella di centro Q, la $\bar{C}_e$ genera una *congruenza* (sistema algebrico ∞^2) di curve nello spazio: e per un punto generico P passa un certo numero (finito) $\underline{i}$ di tali $\mathcal{C}_e$. Con ragionamento del tutto analogo a quello seguito nel caso precedente, si trova ancora che $i = 0$, e si perviene alla stessa conclusione. Cioè la curva M è situata sopra una particolare superficie aggiunta $\mathcal{C}_e$, dotata di un punto $(s+1)$-plo.

La M è anche curva comune a tutte le superficie del sistema di aggiunte (d'ordine $\underline{l}$) alla F, avente dimensione

$$\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{6},$$

che è individuato dalla φ_e e dal sistema delle φ_e spezzate nella F e in una residua superficie d'ordine $s = l - n$.

Il teorema precedente ci permette di costruire il sistema completo |C| individuato da una qualunque curva C, data su F, anche diversa da una sezione piana. Conduciamo per C una superficie aggiunta φ_e (d'ordine l almeno tanto alto quanto sarà necessario perchè tale φ_e esista), e sia K la sua ulteriore intersezione con F (fuori della linea multipla). Allora il sistema di tutte le φ_e passanti per K (e per gli eventuali punti di C imposti come punti base a |C| - cfr. § 11) sega su F il sistema completo |C|: infatti il sistema così ottenuto non è che il sistema residuo di K rispetto al sistema completo |L| = |C + K| segnato su F da tutte le aggiunte d'ordine l.

Variando la φ_e condotta per C (e quindi la K), non varia il sistema lineare completo definito da C, onde possiamo enunciare il teorema:

Ogni curva residua di una data C, rispetto alle superficie aggiunte di determinato ordine, è residua, rispetto alle stesse aggiunte, di una curva qualsiasi di |C|.

È questo il *teorema del resto* che già avevamo trovato nel § 15, e che ora viene presentato nella forma proiettiva di Brill e Nöther; con perfetta analogia a quanto si fa nella teoria delle " serie lineari " relativamente all'omonimo teorema.(*)

(*) Cfr. ad es.: Enriques - Chisini, op. cit. - vol. III - libro V - cap. I - § 11.

32.- CURVE SEZIONI DELLE SUPERFICIE AGGIUNTE D'ORDINE $n-3$ ed $n-4$

Conservando per la superficie F le ipotesi del paragrafo precedente (F dotata solo di curva i-pla con eventuali punti multipli inessenziali) è ora facile costruire il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F.

I piani della stella avente per centro un punto P generico dello spazio, segano su F una rete di curve contenuta in $|C|$, la cui jacobiana C_j è costituita dalla curva intersezione (fuori della linea multipla) di F con la superficie polare prima di P rispetto ad F: la quale non è altro che una aggiunta φ_{n-1}, dell'ordine $n-1$. Se da questa φ_{n-1} sottragbiamo una generica superficie del secondo ordine, si ottiene una aggiunta φ_{n-3}, dell'ordine $n-3$, la quale sega la F lungo una curva del sistema $|C_j - 2C| = |C'|$, quindi il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, è segnato sulla superficie dal sistema lineare delle sue aggiunte φ_{n-3}, d'ordine $n-3$.

Questo risultato si può generalizzare nel modo seguente. Consideriamo il sistema $|hC|$, multiplo secondo il numero h, di $|C|$. Possiamo scrivere:

$$|hC| = |C + (h-1)C|$$

e quindi (§ 26):

$$|(hC)'| = |C' + (h-1)C|$$

La curva C' è segata su F (fuori della linea multipla) da una φ_{n-3}, e la $(h-1)C$ da una generica superficie F_{h-1} dell'ordine $h-1$; ma la superficie $\varphi_{n-3}+F_{h-1}$ non è altro che un'aggiunta dell'ordine $n-4+h$. Cioè <u>sopra la superficie F, d'ordine n, che ha per sezioni piane le C, il sistema aggiunto al sistema $|hC|$, è segato dalle superficie φ_{n-4+h}, d'ordine $n-4+h$, aggiunte alla F.</u>

Infine, poichè il sistema $|C_j - 3C|$ è il sistema canonico di F aumentato delle curve eccezionali (§25), si ha che <u>il sistema canonico completo, è segato su F dalle superficie aggiunte d'ordine $n-4$, fuori della linea multipla e delle curve eccezionali</u>, per le quali passano tutte φ_{n-4}. Quindi il sistema lineare delle φ_{n-4} ha dimensione $p_g - 1$ (§25).

Le curve, $C_j - 3C$, intersezione della F con le sue aggiunte φ_{n-4} (fuori della linea multipla) si diranno <u>curve canoniche impure</u>, differendo soltanto per curve eccezionali dalle curve canoniche propriamente dette (<u>curve canoniche pure</u>).

Se la superficie F_n si trasforma birazionalmente in una F_m, le curve segate su F_n dalle sue aggiunte φ_{n-4}, si cambiano nelle curve intersezione della F_m con le sue superficie aggiunte φ_{m-4}; soltanto nel passaggio da F_n ad F_m, possono nascere o sparire delle curve eccezionali, onde verranno ad aggiungersi o a togliersi delle componenti eccezionali delle curve canoniche impure.

NOTA

Detto ancora $|C|$ il sistema delle sezioni piane di F, e supposto - per semplicità di discorso - che la F possieda una sola linea nodale γ; è ovvio che la γ non fa parte della jacobiana della rete di curve C segate su F dai piani di una stella. Infatti, dal punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali (§4), i punti d'intersezione della γ con un piano della stella non si devono riguardare come punti doppi per la curva sezione C, poichè essi sono dovuti soltanto al particolare modello projettivo F che si è preso per rappresentare la classe [F]; si tratta cioè di punti semplici che vengono accidentalmente a coincidere su quella particolare F (cfr. §4).

Conformemente a ciò, il sistema $|C_j|$ è segato su F dalle sue aggiunte φ_{n-1}, fuori di γ.

Tuttavia le jacobiane C_j delle reti segnate su F dalle stelle di piani, passano tutte per i punti cuspidali di γ(*). Sia, infatti, F' una superficie birazionalmente identica alla F, sulla quale alla curva γ di F corrisponda una curva γ', semplice per F (cfr. §2). I punti di γ' si distribuiranno in ∞^1 coppie neutre (Q', Q") rispetto alle curve C di F', trasformate delle ∞^3 sezioni piane di F; ed, in particolare, ai punti cuspidali di γ corrispondono, su γ', coppie neutre costituite da due punti infinitamente vicini (Q' ≡ Q"),(**)

(*) Cfr. nota (*) a pag. 6.
(**) Cfr. nota (*) a pag. 7.

Ognuna di queste coppie ($Q' \equiv Q''$) è base di una rete di curve C che si toccano in Q': la quale avrà un fascio a comune con ogni altra rete estratta dal sistema triplamente infinito $|C|$; perciò Q' apparterrà sempre alla jacobiana di tale rete (cfr. pag. 72).

Projettivamente la cosa segue dal fatto che le polari prime della superficie F, toccano la F nei punti cuspidali di γ.

Si noti però che il sistema jacobiano completo $|C_j|$ è – per definizione (§23) – privo di punti base (almeno virtualmente): quindi esso è segato su F dal sistema più generale delle aggiunte φ_{n-1}, che passano semplicemente per γ, senza nessun particolare comportamento nei punti cuspidali.

33.– APPLICAZIONI ED ESEMPI

Applichiamo ora le considerazioni precedenti ad alcuni esempi.

Si abbia una superficie F_5, del quinto ordine, con una conica doppia γ. Essa possiede una sola superficie aggiunta del primo ordine, ($n-4 = 5-4=1$) costituita dal piano π di γ: onde la F_5 ha genere geometrico $p_g = 1$. Il piano π incontra la F_5, fuori di γ, lungo una retta r (curva canonica impura) che mostreremo essere eccezionale.

Per questo consideriamo il sistema lineare (semplice) $|C_6|$, di dimensione 4, costituito dalle sestiche intersezioni di F_5 con le quadriche passanti per la conica doppia γ; e trasformiamo la F_5 mediante la trasformazione che si ottiene riferendo proiettivamente le sestiche di $|C_6|$ agli iperpiani di uno spazio S_4 a quattro dimensioni. Si ottiene così una superficie F', immagine della F_4 (§ 10), sulla quale il sistema $|C_6|$ è segato dagli iperpiani.

La superficie F' è del sesto ordine: infatti l'ordine di F' eguaglia il grado del sistema $|C_6|$, il quale è dato dal numero dei punti (non appartenenti a γ) comuni alla F_5 e a due quadriche Q' e Q'' passanti per γ. Ma Q' e Q'' si intersecano nella γ e in una conica residua Γ, incidente alla γ

in due punti H e K: la Γ ha dieci intersezioni con F_5, quattro delle quali sono assorbite dai punti H e K, ne rimangono quindi sei.

Poichè nel sistema lineare ∞^4 delle quadriche per la conica γ, è contenuto il sistema ∞^3 delle quadriche spezzate nel piano di γ e in un piano variabile, la F_5 si può, evidentemente, considerare ottenuta proiettando la F'_6 da un suo punto (semplice) O, in S_3. Il piano tangente alla F'_6 in O, taglia lo S_3 di F_5, in una retta eccezionale, che è la trasformata del punto semplice O di F'_6. Per questa retta deve quindi passare il piano π, costituente l'unica superficie del primo ordine aggiunta alla F_5: onde tale retta coincide con la r sopra considerata, come appunto avevamo asserito.

Poichè la r esaurisce l'unica curva canonica impura di F_5, si può anche dire che la curva canonica (pura) di F_5, è d'ordine zero.

Notiamo che il sistema $|C_6|$, a cui ci siamo dianzi riferiti, è di genere 4. Ciò segue subito dalla (b) del § 17, osservando che si ha:

$$|C_6| = |r + C_5|,$$

se con C_5 si rappresenta la quintica sezione di F con un piano generico (la C_5 è di genere 4 poichè possiede due punti doppi su γ).

Tanto per esercizio, consideriamo la superficie $\bar{F}_6$ — birazionalmente identica alla F_5 — che si ottiene proiettando la F'_6 (di S_4) da un punto generico Q (non appartenente ad essa) in uno spazio a tre dimensioni. Alle curve del sistema $|C_6|$ segate su F'_6 dagli iperpiani per Q, corrispondono le ∞^3 sezioni piane di $\bar{F}_6$, le quali quindi avranno pure genere 4. Onde la sezione piana generica di $\bar{F}_6$ possederà 6 punti doppi, situati sulla linea doppia $\bar{\gamma}$ di $\bar{F}_6$, cosicchè la $\bar{\gamma}$ è del sesto ordine.

La $\bar{F}_6$ è di genere $p_g = 1$, e possiede perciò una sola superficie aggiunta φ_2 del secondo ordine, la quale passa (semplicemente) per $\bar{\gamma}$; e $\bar{\gamma}$ ne esaurisce l'intersezione con F_6.

Poichè la $\bar{\gamma}$, contata due volte, appartiene al sistema segato sulla quadrica φ_2 dalle superficie del sesto ordine, si deduce facilmente che la $\bar{\gamma}$ è l'intersezione della quadrica φ_2 con una superficie cubica: dopo ciò la $\bar{F}_6$ si costruisce subito come combinazione lineare di due superficie riducibili del sesto ordine, passanti doppiamente per $\bar{\gamma}$; a tal uopo si possono considerare superficie composte di due cubiche per $\bar{\gamma}$, ovvero della quadrica φ_2 e di una superficie del quarto ordine, passante per $\bar{\gamma}$.

Come secondo esempio consideriamo —

nello spazio ordinario S_3 — una superficie F_5, del quinto ordine, con una retta doppia r. Le sue superficie aggiunte del primo ordine $(5-4=1)$ sono i piani del fascio di asse r, e quindi la F_5 è di genere geometrico $p_g = 2$. I piani per r segnano su F_5 (fuori di r) un fascio di cubiche, il quale costituisce il sistema canonico (puro) di F_5; queste cubiche sono di genere 1, onde la F_5 ha genere lineare $p^{(1)} = 1$ (§25).

Trasformiamo, ora, lo spazio S_3, a cui appartiene la F_5, in uno spazio $\bar{S}_3$, mediante la trasformazione quadratica di seconda specie che si ottiene riferendo proiettivamente ai piani di $\bar{S}_3$, le ∞^3 quadriche Q passanti per la retta r e per tre punti fissi (generici) A, B, C, presi su F_5.(*)

La F_5 si trasforma in una superficie dell'ottavo ordine $\bar{F}_8$, di $\bar{S}_3$: infatti la cubica sghemba intersezione di due quadriche generiche Q, ha 8 punti in comune con la F_5 (fuori di r,

---

(*) Questa trasformazione è biunivoca poichè tre quadriche Q hanno in comune un solo punto variabile; cioè le ∞^3 quadriche Q costituiscono un sistema omaloidico. Infatti due Q si intersecano (fuori di r) lungo una cubica gobba, passante per A, B, C, e di cui la r è corda. Questa cubica ha sei intersezioni con una terza quadrica; delle quali tre cadono in A, B, C e due su r; ne rimane quindi una sola variabile.

Per maggiori particolari sulla trasformazione quadratica di seconda specie, cfr., ad esempio, Enriques - Chisini: op. cit. Vol. II - pag. 560.

e di A, B, C); e a tale cubica corrisponde una retta, generica, di $\bar{S}_3$.

Diciamo che la $\bar{F}_8$ possiede tre rette eccezionali $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, trasformate dei punti A, B, C di F_5. Infatti consideriamo le quadriche Q che hanno in A lo stesso piano tangente della F_5: esse sono ∞' e quindi ad esse corrisponde in $\bar{S}_3$ un fascio di asse $\bar{a}$. La retta $\bar{a}$ è perciò la trasformata dell'intorno di A su F_5; ne segue che $\bar{a}$ appartiene alla $\bar{F}_8$, ed è una sua retta eccezionale. Analogamente per le rette $\bar{b}$ e $\bar{c}$.

Questa conclusione si conferma determinando la curva multipla della $\bar{F}_8$ che troveremo essere costituita da una retta quintupla r', e da tre rette doppie a', b', c', incidenti alla r' e sghembe tra loro.

Infatti al piano rA – che presenta due sole condizioni alle quadriche Q che lo contengono – corrisponde in $\bar{S}_3$ una retta a' che è retta doppia di $\bar{F}_8$, giacchè ogni retta del fascio Ar offre una sola condizione alle quadriche Q che debbono contenerla, ed incontra la F_5 in due punti (variabili). Analogamente per le rette b', c' trasformate dei piani rB ed rC.

Inoltre: anche il piano ABC si trasforma in una retta r', che appartiene ad $\bar{F}_8$ ed è per essa di molteplicità cinque, poichè sul piano ABC le quadriche Q segano le coniche di un fascio ciascuna delle quali offre una sola condizione alle Q, ed ha cinque punti in comune con la F_5, fuori di A, B, C e del punto in cui la $\underline{r}$ incontra il piano ABC. È ovvio che le rette $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, $\underline{c}'$ sono incidenti alla $\underline{r}'$.

Le ∞^1 superficie $\bar{\varphi}_4$ del quarto ordine, aggiunte alla $\bar{F}_8$ - passando per la r' con molteplicità quattro - si spezzano nei piani delle rette $r'a'$, $r'b'$, $r'c'$, ed in un ulteriore piano per r'. Ma ciascuno dei piani $\underline{r'a'}$, $\underline{r'b'}$, $\underline{r'c'}$, incontra ulteriormente la $\bar{F}_8$ in una retta (semplice) che è eccezionale per la superficie; ritroviamo così le tre rette $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Sulla $\bar{F}_8$ le curve canoniche sono quindi costituite dalle cubiche situate in piani per r'. Questo risultato si poteva stabilire anche direttamente poichè per mostrare che le cubiche K_3 intersezioni della F_5 coi piani per $\underline{r}$, si trasformano in cubiche piane $\bar{K}_3$ di $\bar{F}_8$, basta osservare che sopra una K_3 di F_5 le quadriche Q segnano una g_3^2, e quindi sulla trasformata di K_3 i piani di $\bar{S}_3$ dovranno pure segnare una g_3^2. Che la cubica $\bar{K}_3$ sia piana è anche d'accordo col fatto che essa ha genere uno. Dalle proprietà della trasformazione quadratica di seconda specie si ha poi immediatamente che l'asse del fascio dei piani delle $\bar{K}_3$, è la retta r' trasformata del piano ABC. E si ritrova che la r' è quintupla per $\bar{F}_8$.

La sezione piana generica di $\bar{F}_8$ – possedendo un punto quintuplo e tre punti doppi – è una curva di genere 8, onde è pure uguale ad 8 il genere del sistema $|C_8|$ segato sulla F_5 (fuori di r) dalle quadriche Q passanti per r e per A, B, C.

Il genere di $|C_8|$ si può calcolare direttamente nel modo che segue, e si ha così anche una conferma delle conclusioni precedenti. Tra le quadriche Q, è la quadrica costituita dal piano ABC (che, per la genericità di questi punti, è un piano in posizione generica) e da un piano generico per r: il primo di questi piani sega la F_5 lungo una quintica C_5 avente un punto doppio su r (e quindi di genere 5), il secondo invece interseca la F_5 in una cubica C_3, priva di punti multipli (genere 1). Si ha quindi:

$$|C_8| = |C_5 + C_3|$$

e, poichè la C_5 e la C_3 hanno tre intersezioni variabili, ne segue che <u>il genere di $|C_8|$ è uguale ad 8</u> (cfr. la (b) del § 17).

Abbiamo già accennato (§ 25) alla possibilità che, sopra una superficie, esista un sistema *pluricanonico* di un certo ordine (§ 25), senza che esistano quelli degli ordini inferiori. A conferma di questa asserzione daremo qui un facile esempio di superficie di *genere geometrico* nullo, e avente invece *bigenere* uguale ad uno.

Presenta infatti queste proprietà la superficie F_6 del sesto ordine passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (i cui vertici sono quindi punti tripli per F_6 e per la sua linea doppia)(*). Poichè non esiste alcuna superficie del secondo ordine passante per gli spigoli del tetraedro, il *genere geometrico* di F_6 è uguale a zero; esiste invece una superficie del quarto ordine passante due volte per quegli spigoli (*superficie biaggiunta* alla F_6), la quale è costituita dalle faccie del tetraedro stesso, e quindi il *bigenere* di F_6 è 1. Sulla F_6 si ha una sola *curva bicanonica* d'ordine nullo.

In seguito mostreremo un secondo esempio di superficie presentante queste particolarità.

(*) Se le faccie del tetraedro sono sui piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; una tale superficie ha equazione della forma:

$$\varphi(x_2 x_3 x_4, x_3 x_4 x_1, x_4 x_1 x_2, x_1 x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3 x_4 f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dove φ ed f sono forme quadratiche rispettivamente nei prodotti $x_2 x_3 x_4$, $x_3 x_4 x_1$, $x_4 x_1 x_2$, $x_1 x_2 x_3$ e nelle x_1, x_2, x_3, x_4.

34.- PROPRIETÀ CARATTERISTICA DELLE CURVE AGGIUNTE: CASO SEMPLICE

Si abbia un sistema $|C|$ il quale soddisfi alle seguenti *ipotesi semplici*:

1) il sistema $|C|$ contenga entro di sè un sistema, ∞^3 almeno, che sia semplice, per modo che possa trasformarsi nel sistema delle sezioni piane di una superficie irriducibile F, di ordine n, dello spazio ordinario (§ 10);

2) questa superficie trasformata F risulti dotata soltanto di curva doppia γ(*) e sia *non rigata*.

In queste ipotesi, *la proprietà di segare sulle curve C, gruppi canonici, caratterizza le curve C' aggiunte a $|C|$*.

Infatti, data una curva M che seghi sulle C gruppi canonici, prendiamo una retta generica r e per essa conduciamo un piano α, pure generico: questo sega la F lungo una curva C

(*) Più generalmente possiamo supporre che la F possieda una linea di molteplicità $i > 2$ (eventualmente dotata di *punti multipli inessenziali* - cfr. § 31). Ciò che conta per la validità delle considerazioni che seguono è che la F sia priva di *punti multipli propri* (cfr. § 35) — in particolare di *punti multipli isolati* (di molteplicità $s \geq 2$) — e quindi che $|C|$ sia privo di *curve fondamentali* (*proprie*).

sulla quale la M determina un gruppo canonico; consideriamo allora la C_{n-3} aggiunta alla C, che passa per esso (tale C_{n-3} esiste sempre ed è unica). Al variare del piano α nel fascio di asse r, la C_{n-3} genera una superficie φ_ℓ che passa semplicemente per la curva doppia γ di F, e che quindi è un'aggiunta ad F. Calcoliamone l'ordine $\underline{l}$: il piano α non può avere, manifestamente, in comune con φ_ℓ, fuori della C_{n-3}, altro che la retta r, e quindi se h è la molteplicità di r per la φ_ℓ, si ha $l = n - 3 + h$. Affinchè la M sia una curva aggiunta a $|C|$ occorre e basta (§ 32) che si abbia $h=0$: ricerchiamo se e quando ciò accade.

Se la retta r appartiene alla φ_ℓ, gli $\underline{n}$ punti (semplici) comuni ad r e ad F, appartengono alla intersezione di φ_ℓ con F (fuori di γ) e poichè essi non stanno su M (essendo r retta generica), la predetta intersezione contiene, oltre M, qualche altra parte che deve, necessariamente, essere costituita da curve appartenenti a piani passanti per r.

Tali curve piane sono, inoltre, d'ordine minore di $\underline{n}$, poichè un piano per r incontra la φ_ℓ, fuori di r, lungo una curva d'ordine $n-3$, conseguentemente esse non esauriscono l'intersezione del loro piano con F: quindi se $h>0$ la superficie F è tale che per ogni retta generica r dello spazio, passa un piano (almeno) che la sega lungo una curva riducibile, cioè la F possiede

∞^2 sezioni piane riducibili. Ciò porta ad un assurdo poichè - per il noto teorema di Kronecker - Castelnuovo (*) - una superficie cosifatta

(*) Questo teorema asserisce che una superficie algebrica F, di S_3, irriducibile, la quale possieda ∞^2 sezioni piane riducibili, è rigata oppure è la superficie di Steiner. Si dimostra rapidamente nel modo seguente. Se la sezione piana di F, variando con continuità, si spezza, acquista necessariamente un nuovo punto doppio almeno, fuori della linea doppia di F, (principio di degenerazione - cfr. Enriques - Chisini - op. cit. - vol. III - pagina 405); ne segue che le ∞^2 sezioni piane riducibili di F appartengono ai piani tangenti ad F. Se C è una tale sezione, si ponga $C = C_1 + C_2$, indicando con C_1 la componente (irriducibile) d'ordine minimo di C; la C_2 potrà invece essere anche riducibile.

Come si è detto, C_1 e C_2 hanno almeno un punto comune, fuori della linea doppia di F, ma ne hanno necessariamente uno solo perchè altrimenti il piano di $C_1 + C_2$ (piano generico tangente alla F) sarebbe pluritangente, il che - supposta la F non sviluppabile - è assurdo (cfr. ad es.: Bertini - Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi - II ed. Messina, 1923 - pag. 236). Allora al variare di $C = C_1 + C_2$ nel sistema delle ∞^2 sezioni piane riducibili, possono darsi due casi:

a) C_1 descrive un sistema semplicemente infinito, cioè C_1 fa parte di ∞^1 curve C. Conseguentemente la C_1 è una retta, e quindi la F è rigata;

b) C_1 varia in un sistema ∞^2.

In quest'ultimo caso il sistema descritto da C_1, coincide con quello descritto da C_2; perchè se C_1 e C_2 generassero sistemi distinti, per due punti generici di F passerebbe almeno una C_1 ed una C_2:

o è rigata, o è la superficie romana di Steiner.

Il primo caso è contrario alle ipotesi fatte; il secondo pure si deve escludere poichè la superficie di Steiner è a sezioni razionali, e quindi per essa non ha significato il parlare di gruppi canonici sulle C.

Concludendo si ha dunque che nelle nostre ipotesi semplici è $h = 0$, e la M coincide con una curva C' aggiunta al sistema $|C|$.

---

onde una C_1 e una C_2 avrebbero sempre in comune due punti, fuori della linea doppia di F, contrariamente a quanto precede.

Allora riferiamo proiettivamente le curve della rete omaloidica così descritta da C_1, alle rette di un piano. La superficie F risulta riferita punto per punto a tale piano; e, poichè le C_1 sono rappresentate dalle rette, il sistema $|C| = |C_1 + C_2| = |2C_1|$ delle sezioni piane di F, si trasforma in un sistema ∞^3 di coniche di questo piano, ne segue che la F è la nota superficie romana di Steiner (cfr. ad es.: Enriques - Geometria descrittiva - parte II - cap. IX, § 69 - II ed. - Bologna 1920).

La dimostrazione del precedente teorema è stata data da G. Castelnuovo (Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili - Rend.. Acc. Lincei, Classe di Scienze, 1894).

Cfr. anche E. Bompiani: Il teorema di Kronecker - Castelnuovo - (Bollettino dell'Unione Mat. Ital. - 1922, pag. 51): la dimostrazione di Bompiani trovasi riportata in Bertini: Iperspazi, pag. 403.

L'eccezione che presentano alla validità del teorema precedente le superficie rigate, trova la sua giustificazione nel fatto che <u>non esistono superficie φ_{n-3} dell'ordine $n-3$, aggiunte ad una superficie rigata F d'ordine n</u>.

Infatti la F (che, per le nostre ipotesi, non è un cono (*)) possiede necessariamente (per $n > 2$) una o più linee multiple – aventi le molteplicità $s_1, s_2, \dots$ – che segano le generatrici in $h_1, h_2, \dots$ punti; e si ha (**):

$$(1) \quad h_1(s_1 - 1) + h_2(s_2 - 1) + \cdots = n - 2$$

Ma ogni φ_{n-3} ha appunto molteplicità $s_i - 1$ lungo ogni curva s_i-pla per F, quindi ogni generatrice di F dovrebbe essere contenuta per intero su φ_{n-3}, della quale verrebbe allora a far parte la F, il che è assurdo.

Ne segue che <u>non esiste il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane di una superficie rigata</u>. Tuttavia esistono delle curve che segano sulle C gruppi canonici: tali sono le curve costituite dall'insieme delle generatrici passanti per i punti di un gruppo canonico di una C.

(*) Anche per un cono d'ordine n, non esistono le aggiunte φ_{n-3}: come vedremo in seguito (§ 35) – Cfr. anche nota a pag. 123.

(**) Cfr., ad esempio, <u>Enriques</u> –: Geometria descrittiva – pag. 315 – II ed. – Bologna – 1920.

Si osservi che dalla (1) segue che <u>le superficie φ_{n-4+h} aggiunte alla F, segano le generatrici, fuori delle linee multiple, in $h-2$ punti</u>. A questo risultato si può giungere direttamente - con procedimento di carattere invariantivo (*) - nel modo seguente. Posto, per semplicità, $|H| = |hC|$, si ricordi che le φ_{n-4+h} segano su F il sistema $|H'|$ aggiunto ad $|H|$ (§ 32), e quindi il numero delle intersezioni (variabili) di una generatrice <u>d</u> di F, con una φ_{n-4+h} è dato dal numero (dH') dei punti comuni a <u>d</u> e ad H'.

Ma si ha virtualmente:

$$|(H+d)'| = |H'+d| = |H+d'|.$$

Quindi:

$$d(H'+d) = d(H+d')$$

da cui - essendo $(dd') = -2$; $(dd) = 0$ (cfr. § 20); e $(Hd) = h$ - segue appunto

$$(dH') = h-2.$$

In particolare per $h=1$ è $(dC) = -1$, onde la <u>d</u> dovrebbe appartenere alla φ_{n-3}, e si ritrova

---

(*) E quindi - contrariamente a quanto avevamo dovuto fare dianzi - senza più la necessità di escludere il caso in cui la F sia un cono, purchè si definiscano le sue φ_{n-3+h} in guisa che esse godano ancora della proprietà di segare su F le curve aggiunte alle hC (cfr. § 35).

l'assurdo già sopra incontrato.

Dalla precedente proprietà segue che le superficie aggiunte d'ordine minimo ad una rigata d'ordine n, sono le φ_{n-2}, le quali non hanno intersezioni con le generatrici di F, fuori delle linee multiple. Per conseguenza la curva (variabile) intersezione della F con una φ_{n-2} (curva aggiunta al sistema /2C/) è costituita esclusivamente da generatrici di F.

35.- PUNTI MULTIPLI PROPRI E SUPERFICIE SUBAGGIUNTE.

La proprietà caratteristica delle curve aggiunte espressa dal teorema del paragrafo precedente, può cadere in difetto se la F contiene dei punti singolari che impongono particolari condizioni alle superficie polari di F, oltre a quelle espresse dal passaggio per le curve multiple. In tal caso, infatti, le superficie d'ordine $n-3$ passanti $i-1$ volte per ogni curva i-pla di F, non segano più - in generale - su questa superficie, il sistema aggiunto a quello delle sezioni piane. Quel sistema sarà invece segato su F da superficie dell'ordine $n-3$ che - oltre a passare nel modo suddetto per le curve multiple di F - soddisfino ad altre condizioni convenienti, relative ai predetti punti singolari.

Allora, in ogni caso, definiremo le <u>superficie</u> φ_l <u>aggiunte</u> alla F, in maniera che esse seghino su F il sistema aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane ($l=n-3$), o ad un suo multiplo ($l>n-3$).

Quindi le φ_l passeranno, intanto, $i-1$ volte per ogni curva i-pla della F, ed inoltre dovranno comportarsi in modo conveniente - che preciseremo più innanzi - rispetto alle ulteriori singolarità della F.

Invece le superficie Ψ_e che passano soltanto $i-1$ volte per le curve i-ple, senza soddisfare a nessun'altra condizione relativamente alle rimanenti singolarità della superficie, si chiameranno <u>superficie subaggiunte</u> alla F.

Le Ψ_e sono così caratterizzate dalla proprietà di essere segate da un piano <u>generico</u> lungo <u>curve aggiunte</u> alla sezione complanare di F.

Inoltre le subaggiunte Ψ_e costituiscono un sistema lineare che - in generale - <u>contiene</u> quello formato dalle aggiunte φ_e.

I due sistemi coincidono - come abbiamo visto (§ 32) - nel caso in cui la F possieda soltanto una curva i-pla, a falde distinte, eventualmente dotata di punti multipli inessenziali.

Invece vedremo che una singolarità che impone alle aggiunte condizioni non soddisfatte per effetto del loro comportamento lungo le curve multiple della F, è costituita - ad esempio - dal <u>punto multiplo isolato</u> con cono tangente irriducibile e molteplicità $s>2$.

Domandiamoci in generale: quali sono i punti singolari che impongano condizioni alle superficie aggiunte alla F? Giova, a tal uopo, stabilire la distinzione seguente.

Un punto multiplo O della superficie si dirà <u>punto multiplo proprio</u> o <u>improprio</u> a seconda che la sezione piana di F ottenuta con un piano per O, ha genere inferiore od uguale a quello della sezione piana <u>generica</u>.

Se la F si trasforma birazionalmente in una superficie F', in modo che il punto O si cambi in una curva θ — che sarà <u>fondamentale</u> per il sistema trasformato del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F, dato che sulla F il punto O presenta una sola condizione alle C che debbono contenerlo — il sistema residuo $|C-\theta|$ (su F') avrà genere inferiore o uguale al genere di $|C|$, a seconda che O è punto multiplo proprio od improprio: perciò anche la θ si dirà, rispettivamente, <u>curva fondamentale propria od impropria</u>.

Il più semplice esempio di <u>punto multiplo proprio</u> è dato dal <u>punto multiplo isolato</u>; è però evidente che punti propri possono anche aversi in punti della curva multipla γ che siano <u>ipermultipli</u> per la superficie.

Invece è facile vedere che i <u>punti multipli impropri</u> appartengono, necessariamente, alla linea multipla e sono anzi <u>punti multipli inessenziali</u> per essa (cfr. § 31).

Così, ad esempio, se sulla F — dotata di curva nodale γ — si ha un punto O <u>triplo improprio</u>, questo è situato su γ, ed è per la γ un punto triplo inessenziale.

Infatti se facciamo tendere un piano generico α ad un piano per O - dovendo il genere delle sezione restare inalterato - dei punti comuni a γ e ad α, tre vanno a cadere in O.

Ne segue che i <u>punti multipli impropri non presentano alcuna condizione alle superficie aggiunte.</u>

Invece per un punto <u>multiplo proprio</u>, in generale, accade il contrario, pur esistendo tuttavia dei particolari punti propri che non impongono condizioni alle φ.

Studiamo - ad esempio - il caso in cui la superficie F possieda - oltre alla linea γ di molteplicità <u>i</u> - un <u>punto s-plo ($s \geq 2$) conico ordinario</u> O (con cono tangente irriducibile); isolato o no.

Secondo il procedimento solito (cfr. § 32), le aggiunte φ_{n-3} alla F si otterranno considerando il sistema delle superficie prime polari di F, e togliendo da questo il sistema delle quadriche dello spazio.

Ora la polare di un punto generico ha in O molteplicità $s-1$, e quindi anche l'aggiunta φ_{n-3} verrebbe ad avere ivi un punto $(s-1)$-plo. Ma, in realtà, le superficie aggiunte generiche passeranno per O con molteplicità minore di $s-1$, se si verifichi che l'intorno di O debba far parte della jacobiana di ogni rete di sezioni piane.

Per renderci conto di questo trasformiamo birazionalmente la F in una superficie F', sulla quale al punto O, di F, corrisponda una curva θ, fondamentale per il sistema trasformato del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F. Allora la θ fa parte della jacobiana di una qualsiasi rete estratta da $|C|$: infatti per ogni punto di θ passa una curva della rete avente ivi un punto doppio (curva costituita dalla θ e da una curva del fascio residuo di θ rispetto alla rete).

Di conseguenza, sulla F, la jacobiana di una rete di sezioni piane deve ritenersi costituita, non solo dalla curva d'ordine finito che si ottiene - a prescindere da γ - come intersezione della F con una sua prima polare, ma anche dalla curva infinitesima formata dall'intorno di O; e quindi le aggiunte φ_{n-3} dovranno avere in O un punto di molteplicità $s-2$.

La cosa può anche vedersi in altro modo, determinando la jacobiana della rete segata dai piani per O (rete contenuta nel sistema $|C-\theta|$).

Tale jacobiana è costituita dalla curva intersezione di F con la polare di O, che è una superficie φ_{n-1}, d'ordine $n-1$, passante $i-1$ volte per γ, ed avente in O un punto s-plo con lo stesso cono tangente di F. Ma agli effetti della intersezione di F con questa $\bar{\varphi}_{n-1}$ (dove $\bar{\varphi}_{n-1}$ può essere sostituita con una combinazione lineare $\bar{\varphi}_{n-1} + \lambda F$), imporre alla $\bar{\varphi}_{n-1}$ la condizione di avere in O un punto s-plo con lo stesso cono tangente della F, equivale a considerare la φ_{n-1} come avente in O un punto di molteplicità $s+1$.

Ora, se dal sistema delle polari φ_{n-1} sottraggbiamo due piani della stella di centro O, si ottiene un sistema di superficie d'ordine $n-3$ (che risulteranno avere in O un punto di molteplicità $s-1$, e passeranno $i-1$ volte per γ) le quali segano su F il sistema $|C'-\theta|$ aggiunto a $|C-\theta|$. Quindi - sommando θ - il sistema $|C'|$ verrà segnato su F dalle superficie φ_{n-3}, d'ordine $n-3$, aventi in O un punto $(s-2)$-plo, e passanti $i-1$ volte per γ.

Dunque quando <u>la F ha un punto s-plo O</u>, le superficie φ_e <u>aggiunte</u> alla F, sono costituite dalle particolari subaggiunte ψ_e che <u>hanno in O un punto $(s-2)$-plo</u>.(*) Per $s=2$ le ψ_e coincidono con le φ_e, cioè <u>un punto doppio conico non presenta nessuna condizione alle aggiunte</u>.

Per $s>2$, se il punto O è isolato certamente il sistema delle subaggiunte è più ampio di quel-

---

(*) In particolare per $s=n$, non esistono superficie φ_{n-3}, d'ordine $n-3$, aggiunte al <u>cono</u> F d'ordine n: infatti le φ_{n-3} dovrebbero avere nel vertice del cono un punto $(n-2)$-plo (Cfr. § 34).

lo delle aggiunte φ.

Anche quando il punto s-plo O appartenga alla linea multipla della superficie, imporrà - in generale - qualche condizione alle aggiunte. Fa eccezione il caso in cui sia nullo il genere virtuale del cono tangente in O, calcolato in relazione al fatto che ogni ramo della curva i-pla passante per O, dà luogo ad una generatrice i-pla di tale cono. Ci limiteremo a verificare la cosa sopra alcuni esempi.

Se il punto O è un punto triplo conico situato in un punto semplice di una linea γ doppia (nodale) per F - di guisa che il cono tangente in O, possedendo una generatrice doppia, è razionale - le φ debbano passare semplicemente per O, e ciò segue già dal fatto che le φ passano per γ.

Analogamente: la curva doppia γ possieda un punto triplo O (con tre tangenti distinte non complanari), il quale sia quadruplo per la superficie. Le φ debbono avere in O un punto doppio, e ciò appunto accade in quanto le φ passano per ognuno dei rami di γ uscenti da O, e per l'ipotesi posta che le tangenti a quei tre rami non siano complanari. Che il cono tangente nel punto quadruplo O sia razionale, è subito visto.

Così pure non impone alcuna condizione alle aggiunte φ_e un punto conico di molteplicità 5 per la superficie, che sia situato in un punto 6-plo per la linea doppia γ (tale che le sei tangenti ivi a γ siano distinte e non stiano sopra un cono del secondo ordine). E il cono tangente alla superficie in tal punto è ancora razionale.

Terminando osserviamo che – come è subito visto – tanto le superficie subaggiunte ψ_e, sopra introdotte, quanto le aggiunte φ_e – di cui supponiamo estesa la definizione al caso di una superficie F dotata di singolarità qualunque – godono della proprietà di segare sopra la F sistemi *completi* (cfr. § 31). È pure evidente che per la costruzione del sistema completo individuato da una curva data (§ 31) ci si potrà sempre valere indifferentemente delle φ_e o delle ψ_e. Così anche, in ogni caso, si estende alle φ_e e alle ψ_e il *teorema del resto* (cfr. § 31).

36.- SULLE CURVE AGGIUNTE DELLE RETI E DEI SISTEMI NON SEMPLICI.

Riprendiamo ad esaminare le condizioni in cui la proprietà di segare gruppi canonici sulla curva generica di un sistema $|C|$, caratterizza le curve C' aggiunte a $|C|$.

Il teorema dimostrato nel § 34, asserisce che tale proprietà è caratteristica per un sistema $|C|$ che soddisfi a quelle che abbiamo chiamato ipotesi semplici, cioè che sia semplice (di dimensione maggiore o uguale a tre), non abbia curve fondamentali proprie, e si trasformi nel sistema contenente le sezioni piane di una superficie non rigata.

Abbiamo anche giustificato direttamente quest'ultima condizione col notare che le sezioni piane di una rigata non possiedono curve aggiunte.

La condizione che $|C|$ sia privo di curve fondamentali proprie è essenziale, come appare senz'altro evidente dal ragionamento seguito per dimostrare il ricordato teorema: infatti se $|C|$ è il sistema delle sezioni piane di F, l'esistenza di una curva fondamentale propria di $|C|$ porta un punto multiplo per la F che impone - in generale - alle aggiunte particolari condizioni cui non soddisfano le superficie <u>subaggiunte</u>, sulle quali abbiamo visto trovarsi le curve passanti pei gruppi canonici delle C (cfr. § 34 e 35).

Notiamo che se il sistema $|C|$ (di dimensione r) possiede una curva fondamentale θ, esistono in $|C|$ ∞^{r-1} curve riducibili di cui fa parte la θ. Ugualmente accade se la F è una rigata, poichè le sue generatrici costituiscono un sistema, semplicemente infinito, di unisecanti delle sezioni piane, e se un sistema $|C|$, ∞^r, possiede un fascio di unisecanti (necessariamente costituito da curve razionali), contiene ∞^{r-1} curve riducibili dato che le ∞^{r-2} curve C passanti per due punti di una unisecante la contengono per intero. Allora – sotto forma invariantiva – le <u>ipotesi semplici</u> cui deve soddisfare $|C|$, si possono compendiare nella condizione (per quanto più restrittiva) che il sistema semplice $|C|$ (almeno ∞^3) non possieda ∞^{r-1} curve riducibili.

Possiamo ora liberarci dalla restrizione che $|C|$ sia semplice e almeno triplamente infinito, supponendo soltanto che si abbia $r \geq 2$.

Infatti, se $r \geq 2$ – detto <u>n</u> il grado di $|C|$ – si estragga da $|C|$ una <u>rete</u>, e si trasformi la superficie su cui è dato il nostro sistema, in una F (di ordine $n+h$) dello spazio ordinario, dotata di un punto h-plo O, per modo che le curve della suddetta rete vengano segate su F dai piani per O (fuori di O) (cfr. § 10).

Se, al solito, indichiamo con Θ la curva fondamentale propria costituita dall'intorno del punto O, si ha che la rete $|C|$ è contenuta nel sistema $|C+\Theta|$ delle sezioni piane di F; e dalle nostre ipotesi segue che $|C+\Theta|$, all'infuori di Θ, non possiede curve fondamentali proprie. Il sistema $|C'+\Theta|$, aggiunto a $|C+\Theta|$, è segato su F dalle sue superficie aggiunte Φ_{n+h-3}, le quali hanno in O un punto $(h-2)$-plo (cfr. § 35), e quindi $|C'|$ risulta segato su F dalle superficie Φ_{n+h-3}, d'ordine $n+h-3$ (passanti ancora $i-1$ volte per la curva i-pla di F), aventi in O un punto di molteplicità $h-1$. Allora se M è una curva di F che incontri la C generica in un suo gruppo canonico, per dimostrare che la M coincide con una aggiunta C', dovremo far vedere che essa è segata su F da una Φ_{n+h-3}. Ciò si ottiene con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nelle <u>ipotesi semplici</u> (§ 34): si conduca per O una retta r arbitraria, e sopra il piano $\underline{\alpha}$, generico per r, si costruisca la C_{n+h-3} aggiunta alla sezione C di F con α, e passante per il gruppo canonico segnato su C da M. Facendo ruotare il piano $\underline{\alpha}$ intorno ad r, la C_{n+h-3} genera una superficie passante per M, la quale è evidentemente del tipo richiesto, ed ha l'ordine uguale ad $n+h-3$, purchè per r non passi alcun piano segante la F lungo una curva spezzata.

Ma quest'ultima possibilità è contraria alle nostre ipotesi, perchè i piani per O che incontrano la F secondo curve spezzate, non possono costituire una semplice infinità, altrimenti |C| conterrebbe un fascio di curve riducibili. E, d'altra parte, un tal fascio esisterebbe in |C| anche se quei piani fossero ∞^2, poichè allora la F sarebbe un cono (di vertice O).

Possiamo quindi enunciare il seguente:

Teorema: *Se un sistema lineare irriducibile |C|, di dimensione $r \geq 2$, non contiene ∞^{r-1} curve spezzate, la proprietà di segnare gruppi canonici sulle C, caratterizza le curve aggiunte C'.*

37.- INFLUENZA DELLE CURVE FONDAMENTALI PROPRIE SULLE CURVE AGGIUNTE: CASO ELEMENTARE.

Già abbiamo osservato (§ 36) che per un sistema |C|, dotato di curve fondamentali proprie, la condizione di segare gruppi canonici sulle C, non è più sufficiente a caratterizzare le curve C' aggiunte a |C|: vediamo allora come, in tal caso, quella proprietà si modifichi.

Per non appesantire la discussione con le considerazioni del paragrafo precedente, supponiamo che |C| sia un sistema lineare semplice (∞^3 almeno), il quale non possieda un fascio di unisecanti (onde |C| potrà riguardarsi come contenente il sistema delle sezioni piane di una superficie F <u>non rigata</u>).

Inoltre ci limiteremo, da prima, a studiare il <u>caso elementare</u> in cui si abbia una sola curva fondamentale propria θ, così fatta che nessuna sua parte sia fondamentale per il sistema residuo $|C-\theta|$.

Riferiamoci dunque alla superficie F che ha per sezioni piane le C; e consideriamo una curva M che goda della proprietà di segnare sopra la C generica un gruppo canonico. Il ragionamento svolto nel § 34 ci dice che la M appartiene ad una superficie subaggiunta alla F, d'ordine $n-3$, e quindi (§ 35) la M differisce da una aggiunta C' per la curva fondamentale propria θ, contata un certo numero h di volte:

$$M \equiv C' + h\,\theta .$$

Vogliamo allora determinare le condizioni perchè sia $h = 0$.

A tale scopo si osservi che la C' sega sopra una $C_1 \equiv C - \theta$, un gruppo

$$|\, G_{2\pi_1-2} + H \,|$$

appartenente alla serie somma della serie canonica di C_1, e della serie $|H|$ individuata dal gruppo dei punti comuni a θ e a C_1; quindi la $C' + h\theta$ determina su C_1 un gruppo della serie

$$|\, G_{2\pi_1} - 2 + (h+1)\, H \,| ;$$

onde h è nullo allora ed allora soltanto che la M <u>gode della proprietà di segare anch'essa sopra la C_1 un gruppo della serie $|G_{2\pi_1-2} + H|$.</u>

Questo risultato si estende, evidentemente, al caso in cui $|C|$ possieda un numero qualunque di curve fondamentali proprie, sempre però nell'ipotesi che esse presentino il <u>caso elementare</u>.

Più precisamente, si ha in ogni caso il seguente:

Teorema: Dato un sistema lineare irriducibile $|C|$, dotato di curve fondamentali proprie, una curva aggiunta a $|C|$, non soltanto segna un gruppo canonico sopra la C generica, ma inoltre sega sopra ogni curva $C-\theta$, residua di una curva fondamentale θ, un gruppo della serie somma della serie canonica e della serie segata da θ.

E nel caso elementare in cui nessuna parte di θ sia fondamentale per il sistema $|C-\theta|$, la detta proprietà è caratteristica.

NOTA.

Si osservi, infine che la condizione richiesta per la validità delle precedenti considerazioni (cfr. § 36) - che il sistema $|C|$, di dimensione r, non possieda ∞^{r-1} curve riducibili all'infuori di quelle che contengono come componenti delle curve fondamentali, cioè - proiettivamente - che la superficie F non sia rigata, non rappresenta in realtà nessuna restrizione ulteriore per i sistemi semplici ($r > 2$) che possiedono curve fondamentali proprie; poichè infatti queste danno luogo a punti multipli propri della F, e perciò la F non può essere rigata dato che le sezioni piane di una superficie rigata sono tutte birazionalmente identiche e quindi dello stesso genere

(fa eccezione il caso in cui la F sia un cono, ma allora non esistono le C' aggiunte a |C| - cfr. § 34).

38. ANALISI DELLE CURVE FONDAMENTALI

Abbiamo più volte ricordato che dicesi curva fondamentale di un sistema lineare $|C|$, una curva θ (che si può sempre supporre semplice per la superficie) la quale presenti una sola condizione alle curve C che la contengono, cioè una curva tale che ogni C avente con essa un punto comune (fuori dei punti base di $|C|$) la contenga per intero: cosicchè, se r è la dimensione del sistema $|C|$, esistano in esso ∞^{r-1} curve contenenti come parte la θ.

Supponiamo, da prima, che la curva fondamentale θ sia irriducibile. Allora, in generale, la θ non è fondamentale per il sistema residuo $|C_1| = |C - \theta|$, poichè sopra la superficie F, su cui le C sono sezioni piane, la θ si trasforma in un punto O di una certa molteplicità s, e il cono tangente in O alla F sarà costituito da un cono irriducibile d'ordine s, oppure sarà formato da un cono irriducibile di un ordine $t < s$ - da contarsi ν volte (con $s = t\nu$) - il quale projetterà una curva infinitesima d'ordine ν, infinitamente vicina al punto O. Si verifica questo ultimo caso quando la serie lineare g_s segata da $|C_1|$ su θ, è composta con una involuzione γ_ν^1, d'ordine ν $(s = t\nu)$.(*)

(*) Una serie lineare si dice composta con una involuzione γ_ν^1, quando i gruppi della serie contenenti un punto fisso generico P, contengano di conseguenza altri $\nu - 1$ punti fissi, variabili con P. Cfr., ad esempio, Enriques-Chisini, op. cit. vol. III, pag. 34.

Tuttavia può accadere, in particolare, che la g_s suddetta possieda un punto fisso; allora in corrispondenza ad esso, dal cono tangente in O alla F si distacca un piano.

Più particolarmente ancora, supponiamo che tutte le C_1 incontrino la θ nello stesso gruppo di s punti, cosicchè il cono tangente in O alla superficie F sarà costituito da s piani: allora la θ è fondamentale anche per il sistema $|C_1|$ e la corrispondenza fra θ e l'intorno di O risulta degenere, poichè ad ogni punto di θ corrispondono tutti i punti dell'intorno di un punto O_1 (in generale multiplo per F) infinitamente vicino ad O.

In questo caso, dunque, la θ presenta una sola condizione tanto alle C quanto alle C_1, quindi 2θ presenta due condizioni alle C che la contengono doppiamente; diremo perciò che 2θ è curva fondamentale bivalente per il sistema $|C|$.

Naturalmente la precedente circostanza potrà ripetersi per il sistema residuo $|C_2| = |C - 2\theta|$ (*), rispetto al quale la θ può essere ancora fondamentale, onde

(*) Affinchè esista il sistema $|C_2|$ occorre e basta che la dimensione di $|C|$ sia $r \geq 2$. Noi, qui ed in seguito, quando non si avverta esplicitamente il contrario, supporremo che r sia sempre tanto grande quanto ci sarà necessario; ipotesi che possiamo porre, poichè, qualora non fosse soddisfatta per $|C|$, basterà sostituire a $|C|$ un suo multiplo conveniente $|mC|$, dato che le curve fondamentali presentano rispetto ad esso gli stessi caratteri che hanno verso $|C|$.

3θ sarà <u>trivalente</u> per $|C|$; e così via, potremo giungere infine ad un certo numero $\underline{h}$ tale che la curva $h\theta$ sia <u>h-valente</u> per il sistema $|C|$. L'analisi che porta a sciogliere le singolarità puntuali di una superficie, basta a dimostrare che il numero $\underline{h}$ è necessariamente finito.

Nel seguito escluderemo sempre la precedente <u>complicazione di polivalenza</u>, tanto per le curve fondamentali irriducibili, quanto per quelle spezzate e per le loro parti, in relazione ai successivi sistemi residui.

Passiamo a studiare le curve fondamentali riducibili.

Si abbia una curva $\theta+\theta_1$ fondamentale per il sistema $|C|$, e consideriamo il caso - che offre nuovo interesse - in cui il sistema $|C_1| = |C-(\theta+\theta_1)|$, residuo di $\theta+\theta_1$ rispetto a $|C|$, abbia ancora come curva fondamentale la θ_1.

Allora, sulla superficie F su cui le C sono costituite dalle sezioni piane, a θ corrisponde (con corrispondenza non degenere) l'intorno di un punto multiplo O, e a θ_1 corrisponde un secondo punto multiplo O_1, infinitamente vicino ad O: quindi le due curve θ e θ_1 sono connesse tra loro.(*)

(*) Ci si rende conto chiaramente di questo, nel modo che segue. Per <u>scio-</u>

Dal sistema $|C_1|$ distacchiamo la curva θ_1, e sia $|C_2|$ il sistema residuo; si ha:

$$|C| = |C_1 + \theta + \theta_1| = |C_2 + \theta + 2\theta_1|;$$

ne segue che, mentre $\theta + \theta_1$ è <u>monovalente</u> per $|C|$, la curva $\theta + 2\theta_1$ è invece <u>bivalente</u>.

Le precedenti considerazioni si generalizzano subito in modo ovvio. Ad esempio, il sistema $|C|$ possieda una curva fondamentale $\theta + \theta_1 + \theta_2$, tale che $\theta_1 + \theta_2$ sia ancora fondamentale per

$$|C_1| = |C - (\theta + \theta_1 + \theta_2)|,$$

ed il sistema:

$$|C_2| = |C_1 - (\theta_1 + \theta_2)|,$$

residuo di $\theta_1 + \theta_2$ rispetto a $|C_1|$, abbia la θ_2 come curva fondamentale. Allora, sulla F, alla θ corrisponde un punto multiplo O, con un punto multiplo O_1 infinitamente vicino (il cui intorno è in corrispondenza biunivoca coi punti di θ_1); ed, a sua volta, il punto O_1 possiede infinitamente vicino, nel suo intorno

---

gliere la singolarità della F in O potremo procedere in due tempi: con una prima trasformazione birazionale, cambieremo la F in una superficie F' sulla quale al punto O corrisponda una curva θ (semplice) dotata di un punto multiplo O_1' (con molteplicità uguale a quella di O_1 per F); allora se si trasforma successivamente anche O_1' in una curva θ_1, questa risulta <u>connessa</u> alla (trasformata di) θ.

del primo ordine (e quindi nell'intorno del secondo ordine di O), un punto multiplo O_2 corrispondente a θ_2. Ne segue che θ, θ_1 e θ_2 sono <u>connesse</u>; inoltre si ha:

$$|C| = |C_1 + \theta + \theta_1 + \theta_2|;$$
$$|C| = |C_2 + \theta + 2\theta_1 + 2\theta_2|;$$
$$|C| = |C_3 + \theta + 2\theta_1 + 3\theta_2|;$$

e quindi la curva $\theta + \theta_1 + \theta_2$ è <u>monovalente</u>; $\theta + 2\theta_1 + 2\theta_2$ è <u>bivalente</u>; e $\theta + 2\theta_1 + 3\theta_2$ è, invece, <u>trivalente</u> per $|C|$.

Naturalmente, in pratica non si presenterà il semplice caso schematico addotto negli esempi precedenti; ma spesso si avrà la complicazione di una curva fondamentale in cui entrano più componenti con diverse valenze.

Si consideri una superficie F dotata di un <u>punto doppio uniplanare</u> O: e siano O_1, O_2, O_3, i tre punti doppi situati nell'intorno del primo ordine di O (cfr. § 2). Mediante una opportuna trasformazione birazionale, la F si può cambiare (§ 2) in una superficie F', sulla quale al punto O, ed ai punti O_1, O_2, O_3, corrispondono, rispettivamente, certe curve $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$; e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono tutte connesse con θ, mentre non lo sono tra loro.

Allora - se $|C|$ è il sistema trasformato di quello individuato dalle sezioni piane di F - la curva $\theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ è fondamentale monovalente per $|C|$; e per il sistema residuo:

$$|C_1| = |C - (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)|,$$

le tre curve $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, sono fondamentali. Cioè ognuna delle curve:

$$\theta + 2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 ;$$
$$\theta + \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 ;$$
$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 ;$$

è bivalente per $|C|$.

Più generalmente: si supponga che la superficie F sia dotata di un punto multiplo O, al quale siano infinitamente vicini, nell'intorno del primo ordine, altri punti multipli - ad esempio, in numero di due: O_1 e O_2. Ognuno di questi possieda, a sua volta, dei punti multipli infinitamente vicini (punti dell'intorno di secondo ordine di O): al punto O_1 siano infinitamente vicini i punti O_{11}, O_{12}; e ad O_2 i punti O_{21}, O_{22}. E così si potrebbe continuare: si supponga - ad esempio - che al punto O_{22} sia infinitamente vicino un ultimo punto multiplo O_{221} (punto dell'intorno del terzo ordine di O.

Una singolarità siffatta si scioglie in una curva fondamentale monovalente per il sistema $|C|$, trasformato di quello delle sezioni piane di F, la quale è del tipo (con notazioni evidenti):

$$(1) \quad \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221}.$$

In quanto alla mutua connessione, le varie parti della (1) si dispongono secondo lo schema seguente:

$$\theta \begin{cases} \theta_1 \begin{cases} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{cases} \\ \\ \theta_2 \begin{cases} \theta_{21} \\ \theta_{22} \{ \ \theta_{221} \end{cases} \end{cases}$$

Inoltre (se $|C_1|$ è il sistema residuo della (1) rispetto a $|C|$) $|C_1|$ ha per curve fondamentali monovalenti le:

$$(3) \qquad \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12},$$

$$(4) \qquad \theta_2 + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221},$$

e la θ_{11} e θ_{12} sono fondamentali per il sistema residuo della (3) rispetto a $|C_1|$; mentre il residuo della (4) ha come curve fondamentali <u>monovalenti</u> la θ_{21} e $\theta_{22} + \theta_{221}$; per curva fondamentale <u>bivalente</u> la $\theta_{22} + 2\theta_{221}$.

Cioè, infine, le curve:

$$\theta + 2(\theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12}) + \theta_2 + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221},$$
$$\theta + \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12} + 2(\theta_2 + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221})$$

sono <u>fondamentali bivalenti</u> per $|C|$; sono invece <u>trivalenti</u> le:

$$\begin{cases} \theta + 2\theta_1 + 3\theta_{11} + 2\theta_{12} + \theta_2 + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221}, \\ \theta + 2\theta_1 + 2\theta_{11} + 3\theta_{12} + \theta_2 + \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{221}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta + \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12} + 2\theta_2 + 3\theta_{21} + 2(\theta_{22} + \theta_{221}), \\ \theta + \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12} + 2\theta_2 + 2\theta_{21} + 3(\theta_{22} + \theta_{221}); \end{cases}$$

ed è <u>quadrivalente</u> per C la curva:

$$\theta + \theta_1 + \theta_{11} + \theta_{12} + 2\theta_2 + 2\theta_{21} + 3\theta_{22} + 4\theta_{221}.$$

39. - APPLICAZIONI ED ESEMPI: INFLUENZA DI ALCUNE SINGOLARITÀ DELLA SUPERFICIE SULLE SUE SUPERFICIE AGGIUNTE.

Riprendiamo le considerazioni svolte nel § 35, per precisare il comportamento delle superficie aggiunte se in corrispondenza ad alcuni particolari tipi di singolarità della superficie F.

Un primo criterio che - in molti casi - ci sarà di valido aiuto per una tale ricerca, è fornito dall'osservazione già fatta (§ 35), che se un sistema $|C|$ possiede una curva fondamentale, questa fa parte della curva jacobiana di ogni rete estratta da $|C|$.

Su questa proprietà è fondato - come abbiamo visto (§ 35) - il ragionamento che ci ha portato a stabilire che <u>le superficie aggiunte alla F, debbono passare s-2 volte per ogni punto s-plo ordinario di F.</u> In modo analogo si potrà, in generale, ragionare anche per punti multipli infinitamente vicini.

Si abbia - ad esempio - una superficie F dotata di un punto triplo O, con infinitamente vicino un secondo punto O_1 pure di molteplicità tre. Dal punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali, i punti O ed O_1 si possono riguardare come due curve θ e θ_1, connesse, e tali che la $\theta+\theta_1$

sia curva fondamentale monovalente per il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F (cfr. § 38). La $\theta+\theta_1$ fa parte della curva jacobiana C_j di ogni rete estratta da $|C|$: onde, sulla F, una tale C_j sarà formata dalla curva, d'ordine finito, intersezione di F, con una sua superficie polare prima (superficie d'ordine $n-1$, passante per la curva doppia γ di F, ed avente in O ed O_1 due punti doppi), e dalle curve infinitesime costituite dagli intorni di O ed O_1.

Ne segue – al solito (cfr. § 35) – che il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ risulta segato su F dalle superficie φ_{n-3}, (<u>superficie aggiunte alla F</u>) d'ordine $n-3$, che passano semplicemente per γ e per O ed O_1 (ossia che sono tangenti in O alla retta OO_1). Si ha cioè che <u>i due punti tripli O ed O_1, infinitamente vicini, impongono alle aggiunte le stesse condizioni di semplice passaggio che imporrebbero se fossero distinti.</u>

Passiamo ad un esempio leggermente più complesso: la F possieda in O un <u>punto doppio uniplanare</u> (il più generale della sua specie) e siano O_1, O_2, O_3 i tre punti doppi che appartengono al suo intorno del primo ordine (cfr. § 2). Tale singolarità della F si scioglie in una curva fondamentale $\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3$ che già abbiamo studiato (§ 38). Le superficie polari φ_{n-1} passano semplicemente per O, O_1, O_2, O_3, cioè passano per O ed hanno ivi lo stesso piano tangente della F; allora il sistema jacobiano $|C_j|$ si ottiene sommando al sistema segato sulla F da quelle polari, la curva $\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3$, e quindi, evidentemente, $|C_j|$ è dato dalle intersezioni della F con le superficie che si hanno dalle φ_{n-1} togliendo loro successivamente la condizione di contatto con la F in O (ciò che equivale a sommare $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ al sistema segato dalle φ_{n-1}), e quella di passaggio per O (con che si aggiunge anche θ).

Ne segue che <u>un punto doppio uniplanare non impone alcuna condizione alle aggiunte φ_e</u>. Cioè il punto doppio O, ed O_1, O_2 e O_3, infinitamente vicini ad O, si comportano, rispetto alle φ_e, come fossero punti propri distinti.

Consideriamo, infine, il caso in cui la F possieda un <u>tacnodo</u> O (cfr. § 2). Le polari passano (semplicemente) per O, e toccano ivi il piano tacnodale; il sistema $|C_j|$ è dato, al solito, dal sistema segato su F dalle polari prime, aumentato dell'intorno di O; onde $|C_j|$ è costituito dalle intersezioni della F con le superficie del sistema che si ottiene da quello delle polari, togliendo loro la suddetta condizione di contatto con la F in O. Cioè <u>le superficie aggiunte φ_e passano semplicemente per il tacnodo O.</u>

In modo analogo a quello sopra seguito, si determina il comportamento delle superficie aggiunte, in corrispondenza ad ogni altra singolarità della F; ma talora può invece essere più conveniente il ricorrere ad un secondo criterio fondato sopra la nota proprietà caratteristica dei sistemi aggiunti.

Si abbia un sistema $|C|$ che possieda una curva fondamentale θ, e sia $|C_1|$ il sistema residuo di θ rispetto a $|C|$; cioè sia:

$$|C| = |C_1 + \theta|.$$

Abbiamo già osservato (§37) che dalla relazione:

$$|C'| = |C'_1 + \theta|$$

segue che:

a) <u>le curve C', aggiunte a $|C|$, segano sopra una C_1 generica (di genere π_1) gruppi della serie somma della serie canonica $g^{\pi_1 - 1}_{2\pi_1 - 2}$ di C_1, e della serie cui appartiene il gruppo dei punti comuni a C_1 e a θ.</u>

È facile vedere come si estende questo risultato quando il sistema residuo $|C_1|$ possiede anch'esso una curva fondamentale θ_1, che sia una componente della curva fondamentale $\theta + \theta_1$ di $|C|$.

In tal caso si ha, infatti:

$$|C_1| = |C - \theta - \theta_1|$$

e - detto $|C_2|$ il sistema residuo di θ_1 rispetto a $|C_1|$ - è:

$$|C| = |C_2 + \theta + 2\theta_1|.$$

Da cui - se π_2 è il genere di $|C_2|$ - segue che:

b) <u>le aggiunte C' segano sopra una C_2 generica, gruppi della serie somma della $g^{\pi_2 - 1}_{2\pi_2 - 2}$ canonica di C_2, e della serie cui appartiene il gruppo dei punti comuni a C_2 e a $\theta + 2\theta_1$.</u>

E le proprietà a) e b) sono <u>caratteristiche</u> per le curve aggiunte C' (supposto $|C_2|$ privo di curve fondamentali, componenti di θ_1) (cfr. § 37).

Queste conclusioni si generalizzano subito in modo ovvio.

Mostriamo ora come i precedenti risultati possano servire al nostro scopo di ricercare le condizioni che le singolarità della F impongono alle aggiunte φ; studieremo così nuovamente, per altra via, alcuni degli esempi già sopra analizzati.

Per il caso del punto multiplo isolato senza singolarità infinitamente vicine, e per quello del punto singolare (isolato) caratterizzato dalla sezione piana generica (singolarità queste, cui corrisponde una curva θ fondamentale monovalente per il sistema $|C|$ delle sezioni piane, senza componenti <u>fondamentali</u> per il sistema residuo $|C-\theta|$)

basterà ricorrere alla proprietà a), alla quale si può dare la seguente notevole interpretazione projettiva.

Supponiamo che la F (d'ordine n) possieda un punto multiplo O di molteplicità s; e sia, al solito, $|C|$ il sistema (di genere π) delle sezioni piane di F. Il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, è segato su F – per definizione (§ 35) – dalle superficie aggiunte φ_{n-3}. Consideriamo la curva C_1 intersezione della F con un piano generico per O: la C_1 appartiene al sistema $|C-\theta| = |C_1|$ residuo di θ rispetto a $|C|$, avendo indicato con θ la curva fondamentale cui dà luogo il punto O.

Si ha allora che _il piano di C_1 incontra la superficie aggiunta generica φ_{n-3}, lungo una curva Φ_{n-3} che, insieme ad una retta per O, costituisce una curva aggiunta, dell'ordine $n-2$, alla C_1_; e questa proprietà _caratterizza_ il comportamento delle φ_{n-3} in O, se la curva θ è tale che nessuna sua componente risulti fondamentale per il sistema $|C-\theta|$. Più in generale: _un piano generico per O, incontra la superficie aggiunta generica φ_l, lungo una curva che, insieme ad una qualunque curva complanare (d'ordine m) passante (semplicemente) per O, costituisce una curva aggiunta (d'ordine $l+m$) alla sezione di F._

Infatti la Φ_{n-3} ha in comune con la C_1 un gruppo $G_{2\pi_1+s-2}$ di punti, appartenente alla serie somma della $g^{\pi_1-1}_{2\pi_1-2}$ $\left(\pi_1 = \pi - \frac{s(s-1)}{2}\right)$ canonica di C_1, e della $|g_s|$ individuata dal gruppo dei punti comuni a C_1 e a θ. Ora se al gruppo $G_{2\pi_1+s-2}$ si aggiunge un gruppo della serie caratteristica di C_1 (gruppo segato su C_1 – fuori di O – da una retta per O), il gruppo che si ottiene fa parte della serie somma di $g^{\pi_1-1}_{2\pi_1-2}$ e della serie segata su C_1 dalle rette del suo piano; quindi per questo gruppo passa una aggiunta Φ_{n-2} di C_1, la quale è evidentemente costituita dalla Φ_{n-3} e da una retta per O.

Ritroviamo così anche che <u>per un punto s-plo O, della F, le aggiunte passano $s-2$ volte</u>; e ciò <u>caratterizza</u> le aggiunte stesse quando il punto O sia privo di punti multipli infinitamente vicini.

Passiamo ora al caso in cui la F presenti in O una singolarità che sia <u>caratterizzata dalla sezione piana generica</u>, cioè che sia costituita da un punto multiplo (isolato) O con una o più curve multiple (infinitesime) infinitamente vicine ad O (nei successivi intorni). Ad esempio, si abbia in O un punto i-plo con una retta (infinitesima) γ, infinitamente vicina, di molteplicità i_1 ($i_1 < i$) (onde il cono tangente in O alla F sarà costituito dal piano $O\gamma$, contato i_1 volte, e da un cono residuo dall'ordine $i-i_1$). Un piano τ, generico per O, sega la F in una C_1 avente in O un punto i-plo, con infinitamente vicino un punto O_1 di molteplicità i_1: e quindi le curve aggiunte a C_1 passeranno per O e O_1, rispettivamente, con le molteplicità $i-1$ e i_1-1. Consideriamo allora una curva aggiunta a C_1 la quale sia costituita da una retta r per O, e dalla Φ_{n-3} intersezione del piano τ con una superficie aggiunta φ_{n-3}; affinchè tale aggiunta abbia in O ed O_1 il comportamento suddetto, la Φ_{n-3} deve passare soltanto $i-2$ volte per O, ed i_1-1 volte per O_1, ne segue che se la superficie F ha in O un punto i-plo, con infinitamente vicina una retta infinitesima γ di molteplicità i_1 $(i < i_1)$, le superficie aggiunte φ alla F, hanno in O un punto $(i-2)$-plo e passano i_1-1 volte per la retta γ (cioè accade come se γ fosse per F una retta i_1-pla, finita, distinta dal punto i-plo O).

Se $i = i_1$, ogni curva sezione di φ con un piano per O, è soggetta al principio di scaricamento (*) e la φ acquista in O la molteplicità $i-1$ e passa $i-2$ volte per la γ.

Questo fatto si verifica, per esempio, nel caso del tacnodo.

Se la superficie F possiede un punto multiplo O con un punto multiplo O_1, infinitamente vicino, le superficie aggiunte alla F passano per O ed O_1 con molteplicità inferiori di uno a quelle della

(*) Cfr. Enriques- Chisini - op. cit. - vol. II, pag. 431.

F.

Ciò segue dal fatto che <u>le superficie aggiunte le alla F, sono segate da un piano generico per O ed O_1 lungo curve che, insieme ad una curva complanare per O ed O_1, costituiscono curve aggiunte alla sezione di F.</u>

E se il punto O_1 non possiede punti multipli infinitamente vicini nei suoi intorni successivi, tale proprietà <u>caratterizza</u> il comportamento delle aggiunte in O.

A questa conclusione si giunge con considerazioni analoghe a quelle sopra svolte nel caso di un solo punto multiplo, applicando la proposizione b), dianzi enunciata, alla curva $\theta + \theta_1$ - fondamentale per il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F - che corrisponde alla singolarità della F in O, e riferendoci, da prima, alle aggiunte φ_{n-3}.

Gli esempi che abbiamo dato sono semplicissimi, ma lo studioso si convincerà facilmente che il teorema del § 37 sulla proprietà caratteristica delle curve aggiunte in rapporto alle curve fondamentali, contiene un criterio generale per determinare l'influenza delle singolarità della superficie sopra le sue aggiunte.

Quando si debbano trattare punti singolari che comprendono curve multiple (infinitesime) o punti multipli infinitamente vicini, appartenenti ad intorni dei successivi ordini, conviene ricorrere - anzichè al sistema segato sulla data superficie dai piani - a quello determinato dalle quadriche o dalle superficie cubiche, ecc.. Ovvero ci si può valere opportunamente di una trasformazione per cui, ad esempio, i punti multipli $O_1, O_2, \dots,$ infinitamente vicini ad un punto proprio O nell'intorno del primo ordine, divengono punti multipli propri $O'_1, O'_2, \dots,$ della superficie trasformata F': <u>le condizioni imposte da $O'_1, O'_2, \dots,$ alle superficie aggiunte di F', si rispecchiano in altrettante condizioni imposte da $O_1, O_2, \dots,$ alle aggiunte di F.</u> Questo principio apparirà evidente a chi consideri che le condizioni imposte dalle singolarità ad una φ_l, aggiunta ad F_n, non dipendono dall'ordine l; e per $l = n-4$ si rileva in esse un significato invariantivo.

Il principio anzidetto offre un <u>criterio di riduzione</u> che permette di investigare il comportamento delle aggiunte in rapporto ai punti multipli successivi ad O, in un intorno d'ordine qualunque. Ma è superfluo stare a cercare esempi troppo complicati: ci limiteremo pertanto a trattare un semplice caso che avrà anche interesse per il seguito.

La superficie F possegga la seguente

singolarità: un punto doppio O; infinitamente vicino ad O (nell'intorno del primo ordine) un punto doppio O_1; infinitamente vicino ad O_1 (nell'intorno del secondo ordine di O) una retta doppia infinitesima.

Se si opera sopra F una trasformazione quadratica che sciolga O, il punto O_1 diventa un tacnodo della superficie trasformata F'. Perciò il punto singolare O impone una sola condizione alle superficie aggiunte ad F: giacchè queste devono passare per O_1, ossia (principio di scaricamento) per O.

La cosa si verifica direttamente come segue. Mentre una sezione piana generica per O possiede soltanto un punto doppio in O, le sezioni del fascio di asse OO_1 posseggono, anzichè due, tre punti doppi successivi: la sezione di una superficie aggiunta con un piano per OO_1, dovendo ora formare una curva aggiunta quando sia presa insieme - per esempio - ad una conica per OO_1, passerà per il punto doppio successivo ad O_1, e quindi - per il <u>principio di scaricamento</u> - verrà a contenere il punto O.

La singolarità precedente è stata incontrata da Noether nello studio delle superficie razionali del quarto ordine dotate di solo punto doppio: oltre alla superficie con tacnodo, il Noether ha riconosciuto l'esistenza di una superficie razionale F_4 dotata di un punto doppio O, da cui la F_4 viene projettata in un piano doppio con curva di diramazione del sesto ordine che possiede due punti tripli infinitamente vicini; la singolarità in O per una tale F_4, risulta appunto quella sopra descritta. (*)

(*) Cfr. M. Noether: "Ueber eine Classe von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen" - Math. Annal., vol. XXIII, (1888), pag. 563, § 7.

40. - LE SUPERFICIE BIAGGIUNTE E IL BIGENERE; APPLICAZIONI.

Sopra una superficie F (d'ordine n, nello spazio ordinario) il sistema canonico è dato dalle intersezioni della F con le sue aggiunte φ_{n-4} (§ 32): allora il <u>sistema bicanonico</u> (§ 26) si costruirà su F come sistema doppio del sistema canonico, mediante <u>superficie biaggiunte</u> Φ_{2n-8}.

Gioverà tuttavia precisare alcune particolarità sul comportamento di tali superficie.

Consideriamo in generale le superficie Φ_{2l}, d'ordine $2l$, <u>biaggiunte</u> ad una F (d'ordine n, nello spazio ordinario e dotata di singolarità qualsiansi), secanti su F il il sistema lineare doppio di quello segato dalle aggiunte φ_l.

Il comportamento delle Φ_{2l} nelle singolarità della F risulta indipendente dall'ordine $2l$, sicchè si può anche estendere la definizione di superficie biaggiunte al caso dell'ordine dispari. Del resto le biaggiunte Φ_m, con

$m = 2l + 1$, non sono altro che le superficie del sistema lineare somma del sistema delle Φ_{2l} e di quello dei piani dello spazio. Per $m = 2n - 7$ le Φ_m dànno il sistema $|C''|$ <u>secondo aggiunto</u> al sistema delle sezioni piane C.

Infatti si ha (pag. 90):

$$|C''| = |2C' - C|$$

ed il sistema $|2C'|$ è segnato su F dal sistema doppio di quello delle aggiunte d'ordine $n-3$ (cfr. § 32 e § 35), cioè dal sistema delle Φ_{2n-6}.

Più in generale, dalla <u>relazione fondamentale</u> (cfr. pag. 90) segue:

$$|(hC)''| = |(h-1)C + C''|$$

e quindi <u>le biaggiunte Φ_{2n-8+h} determinano su F il sistema biaggiunto al sistema $|hC|$, multiplo secondo il numero h del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F.</u>

Il comportamento delle superficie biaggiunte in corrispondenza alle varie singolarità della F, si determina facilmente in base alle considerazioni che seguono.

Siano φ_l e φ'_l due superficie aggiunte generiche d'ordine $\underline{l}$ (rispettivamente di equazioni $\varphi_l = 0$ e $\varphi'_l = 0$): allora una particolare biaggiunta di ordine $2l$ è costituita dalla superficie:

$$\varphi_l \, \varphi'_l = 0 .$$

Agli effetti della sua intersezione con la F (d'equazione $F = 0$), una tale biaggiunta è sostituibile con una qualunque superficie del fascio:

$$(1) \qquad \varphi_l \varphi'_l + \lambda \, F F' = 0$$

(detta $F' = 0$ una generica superficie d'ordine $2l - n$). Onde la superficie generica (1) si comporterà nei riguardi dei punti e linee multiple della F, come la generica Φ_{2l}.

Ne segue subito che <u>le superficie biaggiunte sono soggette a passare doppiamente per la curva doppia di F; invece se la F possiede una curva di molteplicità i (a falde distinte) le biaggiunte debbono passare per essa i volte e toccare $i-2$ volte ciascuna delle falde di F.</u>

Per rendersi conto di questo si pensi alla sezione piana della (1) generica: essa è una curva Γ appartenente al fascio individuato dalla sezione di $\varphi_e \varphi'_e = 0$ e da quella di $F = 0$ (insieme ad una componente opportuna); se O è un punto di Γ situato sulla curva i-pla di F (e quindi un punto $2(i-1)$-plo per la sezione di $\varphi_e \varphi'_e = 0$), la Γ non può avere in O un punto di molteplicità maggiore di $\underline{i}$ (dato che per O non passa la sezione di $F' = 0$): ma gli $\underline{i}$ rami della sezione di F in O hanno ivi $2(i-1)$ intersezioni con la sezione di $\varphi_e \varphi'_e = 0$, e quindi con tutte le curve del fascio; cioè la Γ ha in O un punto i-plo e tocca $i-2$ volte gli $\underline{i}$ rami della sezione di F.

In modo analogo si determina il comportamento delle biaggiunte in un punto s-plo isolato delle F. Così un <u>punto doppio ordinario</u> non presenta nessuna condizione alle Φ_e; in un <u>punto triplo</u> di F esse invece hanno un punto doppio; e in un punto quadruplo un punto della stessa molteplicità.

<u>Per $s > 4$, le Φ_e sono soggette ad avere in ogni punto s-plo ordinario O della superficie F, un punto pure di molteplicità s ed un contatto d'ordine $s-5$</u> (contenendo dunque $s-4$ volte l'intorno di O).

Per punti multipli non ordinari, complicazioni varie modificheranno questo risultato.

Ad esempio si consideri il caso in cui la F possieda un *tacnodo* O: per esso le aggiunte φ_e passano semplicemente, e quindi sembrerebbe che la $\varphi_e \varphi_e' = 0$ dovesse avere in O un punto doppio. Ma si ricordi che noi abbiamo trovato (§ 39) che l'aggiunta φ_e passa per O soltanto per effetto del *principio di scaricamento*: essa dovrebbe contenere la retta doppia di F infinitamente vicina ad O, e da ciò risulta il suo passaggio per O. Allora quando si consideri la superficie $\varphi_e \varphi_e' = 0$, lo scaricamento avrà luogo soltanto per una delle sue componenti, mentre l'altra passerà invece per la suddetta retta infinitesima, ne segue che la $\varphi_e \varphi_e' = 0$ e quindi anche *la biaggiunta generica, è soggetta soltanto a passare per O e a toccare ivi il piano tacnodale di F.*

A queste stesse conclusioni si perviene osservando che *le superficie biaggiunte debbono essere segate da un piano generico per un punto multiplo O di F, secondo curve che, insieme a due rette generiche per O, costituiscono curve biaggiunte alla sezione di F.*(*) proprietà che

---

(*) Le *curve biaggiunte* ad una curva piana - analogamente a quanto si è fatto per le superficie - si definiscono come le più generali curve seganti la serie lineare doppia di quella segata dalle aggiunte.

si deduce immediatamente dall'analoga già stabilita per le superficie aggiunte (§ 39), e che è una conseguenza della seguente: <u>le curve C'', seconde aggiunte di un sistema lineare irriducibile |C| privo di punti base, segano sopra una C generica gruppi della serie residua della serie caratteristica, rispetto al doppio della serie canonica</u> (cfr. § 28 e § 26).

Se O è un tacnodo di F, la sezione di F con un piano per O ha ivi un punto doppio con un secondo punto doppio O_1 infinitamente vicino: allora una curva - contenente due rette per O - biaggiunta a questa sezione, tolte le due rette, sarà soggetta soltanto a passare doppiamente per O_1: e questa condizione virtuale si riduce (<u>principio di scaricamento</u>) al semplice passaggio per O e per O_1.

I risultati precedenti ci consentono di mostrare un nuovo caso di superficie di <u>genere geometrico p_g</u> nullo e <u>bigenere</u> $P_2 > 0$. Ed anzi, mentre nel primo esempio di tale fatto, dato da *Enriques* (*) e già esposto nel § 33 (pag. 117), si ha $P_2 = 1$ e non esistono curve bicanoniche

---

(*) Cfr. la "Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche" di F. Enriques, § 39.

propriamente dette (d'ordine maggiore di zero), in questo secondo esempio (dovuto a Castelnuovo (*)) troveremo $P_2 = 2$ e quindi esiste una semplice infinità di curve bicanoniche (di genere uno).

Si tratta della superficie F_7, del settimo ordine, dotata di una <u>conica doppia</u> K e di una <u>retta tripla</u> r, non incidente a K, e che possiede inoltre <u>tre tacnodi</u> A, B, C, i cui piani tacnodali a, b, c passano per r.

È facile mostrare l'esistenza di una tale superficie. Consideriamo una superficie cubica $f_3 = 0$, e sia r una sua retta e K una sua conica, non incidente ad r, per r passano cinque piani tritangenti alla $f_3 = 0$ (**); siano $a=0$, $b=0$, $c=0$ le equazioni di tre di essi, ed A, B, C i loro punti di contatto fuori di r. Se $d=0$ è un qualunque piano per r, la superficie riducibile

$$d f_3^2 = 0$$

(*) *Cfr.* G. Castelnuovo: "*Sulle superficie di genere zero*", *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)*, serie III, tomo X, 1896.

(**) *Cfr.*, ad esempio, i già citati "*Complementi di Geometria projettiva*", di E. Bertini, § 11, n° 4; od anche Enriques-Chisini op. cit. vol. II. pag. 156.

tale singolarità richieste. Ed appartiene allo stesso tipo la superficie:

$$abcf_4 = 0$$

essendo $f_4 = 0$ l'equazione di una superficie del quarto ordine passante doppiamente per la conica K, e tangente ai piani a, b, c in A, B, C rispettivamente.(*)

Ne segue che la superficie generica del fascio:

$$df_3^2 + abcf_4 = 0$$

è una superficie F_7 irriducibile, soddisfacente alle condizioni richieste (benchè non la più generale)(**).

Ciò premesso passiamo a dimostrare

(*) Esiste certo una siffatta f_4, perchè le f_4 passanti doppiamente per una data conica sono ∞^{13}, mentre i tre contatti in A. B, C impongono 9 condizioni; del resto come superficie f_4 si potrebbe assumere il piano di k contato due volte, insieme al piano ABC pure contato due volte.

(**) I piani tacnodali a, b, c incontrano tale F_7 - fuori della retta tripla r - lungo curve del quarto ordine che invece di essere costituite da quattro rette distinte (uscenti dal tacnodo relativo), sono formate ciascuna da due rette doppie. Poichè queste si appoggiano alla r in punti diversi, la F_7 non ha punti quadrupli sulla r.

che - come abbiamo asserito - la superficie F_7 è di genere geometrico nullo, cioè che <u>non esistono superficie φ_3, del terzo ordine, aggiunte alla F_7.</u>

Infatti le φ_3 dovrebbero passare semplicemente per K e doppiamente per la retta r, e dovrebbero inoltre contenere i tre punti A, B, C. Onde se R è la traccia della r sul piano di K, ogni retta di tal piano passante per R, verrebbe ad avere 4 punti in comune con ciascuna φ_3; e quindi la supposta φ_3 si spezzerebbe nel piano di K e in due piani passanti per r, perciò a questi piani dovrebbero pure appartenere i tre punti A, B, C, cosa che invece generalmente non accadrà.

Determiniamo ora il <u>bigenere</u> P_2 della F_7: per questo dovremo costruire il sistema delle superficie Φ_6 <u>biaggiunte</u> alla F_7

La generica Φ_6 passerà doppiamente per la conica K, avrà una retta tripla nella r (con - in ogni punto - gli stessi piani tangenti della F_7), e toccherà i piani a, b, c in A, B, C, rispettivamente.

Osserviamo però che un piano <u>t</u> qualunque, passante per r, incontra la F_7 - fuori di r - in una curva del quarto ordine, la quale ha quattro punti in comune con la r (punti variabili insieme con <u>t</u>, poichè sulla r la nostra F_7 non ha punti quadrupli), onde in ciascuno di essi il piano $\underline{t}$ è tangente ad una delle falde di F_7. Ma la F_7 e la Φ_6 si toccano lungo la r, quindi il piano $\underline{t}$ incontra la Φ_6, fuori di r, in una curva del terzo ordine che, avendo quattro punti sulla r, si spezza in questa e in una residua curva del secondo ordine. Ne segue che la Φ_6 passa, in realtà, quattro volte per la retta r.

È allora subito visto che la Φ_6 si compone del piano della conica K contato due volte, dei piani a, b, c, e di un ulteriore piano variabile passante per r.

Il sistema delle Φ_6 è quindi di dimensione uno, onde <u>la F_7 ha bigenere $P_2 = 2$</u>; e le <u>curve bicanoniche</u> sono le quartiche (dotate di due punti doppi, cioè <u>ellittiche</u>) segate su F_7 dai piani per la retta r (fuori di r).

41.- CRITERI DI EQUIVALENZA.

La proprietà caratteristica delle curve C' aggiunte a |C|, che - all'infuori delle complicazioni dovute a curve fondamentali (§ 37) - permette di definire le C' come quelle che segnano sulle C gruppi canonici (§ 36), ci mostra un caso particolare di curve che risultano equivalenti fra loro per il fatto di segare gruppi equivalenti sulle C di un sistema |C|.

Ciò rientra in alcune proprietà più generali (<u>criteri di equivalenza</u>) che riconducano la questione di decidere dell'equivalenza di due curve qualunque tracciate sopra una superficie F, all'esame dei gruppi di punti che esse staccano sopra altre curve della F stessa.

Da questi criteri seguirà poi, a sua volta, come semplice corollario, il ricordato teorema del § 36.

Si abbia un fascio |C|, dotato di (almeno) un punto base semplice O, e <u>privo di curve riducibili</u>, allora <u>se due curve K_0 e</u>

<u>K_∞, non passanti per O, segnano sulle C gruppi di punti equivalenti, sono equivalenti.</u>

Infatti in queste ipotesi esiste una funzione razionale $y(x)$ del punto x variabile sopra una C, la quale ha nei gruppi segnati su C da K_0 e da K_∞, rispettivamente, gli zeri e i poli. La $y(x)$ è determinata a meno di una costante moltiplicativa che possiamo fissare imponendo alla $y(x)$ di assumere in O un valore determinato; ad esempio, il valore <u>uno</u>. In tal modo al variare della C nel fascio $|C|$, si viene a costruire una funzione razionale Y sulla superficie, la quale ha la K_0 come curva (o parte di curva) degli zeri, e la K_∞ come curva (o parte di curva) dei poli.

Se la K_0 non esaurisce la curva degli zeri, l'ulteriore componente di questa non può avere intersezioni variabili con le curve di $|C|$ (dato che sopra ognuna delle C il gruppo degli zeri è formato soltanto dalle sue intersezioni con K_0), e quindi essa sarà costituita da una o più C. Ma ciò porta ad un assurdo: sia, infatti, C^* una di tali curve, e prendiamo una C generica del fascio; sopra la C, la serie individuata dai gruppi (K_0C) e $(K_\infty C)$, ha in O un punto appartenente al gruppo di livello 1. Allora quando si passi al limite facendo tendere la C alla C^*, sopra C^* la serie limite della predetta, ha in O un punto fisso (poichè la $y(x)$ che è costantemente nulla lungo la C^*, viene ad avere in O anche il valore 1, e perciò è ivi indeterminata); quindi O appartiene tanto al gruppo $(K_0 C^*)$ quanto a quello $(K_\infty C^*)$, contrariamente all'ipotesi posta che K_0 e K_∞ non passino per O.

Nè, d'altra parte, può darsi che della curva degli zeri di Y faccia parte soltanto una componente di una C, dato che in $|C|$ non esistono curve spezzate. Onde necessariamente <u>K_0 esaurisce la curva degli zeri</u>. Così pure <u>K_∞ esaurisce la curva dei poli</u>.

Da questo risultato si deduce - come avevamo accennato - il teorema del § 36 relativo alla proprietà caratteristica del sistema aggiunto: si abbia un sistema $|C|$, di dimensione r, il quale non possieda ∞^{r-1} curve riducibili; allora una curva C' aggiunta a $|C|$, e una curva che seghi sopra una C generica un gruppo canonico, sono equivalenti fra loro.

Il precedente <u>primo criterio di equivalenza</u> si può generalizzare.

Indichiamo con $\{C\}$ un fascio (con o senza punti base) <u>razionale o irrazionale</u>, che <u>non possieda nessuna curva riducibile</u>; e siano K_0 e K_∞ due curve che segano ogni curva C di $\{C\}$ in due gruppi equivalenti: allora si ha che <u>K_0 e K_∞ — sono curve equivalenti a meno di curve C di $\{C\}$</u>, cioè, in simboli:

$$K_0 + \Sigma C \equiv K_\infty + \Sigma' C$$

avendo indicato con ΣC e $\Sigma' C$ due gruppi di curve di $\{C\}$.

Per dimostrarlo procediamo in maniera del tutto analoga al caso prima studiato. Se x denota il punto variabile sulla C, fissata genericamente in $\{C\}$, costruiamo la funzione razionale $y(x)$ che ha in $(K_0 C)$ il gruppo degli zeri ed in $(K_\infty C)$ quello dei poli. La $y(x)$ è così determinata soltanto a meno di un fattore costante; per togliere (razionalmente) questa ambiguità, sostituiremo alla $y(x)$ un'altra funzione razionale $y_1(x)$, del punto variabile su C, definita nel modo che segue. Fissiamo sopra la superficie F una curva L, e - indicati con $x_1, x_2 .., x_h$, i punti del gruppo (C, L) - si ponga:

$$y_1(x) = \frac{y(x)}{y(x_1) + y(x_2) + \cdots + y(x_h)} .$$

Allora la $y_1(x)$, come la $y(x)$, ha in $(K_0 C)$ il gruppo degli zeri e in $(K_\infty C)$ quello dei poli; e in essa non si ha più l'indeterminazione della costante moltiplicativa, poichè $y_1(x)$ non si altera comunque si scelga $y(x)$ tra le funzioni che hanno i suddetti zeri e poli. Al variare della C nel fascio $\{C\}$, la $y_1(x)$ diventa una funzione razionale Y_1 sopra la F.

La curva K_0 fa parte della curva degli zeri di Y_1, ma in generale non la esaurisce: infatti, sia $\bar{x}_1$ un punto comune a K_∞ e ad L, e sia $\bar{C}$ la curva di $\{C\}$ passante per $\bar{x}_1$; la funzione $y_1(x)$, relativa a $\bar{C}$, è nulla (poichè il suo denominatore diviene infinitamente grande, essendo $y_1(\bar{x}_1) = \infty$), e quindi lungo $\bar{C}$ è nulla anche la Y_1, ne segue che della curva degli zeri di Y_1 fanno parte anche le curve di $\{C\}$ individuate dai punti $(K_\infty L)$. Così la curva degli zeri resta esaurita: infatti se di tale curva facesse parte una ulteriore componente, preso su questa un punto generico P, si consideri la C passante per P; la $y_1(x)$, sopra siffatta C, si annulla, oltre che in $(K_0 C)$, in P e quindi è nulla identicamente, onde la intera C fa parte della componente anzidetta che ritroviamo nuovamente essere costituita da una, o più C che - come è evidente - passano per qualche punto del gruppo $(K_\infty L)$.

<u>Della curva dei poli di Y_1 fa, invece, parte la K_∞ insieme ad un certo numero di curve C</u>; come subito risulta dallo stesso ragionamento precedente, quando si ripeta a partire da una funzione costruita come la Y_1 suddetta, scambiando però l'ufficio della K_0 con quello di K_∞. Se C facenti parte della curva dei poli di Y_1, sono quelle che segano la L in un gruppo di punti per cui $\Sigma\, y_1(x_i) = 0$.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

Ne seguono alcuni corollari notevoli.

Se il fascio dato è lineare, due curve C di esso sono equivalenti, e quindi la loro <u>differenza è nulla</u>; si ha allora:

$$K_0 \equiv K_\infty + \lambda C$$

essendo λ (positivo o negativo) uguale alla differenza fra i numeri delle curve che compongono il gruppo $\Sigma' C$ e il gruppo ΣC. Se, in particolare, il fascio $|C|$ è dotato di punti base si ha senz'altro

$$K_0 \equiv K_\infty$$

quando l'equivalenza tra i gruppi $(C K_0)$ e $(C K_\infty)$ abbia luogo tenendo conto anche delle intersezioni che cadono nei punti base;(*) ritroviamo così il primo criterio di equivalenza sopra stabilito.

Senza fare alcuna ipotesi sulla razionalità o meno del fascio $\{C\}$, supponiamo che esso sia privo di punti base, e che si possa costruire una curva L che non seghi nè la K_0 nè la K_∞: da quanto precede si ha allora:

(*) *Infatti, da:*

$$K_0 \equiv K_\infty + \lambda C$$

segue:

$$(CK_0) \equiv (CK_\infty) + \lambda (CC),$$

ma è pure:

$$(CK_0) \equiv (CK_\infty),$$

e quindi, il gruppo (CC) non essendo nullo (per la supposta esistenza dei punti base,) si ha necessariamente $\lambda = 0$.

$$K_0 \equiv K_\infty + \Sigma' C$$

ma K_0 e K_∞ si possono manifestamente scambiare fra loro, e quindi poichè sono nelle stesse condizioni rispetto ad L, si ha pure:

$$K_\infty \equiv K_0 + \Sigma C,$$

donde necessariamente:

$$K_0 \equiv K_\infty .$$

Dal caso sopra trattato possiamo, infine, passare a quello in cui la curva C vari in un *sistema continuo* $\{C\}$, semplicemente infinito, privo di curve spezzate, e d'indice $\nu > 1$, cioè tale che per un punto generico passino ν curve del sistema. Il grado di $\{C\}$ sarà quindi maggiore di zero.

Definita allora sopra ogni curva C la funzione $y_1(x)$ nel modo precedentemente detto, consideriamo le ν curve $C^{(i)}$ uscenti da un punto x di F, e poniamo:

$$\Phi(x) = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + \dots + y_1^{(\nu)}$$

avendo indicato con $y_1^{(i)}$ la predetta funzione relativa alla $C^{(i)}$. La Φ così definita è una funzione razionale (funzione algebrica ad un valore) del punto variabile sulla F: e per essa la K_∞ è una curva polare (del primo ordine).

Ciò sembra, a prima vista, evidente dato che lungo la K_∞ diviene infinita ciascuna delle $y_1^{(i)}$; ma, in realtà, questo non basta, poichè si potrebbe benissimo cadere nella forma indeterminata $\infty - \infty$: conviene quindi precisare la cosa nel modo che segue.

Costruiamo, in uno degli infiniti modi possibili, una funzione razionale $\Psi(x)$ la cui curva polare (del primo ordine) contenga come parte la K_∞, e s'indichi con ψ la funzione da essa subordinata sopra una C. Poichè y_1 e ψ divengono infinite del primo ordine in $(C\,K_\infty)$, la $\frac{y_1}{\psi}$ resterà ivi finita, e quindi in ogni punto x di K_∞ resterà pure finita la funzione $\frac{\Phi}{\Psi}$, dal momento che il suo valore in x è la somma dei valori ivi assunti dalle funzioni $\frac{y_1^{(i)}}{\psi}$ relative alle ν curve uscenti da x. Le Φ e Ψ hanno dunque in K_∞ una curva polare dello stesso ordine.

Supponiamo che la curva polare

di Φ non sia esaurita dalla K_∞, ma contenga una parte residua θ. Sia P un punto comune alla θ e ad una generica C, allora in P diviene infinita una (almeno) delle $y_1^{(i)}$ relative alle $C^{(i)}$ uscenti da P, e quindi quella $y_1^{(i)}$ - avendo un numero di poli maggiore di un'unità di quello che gli abbiamo attribuito, e non potendo essere sempre infinita per la genericità di C - è in P indeterminata; onde P, se esiste, è un punto base di $\{C\}$. Quindi la curva θ non avendo intersezioni variabili con le C (e non potendo perciò essere una C, dato che $\{C\}$ è di grado ≥ 1), sarebbe una curva fondamentale di $\{C\}$, e perciò parte di una C riducibile: mentre, per ipotesi, abbiamo escluso che $\{C\}$ contenga curve spezzate.

Ne segue che la curva polare di Φ è esaurita da K_∞.

Passando a studiare la curva degli zeri di Φ, si ha, evidentemente, che di questa fa parte la K_0 (come curva di livello zero del primo ordine), e la esaurisce. Ci si rende conto di ciò osservando che in caso contrario si avrebbe

$$K_\infty \equiv K_0 + \theta$$

ed allora scambiando nella costruzione di Φ la funzione di K_∞ con quella di K_0, si perverebbe ad un assurdo. Oppure possiamo osservare che da $K_\infty \equiv K_0 + \theta$, segue

$$(CK_\infty) \equiv (CK_0) + (C\theta)$$

ma per ipotesi: $(CK_\infty) \equiv (CK_0)$ e quindi la θ non può avere intersezioni variabili con la generica C di $\{C\}$.

Ne segue il teorema:

Sopra la superficie F due curve K_0 e K_∞ le quali seghino gruppi equivalenti sopra le curve C di un sistema algebrico ∞^1 - d'indice $\nu > 1$, e privo di curve spezzate - sono equivalenti.

Non si esclude che K_0 e K_∞ siano riducibili, e che una o entrambe, contengano parti multiple. Se per esempio K_∞ contenesse una parte $\bar{K}$, da contarsi s volte, il ragionamento precedente si dovrebbe modificare soltanto in ciò, che, costruendo la funzione Ψ, si dovrebbe sceglierla in modo che avesse $\bar{K}$ come curva polare d'ordine s. (*)

(*) Per le considerazioni svolte in questo paragrafo cfr. Severi Francesco; Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie - in: "Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti" Anno 1910 - 1911 - Tomo LXX - Parte seconda)

CAPITOLO IV

IL GENERE NUMERICO ED IL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH PER LE SUPERFICIE.

42- CONDIZIONI IMPOSTE ALLE SUPERFICIE DAL PASSAGGIO PER UNA CURVA: FORMULA DI POSTULAZIONE.

Abbiamo già definito il genere geometrico di una superficie F, ed abbiamo imparato a determinarlo attraverso considerazioni di natura geometrica. Vogliamo ora ricercare come esso si possa esprimere in funzione dei caratteri della curva doppia di F, limitandoci, da prima, al caso in cui questa costituisca l'unica singolarità della F.

Più in generale, determineremo le dimensioni dei sistemi delle superficie, dei vari ordini, aggiunte ad F.

Conviene a tal uopo premettere la dimostrazione di alcune proprietà ausiliarie.

Si abbia una curva gobba C (irriducibile e priva di punti multipli) di genere p e di ordine n, e sia g_{mn}^{x} la serie lineare segata su C dal sistema lineare di tutte le superficie F_m, di ordine $\underline{m}$;

si ha allora il seguente:

Lemma: *Per m sufficientemente alto ($m \geq n-2$), la serie g_{mn}^{x} è completa e non speciale, e quindi*

$$x = mn - p.$$

Da un punto arbitrario O proiettiamo la C in una curva C' di un piano generico: la C' possiederà un certo numero δ di punti doppi, dovuti ad altrettanti *punti doppi apparenti* di C rispetto ad O, cioè δ coppie di punti di C allineati con O: A_1, B_1; A_2, B_2; .....; A_δ, B_δ.

Sia $g_{mn-2\delta}^{mn-2\delta-p}$ la serie lineare (completa e non speciale) segata su C' dalle sue curve aggiunte di ordine $m \geq n-2$. Queste aggiunte, proiettate da O, danno luogo a superficie coniche d'ordine m, le quali passano per le generatrici doppie del cono proiettante la C, e segano su C - fuori dei 2δ punti A_1, B_1; .....; A_δ, B_δ - una serie completa (e non speciale) $g_{mn-2\delta}^{mn-2\delta-p}$, d'ordine $mn-2\delta$ e di dimensione $mn\ 2\delta-p$.

La stessa $g_{mn-2\delta}^{mn-2\delta-p}$ è segata su C anche dal sistema lineare di tutte le superficie F_m, d'ordine m, passanti per le coppie di punti A_1, B_1; .....; A_δ, B_δ: infatti tali F_m segano su C una serie che dovrebbe contenere la $g_{mn-2\delta}^{mn-2\delta-p}$ e che quindi coincide necessariamente con questa, dato che la $g_{mn-2\delta}^{mn-2\delta-p}$ è completa.

La $g^{mn-2\delta-p}_{mn-2\delta}$ è perciò la serie residua del gruppo delle δ coppie di punti A, B rispetto alla serie g^{x}_{mn} segata su C dal sistema di <u>tutte</u> le superficie F_m, onde anche la g^{x}_{mn} è completa e non speciale se i 2δ punti A, B presentano condizioni indipendenti alle F_m, quindi si avrà appunto:

$$x = mn - p.$$

Dell'indipendenza dei punti $A_1, B_1; \ldots\ldots; A_\delta, B_\delta$, rispetto alle F_m, ci si rende conto immediatamente mostrando la possibilità di costruire una particolare superficie dell'ordine <u>m</u>, la quale passi per $2\delta - 1$ di quei punti, senza passare per il rimanente.

Per avere una tale superficie, consideriamo nel piano di C', una curva d'ordine $m-1$ ($\geq n-3$) passante per $\delta - 1$ punti doppi di C' - ad esempio per i punti provenienti dalle corde di C: $A_2, B_2; \ldots; A_\delta, B_\delta$ - e non per il rimanente (*): questa curva proiettata da O dà luogo ad un cono, d'ordine $m-1$, che, insieme ad un piano passante per B_1 e non per A_1, costituisce una F_m del tipo richiesto.

Dal precedente lemma segue che <u>il numero d delle condizioni indipendenti che una curva C, d'ordi-</u>

(*) Per l'ipotesi posta che sia $m \geq n-2$, da cui $m-1 \geq n-3$, una tal curva esiste sempre. (cfr. Enriques - Chisini - op. cit., vol <u>III</u>, pag. 141).

ne n e genere p (irriducibile e priva di punti multipli) presenta alle superficie, d'ordine $m \geq n-2$, che debbono contenerla, è dato da:

$$d = mn - p + 1.$$

Il numero d dicesi *postulazione* della curva C rispetto alle superficie d'ordine m. (Cayley).

Conviene qui osservare che le precedenti considerazioni non ci permettono nè di escludere, nè di asserire la validità della formula di postulazione

$$d = mn - p + 1$$

per i valori di $m < n-2$. Infatti quando si scende per m al disotto del limite $n-2$, intervengono due nuovi elementi che agiscono in sensi opposti sopra i risultati dianzi stabiliti: invero, in tal caso, la serie $g^{x}_{mn-2\delta}$ segata su C dalle F_m per A, B cesserà, in generale, sia di essere non speciale come di essere completa. Se la serie $g^{x}_{mn-2\delta}$ diviene speciale, la sua dimensione aumenta e quindi diminuisce il numero delle superficie F_m passanti per la curva C; alle conclusioni contrarie si giunge invece quando la $g^{x}_{mn-2\delta}$ non sia completa.

Allora potrà accadere che questi due fatti opposti si compensino e che quindi la formula di postulazione continui ad essere valida; oppure l'uno o l'altro di essi avrà il sopravvento e quella formula ci darà per le condizioni imposte dalla C alle F_m, un numero maggiore o minore del vero.

Esponiamo ora un criterio che - sotto certe condizioni - ci permetterà di affermare la validità della formula di postulazione per $m-1$, quando essa sussista per m.

Se i punti comuni a C e ad un piano α generico, presentano condizioni indipendenti alle curve d'ordine m di α, e se il sistema (regolare) segnato su α dalle superficie F_m passanti per C è completo, dalla validità della formula di postulazione per m segue la sua validità per $m-1$.

Infatti le F_m (passanti per C) determinano sul piano α un sistema di curve dell'ordine m, che, per le nostre ipotesi, ha la dimensione:

$$\frac{m(m-3)}{2} - n$$

e quindi il numero delle condizioni che porta lo staccamento del piano α da una F_m, è dato da:

$$\frac{m(m-3)}{2} - n + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - n.$$

Ma il sistema delle F_m per C ha la dimensione:

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - mn + p - 2,$$

onde la dimensione del sistema delle F_{m-1} passanti per C, è:

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - mn + p - 2 - \frac{(m+1)(m+2)}{2} +$$

$$+ n = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} - (m-1)n + p - 2,$$

e questa, confrontata con la dimensione del sistema di <u>tutte</u> le F_{m-1}, ci dice appunto che il passaggio per C impone ad una superficie d'ordine $m-1$,

$$(m-1)n - p + 1$$

condizioni.

Se si abbandona l'ipotesi che le F_m, passanti per C, siano segate dal piano α lungo le curve di un sistema completo - conservando però quella che tale sistema non sia sovrabbondante - la formula di postulazione non è più estensibile alle F_{m-1}, e dal ragionamento precedente segue subito che essa ci dà un numero maggiore di quello delle condizioni che realmente la curva C impone alle F_{m-1} che debbono contenerla.

Inversamente:

<u>Se gli n punti comuni alla curva C ed a un piano generico α, presentano condizioni indipenden-</u>

ti alle curve piane d'ordine $m+1$, e se per le superficie F_m ed F_{m+1}, d'ordine m ed $m+1$, passanti per C vale la formula di postulazione, il sistema (regolare) segato su α dalle F_{m+1} è completo.

Infatti le curve C_{m+1} (di α) passanti per gli n punti in cui il piano α incontra la C, costituiscono un sistema regolare e completo di dimensione:

$$\frac{(m+1)(m+4)}{2} - n$$

Ma questa è anche la dimensione del sistema segato dalle F_{m+1} su α, poichè essa si ottiene diminuendo l'ordine d'infinità delle F_{m+1} del numero delle superficie F_m linearmente indipendenti:

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - (m+1)n + p - 2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} +$$

$$+ mn - p + 1 = \frac{m(m+3)}{2} - n.$$

Ciò dimostra l'asserto.

Osservazione.

Questo risultato si estende pure al caso in cui ai sistemi di superficie F_m ed F_{m+1} passanti per C, si imponga anche un certo gruppo di punti base con molteplicità assegnate, il quale presenti alle F_m ed alle F_{m+1} lo stesso numero $\underline{h}$ di condizioni lineari indipendenti (come certo accade per m assai alto (*)).

Infatti siano N_m ed N_{m+1} rispettivamente le dimensioni dei sistemi delle superficie F_m ed F_{m+1} assoggettate soltanto a passare per C, e indichiamo con N^*_m ed N^*_{m+1} le dimensioni che assumono i sistemi stessi quando, oltre alla curva C, si impongano i punti base suddetti: cosicchè si avrà:

$$N_{m+1} - N^*_{m+1} = N_m - N^*_m = h.$$

Detta n_{m+1} la dimensione del sistema segato dalle F_{m+1} per C sopra un piano generico, se δ_{m+1} è la deficienza del sistema che sullo stesso piano segano le F_{m+1} passanti per C ed aventi i punti multipli assegnati, si ha:

$$N_{m+1} = N_m + n_{m+1} + 1$$
$$N^*_{m+1} = N^*_m + n_{m+1} + 1 - \delta_{m+1}$$

(*) La singolarità di un punto base, comunque costituita da curve (infinitesime) o punti multipli infinitamente vicini ad esso, porta a condizioni relative ad un intorno d'ordine finito del punto, e quindi per le superficie d'ordine m abbastanza elevato, il numero di tali condizioni riesce certo indipendente da m.

e quindi:

$$\delta_{m+1} = N_{m+1} - N^*_{m+1} - (N_m - N^*_m) = 0.$$

Se il sistema completo $|F_m|$ delle superficie d'ordine <u>m</u> passanti semplicemente per la curva C, è segato da un piano generico α in un sistema completo di curve $|C_m|$, col crescere di <u>m</u> la dimensione N_m di $|F_m|$ descrive una <u>progressione aritmetica del terzo ordine.</u>

Infatti il sistema delle $|C_m|$ ha la dimensione:

$$\frac{m(m+3)}{2} - n$$

e quindi se imponiamo ad una F_m di passare per

$$\frac{m(m+3)}{2} - n + 1$$

punti generici di α, questa viene a contenere l'intero piano α; e perciò:

$$N_m - N_{m-1} = \frac{m(m+3)}{2} - n + 1$$

Queste considerazioni valgono soltanto quando l'ordine <u>m</u> sia sufficientemente alto, quindi se estendiamo la suddetta progressione ad ogni valore di $\underline{m}$, i suoi termini non saranno sempre uguali alle effettive dimensioni dei corrispondenti sistemi $|F_m|$: in ogni caso i termini della progressione ci daranno le <u>dimensioni virtuali</u> dei relativi sistemi $|F_m|$, definite dalla postulazione della curva base C; e quando $\underline{m}$ non raggiunga il limite richiesto perchè il sistema $|C_m|$ risulti regolare e completo, non si può dire nulla circa il risultato del confronto tra la dimensione virtuale e l'effettiva. Solo per quei valori di $\underline{m}$ per cui $|C_m|$, pur non essendo completo, risulta non sovrabbondante, la dimensione virtuale è inferiore a quella effettiva (cfr. pag. 187).

43 - POSTULAZIONE DELLE CURVE DOTATE DI PUNTI MULTIPLI, O RIDUCIBILI.

Nel paragrafo precedente abbiamo supposto che la curva C fosse irriducibile e priva di punti multipli: se abbandoniamo queste ipotesi i risultati cui siamo pervenuti valgono ancora e solo la formula di postulazione sopra stabilita, subisce qualche opportuno cambiamento.

Mostriamone alcuni esempi:

Il primo caso cui si pensa, è quello della C (irriducibile) che acquista dei punti doppi nodali. Esso non presenta alcuna difficoltà: la sua trattazione si fa in modo del tutto analogo a quello seguito nel paragrafo precedente, cominciando con l'osservare che <u>la serie lineare segata su C dalle superficie F_m (d'ordine m sufficientemente alto) passanti per i punti doppi di C, è completa e non speciale</u>. Del resto è d'accordo con ragioni di continuità che in questo caso la postulazione di C sia la medesima dianzi trovata, purchè si consideri il <u>genere virtuale</u> di C, ritenendo i punti doppi virtualmente inesistenti.

Di maggiore interesse e più utile per le applicazioni è il caso in cui la curva gobba irriducibile C (d'ordine n e genere p) possieda t punti tripli $O_1, O_2, \ldots, O_t$, aventi ciascuno tre tangenti distinte e non complanari, così come avviene per la curva doppia di una superficie dotata di singolarità normali (cfr. § 3).

Consideriamo allora il sistema lineare delle superficie F_m, d'ordine m (con $m \geq n-2$), passanti doppiamente per quei punti tripli: le F_m segano su C una serie lineare completa non speciale

$$\underline{g^{mn-6t-p}_{mn-6t}}\;.$$

Per dimostrarlo si può ripetere - con lievi varianti - il ragionamento svolto nel § 42 per la questione analoga.

Riprendendo le notazioni ivi usate, la serie segata su C dalle F_m che passano doppiamente pei punti tripli O_i $(i = 1, 2, \dots, t)$ e semplicemente per $A_1, B_1; A_2, B_2; \dots; A_\delta, B_\delta$, coincide con la serie completa non speciale segnata su C dai coni che da O proiettano le curve di ordine m aggiunte a C', ed ha quindi l'ordine $mn-6t-2\delta$ e la dimensione $mn-6t-2\delta-p$. Ma questa è la serie residua del gruppo dei punti A, B, rispetto alla serie segata su C dalle F_m con i punti doppi O_i, e poichè i punti A, B presentano condizioni indipendenti a tali F_m, la serie segnata dalle F_m stesse risulterà completa, come sopra viene asserito.

Ne segue che una F_m dotata dei t punti doppi O_i, passa per l'intera curva C quando ne contenga $mn-6t-p+1$ punti generici: ma imporre ad una superficie di avere un punto doppio assegnato porta quattro condizioni (lineari), e quindi - se sono indipendenti fra loro le $4t$ condizioni imposte dai t punti tripli della curva C alla generica superficie d'ordine m ($\geq n-2$) passante doppiamente per essi - il numero delle condizioni esprimenti che una superficie d'ordine m sufficientemente alto ($m \geq n-2$) passa per C, risulta:

$$mn-2t-p+1.$$

Ora per dimostrare l'indipendenza delle $4t$ condizioni imposte alle F_m dai t punti doppi, analogamente a ciò che si è fatto innanzi, viene l'idea di considerare il sistema di quelle particolari F_m che sono coni col vertice in un punto generico V: ma in tal guisa non si raggiunge la prova! Infatti il sistema dei coni anzidetti ha la dimensione:

$$\frac{m(m+3)}{2} - 3t$$

poichè l'imporre ad un cono un punto doppio porta una generatrice doppia, e quindi esige soltanto *tre* condizioni invece di quattro (solo si constata qui che per $m \geq n-2$ le $3t$ condizioni relative ai t punti O_i sono indipendenti fra loro, come quelle richieste dai punti tripli della proiezione piana C' di C, per le sue aggiunte d'ordine non minore di $n-2$). Così la considerazione dei coni prova soltanto che le condizioni imposte alle superficie F_m d'ordine m, dal passare doppiamente per i punti O_i, sono $4t-x$ dove $x \leq t$.

Per provare effettivamente che è $x=0$, conviene approfondire l'esame, osservando che l'imposizione di un punto doppio ad una superficie d'ordine m (che ci dà <u>tre</u> condizioni per i coni) porta sempre a <u>quattro</u> condizioni indipendenti per i <u>monoidi</u>. Consideriamo allora i monoidi d'ordine m che hanno il <u>vertice</u> (punto di moltiplicità $m-1$) in un punto generico assegnato V: essi sono

$$\infty^{\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - \frac{m(m-1)(m+1)}{6} - 1} = \infty^{(m+1)^2 - 1}$$

quindi quelli di essi che passano doppiamente per i punti O_i $(i=1,2,\dots,t)$ costituiscono un sistema lineare la cui dimensione è almeno:

$$(m+1)^2 - (4t-x) - 1$$

Ora si noti che tali monoidi contengono per intero le t rette che da V proiettano i punti O_i: perciò se imponiamo ai nostri monoidi di toccare in V,

$$\frac{(m-1)(m+2)}{2} - t + 1$$

rette uscenti da V e non appartenenti ad un cono di ordine $m-1$, essi diventano coni dotati dei t doppi O_i: ne segue che il sistema di questi coni ha almeno la dimensione:

$$(m+1)^2 - (4t-x) - 1 - \left[\frac{(m-1)(m+2)}{2} - t + 1\right] = \frac{m(m+3)}{2} - 3t + x.$$

Infine ricordando che tale dimensione è

$$\frac{m(m+3)}{2} - 3t,$$

si deduce:

$$x = 0.$$

Nota.

Si osservi che nel ragionamento precedente abbiamo conservato per m il limite inferiore $n-2$: quando - come accade per gli sviluppi che seguono - ciò non sia necessario, è facile mostrare l'indipendenza delle 4t condizione imposte dai punti O_i $(i = 1, 2, .., t)$ alle superficie F_m che debbono averli come punti doppi, per m sufficientemente alto. Basterà ricorrere alla effettiva costruzione di superficie passanti doppiamente per $t-1$ dei punti O_i, e non pel rimanente, per esempio alle ∞^9 superficie F_{2t} costituite da $t-1$ coni quadrici fissi col vertice in altrettanti punti O_i, e da una residua quadrica variabile.

Consideriamo infine il caso in cui la C, essendo inizialmente irriducibile (e, ad esempio, priva di punti multipli), si deforma con continuità fino a spezzarsi in due curve C_1 e C_2 (pure ambedue prive di punti multipli) di genere p_1 e p_2, e degli ordini n_1 e n_2, aventi i punti in comune. Per una superficie F_m il passaggio per C porta a:

$$m n_1 - p_1 + 1$$

condizioni. Ma una F_m per C_1 contiene i punti di C_2, quindi affinché una tale F_m passi anche per C_2 non avremo che da imporle:

$$m n_2 - p_2 + 1 - i$$

condizioni ulteriori. Onde il passaggio per $C_1 + C_2 = C$ impone alle F_m, complessivamente:

$$m(n_1 + n_2) - (p_1 + p_2 + i - 1) + 1 = mn - p + 1$$

condizioni, cioè vale ancora la <u>formula di postulazione</u> dianzi stabilita.

44.- ESTENSIONE DELLE FORMULE DI POSTUZIONE: CURVE MULTIPLE.

Il problema di determinare il numero delle superficie linearmente indipendenti che passano per una curva C, si generalizza nella ricerca delle superficie passanti due o più volte per C. Si arriva così a delle formule di postulazione più generali che sono state scritte da Cayley (1870) e da Noether (1871), le quali rispondono alla domanda di determinare le condizioni imposte alle superficie di un dato ordine da un gruppo di curve e di punti con molteplicità assegnate qualsiansi.

Noi ci limiteremo qui ai casi più elementari che occorrono per gli esempi e per gli sviluppi seguenti. Del resto quando si tratti della più importante applicazione alle superficie (definizione del genere numerico - cfr. § 45) e si voglia comprendere il caso di singolarità qualunque, la conoscenza precisa della postulazione del gruppo di queste rispetto alle superficie aggiunte, può essere sostituita dal teorema, che già abbiamo incontrato in un caso particolare (§ 42) e che stabiliremo in generale alla fine di questo paragrafo:

I sistemi lineari formati da superficie di un ordine abbastanza alto, passanti per un certo gruppo di linee e punti base (proprie e improprie) con molteplicità assegnate qualunque, segano sopra un piano generico sistemi regolari e completi di curve (*).

Sia data una curva gobba C, d'ordine n e genere p, che per semplicità di discorso supponiamo priva di punti multipli: cerchiamo di determinare il numero delle condizioni imposte ad una superficie F_m, d'ordine m abbastanza alto, dal passare doppiamente per C.

Si imporranno anzitutto le condizioni perchè la F_m passi semplicemente per C, che sono in numero di

$$mn - p + 1,$$

e poi si dovranno aggiungere le condizioni perchè la F_m passante per C, tocchi lungo di essa due superficie intersecantesi in C.

Si può supporre che la C sia definita come intersezione parziale di due superficie F_q

---

(*) Cfr. Castelnuovo G.: "Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica," Annali di Matematica, serie II^a, t. 25, 1897.

ed F_s aventi certi ordini $\underline{q}$ ed $\underline{s}$; e, ad esempio, la F_s sia suscettibile di variare in un sistema lineare ∞^1 almeno (ipotesi che gioverà per il seguito).

Cominciamo a determinare le condizioni perchè una F_m passante per C (ed il cui ordine $\underline{m}$ sia convenientemente alto rispetto a $\underline{q}$ e ad $\underline{s}$), tocchi lungo C la superficie F_q. Perciò si considererà il sistema lineare $|K|$ segato dalle F_m sopra la F_q, fuori di C : dimostreremo che (per m assai alto) le K segano su C una serie (non speciale) completa ; la dimensione di questa, aumentata di uno, ci darà il numero delle condizioni per il contatto richiesto. Dopo ciò le F_m tangenti lungo C alla F_q, riusciranno già tangenti anche alla F_s nel gruppo G dei punti in cui la C incontra la residua intersezione della F_q ed F_s. Perciò le F_m tangenti lungo la C ad F_q, segheranno ulteriormente sopra la F_s un sistema di curve $|L|$ aventi come punti base i punti di G ; si dimostrerà che queste L segano sopra C (fuori di G) una serie non speciale completa, e la dimensione di questa, aumentata di uno, ci darà quindi il numero delle condizioni di contatto cercate.

Per sviluppare il ragionamento sopra accennato, conviene premettere il seguente <u>lemma di Castelnuovo</u> (*) :

(*) Cfr. Castelnuovo : l. c. ; nota al § 43.

Sopra una curva C, di genere p, si abbia una serie lineare non speciale completa g_n^{n-p}, ed una serie g_m^1 (o g_m^r con $r>1$) in generale non completa, tale che la serie (completa) $|g_n - g_m|$, residua della g_m^1 rispetto alla g_n^{n-p}, sia anch'essa non speciale: allora la serie somma minima della g_n^{n-p} e della g_m^1 (cioè la serie di dimensione minima contenente ogni gruppo formato da un gruppo della g_n^{n-p} e da uno della g_m^1) coincide con la serie completa (non speciale) $|g_n + g_m| = g_{n+m}^{n+m-p}$.

Infatti se G_m e G'_m sono due gruppi qualunque della g_m^1, le serie $|g_n^{n-p}|+G_m$ e $|g_n^{n-p}|+G'_m$ hanno come serie intersezione (serie di dimensione massima comune ad entrambe (*)) la serie

$$|g_n - g_m| + G_m + G'_m$$

la cui dimensione è $n-m-p$. Onde, essendo la $|g_n^{n-p}|+G_m$ e la $|g_n^{n-p}|+G'_m$ ambedue contenute nella g_{n+m}^x somma minima di g_n^{n-p} e g_m^r, si ha:

$$x \geq 2\,(n-p)-(n-m-p)$$

cioè:

$$x \geq n+m-p.$$

Ma x non può superare il valore $n+m-p$, dimensione della $|g_n + g_m|$ completa, e quindi

(*) Cfr. nota (**) a pag. 73.

necessariamente

$$x = n + m - p.$$

Ora mostriamo che, come abbiamo accennato, il sistema lineare $|K|$ segato su F_q (fuori di C) dalle F_m passanti per C, determina sulla C stessa una serie non speciale completa, essendo sempre inteso che l'ordine $\underline{m}$ sia sufficientemente alto. Infatti tra le F_m sono quelle spezzate nella F_s e in una F_{m-s}, e le F_{m-s} (per $m-s$ assai alto) segano su C una serie lineare completa e non speciale $g^{(m-s)n-p}_{(m-s)n}$ (✻); consideriamo allora la somma minima di questa $g^{(m-s)n-p}_{(m-s)n}$ e della serie γ (∞^1 almeno) determinata su C dal sistema $|C_1|$ che segano ulteriormente su F_q le F_s per C, le quali per ipotesi costituiscono almeno un fascio. Per il nostro lemma tale somma minima risulta (non speciale) completa poichè la residua di γ rispetto a $g^{(m-s)n-p}_{(m-s)n}$ è la serie segata su C dalle F_{m-s} per una C_1, e quindi è certo non speciale per $n-s$ assai alto.

Ma allora sarà pure completa la serie segata su C dal sistema $|K|$, poichè essa contiene la predetta somma minima. Determiniamo la sua dimensione: è noto che la curva C ed una K, costituendo l'intersezione completa della superficie F_q con una F_m, hanno in comune

---

(✻) § 42.

$$(m+q-4)n-2(p-1)$$

punti (*), e quindi la serie determinata dal sistema $|K|$ sulla C ha la dimensione:

$$(m+q-4)n-3p+2.$$

Ne segue che affinchè una superficie F_m passante per C, tocchi lungo di essa la F_q, dovremo assoggettare tale F_m ad altre

$$(m+q-4)n-3p+3$$

condizioni lineari. Tenendo conto delle condizioni imposte alla F_m dal passare per C, si ha infine che le condizioni cui deve soddisfare una superficie F_m, d'ordine m sufficientemente alto, per essere tangente alla F_q lungo la curva C, sono in numero di:

$$(2m+q-4)n-4(p-1).$$

Consideriamo ora il sistema delle F_m che toccano lungo C la F_q, e che quindi - come già si è osservato - sono anche tangenti alla F_s nei punti del gruppo G in cui la C incontra la curva ulteriore intersezione di F_q ed F_s: tra tali F_m si hanno quelle costituite dalla F_q e da una resi-

---

(+) Cfr. Enriques - Chisini: op. cit. vol. III, pag. 532.

dua superficie F_{m-q}; e - per $m-q$ sufficientemente alto - le F_{m-q} segano su C una serie completa non speciale, la quale evidentemente coincide con la serie determinata su C (fuori di Θ) dal sistema $|L|$ già sopra introdotto. Tale serie ha dunque la dimensione:

$$(m-q)n-p;$$

e pertanto, affinchè una F_m tangente alla F_q lungo la C, risulti tangente anche alla F_s nei punti della C stessa, e quindi abbia la curva C come doppia, bisognerà assoggettarla a

$$(m-q)n-p+1$$

condizioni lineari. Concludendo, <u>le condizioni che si debbono imporre alle superficie d'ordine m assai alto, affinchè passino doppiamente per C, sono in numero di</u>

$$(3m-4)n-5(p-1).$$

Estendendo il ragionamento precedente si perviene al risultato generale: <u>La postulazione di una curva C, d'ordine n e genere p, priva di punti doppi, rispetto alle superficie d'ordine m (convenientemente elevato) che debbono passare</u>

per essa con la molteplicità i, è data da:

$$\frac{i(i+1)}{6}\left[(3m-4i+4)n-(2i+1)(p-1)\right]$$

Se la C possiede dei punti doppi (ordinari) la postulazione è la medesima, purchè si consideri il genere virtuale di C, ritenendo i punti doppi virtualmente inesistenti. Volendosi invece riferire ancora al genere effettivo p, se t è il numero dei punti doppi, la formula precedente si modifica nel modo che segue:

$$\frac{i(i+1)}{2}\left[(3m-4i+4)n-(2i+1)(p-1+t)\right]$$

Al termine del § 42 abbiamo visto che le superficie di un ordine assai alto passanti semplicemente per una curva C, segano sopra un piano generico un sistema completo di curve; la precedente formula di postulazione ci permette di estendere questo risultato al caso dei sistemi lineari di superficie passanti con molteplicità assegnata qualunque per una curva C dotata di soli nodi. Ma - come abbiamo accennato - questa proprietà è affatto generale in quanto che essa sussiste per ogni sistema completo di superficie (d'ordine convenientemente elevato), il quale abbia un gruppo base costituito da punti e da linee di molteplicità quali si vogliano, e presentanti singolarità straordinarie qualsiansi.

Indipendentemente dalla conoscenza delle postulazioni, daremo di questo teorema una dimostrazione geometrica diretta (Castelnuovo): converrà però richiamare alcune nozioni sui sistemi di curve piane, e stabilire per essi un lemma del tutto analogo a quello relativo alle serie lineari, sopra incontrato.

È noto che le condizioni imposte ad una curva piana C_n d'ordine n, dal possedere un certo gruppo H di punti singolari qualsiansi (distinti o infinitamente vicini), risultano indipendenti dall'ordine n, almeno quando esso superi un certo limite (*): allora se K è il loro numero (postulazione delle curve C_n rispetto al gruppo H), il sistema $|C_n|$ delle curve piane d'ordine n, completo rispetto al gruppo base H, cioè costituito dalla totalità delle C_n aventi il comportamento assegnato nei punti di H, ha la dimensione:

$$(1) \qquad r_n = \frac{n(n+3)}{2} - K$$

od anche, se π è il genere di $|C_n|$ ed n' il suo grado:

$$r_n = n' - \pi + 1 .$$

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro IV, § 17 (vol. II, pag. 426).

Quando n non sia abbastanza alto, il numero k sarà maggiore di quello k_n delle condizioni effettivamente imposte dal gruppo H alla C_n, e il sistema completo $|C_n|$ risulterà ora <u>sovrabbondante</u> (non <u>regolare</u>) essendo la sua dimensione (effettiva):

$$\frac{n(n+3)}{2} - k_n .$$

In tal caso la (1) si suole riguardare come <u>dimensione virtuale</u> del sistema $|C_n|$, ed essa differisce di $k - k_n$ (<u>sovrabbondanza</u>) dalla dimensione effettiva.

<u>LEMMA: Siano $|C_n|$ e $|C_{n+1}|$ due sistemi lineari regolari e completi di curve piane (degli ordini n ed $n+1$, rispettivamente) determinati da uno stesso gruppo di punti base H (con le stesse molteplicità assegnate): allora il sistema somma minima di $|C_{n+1}|$ e delle rette del piano, cioè il sistema di dimensione minima contenente tutte le curve C_{n+2} spezzate in una C_{n+1} di $|C_{n+1}|$ e in una retta, coincide col sistema completo (regolare) $|C_{n+2}|$ definito dal gruppo H.</u>

La dimostrazione è immediata e affatto analoga a quella dell'altro lemma sopra stabilito. Se <u>a</u> e <u>b</u> sono due rette qualunque, il sistema congiungente i due sistemi $|C_{n+1}|+a$ e $|C_{n+1}|+$ $+b$ ha la dimensione:

$$2r_{n+1} - r_n = \frac{(n+2)(n+5)}{2} - 1 - k .$$

Ma tale sistema è contenuto in quello costituito dalle curve del sistema somma minima dato, passanti pel punto P comune ad $\underline{a}$ e $\underline{b}$; quindi se il sistema somma minima suddetto ha dimensione x, si ha:

$$x \geqslant \frac{(n+2)(n+5)}{2} - k .$$

Da cui, necessariamente:

$$x = \frac{(n+2)(n+5)}{2} - k$$

dato che x non può superare la dimensione

$$\frac{(n+2)(n+5)}{2} - k$$

di $|C_{n+2}|$.

<u>Corollario</u>: <u>*Nelle ipotesi precedenti risulta pure (regolare) completo rispetto al gruppo base H, ogni sistema lineare di curve C_{n+t} d'ordine $n+t$, contenente tutte le C_{n+t} spezzate in una C_{n+1} di $|C_{n+1}|$ e in una retta contata $t-1$ volte.*</u>

Premesse queste considerazioni, indichiamo, dapprima, con $|F_n|$ il sistema lineare delle superficie F_n d'ordine $\underline{n}$, <u>completo</u> rispetto ad un dato gruppo di <u>linee</u> base Γ, cioè costituito dalla totalità delle F_n che passano – in modo assegnato – per le curve di Γ. Se intersechiamo il sistema

$|F_n|$ con un piano generico α, si ottiene sopra di esso un sistema lineare di curve $C_n^{(\alpha)}$ d'ordine n, il quale ha come punti base i punti comuni ad α e alle linee Γ, con molteplicità risultanti dal comportamento delle F_n lungo le Γ. Quel sistema potrà non essere completo: indicheremo allora con $|C_n^{(\alpha)}|$ il sistema completo da esso individuato. Per ciascuna delle ∞^3 posizioni del piano secante α si ha così un sistema completo $|C_n^{(\alpha)}|$, ed, evidentemente, la proprietà di essere intersecate da un piano generico α lungo curve del sistema $|C_n^{(\alpha)}|$, caratterizza le superficie F_n di $|F_n|$.

Ma possiamo fare un'utile osservazione: si consideri una qualunque retta $\underline{a}$ (non facente parte del gruppo Γ), e sia $|\overline{F}_n|$ il sistema completo delle superficie che godono della proprietà di segare ogni piano α <u>del fascio di asse a</u> lungo curve del sistema corrispondente $|C_n^{(\alpha)}|$; vogliamo mostrare che il sistema $|\overline{F}_n|$ coincide con $|F_n|$. Intanto ogni superficie F_n fa parte certamente di $|\overline{F}_n|$, e quindi sopra un piano τ, non passante per a, il sistema completo $|C_n^{(\tau)}|$ sopra definito, è contenuto in quello $|\overline{C}_n^{(\tau)}|$ individuato dalla sezione della $\overline{F}_n$ generica. Ora ambedue questi sistemi sono costituiti da curve di ordine n, e perciò se $|\overline{C}_n^{(\tau)}|$ è più ampio di $|C_n^{(\tau)}|$ il grado del primo supera quello del secondo; ma il grado di $|C_n^{(\tau)}|$ è l'ordine della curva intersezione di due superficie di $|F_n|$ (fuori delle linee base Γ), e analogamente quello di $|\bar{C}_n^{(\tau)}|$ è dato dall'ordine della curva comune a due $\bar{F}_n$, onde quei due gradi sono necessariamente uguali fra loro, dato che le due curve suddette incontrano un piano α, passante per a, nello stesso numero di punti (essendo $|C_n^{(\alpha)}| = |\bar{C}_n^{(\alpha)}|$). Conseguentemente $|C_n^{(\tau)}|$ e $|\bar{C}_n^{(\tau)}|$ coincidono, e perciò coincidono pure i sistemi $|F_n|$ e $|\bar{F}_n|$.

Allora prendiamo ad arbitrio una retta $\underline{a}$, e sopra ogni piano α del fascio di asse $\underline{a}$, determiniamo razionalmente una curva $C_n^{(\alpha)}$ del corrispondente sistema $|C_n^{(\alpha)}|$, ciò che si ottiene, ad esempio, fissando su α – mediante una funzione razionale del parametro che individua α nel fascio – un certo gruppo di punti, in numero uguale alla dimensione di $|C_n^{(\alpha)}|$ (dimensione che non varia al variare di α, finchè α sia un piano <u>generico</u> per $\underline{a}$). Quando α ruota intorno ad a, la $C_n^{(\alpha)}$ suddetta genera una superficie F_{n+t} che, in generale, passa per la retta $\underline{a}$ con una certa molteplicità $\underline{t}$ – onde il suo ordine è $n+t$ – e che inoltre si comporta lungo le linee del gruppo Γ, come le F_n del sistema $|F_n|$: quindi tale F_{n+t} fa parte del sistema completo $|F_{n+t}|$ di superficie d'ordine $n+t$, aventi le stesse curve base di $|F_n|$.

Variamo allora in tutti i modi possibili gli elementi arbitrari che compariscono nella costruzione della F_{n+t}, in guisa però che la retta $\underline{a}$ descriva un piano generico τ: si ottengono infinite superficie di $|F_{n+t}|$, le quali incontrano il piano τ lungo tutte le curve spezzate in una $C_n^{(\tau)}$ di $|C_n^{(\tau)}|$ e in una retta t-pla, e queste curve fanno parte del sistema segato su τ da $|F_{n+t}|$, onde - per il lemma sopra stabilito - tale sistema risulterà completo (e regolare) quando il numero $\underline{n}$ sia così alto che i sistemi completi $|C_{n-1}^{(\tau)}|$ e $|C_n^{(\tau)}|$ determinati dalle sezioni di $|F_{n-1}|$ ed $|F_n|$, siano regolari.

Abbiamo così dimostrato la proprietà asserita nel caso di un sistema completo di superficie $|F_n|$ dotato soltanto di curve base assegnate, ma essa sussiste ancora se il sistema $|F_n|$ possiede anche dei punti base isolati, come subito si vede ripetendo le considerazioni svolte nella "Osservazione„ al termine del § 42.

Si ha dunque in ogni caso che <u>il sistema lineare completo $|F_n|$ delle superficie di ordine n passanti con molteplicità assegnate per le linee ed i punti di un gruppo base dato, sega sopra un piano generico un sistema completo (regolare) di curve, purchè l'ordine n superi un certo limite</u> (che dipende dal gruppo base di $|F_n|$).

Ne segue che, al crescere di $\underline{n}$, la dimensione del sistema $|F_n|$ descrive una progressione aritmetica del terzo ordine (cfr. § 42.).

45.- IL GENERE NUMERICO.

Consideriamo una superficie F_n, dotata di singolarità normali, cioè di una curva doppia γ (d'ordine ν e genere ρ), la quale possieda t punti tripli (ordinari) aventi uguale molteplicità anche per la F_n (*). Vediamo se, con l'aiuto delle formule dianzi trovate, si possa calcolare il genere di F_n, cioè il numero delle superficie φ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F_n, tra loro linearmente indipendenti.

Se φ_{n-4} debbono passare (semplicemente) per la curva γ, quindi, se sussiste la formula di postulazione sopra stabilita (**), sono

$$(n-4)\nu - 2t - \rho + 1$$

le condizioni lineari cui debbono soddisfare le φ_{n-4}, cosicchè la dimensione del loro sistema, aumentata di un'unità, è:

$$(1) \qquad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\nu + 2t + \rho - 1 .$$

Questa espressione ci dà realmente il genere geometrico p_g della F_n? certo, se è soddisfat-

---

(*) Cfr. § 3.
(**) Cfr. § 43.

ta - come accadrà in generale - l'ipotesi posta che per le φ_{n-4} valga la formula di postulazione relativa al loro passaggio per γ. Se questa non vale, la (1) non ci darà il valore del p_g, ma un numero più piccolo p_a (*), tale che $p_a - 1$ sarà la <u>dimensione virtuale</u> del sistema delle φ_{n-4} definita in base alla postulazione di γ.

Il numero p_a costituisce un nuovo carattere della superficie F_n, che - come vedremo tra breve (**) - è invariante per trasformazioni birazionali della F_n; esso prende il nome di <u>genere numerico</u> (o <u>aritmetico</u>) della superficie F_n. Per quanto si è detto è definito dalla relazione:

$$(2) \qquad p_a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\nu + 2t + \rho - 1 .$$

Come abbiamo osservato, si ha in ogni caso:

$$p_a \leq p_g .$$

Quando sia:

$$p_a = p_g$$

la superficie F_n dicesi <u>regolare</u>.

(*) Cfr. § 42, pag. 183 ; si ricordi che il sistema lineare delle curve d'ordine $n-3$ aggiunte ad una curva piana d'ordine n, è sempre regolare (cfr., ad esempio, Enriques - Chisini: op. cit., vol. III pag. 89).

(**) Cfr. § 46.

Un esempio chiarirà subito queste affermazioni.

Si consideri (*) una superficie F_6, del sesto ordine, che possieda una curva doppia γ spezzata in una quartica gobba γ_4 di genere uno, e in una retta γ_1 non incidente a γ_4 (sicchè la $\gamma = \gamma_1 + \gamma_4$, avrà ordine 5 e genere zero) (**). La (1) ci dà allora per la nostra F_6 :

$$p_a = -1$$

Invece il genere p_g della superficie, per definizione, non può scendere sotto a zero; e di fatto la F_6 ha il genere geometrico nullo, poichè non esiste nessuna quadrica passante per γ, dato che γ_1 e γ_4 non hanno nessun punto in comune.

Si può dimostrare che la F_6 è trasforma-

(*) Cfr. Noether: "Ueber eine Fläche 6. ter Ordnung von Flächengeschelcht – 1„ (Math. Annalen, 1883).

(**) L'equazione di una tale superficie F_6 si scrive facilmente. Siano $A=0$ e $B=0$ le equazioni di due piani passanti per γ_1; e $\varphi=0$ e $\psi=0$ quelle di due quadriche passanti per γ_4. L'equazione della F_6 è allora del tipo:

$$(a_0 A^2 + a_1 AB + a_2 B^2)\varphi^2 + (b_0 A^2 + b_1 AB + b_2 B^2)\varphi\psi + $$
$$+ (c_0 A^2 + c_1 AB + c_2 B^2)\psi^2 = 0$$

essendo a, b, c costanti arbitrarie.

bile birazionalmente in un cono cubico ellittico, per il quale (conforme all' *invarianza di p_a*) si trova pure $p_a = -1$ (cfr. pag. 220).

In modo del tutto analogo a quello sopra seguito, la definizione del genere numerico si estende ad una superficie dotata di singolarità qualsiansi, quando se ne conoscano le postulazioni rispetto alle φ_{n-4}.

Ad esempio, se la F_n, oltre alla curva doppia γ, possiede un punto s-plo isolato (ordinario), che deve essere di molteplicità $(s-2)$ per le φ_{n-4}, il genere numerico di F_n è dato da:

$$p_a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\nu + 2t + \rho - 1 - \frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

E così analogamente per ogni altro tipo di singolarità.

Si noti che il numero $p_a - 1$ ci dà allora la dimensione (*virtuale*) del sistema delle aggiunte φ_{n-4}, supponendo non solo che per ognuna delle varie singolarità della F_n valga la relativa formula di postulazione rispetto alle φ_{n-4}, ma anche che *le condizioni imposte alle φ_{n-4} dalle linee e punti multipli della F_n siano tra loro indipendenti*; in ogni modo si ha sempre:

$$p_a \leq p_g.$$

Da quanto si è detto risulta che assegnando ad una superficie F_n date singolarità (curve doppie o multiple, e punti multipli isolati), si ottiene sempre una superficie regolare ($p_g = p_a$) ogni qualvolta l'ordine <u>n</u> sia abbastanza alto.

Nei vari casi particolari le definizioni date ci permetteranno di provare se effettivamente il genere numerico p_a sia uguale al genere geometrico p_g: così per esempio possiamo verificare la regolarità della superficie F_7 del settimo ordine che abbiamo incontrato nel § 40 (superficie di genere $p_g = 0$ e bigenere $P = 2$). Questa F_7 possiede una conica doppia k, una retta tripla r (non incidente a k), e tre tacnodi A, B, C, i cui piani tacnodali passano per r; essa ha il genere geometrico nullo: calcoliamone il genere numerico. Per questo si osservi che le superficie cubiche aggiunte alla F_7 devono passare semplicemente per k, ciò che porta 7 condizioni lineari; e doppiamente per r, il che ne richiede invece 10.(*) Tre condizioni ulte-

(*) Cfr. la formula di postulazione per le curve doppie, § 44. Della effettiva validità di tale formula in questo caso ci si può rendere conto direttamente osservando che le superficie cubiche passanti doppiamente per l'asse delle z, soddisfano a dieci condizioni lineari, le quali si ottengono annullando identicamente i termini di grado zero ed uno rispetto ad x ed y. Come esercizio si può anche dimostrare la cosa ricordando la generariori sono imposte dal passaggio per A, B, C: e poichè le superficie cubiche linearmente indipendenti sono in numero di venti, si ha:

$$p_a = 0.$$

Ma è più difficile ed interessante porgere esempi di superficie irregolari.

I primi casi che si sono incontrati sono stati di superficie rigate: superficie di genere geometrico nullo e genere numerico negativo.

Verifichiamo intanto la cosa per i coni.

Per un cono qualsiasi d'ordine <u>n</u>, non esistono le superficie aggiunte d'ordine $n-4$ (nè di ordine $n-3$), perchè dovrebbero passare $n-2$ volte per il vertice. Potremo tuttavia calcolare ugualmente la dimensione virtuale $p_a - 1$ del loro sistema.

Si supponga che il nostro cono F_n possieda <u>d</u> generatrici doppie: per esse debbono passare le superficie φ_l (d'ordine <u>l</u>) aggiunte ad F_n, le quali avranno inoltre un punto $(n-2)$-plo nel vertice di F_n. Ciò richiede che le φ_l (a prescindere dalla loro effettiva esistenza) soddisfino a

---

zione proiettiva della superficie cubica mediante la corrispondenza [1, 2] fra due fasci di piani (cfr., ad esempio, i più volte citati "Complementi di Geometria proiettiva" di E. Bertini, § 10, n.° 11.).

$$d\,[l+1-(n-2)]+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

condizioni lineari opportune (cfr. § 42). Posto $l=n-4$, ne segue che il genere numerico p_a del cono F_n è dato da:

$$p_a=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+d=$$

$$=-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+d=-\pi,$$

avendo indicato con π il genere della sezione piana di F_n (ossia del cono stesso).

Poichè, come dimostreremo nel paragrafo seguente, il genere numerico è invariante rispetto alle trasformazioni birazionali, anche per una rigata qualunque il p_a eguaglierà il genere della sezione piana (genere della rigata), cambiato di segno (*): infatti una tale superficie può sempre trasformarsi in un cono a sezione piana dello stesso genere (**).

(*) Questo risultato si può anche stabilire direttamente calcolando i caratteri della curva doppia d'una rigata: cfr. A Cayley: "On the Deficiency of certain surfaces" (Math. Annalen, vol. III, 1871). Vedi anche Picard et Simart, op. cit. t. I; chap. VIII; n° 17.

Allo stesso risultato si perviene anche in base al teorema fondamentale sul significato del genere numerico, che diamo in appresso.

(**) Ciò si può ritenere come evidente. Infatti la serie ∞^1 delle generatrici di una rigata F costituisce un ente algebrico semplicemente infinito, che può rappresentarsi con la serie dei punti di una curva algebrica, e quindi con la serie delle generatrici del cono Φ che proietta questa da

Giova ora riconoscere che esistono anche superficie irregolari di genere geometrico e numerico maggiori di zero.

Un semplice esempio in proposito è dovuto a Castelnuovo (*):

Consideriamo una superficie F_{2n}, d'ordine $2n$, la quale abbia otto punti n-pli: $O_1, O_2, \ldots, O_8$, nei punti base di una rete di quadriche.

Se

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0$$

sono tre quadriche (indipendenti) della rete, l'equazione della F_{2n} è del tipo:

$$f_n(u, v, w) = 0$$

essendo f_n una generica forma d'ordine $\underline{n}$ in u, v e w.

Infatti una equazione cosiffatta rappresenta realmente una superficie F_{2n} del tipo ri-

---

un punto generico. Ora ogni generatrice di F può essere proiettata (per esempio da un asse fisso) sopra la generatrice corrispondente di Φ, e così la F si trasforma nel cono Φ.

(*) Cfr. Castelnuovo: "Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie" - Nota 1ª (Rendic. Istituto Lombardo, 1891).

chiesto: ma la cosa è anche invertibile, cioè ogni F_{2n} si può rappresentare con una tale equazione. Per rendersi conto di questo basterà calcolare la dimensione del sistema delle F_{2n}. Si consideri una quadrica qualunque della rete suddetta, ad esempio, la $u = 0$: sopra di essa le rimanenti quadriche

$$(3) \qquad au + bv + cw = 0$$

determinano un fascio di quartiche $|C_4|$ (<u>fascio caratteristico della rete</u>), mentre le F_{2n} segano su $u = 0$ un sistema lineare $|C_{4n}|$ di curve dell'ordine $4n$, il quale ha nei punti O_i ($i = 1, 2, .., 8$) otto punti base di molteplicità $2n$. Ne segue che una C_4 di $|C_4|$ e una C_{4n} di $|C_{4n}|$ non hanno intersezioni variabili, poichè i loro $16n$ punti comuni sono assorbiti dai punti base O_i; di conseguenza ciascuna C_{4n} è costituita da <u>n</u> quartiche di $|C_4|$, cioè <u>il sistema $|C_{4n}|$ è composto col fascio</u> $|C_4|$, e quindi $|C_{4n}|$ ha la dimensione <u>n</u>. Ma la dimensione di $|C_{4n}|$ è data dalla differenza tra la dimensione R_{2n} del sistema delle F_{2n}, e il numero $R_{2(n-1)}+1$ delle F_{2n}, linearmente indipendenti, spezzate in una $F_{2(n-1)}$ e nella quadrica $u=0$, si ha allora:

$$R_{2n} - R_{2(n-1)} - 1 = n$$

Questa formula ricorrente ci dà subito:

$$R_{2n} = \frac{n(n+3)}{2};$$

ma questo è precisamente il numero dei parametri (essenziali) da cui dipende la forma $f_n(u, v, w)$, e pertanto, come avevamo asserito, ogni F_{2n} ha una equazione del tipo

$$f_n(u, v, w) = 0.$$

Il genere numerico p_a della F_{2n} è dato da:

$$p_a = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} - 8\,\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n-1$$

Questo stesso valore avrebbe il genere geometrico di F_{2n}, se i punti O_i $(i = 1, 2, .., 8)$ presentassero condizioni indipendenti alle superficie aggiunte φ_{2n-4} della F_{2n}, ma è facile vedere che ciò non accade. Infatti le φ_{2n-4} sono le superficie d'equazione:

$$\varphi_{n-2}(u, v, w) = 0$$

(con $\varphi_{n-2}(u,v,w)$ forma d'ordine $n-2$ nei suoi argomenti), le quali dipendono da:

$$\frac{n(n-1)}{2} - 1$$

parametri (essenziali); e quindi:

$$p_g = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Onde - almeno per $n>2$ - è:

$$p_g > p_a .$$

Nota.

Per il valore suggestivo dell'osservazione, conviene rilevare una notevole proprietà dalla superficie F_{2n}: essa possiede un fascio irrazionale di quartiche sghembe (ellittiche), il cui genere è uguale alla differenza $p_g - p_a$.

Abbiamo già visto come la curva intersezione della F_{2n} con una quadrica della rete (3), sia costituita di n quartiche C_4, ognuna delle quali è base di un fascio di quadriche contenuto in (3): il sistema delle C_{4n} essendo composto, le componenti C_4 formeranno un fascio (§ 9). Si può vedere che questo fascio è irrazionale di genere $p_g - p_a$.

Infatti se u_0, v_0, w_0 sono i valori che assumono le funzioni u, v, w nel punto P, per modo che sia

$$f_n(u_0, v_0, w_0) = 0, \tag{4}$$

il fascio delle quadriche (3) passanti per P, ha come curva base la quartica

$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0}$$

la quale evidentemente - per la (4) - appartiene pure alla F_{2n}, e quindi è la C_4 del fascio passante per P. Così le C_4 risultano in corrispondenza biunivoca con i punti della curva che, sul piano delle coordinate proiettive omogenee (u, v, w), è rappresentata dall'equazione

$$f_n(u, v, w) = 0,$$

e perciò il genere del fascio delle C_4, eguaglia quello di tale curva:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = p_g - p_a.$$

Fino a qui abbiamo sempre considerato superficie irriducibili. Ora si supponga di avere una superficie F_{m+n}, d'ordine $m+n$, la quale vari con continuità fino a spezzarsi in due superficie F_m ed F_n degli ordini m ed n. Vogliamo calcolare il genere numerico di F_{m+n} in funzione dei caratteri di F_m ed F_n.

Ci riferiremo, per semplicità di discorso, al caso in cui la F_{m+n} possieda soltanto una curva doppia γ (priva di punti tripli), e supporremo che quando la F_{m+n} si spezza, la γ abbia come limite una curva composta di tre parti (irriducibili o no): una γ_1 doppia per F_m, una γ_2 doppia per F_n, ed una terza curva γ_3 che faccia parte dell'intersezione di F_m ed F_n.

Se la γ ha il genere ρ e l'ordine ν, il genere numerico P_a di $F_m + F_n$ è:

$$(5) \qquad P_a = \binom{m+n-1}{3} - (m+n-4)\nu + \rho - 2 .$$

Indicheremo con ρ_1 e ν_1 il genere e l'ordine di γ_1, e con ρ_2 e ν_2 i caratteri analoghi di γ_2, mentre quelli di γ_3 si indicheranno con ρ_3 e ν_3; supporremo inoltre che le curve γ_1 e γ_3 abbiano i_1 punti in comune, le γ_2 e γ_3 ne abbiano i_2, ed invece che la γ_1 e la γ_2 non s'incontrino (ipotesi semplificativa dei calcoli). Allora, osservando che i punti in cui la γ_3 incontra la γ_1 e la γ_2 sono doppi per γ_3, si ha (*).

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2i_1 + 2i_2 - 1 .$$

È inoltre:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$

I generi numerici p_a e p'_a di F_m ed F_n,

(*) Cfr. § 17.

sono dati rispettivamente da:

$$p_a = \binom{m-1}{3} - (m-4)\nu_1 + \rho_1 - 2,$$

$$p'_a = \binom{n-1}{3} - (n-4)\nu_2 + \rho_2 - 2,$$

e poichè sussiste l'identità

$$\binom{m+n-1}{3} = \binom{m-1}{3} + \binom{n-1}{3} + \frac{1}{2}mn(m+n-1) + 1.$$

la (5) diviene:

$$(6) \quad P_a = p_a + p'_a + \frac{1}{2}(mn - 2\nu_3)(m+n-4) +$$

$$+ (m\nu_2 + n\nu_1 - 2i_1 - 2i_2) + \rho_3 .$$

A questa relazione si può dare una forma più espressiva. Abbiamo supposto che per la γ_3 passino le due superficie F_m ed F_n intersecantisi ulteriormente lungo una curva K: allora la K incontra la γ_1 in $n\nu_1 - i_1$ punti che sono doppi per K; ed analogamente essa ha $m\nu_2 - i_2$ punti doppi sulla γ_2, cosicchè il genere π di K risulta uguale a (*):

$$\pi = \frac{1}{2}(mn - 2\nu_3)(m+n-4) - (m\nu_2 + n\nu_1 - 2i_1 - 2i_2) + \rho_3 .$$

Quindi, infine, la (6) ci dà il seguente

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, § 48 (vol. III, pag. 532).

risultato affatto generale:

$$P_a = p_a + p'_a + \pi. \ (*)$$

Il genere numerico p_a d'una superficie F_n può anche definirsi in relazione alle deficenze dei sistemi lineari segati sopra un piano dalle superficie aggiunte, ed è notevole che questa definizione si estende al caso in cui la F_n sia dotata di singolarità qualsiansi, se pure non si posseggano le formule esplicite di postulazione ad esse relative.

Si osservi che dal teorema stabilito al termine del § 44, segue che <u>qualunque siano le singolarità della superficie F_n, d'ordine n, è sempre possibile determinare un numero (intero) h_0 tale che per $h > h_0$, il sistema completo delle superficie F_{n-4+h} d'ordine $n-4+h$ aggiunte alla F_n, sia segato da un piano generico nel sistema completo delle curve aggiunte alla sezione C_n di F_n.</u>

Quindi (**) le dimensioni virtuali N_{n-4+h}

(*) Questa formula si estende alle ipersuperficie spezzate dello S_r ad r dimensioni, procedendo induttivamente da r ad $r+1$: cfr. F. Severi: "Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche" (Rendiconti Circolo Mat. di Palermo. - vol. 28, 1909).

(**) Cfr. § 44.

dei sistemi delle superficie aggiunte φ_{n-4+h} costituiscono una progressione aritmetica del terzo ordine, la cui ragione è data dalle dimensioni, aumentate di uno, dei sistemi di curve d'ordine $n-4+(h+1)$ aggiunte alla sezione C_n:

$$N_{n-4+(h+1)} - N_{n-4+h} = \pi + hn + \frac{h(h-3)}{2}$$

Per $h \geq h_0$ i termini di questa progressione sono uguali alle dimensioni effettive dei corrispondenti sistemi di aggiunte; invece nell'ipotesi $h_0 > 0$ (che corrisponde alle superficie irregolari), per $0 \leq h < h_0$ essi ci dànno dei valori più piccoli delle dimensioni effettive, poichè i sistemi di curve piane d'ordine non minore di $n-3$ aggiunte alla C_n, non sono mai sovrabbondanti (*). Per $h=0$ si ha la dimensione virtuale del sistema delle superficie aggiunte φ_{n-4}, che, aumentata di uno, dà il genere p_a della superficie F_n. E ritroviamo in ogni caso:

$$p_a \leq p_g.$$

Se in questa relazione vale il segno di uguaglianza si ha $h_0 = 0$, e la F_n è regolare; quando ciò non accada, è facile stabilire un primo significato (proiettivo) della differenza $p_g - p_a$.

Considieriamo il sistema segato sopra un piano generico, dalle $\varphi_{n-4+(h+1)}$: esso per $h < h_0$

(+) Cfr. pag. 215.

avrà la dimensione:

$$\Pi - 1 + hn + \frac{h(h-3)}{2} - \delta_{h+1}$$

con $\delta_{h+1} \geq 0$; il numero δ_{h+1} dicesi <u>deficienza</u> di tale sistema lineare.

Si osservi allora che il primo termine della progressione sopra considerata, a cui corrisponde un sistema di aggiunte avente dimensione effettiva uguale alla virtuale, cioè il termine che si ottiene facendo $h = h_0$, è dato da:

$$p_a - 1 + (h_0 - 1)\Pi + \frac{h_0(h_0-1)}{2} + \sum_{h=1}^{h=h_0} \frac{h(h-3)}{2}$$

mentre la dimensione effettiva del sistema delle aggiunte d'ordine $n-4+h_0$ è:

$$p_g - 1 + (h_0-1)\Pi + \frac{h_0(h_0-1)}{2} + \sum_{h=1}^{h=h_0} \frac{h(h-3)}{2} - \sum_{h=1}^{h=h_0} \delta_h$$

Ne segue <u>l'uguaglianza fondamentale</u>:

$$p_g - p_a = \sum_{h=1}^{h=h_0} \delta_h$$

Cioè: <u>la differenza fra il genere geometrico ed il genere numerico di una superficie F_n, d'ordine n, è data dalla somma delle deficienze dei sistemi di curve segati sopra un piano generico dalle superficie di ordine $\geq n-3$ aggiunte ad F_n.</u>

La differenza $p_g - p_a$ dicesi <u>irregolarità</u> della superficie.

Se la F_n è <u>regolare</u> le sue superficie aggiunte degli ordini $n-3$, $n-2$, $n-1$, ... segano sopra un piano generico i sistemi (regolari) <u>completi</u> delle curve aggiunte (dello stesso ordine) alla sezione di F_n.

Ma per accertare la regolarità della superficie F_n non è necessario verificare che sia completo <u>ognuno</u> di quei sistemi: basterà verificare la cosa per quelli segati dalle φ_{n-3} e dalle φ_{n-2} (*), poichè se si annulla la deficienza δ_2 lo stesso accade delle deficienze $\delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{h_0}$.

Infatti si consideri il sistema $|C_{n-4+h}|$ segato sopra un piano generico dalle φ_{n-4+h} (con $h>1$) aggiunte alla F_n, e quello $|C_{n-4+(h+1)}|$ segato dalle $\varphi_{n-4+(h+1)}$: quest'ultimo evidentemente contiene il minimo sistema somma di $|C_{n-4+h}|$ e delle rette del piano, onde se $|C_{n-4+h}|$ è completo, cioè se $\delta_h = 0$, è completo anche $|C_{n-4+(h+1)}|$, ossia $\delta_{h+1} = 0$; si applica qui un lemma già precedentemente dimostrato (**), tenendo conto che per $h \geq 1$ i sistemi segati dalle φ_{n-4+h} sono certo regolari.

(*) In realtà anche queste condizioni sono sovrabbondanti, e basterà che si abbia $\delta_1 = 0$ perchè sia $p_g = p_a$: ma di ciò più avanti.

(**) Cfr. § 44, pag. 208.

46 - L'INVARIANZA DEL GENERE NUMERICO.

Della differenza $p_g - p_a$ fra il genere geometrico e il genere numerico di una superficie si può dare un notevole significato, che mette in luce il carattere <u>invariante</u> del p_a.

<u>L'irregolarità $p_g - p_a$ d'una superficie F rappresenta il massimo valore che può assumere la deficienza $\delta(C)$ della serie segata sopra una curva C, dal sistema $|C'|$ aggiunto ad un qualsiasi sistema irriducibile $|C|$ di F.</u>

Per giungere a questo risultato fondamentale conviene premettere alcune considerazioni.

Cominciamo intanto col determinare la <u>dimensione r' del sistema $|C'|$ aggiunto ad un sistema irriducibile $|C|$ di F.</u> Il sistema $|C'|$ sega sopra una C una serie contenuta nella serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, e che avrà, in generale, una deficienza $\delta(C)$, quindi di dimensione:

$$\pi - \delta(C) - 1 .$$

Ora la curva C presenta precisamente $\pi - \delta(C)$ condizioni alle curve C' di $|C'|$ che debbono contenerla; ma poiché il sistema residuo di C rispetto a $|C'|$ è (a meno di eventuali componenti fisse) il sistema canonico $|C'-C|$ di dimensione $p_g - 1$, si ha:

$$r' = p_g + \pi - \delta(C) - 1.$$

Passiamo allora a dimostrare il seguente lemma:

<u>*Dati due sistemi lineari irriducibili $|C|$ e $|C+L|$, e dette $\delta(C)$ e $\delta(C+L)$ le deficienze delle serie segate sopra una curva C e sopra una curva di $C+L$ dai loro sistemi aggiunti rispettivi, si ha:*</u>

$$\underline{\delta(C) \leq \delta(C+L).}$$

Per semplicità di discorso supporremo che i sistemi $|C|$ ed $|L|$ siano ambedue privi di punti base, allora la relazione fondamentale (§ 26)

$$|(C+L)'| = |C'+L|,$$

ci dice che il sistema $|C'|$ è il residuo di $|L|$ rispetto a $|(C+L)'|$:

$$|C'| = |(C+L)' - L| \text{ (*)}$$

(*) Se $|L|$ avesse un punto base (fuori di quelli di $|C|$) questa relazione si modificherebbe con l'aggiunta di tale punto come componente fissa a $|C'|$; ma è inutile tenerne conto perchè ciò non altera la dimensione di $|C'|$.

Ciò permette di calcolare la dimensione di $|C'|$ quando si conosca quella di $|(C+L)'|$, e sia noto il numero delle condizioni che la curva L impone alle $(C+L)'$ che debbono contenerla: questo numero si ottiene aumentando di un'unità la dimensione della serie (non speciale, di deficienza $\varepsilon \geq 0$) che il sistema $|(C+L)'|$ sega sopra la L generica. D'altra parte del sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, sappiamo calcolare la dimensione anche direttamente, come abbiamo visto. Confrontando le due diverse espressioni così trovate per la dimensione di $|C'|$, si ha appunto la diseguaglianza richiesta.

Sviluppiamo questo ragionamento.

Si designino:

con π il genere di $|C|$;

con ω il genere di $|L|$;

con Π il genere di $|C+L|$;

con $\underline{i}$ il numero delle intersezioni (variabili) di una C e di una L, cosicchè

$$\Pi = \pi + \omega + i - 1.$$

La dimensione di $|C'|$ vale:

$$p_g + \pi - \delta(C) - 1 ;$$

e quella di $|(C+L)'|$:

$$p_g + \Pi - \delta(C+L) - 1.$$

Ora essendo (almeno virtualmente):

$$|(C+L)'| = |C+L'|,$$

la serie segata da $|(C+L)'|$ su L è d'ordine:

$$2\omega - 2 + i,$$

dato che $|L'|$ sega su L gruppi canonici; quindi <u>per $i>0$</u> questa serie è non speciale, di dimensione

$$\omega - 2 + i - \varepsilon$$

(dove $\varepsilon \geq 0$ indica l'eventuale deficienza).

Pertanto le condizioni imposte da una curva L alle curve di $|(C+L)'|$ che debbono contenerla, sono:

$$\omega - 1 + i - \varepsilon.$$

Sottraendo questo numero dalla dimensione del sistema $|(C+L)'| = |C'+L|$ si ottiene allora la dimensione di $|C'|$:

$$p_g + \Pi - \omega - \delta(C+L) - i + \varepsilon = p_g + \pi - \delta(C+L) + \varepsilon - 1.$$

Poichè la dimensione di $|C'|$ è pure data da:

$$p_g + \pi - \delta(C) - 1$$

ne segue:

$$(1) \qquad \delta(C) = \delta(C+L) - \varepsilon$$

da cui, essendo $\varepsilon \geq 0$:

$$\delta(C) \leq \delta(C+L).$$

<u>Osservazione</u>. Si è supposto $i>0$, ma, nelle nostre ipotesi, non può essere $i=0$ perchè allora aggiungendo la curva (<u>fondamentale</u>) L al sistema $|C|$ non si otterrebbe un sistema più ampio irriducibile: infatti è noto che se una curva irriducibile, variando con continuità, viene a spezzarsi, essa acquista sempre qualche (<u>nuovo</u>) punto doppio comune alle due parti (⁂).

Si è anche implicitamente ammesso che la L sia una curva irriducibile: se si ha $L=L_1+L_2$ il nostro lemma sussiste ancora, poichè esso si verifica per i sistemi (supposti irriducibili) $|C|$ e $|C+L_1|$; $|C+L_1|$ e $|C+L_1+L_2|$.

(⁂) "Principio di degenerazione". Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., vol. III, pag. 405.

Indichiamo con $|C|$ il sistema completo individuato dalle sezioni piane di F (dello spazio ordinario): se $\underline{h}$ è un numero intero positivo qualunque, si ha:

$$\delta(hC) \leqslant \delta[(h+1)C]$$

cioè il numero $\delta(hC)$ non decresce al crescere di h.

Vogliamo allora dimostrare che <u>la deficienza $\delta(hC)$, quando h cresce, raggiunge un massimo</u>, cosicché per h sufficientemente grande si avrà:

$$\delta(hC) = \delta[(h+1)C].$$

Infatti dall'uguaglianza (1) a cui siamo pervenuti nel corso della dimostrazione del lemma precedente, segue che la deficienza ε_{h+1} della serie

$$g_{2\pi-2+hn}^{\pi-2+hn-\varepsilon_{h+1}}$$

segata dal sistema

$$|[(h+1)C]'| = |C'+hC|$$

sopra una generica curva C (d'ordine n e genere π), è data da

$$\varepsilon_{h+1} = \delta[(h+1)C] - \delta(hC).$$

Ora il sistema $|C'+hC|$ è segnato su F dalle superficie aggiunte $\varphi_{n-4+(h+1)}$ d'ordine $n-4+(h+1)$, e quindi la serie

$$g_{2\pi-2+hn}^{\pi-2+hn-\varepsilon_{h+1}}$$

è segata sulla C dal sistema intersezione delle $\varphi_{n-4+(h+1)}$ col piano di C. Ma sappiamo che, per h sufficientemente alto, tale sistema risulta completo ed è costituito dalla totalità delle curve d'ordine $n-4+(h+1)$ aggiunte a C, e perciò è pure completa la serie

$$g_{2\pi-2+hn}^{\pi-2+hn-\varepsilon_{h+1}}$$

da esse segata su C, cioè

$$\varepsilon_{h+1}=0.$$

Consideriamo ora, sopra la superficie F, un qualunque sistema irriducibile $|K|$: è sempre possibile determinare un numero intero h, sufficientemente grande, in modo che il sistema $|K|$ sia contenuto parzialmente nel sistema $|hC|$, e quindi si ha:

$$\delta(K) \leq \delta(hC)$$

ma $\delta(hC)$, a partire da un certo valore di h, ha un valore massimo costante, onde, come avevamo asserito:

Il sistema $|K'|$, aggiunto ad un qualunque sistema irriducibile $|K|$, sega sopra la curva generica K, una serie la cui deficienza non può superare un certo valore massimo determinato, il quale costituisce, evidentemente, un carattere invariante della superficie F.

Per calcolare questo massimo basta osservare che - come subito si vede - la deficienza ε_{h+1} della serie segata sulla sezione piana generica C dal sistema aggiunto a $|(h+1)C|$, è uguale alla deficienza δ_{h+1} del sistema delle sezioni delle $\varphi_{n-4+(h+1)}$ col piano di C, cioè si ha:

$$(2) \qquad \varepsilon_{h+1} = \delta_{h+1} = \delta[(h+1)C] - \delta(hC);$$

allora - se per $h=h_0$ è $\delta_{h_0+1}=0$ - dalla (2), sommando rispetto ad h da $h=0$ ad $h=h_0$, si ottiene (*):

$$\delta[(h_0+1)C] = \delta(h_0C) = \sum_{h=1}^{h=h_0} \delta_h = p_g - p_a.$$

Se la superficie F è regolare ($p_g = p_a$) si ha sempre $\delta(K)=0$, cioè sopra una superficie regolare, il sistema $|K'|$ aggiunto ad un qualunque sistema lineare irriducibile $|K|$, sega sulla K generica, la serie canonica completa.

(*) Cfr. § 45.

La definizione dell'irregolarità $p_g - p_a$ come valore massimo della deficienza della serie segata sopra la curva generica di un sistema dal suo aggiunto, si estende a qualunque superficie F, anche non appartenente allo spazio ordinario: ipotesi questa che avevamo posto per introdurre il genere p_a come numero virtuale delle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ linearmente indipendenti. Del resto quando si voglia calcolare il p_a per una superficie F di un iperspazio S_r $(r>3)$, facendo uso di quella prima definizione, basterà sostituire alla F la superficie che si ottiene proiettandola in S_3.

Torniamo ad indicare con $|C|$ un qualsiasi sistema lineare irriducibile della superficie F, anche non costituito dalle sezioni piane ma ∞^2 almeno (per modo che i suoi multipli sieno irriducibili); se ε_h è la deficienza della serie segata sopra la C generica dal sistema $|(hC)'|$ aggiunto al sistema $|hC|$, si ha per la (1):

$$\varepsilon_h = \delta(hC) - \delta[(h-1)C],$$

e poichè le deficienze $\delta(hC)$ crescono col crescere di h fino a che non raggiungono il massimo $p_g - p_a$, ne segue che <u>dato un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^2 almeno, è sempre possibile determinare un numero h tale che la serie segata sopra una generica curva C dal sistema $|C'+hC|$, sia completa.</u>

Inoltre: <u>la somma delle deficienze delle serie segate sopra C dai sistemi $|C'|$, $|C'+C|$, $|C'+2C|$, ..., $|C'+(h-1)C|$, non dipende dal sistema $|C|$, ma è un invariante della superficie F essendo uguale alla differenza fra il suo genere geometrico ed il suo genere numerico.</u>

Se la superficie F è regolare ($p_g = p_a$) tutte quelle deficienze sono nulle.

Applichiamo i risultati precedenti al caso delle superficie rigate.

Si è visto che una rigata F_n, d'ordine n, la cui sezione piana C abbia genere π, trasformandosi birazionalmente in un cono dello stesso genere, ha il p_a uguale a $-\pi$ (*). Quindi – essendo $p_g = 0$ – il massimo valore che può

(*) § 45.

assumere la deficienza della serie segata sopra la curva generica di un sistema, dall'aggiunto al sistema stesso, è proprio π. Ora questo massimo è raggiunto dalla deficienza $\delta(C)$ relativa al sistema $|C|$ delle sezioni piane, perchè non esistono superficie d'ordine $n-3$ aggiunte alla F_n (*), onde alla serie da esse segata sopra una C deve attribuirsi la dimensione -1, mentre la serie canonica di C è di dimensione $\pi-1$ (quindi appunto $\delta(C)=\pi$).

Ne segue anche:

$$\delta(C)=\delta(2C)=\dots\dots\dots=\pi.$$

Invece per le deficienze δ_h dei sistemi di curve secondo cui un piano generico interseca i sistemi delle successive aggiunte φ_{n-4+h}, si ha, per la (2):

$$\delta_1=\pi \quad , \delta_2=\delta_3=\dots=\delta_{h_0}=0$$

cioè: <u>le superficie d'ordine $m \geq n-2$, aggiunte alla rigata F_n, segano sopra un piano generico i sistemi completi delle curve aggiunte alla sezione di F_n.</u>

In particolare si considerino le φ_{n-2}: già sappiamo che la curva intersezione (variabile) di una φ_{n-2} con la F_n, è tutta costituita

---

(*) § 34.

di generatrici (*), le quali sono in numero di $2\pi-2+n$ poichè in altrettanti punti la φ_{n-2} incontra la sezione piana C di F_n. Inoltre la serie segata dalle φ_{n-2} sopra una curva generica di $|2C|$, ha la deficienza $\delta(2C)=\pi$, e quindi - detto π_2 il genere di $|2C|$ - la sua dimensione è:

$$\pi_2 - 1 - \pi = \pi - 2 + n.$$

Cioè: <u>il sistema aggiunto al sistema doppio di quello delle sezioni piane, ha la dimensione $\pi-2+n$, ed ogni sua curva è formata da $2\pi-2+n$ generatrici di F_n.</u>

Queste considerazioni si possono invertire e ci consentono così di determinare direttamente il genere numerico di una superficie rigata, senza passare attraverso alla sua trasformazione in un cono.

Per questo si comincî coll'osservare che, nell'ente algebrico semplicemente infinito, di genere π, formato dalle generatrici della rigata, il gruppo delle $2\pi-2+n$ generatrici secondo cui la F_n è incontrata da una φ_{n-2}, individua un sistema completo di curve - pure spezzate in $2\pi-2+n$ generatrici - il quale ha la dimensione $\pi-2+n$. Allora anche il sistema delle φ_{n-2} è di dimensione $\pi-2+n$, e la stessa dimensione ha il siste-

(*) § 34.

ma segato dalle φ_{n-2} sul piano di C (non esistendo superficie aggiunte d'ordine $n-3$): quindi $\delta_2 = 0$.

Abbiamo già visto (*) che l'annullarsi di δ_2 porta pure l'annullamento delle deficienze successive $\delta_3, \delta_4, \ldots\ldots, \delta_{h_0}$; d'altra parte, poichè non esistono φ_{n-3}, al sistema da queste segato sul piano di C si deve attribuire la dimensione -1, mentre il sistema delle aggiunte d'ordine $n-3$ a C è $\infty^{\pi-1}$, quindi si ha $\delta_1 = \pi$; allora dalla relazione fondamentale

$$p_g - p_a = \sum_{h=1}^{h=h_0} \delta_h ,$$

essendo $p_g = 0$, segue:

$$p_a = -\pi .$$

I risultati sopra stabiliti ci portano ad una notevole proprietà.

Poichè il sistema $|C'|$ aggiunto ad un sistema (irriducibile) $|C|$ di genere π, ha la dimensione

$$r' = \pi + p_g - \delta(C) - 1$$

(*) § 45, pag. 231.

ed è $\delta(C) \leq p_g - p_a$, segue:

$$r' \geq p_a + \pi - 1 \; ;$$

e i sistemi $|C|$ per cui la deficienza $\delta(C)$ raggiunge il valore massimo $p_g - p_a$, dànno sistemi $|C'|$ (<u>regolari</u>) pei quali nella formula precedente vale il segno di uguaglianza.

Ma se indichiamo con π' ed n', rispettivamente, il genere ed il grado di $|C'|$, si ha (cfr. pag. 96):

$$n' - \pi' = \pi - 2$$

e quindi:

$$r' \geq p_a + n' - \pi' + 1$$

Questa relazione in seguito si estenderà ad ogni sistema lineare, salvo un'opportuna modificazione per il caso dei sistemi contenuti nel sistema canonico (<u>sistemi speciali</u>): cosicchè essa viene a costituire per la teoria dei sistemi lineari sopra una superficie, una proposizione analoga a quella espressa dal notissimo teorema di Riemann-Roch per le serie lineari di punti sopra una curva.

Il <u>teorema di Riemann-Roch</u>, stabilito per i sistemi aggiunti, si estende intanto a tutti i sistemi $|C|$, anche riducibili, che contengono <u>parzialmente</u> il sistema canonico, o il sistema $|K'|$ aggiunto ad un sistema irriducibile $|K|$ (il che dà significato alla cosa pure nel caso $p_g = 0$): cioè - come diremo per brevità - ai <u>sistemi più ampi del sistema canonico.</u>

Per semplicità di discorso parliamo di sistemi privi di punti base. Pongasi dapprima che $|C|$ sia irriducibile, e contenga dentro di sè il sistema $|K'|$ aggiunto ad un $|K|$ almeno doppiamente infinito; inoltre il sistema residuo

$$|L| = |C - K'|$$

abbia dimensione almeno uguale ad uno. In tal caso si ha:

$$|C| = |K' + L| = |(K+L)'|,$$

cioè il sistema $|C|$ è l'aggiunto di $|K+L|$, il quale, nelle nostre ipotesi, è irriducibile; in conseguenza sussiste certo per $|C|$ il teorema di Riemann-Roch relativo ai sistemi aggiunti, ossia, designando $\underline{r}$ la dimensione, $\underline{\pi}$ il genere e $\underline{n}$ il grado di $|C|$, si ha:

$$(3) \qquad r \geqslant p_a + n - \pi + 1.$$

Ora sia $|C|$ un sistema, comunque riducibile, <u>più ampio</u> del sistema canonico. Sommandogli un'opportuna curva L, possiamo ottenere un sistema irriducibile $|C+L|$ che soddisfi alle condizioni precedenti: allora per $|C+L|$ avrà luogo la (3), cioè - indicando con R, N e Π, rispettivamente, la dimensione, il grado ed il genere di $|C+L|$ - avremo:

$$R \geq p_a + N - \Pi + 1.$$

Ma sopra la curva generica L di $|L|$ (che è lecito supporre irriducibile), il sistema $|C+L|$ (essendo $|C|$ più ampio del sistema canonico) sega una serie non speciale (*), la cui dimensione è perciò non maggiore di

$$m + i - \omega,$$

essendo $\underline{i}$ il numero dei punti comuni ad una C e ad una L, ed $\underline{\omega}$ e $\underline{m}$ il genere ed il grado di L. Allora la curva L presenta al massimo

$$m + i - \omega + 1$$

condizioni alle curve di $|C+L|$ che debbano con-

(*) Il sistema canonico sega su L la serie residua della serie caratteristica (§ 28): ora $|C|$ contiene il sistema canonico in modo che vi è una curva residua, che può supporsi non fondamentale per $|L|$; dunque $|C+L|$ sega su L una serie contenente la serie canonica. Anche nel caso $p_g = 0$, quando $|C|$ contenga un $|K'|$, vale la stessa conclusione, poichè $|C+L|$ contiene $|K'+L| = |K+L'|$.

tenerla. Ne segue:

$$r \geq R - (m+i-\omega+1)$$

e perciò anche:

$$r \geq p_a + N - \Pi + 1 - (m+i-\omega+1)$$

ma è:

$$\Pi = \pi + \omega + i - 1$$
$$N = n + m + 2i$$

e quindi:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1$$

che è la nostra (3), c. d. d.

Abbiamo fino a qui parlato di sistemi lineari privi di punti base (almeno virtualmente); ma, a prescindere da una discussione più minuta dei ragionamenti precedenti, si può osservare che la (3), essendo stabilita per sistemi $|C|$ privi di punti base, si dimostra vera per i sistemi che se ne deducono con l'imposizione di punti base di molteplicità i_1, i_2, ecc..

Infatti l'imposizione di un punto base i-plo, diminuisce:

il grado $\underline{n}$ di $\underline{i}$;

il genere $\underline{\pi}$ di $\frac{i(i-1)}{2}$;

e porta $\frac{i(i+1)}{2}$ condizioni lineari che in generale diminuiranno di altrettanto la dimensione $\underline{r}$: solo nel caso di condizioni lineari non indipendenti si potrebbe ottenere una dimensione maggiore.

In ogni caso dunque il sistema che possiede dei punti base di molteplicità qualunque, avrà i caratteri $\bar{r}$, $\bar{n}$, $\bar{\pi}$, con

$$\bar{r} \geq p_a + \bar{n} - \bar{\pi} + 1 .$$

I sistemi lineari (<u>non speciali</u>) per cui sussiste l'uguaglianza, li abbiamo detti <u>regolari</u>; questa definizione abbraccia quella dei sistemi lineari di curve piane, definiti dai punti base (<u>cioè completi</u>), alle cui curve i punti base stessi presentano condizioni indipendenti; per essi la (3) si era già stabilita direttamente (*).

(*) Cfr. § 44.

Nota.

Le conclusioni cui siamo giunti possono essere precisate ulteriormente in grazia di una importante proprietà espressa dal Teorema di Picard, il quale asserisce che il sistema $|C'|$ aggiunto ad un qualunque sistema lineare $|C|$, è sempre regolare; o, ciò che è lo stesso, la deficienza della serie segata sopra la curva generica di un sistema lineare (irriducibile) $|C|$ dal suo aggiunto $|C'|$, è data da $\delta(C) = p_g - p_a$.

Si ha così che, mentre i mezzi di cui fino a qui disponiamo permettono soltanto di asserire che $p_g - p_a$ è il massimo valore che può assumere $\delta(C)$, in realtà accade che quel massimo è sempre raggiunto.

Sotto forma proiettiva, il teorema di Picard enuncia che per una superficie F, d'ordine n, dello spazio ordinario, le formule di postulazione pel calcolo delle superficie aggiunte valgono a partire dall'ordine $n-3$; cioè le aggiunte φ_m, per $m \geq n-2$, segano sopra un piano generico il sistema lineare completo delle curve aggiunte alla sezione di F; con le notazioni del § 45:

$$\delta_2 = \delta_3 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

e quindi $h_0 = 1$.

La dimostrazione del teorema precedente - da noi verificato nel caso delle superficie rigate - è stata data da Picard per via trascendente nel 1905 (*); più tardi Severi (**) ha stabilito la cosa per via geometrica facendo uso del sistema continuo, non lineare, di curve appartenenti alle superficie non regolari, del quale dovremo parlare più innanzi.

Il teorema di Picard comprende in particolare un criterio per caratterizzare le superficie regolari:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia regolare, è che il sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$, segni la serie canonica completa sopra la C generica.

Questa proposizione era stata già dimostrata direttamente in base al teorema che assegna il limite superiore della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare (cfr. § 49) (***).

(*) Cfr. Picard E.: "Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variablex indépendantes" - Journal für Math. (Crelle), Bd. 129 (1905). Cfr. anche Piccard e Simart op. cit., t. II, chap. XIII, n° 16.

(**) Cfr. Severi F.: "Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica" - Rend. R. Accad. dei Lincei; s. 5ª, vol. XVII, 2° sem. 1908, pag. 465.

(***) Castelnuovo G.: "Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica", § 26 - Annali di Matematica, Serie II, tomo XXV, 1897.

47.- ELIMINAZIONE DELLE CURVE ECCEZIONALI.

In questo paragrafo tratteremo il problema dell'eliminazione delle curve eccezionali di una superficie; ricercheremo cioè quando sia possibile trasformare una superficie F possedente delle curve eccezionali, in un'altra che ne sia priva.

La questione si risolverà in senso affermativo per tutte le superficie sulle quali non sia possibile costruire un sistema lineare tale che la differenza fra il suo grado e il doppio del genere abbia un valore tanto grande quanto si voglia (in particolare, per le superficie che hanno il genere geometrico, o qualche plurigenere, maggiore di zero). In seguito troveremo che le superficie su cui invece esiste un siffatto sistema, sono solo quelle birazionalmente identiche a rigate: quindi soltanto per queste non è possibile l'eliminazione delle curve eccezionali.

Il risultato, oltre all'interesse che offre di per sè, è importante perchè ci consente di assumere come <u>modello proiettivo</u> di una classe di superficie, non riducibili a rigate, una superficie priva di curve eccezionali: il che ne semplifica lo studio.

Si abbia una superficie F (che supporremo priva di singolarità) appartenente ad un conveniente iperspazio S_r: ricordiamo che una curva ω di F dicesi <u>eccezionale</u> se è possibile trasformare birazionalmente la F in una superficie F' per modo che alla ω corrisponda su questa l'intorno di un punto semplice O' (§ 5).

A seconda del loro diverso comportamento rispetto alle trasformazioni che le cambiano in punti, le curve eccezionali si distinguono in due tipi: se nella trasformazione non si produce nessuna curva eccezionale come trasformata di un punto semplice di ω, la ω dicesi <u>curva eccezionale di prima specie</u>; quando invece accada che - necessariamente - nel passare dalla ω di F al punto O' di una trasformata F', uno o più punti di ω si mutino in curve (eccezionali) di F', la ω si dirà <u>curva eccezionale di seconda specie</u>.

Un esempio di curve eccezionali di questo secondo tipo è dato dalle generatrici di una superficie rigata: infatti se vogliamo trasformare la rigata in una superficie F' sulla quale ad una generatrice ω di F corrisponda un punto O', occorre assumere su F un sistema trasformante di curve $|C|$ che non abbia intersezioni variabili con ω; ma allora $|C|$ ha certo almeno un punto base O sopra ω, e, nella trasformazione, O si muta in una nuova curva eccezionale.

Altri esempi di curve eccezionali di seconda specie possono darsi sul piano: qui una retta costituisce sempre una curva eccezionale, la quale può mutarsi in un punto a condizione però che due almeno dei suoi punti vengano mutati in rette, come accade per una opportuna trasformazione quadratica. Anche una conica costituisce una curva eccezionale di seconda specie, ma per cambiarla in un punto occorre una trasformazione che muti almeno cinque punti della conica in rette o curve.

Queste osservazioni sono in rapporto con i caratteri della curva eccezionale. Mentre il genere ρ di una curva eccezionale ω, sia <u>virtuale</u> che effettivo, vale sempre $\rho = 0$ (poichè i punti della curva ω rispondono all'intorno di un punto semplice O', e un punto doppio di ω rappresenterebbe necessariamente una coppia di punti sovrapposti in un punto doppio della superficie), invece il grado ν della curva eccezionale vale in generale $\nu=-1$ per le curve eccezionali di prima specie, e $\nu \geq 0$ per le curve eccezionali di seconda specie. Che per le curve eccezionali di prima specie si abbia, in generale, $\nu=-1$ si è già visto al § 20 (qualche apparente eccezione verrà esaminata più avanti).

Invece il grado di una curva eccezionale di seconda specie vale $\nu \geq 0$ perchè essa deve ritenersi come la somma di due o più componenti eccezionali connesse fra loro: (*) per esempio la generatrice della rigata ha evidentemente il grado zero facendo parte di un fascio (privo di punti base); il suo grado $\nu=0$ si può anche valutare considerando la generatrice come somma di due parti eccezionali, una costituita dalla generatrice stessa privata di un punto e l'altra dall'intorno di questo punto, le quali in vero possono ritenersi individualmente ciascuna come una curva eccezionale di prima specie sopra una superficie trasformata. Allora esprimendo il grado della curva che si ottiene come somma di due altre di grado -1 con un punto a comune, risulta:

$$\nu = (-1) + (-1) + 2 = 0 .$$

(*). Ognuna delle quali, singolarmente presa, può ritenersi di prima specie.

Passando al secondo esempio sopra addotto, la retta del piano costituisce una curva eccezionale di grado $\nu = 1$ (tale infatti è il grado della rete delle rette del piano): si può valutare ν ricordando che la retta si muta in un punto con una trasformazione quadratica che ha due punti base sopra di essa. Cosicchè la retta medesima - chiamiamola $\underline{a}$ - si può riguardare come somma della $\underline{a}$ privata di due punti B e C - e in tal guisa ridotta ad una curva eccezionale di prima specie - e delle curve infinitesime B e C; siccome $\underline{a}$ e B, ed anche $\underline{a}$ e C, hanno un punto in comune, avremo:

$$\nu = (-1) + (-1) + (-1) + 2 + 2 = 1.$$

In modo affatto analogo si potrà calcolare il grado $\nu = 4$ della curva eccezionale di seconda specie che è costituita da una conica nel piano.

Saremmo condotti a concludere che - come avevamo asserito - le curve eccezionali di prima specie sono di grado $\nu = -1$ e quelle di seconda specie di grado $\nu \geq 0$, ma un'apparente eccezione deve un momento arrestarci, obbligandoci ad un esame approfondito delle circostanze possibili.

Sopra una superficie F' si consideri un

punto semplice O' ed un secondo punto O'_1 infinitamente vicino ad O': e trasformiamo la F' in una F tale che O' ed O'_1 si cambino in due curve eccezionali ω ed ω_1, aventi necessariamente un punto in comune. Allora l'intorno di O' è rappresentato su F dall'insieme delle due curve ω ed ω_1 le quali costituiscono un'unica curva fondamentale monovalente per il sistema trasformato di quello delle sezioni iperpiane di F' (cfr. § 38), quindi la $\omega+\omega_1$ si deve riguardare come una sola curva eccezionale di prima specie (riducibile). Ad essa compete il grado -1; e poichè anche la ω_1 - essendo birazionalmente identica all'intorno di O'_1 - ha il grado -1, il grado ν di ω è dato da:

$$\nu + (-1) + 2 = -1$$

cioè si ha: $\nu = -2$.

Si noti che la ω non può ora considerarsi individualmente come una curva eccezionale di prima specie, finchè non sia completata dalla ω_1; cosicchè la meraviglia che si potrebbe provare incontrando una curva eccezionale ω di grado minore di -1, cessa subito quando si sia osservato che questa curva è in realtà una curva eccezionale privata di qualche punto, e quindi necessariamente componente di una curva eccezionale le cui parti rispondono, sopra la superficie trasformata F', a punti infinitamente vicini al punto O' omologo di ω. Pertanto fra le curve che, insieme ad ω, costituiscono una intera curva eccezionale di prima specie, ve ne sarà certo qualcuna che individualmente formerà una curva eccezionale di prima specie di grado -1: ciò accadrà per quella o quelle componenti che rispondono agli ultimi punti infinitamente vicini ad O' che figurano come base per il sistema trasformante.

Dopo queste premesse, passiamo a considerare una superficie F (priva di singolarità) che contenga una curva eccezionale di prima specie ω, irriducibile, di genere (virtuale ed effettivo) $\rho = 0$ e di grado $\nu = -1$.

Si prenda allora su F un sistema lineare $|C|$, regolare, irriducibile e privo di punti base, di genere π e grado n, tale che le curve C incontrino la ω in un certo numero i $(i > 0)$ di punti. Dimostriamo che sommando la ω a $|C|$ si ottiene un sistema completo regolare $|C+\omega|$, più ampio di $|C|$, privo di punti base su F, le cui curve intersecano ω in $i-1$ punti.

Infatti se R, Π ed N sono, rispettivamente, la dimensione, il genere ed il grado di $|C+\omega|$, essendo $|C|$ regolare, si ha:

$$R \geq p_a + N - \Pi + 1,$$

ma è:

$$N = n + 2i - 1$$
$$\Pi = \pi + i - 1$$

e quindi:

$$R \geqslant p_a + n - \pi + i + 1,$$

ed anche:

$$R \geqslant r + i,$$

avendo indicato con r la dimensione di $|C|$, ed essendo per ipotesi:

$$r = p_a + n - \pi + 1.$$

Consideriamo ora la serie segata sulla curva razionale ω dal sistema $|C+\omega|$: essa ha l'ordine $i+\nu = i-1$, e la sua dimensione è al massimo uguale ad $\underline{i-1}$. Ne segue:

$$R - i \leqslant r,$$

onde necessariamente:

$$R = r + i.$$

Dunque se la ω non è fondamentale per $|C|$ - cioè se si ha $i>0$ - il sistema $|C+\omega|$ è regolare e più ampio di $|C|$, come avevamo asserito. D'altra parte si ha pure che il sistema $|C+\omega|$ sega su ω una g^{i-1}_{i-1}, e quindi $|C+\omega|$ è privo di punti base su ω, e perciò anche su tutta la F, non essendovi punti base per $|C|$.

Questa proprietà ci permette di costruire subito un sistema lineare di curve su F, per mezzo del quale la F si trasforma in una superficie F' su cui alla curva eccezionale ω corrisponde un punto semplice.

Infatti se al sistema $|C+\omega|$ si torna a sommare la ω, si ottiene nuovamente un sistema regolare ed irriducibile $|C+2\omega|$, che sega su ω una serie d'ordine $i-2$: così continuando, perverremo infine ad un sistema $|C+i\omega|$, anche esso irriducibile e regolare, le cui curve non incontreranno più la ω. Cioè per il sistema $|C+i\omega|$ la curva ω sarà fondamentale, e quindi sopra la superficie F' immagine di $|C+i\omega|$, la ω si muterà in un punto: questo dovrà essere semplice, perchè le curve del sistema $|C+(i-1)\omega|$ - residuo di ω rispetto a $|C+i\omega|$ - incontrano la ω in un sol punto (*). Si noti inoltre che il sistema $|C+i\omega|$ non ha punti base su F, quin-

---

(*) Si osservi che da questo ragionamento segue che <u>le curve di grado -1 e genere zero sono sempre eccezionali</u> (di prima specie) di la trasformazione che porta da F ad F' è priva di punti fondamentali, e perciò non genera curve eccezionali (nè singolarità) su F'.

Allora se la superficie F possiede un numero finito di curve eccezionali di prima specie, non connesse fra loro, applicando a ciascuna di esse il procedimento precedente si perviene ad una superficie F', in corrispondenza birazionale con F, priva di curve eccezionali. Ciò non è più possibile quando la F possieda invece infinite curve eccezionali di prima specie; però, in tal caso, possiamo fare una notevole osservazione: la differenza $N - 2\Pi$ tra il grado N ed il doppio del genere Π del sistema $|C+\omega|$ sopra considerato, supera sempre (di un'unità) la differenza analoga $n - 2\pi$ per il sistema $|C|$:

$$N - 2\Pi > n - 2\pi$$

cosicchè se su F esistono infinite curve ω, si potrà pervenire a costruire un sistema lineare di curve per cui la differenza suddetta sia tanto grande quanto si vuole. Lo stesso si dica per il caso in cui sopra la F esista almeno una curva eccezionale di seconda specie $\bar{\omega}$, di genere $\rho = 0$ e ordine $\nu \geq 0$, dato che ancora si ha per il sistema $|C+\bar{\omega}|$:

$$N-2\Pi > n-2\pi.$$

Dunque, riepilogando: o è possibile eliminare con una opportuna trasformazione birazionale, le curve eccezionali della superficie F, oppure sopra di essa si può sempre costruire un sistema per il quale la differenza tra il grado ed il doppio del genere, sia arbitrariamente grande.

È importante notare che se la superficie F ha il genere geometrico, o uno almeno dei plurigeneri, maggiore di zero, sopra di essa non possono esistere sistemi lineari che abbiano il grado n e il genere π tali che sia:

$$n > 2\pi - 2 \quad (*)$$

sicchè la differenza $n - 2\pi$ si mantiene sempre negativa.

Ne segue che le curve eccezionali si possono certo eliminare dalle superficie per cui il genere geometrico o i plurigeneri non sono tutti nulli.

Per contro è chiaro che tale eliminazione è impossibile per le superficie rigate e, in particolare, per il piano, poichè si hanno sopra di esse infinite curve eccezionali. Più avanti perverremo ad un risultato più espressi-

(*) Cfr. § 28.

vo: troveremo infatti che le superficie contenenti un sistema di dimensione $r \geq 0$, di genere $\pi > 0$ (oppure con $\pi = 0$ ma $r \geq 1$) e di grado $n > 2\pi - 2$, sono riferibili a rigate (in particolare: al piano). Cosicchè potremo concludere che le rigate costituiscono la sola famiglia di superficie da cui non è possibile eliminare le curve eccezionali.

48- IL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH PER LE SUPERFICIE.

Nel §46 abbiamo visto che, sopra una superficie di genere numerico p_a, un sistema più ampio del sistema canonico (cioè contenente il sistema canonico, o l'aggiunto ad un sistema irriducibile), di ordine n e genere π, ha la dimensione:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 .$$

Questa relazione - che ci ha consentito di risolvere l'importante problema di eliminare le curve eccezionali (*) - si è detta costituire il *teorema di Riemann-Roch per le superficie*, in analogia a quella che lega i caratteri di una serie lineare di punti sopra una curva. Già abbiamo accennato che essa si può estendere ad *ogni* sistema lineare, anche contenuto nel sistema canonico (*sistema speciale*) o comunque riducibile.

Vogliamo ora mostrare come si giunga a questo risultato.

Conviene perciò introdurre la distinzione dei sistemi lineari in *sistemi speciali* e *non speciali*, a seconda che sono contenuti o no nel

(*) Cfr. §47.

sistema canonico.

Se un sistema $|C|$ è contenuto nel sistema canonico, per modo che abbia un sistema residuo di dimensione $i-1$ (cosicchè $\underline{i}$ sarà il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti, che contengono una curva C), allora il sistema $|C|$ si dice _speciale_, con _indice di specialità_ i. Quando invece non esista nessuna curva canonica di cui faccia parte la C, il sistema $|C|$ dicesi _non speciale_, ed è $i=0$.

Per il sistema canonico si ha evidentemente $i=1$; ed è chiaro che la dimensione, il genere ed il grado di un sistema speciale non possono superare i corrispondenti caratteri del sistema canonico, mentre per i sistemi non speciali la dimensione, il genere ed il grado non hanno limiti superiori.

Se poi la superficie è di genere geometrico nullo, sopra di essa ogni sistema lineare va considerato come non speciale ($i=0$).

Il _teorema di Riemann-Roch_, nella sua forma più generale, dirà allora che _sopra una superficie di genere numerico_ p_a, _ogni curva, riducibile o irriducibile, di genere e grado virtuali_ π _ed_ n, _e di indice di specialità_ i, _appartiene ad un sistema completo di dimensione_:

$$(1) \qquad \underline{r \geq p_a + n - \pi + 1 - i};$$

in particolare la curva apparterrà certo ad un sistema lineare effettivo (di dimensione >0) ove sia

$$p_a + n - \pi + 1 - i > 0.$$

Ne segue come corollario, che se tra i caratteri di un sistema lineare passa la relazione:

$$\underline{r - n + \pi - 1 < p_a},$$

il sistema è certo non speciale; ma non inversamente.

Un sistema non speciale ($i=0$) per cui nella (1) valga il segno d'eguaglianza, dicesi regolare (*).

Riferiamoci come modello ad una superficie F_n, di un certo ordine n, appartenente allo spazio ordinario e che non abbia altre singolarità all'infuori di una linea doppia con i soliti punti tripli (cfr. § 3). Sia $|C|$ il sistema completo delle sezioni piane di F_n, e sia C_h la curva (di $|hC|$) intersezione della F_n con una generica superficie F_h d'ordine h ($h \geq 1$).

(*) Cfr. § 46.

Stabiliamo alcune proprietà ausiliarie:

a) *Ogni superficie $F_m(x, y, z) = 0$ (non contenente il piano $z = 0$) che passi per i punti del gruppo G sezione di C_h col piano $z=0$, ha un'equazione della forma:*

$$F_m = A.F_n + B.F_h + z.F_{m-1}$$

essendo F_{m-1} una superficie d'ordine $m-1$, ed A, B polinomi in x, y di grado $m-n$ e $m-h$, rispettivamente.

Infatti, intersecando le superficie F_m, F_n ed F_h col piano $z = 0$, si ha che la curva

$$F_m(x, y, 0) = 0$$

passa per i punti G comuni alle due curve

$$F_n(x, y, 0) = 0 \quad , \quad F_h(x, y, 0) = 0,$$

cosicché, per il noto teorema dell'$Af + B\varphi$ di Noether, si ha:

$$F_m(x, y, 0) = A(x, y).F_n(x, y, 0) + B(x, y).F_h(x, y, 0),$$

cioè, la funzione

$$F_m(x, y, z) - A(x, y).F_n(x, y, z) - B(x, y).F_h(x, y, z)$$

si annulla per $z=0$, e quindi è divisibile per z:

$F_m(x,y,z) =$

$$= A(xy) \, . \, F_n(xyz) + B(xy) \, . \, F_h(xyz) + z \, . \, F_{m-1}(x,y,z).$$

<u>Corollario</u>: Se la F_m, oltre a passare per la sezione piana G della curva C_h, passa per i suoi punti doppi e la sega ulteriormente in un gruppo G', anche la F_{m-1} passerà per i medesimi punti doppi e per G'.

Ne segue:

b) <u>Sopra la curva C_h</u> (intersezione completa di F_n con una F_h) <u>le superficie F_m, d'ordine m qualunque, passanti per i suoi punti doppi, segano - fuori di essi - una serie lineare completa</u>.

Questa proprietà si è già stabilita per le superficie d'ordine sufficientemente alto (*), per dimostrarla in generale basterà far vedere che se essa sussiste per le superficie d'ordine <u>m</u>, si verifica pure per quelle d'ordine $m-1$. Infatti sia g_ν^s la serie completa segata sulla C_h dalle F_m passanti per i suoi punti doppi, e indichiamo ancora con G il gruppo sezione della C_h con un piano generico (che possiamo sempre assumere come piano

(*) Cfr. § 42.

$z=0$). Le F_m passanti per G segano su C_h (fuori di G) la serie completa $|g_\nu - G|$ residua di G rispetto alla g_ν^s: ma la proprietà a) col suo corollario ci dice che per ogni gruppo di tale serie passa pure una superficie d'ordine $m-1$, cioè la $|g_\nu - G|$ è pure segata su C_h dalle F_{m-1} passanti per i punti doppi di C_h.

Dalle precedenti proposizioni segue il <u>lemma di Severi</u> (*):

<u>Per $h>n-4$, le superficie φ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F_n - supposte esistenti ($p_g>0$) - segano sopra la curva C_h una serie completa. Se $p_g=0$ la serie caratteristica del sistema $|C_h|=|hC|$ è non speciale.</u>

Nel caso in cui $p_g>0$, si osservi che le superficie d'ordine $n-4$ passanti per i punti doppi di C_h, i quali sono situati sulla curva doppia di F_n, contengono per intero questa linea se $h>n-4$, e perciò sono aggiunte alla F_n; quindi dalla b) segue l'asserto.

Se la serie caratteristica di $|hC|$ (con $h>n-4$) è speciale, esistono certamente superficie d'ordine $n-4$ aggiunte alla F_n, onde è $p_g>0$. Infatti, sopra C_h, la serie canonica è segata dalle superficie d'ordine $n+h-4$ pas-

---

(*) Cfr. Severi F.: "Sulla serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica" (Rend. Acc. Lincei, vol. XII, s.5, 1903).

santi per i punti doppi di C_h (*), e quindi se esiste la serie residua della serie caratteristica rispetto alla serie canonica (che è pure residua di un gruppo di h sezioni piane di C_h), questa - per la proprietà a) - è segnata su C_h da superficie d'ordine $n-4$ passanti per i punti doppi di C_h, le quali, contenendo per intero la curva doppia di F_n, sono sue aggiunte, onde $p_g > 0$. Pertanto se $p_g = 0$ la serie caratteristica di $|hC|$ è necessariamente non speciale.

Avanti di passare alla dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, conviene premettere un secondo

Lemma: (**) <u>Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile</u> che, per semplicità di discorso, supponiamo semplice e ∞^3 almeno, <u>privo di curve fondamentali proprie</u>, allora <u>il multiplo $|hC| = |C_h|$ di $|C|$, per h abbastanza alto, è sempre regolare</u>, cioè la sua dimensione è data precisamente dall'uguaglianza (***):

(*) Cfr. Enriques - Chisini: op. cit., libro V, cap. V, §47 (vol. III, pag. 528).

(**) Questo lemma completa il teorema di Riemann-Roch per i sistemi abbastanza ampi, ed in tal senso si aggiunge agli sviluppi del § 46.

(***) Cfr. § 46.

$$r_h = p_a + n_h - \pi_h + 1,$$

designando n_h e π_h il genere e il grado di $|C_h| = |hC|$.

Si può supporre che la superficie F_n abbia come sezioni piane ∞^3 curve C. Si considerino allora le superficie F_h, d'ordine h assai alto, che passano per una curva canonica K, intersezione di F_n con una φ_{n-4} aggiunta (*): queste segheranno sopra F_n curve del sistema lineare irriducibile $|L| = |hC - K|$; e il sistema $|hC|$ appare come aggiunto del sistema <u>irriducibile</u> $|L|$.

Siccome $|L|$ è ampio quanto si vuole (e contiene perciò dentro di sè qualsiasi multiplo di un sistema lineare qualunque), risulta dal § 46 che la deficienza $\delta(L)$ della serie segata sopra una L da $|hC|$ raggiunge il massimo, ossia $|hC|$ è regolare (**).

(*) Si suppone implicitamente $p_g > 0$; se fosse $p_g = 0$ basta modificare il ragionamento considerando una φ_{n-3} al posto della φ_{n-4}.

(**) Giova chiarire dove si fa uso dell'ipotesi che $|C|$ sia privo di curve fondamentali proprie. Se esistono curve siffatte, la F_n possiede punti multipli propri che influiscono sulle aggiunte φ_{n-4}, e quindi il sistema di cui $|hC|$ è l'aggiunto, non è più irriducibile. È facile vedere che in tal caso il sistema $|hC|$ ha una <u>sovrabbondanza</u> maggiore od uguale alla somma dei generi delle curve fondamentali proprie. Vedi anche Enriques: "Ricerche di Geometria sopra le superficie algebriche", cap. V.

Ciò posto dimostriamo il teorema di Riemann-Roch per un sistema lineare $|C|$, irriducibile o riducibile, con i caratteri n, π e i $(i \geq 0)$: si tratta dunque di riconoscere che la dimensione r di $|C|$ è:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i.$$

Qui converrà supporre che la nostra superficie F (dotata di singolarità normali, nello spazio ordinario) abbia un certo ordine N (in generale diverso da n) e che le sue sezioni piane appartengano ad un sistema completo $|L|$, di genere Π.

Le superficie F_h, d'ordine h abbastanza alto, segheranno sopra F_N un sistema di curve $|L_h| = |hL|$, di grado N_h e di genere Π_h: e il sistema completo $|L_h|$ sarà regolare. Pertanto - come è noto - sommando $|C|$ ad $|hL|$ si otterrà certo un sistema irriducibile (*).

Poichè h è arbitrariamente grande, è lecito supporre che il numero delle intersezioni di L_h con la curva C sia $s > 2\pi - 2 - n$, ed

---

(*) La dimensione di $|hL + C|$ supera quella di $|hL|$ di almeno $n - \pi + s + 1$ unità (essendo s il numero delle intersezioni di C con una L_h).

anzi che la diseguaglianza analoga sussista in rapporto ai caratteri di ogni componente di C, qualora C sia riducibile: ne deriva la conseguenza che se una curva canonica K passa per il gruppo G delle intersezioni di C con L_h, essa dovrà contenere (in ogni caso) la curva C.

Potremo valutare la dimensione r del sistema $|C|$, considerando $|C|$ come residuo di una curva L_h rispetto al sistema $|C+hL|$: perciò bisognerà conoscere la dimensione $\bar{R}$ di $|C+hL|$ di cui abbiamo un limite inferiore dal teorema di Riemann-Roch per i sistemi abbastanza ampi (§ 46); e poi la dimensione $\underline{d}$ della serie, d'ordine $s+N_h$, segata da $|C+hL|$ su L_h. Infatti si ha:

$$(2) \qquad r = \bar{R} - d - 1 .$$

Della dimensione d si può facilmente determinare un limite superiore poichè si ha che <u>la serie $g^d_{s+N_h}$ segata da $|C+hL|$ su L_h, ha l'indice di specialità uguale a quello del sistema $|C|$.</u>

Infatti si consideri un gruppo H della serie caratteristica di $|L_h|$, e ad esso si sommi il gruppo G dei punti comuni a C e a L_h: se il gruppo G+H (di $g^d_{s+N_h}$) appartiene ad un gruppo canonico di L_h esiste (per il lemma di Severi) una curva canonica passante per G, la quale - avendo in comune con C un numero di punti maggiore di $2\pi-2-n$ - contiene per intero la curva C (come già sopra abbiamo notato); ed inversamente, ogni curva canonica contenente la C sega su L_h un gruppo (di cui fa parte G) che insieme con H dà un gruppo canonico. Cosicchè dunque i gruppi residui di G + H rispetto alla serie canonica, sono appunto ∞^{i-1} come le curve canoniche di cui fa parte la C.

Ne segue allora:

$$d \leq s + N_h - \Pi_h + i$$

e quindi, per la (2):

$$(3) \qquad r \geq \bar{R} - (n + N_h - \Pi_h + i) - 1$$

Ma se il sistema $|C+hL|$ ha l'ordine $\bar{N}$ ed il genere $\bar{\Pi}$, è:

$$\bar{R} \geq p_a + \bar{N} - \bar{\Pi} + 1,$$

con:

$$\bar{N} = n + N_h + 2s$$

$$\bar{\Pi} = \pi + \Pi_h + s - 1.$$

Sostituendo nella (3), si ottiene:

$$r \geq p_a + n - \pi + 1 - i,$$

che è la richiesta relazione fondamentale (1).

La relazione fondamentale (1) si può presentare sotto forma d'uguaglianza, introducendo la differenza $\omega \geq 0$ tra il primo e il secondo membro della (1) stessa. Si ha allora:

$$(4) \qquad r = p_a + n - \pi + 1 - i + \omega.$$

Il numero, positivo o nullo, $\underline{\omega}$ dicesi <u>sovrabbondanza del sistema |C|</u>. Per un sistema regolare è dunque, oltre a $i = 0$, anche $\omega = 0$.

Per il sistema canonico $|K|$ si ha dalla (4):

$$\omega = p_g - p_a + (p^{(1)} - 1 - p^{(2)})$$

ed essendo (§ 29):

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

segue che <u>la sovrabbondanza del sistema canonico è data dalla irregolarità $p_g - p_a$ della superficie</u>.

L'espressione

$$r' = p_a + n - \pi + 1 - i$$

si suole riguardare come <u>dimensione virtuale</u> del sistema $|C|$, essa è legata alla dimensione effettiva dalla formula:

$$r = r' + \omega .$$

In particolare ritroviamo che <u>la dimensione virtuale del sistema canonico $|K|$ è $r' = p_a - 1$</u> (*).

Le definizioni di sovrabbondanza, di sistema regolare e di dimensione virtuale sopra introdotte, comprendono come casi particolari quelle date per un sistema di curve piane ($p_a = i = 0$), e la (4) diviene:

$$r = n - \pi + 1 + \omega ,$$

relazione che già abbiamo stabilito direttamente (**).

Se il sistema $|C|$ è speciale, d'indice di specialità i ($i > 0$), il sistema

---

(*) Cfr. § 45.

(**) Cfr. § 44.

$$|C_1| = |K - C|$$

ha - per definizione - la dimensione $r_1 = i - 1$, e quindi la (4) ci dà:

$$r_1 = p_a + n - \pi - r + \omega .$$

D'altra parte il sistema $|C_1|$ ha l'indice di specialità $r+1$, onde se indichiamo con n_1, π_1 ed ω_1, rispettivamente, il grado, il genere e la sovrabbondanza di $|C_1|$, è:

$$r = p_a + n_1 - \pi_1 - r_1 + \omega_1 .$$

Da questa uguaglianza, sottratta dalla precedente, segue:

$$(5) \qquad n - \pi + \omega = n_1 - \pi_1 + \omega_1 .$$

Si osservi ora che avendosi $C + C_1 = K$, una curva C ed una C_1 hanno precisamente

$$2\pi - 2 - 2n$$

intersezioni variabili, e quindi per le note formule che ci danno il genere ed il grado del sistema somma di due dati (*), dalla relazione $|C + C_1| = |K|$ si deduce:

(*) Cfr. § 17.

$$p^{(1)} = \pi + \pi_1 + 2(\pi - 1 - n) - 1 = 3\pi + \pi_1 - 2n - 3$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = n + n_1 + 4(\pi - 1 - n) = n_1 - 3n + 4\pi - 4$$

da cui:

$$(6) \quad \begin{cases} \pi_1 = p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n \\ n_1 = p^{(1)} - 1 - 4(\pi - 1) + 3n . \end{cases}$$

Ne segue:

$$n - \pi = n_1 - \pi_1$$

e, tenendo conto della (5):

$$\omega = \omega_1$$

Riepilogando:

Il sistema $|C_1|$ residuo di $|C|$ rispetto al sistema canonico, ha la stessa sovrabbondanza di $|C|$; il suo genere ed il suo grado sono dati dalle (6), mentre, per definizione, $|C|$ e $|C_1|$ sono tali che la dimensione effettiva di ciascuno di essi è inferiore di una unità all'indice di specialità dell'altro (*).

(*) Cfr. Enriques: "Ricerche di Geometria sulle Superficie algebriche" (Memorie Acc. Scienze, Torino, 1893).

49.- IL TEOREMA DI CASTELNUOVO SULLA DEFICIENZA DELLA SERIE CARATTERISTICA.

Sopra una superficie qualunque si consideri un sistema lineare irriducibile $|C|$, di grado n e di dimensione r, e la serie caratteristica g_n^{r-1} segata dalle altre curve del sistema sopra una C particolare.

È chiaro che questa serie non può essere completa se non lo è $|C|$, perchè essa viene estesa quando si ampli $|C|$. Ma quando $|C|$ è un sistema completo, la serie caratteristica g_n^{r-1} sarà completa ?

Nei più semplici esempi che cadono sotto gli occhi la risposta riesce affermativa, e quindi si potrebbe pensare che si abbia qui una proprietà generale di tutte le superficie (come Noether aveva implicitamente supposto). Invece la proprietà appartiene soltanto alle superficie regolari ($p_g = p_a$). Per le superficie irregolari ($p_g > p_a$) la serie caratteristica di un sistema completo (irriducibile) $|C|$ in generale non riesce completa: c'è una deficienza che raggiunge un certo massimo, e questo è precisamente l'irregolarità $p_g - p_a$ della superficie.

Ci riferiremo, al solito, ad una superficie F_n dello spazio ordinario, dotata di singolarità normali. Sia $|C|$ il sistema completo cui appartengono le sezioni piane di F_n; cominciamo col dimostrare che <u>è sempre possibile determinare un multiplo $|hC|$ del sistema $|C|$, la cui serie caratteristica abbia deficienza non superiore alla irregolarità $p_g - p_a$ della superficie.</u> Risulterà poi che codesta <u>deficienza riesce proprio uguale a $p_g - p_a$</u>, essendo il sistema $|hC|$ regolare per h sufficientemente alto (*).

Designeremo con r_h, n_h e π_h, rispettivamente, la dimensione, il grado ed il genere di $|hC|$. Cosicchè, supponendo il sistema $|hC|$ non speciale, avremo:

$$(1) \qquad r_h \geq p_a + n_h - \pi_h + 1 .$$

Sopra una generica curva C_h di $|hC|$, le φ_{n-4} aggiunte a F_n segano - per il <u>Lemma di Severi</u> (**) - una serie completa, che è la residua della serie caratteristica rispetto alla serie canonica (***), e la cui dimensione è:

(*) § 48.
(**) § 48.
(***) § 28.

$$p_g - 1,$$

poichè, prendendo h assai alto, non esisterà nessuna φ_{n-4} passante per C_h. Quindi la serie $g_{n_h}^{r_h-1}$ caratteristica di $|hC|$, ha l'indice di specialità p_g, cosicchè è contenuta in una serie completa di dimensione

$$n_h - \pi_h + p_g.$$

Onde la $g_{n_h}^{r_h-1}$ ha una deficienza d_h data da:

$$d_h = n_h - \pi_h + p_g - r_h + 1.$$

Ne segue, per la (1):

$$d_h \leq p_g - p_a.$$

Ciò vale nell'ipotesi $p_g > 0$, ma se è $p_g = 0$, la $g_{n_h}^{r_h-1}$ è non speciale (*), e quindi:

$$d_h = n_h - \pi_h - r_h + 1$$

donde, ancora per la (1):

$$d_h \leq - p_a.$$

(*) Lemma di Severi - § 48.

La proprietà asserita è così dimostrata in ogni caso.

Siccome per h alto il sistema $|hC|$ (privo di curve fondamentali proprie) è regolare(*), nella (1) ha luogo il segno di uguaglianza e perciò è esattamente:

$$d_h = p_g - p_a.$$

Consideriamo ora, sopra la superficie data, due sistemi lineari irriducibili e completi $|C_1|$, $|C_2|$: siano r_1 (≥ 1) ed r_2 (≥ 1) le loro dimensioni, n_1 ed n_2 i loro gradi; indichiamo inoltre con r la dimensione del sistema somma

$$|C_1 + C_2| = |C|.$$

Per semplicità di discorso supporremo che $|C_1|$ e $|C_2|$ (e quindi anche $|C|$) siano privi di punti base, ma il ragionamento che segue è affatto generale.

<u>Se il sistema $|C|$ sega sopra la curva generica di $|C_1|$ una serie completa, la deficienza d_1 della serie caratteristica $g_{n_1}^{r_1-1}$ di $|C_1|$ non supera</u>

(*) § 48.

la deficienza d_2 della serie caratteristica $g_{n_2}^{r_2-1}$ di $|C_2|$ (*), si ha cioè:

$$d_1 \leq d_2 .$$

Infatti - detto i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2 - la serie completa segata da $|C|$ sopra una C_1 ha ordine n_1+i, e dimensione $r-r_2-1$ poichè le curve di $|C|$ che contengono la C_1 si spezzano in questa e in una delle ∞^{r_2} curve C_2; cioè quella serie è una $g_{n_1+1}^{r-r_2-1}$.

Supponiamo che gli i punti comuni a C_1 e a una C_2 presentino ε $(\leq i)$ condizioni alle curve di $|C|$ che li contengono: allora queste segano sopra la C_1 una serie $g_{n_1}^{r-r_2-\varepsilon-1}$, la quale è completa e contiene la serie caratteristica $g_{n_1}^{r_1-1}$ di C_1 (poichè tra le C per quegli i punti ci sono quelle spezzate nelle C_2 e in una residua C_1 di $|C_1|$).

Ne segue che la deficienza d_1 di $|C_1|$ è data da:

$$d_1 = r-r_2-\varepsilon-1-(r_1-1) = r-r_1-r_2-\varepsilon .$$

(*) Cfr. Castelnuovo G.: "Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica" - Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXV (1897).

e la serie caratteristica di $|K|$; quindi - per il lemma di Castelnuovo dimostrato nel § 44 (*) - anche il sistema

$$|K + hC|$$

segherà sulla K una serie completa.

Ne segue che la deficienza d della serie caratteristica di $|K|$ sarà minore od uguale a quella della serie caratteristica di $|hC|$, e poichè - come abbiamo visto - questa (per h assai grande) non supera $p_g - p_a$, si ha pure:

$$d \leq p_g - p_a.$$

Si avverta che la restrizione posta al sistema $|K|$ di non possedere punti base, può essere tolta: la precedente proprietà si estende poi anche al caso di sistemi completi irriducibili, almeno semplicemente infiniti, dotati di punti base; il gruppo dei punti base semplici aggiungendosi alla serie caratteristica.

Possiamo così enunciare l'importante teorema di Castelnuovo:

La deficienza della serie caratteristica di ogni sistema lineare completo irriducibile, almeno semplicemente infinito, appartenente ad una

---

(*) Vedi pag. 202.

Se invece consideriamo la serie (in generale non completa) $g_{n_2+i}^{r-r_1-1}$ segata da $|C|$ su C_2, e la $g_{n_2}^{r-r_1-\varepsilon-1}$ residua degli $\underline{i}$ punti comuni a C_2 e a una C_1, rispetto alla $g_{n_2+i}^{r-r_1-1}$, la deficienza $\underline{d_2}$ della serie caratteristica $g_{n_2}^{r_2-1}$ di $|C_2|$ vale:

$$d_2 \geq r - r_1 - r_2 - \varepsilon .$$

Donde come avevamo asserito:

$$d_1 \leq d_2 .$$

Ciò premesso, si abbia un sistema completo $|K|$, irriducibile, almeno doppiamente infinito e privo di punti base, che può supporsi appartenere ad una superficie F (eventuale trasformata della data) priva di singolarità, in un certo iperspazio, cosicchè la curva generica di $|K|$ non avrà punti multipli. Allora prendendo h sufficientemente alto, potremo fare in modo che il sistema $|hC|$ seghi sopra la K una serie completa e non speciale (*), e che sia pure non speciale la serie differenza tra questa

---

(*) Cfr. § 42 (Veramente la proposizione che qui si richiama, si è dimostrata riferendoci ad una superficie dello spazio ordinario e al sistema $|C|$ delle sue sezioni piane, ma la cosa vale _a fortiori_ nel caso iperspaziale).

superficie di generi p_g e p_a, non supera l'irregolarità $p_g - p_a$.

In particolare: sopra una superficie regolare ($p_g = p_a$), i sistemi completi irriducibili hanno serie caratteristica completa.

Osservazione. Un corollario delle conclusioni precedenti è che se sopra una superficie F esiste un sistema continuo (non lineare) di curve, $\{C\}$, costituito da ∞^d sistemi lineari completi $|C|$ (non equivalenti), la F è irregolare, e la sua irregolarità $p_g - p_a$ è almeno uguale a d. Infatti la serie caratteristica g_n^{r-1} di $|C|$, è contenuta nella serie caratteristica di $\{C\}$ (segata sopra una C dalle curve del sistema infinitamente vicine - cfr. § 21), la quale è di dimensione $r-1+d$, e quindi la g_n^{r-1} ha almeno la deficienza d.

In particolare se una superficie contiene un fascio irrazionale di genere π, si ha $p_g - p_a \geq \pi$, i gruppi di $n \geq \pi$ curve del fascio distribuendosi allora in ∞^π sistemi lineari ($\infty^{n-\pi}$) disequivalenti.

Quest'ultimo risultato appartiene a Castelnuovo (*), e nella forma più generale che precede riesce una conseguenza immediata del concetto di Severi della serie caratteristica (cfr. § 21).

(*) Castelnuovo G.: "Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve....." (Memorie Società Italiana delle Scienze, 1896).

Nota bibliografica.

Le formule che dànno la postulazione di una curva che debba essere semplice o multipla per le superficie di un dato ordine, sono state enunciate da Cayley (1870) (*), e più tardi (1871) dimostrate da Noether con procedimento fondato sul celebre teorema della $Af+B\varphi$ relativo alle superficie (**).

Lo stesso Noether (o) e Castelnuovo (oo) hanno poi ripreso lo studio della formula di postulazione per una curva semplice (§ 42), con l'intento di determinare un limite inferiore dell'ordine delle superficie per cui vale la formula stessa. La dimostrazione da noi esposta nel § 42 è appunto dovuta a Castelnuovo (ooo).

(*) Cfr. Cayley: "On the rational Transformation between two spaces" (Proceedings of the London Math. Society, vol. III, 1870).

(**) Cfr. Noether: "Sulle curve multiple di superficie algebriche" (Annali di Mat., serie II, vol. 5, 1871).

(o) Cfr. Noether: "Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven" (Journal f. d. Mathem., Bd. 93 oppure Abhandl. d. k. Akad. d. Wissensch. Berlin, 1882).

(oo) Cfr. Castelnuovo: "Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica" (Circolo Mat. di Palermo, 1883).

(ooo) Cfr. anche Picard et Simart: op. cit., vol. I, cap. VIII, § III. Per la determinazione della postulazione di una curva multipla (§ 44) vedi: L. Campedelli: "Sulla postulazione di una curva i-pla" (Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1931).

La considerazione del *genere numerico* di una superficie si è presentata fino dai primi studi di <u>Cayley</u>, <u>Zeuthen</u>, <u>Noether</u>.

<u>Noether</u> aveva già definito il genere della superficie come numero delle sue aggiunte d'ordine $n-4$ linearmente indipendenti (*), quando <u>Cayley</u> osservò che calcolando (colle formule di postulazione) questo numero per le superficie rigate, esso risultava negativo (**). D'altra parte <u>Zeuthen</u>, studiando come si mutano i caratteri delle superficie e delle loro curve singolari in una trasformazione birazionale, dimostrò (sotto condizioni assai ampie) che il genere (numerico) definito per mezzo delle formule di postulazione riesce invariante per tali trasformazioni, e ciò indipendentemente dal suo (presunto) significato geometrico e dalla dimostrazione di Noether dell'invarianza del sistema canonico (***).

(*) Cfr. la "Nota bibliografica„ al termine del cap. II (pag. 96).

(**) Cfr. Cayley: "On the Deficiency of certain surfaces„ (Math. Ann., Bd. 3, 1871).

(***) Cfr. H. G. Zeuthen: "Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces, dont les points se correspondent un-à-un„ (Math. Ann., Bd. 4, 1871).

Il risultato di Zeuthen venne interpretato da Noether [o] nel senso che il genere di una superficie può essere definito in due modi: per via geometrica come numero *effettivo* delle φ_{n-4} linearmente indipendenti, e per via numerica mediante le formule di postulazione. La prima definizione porta al *genere geometrico* e la seconda a quello *numerico*: tanto l'uno che l'altro sono invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali, ed il secondo può anche assumere valori negativi, come accade per le rigate. E Noether non conosce altre superficie *irregolari* che le rigate ($p_g = 0$; $p_a < 0$).

I primi esempi di superficie irregolari di genere geometrico $p_g > 0$ sono stati dati da *G. Castelnuovo* nella nota del 1891 già citata nel § 45 [*]. Altri esempi sono poi emersi in seguito alle ricerche di *E. Picard* e di *G. Humbert* sulle superficie iperellittiche (superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere 2), per le quali si ha $p_a = -1$ e $p_g = 1$. Successivi studi hanno condotto a trovare più larghe classi di superficie irregolari, preparando la via alla

(o) Math. Ann., Bd. 8 (1875).

(*) Vedi pag. 221.

scoperta della loro proprietà caratteristica che menzioneremo in seguito.

Le ricerche iniziate nel 1893 e proseguite negli anni successivi, hanno condotto F. Enriques, nella più volte citata "Introduzione...." del 1896, a riconoscere il significato geometrico della differenza $p_g - p_a$ in rapporto alla deficienza della serie (canonica) segata dal sistema aggiunto $|C'|$ sulla curva di un sistema $|C|$: di qui emerge la dimostrazione affatto generale dell'invarianza del p_a essendo già conosciuta l'invarianza del p_g (cfr. §46). Questo risultato è stato completato, come si è detto, da E. Picard (cfr. la "Nota" al termine del §46).

L'estensione del teorema di Riemann-Roch ai sistemi lineari tracciati sopra una superficie algebrica (§§ 46 e 49), si trova anzitutto accennata in una nota di Noether pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Parigi (*): in essa l'Autore considera un sistema $|C|$ di dimensione r, di grado n, di genere π, e d'indice di specialità i ($i = 0$

(*) Cfr. Noether: "Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques" (Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, t. 103, 1886).

per i sistemi non speciali), nell'ipotesi (non formulata esplicitamente) che la superficie sia regolare di genere $p_g = p_a = p$. Allora confrontando la serie caratteristica del sistema $|C|$ e quella segata sopra una curva C dal sistema canonico, residua della prima rispetto alla serie canonica di C, ne deduce per la dimensione di $|C|$:

$$r = p + n - \pi + 1 - i .$$

Questa deduzione è legittima soltanto se le due serie suddette sono ambedue complete, od hanno la medesima deficienza, ipotesi che il Noether non ha pensato a chiarire e tanto meno a giustificare. Enriques già nella prima ricerca del 1893 (*), ha ripreso la questione ed è riuscito a dimostrare che per le superficie regolari (e supponendo che il sistema canonico abbia serie caratteristica completa: ipotesi che è risultata poi discendere come conseguenza dalla stessa regolarità) la serie caratteristica di un sistema completo è sempre completa: questa dimostrazione è stata trasformata da Castelnuovo nella proprietà da noi stabilita nel § 49 (**), che abbiamo adoperato

---

(*) "Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche", - Accad. delle Scienze, Torino, s. 2, t. 44, 1893.
(**) Vedi pag. 282.

per estendere i teoremi sulla integrità o sulla deficienza della serie caratteristica dai sistemi multipli di quello delle sezioni piane ai sistemi qualunque.

Dalla integrità della serie caratteristica di un sistema lineare $|C|$ sopra una superficie regolare, segue il teorema di Riemann-Roch sotto la forma di diseguaglianza:

$$r \geqslant p_a + n - \pi + 1 - i$$

ed Enriques fa vedere che non si può sostituire sempre questa diseguaglianza con una uguaglianza, cioè che esistono effettivamente sistemi sovrabbondanti (anche indipendentemente dalla ipotesi che ci siano gruppi di punti base che impongano condizioni non indipendenti alle curve del sistema): tali sono, in particolare, i sistemi lineari dotati di curve fondamentali proprie (cfr. § 46 e § 48).

Nella "Introduzione..." del 1896, colla nuova definizione invariante del genere numerico, di cui si è detto sopra, Enriques dava l'estensione del teorema di Riemann-Roch per i sistemi aggiunti. E quindi si può dire che il teorema di Riemann-Roch viene stabilito in tal guisa per i sistemi abbastanza ampi, sostanzialmente nella forma che abbiamo adoperato nei §§ 46 e 47.

Resta tuttavia insoluta la questione della integrità o deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare completo. Ora da siffatta questione appariva dipendere l'enunciato del teorema di Riemann-Roch per i sistemi lineari di curve che (non contenendo il sistema canonico) non possono ritenersi come aggiunti di qualche altro sistema. La cosa è stata risoluta da <u>Castelnuovo</u> in due memorie pubblicate negli anni 1896 (*) e 1897 (**).

Castelnuovo riesce allo scopo con un metodo molto ingegnoso, dove si dispiegano idee verosimilmente assai feconde: si tenta di costruire le superficie aggiunte ad una data F_n partendo dalle curve aggiunte alle sue sezioni. In modo più preciso: si considerino i piani di un fascio di asse <u>a</u>, e in ciascuno di essi si determini una C_{n-3} aggiunta alla sezione di F_n, fissando i suoi punti d'intersezione con <u>a</u> (o un certo numero di questi) ed eventualmente anche dei piani tangenti in tali punti; al-

(*) "Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica" (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta "dei 40"; s. 3, vol. 10).

(**) "Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica" (Annali di Matematica, s. II, vol. XXV).

lora se la C_{n-3} è sezione d'una φ_{n-3} aggiunta (caso della superficie regolare), si riesce in tal guisa a costruire questa φ_{n-3}; nel caso contrario si perviene invece ad una φ_{n-3+h} e da ciò si traggono conseguenze per le superficie irregolari.

Però l'esecuzione di siffatto disegno riesce assai laboriosa, cosicchè è venuta opportuna la dimostrazione che Severi ha dato del lemma che da lui appunto abbiamo denominato (cfr. § 48): in base ad esso, in un primo tempo, egli ha stabilito il teorema della deficienza della serie caratteristica (§ 49), deducendone il teorema di Riemann-Roch (*); e più tardi ha dimostrato direttamente questo stesso teorema (§ 48), giustificando in tal guisa anche il caso riducibile (a cui era già pervenuto Enriques)(**). Le dimostrazioni da noi esposte nei §§ 48 e 49 sono quelle di Severi, con qualche variante semplificativa.

(*) Cfr. Severi F.: " Sulla serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica" (Rend. Accad. Lincei, vol. XII, s. 5, 1903).

(**) Cfr. Severi F.: " Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica" (Atti Accademia delle Scienze di Torino, vol. XL, 1905).

La trasformazione di una superficie in altra priva di curve eccezionali è stata riconosciuta da Enriques per le superficie di genere maggiore di zero, eppoi per quelle che hanno qualche plurigenere non nullo, nelle memorie del 1893 e '96. Ma il risultato più espressivo, che l'eliminazione delle curve eccezionali è possibile per tutte le superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate, è stato raggiunto da Castelnuovo e Enriques nella loro memoria "Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche" (*), del 1900, in base al teorema della trasformabilità in rigate delle superficie che contengono un sistema lineare di curve di genere π e di grado $n > 2\pi - 2$.

(*) Annali di Matematica, serie III, tomo VI, Milano, 1901.

CAPITOLO V

SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE E IN PARTICOLARE SULLE SUPERFICIE REGOLARI.

50.- Introduzione.

In questo capitolo imposteremo alcuni problemi generali intorno alla classificazione delle superficie, ed in particolare delle superficie regolari, ed illustreremo la teoria con numerosi e caratteristici esempi, i quali, oltre a mettere in opera interessanti procedimenti e metodi di costruzione, offriranno un largo materiale atto a suggerire nuove ricerche.

Ci riferiremo generalmente a superficie regolari; ma sarà facile vedere come alcuni risultati sussistano ancora per il caso irregolare. Frattanto designeremo con $p = p_a = p_g$ il genere della nostra superficie regolare.

51.- SUPERFICIE DI GENERE UNO.

Se la superficie F ha il genere $p=1$, sopra di essa il sistema canonico è di dimensione zero, cioè è costituito da una sola curva K. Allora passono darsi due casi: o la K (curva canonica propriamente detta, spogliata delle curve eccezionali) è una curva di un certo ordine non nullo; oppure la K è d'ordine zero, cosicchè non può parlarsi dell'esistenza di un'effettiva curva canonica.

Supponiamo che la F appartenga allo spazio ordinario, e possieda quindi una curva doppia ed un certo numero di curve eccezionali: poichè $p=1$, esiste una sola superficie φ_{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunta alla F, d'ordine n. Se l'intersezione della φ_{n-3} con la F è esaurita dalla curva doppia e dalle curve eccezionali, non esiste nessuna curva canonica propriamente detta, cioè d'ordine maggiore di zero. Una tale curva esiste invece se la φ_{n-3} incontra la F, fuori della curva doppia e della curva eccezionale, lungo una effettiva curva K.

In questo secondo caso, sopra un modello della superficie privo di curve eccezionali, ogni sistema $|C|$ è contenuto parzialmente nel suo aggiunto $|C'|$, e (se $|C|$ è privo di punti base) si ha:

$$|C'| = |C+K|.$$

Quando invece la curva K sia d'ordine zero, è:

$$|C'| = |C|,$$

cioè <u>ogni sistema $|C|$, senza punti base, coincide col suo aggiunto</u>, e quindi la serie caratteristica segata sopra una curva C generica dal sistema $|C| = |C'|$ non è altro che la serie canonica, che, se la F è regolare, risulta completa.

Ne segue che tra il grado n e il genere π di $|C|$ si ha la relazione:

$$n = 2\pi - 2.$$

Altrove abbiamo già stabilito le formule che ci dànno il genere (virtuale) $p^{(1)}$ (<u>genere lineare</u> di F) ed il grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$ del sistema canonico, mediante i caratteri analoghi di $|C|$ e $|C'|$ (*): da esse - nel caso $|C| = |C'|$ in cui la curva K sia di ordine zero - risulta subito:

$$p^{(1)} = 1.$$

Però questo valore del $p^{(1)}$ non caratteriz-

(*) § 29.

za le superficie di genere uno, prive di curva canonica propriamente detta. Infatti si può recare esempio di una superficie di genere $p=1$ e di genere lineare $p^{(1)}=1$, possedente una effettiva curva canonica, d'ordine maggiore di zero. Tale è la superficie

$$z^2 = f_6(xy) \cdot f_6'(xy),$$

dove $f_6(xy)=0$ e $f_6'(xy)=0$ rappresentano due sestiche con nove punti doppi in comune (sestiche di un fascio di Halphen). (*)

Questa superficie è rappresentata sul piano doppio $\{x, y, \sqrt{f_6(xy) \cdot f_6'(xy)}\}$: lo studio che faremo più avanti dei piani doppi in generale (**), permette di dimostrare facilmente che essa possiede una curva canonica ellittica, rappresentata sul piano dalla cubica per i nove punti doppi comuni alle due sestiche suddette. Si trova pure un fascio di curve bicanoniche rappresentate sul piano dalle sestiche del fascio di Halphen.

È importante notare che già dall'esempio precedente appare un carattere che serve a distinguere le superficie per cui $p=1$, con una curva canonica d'ordine zero da quelle contenenti una effettiva curva canonica d'ordine non nullo: poichè, nel primo caso, da $|C| = |C'|$

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. II, § 22 (vol. III, pag. 195).
(**) Cfr. § 56.

segue

$$|2C'| = |2C|$$

e quindi il <u>bigenere $P = 1$</u>, e così anche per tutti i <u>plurigeneri</u> ($P_i = 1$). Invece nell'esempio sopra citato, risulta $P = 2$.

Ora questo risultato è affatto generale: <u>se esiste una curva canonica propriamente detta, riducibile o irriducibile, è</u>

$$\underline{P \geq 2};$$

mentre <u>il valore $P = 1$ caratterizza il caso della curva canonica d'ordine zero.</u>

Infatti, se esiste una curva canonica effettiva K, tra il genere p, il bigenere P, ed il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie regolare, si ha la relazione:

$$P \geqslant p + p^{(1)},$$

ed anzi è esattamente:

$$P = p + p^{(1)}$$

nel caso in cui la curva K sia irriducibile, per modo che si possa parlare della serie canonica completa segata su K dal sisteuna bicanonico (*).

Così, per dimostrare la proposizione sopra enunciata, basta far vedere che <u>è in ogni caso, per tutte le superficie possedenti curve canoniche</u> (**):

$$p^{(1)} \geq 1.$$

Si abbia infatti, se è possibile, una curva canonica K di genere $p^{(1)} < 1$, e quindi di grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 < 0$. La K sarà, in generale, spezzata in più parti; sia K_1 una di esse, e indichiamone il genere (virtuale) con ρ, e il grado con ν. La curva K incontra la K_1 in

$$2\rho - 2 - \nu$$

(*) Cfr. § 46. Nel caso di K riducibile il bigenere P potrà superare la somma $p + p^{(1)}$; per esempio, ciò accadrà - sopra una superficie di genere uno - quando la K sia costituita da due curve ellittiche K_1 e K_2 che non abbiano alcun punto in comune e non siano equivalenti fra loro, ma tali che $|2K_1| = |2K_2|$; allora il sistema bicanonico

$$|2(K_1 + K_2)| = |4K_1| = |4K_2|$$

contiene tutte le curve del fascio (di grado zero) individuato da $2K_1$ e $2K_2$, prese due a due, e quindi si ha $P=3$.

(**) Si è visto prima che anche per le superficie con curva canonica d'ordine <u>0</u>:

$$p^{(1)} = 1.$$

punti. Se questo numero risulta negativo – essendo $\rho \geq 0$ – si ha $\nu \geq -1$: ma, d'altra parte, in tal caso, ν è necessariamente negativo perchè se la K_1 ha un numero negativo d'intersezioni (virtuali) con K, essa deve pure avere un numero negativo d'intersezioni con se stessa, essendo positivo o nullo il numero dei suoi punti d'incontro con le altre eventuali componenti di K. Ne segue che può soltanto aversi $\nu = -1$, e quindi $\rho = 0$: ma allora la K_1 risulterebbe eccezionale, cioè non più parte della curva canonica propriamente detta. Cosicchè dunque non può accadere che la K abbia un numero negativo d'intersezioni con le sue componenti, e perciò anche il suo grado è necessariamente positivo o nullo.

52.- LE SUPERFICIE CON TUTTI I GENERI UGUALI AD UNO.

Sia F una superficie regolare caratterizzata dall'avere il genere ed i plurigeneri

$$p = P = P_3 = P_4 = \ldots\ldots = 1.$$

Tale superficie possiede una curva canonica d'ordine zero. Come già abbiamo osservato (*) - supposto la F priva di curve eccezionali - ogni sistema completo |C|, che non possieda punti base, coincide col suo aggiunto; cosicchè la sua serie caratteristica è la serie canonica completa, e quindi <u>la dimensione r di |C| è uguale al suo genere π, e il grado di |C| è 2π-2.</u>

Allora nel caso in cui sia π > 2, il sistema |C| ha come <u>immagine</u> (**) una superficie F', d'ordine 2π-2, che è <u>normale</u> in un iperspazio S_π, a π dimensioni (***), e le cui sezioni iperpiane sono <u>curve canoniche</u> ciascuna del proprio $S_{\pi-1}$ (tali cioè che sopra di esse gli $S_{\pi-2}$ segnano la serie canonica completa). (****)

(*) Cfr. § precedente.

(**) § 10.

(***) § 13.

(****) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, Cap. I, §§ 12, 13 (vol. III, pagg. 90 e 97).

Un esempio di superficie di questo tipo s'incontra subito: è dato dalle superficie F_4 del quarto ordine, dello spazio ordinario, sopra cui i piani segano un sistema completo di dimensione e genere uguale a tre, e di grado quattro.

È noto (Noether) che, _in generale_, sopra una superficie del quarto ordine non esistono altre curve all'infuori delle _intersezioni complete_, e quindi sulla F_4 il sistema delle sezioni piane è il solo per cui $r = \pi = 3$. Ne segue che due superficie generali del quarto ordine tra loro birazionalmente identiche sono proiettive, cosicchè i 19 invarianti proiettivi da cui dipendono le F_4 (*), sono _moduli_ della loro classe. (Queste conclusioni cadono in difetto per F_4 particolari: ad esempio per le F_4 dotate di un punto doppio O, sulle quali i coni che proiettano da O una sezione piana, incontrano ulteriormente lungo una curva d'ordine 12, ancora di genere tre.)

Sulla F_4 le quadriche segano un sistema di curve di genere 9, il quale ha per immagine una superficie dello spazio a 9 dimensioni, birazionalmente identica alla F_4. È così analogamente per i successivi multipli del sistema delle sezioni piane di F_4.

(*) Infatti le F_4 sono ∞^{34}, mentre le proiettività dello spazio ordinario sono ∞^{15}.

Le F_4 non esauriscono le superficie con $p=P=1$: infatti si dànno esempi di altre famiglie non riducibili birazionalmente alle F_4.

Nello spazio a quattro dimensioni S_4, superficie siffatte sono costituite dalle F_6 intersezioni di una varietà (ipersuperficie) del terzo ordine con una del secondo; infatti le sezioni iperpiane di F_6, essendo sestiche per cui passa una quadrica ed una superficie cubica, sono curve canoniche di genere 4 (*).

Si può dimostrare che anche le F_6 posseggono, in generale, 19 invarianti proiettivi; i quali costituiscono altrettanti moduli per la loro classe: infatti il sistema delle superficie birazionalmente identiche ad una F_6 non può avere dimensione maggiore del sistema ∞^{24} delle F_6 proiettive alla data, altrimenti dovrebbe la F_6 stessa contenere un sistema continuo di sistemi lineari di dimensione 4, di curve di genere 4 e grado 6, e quindi la F_6 non sarebbe regolare (**).

Il fatto che la classe delle F_6 di S_4 dipenda da 19 moduli come quella delle F_4 di S_3, mentre la F_4 non contiene, in generale, curve di genere 4, prova che le superficie generali

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, Cap. I, § 13 (vol. III, pag. 99).

(**) Cfr. l'osservazione al termine del § 49.

del sesto ordine di S_4 e quelle del quarto di S_3 sono birazionalmente distinte. Non si esclude che *particolari* F_6 ed F_4 possano invece essere riducibili l'una all'altra con trasformazioni birazionali: così, ad esempio, una F_4 che contenga una conica è proiezione di una F_6 dotata di un punto doppio.

Un'altra superficie del tipo di cui ci stiamo occupando è – nello spazio a cinque dimensioni S_5 – la F_8 intersezione di tre quadriche. Infatti due quadriche s'incontrano secondo una varietà triplamente infinita V_3^4, le cui sezioni con gli S_3 di S_5 sono curve ellittiche (quartiche comuni a due quadriche di S_3): ne segue che le sezioni iperpiane della F_8 (ossia le sezioni della V_3^4 con le quartiche di un S_4) appartengono al sistema doppio di quello delle sezioni della V_3^4 con gli S_3, e quindi sono di genere

$$1 + 1 + 4 - 1 = 5 ;$$

poichè hanno l'ordine 8, risultano <u>curve canoniche</u> ciascuna del proprio S_4 (*).

Quest'ultimo esempio suggerisce un procedimento per la costruzione di altre superficie regolari con tutti i generi uguali al-

(*) Cfr. anche Enriques - Chisini, l. sopra citato (vol. III, pag. 100).

l'unità, in un iperspazio S_{r+1} con $r>4$. Se nello spazio ad $r+1$ dimensioni S_{r+1}, si ha una varietà triplamente infinita V_3^r, d'ordine r, le cui sezioni con gli S_{r-1} di S_{r+1} siano curve ellittiche (normali), allora la superficie F_{2r} intersezione della V_3^r con una quadrica di S_{r+1} ha i requisiti richiesti: infatti le sue sezioni iperpiane sono curve canoniche di ordine $2r$ e di genere $r+1$. È pertanto questa superficie F_{2r}, su cui il sistema delle sezioni iperpiane sarà aggiunto di se stesso, ha il genere (e tutti i plurigeneri) uguali ad uno, qualora essa sia priva di punti multipli (influenti sulle aggiunte).

L'ipotesi che la F_{2r} non abbia punti multipli porta ad escludere il caso in cui la V_3^r sia un cono di seconda specie proiettante una curva ellittica normale di un S_{r-1} da una retta non incidente a quell' S_{r-1}. Infatti se un cono di questo tipo, viene intersecato con una quadrica di S_{r+1}, si ottiene una superficie F_{2r} le cui sezioni iperpiane sono curve canoniche: ma che non è più di genere uno. Ed invero il sistema aggiunto a quello delle sezioni iperpiane C di F_{2r} dovrà avere come punti fissi i due punti multipli comuni all'asse del cono e alla quadrica (ciascuno dei quali impone una sola condizione), perciò il sistema aggiunto $|C'|$ è contenuto parzialmente in $|C|$, e quindi $p_g = 0$; inoltre $|C'|$ ha la dimensione $r-1$, e perciò risulta $p_a = -1$ (*).

Le varietà V_3^r a curve sezioni ellittiche, che non sono coni di seconda specie, risultano dalla conoscenza delle loro sezioni iperpiane che sono superficie razionali normali, d'ordine r in S_r (Del Pezzo, Guccia). Codeste V_3^r di S_{r+1}, sono state determinate da Enriques: sono varietà d'ordine 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e sono razionali (ad eccezione forse della varietà cubica di S_4), rappresentabili nello spazio ordinario mediante sistemi lineari di superficie cubiche o (per l'ordine 8) dal sistema ∞^9 delle quadriche (**).

(*) Questa conclusione è conforme al fatto che la F_{2r} possiede un fascio ellittico di coniche segate dalle quadriche sopra i piani passanti per l'asse del cono, cosicchè — come vedremo in seguito — si può trasformare in una rigata di genere uno, per la quale è appunto $p_a = -1$ e $p_g = 0$.

(**) Cfr. Enriques: "Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche"; e "Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche"; in Rend. R. Accad. Lincei, vol. III, 1° sem. 1894.

Risulta da un teorema di Segre ("Recherches générales sur les courbes...." - Math. Annalen, 34) che una superficie rigata (di <u>genere</u> diverso da zero), che non sia un cono, non può avere curve sezioni normali; per conseguenza le varietà V_3^r che non siano coni di seconda specie, debbono avere per sezioni iperpiane superficie razionali (d'ordine r in S_r) non rigate.

Ogni famiglia di superficie regolari con tutti i generi uguali all'unità, è caratterizzata dal genere π del sistema lineare $|C|$ di dimensione minima, sopra la sua superficie generica: e, per $\pi \geqslant 3$, la superficie immagine di quel sistema ci dà un modello proiettivo della famiglia stessa. Quando sia $\pi = 2$ la superficie riesce invece rappresentata sopra un piano doppio con sestica di diramazione: infatti le ∞^2 curve C, rappresentate doppiamente sulle rette del piano, essendo di genere 2 possiedono una g^1_2 canonica caratteristica, la quale ha sei punti doppi.(*)

Anche le superficie di questa famiglia dipendono da 19 moduli, altrettanti essendo gli invarianti proiettivi delle sestiche piane. Ora è importante notare che questo fatto, da noi verificato in alcuni casi particolari, è del tutto generale, cioè ogni famiglia di superficie con i generi uguali ad uno, dipende da 19 moduli.(**)

Si presenta infine una notevole questione d'esistenza: per qualunque valore di π,

---

(*) Per nozioni particolareggiate sui piani doppi vedi in seguito (§ 56).

(**) F. Enriques: "Sui moduli delle superficie algebriche„ (Rend. R. Accad. Lincei, s.V, vol. XVII, giugno 1908). Cfr. anche la nota di F. Severi citata nella nota (**) a pag. seguente.

esiste effettivamente una famiglia di superficie aventi tutti i generi uguali all'unità? La risposta è affermativa, ma non possiamo trattare qui tale questione; ci limiteremo a darne un rapido cenno nella nota che segue.

Nota.

L'esistenza d'infinite famiglie di superficie (coi generi uno) d'ordine $2\pi - 2$ dello S_π, a sezioni canoniche di genere π, è stata dimostrata indipendentemente da F. Enriques (*) e da F. Severi (**) con procedimento fondato sulla rappresentazione trascendente delle superficie iperellittiche di rango 2. Ma si può giungere allo stesso risultato senza far ricorso a considerazioni trascendenti, mercè la costruzione di superficie particolari appartenenti a queste famiglie, come segue.

Si consideri dapprima il piano doppio con curva di diramazione f_6 del 6° ordine, dotata di un punto doppio O (cfr. § 56). Esso rappresenta una superficie F contenente una rete di curve C di genere due, le cui immagini sono le ∞^2 rette del piano, e un fascio di curve el-

---

(*) F. Enriques: "Le superficie di genere uno" (Rendic. R. Accad. di Bologna, 1908).

(**) F. Severi: "Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero" (Atti del R. Istituto Veneto, vol. LXVIII, parte seconda, 1909).

littiche K bisecanti le C, aventi per immagini le rette del piano che passano per O. Allora sopra F si ottiene un sistema di curve di genere $\pi = 2 + 2n$, che è dato dalla somma $C + nK$. Si ottiene pure, sopra F, un sistema di curve di genere dispari $\pi = 5 + 4n$ (cioè della forma $4n + 1$) sommando $2C + nK$.

Invece per ottenere una superficie (coi generi uno), contenente un sistema di curve di genere dispari $\pi = 4n + 3$, basta partire da una superficie del 4° ordine contenente una quartica gobba ellittica, e sommare questa, n volte, alle sezioni piane.

In ogni caso dunque si possono costruire superficie (coi generi uno) contenenti un sistema ∞^{π} di curve di genere π e di grado $2\pi - 2$, e quindi superficie di ordine $2\pi - 2$ dello S_{π} a sezioni (canoniche) di genere π. Proiettando una superficie siffatta da un $S_{\pi-3}$ sopra un piano, si ottiene quindi un piano multiplo $(2\pi - 2)$-plo, con curva di diramazione L, d'ordine $6\pi - 6$, dotata di un certo numero di nodi e di cuspidi (che è facile calcolare). Questa curva L appartiene ad una serie continua di curve dello stesso ordine, dotate dello stesso numero di nodi e di cuspidi, che, in forza di un teorema di Enriques (*), saranno tutte curve di di-

---

(*) F. Enriques: " Sui moduli di una classe di superficie algebriche e ramazione di piani multipli ($2\pi-2$)-pli, coi medesimi caratteri. È agevole riconoscere che la famiglia di questi piani multipli contiene 19 costanti essenziali o moduli: due famiglie corrispondenti a valori di π diversi, riescono, in generale, irriducibili.

---

sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili" (Atti Accad. Torino, vol. 47, 1912), e "Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione" (Annali di matematica, serie IV, tomo I, 1924).

53.- LE SUPERFICIE CANONICHE

Passiamo a studiare le superficie (in generale regolari) di <u>genere superficiale $p>1$</u>. Se è $p \geq 3$ si potrà, di regola (*), trasformare la superficie in una <u>superfice canonica</u> dello spazio a $p-1$ dimensioni S_{p-1}, avente per sezioni iperpiane le curve canoniche della superficie (**) (superficie immagine del sistema canonico).

Se con $p^{(1)}$ designamo, al solito, il genere lineare, la superficie canonica avrà l'ordine $p^{(1)}-1$, ed il genere delle sue sezioni iperpiane sarà $p^{(1)}$.

È chiaro che le proprietà invarianti di una classe di superficie si rispecchiano in proprietà proiettive della corrispondente superficie canonica; la quale risulterà priva di curve eccezionali se si suppone che il sistema canonico sia privo di punti base, come avviene in generale (***).

(*) Esamineremo più avanti i casi di eccezione, che sono quelli in cui il sistema canonico non è semplice.

(**) È appena necessario osservare che queste curve canoniche per la superficie, non sono canoniche nel senso della geometria delle curve, cioè sopra di esse gli iperpiani dell' S_{p-2} cui appartengono, non segano la serie canonica, ma la serie caratteristica che è autoresidua (§ 28): cosicchè la serie canonica è segata sopra di esse dalle quadriche del loro S_{p-2}.

(***) Cfr. nota (**) a pag. 83.

La prima domanda che si presenta è questa: esistono in un medesimo spazio S_{p-1}, superficie canoniche di diverso ordine? ossia: i due caratteri p e $p^{(1)}$ di una superficie, sono effettivamente indipendenti fra loro?

La risposta è stata data da Noether fino dal 1870, ed è affermativa: il genere lineare ed il genere superficiale di una superficie, sono caratteri indipendenti l'uno dall'altro.

Il modo più semplice per provarlo è il seguente: ad una superficie di un certo genere p, che dipenda da un numero sufficientemente alto di parametri, è sempre possibile fare acquistare un punto singolare isolato; ad esempio, un punto triplo od un tacnodo (*). Allora, tanto nel primo che nel secondo caso, il genere p diminuisce di uno, mentre l'esistenza di un tacnodo, o di un punto triplo, porta nel genere lineare $p^{(1)}$ una diminuzione di due o tre unità, rispettivamente; come si può anche verificare dal grado $p^{(1)}-1$ del sistema

---

(*) L'imposizione di un punto triplo richiede 7 condizioni e quella di un tacnodo 8, come si verifica facilmente per una superficie cubica. (Per il caso del tacnodo, si osserverà che le superficie cubiche aventi un tacnodo in un punto P, con piano tacnodale assegnato, essendo costituite da questo piano e da una quadrica ad esso tangente in P, sono ∞^6; al variare del piano nella stella di centro P se ne trova allora ∞^8, e al variare di P nello spazio se ne ha ∞^{11}. Poichè le superficie cubiche sono ∞^{19}, il tacnodo ha portato precisamente 8 condizioni).

canonico, osservando che la curva comune a due superficie aggiunte ha tre intersezioni con la superficie in un punto triplo, e ne ha due in un tacnodo. Allo stesso risultato si perviene indirettamente determinando la variazione del bigenere $P=p+p^{(1)}$: infatti un punto triplo della superficie è doppio per le sue biaggiunte (e fa quindi diminuire il bigenere di 4 unità), mentre esse passano semplicemente per il tacnodo, toccando però il piano tacnodale, ciò che richiede tre condizioni.

Del resto l'indipendenza dei caratteri p e $p^{(1)}$ riesce anche stabilita dai numerosi esempi di superficie canoniche che si possono costruire. Ne mostreremo qualcuno.

Cominceremo dal valore $p=4$, cioè dalle superficie canoniche dello spazio ordinario.

Il primo tipo che si incontra è costituito dalle superficie generali del quinto ordine, per le quali si ha $p^{(1)}=6$. Evidentemente a questa famiglia si possono ricondurre, con trasformazione birazionale, tutte le superficie di caratteri $p=4$ e $p^{(1)}=6$: proponiamo, per esercizio, di verificare la cosa per le superficie F_7, del settimo ordine, con sestica doppia di genere 3; e per le superficie pure del settimo ordine, dotate di curva doppia del quinto ordine avente genere zero (esempi di Noether) (*).

(*) Cfr. M. Noether: "Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde" (Math. Annalen Bd. VIII, 1875).

Sempre per $p=4$, si ha invece una superficie canonica di genere lineare $p^{(1)}=7$, costruendo una superficie del sesto ordine F_6, la quale abbia una cubica piana doppia: tale è la F_6 irriducibile del fascio individuato da due superficie del sesto ordine, ciascuna spezzata in due superficie cubiche passanti per una data curva piana del terzo ordine.

Passiamo al caso $p=4$; $p^{(1)}=8$; $p^{(2)}=7$.

Per costruire il tipo generale di questa superficie canonica si è condotti a ricercare una F_7 con curva doppia C_7, del settimo ordine, che appartenga ad una quadrica F_2, e costituisca la curva di contatto della F_2 con una superficie del settimo ordine. La costruzione di questa curva di contatto conduce a dimezzare il sistema lineare segato sopra una quadrica dalle F_7. Tenendo presente la rappresentazione piana della quadrica, si vede che questo dimezzamento non è possibile qualora la quadrica non sia un cono. Nel caso del cono rappresentato sopra un piano mediante il sistema delle coniche con due punti base infinitamente vicini A, A', si può costruire la C_7 prendendo come immagine una C'_7 che passi 5 volte per A e 2 per A': invero la curva composta di due C'_7 ha in A e A' le molteplicità effettive 10 e 4, che equivalgono alle molteplicità virtuali 7 e 7. Si pone ora la domanda <u>se la C_7 così costrui-</u>

ta, appartenente ad un cono e passante triplamente per il vertice, sia in realtà curva doppia di una superficie F_7 irriducibile (che risulterà quindi essere una superficie canonica per cui $p=4$, $p^{(1)}=8$). Senza spingere avanti l'esame della questione, basterà qui avvertire che esistono almeno particolari superficie canoniche d'ordine 7 ($p=4$; $p^{(1)}=8$) possedenti una retta tripla e due coniche doppie in piani per la retta. Infatti si considerino due coniche C e K aventi in comune due punti A e B: si potrà costruire la F_7 come combinazione lineare di due superficie del seguente tipo: una F_7 formata dei piani di C e K contati due volte e di una qualsiasi F_3; ed una superficie costituita da una quadrica passante per C e K contata due volte, e da tre piani per AB.

Altro caso: $p=4$; $p^{(1)}=9$; $p^{(2)}=8$.

Se si suppone che la superficie canonica generale dell'ottavo ordine F_8, abbia una curva doppia (e non di molteplicità più elevata), questa sarà di ordine 12 ed apparterrà ad una superficie cubica φ_3, costituente con i piani dello spazio, le superficie aggiunte del quarto ordine. La C_{12} doppia sarà una curva del sistema metà di quello segato su φ_3 dalle superficie dell'ottavo ordine, e quindi costituirà la curva di contatto della φ_3 con una F_8. Si noti però che la C_{12} non può appartenere ad una φ_4 irriducibile, perchè altrimenti il genere p risulterebbe maggiore di quattro. S'incontra così il problema di dimezzare il sistema delle C_{24} segnate su φ_3 dalle F_8, cercando una metà che non sia intersezione completa con una φ_4.

Per trattare questa questione si ricorrerà alla rappresentazione piana della φ_3 (supposta irriducibile): e da essa, intanto, apparirà subito che il problema non ha soluzione se la φ_3 è priva di punti doppi. Si è allora portati a considerare una superficie cubica φ_3 dotata di quattro punti doppi, nascenti da altrettanti punti tripli della C_{12} e della F_8 che vogliamo costruire. Tale φ_3 è rappresentata dalle curve del terzo ordine passanti per tre coppie di punti infinitamente vicini (A, A'), (B, B') e (C, C'), situati sopra una conica K; e la C_{12} richiesta ha per immagine una curva del nono ordine C'_9 che ha in A un punto quadruplo con una tangente sulla retta AA', ed analogo comportamento nelle coppie di punti (B, B'), (C, C'): infatti le molteplicità effettive della curva costituita da due C'_9 nelle coppie di punti infinitamente vicini (A, A'), (B, B') e (C, C'), sono 8 e 2, equivalenti alle molteplicità virtuali 5 e 5. Si pone quindi la domanda <u>se la C_{12} così determinata, sarà effettivamente curva doppia di una F_8 irriducibile</u>, ed inoltre <u>se tale F_8</u>, supposta esistente, <u>rappresenterà il</u>

tipo canonico più generale a cui si possono ricondurre le superficie di caratteri $p=4$ e $p^{(1)}=9$. Senza spingere avanti l'esame di tali questioni, ci limiteremo a costruire una superficie canonica particolare del tipo in discorso: e cioè una F_8 dotata di una retta quadrupla x e di 3 coniche doppie in piani per x. Tale è la superficie irriducibile del fascio individuato da una F_4 con retta doppia x, contata due volte, e dalla superficie dell'ottavo ordine costituita da tre piani per x, ciascuno da contarsi due volte, e da una quadrica.

Nelle costruzioni precedenti abbiamo considerato valori del $p^{(1)} \geq 6$. Che cosa accade quando – sempre per $p=4$ – si voglia prendere il genere lineare $p^{(1)} < 6$? Il sistema canonico di una superficie siffatta non può essere semplice, perchè altrimenti esso avrebbe per immagine una superficie del quarto ordine (al massimo) la quale è di genere $p=1$ (o $p=0$). In tal caso quindi – se le ipotesi sono possibili – la superficie canonica, immagine del sistema canonico, risulta multipla. (*)

Ora una superficie per cui $p=4$ e $p^{(1)}=5$ esiste realmente: tale è, ad esempio, la F_6 del sesto ordine, con due rette doppie sghembe fra loro. Sulla F_6 il sistema canonico è segato dalle ∞^3 quadriche passanti per quelle rette (onde $p=4$

(*) Cfr. § 10.

e $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = 4$), ed appartiene all'involuzione segata dalle rette della congruenza biassiale che ha per assi le due rette doppie (∞^2 rette ad esse incidenti). Perciò il sistema canonico di F_6 è rappresentato doppiamente sopra una quadrica, con curva di diramazione C_{12} del dodicesimo ordine: le sezioni piane di questa quadrica sono immagini doppie di curve di genere 5, sulle quali esiste una g_2^1 che ha appunto 12 punti doppi.

Se il genere p è maggiore di quattro, la superficie canonica F_n non appartiene allo spazio ordinario. La sua costruzione diretta importa allora considerazioni su cui ci fermeremo nel paragrafo successivo. Ma si può giungere ugualmente alla sua determinazione pure restando nello spazio ordinario: basterà infatti costruire una immagine della F_n in S_3, la quale risulterà dotata di punti e linee multiple opportune.

Per esempio consideriamo nello spazio ordinario S_3, una superficie F_6 del sesto ordine, con conica doppia C_2: su di essa il sistema canonico $|K_8|$ è segato (fuori di C_2) dalle ∞^4 quadriche passanti per C_2, onde $p = 5$ e $p^{(1)} = 9$. La superficie canonica F_8 immagine di $|K_8|$ appartiene ad uno spazio a quattro dimensioni S_4 e possiede un punto doppio O (corrispondente alla conica ulteriore intersezione di F_6 col piano di C_2); e la F_6 si può riguardare come proiezione della F_8 da O in S_3, dato che tra le φ_2 aggiunte sono quelle spezzate nel piano di C_2 e in un ulteriore piano variabile.

Consideriamo ora una quadrica V_3^2 di S_4, la quale contenga il cono che proietta da O la conica C_2 (cosicchè sarà tangente in O all'iperpiano che congiunge O col piano di C_2): nella *proiezione stereografica* della V_3^2 da O in S_3, le sezioni iperpiane di V_3^2 hanno per immagini le quadriche di S_3 passanti per C_2. Ne segue che la nostra superficie F_8 è situata sulla V_3^2. Inoltre *la F_8 è intersezione della quadrica V_3^2 con una varietà del quarto ordine, che tocca la V_3^2 in O*: infatti il sistema segato su V_3^2 dalle varietà del quarto ordine è rappresentato in S_3 dalle superficie dell'ottavo ordine passanti quattro volte per C_2; ora la F_6 – immagine di F_8 – insieme al piano di C_2 contato due volte, dà appunto una superficie siffatta, e poichè il piano di C_2 rappresenta l'intorno di O, abbiamo che la F_8 appartiene al sistema somma del quadruplo di quello delle sezioni iperpiane di V_3^2, e del doppio della curva (infinitesima) costituita dall'intorno di O; sistema che è segato dalle varietà del quarto ordine tangenti alla V_3^2 in O.

Si noti che una quadrica di S_4 ed una varietà del quarto ordine s'intersecano sempre secondo una superficie canonica F_8, anche se non si verifica la condizione accidentale di contatto nel punto O che abbiamo sopra trovata, perchè l'esistenza di un punto doppio sopra la F_8 non ha influenza sul suo genere.

Proiettando la F_8 nello spazio ordinario da un punto di V_3^2 che non stia sulla F_8 stessa, si ottiene una superficie pure dell'ottavo ordine con conica quadrupla. Se invece proiettiamo la F_8 da un punto generico dello S_4, si ottiene una superficie F_8' con una curva doppia C_{12} del dodicesimo ordine, che appartiene ad una superficie cubica φ_3: infatti le curve canoniche segate su F_8 dagli iperpiani per il centro di proiezione, vengono proiettate nelle sezioni piane di F_8'. Osservando che per la curva doppia C_{12} di F_8' passano ∞^4 superficie (aggiunte) del quarto ordine φ_4, la F_8' si costruisce subito: si prenda una superficie cubica φ_3 e sopra di essa si determini la C_{12} intersezione con una φ_4; per la C_{12} passano ∞^4 superficie del quarto ordine, e allora se consideriamo due superficie dell'ottavo ordine ciascuna spezzata in due φ_4 per C_{12}, queste determinano un fascio la cui superficie irriducibile è una F'_8 del tipo richiesto.

Passiamo ad un altro esempio. Nello spazio ordinario si abbia una superficie del sesto ordine F_6, con cinque punti tripli. Sopra di essa il sistema canonico $|K_{12}|$ è segato dalle quadriche φ_2 passanti per quei punti tripli; quindi la F_6 è di genere superficiale $p=5$ e di genere lineare $p^{(1)}=10$. Il sistema $|K_{12}|$ ha per immagine una superficie F_9 del nono ordine, appartenente allo spazio a quattro dimensioni, e contenuta in una varietà cubica a 3 dimensioni V_3^3, la quale viene rappresentata dal sistema delle quadriche φ_2 per i cinque punti tripli di F_6. Questa V_3^3 possiede dieci punti doppi corrispondenti alle rette che uniscono a due a due i 5 punti tripli di F_6, e quindi è una nota varietà studiata da <u>Segre</u> e <u>Castelnuovo</u>.

Ora osservando che in S_3 la F_6, immagine di F_9, fa parte del sistema triplo di quello delle quadriche φ_2, si ha che <u>la F_9 di S_4 è intersezione della varietà di Segre-Castelnuovo con una varietà cubica.</u>

Ad un altro caso particolare della F_9 intersezione di due varietà cubiche, si è condotti dalla superficie del settimo ordine F_7 dello spazio ordinario, dotata di una sestica doppia C_6 (di genere 4) intersezione completa di una quadrica φ_2 e di una superficie cubica φ_3. Su F_7 il sistema canonico $|K_9|$ è segato dalle (∞^4) superficie cubiche φ_3 passanti per C_6, ed ha per immagine la F_9 di S_4, la quale possiede un punto doppio O (corrispondente alla conica intersezione di F_7 con la φ_2 passante per C_6, fuori della C_6 stessa). Dal punto O la F_9 è proiettata nella data F_7 di S_3. Riferendo proiettivamente le φ_3 per C_6 agli iperpiani di S_4, si ottiene in S_4 una varietà cubica V_3^3 avente anch'essa un punto doppio in O, e le cui sezioni iperpiane dànno appunto come proiezione da O le φ_3. La nostra F_9 è intersezione di tale varietà V_3^3 con una altra, pure del terzo ordine, passante per O: infatti la superficie somma della F_7 e di φ_2 è immagine - in S_3 - di una superficie passante per O ed appartenente al sistema triplo delle sezioni iperpiane di V_3^3.

Questo procedimento è invertibile: dalla F_9 dello S_4, intersezione di una varietà cubica V_3^3 con un punto doppio O e di una seconda varietà pure di terzo ordine, passante semplicemente per O, si ottiene - proiettandola da O nello spazio ordinario - una superficie F_7 con curva doppia del sesto ordine, per la quale passa una quadrica ed una superficie cubica (*).

(*) Infatti in S_4 un iperpiano per O incontra la V_3^3 lungo una superficie cubica con un punto doppio in O, la quale possiede sei

Ne segue che la F_9 suddetta è una superficie canonica di S_4.

Si noti che la F_9 si può pure definire come intersezione di due varietà cubiche che si toccano in 0: ma la condizione di contatto può togliersi, perchè un punto doppio non ha alcuna influenza sopra il genere della F_9, e quindi <u>la superficie intersezione di due varietà cubiche generiche di S_4, è una superficie canonica.</u>

Ora ci domandiamo: a questa conclusione si giunge anche direttamente dallo studio del caso generale della F_9 intersezione di due varietà cubiche generiche di S_4?

Vediamo a quali problemi dia luogo una tale ricerca.

Proiettiamo la F_9 da un punto generico 0 di S_4 in una superficie F'_9, del nono ordine, nello spazio ordinario. Poichè la F_9 è canonica, la F'_9 deve avere tra le sue curve canoniche le sezioni piane e quindi possiederà una curva doppia C_{18} di ordine 18, situata sopra una superficie φ_4 del quarto ordine. È noto che da ogni punto di una varietà cubica di S_4 escono sei rette situate per intero sopra di essa, ed appar-

---

rette uscenti da 0 e situate sopra un cono quadrico: esse incontrano la F_9 – fuori di 0 – in due punti, e dànno quindi luogo a sei punti della curva doppia di F_7 situati in uno stesso piano e sopra una conica.

tenenti ad un cono quadrico (di un S_3)(*). Consideriamo allora il fascio individuato dalle due varietà cubiche che s'incontrano lungo la F_9: per il punto O passa una varietà di questo fascio, e le sei rette di essa che escono da O, dànno luogo a sei punti tripli della C_{18}, situati sopra una conica C_2 e che risultano doppi per la φ_4. Si osservi inoltre che – come è subito visto – il piano di C_2 incontra la φ_4 nella C_2 stessa contata due volte, cioè tocca la φ_4 lungo C_2.

La curva doppia C_{18} è tale che il suo doppio appartiene al sistema segato sulla φ_4 dalle superficie del nono ordine, al quale sistema – per quanto precede – appartiene pure il doppio del sistema somma della conica C_2 e del sistema $|C_{16}|$ segato su φ_4 dalle superficie del quarto ordine: possiamo allora asserire che la C_{18} sia una curva del sistema somma di C_2 e di $|C_{16}|$? Sembra che la cosa sia così, e noi lasciamo al lettore di approfondire tale questione.

Se questa proprietà sussiste, è allora facile costruire la C_{18} partendo da una superficie del quarto ordine che tocchi un piano lungo una conica, ed abbia su questa sei punti doppi;

(*) Infatti l'iperpiano tangente in quel punto, incontra la varietà cubica in una superficie cubica con un punto doppio, e da questo escono sei rette di tale superficie, appartenenti al cono ivi tangente.

resta poi la questione della effettiva esistenza di una superficie del nono ordine F'_9 avente codesta C_{18} come curva doppia. La costruzione iperspaziale della F_9 ci assicura a priori che la F'_9 deve esistere, almeno per particolari curve C_{18}.

Altre superficie canoniche di S_4 $(p=5)$ si possono ottenere tornando a considerare (in S_3) la F_6 dotata di cinque punti tripli, e sostituendo tutti od alcuni di questi, con altrettanti tacnodi. A seconda che si hanno uno, due, tre, quattro, o cinque tacnodi si ottiene in S_4, rispettivamente, una superficie canonica di ordine 10, 11, 12, 13, o 14. Sopra la varietà di <u>Segre</u> - <u>Castelnuovo</u> V_3^3 rappresentata in S_3 dalle quadriche φ_2 per cinque punti, all'intorno di ciascuno di essi corrisponde un piano: e la F_6 che ha - per esempio - un tacnodo e quattro punti tripli in quei punti base, è immagine di una superficie F_{10} della V_3^3, appartenente al sistema somma del sistema triplo di quello delle sezioni iperpiane, e del piano corrispondente al tacnodo; ma tale superficie ha inoltre su questo piano una retta doppia.

Non procederemo più oltre a costruire superficie canoniche di genere $p>4$, partendo dall'esame delle singolarità delle loro immagini nello spazio ordinario: si passerà invece, nel paragrafo seguente, alla loro costruzione diretta negli iperspazi.

Ma prima conviene osservare come gli esempi sopra svolti - e quelli che precedono per il caso $p=4$ - suggeriscono un procedimento generale per trattare il problema della costruzione di una superficie canonica, e le questioni a cui esso dà luogo.

Ci riferiremo alla superficie canonica di ordine n e genere p, nello spazio S_{p-1} a $p-1$ dimensioni, la quale è proiettata da punti esterni in una superficie F_n, dello stesso ordine n, nello spazio ordinario: sopra la F_n i piani segano curve canoniche, ma esse non esauriscono il sistema canonico, cioè la F_n è una <u>superficie canonica non normale</u>.

La F_n possiederà una curva doppia γ, dotata di un certo numero di punti tripli (a tangenti non complanari), che saranno tripli anche per la F_n (*). Tra le aggiunte φ_{n-4} d'ordine $n-4$ della F_n, sono quelle spezzate nei piani e in una superficie residua φ_{n-5} che passa semplicemente per γ, ed ha perciò dei punti doppi

---

(*) Cfr. §3.

nei punti tripli di γ: inoltre la φ_{n-5} è tale che la sua intersezione con la F_n è costituita per intero dalla γ. La γ è allora dell'ordine

$$\frac{n(n-5)}{2},$$

ed il suo doppio appartiene al sistema segato sulla φ_{n-5} dalle superficie d'ordine n. Si presenta quindi il problema di dimezzare questo sistema, cioè di ricercare sopra una φ_{n-5} una curva d'ordine

$$\frac{n(n-5)}{2}$$

lungo la quale la φ_{n-5} tocchi una F_n. Da quanto si è detto - ed è confermato dagli esempi sopra esposti - segue che la cosa sarà possibile solo per particolari superficie φ_{n-5} d'ordine $n-5$, dotate di un conveniente numero di punti doppi.

Una volta trovata una curva dell'ordine suddetto, che sia curva di contatto della φ_{n-5} con una F_n, resta poi da verificare se effettivamente esista una superficie d'ordine n passante due volte per γ.

Si entra così in un campo in gran parte inesplorato, in cui si incontrano questioni di esistenza trattate solo per casi particolari, e con risultati non sempre molto espressivi. Ma una trattazione esauriente di tali problemi non pare sia troppo facile!

Ad ogni modo, se sia risoluta la questione d'esistenza e quindi costruita la F_n suddetta, il genere p della superficie canonica di S_{p-1}, di cui la F_n è proiezione, si ottiene calcolando il numero delle superficie φ_{n-4} aggiunte alla F_n e linearmente indipendenti. Codesto genere risulterà legato al numero dei punti tripli della curva doppia di F_n.

54.- LE SUPERFICIE CANONICHE E LA GEOMETRIA DELLE VARIETÀ A TRE O PIÙ DIMENSIONI.

Altri esempi di superficie canoniche iperspaziali si possono ottenere con costruzione diretta, applicando i risultati della geometria delle varietà a più di due dimensioni.

Quando si passa dalle superficie alle varietà a tre o più dimensioni, s'incontrano tre ordini di proprietà:

a) proprietà d'ordine generale che si presentano come naturale estensione di quelle delle curve e superficie, e che quindi è lecito ammettere come note;

b) proprietà più o meno previste o prevedibili come estensione di quelle delle superficie, che tuttavia possono esigere dimostrazioni meno evidenti e talvolta anche difficili;

c) proprietà affatto nuove ed inaspettate che non hanno alcun riscontro nella teoria delle superficie.(*)

(*) Come esempio ricordiamo i risultati di Fano ed Enriques intorno alle questioni di razionalità (involuzioni dello spazio, non razionali; diversi tipi di varietà contenenti una congruenza di curve razionali; ecc.).

Fra i lavori sulla geometria delle varietà citiamo F. Se-

Prenderemo in considerazione soltanto il primo ordine di problemi concernenti la teoria generale dei sistemi lineari di superficie che appartengano ad una varietà a tre dimensioni, lo studio dei sistemi aggiunti, del sistema canonico e degli invarianti a cui esso dà luogo. Riferiamoci per semplicità di discorso, ad una varietà a tre dimensioni V, priva di singolarità in un conveniente iperspazio; e consideriamo sopra di essa i sistemi lineari di superficie, senza punti e linee base. Una superficie F, sopra V, dà luogo, in generale, ad un sistema lineare completo |F|; e si può parlare - come per i sistemi lineari di curve sopra una superficie - di <u>somma</u> e <u>sottrazione</u>.

Se il sistema |F| è di dimensione almeno uguale a tre, ogni sistema triplamente infinito contenuto in |F| possiede una <u>superficie jacobiana</u> F_j, luogo dei punti doppi delle sue superficie; le F_j relative ai vari sistemi ∞^3 estratti da |F| sono tutte <u>equivalenti</u> fra loro, ed individuano un sistema lineare completo che si dirà <u>sistema</u>

---

veri: "Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche„ (Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. XXVIII, 1909); e A. Rosenblatt: "Varietà algebriche a tre e più dimensioni„ (Atti del Congresso internazionale dei Matematici - Bologna, 1928), che è un rapporto completo sui risultati conseguiti in questo campo. In esso si trovano anche estese indicazioni bibliografiche.

<u>jacobiano</u> di $|F|$: lo indicheremo con $|F_j|$. Analogamente a quanto accade per i sistemi di curve, ha luogo il <u>teorema fondamentale</u> espresso dalla relazione:

$$|(F+\varphi)_j| = |F_j + 4\varphi| = |4F + \varphi_j|;$$

e la differenza

$$|F_j - 4F|$$

definisce il <u>sistema canonico</u> di V (effettivo o virtuale), mentre il <u>sistema aggiunto</u> ad $|F|$ è dato da:

$$|F'| = |F_j - 3F|.$$

Se la varietà V_n, d'ordine n, appartiene allo spazio a quattro dimensioni S_4, essa sarà dotata, in generale, di una superficie doppia Γ (immagine delle <u>coppie neutre</u> del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà iperspaziale di cui la V_n sia proiezione in S_4): e sopra la V_n il sistema canonico viene segato dalle <u>varietà aggiunte</u> Φ_{n-5} d'ordine $n-5$, passanti semplicemente per la superficie doppia Γ.

Invece le aggiunte Φ_{n-4} segheranno sulla V_n il sistema aggiunto a quello delle sezioni iperpiane.

Le superficie F' del sistema aggiunto ad un sistema $|F|$, incontrano la F lungo curve canoniche; e, inversamente, questa proprietà caratterizza le superficie aggiunte F', quando il sistema $|F|$ non abbia *superficie fondamentali*.

I caratteri del sistema canonico di una varietà V conducono ad *altrettanti caratteri invarianti* della V stessa (già incontrati da Noether); essi sono:

la dimensione del sistema canonico aumentata di un'unità (numero delle superficie canoniche linearmente indipendenti), che dà il *genere geometrico principale* P (o P_g) di V;

il *genere geometrico* p_g, ed il *genere lineare* $p^{(1)}$ delle superficie canoniche, che portano, rispettivamente, al *genere superficiale geometrico* p_g e al *genere lineare* $p^{(1)}$ della varietà V.

In quanto al genere x della curva K intersezione di due superficie canoniche, e al grado y del sistema canonico (numero dei punti comuni a tre superficie canoniche), essi non costituiscono dei nuovi caratteri poichè si esprimono per i precedenti in base alle relazioni:

$$2x + y - 1 = p^{(1)}$$

$$4y = p^{(1)} - 1 = p^{(2)},$$

le quali traducono il fatto che $|2K|$ costituisce il sistema canonico della superficie canonica.

Quindi, per questa via, si hanno in realtà tre soli caratteri indipendenti, come era già stato previsto da Noether.

Di fronte ai caratteri geometrici, si possono definire i <u>caratteri numerici</u>: <u>genere numerico principale</u> P_a, e <u>genere superficiale numerico</u> p_a (*).

Dalle cose dette segue che se si ha in S_4 una superficie F completa intersezione di due varietà V_n e V_m, degli ordini n ed m e prive di singolarità, sopra la F il sistema canonico (completo) è segato dalle varietà d'ordine $n+m-5$ (**), ciò che costituisce l'estensione del noto <u>teorema di Noether</u> per le curve gobbe (***)

Se la F non è completa intersezione di V_n e V_m, ma queste s'incontrano ulteriormente lungo un'altra superficie F^*, allora sopra la F il sistema canonico è segato dalle varietà d'ordine $n+m-5$ che passano per F^*.

Analogamente, se nello spazio ad r dimensioni si considerano $r-2$ varietà ad $r-1$ dimensioni (ipersuperficie) degli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-2}$,

---

(*) Cfr. Severi, l. cit. nella nota (*) a pag. 331 .

(**) Cfr. F. Severi: " Su alcune questioni di postulazione ,, (Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. XVII, 1903).

(***) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. V, § 47 (vol. III, pag. 528).

prive di singolarità, queste s'incontrano in una superficie $F+F^*$, e sulla F il sistema canonico è segato dalle varietà (ipersuperficie) dell'ordine $\Sigma n-r-1$ passanti per F^* (*).

Dalle nozioni precedenti è facile dedurre esempi di superficie canoniche iperspaziali.

I primi tipi immediati si hanno dalle superficie intersezioni complete di opportune varietà, prive di punti singolari. Essi si ottengono prendendo $r-2$ varietà (ipersuperficie) $V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots\ldots$ $\ldots\ldots, V_{n_{r-2}}$ dello spazio ad r dimensioni, i cui ordini (≥ 2) siano tali che si abbia

$$\Sigma n - r - 1 = 1 .$$

Così in S_4 si trova la superficie canonica F_8 ($p=5$, $p^{(1)}=9$) intersezione di una quadrica e di una ipersuperficie del quarto ordine; e la F_9 intersezione di due varietà cubiche, che già avevamo incontrata nel paragrafo precedente.

Nello S_5 si ha la superficie del dodicesimo ordine, intersezione di due quadriche e di una varietà cubica: per essa è $p=6$ e $p^{(1)}=13$.

Analogamente nello spazio a 6 dimen-

(*) Cfr. ancora Severi l. cit. nella nota (**) a pag. 335.

sioni, la superficie intersezione di quattro quadriche è una superficie canonica di genere superficiale $p=7$ e di genere lineare $p^{(1)}=17$.

Un altro tipo di superficie canoniche si ottiene considerando una varietà a tre dimensioni V, priva di singolarità, le cui sezioni iperpiane F siano superficie con tutti i generi uguali ad uno, d'ordine $2\pi-2$ (normali in S_π (*)); la V stessa sarà di ordine $2\pi-2$ in $S_{\pi+1}$ (**).

Siccome le F non possiedono curve canoniche, il sistema $|F'|$ aggiunto ad $|F|$ sopra V, sarà costituito da superficie d'ordine zero (e tuttavia avrà un'esistenza virtuale quando la V sia priva di singolarità), e il sistema aggiunto

(*) Cfr. § 52.

(**) Varietà di questo tipo sono date dai coni che proiettano una superficie con i generi uguali ad uno, da un punto esterno. Per i primi valori dell'ordine queste famiglie di coni sono contenute in famiglie più ampie di varietà senza punti singolari. Ma se anche ciò non dovesse valere quando si sale ad ordini più elevati, ad ogni modo l'intersezione di un cono con una quadrica che non passi per il suo vertice, darà ugualmente superficie canoniche. Il ragionamento del testo condurrà ancora a questa conclusione, con piccole modificazioni. Si dovrà tener conto dell'influenza che il vertice del cono V ha sulla determinazione del sistema delle superficie aggiunte al sistema delle sezioni iperpiane; ma infine basterà rilevare che questa influenza è la stessa che esso ha sulla determinazione delle aggiunte al sistema delle sezioni quadriche.

a $|2F|$ coinciderà col sistema $|F|$ stesso. Quindi, sopra una superficie di $|2F|$ intersezione della V con una quadrica di $S_{\pi+1}$, le F segheranno curve canoniche, cioè <u>le superficie intersezioni di una V, d'ordine $2\pi-2$ in $S'_{\pi+1}$, con quadriche, sono superficie canoniche.</u> Per esse: $p^{(2)}=2\pi-4$ e $p=\pi+2$.

Appartengono a questo tipo la superficie canonica intersezione di due varietà del quarto e del secondo ordine in S_4 (*); e quella comune a due varietà del secondo ordine e ad una del terzo in S_5: infatti una quadrica ed una ipersuperficie cubica di S_5 s'incontrano in una varietà a tre dimensioni, d'ordine sei, le cui sezioni iperpiane sono superficie con i generi uguali ad uno (**). Lo stesso si dica della superficie intersezione di quattro quadriche in S_6 (***).

Mostriamo infine un altro gruppo di <u>superficie canoniche che si ottengono intersecando con una ipersuperficie cubica una varietà razionale a tre dimensioni V, d'ordine r normale in S'_{r+1}</u> $(r\leq 9)$, le cui sezioni con gli S_{r-1} saranno curve ellittiche normali. Una tale V (che non può essere un cono di seconda specie) può ritenersi, in generale, priva di singolarità.(****)

(*) Cfr. § 52.

(**) Cfr. § 52.

(***) Cfr. ancora § 52.

(****) Vedi § 52.

Se con F indichiamo le sezioni iperpiane della V, le superficie del sistema $|2F|$ segato su V dalle quadriche di S_{r+1}, hanno tutti i generi uguali ad uno per modo che $|(2F)'|$ è d'ordine zero, e quindi (essendo la V priva di singolarità):

$$|(4F)'| = |2F|,$$

da cui:

$$|(3F)' + F| = |2F|$$

$$|(3F)'| = |F|.$$

Quindi sopra le superficie di $|3F|$ – che sono sezioni della V con ipersuperficie cubiche – gli iperpiani segano curve canoniche. Per tali superficie si ha $p^{(2)} = p^{(1)} - 1 = 3r$, $p = r+2$.

Rientrano in questa categoria di superficie canoniche, la superficie intersezione di due varietà cubiche in S_4; e quella comune a due quadriche e ad una ipersuperficie del terzo ordine in S_5 (*).

(*) Cfr. § 52.

55. CURVE CANONICHE RIDUCIBILI ($p^{(1)}=1$).

La costruzione della superficie canonica come modello di una classe di superficie algebriche, cade certo in difetto quando il genere superficiale sia minore di quattro ($p<4$), il sistema canonico essendo allora una rete ($p=3$) di grado $p^{(1)}-1\geq 2$, oppure un fascio. Più generalmente essa cade in difetto:

1) quando le curve canoniche siano composte con quelle di un fascio, o comunque riducibili;

2) quando il sistema canonico non sia semplice, ma appartenga ad una involuzione I_n d'ordine $n\geq 2$, cioè le curve canoniche passanti per un punto abbiano di conseguenza altri $n-1$ punti in comune, coniugati nella I_n.

In molti di questi casi si può ricorrere, anzichè ad una superficie canonica, ad una superficie bicanonica, o pluricanonica, avente come sezioni iperpiane le curve bicanoniche, o pluricanoniche. Tuttavia l'ipotesi 1) corrisponde ad una eccezione essenziale, cioè ad un caso in cui <u>le curve canoniche,</u> e con esse <u>le bicanoniche e pluricanoniche, riescono sempre riducibili</u>: è il caso delle <u>superficie di genere lineare $p^{(1)}=1$</u> (<u>Noether</u>).

Una superficie per cui $p^{(1)}=1$ - se è di genere superficiale $p>1$ - possiede un fascio di curve ellittiche: e ciò accade anche nel caso $p=1$, purchè esista una effettiva curva canonica d'ordine maggiore di zero. Infatti per $p^{(1)}=1$, essendo $p^{(2)}=p^{(1)}-1=0$, il sistema canonico, e tutti i sistemi pluricanonici sono di grado zero, e quindi composti con le curve di un fascio di curve ellittiche (*).

Viceversa: se una superficie contiene un fascio di curve ellittiche, queste non hanno intersezioni con le curve canoniche (e pluricanoniche), le quali perciò debbono essere composte con le curve del fascio stesso. Si noti che questa conclusione sussiste anche nel caso in cui il fascio di curve ellittiche non sia lineare, ma irrazionale, la superficie risultando allora irregolare.(**)

È facile costruire esempi di superficie di genere p qualunque, possedenti un fascio di curve ellittiche. Tali sono le superficie d'ordine n, con retta $(n-3)$-pla, le cui aggiunte d'ordine $n-4$ sono composte con $n-4$ piani.

Altro esempio: superficie F_n d'ordine n, con una retta $\underline{r}$ di molteplicità $n-4$, e curva doppia C_m d'ordine m, appoggiata in $n-2$ punti alla retta multipla $\underline{r}$. Le φ_{n-4} aggiunte alla

(*) Cfr. § 9.

(**) Cfr. l'osservazione al termine del § 49.

F_n, sono composte della rigata φ_s costituita dalle corde di C_m incidenti ad $\underline{r}$, e poi da piani per la $\underline{r}$ stessa. Il grado s della anzidetta rigata φ_s viene determinato dall'equazione che esprime l'ordine della curva intersezione di F_n con φ_s:

$$sn = (s-1)(n-4) + 2m$$

da cui

$$s = \frac{2m-n+4}{4} .$$

Pertanto le curve canoniche di F_n sono composte con $n-4-s$ quartiche ellittiche, sezioni di altrettanti piani per $\underline{r}$, e si ha:

$$p = n-3-s.$$

Lo studio generale delle superficie con un fascio di curve ellittiche di genere lineare $p^{(1)}=1$, è stato fatto da <u>Enriques</u> che le ha classificate, dimostrando che dipendono da tre numeri interi arbitrari: il genere geometrico p_g e numerico p_a la cui differenza eguaglia – in generale (e precisamente per $p_a \geq 0$) – il genere del fascio di curve ellittiche, ed un terzo carattere che egli designa come <u>determinante</u> della superficie, cioè l'ordine del più piccolo gruppo di punti che si può determinare razionalmente sopra una curva ellittica del fascio. Nel caso regolare $p_g = p_a$, le superficie di determinante n si possono trasformare in superficie di un certo ordine $n+r$, con una retta r-pla, per modo che i piani per essa incontrino ulteriormente lungo curve ellittiche; però non è possibile trasformare queste curve in altre che abbiano ordine minore di $\underline{n}$ (*).

(*) Cfr. Enriques: "Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali" (Rend. Lincei, 2 dicembre 1906); "Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=1$" (Rend. R. Accad. delle Scienze, Bologna, 9 dicembre 1906); "Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche" (Rend. Lincei, 7 gennaio 1912); "Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)}=1$" (Rend. Lincei, 15 febbraio 1914).

56.- SISTEMI CANONICI NON SEMPLICI E PIANI DOPPI

Si abbia una superficie F di genere lineare $p^{(1)}>1$, le cui curve canoniche siano irriducibili. Può accadere che il sistema canonico - pur essendo di dimensione abbastanza grande - non sia semplice, ma appartenga ad una involuzione I_n di grado n ($n \geq 2$), cosicchè la sua superficie immagine (*superficie canonica*) risulterà multipla (*).

Il *Noether* ha già rilevato che ciò accade necessariamente per le superficie che contengono una *involuzione razionale* I_2, o ciò che è lo stesso, una rete $|C|$ di curve di grado 2, riuscendo così rappresentabili sopra un *piano doppio*.

Invero si può sempre supporre che sulla superficie F - dello spazio ordinario - la rete $|C|$ sia segata dalle rette di una stella, il cui centro O avrà la molteplicità $n-2$ per la F supposta d'ordine n. (**) Allora le superficie φ_{n-4}, d'ordine $n-4$, aggiunte alla F, devono avere in O un punto $(n-4)$-plo e perciò si riducono a coni di vertice O: ma

---

(*) Cfr. § 10.
(**) Cfr. ancora § 10.

le φ_{n-4} segnano sulla F il sistema canonico il quale quindi appartiene alla involuzione I_2, segata dalle rette per O.

A questa conclusione si giunge anche direttamente: infatti sopra la nostra superficie esiste una rete di curve iperellittiche che hanno come serie caratteristica una g_2^1; basta allora notare che sulle curve di questa rete, le curve canoniche segano la serie residua della serie caratteristica.

<u>Nota</u> - A differenza di ciò che avviene sopra le curve, dove le serie canoniche non semplici sono sempre composte con una g_2^1 (curve iperellittiche), per le superficie può anche accadere che il sistema canonico appartenga ad una involuzione d'ordine $n>2$.

Di questo fatto si hanno esempi almeno quando il genere superficiale sia $p=3$ e per il genere lineare si abbia $p^{(1)}>3$: esempi che portano a superficie rappresentabili sopra un piano multiplo canonico d'ordine $p^{(1)}-1$.

Il caso più semplice è dato dalla

superficie F_5 del quinto ordine, con un <u>tacnodo</u> O, per la quale è $p=3$ e $p^{(1)}=4$: sopra la F_5 il sistema canonico $|C|$ è segato dai piani per O, e quindi esso appartiene all'involuzione razionale del terzo ordine, segata sulla superficie dalle rette della stella di centro O.

Per proiezione del punto O, la F_5 si rappresenta sopra un piano triplo con curva di diramazione C_{12} del dodicesimo ordine, dotata di 24 cuspidi situate sopra una curva del 4° ordine. Le rette del piano (contate due volte) dànno le immagini delle curve canoniche C (*).

(*) Sopra una curva canonica C le rette uscenti da O segano una g_2^1 che - essendo la C di genere 4 - possiede 12 punti doppi, i quali vengono proiettati in altrettanti punti della curva di diramazione situati sopra una stessa retta: onde la curva di diramazione è del 12° ordine. Essa è la proiezione della curva jacobiana C_j della rete canonica $|C|$: avendosi $|C_j| = |4C|$, la C_j - e quindi anche la C_{12} - è di genere 31; ne segue che la C_{12} possiede 24 punti doppi che sono cuspidali, non potendo la C_j avere punti doppi apparenti. Il sistema $|(C_j)'|$ aggiunto a $|C_j|$ è dato da $|5C|$, onde sul piano triplo le curve del quinto ordine segano gruppi canonici sulla C_{12}: ma, d'altra parte, sulla C_{12} i gruppi canonici sono determinati dalle curve aggiunte di ordine 9 passanti per le 24 cuspidi di C_{12}, ne segue che tra tali ag-

Se esistano superficie canoniche multiple per $p>3$, è una questione che rimane ancora da approfondire. <u>Castelnuovo</u> ha osservato che se la curva canonica generica contiene una serie lineare g_3^1, la serie caratteristica (antaresidua) del sistema canonico è composta con essa, e quindi il sistema canonico appartiene ad una involuzione del terzo ordine, cioè porta ad una superficie canonica tripla.(*) Ma resta da vedere se tale proprietà possa effettivamente realizzarsi per una superficie con $p>3$.

---

quartica fissa passante per le 24 cuspidi suddette.

Per via analitica questi risultati si ritrovano subito: assumendo il punto O nel punto improprio dell'asse delle z e il piano tacnodale coincidente col piano all'infinito, l'equazione della F_5 si può scrivere (Enriques-Chisini: op. cit., vol. III, pag. 601):

$$z^3 + f_4(xy).\ z + f_5(xy) = 0\ ;$$

e la curva di diramazione sul piano $z=0$, è data da:

$$4f_4^3 + 27f_5^2 = 0.$$

Essa possiede 24 cuspidi che sono nei punti comuni alle due curve

$$f_4 = 0 \qquad , \qquad f_5 = 0,$$

e nei punti all'infinito della $f_4 = 0$.

(*) Cfr. G. Castelnuovo: "Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie" - Nota II, § 2 (Rendic.

57 - GENERALITÀ SUI PIANI DOPPI

Tornando alla superficie F che possiede una rete |C| di grado due, e quindi una involuzione razionale I_2, prendiamo a studiarne la rappresentazione sopra un piano doppio α. Questa si ottiene stabilendo una corrispondenza proiettiva tra la rete delle curve C e quella delle rette del piano; così infatti la F risulta riferita al piano α con corrispondenza (2, 1): ad un punto P' di F (punto base di un fascio di curve C) viene a corrispondere un solo punto P di α, mentre ad un punto P di α corrispondono su F i due punti (variabili) P' e P" (generalmente distinti e che costituiscono un gruppo della I_2) comuni a tutte le curve C omologhe delle rette del fascio di centro P su α.

Il piano α - immagine di |C| (*) - dicesi (con <u>Clebsch</u>) piano <u>doppio</u>: esso appartiene alla <u>classe</u> determinata dalla superficie F e vedremo in qual modo si potrà assumere come <u>modello</u> della classe stessa. (**)

(*) § 10.
(**) § 4.

Il luogo dei punti di α che corrispondono ai gruppi della I_2 formati da due punti coincidenti (in un punto semplice della superficie: cioè coincidenti in senso <u>invariantivo</u>) dicesi <u>curva di diramazione</u> del piano doppio (Uebergangskurve).

Dette x, y le coordinate di un punto P di α, la determinazione delle coordinate X, Y, Z dei <u>due</u> punti di F corrispondenti a P, si ridurrà - in ultima analisi - alla risoluzione di una equazione di secondo grado il cui discriminante - che possiamo sempre supporre ridotto a forma intera - sarà una certa funzione $f(xy)$ della x e della y. Così <u>le coordinate di un punto variabile su F si esprimeranno in funzione razionale di $x, y,$ e $\sqrt{f(x,y)}$, ossia dei punti della superficie $z^2 = f(x,y)$.</u>

Viceversa - come è subito visto - le coordinate di un punto della $z^2 = f(xy)$ si esprimono razionalmente per X, Y, Z, e quindi <u>la superficie</u>

$$\underline{z^2 = f(x,y)}$$

<u>è in corrispondenza birazionale con la F.</u>

Ai punti della curva d'equazione

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

corrispondono sulla F coppie di punti coniugati nella I_2, ma coincidenti fra loro: quindi la (1) costituisce la <u>curva di diramazione</u> purchè se ne tolgano le eventuali componenti che rispondano a curve doppie della superficie, come preciseremo in seguito. Conviene però osservare che può accadere che la (1) non esaurisca la curva di diramazione, della quale può far parte la retta impropria del piano α: ma anche di questo diremo fra breve.

Tutte queste considerazioni appaiono evidenti quando ci si riferisca alla superficie F_n d'ordine n, dotata di un punto O $(n-2)$-plo, su cui la rete $|C|$ è segata dai piani per O e che è birazionalmente identica alla data.(*) Infatti la F_n si rappresenta sul piano doppio α semplicemente proiettandola da O, e la curva di diramazione è la traccia su α del cono circoscritto da O alla F_n, soppresse le parti che proiettano da O le curve doppie (non cuspidali) della F_n.

Due superficie rappresentabili su un piano doppio α con la stessa curva di diramazione $f(xy)=0$ (o con curve di

(*) § 56.

diramazione corrispondentesi in una trasformazione cremoniana del piano α) sono birazionalmente identiche, poichè ambedue in corrispondenza birazionale con la $z^2 = f(xy)$.

Pertanto la superficie

$$z^2 = f(xy)$$

si potrà assumere come <u>modello proiettivo</u> della <u>classe</u> cui appartiene il piano doppio α, il quale risulta così <u>caratterizzato</u> dalla sua <u>curva di diramazione</u> $f(xy) = 0$.

Il piano doppio - o, ciò che è lo stesso, la <u>classe</u> delle superficie aventi per <u>campo di razionalità</u> $x, y, \sqrt{f(xy)}$ - si indicherà col simbolo

$$\{x,\ y,\ \sqrt{f(xy)}\}.$$

In ciò che precede siamo partiti da una superficie F contenente una rete di curve C di grado due, e - riferendo questa alla rete delle rette del piano α - abbiamo rappresentato F sopra il piano doppio α, ottenendo in esso una curva di diramazione

$$f(xy) = 0.$$

Si è visto a priori che la superficie F riesce birazionalmente identica alla

$$z^2 = f(x,y).$$

La trasformazione effettiva che riconduce la F a questo tipo, si ottiene nel modo che segue.

Anzitutto - come si è già detto - è lecito supporre che le curve C siano segate sopra F dai piani per il punto all'infinito dell'asse z (che designamo con O), cosicchè la rappresentazione si ottenga per proiezione da O.

Trasformiamo allora F mediante una trasformazione di <u>De-Jonquières</u> che lasci ferme le rette per O, e unti nel piano $z=0$ la superficie luogo dei punti coniugati armonici di O rispetto alle coppie segate dalle rette per O. La superficie trasformata F' riuscirà simmetrica rispetto al piano $z=0$, e quindi avrà un'equazione della forma:

$$z_1^2 = \frac{\varphi(x,y)}{}$$

dove φ e ψ sono polinomi in x, y.

Ora si trasformi nuovamente la F' lasciando ferme la x e la y, e cambiando la z in $\psi(xy) . z$: si giunge così alla superficie

$$z^2 = \varphi(xy) . \psi(xy).$$

Ma si riconosce subito che deve essere

$$f(xy) = \varphi(xy) . \psi(xy),$$

$f(xy)$ designando la curva di diramazione del piano doppio che si ottiene direttamente per proiezione della F da O. Infatti questa curva di diramazione non cambia passando da F ad F', e per la F' è costituita dall'insieme delle due curve $\varphi = 0$ e $\psi = 0$: la prima delle quali è curva di contatto di un cono circoscritto da O, mentre la seconda è immagine di una curva di contatto infinitamente vicina ad O stesso. (Se la $f(xy) = 0$ si suppone irriducibile e coincidente con la $\varphi(xy) = 0$, il polinomio ψ dovrà ridursi ad una costante).

Vogliamo ora precisare meglio alune osservazioni già innanzi accennate.

Anzitutto che la curva di diramazione $f(xy)=0$ di un piano doppio, può supporsi privo di componenti multiple. Infatti se il polinomio $f(xy)$ contiene un fattore quadratico φ^2 per modo che

$$f(xy) = \varphi^2(xy) \cdot f_1(xy),$$

la superficie

$$z^2 = f(xy),$$

avrà come doppia la curva $\varphi = 0$, e si ridurrà alla

$$Z^2 = f_1(XY)$$

con la trasformazione birazionale

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = \varphi(xy) \cdot Z,$$

la quale cambia il radicale $z = \sqrt{\varphi^2 f_1}$ in $Z=\sqrt{f_1}$ Così dalla curva $f(xy)=0$ si potranno sopprimere un numero pari di volte tutte le componenti multiple.

Abbiamo pure avvertito che per la superficie F:

$$z^2 = f(x,y),$$

rappresentata sul piano doppio $z=0$, può accadere che la retta all'infinito debba aggiungersi alla curva di diramazione $f(xy)=0$. Per rendersene conto si consideri la curva K intersezione della F con un piano parallelo all'asse delle z: la K è iperellittica, ed è rappresentata doppiamente sulla retta k comune al piano di K e al piano $z=0$. I punti di diramazione di questa retta appartengono, evidentemente, alla curva di diramazione del piano doppio, ed è noto (*) che, nel caso in cui la curva K sia di ordine dispari, tra tali punti si trova anche quello improprio della retta k. (**)

Ma la retta impropria del piano $z=0$ si può portare a distanza finita con una semplice omografia, cosicchè il caso in cui la curva di diramazione è d'ordine dispari si può riguardare come un caso particolare di quello in cui essa è

(*) Cfr., ad esempio, Enriques - Chisini: op. cit., libro V, cap. I, § 12 (vol. III, pag. 90).

(**) Un'analisi più minuta mostrerebbe che la retta allo infinito del piano $z=0$, si può ritenere come immagine di una curva infinitesima secondo la quale il piano imd'ordine pari e contiene una retta: quindi, senza limitare la generalità, potremo sempre supporre che <u>la superficie F, d'equazione $z^2 = f(x y)$, abbia l'ordine pari $2n$</u>.

<u>Osservazione</u>. Si potrebbe domandare se anche con questa ipotesi la retta impropria del piano α non potesse far parte della curva di diramazione della superficie

$$z^2 = f_{2n}(x, y).$$

La risposta è negativa, perchè se la cosa si verificasse, la retta all'infinito dovrebbe far parte della curva di diramazione un numero pari di volte e quindi si eliminerebbe, conformemente a quanto abbiamo detto sopra.

58.- RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI LINEARI SOPRA UN PIANO DOPPIO.

Studiamo la corrispondenza che intercede fra una superficie F ed un piano α su cui essa sia rappresentata doppiamente con una curva di diramazione C.

Una curva K di α si deve ritenere come doppia: ad essa corrisponde su F una curva K' unita nell'involuzione I_2, tale cioè che insieme ad ogni suo punto P' contenga il coniugato P'_0 in I_2. I punti P' e P'_0 costituiscono una coppia di un'involuzione γ_2^1 subordinata dalla I_2 su K'. Allora le intersezioni della K con la C dànno, in generale, i punti di diramazione della curva doppia K a cui rispondono semplici coincidenze della γ_2^1 sulla K'.

Dato il genere π della curva K del piano α, è facile calcolare il genere $\underline{p}$ della curva corrispondente K': basta applicare la nota <u>formula di Zeuthen</u> (*), che lega i generi π e p di due curve in corrispondenza (1, 2), col numero $\underline{d}$ dei punti di diramazione della curva doppia:

(*) Cfr. ad esempio. Enriques-Chisini: op. cit. libro V. cap. I.

$$2p-2 = 2(2\pi-2)+d.$$

Se due punti di diramazione di K vengono a coincidere - la K toccando C - due diramazioni spariscono e dànno luogo ad un punto critico apparente a cui corrisponde un punto doppio di K' (ancora d'accordo colla formula di Zeuthen).

In particolare se la curva omologa di K si spezza in due parti K' e K'_0 coniugate nella I_2, la K non avrà più punti di diramazione e quindi dovrà risultare tangente alla curva di diramazione C, ovunque la incontri: a questi punti di contatto risponderanno le intersezioni di K' e K'_0 (cadenti sulla curva di coincidenza della I_2).

Ciò premesso vediamo che:

1°) ad ogni sistema lineare di curve di α, corrisponde sopra F un sistema lineare di curve unite nell'involuzione I_2;

2°) viceversa: un sistema lineare di curve sopra F, che appartenga all'involuzione I_2, è rappresentato su α da un sistema pure lineare di curve doppie;

3°) invece ad un sistema lineare di curve sopra F che non appartenga all'involuzione I_2, corrisponde nel piano α un sistema continuo $\{K\}$ non più lineare, ma di indice maggiore di uno, costituito da curve K tangenti alla curva di diramazione ovunque la incontrano. Però la serie dei gruppi dei punti di contatto delle K è lineare, come la serie che le curve obiettive segano sulla curva di coincidenza della I_2.

L'indice del sistema $\{K\}$ è precisamente 2^r se r è la dimensione del sistema lineare obiettivo: infatti, presi r punti generici del piano α, ad essi corrispondono $2r$ punti di F, che costituiscono r coppie dell'involuzione I_2, e questi $2r$ punti dànno luogo a 2^r gruppi di r punti, ciascuno dei quali contiene un solo punto di ognuna delle predette coppie; allora le 2^r curve del sistema lineare su F, individuate da quei gruppi, hanno per immagini curve K passanti per gli r punti dati.

Sopra la superficie proiettivamente definita

$$z^2 = f(x,y),$$

le conclusioni precedenti si verificano subito. Una curva unita nella I_2, appartiene ad un cono avente il vertice nel punto improprio O dell'asse delle z, e le tangenti alla curva passanti per O sono anche generatrici del cono circoscritto da O alla superficie F, il quale ha per traccia sul piano doppio la curva di diramazione. Invece una curva K' non unita nella I_2, è proiettata da O secondo un cono che incontra ulteriormente la F nella curva coniugata della K' in I_2. In un punto P d'intersezione della K' con la curva di contatto del cono circoscritto da O, il piano tangente alla superficie (che passa per O) contiene la tangente a K' e quella alla predetta curva di contatto, e quindi queste due curve si proiettano sul piano in curve tangenti nel punto P' immagine di P.

<u>Osservazione I.</u> Abbiamo osservato che una curva della superficie F distinta dalla sua coniugata nella I_2, ha per immagine sul piano doppio α una K tangente alla curva di diramazione ovunque la incontra; e la K rappresenta così una curva spezzata. Ma viceversa una curva K del piano doppio che tocchi la curva di diramazione ovunque la incontra, non è sempre immagine di una curva spezzata.

Lo spezzamento accadrà necessariamente se il genere della curva K è $\pi = 0$, perchè il numero dei punti doppi di una g_2^1 sopra una curva irriducibile non può essere nullo. Invece sappiamo che esistono anche curve doppie irriducibili di genere $\pi > 0$ senza punti di diramazione. La riducibilità o irriducibilità della curva rappresentata su α da una K senza punti di diramazione, come pure la classe a cui essa appartiene, dipendono dall'esame del gruppo dei punti critici apparenti (contatti con la C), e dall'appartenenza di questo, all'una o all'altra delle serie metà di quella segata su K dal sistema lineare a cui appartiene la curva di diramazione C. Precisamente: <u>la curva K, tangente alla curva di diramazione C ovunque la incontra, è immagine di una curva spezzata quando il gruppo dei suoi punti critici apparenti è equivalente a quelli segati su K dal sistema metà del sistema individuato dalla C.</u> (*)

Per renderci conto di quest'ultima conclusione basta rilevare che se la K è immagine di una curva spezzata, lo

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. IV, § 38 (vol. III, pag. 440).

stesso accade quando al nostro piano doppio si sostituiscano quelli che se ne ottengono facendo variare la curva di diramazione C in un sistema continuo, cosicchè il gruppo dei relativi punti critici apparenti di K descriva una delle serie metà di quella segata su K dal sistema lineare $|C|$. Se questa serie è quella determinata dal sistema metà di $|C|$, facendo variare con continuità la C potremo portarla a coincidere con una curva costituita da due parti coincidenti: $\varphi^2 = 0$. Allora, in questo caso limite, la curva rappresentata dalla K si ottiene estraendo la radice di φ^2 sopra K stessa, e quindi è riducibile: se $\psi = 0$ è l'equazione di K, la curva obiettiva è costituita dalle intersezioni del cilindro $\psi = 0$ con le due superficie $z = \varphi$ e $z = -\varphi$.

<u>Osservazione II.</u>- In ciò che precede ci si riferisce in generale al caso in cui la curva di diramazione C sia priva di punti multipli, o si considerino curve che la incontrino (o tocchino) fuori di questi.

Ma le conclusioni cui siamo giunti si estenderanno senz'altro anche a curve passanti per un punto multiplo O di C, purchè si tenga conto della curva di diramazione infinitesima costituita dall'intorno di O, quando O abbia molteplicità d'ordine dispari: e ciò di accordo con le considerazioni che seguono.

59 - I PIANI DOPPI E LE TRASFORMAZIONI CREMONIANE.

Si è detto che due piani doppi α e α' sono identici quando esiste una corrispondenza cremoniana che muta la curva di diramazione C del primo in quella C' del secondo. Conviene precisare come vanno considerate le curve fondamentali che nascono dalla trasformazione, in corrispondenza a punti particolari.

Si passi dal piano α al piano α' mediante la corrispondenza biunivoca che nasce riferendo proiettivamente le rette di α' alle curve di una rete omaloidica di α, avente un punto base i-plo in un punto A, che sia s-plo per la curva di diramazione C: allora al punto A corrisponde in α' una <u>curva fondamentale</u> <u>a</u> d'ordine <u>i</u>, che fa parte s volte della trasformata di C, e quindi - secondo quello che sappiamo circa le componenti multiple della curva di diramazione - la <u>a</u> si deve riguardare come facente parte di C' solo nel caso in cui s sia dispari. Cioè:

In una trasformazione cremoniana del piano doppio (con punti fondamentali distinti) si deve computare come facente parte (una volta) della trasformata della curva di diramazione, ogni curva fondamentale proveniente da un punto di molteplicità dispari della curva di diramazione primitiva.

Da questo risultato si deduce facilmente che la curva di diramazione C_{2n}, di ordine $2n$, si può sempre trasformare in un'altra ancora d'ordine pari e dotata soltanto di punti multipli distinti di molteplicità pari.

Infatti, eseguiamo una trasformazione quadratica che abbia un punto fondamentale A in un punto s-plo di C, e i due rimanenti punti fondamentali A_1 ed A_2 affatto generici. Supponiamo che s sia dispari. Allora la curva di diramazione trasformata di C, consta di una parte C' proveniente propriamente da C, e della retta fondamentale $\underline{a}$ che rappresenta l'intorno di A.

Se A', A'_1, A'_2 sono i punti fondamentali del piano α' (cosicchè $a = A'_1 A'_2$), la curva C' ha in A' un punto $2n$-plo, e in A'_1 e A'_2 punti di molteplicità $2n-s$; inoltre essa possiede sulla retta $A'_1 A'_2 = a$

altri punti multipli provenienti dallo scioglimento dell'intorno del primo ordine del punto s-plo A di C, ed aventi la stessa molteplicità che hanno per C. Quindi la nuova curva di diramazione $C'+a$ ha in A' un punto $2n$-plo, e in A'_1 e A'_2 due punti di molteplicità pari $2n-s+1$, come pure ha dei punti multipli d'ordine pari in quelli (di molteplicità dispari per C') che provengono da punti di C appartenenti all'intorno del primo ordine di A ed aventi molteplicità dispari. Così i soli punti multipli dispari della $C'+a$ sono gli omologhi dei punti multipli pari dell'intorno di A, oltre a quelli che corrispondono a punti di C distinti da A, e di molteplicità dispari. Eseguendo successive trasformazioni analoghe alla precedente, si perviene infine ad una curva trasformata della C, di ordine pari e che ha solo punti singolari di molteplicità pari, tutti distinti fra loro.

Tuttavia converrà nel seguito considerare anche singolarità costituite da punti multipli infinitamente vicini.

La possibilità di trasformare la curva di diramazione C in modo che abbia soltanto punti multipli d'ordine pari, ed il fatto che della curva trasformata faccia parte quella proveniente dall'intorno di un punto di molteplicità dispari della C, permettono di stabilire una opportuna convenzione circa il modo di riguardare i punti singolari di C.

Se la C possiede un punto $(2s+1)$-plo O, esso si deve considerare come di molteplicità virtuale $2s$, e la curvetta infinitesima costituente l'intorno di O farà parte di C.

In rapporto a questa convenzione si definiranno le successive curve aggiunte a C: così un punto quadruplo di C sarà doppio per le sue seconde aggiunte; invece per un punto triplo esse non passeranno affatto. Altro esempio: se la C possiede una singolarità $[3,3]$ costituita dall'insieme di due punti tripli infinitamente vicini O ed O', il punto O si riguarderà come doppio, e della C farà parte l'intorno di O; allora per la curva di diramazione complessiva il punto O' è di molteplicità 4, cosicchè le seconde aggiunte avranno in O' un punto doppio, cioè – per il principio di scaricamento - passeranno semplicemente per O ed O'.

Nota.- Se due superficie F e Φ si rappresentano sopra due piani doppi $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ e $\{X, Y, \sqrt{\varphi(XY)}\}$, con curve di diramazione corrispondentisi in una trasformazione cremoniana tra i piani, non solo la F e la Φ sono birazionalmente identiche, ma la corrispondenza fra le due superficie

$$z^2 = f(x, y)$$

e

$$Z^2 = \varphi(X, Y),$$

muta l'involuzione I_2 segata sulla prima dalle parallele all'asse delle z, nella involuzione analoga che sulla seconda superficie segano le parallele all'asse Z.

Ora si noti che due superficie F e Φ possono essere birazionalmente identiche e riferibili ciascuna ad un piano doppio, senza che si passi dall'un piano all'altro con una corrispondenza cremoniana: infatti può darsi che nella trasformazione della superficie F nella Φ, l'involuzione che corrisponde al primo piano doppio non si unisca in quella relativa al secondo. Ciò avviene quando una superficie possiede due diverse involuzioni I_2 e I'_2, a cui corrispondano due rappresentazioni sul piano doppio essenzialmente distinte. Fra le due rappresentazioni intercederà allora, in generale, non una corrispondenza biunivoca, ma una corrispondenza (2, 2). Anzi una corrispondenza biunivoca può aversi nel solo caso particolare in cui la superficie ammetta un'altra trasformazione in sè, che cambi la I_2 nella I'_2 [nel qual caso la precedente trasformazione (2, 2) si spezza nel prodotto di due corrispondenze (1, 1)].

L'esempio più semplice di una superficie contenente due involuzioni è dato da una F d'ordine n, con due punti A, B di molteplicità $n-2$, e quindi con la retta AB almeno $(n-4)$-pla. Proiettando la F da A e B sopra un piano, si ottengono due corrispondenze (1, 2) fra il piano ed F, ed il prodotto di queste è una corrispondenza (2, 2).

60 - CURVE CANONICHE E BICANONICHE DEI PIANI DOPPI.

Ricerchiamo come si valuti il genere del piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$, e si rappresentino le sue curve canoniche.

Si supporrà per ora che la curva di diramazione $f(xy)=0$ sia priva di punti multipli, riservandoci di analizzare, al termine di questo paragrafo, l'influenza che hanno sopra i caratteri del piano doppio alcune delle più comuni singolarità della $f(xy)=0$.

Ci riferiremo alla superficie F_{2n} d'equazione

$$z^2 = f(x, y),$$

essendo la $f(xy)=0$ d'ordine $2n$.

Cominciamo con lo studiare la singolarità che la superficie F_{2n} presenta nel punto improprio O dell'asse delle z, e col determinare le sue superficie aggiunte φ_{2n-4}, d'ordine $2n-4$.

Per questo ricorriamo ancora alla curva K intersezione della F_{2n} con un piano generico per O.

È noto che la K (d'ordine $2n$ e di genere $n-1$), possiede in O un punto $(2n-2)$-plo con $n-1$ punti doppi infinitamente vicini, <u>succedentesi</u> sopra <u>un</u> ramo ordinario d'ordine $n-1$, che tocca la retta all'infinito (*).

Ne segue che la F_{2n} ha in O un punto di molteplicità $2n-2$, con infinitamente vicine (nella giacitura del piano improprio) $n-1$ rette doppie (infinitesime) appartenenti ai successivi $n-1$ intorni di O. Cosicchè il cono tangente in O alla F_{2n} è costituito dal piano improprio contato $2(n-1)$ volte.

Siamo dunque nel caso già studiato (**) della singolarità caratterizzata dalla sezione piana generica. Le superficie aggiunte alla F_{2n} hanno in O un punto $2(n-2)$-plo e passano semplicemente per le $n-1$ rette doppie infinitesime suddette.

In particolare le φ_{2n-4} sono coni di vertice O, dai quali si stacca $n-1$ volte il piano improprio, come quello che proietta da O le $n-1$ rette doppie infinitesime: rimane quindi un cono residuo φ_{n-3} dell'ordine $n-3$.

(*) Cfr. Enriques-Chisini: l. cit. nella nota precedente.

(**) § 39.

Poichè la curva di diramazione è priva di punti multipli, le φ_{n-3} non sono soggette a nessuna ulteriore condizione: esse segano sulla F_{2n} il sistema canonico, che appartiene all'involuzione I_2. Dunque:

Le curve canoniche hanno per immagini sul piano doppio le curve d'ordine $n-3$ (contate due volte), e quindi *il genere (geometrico) del piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è*:

$$p = \frac{(n-2)(n-1)}{2} .$$

A questo risultato si giunge anche direttamente con considerazioni di natura invariantiva.

Una retta del piano doppio rappresenta una curva iperellittica K che - avendo $2n$ punti di diramazione - è del genere $n-1$ (*), e quindi la sua serie canonica è una g_{2n-4}^{n-2}, composta con una g_2^1 (subordinata su K dall'involuzione I_2).

La g_{2n-4}^{n-2} è segata sopra la K dalle curve aggiunte K', le quali sono unite nella I_2 ed hanno perciò come immagini curve d'ordine $n-2$ (contate due

(*) § 58.

volte); ed inversamente. Allora il sistema canonico $|K'-K|$ è rappresentato dal sistema delle curve d'ordine $n-3$.

Il grado $p^{(2)}$ del sistema canonico è dato da:

$$p^{(2)} = 2(n-3)^2$$

e quindi il genere lineare $p^{(1)}$ della superficie è

$$p^{(1)} = 2(n-3)^2 + 1.$$

A quest'ultimo risultato si giunge anche subito direttamente dalla formula di Zeuthen (*).

Passiamo alle curve bicanoniche.

Esse costituiscono il sistema doppio di quello canonico e sono caratterizzate dalla proprietà di segare sopra le curve canoniche gruppi della loro serie canonica. Quindi, intanto, tra le curve bicanoniche sono quelle rappresentate dalle curve doppie C_{2n-6} d'ordine $2n-6$: esse ci danno una parte del sistema bi-

(*) Cf. § 58.

canonico composta con l'involuzione I_2. Ma in generale non esauriscono il sistema bicanonico: anzi ciò accadrà soltanto quando le C_{n-3}, immagini delle curve canoniche, siano razionali. Tolta questa eccezione, le C_{2n-6} apparterranno ad un sistema più ampio (non lineare) di curve senza punti di diramazione, immagini di curve spezzate, e che perciò saranno dell'ordine doppio di quello delle C_{2n-6}; cioè:

<u>Sul piano doppio le curve bicanoniche sono date da C_{4n-12} d'ordine $4n-12$, che toccano la curva di diramazione ovunque la incontrano.</u>

Le C_{2n-6} non sono le sole immagini di curve bicanoniche unite nell'involuzione I_2: infatti tra le suddette C_{4n-12} sono anche quelle costituite dalla curva di diramazione C_{2n} (contata una volta) e da una residua C_{n-6} dell'ordine $n-6$ (da contarsi due volte). Che la curva rappresentata in tal modo sia bicanonica, segue anche direttamente osservando che essa sega sopra le curve canoniche gruppi canonici: invero se al gruppo canonico segato sopra una C_{n-3} dalla C_{n-6}, si aggiunge il gruppo dei punti di diramazione della C_{n-3} stessa, si ottiene l'immagine di un gruppo canonico della curva rappresentata da quella C_{n-3} (*).

Le curve bicanoniche C_{2n-6} e le $C_{n-6} + C_{2n}$ costituiscono due sistemi lineari in seno al sistema bicanonico, i quali sono <u>indipendenti</u> fra loro e determinano (come somma minima) l'intero sistema bicanonico. Ci si rende conto di ciò ricorrendo alla <u>superficie bicanonica</u>, immagine del sistema bicanonico: sopra di essa le curve bicanoniche sono segate dagli iperpiani, e l'involuzione I_2 (cambiando sezioni iperpiane in sezioni iperpiane) è subordinata ad una omografia involutoria Ω dello spazio ambiente. La Ω ha due spazi di punti uniti S_h ed S_k, <u>indipendenti</u> ed <u>appartenenti</u> allo spazio ambiente S_{h+k+1}: gl'iperpiani per l'uno o l'altro di codesti due spazi segano sulla superficie le curve bicanoniche unite nella I_2, cioè appunto le curve bicanoniche dei due sistemi che abbiamo sopra trovati.

(*) Teorema di <u>Painlevé - Castelnuovo</u>, che dà l'interpretazione funzionale della <u>formula di Zeuthen</u> sopra ricordata (Cf. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. I, § 9 - vol. III, pag. 72).

Questo risultato ci permette di calcolare il bigenere P del piano doppio; si ha infatti ($P-1=h+k+1$):

$$P=\frac{(2n-6)(2n-3)}{2}+\pi+1,$$

essendo π il genere delle C_{n-3} immagini delle curve canoniche (cosicché il sistema delle C_{n-6} ha la dimensione $\pi-1$), ossia, nella nostra ipotesi che la curva di diramazione sia priva di singolarità:

$$\pi=\frac{(n-4)(n-5)}{2}.$$

Rileviamo che <u>sopra il piano doppio, la dimensione del sistema C_{2n-6} doppio di quello delle C_{n-3} immagini delle curve canoniche, differisce dalla dimensione dell'intero sistema bicanonico per il genere π delle C_{n-3} stesse.</u>

Studiamo ora l'influenza che hanno sopra i caratteri del piano doppio α, alcune delle più semplici singolarità della curva di diramazione

C_{2n} $[f_{2n}(xy)=0]$.

Abbiamo detto che la C_{2n} (d'ordine pari: $2n$) si può sempre supporre dotata di punti multipli distinti e di molteplicità pari. Consideriamo, ad esempio, il caso in cui la curva di diramazione possieda un punto quadruplo O; e sia x la molteplicità che il punto O deve avere per le curve canoniche, cioè per le curve C_{n-3} d'ordine $n-3$ del piano α. Le coniche passanti per O (contate due volte), rappresentano un sistema $|K|$ (∞^4) di curve di genere $2n-3$ e di grado 6: sopra una K la serie residua della serie caratteristica è quindi dell'ordine $4n-14$. Ora questa serie è segata su K dalle curve canoniche, e perciò le coniche per O debbono avere in comune con le C_{n-3}, fuori di O, $2n-7$ punti: cioè deve aversi

$$2(n-3)-x=2n-7,$$

da cui

$$x=1.$$

<u>Le curve canoniche passano semplicemente per un punto quadruplo della curva di diramazione, cosicchè un tale punto dimi-</u>

<u>nuisce di un'unità il genere del piano doppio.</u>

In modo del tutto analogo si ha che <u>un punto 2s-plo della curva di diramazione, è di molteplicità s-1 per le curve canoniche e diminuisce il genere di</u>

$$\frac{s(s-1)}{2}.$$

Vediamo invece quello che accade per il <u>bigenere.</u>

Tra le curve bicanoniche sono quelle rappresentate dal sistema doppio di quello delle immagini delle curve canoniche: esso è costituito da curve C_{2n-6} d'ordine $2n-6$, che hanno un punto $2(s-1)$-plo in un punto $2s$-plo 0 della C_{2n}, ciò che impone $(s-1)(s-2)$ condizioni alle C_{2n-6}. Ma abbiamo visto che la differenza tra la dimensione dell'intero sistema bicanonico e quella del sistema delle C_{2n-6} suddette, è precisamente uguale al genere delle C_{n-3} immagini delle curve canoniche, le quali hanno in 0 un punto $(s-1)$-plo, il che abbassa di

$$\frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

il loro genere. Onde, in complesso, <u>un punto 2s-plo della curva di diramazione, diminuisce il bigenere del piano doppio di</u>

$$(s-1)(2s-1)+\frac{(s-1)(s-2)}{2}=\frac{(s-1)(5s-4)}{2}.$$

Questi risultati si ritrovano anche partendo dall'uguaglianza

$$P = p + p^{(1)}:$$

infatti un punto 2s-plo di C_{2n} diminuisce il genere p di

$$\frac{s(s-1)}{2},$$

e il genere lineare $p^{(1)}$ di

$$2(s-1)^2.$$

Naturalmente le precedenti conclusioni possono confermarsi con l'analisi diretta delle singolarità che nascono sulla superficie $F_{2n}\left[z^2=f(x,y)\right]$ in corrispondenza ai punti multipli della curva di diramazione. Consideriamo, ad esempio, il caso del punto quadruplo O: esso dà luogo ad un <u>tacnodo</u> della superficie F_{2n}, per il quale le aggiunte passano semplicemente, e quindi sono costituite dai coni che dal punto improprio dell'asse z, proiettano le curve di ordine $n-3$ passanti per O. Invece le biaggiunte passano per O e toccano ivi il piano doppio.

Per le applicazioni che faremo in seguito, conviene studiare un altro tipo di singolarità della curva di diramazione, senza ricorrere alle trasformazioni che permettono di ridurla alle precedenti: la singolarità $[3,3]$ costituita da due punti tripli infinitamente vicini O, O'.

Indichiamo con x ed y le molteplicità delle curve canoniche C_{n-3} nei punti O ed O', e sia C_2 una conica passante per O: essa (contata due volte) è immagine di una curva iperellittica di genere $2n-2$ e di grado 6 (*). Quindi le C_{n-3} debbono segare la C_2 in $2n-6$ punti, cioè deve aversi:

$$2(n-3) + x = n,$$

(*) Si tenga presente che l'intorno di un punto multiplo di ordine dispari si deve riguardare come facente parte della curva di diramazione (cfr. § 59).

da cui $x=0$. Se invece consideriamo una conica per O ed O', questa rappresenta una curva iperellittica di genere $2n-3$ e grado 6, e ne segue, in modo analogo, $y=1$. Ma, per il principio di scaricamento, avremo in realtà:

$$x = 1 \quad , \quad y = 0 .$$

Cioè: <u>se la curva di diramazione possiede due punti tripli infinitamente vicini O ed O', le curve canoniche passano per O, e quindi tale singolarità diminuisce di uno il genere del piano doppio.</u> (1)

Per il bigenere si osservi che le C_{2n-6} del sistema doppio delle curve immagini del sistema canonico, passano per O e per O', il che porta due condizioni; e siccome, d'altra parte, il passare per O non altera il genere delle C_{n-3}, si ha che <u>l'esistenza di due punti tripli infinitamente vicini sulla curva di diramazione, porta un abbassamento di due unità nel bigenere.</u>

Risultato che è confermato dalla formula $P = p + p^{(1)}$, poichè il genere p diminuisce di uno, e così pure il genere lineare $p^{(1)}$.

---

(1) Vedi nota a pag. 389

Per via proiettiva si giunge nuovamente a queste conclusioni osservando che a due punti tripli infinitamente vicini della curva di diramazione corrispondono, sulla F_{2n} [d'equazione $z^2 = f(xy)$], due punti doppi O, O' infinitamente vicini, con una retta doppia infinitesima prossima al secondo di essi. Le aggiunte passano semplicemente per O (*) e le biaggiunte, oltre a passare per O, debbono toccare la retta OO' (ciò risulta da considerazioni analoghe a quelle svolte per la determinazione del comportamento delle aggiunte in siffatta singolarità, nel ricordato § 39; cfr. anche § 40).

Terminiamo osservando che - come è subito visto - un solo punto triplo O della curva di diramazione non ha alcuna influenza sui caratteri del piano doppio (d'accordo con quanto abbiamo osservato sulle molteplicità virtuali dei punti singolari della curva di diramazione (**)). Per verificarlo proiettivamente basta notare che il punto O dà luogo ad un punto doppio uniplanare della superficie F_{2n} (i tre punti doppi ad

(*) Cf. § 39.
(**) Cf. § 59.

esso infinitamente vicini essendo nelle direzioni delle tangenti in O alla $f_{2n}(xy)=0$).

<u>Osservazione</u>. Si supponga - come è lecito - la curva di diramazione C_{2n} di ordine pari $2n$, e dotata soltanto di punti multipli distinti di molteplicità pari.

Allora dall'analisi precedente si ha che le curve C_{2n-6} che (contate due volte) rappresentano curve bicanoniche unite nella involuzione I_2, non sono altro che <u>curve aggiunte d'indice 2</u> (o <u>seconde aggiunte</u>), dell'ordine $2n-6$, alla curva di diramazione C_{2n}.

Analogamente considerando le <u>curve tricanoniche</u> e ricercando quelle che sono unite nella I_2, si troveranno tra queste le curve la cui immagine sul piano doppio è costituita dalla curva di diramazione (contata una volta) e da una ulteriore curva (doppia) C_{2n-9} che, per il suo comportamento nei punti multipli della C_{2n} (*), risulta essere una

(*) La curva tricanonica generica è rappresentata da una sua aggiunta d'indice 3 (o terza aggiunta).

In generale si ha che la curva di diramazione C_{2n} contata i volte, presa insieme ad una sua curva aggiunta d'indice $i+2$ e d'ordine $2n-3i-6$ (da contarsi due volte), rappresenta una particolare curva $(i+2)$-canonica del piano doppio (che è unita nell'involuzione I_2).

Ci siamo riferiti al caso in cui la C_{2n} possieda soltanto punti multipli distinti d'ordine pari, ma - quando si tengano presenti le convenzioni fatte circa le molteplicità virtuali dei punti singolari della curva di diramazione - è subito visto che tale ipotesi non è necessaria, e che l'enunciato precedente è del tutto generale purchè si considerino le curve successive aggiunte a C_{2n} definite in rapporto a quelle molteplicità virtuali (*).

Abbiamo visto che sopra le (curve

---

curva C_{6n-18} d'ordine $6n-18$, tangente alla C_{2n} ovunque la incontra, e che ha un punto $6(s-1)$-plo in un punto $2s$-plo O della C_{2n}. Quando la C_{6n-18} si spezza in $C_{2n}+2C_{2n-9}$, la C_{2n-9} passa $2s-3$ volte per O.

(*) Cfr. § 59.

rappresentate dalle) rette del nostro piano doppio con C_{2n} di diramazione, le curve (doppie) d'ordine $n-2$ segano gruppi canonici, i quali evidentemente ci dànno l'intera serie canonica della corrispondente curva iperellittica: ciò basta (*) per asserire che <u>il piano doppio è una superficie regolare</u>, almeno nel caso in cui la curva di diramazione sia priva di singolarità, presentanti condizioni alle superficie aggiunte. <u>Se la curva di diramazione possiede invece singolarità</u> siffatte, queste dovranno essere tali che <u>le condizioni da esse presentate alle aggiunte siano tra loro indipendenti</u> (**)

(*) Cfr. la nota sul "teorema di Picard" al termine del § 46.

(**) Più precisamente si può dimostrare (<u>con</u> De-Franchis) che <u>i piani doppi irregolari possiedono un fascio irrazionale di curve, che è ellittico od iperellittico; cioè la loro curva di diramazione è composta di $2\pi+2$ $(\pi \geq 1)$ curve (semplici) di uno stesso fascio</u>. L'irregolarità $p_g - p_a$ è allora uguale a π. Cfr. De Franchis: "Sugli integrali di Picard relativi ad una superficie doppia", (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo - tomo XX, 1905, pag. 331); cfr. anche dello stesso autore: "I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie", (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5, t. XIII, 1904); "Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve", (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. XX, pag. 50).

Allora le superficie d'ordine $2n-4$ aggiunte alla F_{2n}, soggette ad avere in O un punto di molteplicità $2n-4$ e a passare per γ, costituiscono un sistema lineare la cui dimensione, aumentata di una unità - per la formula di postulazione e per le condizioni imposte da O - risulta:

$$p_a = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} - \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{6} -$$

$$-(2n-4)(n-1) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} - 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Quindi il genere numerico p_a è uguale a quello geometrico p_g, già sopra determinato.

Dalla regolarità del piano doppio segue che il suo bigenere è:

$$P = p + p^{(1)} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 2(n-3)^2 + 1.$$

Risultato a cui eravamo già pervenuti.

<u>Osservazione.</u> Dal fatto che sul piano doppio le curve canoniche segano esat-

La regolarità del piano doppio con curva di diramazione generica $f_{2n}(xy)=0$, d'ordine $2n$, si può dimostrare anche per via diretta calcolandone il genere numerico.

La superficie F_{2n}, d'equazione

$$z^2 = f_{2n}(xy),$$

possiede un punto $(2n-2)$-plo nel punto improprio O dell'asse delle z, con infinitamente vicina una curva doppia (infinitesima) γ d'ordine $n-1$, spezzata in $n-1$ rette fronteggianti il punto O, situate nei suoi successivi intorni: con una trasformazione quadratica avente centro in O (*), la curva γ si cambia in una retta (doppia per la superficie trasformata della F_{2n}) con infinitamente vicine $n-2$ rette (pure doppie); cioè la curva γ si può assimilare ad una curva piana di ordine $n-1$, e quindi il suo genere virtuale è:

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

(*) Cfr. Enriques-Chisini - op. cit. libro IV, cap. IV, § 31 (Vol. II, pag. 554).

tamente gruppi della serie residua della serie caratteristica sopra le curve della rete rappresentata dalle rette (doppie), segue che il piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è privo di curve eccezionali (*), almeno fino a che la curva di diramazione $f(xy) = 0$ (d'ordine ≥ 6) è priva di singolarità.

Si noti però che se si assume come modello del piano doppio la superficie F_{2n}:

$$z^2 = f(x, y),$$

su questa invece esistono delle curve eccezionali, che sono costituite dalle $2n$ rette secondo cui il piano improprio incontra la F_{2n}.

Dell'esistenza di queste rette ci si rende conto analiticamente osservando che se si passa dalle coordinate cartesiane ordinarie x, y, z, a coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, l'equazione $z^2 = f(x, y)$ della F_{2n} assume la forma:

$$x_3^2 \, x_4^{2n-2} = f_{2n}(x_1, x_2) + x_4 \cdot f_{2n-1}(x_1, x_2) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + x_4^{2n-1} f_1(x_1, x_2) + x_4^{2n} f_0$$

(*) Cfr. § 28.

(essendo le $f_i(x_1, x_2)$ forme binarie di grado i). Allora le rette suddette non sono altro che le rette improprie dei piani (passanti per l'asse delle z) rappresentati complessivamente dall'equazione

$$f_{2n}(x_1, x_2) = 0 .$$

Esse sono certo semplici per la superficie se la curva di diramazione non ha punti multipli a distanza infinita, e sono <u>rette eccezionali</u> di F_{2n}.

<u>Nota da aggiungere a pag. 381.</u>

Conviene rilevare esplicitamente che un punto [3,3] della curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio, diminuisce, in generale, di 2 (anziché di 1) il grado <u>effettivo</u> del sistema canonico, cosicché questo risulta minore del grado virtuale $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$. L'intorno del punto [3,3] - come si vede dai suoi caratteri - dà luogo sopra la superficie ad una curva eccezionale che è parte fissa del sistema canonico puro (<u>curva eccezionale singolare</u> - cfr. § 25, nota (**) a pag. 83), ovvero ad un punto semplice base per il sistema canonico. La possibile esistenza di punti base del sistema canonico (già negata dal <u>Noether</u>) fu dimostrata dal <u>Castelnuovo</u> col semplice esempio di una superficie contenente un fascio di curve canoniche di genere due. Qui si ottiene una serie di esempi dove la dimensione ed il genere del sistema canonico sono alti quanto si vuole.

61- MASSIMO VALORE DEL GENERE SUPERFICIALE RISPETTO AL GENERE LINEARE DI UNA SUPERFICIE.

Fra il genere superficiale p (o p_g) e il genere lineare $p^{(1)}$ (>1) di una superficie F con sistema canonico irriducibile (senza punti base), esiste la disuguaglianza

$$p \leq \frac{p^{(2)}+3}{2}$$

stabilita da Noether (*) e che è una conseguenza del teorema di Clifford per una serie speciale (**), applicato alla $g^{p-2}_{p^{(1)}-1}$ caratteristica del sistema canonico.

Se il genere p (≥ 3) raggiunge il massimo

$$\frac{p^{(1)}+3}{2}$$

(*) Cfr. M. Noether: "Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde" - Math. Ann., 8, 1875.

La restrizione della irriducibilità del sistema canonico è essenziale: infatti abbiamo già incontrato superficie di genere alto quanto si vuole, le cui curve canoniche sono composte con quelle di un fascio e per cui è $p^{(1)}=1$ (cfr. § 55).

(**) "Per ogni g^r_n speciale si ha $n \geq 2r$". Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. I, § 11 (vol. III, pag. 87).

le curve canoniche sono iperellittiche, e viceversa (*): allora il sistema canonico di F ha per immagine una superficie F', normale in un iperspazio a p-1 dimensioni, e su cui la F è rappresentata doppiamente.

Le sezioni iperpiane della F' sono curve razionali, poichè in corrispondenza biunivoca con i gruppi della g_2^1 appartenente alla curva canonica loro analoga su F, perciò la superficie F' è razionale (**), e quindi è rappresentabile sopra un piano, che risulta così in corrispondenza (1,2) con la F. Su questo piano alle curve canoniche di F, ossia alle sezioni iperpiane di F', corrispondono curve razionali. Poichè - inversamente - se le immagini delle curve canoniche di un piano doppio sono razionali, il sistema canonico del piano doppio stesso è composto di curve iperellittiche (***), si ha:

Le superficie F che hanno il genere

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. I, § 12 (vol. III, pag. 97).

(**) Cfr. Bertini: op. cit. (a pag. 120) sugli "Iperspazi", pag. 402.

(***) Cfr. § 57.

superficiale p (≥ 3) ed il genere lineare <u>minimo</u> $p^{(1)}$:

$$p^{(1)} = 2p-3,$$

sono a curve canoniche iperellittiche, e si rappresentano sopra un piano doppio in modo che le immagini delle curve canoniche siano razionali.

Questo risultato permette di classificare completamente le suddette superficie F.

Cominciamo col ricordare che i sistemi lineari completi (almeno doppiamente infiniti) di curve piane razionali, possono ridursi con trasformazioni cremoniane ai seguenti tipi d'ordine minimo (*):

I) rete delle rette;

II) sistema ∞^5 delle coniche;

III) sistema delle curve d'ordine n, con un punto base O di molteplicità $n-1$ (oltre, eventualmente, ad altri particolari punti base).

Ora i piani doppi i cui sistemi

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. II, § 22 (vol. III, pag. 194).

canonici hanno per immagini tali sistemi di curve razionali, sono, rispettivamente:

I) piano doppio con curva di diramazione dell'ottavo ordine ($p=3$, $p^{(1)}=3$);

II) piano doppio con curva di diramazione del decimo ordine ($p=6$, $p^{(1)}=9$);

III) piano doppio con curva di diramazione di ordine $2n+6$, avente in O un punto $2n$-plo (oltre, eventualmente, ad altri particolari punti multipli) (*)

Ne segue che <u>le superficie di genere lineare minimo</u> . <u>(con curve canoniche iperellittiche) sono rappresentabili sopra un piano doppio del tipo I) o II), o III).</u> (**)

Si noti che le superficie rispondenti ai piani doppi del tipo III), possiedono un fascio di curve di genere 2, rappresentate dalle rette per O.

(*) Cfr. "nota" a pag. 399.

(**) Cfr. Enriques F.: "Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche" - Rend. Acc. Lincei, s. 5, vol. V, pag. 191 (1896).

alla disegnaglianza di Noether

$$p \leq \frac{p^{(1)}+3}{2}$$

Castelnuovo (*) ha sostituito una diseguaglianza più significativa che vale per le superficie con sistema canonico semplice: Quando il sistema canonico (irriducibile) è semplice, il genere superficiale p o p_g non può superare il valore

$$\frac{p^{(1)}+6}{3} .$$

Infatti si consideri la serie caratteristica $g^{p-2}_{p^{(1)}-1}$ del sistema canonico, e siano G e G' due suoi gruppi aventi $p-3$ punti in comune. Per il noto teorema di Riemann-Roch (**), il gruppo G presenta

$$p^{(1)}-1-(p-2) = p^{(1)}-p+1$$

condizioni ai gruppi canonici che debbono contenerlo; mentre il gruppo G'

(*) Cfr. G. Castelnuovo: "Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie" - nota II. (Rend. R. Istit. Lombardo, serie II, vol. XXIV, 1891).

(**) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. I, § 11 (vol. III, pag. 85).

potrà presentare al massimo

$$p^{(1)}-p+1-(p-3)=p^{(1)}-2p+4$$

condizioni ai gruppi canonici che già passano per G. Ma la $g^{p-2}_{p^{(1)}-1}$ è <u>autoresiduo</u>, quindi il gruppo $G+G'$ è <u>un</u> gruppo canonico, cosicchè sarà:

$$p^{(1)}-p+1+(p^{(1)}-2p+4)=2p^{(1)}-3p+5\geq p^{(1)}-1,$$

cioè:

$$p^{(1)}-3p+6\geq 0.$$

Che il segno di uguaglianza possa effettivamente aver luogo, si prova con la costruzione di superficie particolari per cui il p raggiunge il massimo. Già ne abbiamo incontrate due: la superficie del quinto ordine di S_3, per cui è $p=4$ e $p^{(1)}=6$; e la superficie canonica F_8 dello spazio a quattro dimensioni-intersezione di una quadrica con una varietà del quarto ordine-per cui si ha $p=5$ e $p^{(1)}=9$ (*)

<u>Per $p>5$ una superficie F di genere p e genere lineare $p^{(1)}=3p-6$, è data dalla interse-</u>

(*) Cfr. § 53.

zione di una varietà semplicemente infinita di piani V_3^{p-3}, d'ordine $p-3$, di S_{p-1}, con una varietà V_{p-2}^4 a $p-2$ dimensioni del quarto ordine, la quale passi per $p-5$ piani della V_3^{p-3}.

Infatti la F d'ordine $3p-7$, è una superficie canonica dell'S_{p-1}. Per rendercene conto basta osservare che la F si proietta da $p-4$ suoi punti, in una superficie F_{2p-3} dello spazio ordinario, la quale è dell'ordine $2p-3$ e possiede una retta $\underline{r}$ multipla secondo $2p-7$, e $p-4$ rette triple $\underline{t}$ che si appoggiano alla $\underline{r}$ (*). Allora le superficie φ_{2p-7}, d'ordine $2p-7$, aggiunte alla F_{2p-3}, si spezzano nei $p-4$ piani (rt) e in una residua superficie, φ_{p-3}, d'ordine $p-3$, per la quale la retta $\underline{r}$ è $(p-4)$-pla, e che passa semplicemente per le $p-4$ rette $\underline{t}$. Poichè tra queste φ_{p-3} sono quelle spezzate nei piani (rt) e in un qualunque altro piano di S_3, si ha che sopra la F di S_{p-1} gli iperpiani segano curve

---

(*) I piani della V_3^{p-3} (che è razionale) si proiettano in S_3 nei piani di un fascio (r) di asse $\underline{r}$: poichè ogni piano della V_3^{p-3} incontra la V_{p-2}^4 in una curva del quarto ordine, ugualmente accadrà per i piani del fascio (r) rispetto alla F_{2p-3}, e quindi la $\underline{r}$ è $(2p-7)$-pla per F_{2p-3}. Le $p-4$ rette triple della F_{2p-3} nascono dalle quartiche intersezioni della V_{p-2}^4 con i piani della V_3^{p-3}, passanti per i $p-4$ centri di proiezione.

<u>canoniche</u>; ma, d'altra parte, le φ_{p-3} si spezzano in tal modo quando siano assoggettate a passare per un punto di ciascuno dei $p-4$ piani (rt), e quindi il sistema delle φ_{p-3} ha la dimensione $p-1$, cioè <u>la F_{2p-3} è di genere p</u>, cosicchè, come avevamo asserito, la F di S_{p-1} è una superficie canonica.

<u>Castelnuovo</u> - cui è dovuto l'esempio precedente - ha pure dimostrato (*) che le F di S_{p-1} così definite, costituiscono, per $p>7$, <u>la sola classe di superficie per cui:</u>

$$\underline{p^{(1)} = 3p-6.}$$

Per i valori più piccoli di p si aggiungono: per $p=4$, la F_6 dello spazio ordinario; per $p=5$, la F_8 di S_4 intersezione di una quadrica e di una varietà del quarto ordine (che solo in un caso particolare rientra nel tipo delle F); per $p=7$, la superficie che si ottiene in S_6 intersecando una particolare varietà a tre dimensioni del quarto ordine, con una varietà a cinque dimensioni pure del quarto ordi-

---

(*) Cfr. Castelnuovo: l. sopra cit.

ne, passante per un cono quadrico della prima.

<u>Osservazione</u>. È facile mostrare con esempi che per le superficie il cui sistema canonico appartiene ad una involuzione (ma non è composto di curve iperellittiche), si può effettivamente avere un valore del genere lineare compreso tra il minimo $2p-3$ che è raggiunto quando le curve canoniche sono iperellittiche, e il limite $3p-6$ al disotto del quale non si può scendere se il sistema canonico è semplice.

Un esempio siffatto è dato dal piano doppio con C_{12} di diramazione, per cui $p=10$ e $p^{(1)}=19$.

In confronto alla determinazione del minimo del $p^{(1)}$ (rispetto a p) presenta maggiori difficoltà la ricerca del massimo. Il problema, tentato dapprima da <u>Noether</u>, è stato risolto da <u>A. Rosemblatt</u> (+), che dimostra essere

---

(+) Cfr. A. Rosemblatt: " Sur quelques inégalités dans la

$$p^{(1)} \leq 16 p_a + 27.$$

Ma non possiamo qui indugiarci sulla dimostrazione che richiede mezzi trascendenti.

Nota da aggiungere a pag. 393.

Si noti però che il genere lineare minimo $p^{(1)}=2p-3$ si realizza soltanto per le superficie con curve canoniche iperellittiche quando il sistema canonico è privo di punti base (cioè escludendo il caso di riducibilità del sistema canonico in cui entrino parti fisse eccezionali). Quindi in rapporto ai piani doppi considerati, si debbono escludere quelle singolarità della curva di diramazione che portano punti base del sistema canonico stesso (cfr. "nota„ a pag. 389). Così il piano doppio con curva di diramazione dell'ottavo ordine dotata di un punto [3,3], ha i caratteri $p=2$ e $p^{(1)}=2$ (anzichè $p^{(1)}=1$). Analogamente si dica per i piani doppi con curva di diramazione C_{10}, del decimo ordine, avente un punto [3,3], od un punto [5,5], od anche tre punti quadrupli in linea retta. In quest'ultimo caso la retta si stacca dalla C_{10}, e si aggiunge alla retta generica del piano, costituendo una parte fissa (eccezionale

62- PIANI DOPPI RAZIONALI

In linea storica la prima ricerca che s'incontra sui piani doppi è quella dei piani doppi razionali di Clebsch e Noether, che corrisponde d'altra parte alla classificazione delle involuzioni razionali piane (del secondo ordine).

Se un piano doppio $\{x, y, \sqrt{f(xy)}\}$ è razionale, esistono due funzioni razionali:

$$u = u(x, y, \sqrt{f}) \qquad , \qquad v = v(x, y, \sqrt{f})$$

tali che x, y e $\sqrt{f}$ si esprimono a loro volta razionalmente per $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Allora nel piano (u, v), si ha una involuzione razionale I_2 di coppie di punti, nella quale sono coniugati i punti $[u(x, y, +\sqrt{f}), v(x, y, +\sqrt{f})]$ e $[u(x, y, -\sqrt{f}), v(x, y, -\sqrt{f})]$, e in cui si ha come curva di coincidenza la curva $F(u, v) = 0$ trasformata della curva di diramazione $f(x, y) = 0$ del piano doppio. Fra il piano (x, y) e il piano (u, v) nasce così una trasformazione (1, 2) (tipo di trasformazione studiato da Riccardo De Paolis (*)): in essa alle

(*) Cfr. R. De Paolis: "Le trasformazioni piane doppie," (Memorie Acc. Lincei, serie III, vol. I, pag. 511, 1876-77); "La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alla curva del quarto ordine," (ivi, vol. II, pag. 851, 1877-78); ecc.

rette del piano (x,y) corrispondono nel piano (u,v) le curve C_u di una rete di grado 2, appartenente all'involuzione I_2.

Viceversa, alle rette del piano (u,v) corrisponde in (x,y) una doppia infinità di curve razionali C_x, che sono tangenti alla curva di diramazione $f(x,y)=0$ in tanti punti quant'è l'ordine della $F(u,v)=0$ e che, fuori di questi contatti, non hanno altre intersezioni (variabili) con la $f(x,y)=0$. Le C_x non formano un sistema lineare, ma un sistema d'indice quattro perchè per due punti A e B del piano (x,y), passano le quattro curve C_x anologhe delle rette $A'B'$, $A'B'_0$, A'_0B', $A'_0B'_0$, essendo A', A'_0 e B', B'_0 le due coppie di punti del piano (u,v) coniugati nella I_2, che corrispondono ad A e B. Invece un fascio di rette di (u,v), si trasforma in un sistema d'indice due di curve C_x.

Si osservi che - come è subito visto - la curva C_x del piano (x,y) e la C_u di (u,v) sono dello stesso ordine n.

Si suol dire classe dell'involuzione I_2 il numero delle sue coppie situate sopra una retta generica, che è anche il numero dei punti doppi variabili di una C_x. Prendiamo allora nel piano (u,v) una retta e consideriamo la sua curva coniugata nell'involuzione I_2: l'ordine di questa curva è dato dal doppio della classe della I_2, aumentato dell'ordine della curva delle coincidenze $F(u,v)=0$.

Abbiamo visto come un piano doppio razionale dia luogo ad un'involuzione piana I_2 pure razionale: inversamente, se si ha in un piano una involuzione I_2, che sia razionale, cioè che possa definirsi come costituita dalle coppie d'intersezioni variabili delle curve di una rete di grado due, allora riferendo proiettivamente le curve di questa rete alle rette di un piano, nasce un piano doppio razionale.

Nota.- Si potrebbe pensare che accanto alle involuzioni razionali del piano, esistano anche involuzioni non razionali; in realtà tale ipotesi resta esclusa dal teorema più generale della razionalità delle involuzioni piane stabilito da Castelnuovo nel 1893, di cui parleremo in seguito (§ 66).

Le involuzioni piane del secondo ordine sono state studiate da Eugenio Bertini, che ne ha messo in luce tre tipi fondamentali (*):

(*) Cfr. E. Bertini: "Ricerche sulle trasformazioni univoche

<u>tipo I°: Involuzioni con una curva di coincidenza C_m, di un certo ordine m, dotata di un punto $(m-2)$-plo O (che in particolare può assumere la</u>

---

tali delle involutorie„ (Rendic. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXII, 1887). Che ogni involuzione piana del secondo ordine si possa ridurre ad uno di questi tipi mediante una trasformazione cremoniana del piano stesso (e quindi sia <u>razionale</u>), viene dimostrato dal Bertini soltanto con qualche riserva. Ma ricerche posteriori hanno permesso di rimuovere ogni dubbio. Partendo da un sistema lineare di curve invarianti, e considerando i successivi aggiunti (che sono pure cambiati in se stessi dalla trasformazione involutoria), si arriva infine ad un sistema lineare di curve di genere zero o uno, che è trasformato in sè dall'involuzione. Con questo metodo – introdotto da G. Castelnuovo e S. Kantor – si riesce a classificare le involuzioni dimostrando la loro riducibilità ai tipi suddetti. Per maggiori notizie e per le indicazioni bibliografiche cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, capo II, § 22, "notizia storica„ (vol. III, pag. 198).

I lavori ivi indicati contengono almeno la traccia della dimostrazione richiesta. Chi voglia evitare la complicazione un po' minuziosa degli sviluppi occorrenti, può giungere al risultato per la via indiretta che risulta dallo svolgimento di queste Lezioni, cioè: 1) dalla classificazione dei piani doppi razionali, si deduce la classificazione delle involuzioni piane razionali; 2) il teorema di molteplicità m-1 (*)). Le coppie dell'involuzione sono costituite da punti allineati con O e che separano armonicamente le due intersezioni della loro congiungente con la C_m (fuori di O).

L'involuzione I così definita, è razionale, e quindi si può ritenere come costituita dalle coppie di punti in cui s'intersecano le curve iperellittiche di una rete di grado due (**). La I si lascia rappresentare sul piano doppio in maniera che alle rette per O corrispondano ancora le rette stesse per O. A tale scopo si pren-

---

(*) Per m=1 rientra in questo caso anche l'omologia armonica.

(**) Si può costruire direttamente una tale rete, e quindi l'involuzione I, partendo da una curva iperellittica C_n^* di un certo ordine n, dotata di un punto O (n-2)-plo. Per una coppia di punti di C_n^* allineati con O, si mandi una seconda curva dello stesso ordine, C_n, passante pure per O n-2 volte, e secante ulteriormente la C_n^* in un gruppo G di punti. Allora tutte le curve C_n di ordine n, con O (n-2)-plo e passanti per G, formano una rete di grado 2, la cui serie caratteristica (completa) sopra C_n^* è la g_2^1 segata dalle rette per O. È chiaro che anche sopra un'altra qualunque curva della rete, la serie caratteristica è la g_2^1 appartenente alla curva iperellittica stessa; e quindi le coppie di punti dell'involuzione definita dalla rete, riescono sempre allineate con O. La curva di coincidenza è perciò una curva, di un certo ordine m, intersecante ogni retta per O in due soli punti variabili.

da una curva K, d'ordine s, con molteplicità s-1 in O; e sia K' la sua coniugata nell'involuzione I. Sopra ogni retta $\underline{a}$ per O, la I subordina una involuzione i cui punti doppi sono dati dalle due intersezioni della $\underline{a}$ con la C_m, e nella quale sono coniugati il punto P in cui la $\underline{a}$ incontra K (fuori di O), e il punto P' comune alla $\underline{a}$ e a K'. Allora riferiamo proiettivamente le coppie di questa involuzione su $\underline{a}$, ai punti della retta $\underline{a}$, facendo corrispondere alle due coppie costituite dai punti doppi i punti stessi, e alla coppia (P, P') il punto P. In tal modo si ottiene la richiesta rappresentazione dell'involuzione I, sopra un piano doppio che ha per curva di diramazione la C_m, eventualmente completata con alcune rette per O. In ogni caso, dunque, alla involuzione del primo tipo corrisponde un piano doppio con curva di diramazione di un certo ordine 2n, avente un punto (2n-2)-plo.

tipo II°: Involuzione definita dalla rete (di grado 2) delle cubiche C_3 che passano per sette punti fissi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$.

La curva di coincidenza sega le cubiche della rete in quattro punti che sono doppi per la serie caratteristica g^1_2, ossia è la jacobiana della rete stessa: perciò è una sestica C_6 che passa doppiamente per i punti base A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$) (*).

La nostra involuzione subordina sul piano una trasformazione cremoniana, nella quale alle rette (secanti le C_3 in tre punti variabili) corrispondono le curve di una rete omaloidica che debbono incontrare ugualmente in tre punti variabili le C_3, e comportarsi in modo simmetrico rispetto ai punti base A_i. Tenuto conto che codeste curve hanno genere zero (essendo omologhe di rette), si riconosce facilmente che il loro ordine è 8, e che esse passano con molteplicità 3 per i punti A_i: le indicheremo con C_8.

Una retta $\underline{a}$ incontra la C_8 coniugata in 8 punti, dei quali sei cadono nelle intersezioni della $\underline{a}$ con la curva di coincidenza C_6, e i due rimanenti costituiscono una coppia di punti coniugati: ne segue che l'involuzione ha la <u>classe uguale ad uno.</u>

Se riferiamo proiettivamente la rete delle cubiche C_3 alla rete delle rette di un piano, la nostra involuzione viene rappresentata sopra un piano doppio, la cui curva di diramazione incontra una retta in tanti punti quante sono le coincidenze dell'involuzione sopra una C_3, cioè in quattro punti. Dunque <u>all'involuzione del secondo tipo corrisponde il piano dop-</u>

(*) Cfr. pag. 72.

pio con quartica di diramazione C_4.

Nella trasformazione (2,1) che fa passare dal piano dell'involuzione al piano doppio, le rette del primo piano hanno per analoghe cubiche tangenti in sei punti alla C_4, ed aventi un punto doppio variabile che risponde alla coppia dell'involuzione appartenente alla retta loro analoga.

tipo III°: Involuzione definita dal sistema triplamente infinito delle sestiche C_6 passanti per otto punti doppi A_i $(i=1, 2, \ldots, 8)$.

Le sestiche C_6 definiscono una involuzione I poichè non formano un sistema semplice. Infatti le C_6 che passano per un punto P passano di conseguenza per un altro punto P' (che sarà il coniugato di P nella I). Ci si rende conto di questo considerando le cubiche C_3 passanti per i punti A_i: esse costituiscono un fascio che ha un nono punto base A_9, e le C_6 segano sopra una C_3 una serie lineare g_2^1, dato che ogni C_3 fa parte di ∞^1 C_6 riducibili. Questa g_2^1 è formata precisamente dalle coppie (P,P') coniugate nella I, appartenenti alla C_3.

La curva di coincidenza dell'involuzione I sega le sestiche C_6, di genere due, ciascuna nei sei punti doppi, cioè nel gruppo jacobiano, della g_2^1 (canonica) che le appartiene:

le cui generatrici rispondono alle cubiche C_3 del fascio di punti base A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, questo fascio essendo autoresiduo rispetto a $|C_6|$ (il vertice del cono corrisponde al nono punto base A_9 del fascio $|C_3|$).

Sul cono quadrico doppio si ha una curva di diramazione che incontra le coniche sezioni piane in tanti punti quante sono le coincidenze della I sopra una C_6, cioè in sei punti. In conclusione: all'involuzione I del terzo tipo, corrisponde un cono quadrico doppio con sestica di diramazione (situata sopra una superficie cubica). Proiettando questo cono da uno dei suoi punti si ottiene un piano doppio con curva di diramazione d'ordine sei, dotata di due punti tripli infinitamente vicini.

Fra il piano doppio così definito, e il piano semplice in cui si trova l'involuzione I, intercede una corrispondenza (1, 2) in cui le rette del piano doppio hanno per omologhe le sestiche del sistema $|C_6|$ passanti per una coppia della I. Inversamente, alle rette del piano semplice (che incontrano le C_6 in sei punti e la curva di coincidenza in nove) corrisponderanno curve del sesto ordine tangenti in nove punti variabili alla curva di diramazione, e passanti tre volte per i due punti tripli infinitamente vicini di questa. Inoltre poichè l'involuzione ma lo jacobiano della g_2^1 è un gruppo della serie somma della serie canonica e del doppio della g_2^1 stessa, ossia della serie tripla della g_2^1, che è segata sulla C_6 dal sistema triplo del fascio delle C_3 (aggiunte di C_6): allora la curva di coincidenza richiesta fa parte di questo sistema, e quindi è <u>una curva del nono ordine C_9 passante triplamente per gli otto punti A_i</u>.

L'involuzione I considerata come trasformazione del piano, è una trasformazione cremoniana d'ordine 17 in cui alle rette del piano corrispondono <u>le curve C_{17} di una rete omaloidica, passanti sei volte per i punti A_i</u> ($i = 1, 2, \ldots\ldots, 8$). Infatti la curva coniugata di una retta deve – come questa – intersecare le C_6 in sei punti variabili, e d'altra parte è di genere zero.

Una retta è incontrata dalla sua C_{17} coniugata in 17 punti, fra i quali sono le nove intersezioni della retta con la curva di coincidenza: restano altri otto punti che si distribuiranno in quattro coppie di punti coniugati nella I, ne segue che <u>l'involuzione I è della quarta classe</u>.

Riferendo proiettivamente il sistema ∞^3 delle C_6, ai piani dello spazio, si ottiene una <u>superficie doppia</u> che è rappresentata sul piano

I è di classe quattro, tali sestiche avranno quattro punti doppi variabili.

Nota.- Si potrebbe pensare di generalizzare il piano doppio precedente, prendendo come curva di diramazione una sestica con due punti tripli distinti fra loro, ciò che condurebbe ancora ad una quadrica doppia con sestica di diramazione, ma non degenere in un cono. Però la superficie che ne nascerebbe, non ha più il genere $p_g = 0$ ma il genere $p_g = 1$, poichè i punti tripli distinti non impongono condizioni alle curve canoniche (*).

Un facile computo di costanti prova che i tre tipi di piani doppi razionali a cui siamo pervenuti, cioè il piano doppio con C_{2n} di diramazione dotata di un punto $(2n-2)$-plo, il piano doppio con quartica di diramazione e quello con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini, corrispondono al caso generale delle loro curve di diramazione. In altre parole, un piano doppio con curva di diramazione dei tipi indicati, deve essere generalmente razionale, e si potrà

(*) Cfr. § 60.

quindi il problema di darne l'effettiva rappresentazione sul piano semplice.

Giustifichiamo il computo di costanti sopra indicato, limitandoci per semplicità di discorso ai tipi II° e III°.

L'involuzione del tipo II° dipende dalla scelta dei sette punti base della rete di cubiche C_3, il che importa 14 costanti arbitrarie. Togliendo gli otto parametri da cui dipende una omografia, restano sei invarianti proiettivi: ne segue che anche il piano doppio corrispondente con C_4 di diramazione, dipenderà da sei invarianti proiettivi. Ora questo è proprio il numero degli invarianti proiettivi di una quartica generale.

Relativamente al terzo tipo, si osservi che la determinazione del sistema delle sestiche con otto punti base doppi dipende da sedici costanti arbitrarie (le coordinate dei punti base); cosicchè - tenuto conto che le omografie piane sono ∞^8 - restano otto invarianti proiettivi. D'altra parte si può vedere che le sestiche dello spazio appartenenti a coni quadrici, dipendono ugualmente da otto invarianti proiettivi. Infatti con una omografia dello spazio, possiamo sempre ricondurre una tale C_6 ad appartenere ad un cono dato: ora su questo cono, le C_6, intersezioni con superficie cubiche, sono $\infty^{19-4=15}$. Ma le omografie del cono in sè sono ∞^7 e quindi ogni C_6 dipende di fatto da $15-7=8$ invarianti proiettivi.

Affrontiamo ora il problema di rappresentare sul piano semplice i piani doppi dei tre tipi sopra incontrati, dimostrandone così la razionalità in modo diretto.

La questione - come è evidente - conduce a cercare una rete omaloidica di curve sopra le superficie rappresentate da quei piani doppi.

Cominciamo dal <u>piano doppio del primo tipo, la cui curva di diramazione C_{2n} è una generica curva dell'ordine $2n$ che possiede un punto O di molteplicità $2n-2$.</u>

Si supponga, da prima, che della C_{2n} non faccia parte nessuna retta uscente da O.

È subito visto che sul piano esiste un sistema doppiamente infinito di curve C_{n+1}, d'ordine $n+1$, passanti n volte per O e tangenti alla C_{2n} in $2n$ punti variabili: infatti il suddetto comportamento in O, e i $2n$ contatti con la C_{2n}, impongono complessivamente alle C_{n+1}

$$\frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(n+5)}{2}$$

condizioni (non tutte lineari), che, per la genericità della C_{2n}, sono tra loro indipendenti; mentre le curve piane d'ordine $n+1$ dipendono da

$$\frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

parametri:

$$\frac{(n+1)(n+4)}{2} - \frac{n(n+5)}{2} = 2 .$$

Osserviamo che ogni C_{n+1} - essendo razionale e priva di punti di diramazione - è immagine di una curva (della superficie F rappresentata dal piano doppio) la quale è composta di due parti K e K' coniugate nella involuzione I_2 che genera il piano doppio stesso (*).

Allora consideriamo un sistema continuo ∞^2 di curve C_{n+1}: esso è immagine di due reti |K| e |K'| della superficie F. Per determinare il loro grado, cioè per avere il numero dei punti comuni a due curve di |K|

(*) Cfr. § 58.

(o di $|K'|$), basta calcolare il numero delle intersezioni, fuori di O e dei loro contatti con la C_{2n}, di due C_{n+1} infinitamente vicine (*): esso è dato da:

$$(n+1)^2 - n^2 - 2n = 1$$

cioè: <u>le due reti $|K|$ e $|K'|$ della superficie F sono omaloidiche.</u>

Quindi riferendo proiettivamente le curve di una di queste due reti, alle rette di un piano, la superficie F risulta riferita punto per punto al piano stesso.

Ma questa rappresentazione del piano doppio sul piano semplice si può ottenere anche direttamente, senza passare attraverso la superficie F, nel modo che segue.

Se C_{n+1} del sistema doppiamente infi-

(*) La convenienza di riferirsi per questo computo, a due curve C_{n+1} infinitamente vicine, appare dal fatto che un punto comune a due C_{n+1} è immagine di una coppia della involuzione I_2, che è comune alle due curve (riducibili) rappresentate dalle C_{n+1}: ora se queste C_{n+1} sono distinte, può darsi che per un punto di quella coppia passino una curva di $|K|$ e una di $|K'|$, ciò che invece - per ragioni di continuità - non accade se si considerano due C_{n+1} infinitamente vicine.

nito sopra considerato, toccano la curva di diramazione C_{2n} in gruppi di $2n$ punti che costituiscono una g^2_{2n}, contenuta in una delle serie metà di quella segata sulla C_{2n} da tutte le curve d'ordine $n+1$ passanti n volte per O: allora riferiamo proiettivamente i gruppi della g^2_{2n} alle rette di un piano τ. Nasce così tra il piano doppio e il piano τ, una corrispondenza $(1,2)$. Infatti un punto P di τ è centro di un fascio di rette cui corrisponde una g^1_{2n} contenuta nella g^2_{2n}: la g^1_{2n} è segata sulla C_{2n} da un sistema ∞^1 di C_{n+1} che hanno un punto fisso P' poichè rappresentano le curve di un fascio della superficie contenuto nella rete $|K|$ (o $|K'|$). Il punto P' si riguarderà allora come omologo di P.

Inversamente: preso un punto P' del piano doppio, esso è immagine di due punti della superficie F ciascuno dei quali individua un fascio della rete $|K|$ (o $|K'|$), ed ognuno di questi fasci dà sopra la C_{2n} una g^1_{2n} contenuta nella g^2_{2n}; infine, a tali g^1_{2n} corrispondono sul piano τ, due fasci di rette i cui centri P e P_0 saranno gli omologhi di P'.

Nel caso che abbiamo escluso in cui la C_{2n} si spezzi in una C_{2n-1} avente in O un punto $(2n-3)$-plo e in una retta $\underline{a}$ uscente da O, le considerazioni svolte cadono in difetto poichè le C_{n+1} hanno in comune con la $\underline{a}$, fuori di O, un solo punto, e quindi non possono più soddisfare alla condizione di essere tangenti alla curva di diramazione ovunque l'incontrano. Tuttavia una opportuna trasformazione quadratica della C_{2n}, permette di ricondurci al caso precedente.

Se il punto A d'intersezione della retta $\underline{a}$ con la C_{2n-1} (fuori di O) è semplice per questa, per ricadere nel caso suddetto basta eseguire una trasformazione quadratica che abbia un punto fondamentale in O, un altro in A, ed il terzo in un punto generico del piano (fuori di C_{2n}). Quando invece la C_{2n-1} abbia in A un punto doppio, ricorrendo alla trasformazione quadratica precedente si ha una nuova curva di diramazione di cui dovrà far parte la retta trasformata dell'intorno di A, dato che per la curva di diramazione primitiva $C_{2n-1}+a$ il punto A è di molteplicità tre (*). Però la curva di diramazione cui si perviene, si trova nelle condizioni del primo tipo studiato, cioè la retta che ne fa parte passa per un punto semplice dell'ulteriore componente. Ci si riconduce così ancora a un caso noto. Lo stesso accade, come è facile vedere, quando la C_{2n-1} abbia in A un tacnodo,

(*) Cfr. § 59.

che si riporta al caso di A doppio. In generale da un tacnodo di specie s, si passa ad uno di specie $s-1$.

Nota.- Una eccezione essenziale alla razionalità dei piani doppi del tipo studiato, si ha solo quando la curva di diramazione C_{2n} si spezzi in $2n$ rette uscenti da O: allora la superficie si può ridurre ad una rigata o, in particolare, ad un cono iperellittico. Infatti le rette per O rappresentano curve razionali di un fascio, accoppiate in una involuzione g_2^1; e con un procedimento che viene chiarito nel § 64, codeste curve razionali si possono trasformare razionalmente nelle generatrici di una rigata iperellittica. Per valutare il genere di questa, si noti che le coincidenze della g_2^1 rispondano alle rette che compongano la C_{2n} di diramazione, e perciò si ha $p=n-1$.

Il modo più semplice per dimostrare la razionalità del piano doppio con quartica di diramazione, si ha facendo vedere che esso può ottenersi per proiezione di una superficie cubica da un suo punto.

Una superficie del terzo ordine, F,

passante per il punto improprio O dell'asse z, ha un'equazione del tipo:

$$\varphi_1 (xy) . z^2 + 2\varphi_2 (xy) . z + \varphi_3 (xy) = 0,$$

essendo φ_1, φ_2 e φ_3 polinomi, rispettivamente, di grado 1, 2 e 3 in x, y. Allora essa è rappresentata sul piano doppio $z = 0$ con la curva di diramazione:

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0 .$$

Basterà dimostrare che sotto tale forma si può pure scrivere l'equazione di una quartica generale

$$f_4 (x, y) = 0 .$$

Per questo - detta $\underline{a}$ una retta bitangente alla f_4 nei punti A e B - consideriamo il fascio:

$$f_4 (x, y) + \lambda \left[f_2 (x, y) \right]^2 = 0$$

individuato dalla f_4 e da una conica $f_2 (x, y) = 0$ passante per A e B, contata due volte: esso è tutto costituito di curve del quarto ordine che toccano la $\underline{a}$ nei punti A e B. La quartica di tal fascio passante per un generico punto di $\underline{a}$, si spezza in questa retta (d'equazione $f_1(x,y)=0$) e in una cubica residua (d'equazione $f_3(x,y)=0$); se k è il corrispondente valore del parametro λ, si ha:

$$f_4(x,y) + K\left[f_2(x,y)\right]^2 = f_1(x,y).\, f_3(x,y)$$

da cui:

$$f_4(x,y) = f_1(x,y).\, f_2(x,y) - K\left[f_2(x,y)\right]^2,$$

che è appunto la forma richiesta.

Le superficie del terzo ordine sono tutte razionali all'infuori del <u>cono cubico ellittico</u>, il quale dà luogo ad una curva di diramazione costituita da una quartica spezzata in quattro rette (distinte) di uno stesso fascio; questo è il solo <u>caso di</u> effettiva <u>eccezione</u> alla razionalità dei piani doppi $\{x, y, \sqrt{f_4(x,y)}\}$, e rientra tra i piani doppi del primo tipo non razionali, che già abbiamo considerato.

Conviene approfondire lo studio del <u>piano doppio con quartica di diramazione C_4</u>, per giungere a dimostrarne la razionalità e a darne la rappresentazione sul piano semplice, direttamente, senza passare attraverso la superficie cubica F di cui esso è immagine.

Esponiamo dapprima, in breve, le linee generali del procedimento che consente di raggiungere questo scopo, salvo poi a precisarne i particolari.

Sopra la superficie cubica F esistono delle reti omaloidiche di cubiche gobbe, che sono rappresentate sul piano doppio da un sistema continuo ∞^2 di cubiche C_3 dotate di un punto doppio variabile (e perciò razionali). Se C_3 sono sestitangenti alla C_4 e i sei punti di contatto dànno i gruppi di una serie lineare g_6^2 che è contenuta in una delle serie metà della g_{12}^9 segata su C_4 da tutte cubiche.(*)

Viceversa, ricercheremo sul piano doppio i sistemi ∞^2 di cubiche razionali che sono immagini di reti omaloidiche. Siccome un sistema siffatto è contenuto in un sistema continuo triplamente infinito $\{C_3\}$ di cubiche sestitangenti alla C_4, cominceremo col considerare i sistemi $\{C_3\}$. Essi sono di due tipi: quelli la cui cubica generica (che è ellittica) è immagine di una curva irriducibile, e quelli in cui essa rappresenta una curva spezzata. Questi ultimi si di-

(*) Cfr. § 58.

stinguono per la proprietà che i punti di contatto di ogni loro cubica con la C_4, appartengono ad una conica (*).

Ora faremo vedere che se si prende un sistema del primo tipo e ne consideriamo le ∞^2 cubiche dotate di un punto doppio, queste rappresentano curve spezzate che si distribuiscono in due reti omaloidiche; ciò che invece non accade per i sistemi del secondo tipo. La questione sarà così risolta.

Procediamo a svolgere il precedente ragionamento.

Le cubiche piane C_3 sestitangenti alla C_4, sono ∞^3 e si distribuiscono in 64 sistemi continui triplamente infiniti $\{C_3\}$, ciascuno dei quali segna sulla C_4 una delle 64 serie lineari g_6^3 metà della g_{12}^9 segata da tutte le cubiche del piano (**).

Abbiamo già detto che uno di questi sistemi $\{C_3\}$ è immagine di un sistema di curve spezzate, quando i punti di contatto di una (e quindi di tutte le) C_3 sono situati sopra una conica, cosicchè la serie segnata su C_4 da $\{C_3\}$ non è altro che la serie segata dalle coniche per due punti fissi. (***)

(*) § 58.

(**) Cfr. Enriques - Chisini: op. cit., libro V, cap. III, § 35 (vol. III, pag. 394).

(***) Cfr. § 58.

Questi sistemi $\{C_3\}$ si possono costruire e quindi contare, nella maniera seguente.

Prendiamo una cubica C_3 di un tale $\{C_3\}$, e sia C_2 la conica a cui appartengono i suoi punti di contatto: il fascio individuato da C_4 e dalla C_2 contata due volte, è tutto costituito di quartiche tangenti alla C_4 negli otto punti in cui questa interseca la C_2. Ora la quartica del fascio che passa per un punto della C_3 sopra considerata, si spezza nella C_3 stessa e in una retta residua che - dovendo costituire con la C_3 una quartica ottotangente a C_4 - è bitangente alla curva di diramazione C_4. Inversamente - come abbiamo già visto - se si prende una retta bitangente alla C_4, e per i suoi due punti di contatto si manda una conica C_2, nel fascio individuato da C_4 e dalla C_2 contata due volte, esiste una cubica C_3 che tocca la C_4 in sei punti di C_2: il gruppo di questi sei punti individua una serie completa g^3_6 che è segnata da un sistema $\{C_3\}$ a cui appartiene quella C_3, e che è del tipo che c'interessa. Ne segue che <u>i sistemi $\{C_3\}$ immagini di sistemi di curve spezzate, sono tanti quante le tangenti doppie della curva di diramazione C_4: cioè in numero</u>

di 28 (*).

Ora escludendo i 28 sistemi $\{C_3\}$ così costruiti, rimangono (fra i 64) 36 sistemi $\{C_3\}$, la cui cubica generica rappresenta una curva irriducibile.

Se si considera un sistema $\{C_3\}$ di questo ultimo tipo, e si fa variare con continuità la sua cubica generica C_3 fino a farle acquistare un punto doppio, allora evidentemente la curva rappresentata da C_3 varia pure con continuità e al limite si spezza (**) in due parti che sono fra loro connesse, poichè s'incontrano nei due punti che corrispondono a quello del piano in cui cade il punto doppio della C_3. (Invece una C_3 razionale appartenente ad un sistema $\{C_3\}$ immagine di curve tutte riducibili, rappresenta una curva le cui due parti hanno ciascuna un punto doppio nei punti che corrispondono al punto doppio della C_3.)

Ne segue che se alle cubiche di un sistema $\{C_3\}$ la cui curva generica è immagine di una curva irriducibile, s'impone di acquistare un punto doppio, si ottiene uno

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. IV, § 40 (vol. III, pag. 468).

(**) Poichè una curva doppia razionale senza punti di diramazione può solo rappresentare una curva riducibile (cfr. § 58).

o più sistemi doppiamente infiniti di cubiche razionali, ciascuno dei quali rappresenta due <u>reti omaloidiche</u>: infatti due cubiche infinitamente vicine di un tale sistema hanno in comune nove punti, sei dei quali sono assorbiti dai loro contatti con la C_4, e due cadono nei loro punti doppi (*), questi otto punti non corrispondendo ad intersezioni delle curve obiettive; quindi c'è un solo punto comune alle curve rappresentate da quelle due cubiche, e perciò il sistema ∞^2 a cui appartengono è di grado uno e per conseguenza lineare (**).

Giunti così a determinare una rete omaloidica della superficie mediante il sistema doppiamente infinito delle cubiche razionali C_3 che la rappresentano sul piano doppio, per rappresentare il piano doppio stesso sopra un piano semplice, basterà considerare la g_6^2 che le C_3 del sistema suddetto segano sulla C_4 di diramazione, e riferire proiettivamente i gruppi di questa alle

---

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro II, cap. I, § 5, nota (vol. I, pag. 182).

(**) Ricordiamo la proprietà caratteristica dei sistemi lineari: è lineare un sistema ∞^r di curve irriducibili, con $r>1$, quando r punti generici della superficie determinano <u>una</u> curva del sistema (cfr. § 8).

rette di un piano, come già abbiamo visto analogamente nel caso dei piani doppi del primo tipo.

<u>Nota</u>.- Il sistema doppiamente infinito delle cubiche razionali C_3 sopra considerato, è tale che esiste una C_3 avente il punto doppio in un punto P assegnato: infatti sulla superficie al punto P corrispondono due punti P' e P'_0 i quali individuano una curva della rete, la cui C_3 immagine ha in P un punto doppio.

Ad un fascio contenuto nella rete rappresentata dalle C_3, corrisponde un sistema semplicemente infinito di cubiche C_3 con un punto fisso comune, che toccano la C_4 nei gruppi di una g^1_6 appartenente alla g^2_6 determinata dall'intero sistema delle C_3. Come sappiamo questo sistema ∞^1 è di <u>indice due</u>, poichè per un punto P passano le due C_3 immagini delle curve del fascio individuate dai punti P' e P'_0 omologhi di P. Però può accadere che P' e P'_0 appartengano ad una medesima curva del fascio: allora la sua immagine C_3 ha in P un punto doppio, ed è l'unica cubica che passa per P.

È facile vedere che <u>il luogo dei punti</u>

doppi delle C_3 del nostro sistema semplicemente infinito, è una retta: infatti il luogo richiesto, contato due volte, costituisce – insieme alla C_4 di diramazione – la curva inviluppo delle C_3 considerate, la quale è del sesto ordine. Sopra la nominata retta si trova il punto fisso comune alle C_3: invero una C_3 ha in comune con la retta, altre al punto doppio, un altro punto semplice O, per il quale – come per ogni altro punto della retta stessa – passa una cubica del sistema avente ivi un punto doppio; ma abbiamo visto che se un punto è doppio per una C_3, per esso non può passare nessun'altra cubica del sistema, e quindi necessariamente il punto O è comune a tutte le ∞^1 C_3 considerate.

Alla retta suddetta corrisponde sul piano semplice una cubica variabile in una rete di grado due, sopra la quale si ha una g_2^1.

Per giungere a rappresentare direttamente sopra il piano semplice, il piano doppio del terzo tipo, che ha come curva di diramazione una sestica C_6 dotata di due punti tripli infinitamente vicini A e A', è necessaria una ricerca che porta a questioni assai complicate e non prive di qualche difficoltà. Si consegue più facilmente lo scopo facendo vedere che il piano doppio del terzo tipo può ridursi ad uno del secondo, cioè che ogni superficie F rappresentabile sul piano doppio con la suddetta C_6 di diramazione, è pure rappresentabile sopra un altro piano doppio che possiede invece per curva di diramazione una quartica. Per questo basta mostrare che sopra la F esiste una rete di grado due costituita da curve ellittiche.

Vediamo come si possa individuare una tale rete, attraverso un sistema che la rappresenti sul piano doppio.

Si considerino le ∞^2 quartiche piane C_4 che passano due volte per A e A', e toccano in sei punti la C_6: esse si distribuiscono in $2^8 = 256$ sistemi continui (non lineari) doppiamente infiniti $\{C_4\}$, ciascuno dei quali sega sulla C_4 una delle 256 serie metà di quella segata dalle quartiche che hanno in A e A' due punti doppi(*).

Tra questi sistemi ce ne sono che rappresentano curve spezzate: sono quelli le cui quartiche C_4 toccano le C_6 in sei punti

---

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. III, § 35 (vol. III, pag. 394).

situati sopra una cubica passante doppiamente per A e semplicemente per A' (*).

Vediamo allora come si possa ottenere un siffatto sistema $\{C_4\}$: si prenda una conica C_2 passante per A e A', e che sia tritangente alla C_6 ; per i tre punti di contatto si mandi una cubica C_3 che abbia in A un punto di molteplicità due, e passi semplicemente per A'. Consideriamo allora il fascio individuato dalla C_6 e dalla C_3 contata due volte: tutte le sestiche di questo fascio toccano la C_6 nei suoi punti d'incontro con la C_3 (fuori di A e A'). La sestica del fascio che passa per un punto della conica C_2, è spezzata nella C_2 stessa ed in una quartica C_4 che ha in A ed in A' due punti doppi, e che è tangente alla C_6 in sei punti di C_3 : il gruppo di questi sei punti individua sulla C_6 una serie completa g^2_6, che - essendo una delle serie metà di quella segata da tutte le quartiche passanti doppiamente per A ed A' - è costituita dai gruppi dei punti di contatto delle curve di uno dei predetti sistemi $\{C_4\}$, il quale è quindi del tipo richiesto.

Il sistema $\{C_4\}$ è immagine di due sistemi ∞^2 di curve ellittiche della superfi-

(*) Cfr. § 58.

cie F, che sono di grado due, perchè due C_4 infinitamente vicine hanno due sole intersezioni variabili. Resta da dimostrare che ognuno di questi sistemi è lineare, cioè costituisce una <u>rete</u> : ciò segue dall'osservare che essi sono razionali, poichè si trovano in corrispondenza biunivoca con la g_6^2 determinata da $\{C_4\}$ sopra C_6. Infatti un sistema razionale di curve è sempre contenuto in un sistema lineare (*) ; il quale nel nostro caso non può avere dimensione maggiore di due, perchè altrimenti la serie caratteristica delle curve rappresentate dalle C_4 sarebbe una g_2^2, e quindi codeste curve risulterebbero razionali.

È così completamente dimostrata la esistenza di reti di curve ellittiche di grado due, sulla superficie F rappresentata dal nostro piano doppio : riferendo proiettivamente le curve di una tale rete alle rette di un piano, la F riesce rappresentata doppiamente sopra questo, con curva di diramazione del quarto ordine. Si ricade così nei piani del secondo tipo.

(*) Questa proprietà si dimostra come nel caso del tutto analogo relativo alle serie di gruppi di punti sopra una curva, in Enriques-Chisini : op. cit., libro V, cap. I, § 10, nota (vol. III, pag. 78).

Osservazione. - La dimostrazione precedente si può svolgere anche senza far uso della proposizione che una serie razionale di curve sopra una superficie è sempre contenuta in un sistema lineare. Basta far vedere che tutte le C_4 del nostro sistema $\{C_4\}$, seitangenti alla C_6 nei gruppi di una stessa g_6^1, passano per due punti fissi del piano; sicchè il sistema delle curve corrispondenti sopra F gode della proprietà che per due punti generici passa una sola sua curva, proprietà caratteristica delle reti (*).

Invero i punti fissi comuni alle C_4 anzidette si trovano come segue: la serie ∞^1 delle C_4 è d'indice 2, poichè c'è una curva di essa per un punto della C_6 inviluppo. Inoltre codesta serie contiene una curva spezzata in una conica (per A, A'; tritangente alla C_6) e in una retta $\underline{a}$ per A, contata due volte, la quale va a segare ulteriormente la C_4 in due punti: ma vi è una sola curva della serie avente un punto doppio assegnato, e quindi le due intersezioni della retta doppia $\underline{a}$ con una C_4 della serie, restano fisse.

Nota. - I casi d'eccezione in cui il piano dop-

(*) Cfr. nota (**), a pag. 424.

pio con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini, si particolarizza in modo da non essere più razionale, sono due:

1) sestica degenere in sei rette per A (il piano doppio rappresenta allora una rigata di genere due);

2) sestica degenere in tre coniche che si toccano in A e in un ulteriore punto. (Il piano doppio rappresenta allora una superficie con un fascio ellittico di curve razionali, ed è riducibile ad un cono cubico: le curve razionali del fascio sono rappresentate dalle coniche del fascio a cui appartengono le componenti della C_6 di diramazione).

Si può dimostrare che i casi indicati sono i soli in cui il nostro piano doppio con C_6 di diramazione, non è più razionale. A tal uopo converrà riconoscere anzitutto che la rappresentazione del piano doppio sul piano semplice degenera soltanto quando la C_6 acquista delle singolarità che abbassano il genere numerico del piano doppio. E tali singolarità (quando non si abbassi l'ordine della C_6 facendo comparire in essa una componente doppia) conducono appunto alle degenerazioni della C_6 sopra indicate.

63- NOTA SULLA CLASSIFICAZIONE DEI PIANI DOPPI RAZIONALI

Per chi ammetta di conoscere la riduzione di tutte le involuzioni piane ai tipi di Bertini, risulta indirettamente che ogni piano doppio razionale si può ridurre con una trasformazione cremoniana ad uno dei tre tipi indicati nel paragrafo precedente.

Indipendentemente dalla conoscenza delle involuzioni, Noether (*) mediante considerazioni, a dir vero, un po' incerte e non chiaramente esposte, giunse a persuadersi che i suddetti tipi esauriscono tutti i piani doppi razionali, considerati di fronte alle trasformazioni cremoniane del piano.

La dimostrazione di questo teorema si può dare ora, con Castelnuovo ed Enriques (**), in modo assai semplice.

Si abbia un piano doppio razionale;

(*) Cfr. M. Noether: " Ueber die ein- zweideutigen Ebenentransformationen„ (Sitzungsberichte des physick. medicin. Soc. zu Erlangen, 14 Januar 1878)

(**) Cfr. G. Castelnuovo e F. Enriques: " Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi„ Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XIV, 1900).

con curva di diramazione C_{2n}, d'ordine pari $2n$: il genere ed i plurigeneri di un tale piano doppio, saranno tutti nulli, come avviene per ogni superficie razionale. Ora abbiamo visto (*) che le curve aggiunte (**) d'ordine $2n-3i$ e d'indice $i>1$, della curva di diramazione C_{2n} di un piano doppio, dànno luogo a particolari curve pluricanoniche: ne segue che <u>la C_{2n} di diramazione di un piano doppio razionale, è priva delle successive aggiunte d'ordine $2n-6$, $2n-9$, ..., e, rispettivamente, d'indice 2, 3, ...</u>

Questa osservazione condurrà a dimostrare l'asserto; faremo vedere che: <u>se la curva di diramazione, C_{2n}, di un piano doppio è priva delle successive aggiunte degli ordini $2n-6$, $2n-9$.... ..., essa è riducibile, con una trasformazione cremoniana, ad uno dei tipi seguenti:</u>

1) <u>curva di un certo ordine $2m$ con un punto $(2m-2)$-plo (almeno);</u>
2) <u>quartica;</u>
3) <u>sestica con due punti tripli infinitamente vicini.</u>

Considieriamo il punto O di massima

(*) Cfr. § 60.

(**) Le aggiunte alla C_{2n} s'intendono definite rispetto alle <u>molteplicità virtuali</u> della C_{2n} stessa (cfr. §§ 59 e 60).

molteplicità _virtuale_, r, per la C_{2n}: quando si passa dalla C_{2n} alle curve aggiunte successive, C', C'', ..., la differenza $2n-r$ diminuisce di due unità ad ogni passaggio, poichè $2n$ diminuisce di 3 ed r di 1. Così si arriverà ad aggiunte $C^{(i)}$ di un certo ordine s, soggette a passare per O con la molteplicità s o $s-1$.

Cominciamo col supporre che queste aggiunte $C^{(i)}$ siano le prime, $C^{(i)} = C'$, cioè che $s = 2n-3$. Allora se le C' possiedono un punto O $(2n-3)$-plo, questo ha la molteplicità (virtuale) $2n-2$ per la C_{2n}, la quale quindi appartiene al primo dei tipi suddetti. Se invece il punto O è $(2n-4)$-plo per le C', esso avrà per la C_{2n} la molteplicità virtuale (ed effettiva) $2n-3$, e ciò porta l'esistenza di un altro punto, pure $(2n-3)$-plo, infinitamente vicino ad O (*). Ma per questo si richiede che sia:

$$2(2n-3) \leq 2n,$$

(*) Per le nostre convenzioni (§ 59), se un punto O della C_{2n} di diramazione, ha la _molteplicità virtuale_ dispari, $2i+1$, infinitamente vicino ad O si ha un secondo punto O' pure $(2i+1)$-plo: infatti affinchè il punto O, che ha per la C_{2n} la molteplicità effettiva $2i+1$, sia $2i$-plo per le C' - e non $(2i-1)$-plo come seguirebbe dalle ricordate convenzioni - occorre e basta che infinitamente vicino ad O si trovi un secondo punto O' di una certa molteplicità K, in modo che le aggiunte C' (rispetto alle da cui $n=3$, o $n=2$, o $n=1$.

Se $n=3$ la C_{2n} è una sestica con due punti tripli infinitamente vicini; se $n=2$ una quartica, e se $n=1$ si cade in un caso particolare del tipo precedente.

Così, dunque, se $s=2n-3$ la C_{2n} appartiene senz'altro a uno dei tipi suddetti: vediamo invece come a questi ci si possa ridurre quando sia $s<2n-3$.

Se $s<2n-3$, i punti multipli della C_{2n} imporranno alle $C^{(i)}$ delle condizioni tali da renderne impossibile l'esistenza. Da ciò segue - come si dimostra facilmente (*) - che per i tre punti di più alta molteplicità r, r_1, r_2, della C_{2n}, è soddisfatta la relazione:

$$r+r_1+r_2>2n;$$

ed inoltre, nel caso eccezionale in cui esistano dei punti multipli $O_1, O_2, \ldots\ldots$, infinitamente vicini al punto O di massima molteplicità r, e pros-

---

quali la molteplicità virtuale del punto O' va computata come se esso fosse $(K+1)$-plo) abbiano ivi una molteplicità tale che si verifichi lo scaricamento di una unità sopra il punto $(2i-1)$-plo O. E ciò porta che il numero K sia dispari ed uguale a $2i+1$.

(*) La dimostrazione trovasi esposta in Enriques - Chisini, op. cit. libro V, cap. II, § 21. (vol. III, pag. 188; cfr. anche pag. 190).

simi ad esso, esisterà pure qualche punto di C_{2n} non prossimo ad O, la cui molteplicità K soddisfa alla disuguaglianza:

$$2K + \tau > 2n.$$

Queste due proprietà consentono, in ogni caso, di abbassare l'ordine della C_{2n} mediante opportune trasformazioni quadratiche (*), fino a che non si giunga ad una trasformata C_{2m} di C_{2n}, le cui prime aggiunte siano dotate di un punto di molteplicità uguale al loro ordine, o minore di uno. Ma allora si ricade nel caso precedente: cioè la C_{2m} appartiene ad uno dei tipi richiesti.

Abbiamo osservato (**) che fra i piani dei tipi suddetti, generalmente razionali, s'incontrano dei casi particolari che non sono più razionali. Precisamente ciò accade quando si ha una curva di diramazione costituita da 2n rette di un fascio, ovvero da una sestica degenere in tre coniche

---

(*) Cfr. Enriques - Chisini: l. cit. nella nota precedente.

(**) Cfr. § 62.

bitangenti (*). Tali piani anzichè superficie razionali rappresentano delle rigate ellittiche od iperellittiche.

Poichè, d'altronde, anche per una superficie rigata i plurigeneri sono tutti uguali a zero, le considerazioni precedenti ci dicono che le rigate relative a siffatti piani sono le sole rappresentabili sopra un piano doppio.

Allora le conclusioni cui siamo sopra giunti, si possono precisare nel modo che segue:

<u>Condizione necessaria e sufficiente affinchè un piano doppio rappresenti una superficie razionale, o in particolare rigata, è che la curva di diramazione C, supposta d'ordine $2n$, sia priva delle aggiunte degli ordini $2n-6$, $2n-9$, ..., e, rispettivamente, d'indice 2, 3, ... In tal caso, mediante una trasformazione cremoniana, la C si può ridurre ad uno dei seguenti tipi:</u>

(*) Questo tipo si riconduce al precedente (per $n=2$) mediante la trasformazione quadratica che ha per punti fondamentali i due punti di bitangenza A, B, e – per esempio – il punto infinitamente vicino ad A: si ottengono così quattro rette di diramazione, tre delle quali corrispondono alle tre coniche e la quarta all'intorno di B.

1) curva d'ordine $2n$, con un punto $(2n-2)$-plo;

2) quartica;

3) sestica con due punti tripli infinitamente vicini.

L'enunciato precedente si può anche portare sotto un'altra forma più espressiva:

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'ordine $2n$, sia razionale o rappresenti una rigata (ellittica o iperellittica) sono espresse dall'annullarsi dei plurigeneri $P_2, P_3, \ldots\ldots, P_{[\frac{2n}{3}]}$ (designando con $[\frac{2n}{3}]$ il massimo intero contenuto in $\frac{2n}{3}$).

Infatti

$$P_2 = P_3 = \ldots\ldots = P_{[\frac{2n}{3}]} = 0,$$

porta come conseguenza la mancanza delle curve aggiunte successive della C_{2n}, e inversamente.

64 - SUPERFICIE CON UN FASCIO LINEARE DI CURVE RAZIONALI: TEOREMA DI NOETHER

Dalla considerazione dei piani doppi razionali del primo tipo si può desumere un criterio di razionalità delle superficie, che è espresso dal

Teorema di Noether: Le superficie con un fascio lineare di curve razionali, sono razionali; e si possono rappresentare sopra un piano in modo che alle curve del fascio rispondano le rette per un punto (*).

Una superficie F possegga un fascio lineare di curve razionali C: vuol dire che queste curve corrispondono razionalmente ai valori di un parametro u, e, siccome ogni C è razionale, i punti di essa possono porsi in corrispondenza biunivoca con i valori di un secondo parametro v.

Così, a prima vista, i punti di F sembrano corrispondere senz'altro alle coppie di valori dei parametri u e v: in tal guisa la razionalità della superficie riuscirebbe addirittura evidente!

(*) M. Noether: "Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen„ Math. Annalen, Bd. 3 (1871).

Ma questa evidenza è una pura illusione. Quando si fissa una curva C, la rappresentazione parametrica dei punti di essa con funzioni razionali del parametro $\underline{v}$ non si fa <u>razionalmente</u> per riguardo ai coefficenti delle equazioni di C, o ai parametri da cui la C stessa dipende; così, in particolare, questa rappresentazione parametrica conterrà irrazionalmente nei suoi coefficienti il parametro $\underline{u}$. Quindi non si ottiene una rappresentazione parametrica di F per mezzo di $\underline{u}$ e $\underline{v}$, ma una rappresentazione parametrica irrazionale rispetto ad uno dei due parametri.

Ora conviene approfondire il problema della rappresentazione parametrica di una curva razionale: quali siano le irrazionalità (numeriche o relative al campo definito dai coefficenti) che vengono a figurare nelle funzioni razionali corrispondenti.

La risposta è che una curva razionale C (la quale può sempre ritenersi proiettata sopra un piano) si lascia trasformare <u>razionalmente</u> - cioè con una trasformazione razionale a coefficenti razionali - in una conica o in una retta, secondo che il suo ordine $\underline{n}$ è pari o dispari. Nel primo caso la rappresentazione parametrica razionale conterrà un radicale quadratico portante sui coefficenti dell'equazione da cui dipende la scelta di un punto sopra la conica (*)

Come conseguenza di questo risultato, se una superficie F contiene un fascio lineare (o anche irrazionale) di curve razionali C d'ordine dispari, è possibile effettuare una trasformazione razionale della superficie in modo che tutte le C si cambino in rette. Se il fascio è razionale, la superficie si trasformerà così in una rigata, o in un cono (**);

(*) La trasformazione che serve all'uopo è fornita dalle curve d'ordine $n-2$ aggiunte alla C, le quali segano sopra di essa una g^{n-2}_{n-2}. Per $n>3$ entro questa serie si può sempre scegliere razionalmente una g^{2}_{n-2} che permette di abbassare di due l'ordine della curva. Quando si arrivi ad $n=3$ si avrà una cubica con punto doppio, che viene proiettata da questo sopra una retta; e l'operazione è ancora razionale perchè il punto doppio è unico. Non è più lo stesso quando si arrivi ad una curva del secondo ordine: allora la proiezione della conica da un suo punto dipende da una irrazionalità quadratica. Per maggiori particolari e per un'ampia analisi sulle "irrazionalità aritmetiche nelle trasformazioni delle curve", cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. III, § 33 (vol. III, pag. 340 e segg.)

(**) Cfr. nota (**) a pag. 220.

di genere zero, che, a sua volta, si può rappresentare sopra un piano in modo che le generatrici abbiano come immagini le rette per un punto O. Infatti basterà riferire biunivocamente la serie delle generatrici del cono al fascio delle rette per O, e poi proiettare ciascuna generatrice sulla retta corrispondente, per esempio da un asse fisso.

Se invece una superficie F contiene un fascio lineare di curve razionali C d'ordine pari, si riesce soltanto a trasformarla in modo che le curve C si mutino in coniche giacenti nei piani per una retta r (*): e tale retta sarà $(n-2)$-pla per la superficie trasformata, supposta d'ordine n.

Ora se si proietta questa superficie da un punto della retta r, sopra un piano segante la r in O, si verrà a rappresentare doppiamente la superficie sopra il piano, e si avrà una curva di diramazione di un certo ordine $2m$ con un punto $(2m-2)$-plo in O, le curve C avendo per immagini le rette doppie per O, con due punti di diramazione (fuori di O). Dopo ciò, per la razionalità di questo piano doppio (**), concludiamo che anche la

(*) Si ricordi che dato un fascio lineare di curve, si può sempre trasformare la superficie in modo che queste vengano segate dai piani di un fascio (§ 10).

(**) § 62.

nostra superficie col fascio di coniche, è razionale, e che può trasformarsi in guisa che le C diventino le rette di un piano passanti per un punto fisso.

Nota. La razionalità della superficie F contenente un fascio lineare di curve razionali C, cioè la possibilità di trasformare simultaneamente le C in rette con una trasformazione razionale di F, risulta in sostanza dalla costruzione di una curva K unisecante le C: la quale nel caso del precedente piano doppio, viene data da una curva unisecante le rette immagi delle C, e tangente ovunque incontra alla curva di diramazione.

Noether ha costruito direttamente una curva K unisecante le C, sopra un'immagine della F contenente un fascio di coniche. Clebsch ha indicato la costruzione nel caso particolare del piano doppio con curva di diramazione del quarto ordine dotata di un punto doppio (*).

Per meglio apprezzare il significato

(*) Cfr. F. Enriques: " Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali" (Math. Annalen, Bd. 52).

caratteristico del teorema di Noether giova osservare che esso non si estende alle varietà a tre o più dimensioni: cioè una varietà a tre dimensioni contenente una congruenza (serie doppiamente infinita), di indice uno, di curve razionali C, non può sempre rappresentarsi nello spazio a tre dimensioni in guisa che le C si trasformino in rette di una stella. La rappresentazione è possibile quando le C sono curve d'ordine dispari, ma non così quando esse sono d'ordine pari: vi sono congruenze di coniche irriducibili, cioè congruenze di coniche che non ammettono una superficie unisecante e perciò non sono trasformabili in stelle di rette (esempi costruiti da D. Montesano (*)).

(*) Rendic. Accad. di Napoli, 1895; vedi anche Enriques-Chisini l. sopra cit.

65- CONDIZIONI DI RAZIONALITÀ PER UNA SUPERFICIE: TEOREMA DI CASTELNUOVO

Gli sviluppi che abbiamo dato permettono di risolvere un problema generale di fondamentale importanza; l'assegnazione dei criteri perchè una superficie algebrica sia razionale.

Evidentemente una siffatta superficie dovrà avere nulli il genere geometrico ed il genere numerico:

$$p_g = p_a = 0 .$$

Ma queste condizioni non sono sufficienti, perchè abbiamo visto che esistono superficie regolari di genere zero e bigenere P maggiore di zero (*), mentre per una superficie razionale i plurigeneri sono nulli.

Aggiungendo la condizione

$$P = 0,$$

si otterranno tutte le condizioni sufficienti richieste?

(*) Cfr. §§ 33 e 40.

A questa domanda risponde affermativamente il teorema di Castelnuovo (*), il quale asserisce appunto che se per una superficie *regolare* F è

$$(p_a=)\ p_g = P = 0,$$

essa è *razionale*. Poichè da

$$P = 0$$

segue:

$$p_g = 0,$$

il teorema si può enunciare:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie F sia razionale, sono espresse dall'annullarsi del suo genere numerico e del suo bigenere:

$$p_a = P = 0.$$

La dimostrazione si riconduce alle due proposizioni seguenti:

(*) G. Castelnuovo: "Sulle superficie di genere zero" (Memorie della Società Italiana delle Scienze - detta dei XL - Serie III, tomo X, 1896).

1) Se sopra una superficie regolare F esiste un sistema irriducibile $|C|$, di grado n e genere π tali che

$$n > 2\pi - 2,$$

la F è razionale.

2) Dall'ipotesi

$$p_a = P = 0,$$

segue che sopra la F esiste necessariamente un sistema irriducibile $|C|$ per il quale:

$$n > 2\pi - 2.$$

Prendiamo a dimostrare la proposizione 1).

Si può sempre supporre che il sistema irriducibile $|C|$, per cui

$$n - (2\pi - 2) = d > 0,$$

sia semplice e sia costituito dalle sezioni iperpiane di una superficie iperspaziale F priva di singolarità: altrimenti basta sostituire al sistema $|C|$ un suo multiplo $|hC|$ aumentato di un sistema $|L|$ che abbia per immagine una superficie priva di singolarità.

Ora:

Il sistema $|C|$, da un certo ordine in poi, è privo dei suoi sistemi aggiunti successivi.

Infatti le curve C' - segando gruppi canonici sopra le C - sono dell'ordine:

$$2\pi - 2,$$

mentre le C'' hanno l'ordine

$$2\pi - 2 - d,$$

e le C''':

$$2\pi - 2 - 2d,$$

e così via; cosicchè (essendo $d>0$) l'aggiunzione necessariamente si esaurisce.

Questo osservato, distinguiamo i due casi seguenti:

a) la serie dei successivi aggiunti a $|C|$:

$$|C'|, |C''|, \ldots\ldots, |C^{(i)}|, \ldots\ldots\ldots, |C^{(h)}|,$$

è _tutta_ composta di sistemi _irriducibili_;

b) in codesta serie s'incontrano dei sistemi _riducibili_: designeremo con $|C^{(i)}|$ il _primo_ di essi.

Ipotesi a): Ciascuno dei sistemi $|C^{(i)}|$ essendo l'aggiunto di un sistema irriducibile $|C^{(i-1)}|$ sopra una superfice regolare, ha la dimensione

$$\pi^{(i-1)} - 1,$$

se con $\pi^{(i-1)}$ indichiamo il genere del sistema $|C^{(i-1)}|$ (*).

Se $|C^{(h)}|$ è il sistema ultimo aggiunto, per modo che $|C^{(h+1)}|$ ha la dimensione -1, le $C^{(h)}$ sono razionali.

Quindi se $|C^{(h)}|$ è almeno semplicemente infinito, la F – per il teorema di Noether (**) – è razionale.

Se invece $|C^{(h)}|$ ha la dimensione zero, il sistema $|C^{(h-1)}|$ è costituito di curve ellittiche. Siccome $|C^{(h-1)}|$ è regolare completo e non speciale, per il teorema di Riemann-Roch (***), la sua dimensione r è uguale al suo grado.

Se è $r \geq 2$, le curve di $|C^{(h-1)}|$ che passano per $r-2$ punti generici di F, costituiscono una rete di grado 2. Allora la F è rappresentabile sopra un piano doppio con quartica di diramazione, e quindi è razionale.

(*) § 46, pag. 233.

(**) § 64.

(***) § 48

Se $r=1$, cioè se il sistema $|C^{(h-1)}|$ è costituito da un fascio di curve ellittiche, il precedente aggiunto $|C^{(h-2)}|$ ha il genere 2, e <u>la serie caratteristica sopra ogni $C^{(h-2)}$, è composta con la g_2^1 canonica</u>. Infatti si consideri la curva $C^{(h-1)}$ di $|C^{(h-1)}|$, passante per un punto generico P della superficie: essa incontra ogni $C^{(h-2)}$ passante per P, nel solo punto P' coniugato di P nella g_2^1 relativa. Se il punto P' non fosse fisso, la $C^{(h-1)}$ risulterebbe di genere zero, mentre, per ipotesi, è ellittica.

Ne segue che la serie caratteristica di $|C^{(h-2)}|$, che è completa e non speciale, è una $g_4^2 = 2g_2^1$ (*), e quindi la dimensione di $|C^{(h-2)}|$ è uguale a 3.

Il sistema $|C^{(h-2)}|$ ha per <u>immagine</u> una quadrica (doppia) di S_3 (**), che risulta essere un cono (***). La F è rappresentata doppia-

---

(*) Se $2x$ è l'ordine della serie caratteristica, la sua dimensione è $\underline{x}$ essendo composta con i gruppi di $\underline{x}$ gruppi della g_2^1; e siccome è completa e non speciale si ha: $2x-2=x$.

(**) § 10.

(***) <u>A priori</u> si ha una quadrica doppia con sestica L_6 di diramazione. Se questa non è un cono, la L_6 dovrà segare le generatrici immagini delle curve ellittiche $C^{(h-1)}$ in quattro punti; e quindi le generatrici dell'altro sistema in due punti. Ciò che porta che la nostra superficie (possedendo un fascio di curve razionali) debba essere razionale. Ma l'ipotesi fatta mente su codesto cono, con curva di diramazione del sesto ordine, situata sopra una superficie cubica (*). Per proiezione da un punto semplice, si passa dal cono ad un piano doppio con curva di diramazione, ancora del sesto ordine, che possiede due punti tripli infinitamente vicini; cioè s'incontra uno dei _piani doppi razionali_.

Del resto a questo risultato si giunge anche direttamente osservando che le $C^{(k-2)}$ passanti per un punto di F costituiscono una rete di grado 2, onde _la F è rappresentata_ sopra un piano doppio, che è _razionale_, poichè ha tutti i plurigeneri nulli (**), esistendo sopra la F un sistema per cui $n > 2\pi - 2$ (***).

Ipotesi b). Si supponga che nella serie dei successivi aggiunti a $|C|$ s'incontri un _primo_ si-

---

risulta assurda, perchè un sistema lineare di curve piane di genere 2, bisecanti le curve razionali di un fascio, si lascia sempre trasformare in un sistema di curve di un certo ordine n, con un punto $(n-2)$-plo O, e allora le sue curve aggiunte vengono necessariamente costituite da rette per O, sicchè non possono essere curve ellittiche.

(*) Si aggiunge a codesta curva un punto di diramazione nel vertice del cono.

(**) § 63.

(***) Cfr. § 47, pag. 262.

stema $|C^{(i)}|$ che sia riducibile senza parti fisse, cioè sia un fascio, o composto con un fascio $|K|$ (certamente <u>lineare</u> per la regolarità di F (*)).

Se $\pi^{(i-1)}$ è il genere di $|C^{(i-1)}|$, il sistema $|C^{(i)}|$ ha la dimensione $\pi^{(i-1)}-1$, e quindi è:

$$|C^{(i)}| = |(\pi^{(i-1)}-1)K|.$$

La razionalità della F si stabilisce con semplici considerazioni, estendendo i ragionamenti sopra svolti (e in ispecie quello relativo al caso in cui l'ultimo aggiunto a $|C|$ risultava costituito da un fascio di curve ellittiche).

Le K non possono essere curve unisecanti le $C^{(i-1)}$, altrimenti il fascio $|K|$ sarebbe irrazionale (di genere $\pi^{(i-1)}$), e - poichè le intersezioni di una $C^{(i)}$ con una $C^{(i-1)}$ dànno un gruppo canonico di $C^{(i-1)}$ - <u>le K debbono segare sopra ogni $C^{(i-1)}$ le coppie di una g^1_2</u>, cioè <u>le $C^{(i-1)}$ sono iperellittiche</u>.

Allora può accadere che la serie caratteristica del sistema $|C^{(i-1)}|$ sia composta con la g^1_2, oppure che sia semplice.

In questo secondo caso le curve K sono razionali, come si vede ripetendo un ragionamento già sopra svolto, cioè osservando che la K che passa per un punto generico P di F, incon-

---

(*) Cfr. § 49, osservazione a pag. 286.

tra in un solo punto ulteriore P' (coniugato di P nella g^1_2) ognuna delle $C^{(i-1)}$ passanti per P; sicchè - ancora per il teorema di Noether (*) - la F è razionale.

Se la serie caratteristica del sistema $|C^{(i-1)}|$ è composta con la g^1_2, essa ha l'ordine $2\pi^{(i-1)}$ e la dimensione $\pi^{(i-1)}$, cosicchè la dimensione di $|C^{(i-1)}|$ risulta $\pi^{(i-1)}+1$.

Ne segue, al solito, che le $C^{(i-1)}$ passanti per $\pi^{(i-1)}-1$ punti generici di F, costituiscono una rete di grado 2, e quindi la F è rappresentabile sopra un piano doppio, che è razionale poichè - come già abbiamo osservato - ha tutti i generi nulli.

Resta da considerare il caso in cui il sistema $|C^{(i)}|$ contenga una parte fissa θ. Allora può accadere che $|C^{(i)}-\theta|$ (che si può supporre privo di componenti fisse (**)) sia un fascio o composto con un fascio, oppure sia irriducibile (di dimensione >1).

Se $|C^{(i)}-\theta|$ è un fascio od è composto con un fascio, si consideri il sistema $|C^{(i-1)}-\theta|$ (***).

(*) § 64.

(**) Se $|C^{(i)}-\theta|$ contiene una parte fissa θ', in quanto segue si dovrà porre $\theta+\theta'$ in luogo di θ.

(***) Il sistema $|C^{(i-1)}-\theta|$ si può supporre privo di componenti fisse, perchè se ne possiede una, θ', questa sarà parte fissa anche per $|C^{(i)}-\theta|$, da aggiungere a θ (cfr. nota precedente). In-se questo è irriducibile si ricade nelle conclusioni precedenti poichè $|C^{(i)}-\theta|$ è l'aggiunto di $|C^{(i-1)}-\theta|$.

Quando anche $|C^{(i-1)}-\theta|$ sia composto con un fascio, _il sistema $|C^{(i-2)}|$ è costituito di curve iperellittiche_; infatti si osservi:

1) la θ è _fondamentale_ per il sistema $|C^{(i-1)}|$, poichè in caso contrario essa determinerebbe sopra le $C^{(i-1)}$ punti fissi per la loro serie canonica;

2) la θ ha dei punti in comune con la curva generica di $|C^{(i-2)}|$, altrimenti sarebbe una componente fissa di $|C^{(i-1)}|$ (*), contro l'ipotesi

---

vero: θ è fondamentale per $|C^{(i-1)}|$ (altrimenti essa segherebbe le $C^{(i-1)}$ in punti fissi per la loro serie canonica), e perciò lo stesso accade di $\theta+\theta'$ (curva fondamentale monovalente - cfr. § 38); ma il numero delle intersezioni di θ' con i successivi sistemi aggiunti a $|C|$ va diminuendo, e quindi tale numero - essendo nullo per $|C^{(i-1)}|$ - è negativo per $|C^{(i)}|$, ciò che appunto significa che la θ' è una componente fissa di $|C^{(i)}|$.

(*) Si tenga sempre presente che il numero delle intersezioni di θ colle curve dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$ va diminuendo (e, precisamente, se la θ ha il genere ρ e il grado ν, codesto numero diminuisce di $\nu-2\rho+2$ ogni volta che si passa da un sistema aggiunto al successivo). Onde se esso fosse nullo per $|C^{(i-2)}|$, diverrebbe negativo per il sistema $|C^{(i-1)}|$, e quindi la θ sarebbe una sua componente fissa.

che $|C^{(i)}|$ sia il primo sistema riducibile aggiunto a $|C|$;

3) le intersezioni di θ con le $C^{(i-2)}$ costituiscono un gruppo neutro per la serie canonica di $C^{(i-2)}$, e quindi esse non possono essere più di due;

4) siccome il sistema $|C^{(i-1)}-\theta|$ è composto con un fascio, sopra la $C^{(i-2)}$ generica, la serie residua del gruppo segato da θ rispetto alla serie canonica, è composta.

Da 3) e 4) segue senz'altro che se la θ e $C^{(i-2)}$ hanno due punti in comune, le $C^{(i-2)}$ sono iperellittiche; ma lo stesso accade anche se la θ incontra la $C^{(i-2)}$ in un solo punto P, perchè la residua di P rispetto alla serie canonica può essere composta soltanto quando abbia un punto fisso Q e l'involuzione che la compone sia una g_2^1. (I punti P e Q saranno coniugati nella g_2^1.)

Dall'esistenza del sistema di curve iperellittiche $|C^{(i-2)}|$, si deduce la razionalità della F nel modo già sopra mostrato.

Se invece $|C^{(i)}-\theta|$ è irriducibile, riferendoci alla serie finita dei suoi successivi aggiunti:

$$(1)\qquad |C^{(i+1)}-\theta|,\ |C^{(i+2)}-\theta|, \ldots\ldots, |C^{(k)}-\theta|,$$

possiamo ripetere per essa tutte le considerazioni sopra svolte per la serie degli aggiunti a $|C|$, con la stessa distinzione di casi, i quali ci porteranno a stabilire la razionalità della F, a meno che non s'incontri nuovamente un sistema $|C^{(i+h)}-\theta|$ che contenga una parte fissa θ' e tale che $|C^{(i+h)}-\theta-\theta'|$ sia irriducibile. Ma allora non avremo che da sostituire alla (1) l'analoga serie degli aggiunti a $|C^{(i+h)}-\theta-\theta'|$; e così via, per un numero necessariamente finito di volte.

Osservazione: Conviene notare che se il sistema $|C^{(i)}|$ - il primo della serie degli aggiunti a $|C|$, che è riducibile - contiene una componente fissa θ, questa è eccezionale (o composta di parti eccezionali).

Per renderci conto di ciò si osservi che il numero delle intersezioni di θ (se è irriducibile, oppure di ogni sua parte) con i sistemi aggiunti a $|C|$, diminuisce di $\nu-2\rho+2$ (essendo ρ e ν il genere ed il grado di θ) ogni volta che si passa da un sistema aggiunto al successivo. E quindi - poichè θ è fondamentale per $|C^{(i-1)}|$ - i punti comuni a θ e alla curva generica del sistema $|C^{(i-2)}|$ sono in numero di

$$\nu-2\rho+2.$$

Ma – come abbiamo visto – tali punti non possono essere più di due, cosicchè si avrà:

$$(2) \qquad \nu - 2\rho + 2 = 2;$$

oppure:

$$\nu - 2\rho + 2 = 1.$$

In quest'ultimo caso la θ risulta razionale ($\rho = 0$) essendo un'unisecante delle curve del sistema lineare $|C^{(i-2)}|$; perciò si ha $\nu = -1$, cioè (*) <u>la θ è una curva eccezionale</u>.

Invece la (2) porta ad un assurdo: infatti dalla (2) si ha $\nu = 2\rho$ ed essendo $\rho \geq 0$, ne segue che la θ deve far parte di un sistema lineare $|\theta|$ almeno semplicemente infinito (**). Ma le θ sono fondamentali per $|C^{(i-1)}|$, e quindi $|C^{(i-1)}|$ risulterebbe composto col sistema θ (che sarà necessariamente un fascio (***); $\rho = 0$, $\nu = 0$), ciò che è contrario alla supposta irriducibilità di $|C^{(i-1)}|$.

Completiamo la dimostrazione del no-

(*) Cfr. § 47, nota a pag. 260.

(**) Teorema di Riemann-Roch (§ 48).

(***) Cfr. § 9.

stro teorema facendo vedere che sopra una superficie F, con $p_a = P = 0$, esiste sempre un sistema lineare irriducibile, di grado n e genere π, per cui:

$$n > 2\pi - 2.$$

Procederemo per assurdo, supporremo cioè che per ogni sistema irriducibile $|C|$ sopra F si abbia:

$$n \leq 2\pi - 2.$$

In questa ipotesi - come è noto (*) - dalla F (priva di singolarità) si possono eliminare le curve eccezionali; ed inoltre resta definito il genere lineare $p^{(1)}$ della F stessa, come genere virtuale del suo sistema canonico $|K|$, anche se questo non esiste effettivamente (**). Il genere lineare $p^{(1)}$ è legato al genere numerico p_a ed al bigenere P dalla relazione:

$$P \geq p_a + p^{(1)}.$$

Da essa segue per la F ($p_a = P = 0$):

$$p^{(1)} \leq 0.$$

(*) Cfr. § 47.

(**) Cfr. § 25, pagg. 86, 87.

Allora consideriamo per il sistema $|C|$ la differenza:

$$2\pi - 2 - n,$$

e confrontiamola con l'analoga,

$$2\pi' - 2 - n',$$

relativa al sistema $|C'|$. Essendo, virtualmente, $|C'| = |C + K|$, si ha:

$$\pi' = \pi + p^{(1)} + (2\pi - 2 - n) - 1;$$

$$n' = n + (p^{(1)} - 1) + 2(2\pi - 2 - n).$$

E quindi:

$$2\pi' - 2 - n' = (2\pi - 2 - n) - 1 + p^{(1)}.$$

Cioè, passando da $|C|$ a $|C'|$ la suddetta differenza decresce; e così analogamente ogni volta che si passi da un aggiunto $|C^{(i)}|$ al successivo $|C^{(i+1)}|$, cosicchè: o la serie dei successivi aggiunti a $|C|$ si estingue, oppure quella differenza diviene negativa, ciò che, per la nostra ipotesi, può accadere solo in corrispondenza ad un sistema riducibile.

Distinguiamo allora i due casi seguenti:

a) la serie dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$ è finita ed è tutta composta di sistemi irriducibili;

b) si ha un <u>primo</u> sistema aggiunto riducibile $|C^{(i)}|$.

Nel caso a) si può ripetere inalterata l'analisi fatta sopra, quando, con ipotesi analoga, avevamo però supposto che per il sistema $|C|$ fosse $n > 2\pi - 2$. Abbiamo allora visto che da a) segue che della serie degli aggiunti a $|C|$ fa parte o un fascio di curve razionali, o un sistema ∞^r $(r>1)$ di curve ellittiche, di grado r. Ma tanto per l'uno che per l'altro di questi due sistemi irriducibili, si ha:

$$n > 2\pi - 2,$$

e quindi il caso a) è incompatibile con la supposta inesistenza sopra F di sistemi siffatti.

Rimane il caso b). Intanto si osservi che il sistema riducibile $|C^{(i)}|$ è certamente privo di componenti fisse, perchè queste (valendo anche qui le stesse considerazioni sopra svolte per il caso $n > 2\pi - 2$) sarebbero eccezionali per la superficie, mentre dalla F abbiamo eliminato le curve eccezionali. Il sistema $|C^{(i)}|$ è allora composto con un fascio $|L|$; e da ciò segue (ancora col ragionamento fatto precedentemente nell'ipotesi $n > 2\pi - 2$, la quale in esso non gioca) che $|C^{(i-1)}|$ è costituito da curve iperellittiche, e: o il fascio $|L|$ è razionale; oppure il sistema $|C^{(i-1)}|$ ha il grado uguale al doppio del genere. S'incontrano quindi nuovamente sopra F sistemi irriducibili per cui $n > 2\pi - 2$.

---

66 – RAZIONALITÀ DELLE INVOLUZIONI PIANE.

Il criterio di razionalità delle superficie stabilito nel paragrafo precedente, permette di dimostrare molto semplicemente un altro teorema dello stesso Castelnuovo, cioè la razionalità delle involuzioni piane (*).

È noto che Lüroth nel 1875 ha dimostrato che le involuzioni semplicemente infinite sopra la retta sono sempre razionali; cioè se una equazione

$$f(x, y) = 0,$$

ammette una risoluzione per mezzo di funzioni razionali di un parametro,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

(*) Cfr. G. Castelnuovo: "Sulla razionalità delle involuzioni piane„ (Rendic. Lincei, s. 5, vol. II, 2° sem. 1893, pag. 205; e Math. Ann. Bd. 44, pag. 125).

tali che, invertendo le (1), si ottengano più valori di t in corrispondenza ad ogni punto (xy), allora si può sempre sostituire al parametro t, un parametro τ, funzione razionale di t, per modo che x ed y risultino funzioni razionali invertibili di τ (*).

La questione analoga per le superficie è rimasta insoluta fino alla pubblicazione del lavoro del Castelnuovo avvenuta nel 1893. Si tratta di questo. Si abbia una superficie $f(x, y, z) = 0$, per la quale sia possibile una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni razionali

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

per modo che ad ogni punto (xyz) della superficie corrisponda, non già un punto, ma un gruppo di punti del piano (uv): i gruppi analoghi costituiscono allora una involuzione I_n, di un certo ordine n, ogni punto ap-

---

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro II, cap. I, §§ 3 e 6 (vol. I, pagg. 168 e 186); e libro V, cap. I, § 7 (vol. III, pag. 48).

partenendo ad un gruppo di I_n.

Si domanda se la $f(x,y,z)=0$ sia razionale, cioè se possa rappresentarsi punto per punto sopra un piano (U,V), dunque: se possano darsi due funzioni razionali,

$$\begin{cases} U = U(u,v) \\ V = V(u,v), \end{cases}$$

per modo che x, y, z risultino funzioni razionali invertibili di U,V.

Per risolvere la questione si consideri il sistema delle curve C che corrispondono – sopra la nostra superficie F – alle rette del piano (uv) su cui si ha l'involuzione I_n.

Se C costituiscono una totalità razionale doppiamente infinita, perchè in corrispondenza biunivoca con le rette del piano, e quindi esse sono contenute in un sistema lineare $|C|$ (*).

Se N e Π designano, rispettivamente, il grado ed il genere del sistema $|C|$ (genere virtuale delle anzidette C), vogliamo dimostrare che si ha:

$$N > 2\Pi - 2.$$

(*) Cfr. § 62, nota (*) a pag. 429.

Si prendano sul piano (uv) due rette $\underline{a}$ e $\underline{b}$, e si ricerchino gli N punti comuni alle due curve C di F che loro corrispondono. Uno di essi nasce dal punto $(\underline{a}, \underline{b})$, comune alle due rette considerate, mentre i rimanenti $N-1$ provengono dalle coppie di punti costituite da un punto di $\underline{a}$ e da uno di $\underline{b}$ coniugati nella I_n. Ora i punti di codeste coppie che appartengono alla retta $\underline{b}$ sono dati, evidentemente, dalle intersezioni della $\underline{b}$ con la curva J_a coniugata di $\underline{a}$, cioè con la curva luogo dei punti coniugati di quelli di $\underline{a}$ nella I_n. Ne segue che la J_a è dell'ordine $N-1$.

Ma l'ordine della J_a si può determinare anche in altro modo. Si considerino le intersezioni della J_a con la retta $\underline{a}$: un certo numero D di esse è costituito dai punti comuni alla $\underline{a}$ e alla <u>curva delle coincidenze</u> della I_n (curva luogo dei punti che coincidono con uno dei loro coniugati). Invece le intersezioni rimanenti si distribuiscono in coppie di punti distinti, coniugati nella I_n: ognuna di queste coppie dà luogo ad un punto doppio della C che corrisponde su F alla retta $\underline{a}$, e viceversa; siccome poi la C è di genere effettivo nullo, il numero dei suoi punti doppi è dato dal suo genere virtuale π. Si ha quindi per l'ordine della J_a:

$$N - 1 = 2\pi + D,$$

da cui:

$$N > 2\pi.$$

E perciò - <u>a fortiori</u>:

$$(2) \qquad N > 2\pi - 2,$$

come avevamo asserito.

Poichè sopra la F esiste un sistema tra i cui caratteri ha luogo la diseguaglianza (2), <u>la F ha il genere geometrico ed il bigenere</u> (e tutti i plurigeneri) <u>uguali a zero</u> (*).

Allora - tenendo presente il teorema dimostrato nel paragrafo precedente - per stabilire la razionalità della nostra superficie F basta far vedere che essa è <u>regolare</u>, cioè che si ha anche $p_a = 0$.

Dimostreremo la regolarità della F fa-

(*) Cfr. §47, pag. 262.

cendo vedere che, sopra di essa, la serie caratteristica di un sistema lineare completo è completa, ciò che importa appunto (*):

$$p_g - p_a = 0.$$

Per la dimostrazione è lecito supporre che la I_n sia semplice, perchè sempre ci si riconduce a questo caso: se, per esempio, la I_n è composta con due fattori, potendosi considerare come un'involuzione (semplice) J_h sopra un'involuzione (semplice) I_t, si dimostrerà in primo luogo la razionalità di I_t e ne seguirà quella di I_n, $n = ht$.

Consideriamo sopra F un sistema lineare completo $|C|$, ∞^r, abbastanza ampio (che non contenga ∞^{r-1} curve spezzate): ad esso corrisponde sopra il piano (uv) dell'involuzione I_n, un sistema lineare di curve $\bar{C}$ appartenenti alla I_n e segantisi a due a due in $\underline{s}$ gruppi della I_n, se $\underline{s}$ è il grado di $|C|$.

Nel sistema $|C|$ fissiamo una curva generica - sia C_1 - e sopra di essa prendiamo un gruppo qualunque G della serie caratteristica completa. Per stabilire la regolarità

(*) Cfr. § 49.

della F, basterà dimostrare che il gruppo G è segato su C_1 da un'altra curva di $|C|$.

Sia $\bar{C}_1$ la curva analoga della C_1 sopra il piano (uv): al gruppo G corrisponde su $\bar{C}_1$ un gruppo $\bar{G}$ formato da s gruppi dell'involuzione γ_n^1 che la I_n subordina sulla $\bar{C}_1$ (che è unita nella I_n). Il gruppo $\bar{G}$ appartiene alla serie caratteristica del sistema completo $|\bar{C}|$, e quindi per esso passa un fascio di curve $\bar{C}_n$ di $|\bar{C}|$. Alle $\bar{C}_n$ corrispondono su F ∞^1 curve C_n del sistema $|nC|$ multiplo del dato secondo n, le quali possiedono s punti n-pli nei punti del gruppo G.

Si noti che queste ∞^1 C_n costituiscono un fascio, perchè non hanno tra loro intersezioni variabili: infatti, due curve C segandosi in s punti, due C_n (di $|nC|$) avranno sn^2 intersezioni, che sono tutte assorbite negli s punti di G n-pli per le nostre C_n.

Ciò premesso si prenda sulla F un punto <u>generico</u> P, e si considerino gli n punti (costituenti un gruppo della I_n) che gli corrispondono sul piano (uv): alle n curve del fascio $|\bar{C}_n|$ individuate da questi n punti, dovrebbero corrispondere su F n curve C_n passanti per P. Ma queste curve non possono essere distinte perchè le C_n costituiscono un fascio e non un sistema d'indice maggiore di uno: quindi, necessariamente, le anzidette n curve $\bar{C}_n$ di $|\bar{C}_n|$, dovranno rappresentare la stessa C_n di F. Ciò porta ad uno dei casi seguenti:

1) le curve del fascio $|\bar{C}_n|$ passanti per i punti di un gruppo generico della I_n, coincidono in una unica curva, la quale è unita nella I_n; e lo stesso accade di ogni altra curva del fascio $|\bar{C}_n|$;

2) le predette n curve di $|\bar{C}_n|$, non sono tutte coincidenti, e sono perciò coniugate tra loro nella I_n. Cosicchè il fascio $|\bar{C}_n|$, insieme ad ogni curva $\bar{C}_n$, contiene le sue coniugate nella I_n.

Nel caso 1), ad ogni curva del fascio $|\bar{C}_n|$ corrisponde sopra la F una curva che, contata n volte, appartiene al sistema $|nC|$: ma non solo sono equivalenti i multipli secondo n di tali curve, bensì anche le curve stesse, perchè ad ogni ——— sistema lineare del piano (uv), le cui curve siano unite nella I_n, corrisponde, su F, un sistema pure lineare. Se ne deduce che - siccome tra le predette curve è la C_1 - esse fanno parte del sistema $|C|$, e quindi il gruppo generico G della serie caratteristica di C_1; è base di un fascio di curve di $|C|$; cioè la serie caratteristica di $|C|$ è completa. Così, in questo caso, la dimostrazione richiesta è senz'altro raggiunta.

Passiamo all'ipotesi 2). Se le n curve coniugate della $\bar{C}_n$ *generica* del fascio $|\bar{C}_n|$ (ed appartenenti – come abbiamo visto – a $|\bar{C}_n|$ stesso), non coincidono in un'unica curva, esse sono tutte distinte e – al variare della $\bar{C}_n$ – dànno gruppi di una involuzione g^1_n entro il fascio, dato che si è supposto che la I_n sia semplice. Infatti se ogni $\bar{C}_n$ coincidesse con t (>1) sue coniugate nella I_n, sopra la $\bar{C}_n$ si avrebbe un'involuzione γ^1_t di gruppi di t punti; ma una siffatta γ^1_t, al variare della $\bar{C}_n$ nel fascio $|\bar{C}_n|$, genera un'involuzione piana I_t, e quindi la I_n risulterebbe composta con la I_t.(*).

Ora la g^1_n formata dai gruppi delle $\bar{C}_n$ coniugate, possiederà degli elementi doppi (o

(*) Non è possibile che un gruppo generico della g^1_n, costituito da n curve coniugate, contenga qualche curva doppia o multipla, se la g^1_n stessa non si riduce ad una involuzione g^1_h ($n = ht$) d'ordine h divisore di n, i cui gruppi vengano contati $t = \frac{n}{h}$ volte.

multipli), e perciò nel fascio $|\bar{C}_n|$ esisterà almeno una curva $\bar{C}^*$ - diversa dalla $\bar{C}_1$ - multipla per la g_n^1. La $\bar{C}^*$ non può far parte della <u>curva delle coincidenze</u> della I_n, perchè altrimenti il gruppo $\bar{G}$, segato dalla $\bar{C}^*$ sopra $\bar{C}_1$, non sarebbe costituito da punti distinti, come certo accade se $\bar{G}$ proviene da un gruppo generico della serie caratteristica di C_1. Quindi sopra la $\bar{C}^*$ la I_n subordinerà una involuzione γ_t^1 di un certo ordine t (>1). Fermiamo l'attenzione sopra la curva omologa della $\bar{C}^*$ su F: tale curva - che appartiene al sistema $|nC|$ - è evidentemente costituita da una curva C^* contata t volte, poichè quando il punto $\bar{P}$ descrive la $\bar{C}^*$ il suo corrispondente sopra F passa t volte per ogni posizione. Si ha dunque:

$$|tC^*| = |nC|.$$

Questa equivalenza dice che la C^* - il cui multiplo secondo t, costituisce una curva di $|nC|$ - appartiene ad uno dei sistemi t-esimi di $|nC|$.

Distinguiamo i due casi seguenti:

a) $t = n$;

b) $t\,(<n)$ uguale ad un divisore di n.

Nel caso a) $(t=n)$ si ha:

$$|nC^*| = |nC|,$$

e la C^* sega sopra C_1 un gruppo, G, della sua serie caratteristica. Vogliamo dimostrare che si ha:

$$C^* \equiv C,$$

ed allora, siccome la C^* passa semplicemente per il gruppo G, resterà dimostrato che G è segato su C_1 da una curva di $|C|$, cioè che la serie caratteristica del sistema $|C|$ è completa.

Sopra la C_1 si consideri la serie g_{sn} segata dal sistema $|nC| = |nC^*|$, che è la serie n-pla della serie caratteristica: la divisione per n di questa g_{sn} porta ad un certo numero di serie distinte (*), fra cui è naturalmente la serie caratteristica, uno dei cui gruppi è segato dalla C^*.

Allora prendiamo nel sistema $|C|$ una curva C abbastanza prossima a C_1 (e che

(*) Cfr. Enriques-Chisini: op. cit., libro V, cap. III, § 35 (vol. III, pag. 395).

faremo poi tendere con continuità alla C_1 stessa): sopra la C, la C^* sega un gruppo di una serie g_s che proviene dalla divisione per n della g_{sn} multipla secondo n della serie caratteristica di C; ma questa g_s non può essere altro che la serie caratteristica, perchè al limite si riduce alla serie caratteristica di C_1. Pertanto la C^* sega sopra le curve del sistema $|C|$ gruppi equivalenti a quelli segati da una curva C del sistema stesso, almeno finchè si considerino delle C appartenenti ad un intorno abbastanza piccolo della C_1 entro $|C|$. Saremmo indotti ad applicare il noto <u>primo criterio di equivalenza</u> (*), e dire senz'altro che C^* è equivalente alle C; ma quel criterio è stato stabilito nel § 41 supponendo la proprietà verificata in rapporto a tutte le curve del sistema $|C|$, e non solo a quelle vicine ad una sua curva C_1. È lecito applicare il teorema partendo da una verifica in "piccolo", ed assumendo che il criterio di equivalenza debba conseguentemente verificarsi anche in

---

(*) § 41. Si noti che l'ipotesi fatta che il sistema $|C|$, di dimensione r, non contenga ∞^{r-1} curve spezzate, si richiede appunto per poter applicare il <u>criterio di equivalenza</u> a cui qui si ricorre.

"grande" ?

La risposta affermativa è consentita dalla proprietà fondamentale delle funzioni algebriche (o analitiche), per cui una condizione (eguaglianza) che sia soddisfatta da una funzione entro un piccolo campo della variabile complessa, deve necessariamente essere soddisfatta in tutto il piano.

Possiamo dunque estendere la proprietà della C^* che abbiamo verificata in ordine alle C vicine alla C_1, e dire che la C^* sega sopra una C <u>qualsiasi</u>, anche lontana da C_1, un gruppo della serie caratteristica di C, ossia un gruppo equivalente a quelli segati dalle rimanenti C, e quindi <u>la C^*</u> è equivalente alle C, cioè <u>appartiene al sistema completo $|C|$</u>.

Passiamo al caso b) in cui si è supposto che t sia un divisore di n: $n=ht$. È subito visto che questa ipotesi è in antitesi con l'altra che la I_n sia semplice.

La C^* appartiene ad uno dei sistemi t-esimi di $|nC|$, cioè si ha:

$$|tC^*| = |nC|$$

e la C^* sega sopra C_1 un gruppo della serie multipla secondo $h = \frac{n}{t}$ della serie caratteristica.

Con lo stesso ragionamento seguito nel caso a), si deduce che la C^* appartiene al sistema $|hC|$.

Allora al fascio individuato, sopra F, dalla C^* e dalla C_1 contata h volte, corrisponderà sul piano (uv) un fascio di curve ciascuna delle quali conterrà un'involuzione γ_t^1, subordinata dalla I_n. Segue senz'altro da ciò che la I_n è composta con un'involuzione I_t, d'ordine t.

Conviene, per chiarezza, riepilogare le conclusioni cui siamo giunti: se F è la superficie i cui punti rappresentano i gruppi di una involuzione piana I_n, la F soddisfa alle seguenti proprietà:

a) il suo <u>genere geometrico</u> ed il suo <u>bigenere</u> (insieme a tutti i plurigeneri) sono nulli, perchè abbiamo visto che su la F si può costruire un sistema lineare d'ordine n e genere π, per cui:

$$n > 2\pi - 2;$$

b) supposto che l'involuzione I_n sia <u>semplice</u>, la F è <u>regolare</u> perchè sopra di essa ogni sistema lineare completo (abbastanza ampio) ha la serie caratteristica completa.

Da a) e b) segue (*) che <u>la F, e quindi anche la I_n, è razionale.</u>

Il teorema si estende dal caso delle involuzioni semplici a quello delle involuzioni composte, come già sopra abbiamo notato.

<u>Nota</u>. Il lemma relativo alla regolarità della superficie rappresentante un'involuzione piana (integrità della serie caratteristica di un suo sistema lineare completo), viene dimostrato nella citata memoria di <u>Castelnuovo</u> (**) con considerazioni meno semplici: la semplificazione è dovuta all'uso che qui si è fatto dei <u>criteri di equivalenza</u>, passando da una verifica in "piccolo„ ad un'applicazione in "grande„, in forza del principio della continuità algebrica.

Il lemma anzidetto si estende senz'altro a tutte le involuzioni sopra le superficie regolari,

(*) § 65.

(**) Cfr. la nota (*) a pag. 462.

perchè nella dimostrazione si usa soltanto la proprietà che i sistemi lineari completi di curve piane hanno la serie caratteristica completa. Più in generale, il ragionamento sopra svolto permette di concludere che ogni involuzione appartenente ad una superficie di irregolarità $p_g - p_a \geq 0$, è regolare ovvero possiede una irregolarità non maggiore di $p_g - p_a$.

Alla stessa conclusione si arriverebbe anche ricorrendo alla proprietà caratteristica delle superficie irregolari di contenere un sistema continuo di curve disequivalenti. Limitandoci al caso delle involuzioni piane, basta richiamare la proprietà delle superficie irregolari di genere $p_g = 0$ di contenere un fascio irrazionale di curve (che è appunto, nella forma più espressiva, la proprietà caratteristica di tali superficie irregolari): se un involuzione piana venisse rappresentata da una superficie irregolare F, al fascio irrazionale di F dovrebbe corrispondere sul piano un fascio irrazionale, ciò che è assurdo.

NOTA BIBLIOGRAFICA

La superficie di genere uno con curva canonica d'ordine zero - superficie d'ordine $2\pi-2$ a sezioni iperpiane di genere π in S_π - ricorrono fin dalle prime "Ricerche" di Enriques del 1893 (i primi esempi essendo stati incontrati da Castelnuovo).

La caratterizzazione di questa famiglia di superficie per mezzo del bigenere ($P=1$), si trova in Enriques: "Sui piani doppi di genere uno", § 1, nn. 4 e 5 (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dai XL, serie III, tomo X, 1896): la dimostrazione ivi esposta, viene in queste "Lezioni" opportunamente precisata.

Infine l'esistenza d'infinite famiglie di superficie con tutti i generi uguali ad uno, è stata dimostrata indipendentemente da F. Enriques e F. Severi, come già si è detto nella "Nota" di pag. 310. Aggiungiamo che fra le superficie a curve sezioni canoniche di genere uno, e, in particolare, già fra le F_8 di S_5, esistono famiglie di superficie dipendenti non più da 19, ma da 18 modelli, che non sono intersezioni complete di quadriche: cfr. la nota di P. Du Val nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 7 febbraio 1932.

Alle varie costruzioni che abbiamo indicato per le superficie canoniche, si dovrebbe aggiungere la costruzione di modelli di superficie bicanoniche, tricanoniche, ecc. (a curve sezioni pluricanoniche). Questi modelli hanno particolare importanza per le superficie di genere basso. La costruzione effettiva di tali modelli per $p^{(1)}=2$ e $p^{(1)}=3$, con $p>0$, trovasi in Enriques: "Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=2$" (Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. VI, Serie 5, fasc. 4, 1° sem. 1897); "Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)}=3$" (id., vol. VI, serie 5, fasc. 5, 1° sem. 1897).

Lo studio dei piani doppi prende origine dalle ricerche sui piani doppi razionali di Clebsch e Noether, come abbiamo detto a pag. 400. La determinazione delle curve canoniche e bicanoniche di un piano doppio (ciò che importa l'analisi più generale dell'influenza delle singolarità della curva di diramazione sul genere e sul bigenere) si trova nelle ricerche di <u>Enriques</u>: "<u>Sui piani doppi di genere uno</u>„ (memoria sopra citata), e "<u>Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)}=1$</u>„ (Rendiconti R. Acc. dei Lincei, serie 5, vol. VII, fasc. 8–9, 1° sem. 1898).

La teoria dei piani doppi razionali è stata qui completamente rielaborata.

Allo studio delle superficie razionali fa naturalmente seguito quello delle superficie regolari di genere zero e bigenere $P>0$. Il caso più semplice è dato da $p_a = p_g = 0$ e $P = 1$ con una <u>curva bicanonica d'ordine zero</u>. Questo caso si può caratterizzare mediante il valore del trigenere $P_3 = 0$. Inoltre le superficie della famiglia si riducono a sestiche F_6 passanti doppiamente per gli spigoli di un tetraedro: teorema dimostrato da <u>Enriques</u> in "<u>Sopra le superficie algebriche di bigenere uno</u>„ (Mem. Soc. It. delle Scienze, detta dei XL, Serie 3, tomo XIV, 1906).

Altri studi intorno a queste superficie di bigenere uno, sono:

<u>F. Enriques</u>: "<u>Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno</u>„ (Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1908). Dimostrazione che la F_6 doppia, appartenente allo spazio doppio che

ha come superficie di diramazione il tetraedro, rappresenta una superficie regolare con tutti i generi uguali ad uno.

<u>G. Fano</u> : " <u>Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari</u>„ (Rend. Circolo Mat. di Palermo, t. XXIX, 1910). L' A. è condotto allo studio delle superficie di bigenere zero, dalla congruenza delle rette principali di un sistema lineare ∞^3 di quadriche senza punti base, la cui immagine è una F_{10} del decimo ordine di S_5 la quale ha appunto i caratteri predetti.

<u>L. Campedelli</u> : " <u>Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine</u>„ (Rend. R. Acc. dei Lincei, 7 febbraio 1932). Studio esauriente dei piani doppi che possono assumersi ugualmente come rappresentativi della superficie di genere zero e bigenere uno, con curva bicanonica d'ordine zero.

— FINE —

Errata - Corrige

PAGINA	LINEA	INVECE DI	LEGGI
84	15	$\bar{p}^{(1)} = p^{(1)} = \sigma$	$\bar{p}^{(1)} = p^{(1)} - \sigma$
297	15	φ_{n-3}	φ_{n-4}
297	15	ordine $n-3$.	ordine $n-4$
297	16	φ_{n-3}	φ_{n-4}
297	20	φ_{n-3}	φ_{n-4}
378	16	$(s-1)(s-2)$	$(s-1)(2s-1)$
380	24	$2(n-3)+x=n$	$2(n-3)-x \doteq 2n-6$
381	3	genere $2n-3$	genere $2n-4$
381	4	grado 6	grado 4

A pag. 168, linee 12 e 13, sopprimere la frase: (benchè non la più generale).

Pag. 246. L'ipotesi che qui si adopera che il sistema $|L| = |C-K'|$ sia irriducibile, può cadere in difetto quando $|C|$ possieda delle curve fondamentali proprie. Tuttavia un'analisi più minuta permette di riconoscere che in tal caso è *a fortiori* $r > p_a + n - \pi + 1$.

Pag. 299, linea 7. In luogo della superficie $z^2 = f_6 \cdot f_6'$, si può prendere una superficie $z^2 = f_{12}(x,y)$, dove la $f_{12}(x,y)=0$ è una curva di Halphen d'ordine 12, irriducibile, con nove punti quadrupli sopra una cubica. Se C_{12} del fascio di Halphen sono immagini semplici di curve bicanoniche, e il bigenere $P = 2$. Quando alla $f_{12} = 0$ si sostituisce la $f_6 . f_6' = 0$, le curve bicanoniche non appartenenti all'involuzione vengono rappresentate da coppie di sestiche del fascio, e il bigenere $P = 3$. Si ha qui un esempio relativo alla circostanza cui si riferisce la nota (*) di pag. 301.