Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libro X

Zanichelli, Bologna, 1932.

PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES
PROMOSSA
DALL'ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE

N. 10.

GLI ELEMENTI D'EUCLIDE E LA CRITICA ANTICA E MODERNA

EDITI DA

FEDERIGO ENRIQUES

COL CONCORSO DI DIVERSI COLLABORATORI

LIBRO X

2

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Coop. Tipografica Azzoguidi - Bologna XII-1932-XI

LIBRO DECIMO

TRADUZIONE DI

MARIA TERESA ZAPELLONI

NOTE DI

RUTH STRUIK

INTRODUZIONE AL LIBRO X

1. Il decimo libro degli « Elementi » si occupa degli irrazionali. Però la maniera di esporre questa teoria differisce profondamente da quella moderna. Ciò riguarda non soltanto la terminologia, esclusivamente geometrica, che impedisce a EUCLIDE di introdurre i simboli come $\sqrt{\ }$. Più notevole ancora è il fatto che EUCLIDE si limita agli irrazionali quadratici e biquadratici e alle loro somme e differenze. Ma pur limitandosi a questa categoria, egli ne dà una esposizione così esatta e chiara, che si è voluto vedere in questo libro un capolavoro che sorpassa tutti gli altri degli « Elementi ». Infatti, pur avendo i matematici del Rinascimento — e forse anche i successori di EUCLIDE nell'antichità — largamente esteso il concetto dell'irrazionale, pur avendo i grandi pensatori posteriori fondato una aritmetica ancora più profonda, tuttavia soltanto la seconda metà del secolo scorso ha potuto sorpassare EUCLIDE nel rigore delle sue dimostrazioni.

Si attribuisce a PITAGORA o ai primi Pitagorici (circa 500 a C.) la scoperta degli irrazionali, e ciò in base ad una interpretazione di FRIEDLEIN di un testo di PROCLO (Commentar. EUCLIDE I., ed. FRIEDLEIN, 1873, pag. 65). A conferma vale anche uno scolio al X° libro, attribuito egualmente a PROCLO (EUCLIDE, ed. Heiberg, V, pag. 415, 417). Dice questo scolio che i Pitagorici hanno scoperto per la prima volta l'esistenza di grandezze incommensurabili tra loro. Il primo che ha pubblicato queste ricerche perì in un naufragio.

Questa leggenda relativa a IPPASO di Metaponto, ha forse un significato simbolico, accennando alle difficoltà che la nascente teoria doveva vincere nella sua propagazione, e alle contraddizioni che la scoperta suscitava nella geometria pitagorica, i cui principii dovevano poi essere riveduti dalla critica della scuola d'ELEA (cfr. Nota alla def. I, 1).

Il primo esempio d'incommensurabili fu certo: diagonale e lato del quadrato. Non si sa con certezza come i Pitagorici ne fornissero la dimostrazione, che tuttavia presumiamo di potere ricostruire secondo un passo (I, 23) degli « Analytica priora » d'Aristotele (cfr. la nota alla prop. 2).

La dimostrazione aritmetica che così viene offerta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, ha carattere speciale e non può essere estesa ad altri irrazionali. Tuttavia assai presto i Greci dovettero accorgersi che codesto caso non costituisce soltanto una « scandalosa eccezione ». DEMOCRITO D'ABDERA (intorno al 400) si occupava degli irrazionali, e forse già della loro classificazione, in due libri, perduti, περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν α,β (Cfr. Diels. « Vorsokratiker » A, 33. VIII, 1), di cui non rimane più alcuna notizia.

Invece PLATONE ci dà preziosi riferimenti sulle ricerche di due altri matematici, cioè del suo maestro TEODORO di Cirene e di TEETETO d'Atene, nel dialogo intitolato a «*Teeteto*» (147 C-148 *d*).

Dice dunque l'autore che Teodoro in un corso tenuto ad Atene (399 a C.) ha dimostrato che i lati dei quadrati, la cui area è eguale a 3,5,... 17 unità, non hanno nessuna misura comune coll'unità di lunghezza. Egli ha dato per ciascuno di questi casi una dimostrazione particolare. Di questa dimostrazione noi non sappiamo niente. Si può tuttavia tentare con lo ZEUTHEN (*) di ricostruire un procedimento valido ogni volta per una irrazionalità particolare, ma che i Greci coi mezzi della loro scienza non potevano ricondurre ad un algoritmo generale. Le idee dello ZEUTHEN si trovano esposte nell'articolo di BONNESEN (Periodico di Matematiche, 1921, IV, vol. I, n. 1, pp. 16-30 « Sur la théorie des nombres irrationels de l'antiquité ») e anche nelle Note critiche di ZARISKI agli scritti

---

(*) Sur la constitution des livres arithmétiques des Elements d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité, in Bullet. de l'Acad. des Scien. et des Lettr. de Danemark, 1910. Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles, ibid 1915.

aritmetici di Dedekind in « Continuità e numeri irrazionali », (Nota X; vol. n. 5 di questa collezione).

Il giovane TEETETO, continua PLATONE, ha concepito allora l'idea generale, che cioè tutte le radici di numeri non quadrati sieno irrazionali. Ciò induce a pensare che TEETETO abbia costruito per la prima volta una teoria generale degli irrazionali quadratici. PLATONE ci descrive anche come TEETETO sia stato condotto ad una distinzione fondamentale che si ritroverà qui a base della classificazione euclidea. Riportiamo le parole del dialogo (147 *d* - 148 *b*):

TEETETO... Visto che il numero delle radici quadrate è illimitato, mi venne l'idea di trovare un'espressione generale per tutte queste radici....

SOCRATE. E ne avete trovata una?

T. Io credo; giudica tu stesso.

S. Dimmi.

T. Dividiamo tutti i numeri in due classi: quelli che risultano dalla moltiplicazione di due numeri uguali, noi ne paragoneremo la figura ad un quadrato, e li chiameremo numeri quadrati o equilateri.

S. Bene.

T. Quelli che sono compresi fra questi numeri quadrati, e ai quali appartengono anche 3 e 5 ed ogni numero che non risulta dalla moltiplicazione di due numeri uguali, ma da quella di un numero maggiore per un numero minore, o di un minore per un numero maggiore, li rappresenteremo con rettangoli, perchè sono compresi da un lato maggiore e uno minore, e li diremo numeri rettangolari.

S. Benissimo. Ma con questo?

T. Tutte le rette che sono « lati » di quadrati le diremo lunghezze; ma quelle che sono « lati » di numeri rettangolari son definite solo in potenza, perchè le loro lunghezze non hanno alcuna misura comune con le prime, ma solo i loro quadrati.

E una convenzione simile abbiamo fatto per le grandezze solide.

S. Benissimo, miei giovani!

Ma TEETETO è andato anche più oltre nella classificazione degl'irrazionali, e i rapporti dei suoi lavori col libro X dell'EUCLIDE risultano in parte chiariti da alcuni passi, dovuti probabilmente a

PAPPO, che il WOEPKE ha scoperto nel 1850 in una traduzione araba (1), oggi pubblicati colla versione inglese di WILLIAM TOMSON.

« TEETETO ha fatto una distinzione tra le radici commensurabili in lunghezza e quelle incomensurabili (cfr. il passo platonico sopra citato) e ha diviso le specie più note delle linee incommensurabili secondo differenti medie.... la mediale alla geometria, la binomiale all'aritmetica e l'apotome all'armonia, come l'ha descritto Eudemo il Peripatetico ». Poi: « Quanto ad EUCLIDE, egli si è proposto di dare regole rigorose sulla commensurabilità e l'incommensurabilità delle grandezze in generale; ha precisato le definizioni e le distinzioni fra le qualità razionali e irrazionali, ha riconosciute un gran numero di irrazionalità d'ordine differente e infine ha mostrato con chiarezza la loro estensione totale ».

Forse quest'ultima osservazione si riferisce all'ultima proposizione del libro X (la quale tuttavia non sembra autentica) dove si mostra come, a partire da una mediale, si possa costruire una serie illimitata di linee irrazionali, tutte incommensurabili fra loro.

Dopo avere riconosciuto che la classificazione degl'irrazionali contenuta nel X d'EUCLIDE si collega alle ricerche dei geometri precedenti, sorge ora la domanda se e come codeste ricerche preludessero al concetto generale del rapporto fra grandezze incommensurabili, quale è definito da EUCLIDE.

A questo proposito lo ZEUTHEN — fondandosi sopra un accenno d'ARISTOTELE (2) — ha fatto l'ipotesi che la prima definizione tentata dai Greci si basasse sul procedimento del massimo comun divisore, che viene spiegato in EUCLIDE X, 2: infatti la serie illimitata dei quozienti incompleti delle divisioni successive definisce il rapporto delle due grandezze confrontate, a quel modo che è dato, per noi, dalla frazione continua. Se l'ipotesi avesse un fondamento più largo, si potrebbe proseguire congetturando che i matematici greci abbiano avuto davanti agli occhi alcuni esempi

---

(1) Memoria presentata all'Acc. delle Scienze di Parigi, 14, pag. 658-720. Cfr. CHASLES « Comptes Rendus », 37 (1853), pag. 553-60.

(2) TOPICA VIII, 3, 5 (6) Cfr. Nota alla def. V, 3 di questi Element Vol. II, pag. 8).

dove apparisce una facile legge aritmetica di formazione dei detti quozienti: poichè in fatto gl'irrazionali quadratici conducono in tal guisa ad una legge periodica.

Comunque una tal via aritmetica, se mai fu battuta, dovette presto cedere alla definizione affatto generale del rapporto che è posta nel libro V dell'EUCLIDE, e che si ha ragione d'attribuire ad EUDOSSO di Cnido. Il senso di essa è ampiamente spiegato nelle note al detto libro V, dove si disegna pure l'evoluzione del concetto di rapporto per cui questo verrà ad esser concepito come un « numero », e si fa vedere in qual guisa la definizione moderna dei numeri reali di DEDEKIND scaturisca appunto dalla definizione euclidea dei rapporti.

2. Prima di riassumere il contenuto del X° libro ci sembra utile di indicare ciò che esso non contiene. Non vi si deve cercare un calcolo quantitativo degli irrazionali. Adoperando un linguaggio aritmetico possiamo dire che EUCLIDE non ci insegna a calcolare, p. es., $(6+\sqrt{7})\,(9+3\sqrt{2})$.

La teoria è puramente qualitativa; essa ci insegna a distinguere i caratteri dei numeri 6, $\sqrt{7}$ e $6+\sqrt{7}$ e dei numeri da essi dedotti per mezzo delle quattro operazioni fondamentali (le *specie*). Non si può paragonare questa teoria all'algoritmo moderno degli irrazionali, ma piuttosto alla teoria moderna dei corpi algebrici.

Essa neppure fornisce metodi di approssimazione degli irrazionali, benchè questimeto di fossero conosciuti dai Greci: si sa infatti che i Pitagorici conoscevano le ridotte successive dello sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5} \dots$ (secondo TEONE di Smirne, ed. Hiller p. 43, 44). Poco dopo EUCLIDE, ARCHIMEDE (287 - 212 a C.), per calcolare il numero π ha trovato i valori approssimati di molti irrazionali. Così anche TOLOMEO ha calcolato nel suo « Almagesto » i lati dei varii poligoni regolari iscritti in funzione del diametro, approssimando i numeri irrazionali ottenuti per mezzo di numeri razionali. EUCLIDE stesso ha fatto probabilmente simili calcoli, ma in ogni caso essi sono perduti. Non si deve tuttavia dimenticare che la notazione « numero $\sqrt{2}$ » non è quella di EUCLIDE e che in generale i Greci non consideravano $\sqrt{2}$ come un *numero*, come si vede per esempio dalla prop. X, 9. Solo nel periodo del Rinascimento, sotto l'influenza degli arabi, si comincia a parlare degli irrazionali come « numeri », calcolabili, non mai in maniera precisa, ma con approssimazioni successive.

Diciamo ora che il libro X costituisce non solo un modello di rigore, sì anche di costruzione logica. La prima parte di esso contiene i criterii più generali secondo cui i Greci potevano riconoscere la commensurabilità o l'incommensurabilità delle grandezze. Nella prop. I appare nella sua vera luce quel postulato d'Eudosso-Archimede che il libro V nasconde nella def. 4: a quella proposizione si riattacca pertanto la controversia relativa all'*infinitesimo attuale*, sollevata dall'angolo di contatto. Dall'anzidetta proposizione EUCLIDE deduce quindi il noto procedimento per la ricerca del massimo comun divisore di due grandezze, che riesce appunto ad un numero finito o ad un serie infinita di divisioni, secondochè si opera su grandezze commensurabili o no.

L'A. ne trae poi la conseguenza che due grandezze commensurabili stanno fra loro come due numeri (razionali o interi); anzi si ha in ciò un criterio necessario e sufficiente per la commensurabilità (prop. 5 - 8). Ne segue l'importante criterio che permette di riconoscere se i quadrati di due segmenti sieno o pur no commensurabili fra loro (prop. 9 - 10): cioè che essi debbono stare fra loro nel rapporto dei quadrati di due numeri (razionali o interi).

È probabile che questa proposizione costituisse la grande scoperta di TEETETO, che gli avrebbe consentito di dimostrare l'irrazionalità delle radici di cui parla PLATONE.

Dopo avere introdotto così, in una maniera rigorosa, ciò che noi chiamiamo le radici quadrate dei numeri razionali $\sqrt{\frac{p}{q}}$ (p, q interi), EUCLIDE ci dimostra le proprietà fondamentali di queste grandezze, dando anche un metodo per costruirle (prop. 10). Quando quattro quantità sono proporzionali e la prima e la seconda sono incommensurabili, la terza e la quarta sono pure incommensurabili (11ª proposizione); quantità commensurabili con la stessa quantità sono pure commensurabili fra loro (12ª); quando due quantità sono commensurabili fra loro, e l'una d'esse è incommensurabile con una terza, anche l'altra quantità gode di questa proprietà (13ª proposizione). Segue il teorema: quando si ha

$$p : \sqrt{p^2 - q^2} = r : \sqrt{r^2 - s^2}$$

secondochè p è commensurabile o no con q, anche r è commensurabile o no con s (prop. 14). Le due proposizioni seguenti esprimono la proprietà fondamentale dell'addizione di grandezze commensurabili e incommensurabili: dalla commensurabilità o meno di due delle grandezze a, b e $(a+b)$ si può concludere che tutte e tre sono o non sono commensurabili. La 17ª e 18ª proposizione applicano le nozioni acquisite al problema della commensurabilità delle radici d'una equazione di secondo grado e dei coefficienti. EUCLIDE qui dimostra (nel suo linguaggio geometrico), che nell'equazione $x(a-x) = \frac{b^2}{4}$, x e $(a-x)$ sono o non sono commensurabili secondochè a, $\sqrt{a^2 - b^2}$ godono di tale proprietà. Questa prima parte del libro si chiude con la proprietà fondamentale della moltiplicazione delle quantità commensurabili: quando due delle tre quantità a, b, ab sono commensurabili, tutte e tre godono di questa proprietà (19ª e 20ª prop.).

Nelle proposizioni seguenti sino alla fine del X° libro EUCLIDE fa ricerche sugli irrazionali che si ottengono dagli irrazionali già introdotti con l'addizione, la sottrazione e l'estrazione di radice quadrata. Si ottiene dunque una classificazione degli irrazionali della forma

$$\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}$$

dove p e q sono commensurabili. Noi diamo questa classificazione in modo un po' diverso dagli altri commentatori, perchè ci sembra metta meglio in evidenza il pensiero essenziale di EUCLIDE. Esprimiamo $\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$ dove $\sqrt{p}$, e $\sqrt{q}$ sono incommensurabili e p e q commensurabili, $p > q$, nella forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ·

$$\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\text{, allora}$$

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = a + b + 2\sqrt{ab}$$

Si ottiene uua soluzione per a e b ponendo:

$$a + b = \sqrt{p}$$
$$2\sqrt{ab} = \sqrt{q}$$

Quindi si ha:

$$a^2 - 2ab + b^2 = p - q\,,$$
$$a - b = \sqrt{p - q}$$
$$a = \frac{1}{2}\sqrt{p} + \frac{1}{2}\sqrt{p - q}$$
$$b = \frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{p - q}$$

e si ottiene l'indentità:

$$\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{p} + \frac{1}{2}\sqrt{p - q}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{p - q}}$$

Ora si possono distinguere 6 casi, seguendo questo calcolo:

1) p quadrato perfetto $= r^2$

α) $\sqrt{p - q}$ commensurabile con r

β) $\sqrt{p - q}$ incommensurabile con r

2) q quadrato perfetto $= s^2$

α) $\sqrt{p - q}$ commensurabile con $\sqrt{p}$

β) $\sqrt{p - q}$ incommensurabile con $\sqrt{p}$

3) nè p, nè q quadrati perfetti

α) $\sqrt{p - q}$ commensurabile con $\sqrt{p}$

β) $\sqrt{p - q}$ incommensurabile con $\sqrt{p}$

È la suddivisione che EUCLIDE ottiene in modo geometrico. Egli introduce la seguente denominazione:

1α) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = r + \sqrt{q} =$ 1ª binomiale; $\sqrt{r + \sqrt{q}} =$ binomiale,

2α) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p} + s =$ 2ª binomiale; $\sqrt{\sqrt{p} + s} =$ 1ª bimediale

3α) $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ $=$ 3ª binomiale; $\sqrt{\sqrt{p} + \sqrt{q}} =$ 2ª bimediale

1β) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = r + \sqrt{q} =$ 4ª binomiale; $\sqrt{r + \sqrt{p}} =$ maggiore
2β) $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{p} + s =$ 5ª binomiale; $\sqrt{\sqrt{p} + s} =$ ipotenusa d'un razionale e d'un mediale
3β) $\sqrt{p} + \sqrt{q} =$ 6ª binomiale; $\sqrt{\sqrt{q} + \sqrt{q}} =$ ipotenusa d'una somma di due mediali.

Non pretendiamo tuttavia che questa interpretazione ci indichi in modo assolutamente evidente lo scopo che EUCLIDE voleva raggiungere studiando appunto queste 12 specie d'irrazionali. Possiamo trovare ragioni abbastanza plausibili, ma rimane sempre un elemento d'incertezza, perchè in realtà non possediamo libri che dieno l'applicazione degl'irrazionali al campo numerico al tempo d'EUCLIDE.

Quando si aggiunga che gli irrazionali ottenuti cambiando $+$ in $-$ hanno loro nomi propri (p. e. invece di binomiale, il termine « apotome », invece di « maggiore », « minore ») e che l'irrazionale della forma $\sqrt{p\sqrt{q}}$, dove p e q sono razionali, si chiama *mediale*, si sono riferiti tutti i termini speciali introdotti da EUCLIDE. Il principale contenuto del libro X° è la dimostrazione dell'esistenza di questi irrazionali. Le sole proposizioni ancora aggiunte sono le 71-72 e 108-110, secondo le quali la somma d'un razionale e d'una mediale appartiene alle categorie 1α, 2α, 1β, 2β e la radice della somma di due mediali commensurabili appartiene a 3α o a 3β. Per le apotomi si ha un'altra regola. Inoltre le proposizioni 112-114 ci dànno la valutazione di una frazione $\dfrac{C}{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}$, dove C è razionale e $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ appartiene a 1α).

L'ultima prop. 115 — probabilmente aggiunta più tardi — stabilisce che da una mediale si può dedurre una serie d'irrazionali essenzialmente irreducibili, cioè che l'operazione di estrazione della radice quadrata conduce a sempre nuove irrazionalità.

3. - Qual'è il significato del libro X, così diverso dagli altri libri degli Elementi?

Ecco una domanda che ha ricevuto risposte assai differenti nella storia. ANARIZIO (nel sec. X) si limita a illustrare il nostro libro con alcuni esempi numerici. STIEFEL (1544) considera il libro stesso come una teoria per calcolare le radici di certi irrazionali ed espone ampiamente le regole di calcolo.

Ma gli algebristi italiani del Rinascimento vi cercavano, oltre a quello scopo, la classificazione qualitativa. LEONARDO PISANO, agl'inizii del secolo XIII, studiando l'equazione di 3° grado

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

propostagli da GIOVANNI da Palermo, dimostra che essa non può essere soddisfatta da nessuno degli irrazionali euclidei: si può trovare qui il principio delle considerazioni moderne mercè il quale si riconosce l'impossibilità di risolvere con riga e compasso i problemi di 3° grado (Cfr. l'art. di A. CONTI nel vol. III delle « Questioni » (1)). I *cosisti* della fine del secolo XV e del XVI, — LUCA PACIOLI, TARTAGLIA, CARDANO — si occupavano con grande interesse delle irrazionalità del tipo quadratico. CARDANO nell'« Ars magna » (1545) studia minutamente la forma delle equazioni di secondo, terzo e quarto grado le cui radici sono irrazionali euclidei. Così non è meraviglia che appunto dal libro X sia scaturita l'idea geniale che ha condotto alla risoluzione delle equazioni cubiche in generale (cfr. la Nota in fine al Vol.). Tuttavia il libro stesso restava un grande mistero. Dice STEVIN (« Arithmetica », 1595): « La difficoltà del X libro d'EUCLIDE è venuta in orrore a molti, così da chiamarlo la croce dei matematici, materia troppo dura da digerirsi, nella quale non si scorge alcuna utilità ».

Per apprezzare al giusto valore questa materia basta però guardare ai problemi e ai resultati che ne derivano storicamente. Infatti la teoria euclidea degl'irrazionali si prosegue nella scienza moderna in due sensi diversi:

1) colla *definizione* generale dei numeri *irrazionali* mercè gli sviluppi infiniti (in particolare coll'algoritmo della frazione continua introdotto da CATALDI: cfr. la nota alla prop. 3) e mercè le *sezioni* di DEDEKIND, che abbiam già visto riattaccarsi al libro V;

(1) *Questioni riguardanti le matematiche elementari* raccolte e coordinate da F. ENRIQUES - Bologna, Zanichelli.

2) colla *classificazione* degl'*irrazionali*, la quale raggiunge il suo grado più alto nella teoria dei corpi algebrici, ma conduce, già con ABEL, ad una forma canonica degl'irrazionali resultanti da radicali sovrapposti, che è una diretta estensione della dottrina euclidea (cfr. l'art. 21 di V. NOTARI nel vol. III delle citate « Questioni » pag. 490 - 3).

I giudizii dei matematici e degli storici più recenti sul libro X tendono a definire lo scopo che EUCLIDE si può esser proposto nello scriverlo. CHRISTENSEN (1889), di cui HEATH accoglie in gran parte le vedute, stima che si tratti di classificare le radici delle equazioni biquadratiche della forma

$$x^4 \pm px^2 \pm q = 0,$$

a coefficienti razionali o irrazionali d'un certo tipo. KLEIN (Vorlesung über Elementargeometrie, II, 1907) crede che scopo principale di esso fosse la classificazione degli irrazionali che si presentano nei libri seguenti degli Elementi: nel qual giudizio egli è d'accordo con parecchi commentatori dell'antichità e del Rinascimento. Bisogna dire, però, che lo sviluppo dato alla materia del libro X oltrepassa di assai quello scopo: se proprio EUCLIDE ha composto il X per possedere quanto occorre alla trattazione dei poliedri regolari, egli ha fabbricato tutta una batteria di cannoni per sparare un solo colpo; e tuttavia la batteria potrà servire, com'è avvenuto, per sparare in seguito altri colpi!

Terminiamo questa prefazione ricordando che il primo sommario completo del libro X in forma algebrica è stato dato da COSSALI nel secolo XVIII. Fra i commentatori più recenti che recano una spiegazione di tal genere citiamo NESSELMANN, CHRISTENSEN e HEATH.

Termini.

1.

Si chiamano commensurabili (σύμμετρα) quelle grandezze che sono misurate dalla stessa misura, e incommensurabili quelle di cui non esiste una misura comune.

2.

Le rette sono commensurabili in potenza (δυνάμει σύμμετροι) quando i quadrati costruiti sopra di esse sono misurati della stessa superficie; sono invece incommensurabili [in potenza] (ἀσύμμετροι), quando non esiste un'area che sia misura comune dei quadrati costruiti sopra di esse.

EUCLIDE indica con ἀσύμμετρος l'incommensurabile, con ἄλογος l'irrazionale e con ῥητός il razionale.

Segmenti commensurabili nella prima potenza non sono definiti a parte, ma rientrano come caso particolare della definizione 1 di *grandezze* commensurabili.

Un segmento b commensurabile (nella prima potenza) con un segmento a è della forma

$$b = \frac{m}{n} a ,$$

con m, n, numeri interi.

Un segmento b commensurabile con a nella seconda potenza è della forma

$$b = \sqrt{\frac{m}{n}}\, a\,,$$

dove $\frac{m}{n}$ non è quadrato perfetto.

3.

Premesse queste cose, si può dimostrare che esistono, in numero infinito, rette commensurabili e rette incommensurabili, sia in lunghezza soltanto come anche in potenza, con una retta preassegnata. Allora la retta preassegnata si chiamerà razionale (ῥητή), e le rette con essa commensurabili, sia in lunghezza che in potenza, sia soltanto in potènza, si chiameranno razionali (ῥηταί); le rette invece con essa incommensurabili si chiameranno irrazionali (ἄλογοι).

Questa definizione euclidea introduce in sostanza quella che noi diciamo la scelta di una *unità di misura*: dopo la quale si sostituiscono alle grandezze i numeri che le misurano.

L'esistenza effettiva degli irrazionali affermata nella definizione si dimostra poi per mezzo di una costruzione nella prop. 10.

Si noti la differenza della terminologia di EUCLIDE dalla nostra. EUCLIDE chiama razionale $b = \sqrt{\frac{m}{n}}\, a$, dove a è razionale.

Quest'uso della parola, diverso dal moderno, esige una particolare attenzione per capire il testo euclideo, ma conduce d'altronde ad alcuni enunciati particolarmente eleganti.

4.

E il quadrato costruito sulla retta assegnata si chiamerà razionale (ῥητόν), e le [aree] con esso commensurabili si chiameranno razionali; mentre si chiameranno irrazionali (ἄλογα) le aree con esso incommensurabili, e irrazionali le rette il cui quadrato è equivalente a quelle aree (αἱ δυνάμεναι αὐτά); cioè, se son quadrati, gli stessi loro lati; e se sono altre figure rettilinee, i lati dei quadrati ad esse equivalenti.

Così, secondo il linguaggio euclideo, segmenti razionali determinano quadrati razionali, e segmenti irrazionali determinano quadrati irrazionali.

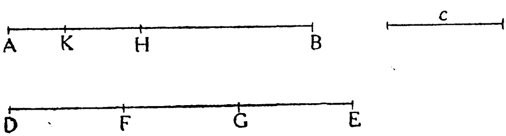
L'enunciato che « i lati di un quadrato eguale ad una superficie irrazionale limitata da segmenti rettilinei, sono essi stessi irrazionali », presuppone una definizione assiomatica dell'eguaglianza di superficie o equivalenza, da cui segua, p. es., che l'incommensurabilità è invariante rispetto alle trasformazioni per equivalenza. Un'analisi completa delle ammissioni che per EUCLIDE sono implicite nel confronto di aree e volumi si trova in STOLZ, Math. Annalen. 22.

Proposizioni.

1.

Assegnate due grandezze disuguali, se dalla maggiore si sottrae una grandezza più grande della sua metà, e da ciò che resta una grandezza più grande della sua metà, e se questa operazione si ripete successivamente, resterà una certa grandezza che sarà più piccola della grandezza minore assegnata.

Siano AB, c (1) due grandezze disuguali, di cui AB sia la maggiore; dico che, se da AB si sottrae una grandezza più grande della sua metà, e da ciò che resta una grandezza più grande della sua metà, e se questa operazione si ripete successivamente, resterà una certa grandezza che sarà più piccola della grandezza c.



Infatti, se c viene moltiplicata, può risultare maggiore

(1) Quanto ai simboli da noi usati nell' esposizione delle proposizioni euclidee, conformemente a quanto fu già fatto nei precedenti libri V-IX, usiamo due lettere maiuscole od una minuscola per denominare segmenti, secondochè se ne possono o no indicare gli estremi; in più avvertiamo che, per comodità del lettore abituato a simbolismo moderno, abbiamo adottato i segni $+$, $-$, $\times$, di 2ª potenza.

di AB. Si supponga d'averla moltiplicata, e sia DE multiplo di c e maggiore di AB; si divida DE nelle parti DF, FG, GE uguali a c; da AB si sottragga BH maggiore della sua metà; da AH, HK maggiore della sua metà; e si ripeta quest'operazione continuamente, finchè si sia diviso AB nello stesso numero di parti in cui è stato diviso DE.

Siano dunque le parti AK, KH, HB uguali di numero alle parti DF, FG, GE; poichè è DE maggiore di AB, e da DE è stato tolto EG minore della sua metà, e da AB è stato tolto BH più grande della sua metà, ne segue che il resto GD è maggiore del resto HA. E poichè GD è maggiore di HA, e da GD è stata tolta la metà GF, e da HA è stato tolto HK più grande della sua metà, ne segue che il resto DF è maggiore del resto AK. Ma DF è uguale a c; dunque anche c è maggiore di AK. Quindi è AK minore di c.

Dunque della grandezza AB resta la grandezza AK, che è più piccola della grandezza minore assegnata c; ciò che si doveva dimostrare.

Si può fare una dimostrazione simile, anche quando ciò che si sottrae sia uguale alla metà.

A capo del X° libro EUCLIDE pone ragionevolmente questa proposizione, che costituisce il fondamento della comparabilità delle grandezze commensurabili e incommensurabili tra di loro, e quindi del calcolo sopra irrazionali.

Infatti questa proposizione traduce in sostanza l'assioma che abbiamo ravvisato nella def. V, 4 [1] « due grandezze stanno in un

---

[1] Cfr. la relativa nota pag. 8, nel 2° vol. nostro.

rapporto, quando il multiplo dell' una supera l' altra », ciò che equivale a dire che per le grandezze che si considerano nella teoria dei rapporti vale il principio di Archimede:

Date due grandezze della stessa classe, esiste un multiplo dell' una che supera l' altra. Oppure:

Se $a \neq b$, allora esiste sempre un numero intero m, tale che $ma > b$.

Nella X, 1 questo principio è trasformato in maniera da poter essere applicato immediatamente alla dimostrazione della 2ª proposizione, la quale fornisce il criterio fondamentale per poter riconoscere se due grandezze siano commensurabili tra di loro o no.

La X, 1 trova una importante applicazione nelle proposizioni 2, 5, 7, 10 del libro XII, tant' è vero che in un primo tempo, quando non era ancora chiaro il vero significato del X° libro, quale teoria della classificazione degli irrazionali, si è creduto che il suo valore si esaurisse nelle dette applicazioni pratiche.

Questa interpretazione erronea dei commentatori del 500 e del 600 ha tuttavia un fondo di verità, ed è che effettivamente il principio di Archimede possiede un significato profondo e che per la sua importanza e fecondità può essere paragonato al concetto moderno del limite.

A chi è dovuto questo principio, che porta il nome di Archimede?

STOLZ « Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes » (Math. Annalen 22, pag. 506: 1883) ne trova l' enunciato esplicito nella prefazione alla « Quadratura della Parabola » d'Archimede (1) (Opera omnia II pag. 264). Ma se si cerca di risalire veramente al suo primo autore, è difficile rispondere alla domanda, perchè sembra probabile che della verità in esso contenuta si sia fatto uso dai geometri assai prima della formulazione esatta. A questo proposito notiamo che il principio compare in forma negativa, nell' argomento detto « l' Achille » di Zenone d' Elea (cfr. la nota alla Def. V, 4).

Quanto alla prima formulazione esplicita del nostro principio,

---

(1) Cfr. E. RUFINI « Il metodo d'Archimede e le origini dell' analisi infinitesimale nell' antichità » Vol. N. 4 di questa collezione, pag. 36.

la critica del RUFINI, dopo quella dello ZEUTHEN, ci addita il nome d'EUDOSSO di Cnido. Nel suo piccolo ma interessante scritto su «Eudosso» ricco di riferimenti alle fonti, il RUFINI richiama specialmente due passi del Commento di PROCLO: nel primo, parlando dei geometri preeuclidei, il commentatore dice «Eudosso, amico di Platone, aumentò il numero dei teoremi sopranominati» e nel secondo aggiunge «EUCLIDE ha raccolto gli Elementi, riunendo insieme molte cose trovate da Eudosso»; infine c'è anche uno scolio anonimo all'Euclide in cui Eudosso è nominato come «creatore» del V° libro. In base a queste citazioni, RUFINI conclude che a EUDOSSO appartiene il merito di avere per mezzo di un principio generale (che si enuncia sostanzialmente in X, 1) fondato su basi rigorosamente logiche la già vacillante teoria pitagorica delle proporzioni, e di aver conferito a questa teoria, attraverso le definizioni che si riferiscono al concetto di grandezza, un tale grado di generalità, da renderla applicabile indifferentemente alla geometria, all'aritmetica e alla musica, e quel che più ci importa qui, ai razionali e agli irrazionali. Lo stesso principio si trova in Euclide sotto forma implicita nella definizione già menzionata del V° libro ed è enunciato esplicitamente, sotto forma modificata, in X, 1. Ora anche da ciò che dice ARCHIMEDE possiamo trarre argomento in favore della tesi che attribuisce ad EUDOSSO il principio medesimo. Nella già citata prefazione alla «quadratura della parabola» si enuncia che:

«Date due aree diseguali, il multiplo della loro differenza può superare ogni area finita».

Archimede ritiene indispensabile l'uso di questo assioma per poter seguire Eudosso nelle dimostrazioni relative al cono e al cilindro. Egli aggiunge:

«Anche i geometri anteriori hanno usato questo lemma. Il teorema che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri è stato dimostrato da loro appunto per mezzo di questo lemma e lo stesso si dica della dimostrazione del teorema che le sfere stanno tra loro come i cubi dei diametri. Per mezzo dello stesso lemma o di un lemma analogo essi hanno pure mostrato che ogni piramide è eguale alla terza parte di un parallelepido di egual base ed altezza, e che ogni cono....».

Parlando dei geometri anteriori Archimede intende in special modo Eudosso, che è appunto l'autore dei detti teoremi. Dunque Eudosso deve essersi servito di un postulato « simile » a quello citato.

Il teorema sulla proporzionalità fra cerchi e quadrati dei diametri risale a IPPOCRATE di Chio. Si potrebbe credere che già Ippocrate, abbia conosciuto il « lemma di Archimede » e l'abbia adoperato nella dimostrazione. Tuttavia molti motivi concorrono ad escludere almeno ch'ei ne abbia dato la formulazione esplicita e a ritenerne EUDOSSO come il vero autore. Infatti ERONE attribuisce a EUDOSSO il detto teorema e i due teoremi sul cono e sulla piramide, mentre ARCHIMEDE sembra considerarlo come il fondatore di un metodo rigorosamente scientifico di dimostrazione e come il suo percursore nelle quadrature e nelle cubature.

Aggiungiamo che un teorema contenente in sostanza il postulato d'Archimede e la X, 1, si trova in ARISTOTELE, scolaro di PLATONE, ma vissuto prima d'EUCLIDE (Physica VIII, 10, ed. J. Bekker, Berlino 1831 p. 266). Cfr. anche Rufini « Il concetto di infinito matematico in Aristotele », Rassegna di Mat. e Fisica, Roma V, 1921, 6, p. 143.

Comunque, se al principio di cui qui si discorre si conserverà il nome d'Archimede, datogli da STOLZ, vuol dire che esso verrà designato, non dal suo inventore, bensì da colui che l'ha maggiormente adoperato e messo in valore: poichè certo ARCHIMEDE ne ha tratto le più feconde conseguenze.

Ora il vero significato del postulato d'Eudosso-Archimede viene in luce soltanto per chi cerchi di stabilire in via assiomatica una definizione delle grandezze. Nella Nota alla def. V, 2 si è detto che questo compito è stato assolto da GRASSMANN. Infatti nel suo « Lehrbuch der Arithmetik » (V, 1) si trova la definizione seguente:

« Di ogni coppia di enti, che possono essere considerati come grandezze (di una stessa classe), si deve poter dire se sono eguali o diseguali ». Inoltre deve essere stabilito quanto segue:

1) si deve fornire un criterio per riconoscere quando è che due grandezze della stessa classe sono eguali o diseguali. Questo criterio può essere stabilito in maniera arbitraria purchè sieno soddisfatti i seguenti postulati:

2) se $A = B$ e $B = C$, allora si ha anche $A = C$.

3) date due grandezze diseguali, si deve poter decidere quale di esse è la maggiore. Il criterio corrispondente deve però soddisfare alla condizione seguente:

4) da $A = B$ e $B > C$ segue $A > C$. Questa condizione, insufficiente però, si trova anche in Euclide.

5) Le operazioni di addizione e di moltiplicazione vengono definite in modo da soddisfare alle stesse regole delle operazioni sopra i numeri naturali.

6) Ogni grandezza si può dividere in un numero qualsivoglia di parti eguali.

Ciò posto, se per una classe di grandezze non s'introducono altri postulati oltre ai 6 enunciati (come fa EUCLIDE per i segmenti), allora il postulato d'Archimede non resulta come conseguenza necessaria da tali premesse. Infatti P. DU BOIS-REYMOND, G. CANTOR e G. VERONESE, hanno riconosciuto — in varii modi — l'esistenza di classi di grandezze contenenti un *infinito* o un *infinitesimo attuale*, per le quali non vale codesto principio.

(Cfr. nel vol. I delle citate « Questioni » gli articoli V di G. VITALI §§ 2, 4, 5, e VI di F. ENRIQUES passim e in ispecie Parte 4ª).

L'esempio elementare più antico di grandezze non-archimedee è offerto dagli angoli curvilinei, poichè l'angolo di contatto costituisce un infinitesimo attuale di fronte agli angoli rettilinei. Delle questioni a cui codesti angoli hanno dato luogo nella storia parla la Nota alla Prop. III, 16 (Cfr. il citato art. di F. ENRIQUES nelle « Questioni » § 56, pag. 380).

I commentatori dell'Euclide hanno fatto precedere alla prop. X, 1 alcune condizioni preliminari che noi togliamo da CLAVIO.

1) Un divisore comune di due grandezze è divisore della loro somma.

2) Il divisore di una grandezza misura anche ogni multiplo di questa (segue da 1).

3) Un divisore comune di due grandezze misura anche la loro differenza.

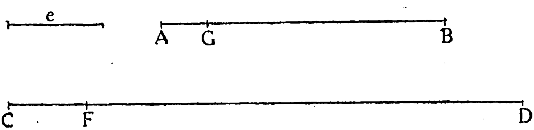
Questi teoremi estendono alle *grandezze* i teoremi aritmetici del VII libro.

2.

Date due grandezze disuguali, se sottraendo ripetute volte di seguito dalla grandezza maggiore la minore, nessuna delle grandezze che si hanno per resto misura la precedente, le grandezze saranno incommensurabili.

Infatti, essendo AB, CD due grandezze disuguali e AB la minore, si supponga che, sottraendo ripetute volte la minore dalla maggiore, delle grandezze che si hanno per resto nessuna misuri la precedente; dico, che le grandezze AB, CD sono incommensurabili.

Infatti, se fossero commensurabili, una certa grandezza potrebbe misurarle. Sia e, se è possibile, questa misura



comune. Si supponga inoltre che AB misuri FD e dia per resto CF minore di essa, che CF misuri BG e dia per resto AG minore di essa, e così si continui finchè non si abbia per resto una grandezza minore di e. Si supponga ciò fatto, e si sia avuto per resto AG minore di e. Ora, poichè e misura AB e AB misura DF, e misurerà per conseguenza anche DF. Ma essa misura anche tutta CD; perciò misurerà anche il resto CF. Ma CF misura BG; perciò e misura anche BG. Ma essa misura anche tutta AB; perciò misurerà anche il resto AG, la più grande (cioè, misurerà) la più piccola; il che è impossibile. Dunque nessuna grandezza misurerà le grandezze AB, CD; quindi le grandezze AB, CD sono incommensurabili [X, def. 1].

Dunque, se sottraendo ecc... c. d. d.

Questa proposizione fornisce un criterio per poter riconoscere l'incommensurabilità di due grandezze a, b. Si sottrae dalla grandezza maggiore, a, tante volte quante si può la grandezza minore, b, e sia: $a - bp = c$. Il resto c, che è minore di b, si sottrae di nuovo da b tante volte, quante si può, e sia: $b - qc = d$. Il nuovo resto d, che è minore di c, si sottrae di nuovo da c, e così via.

Se questo processo non ha un termine, cioè se non accade mai che un resto sia contenuto esattamente nel resto precedente un numero intero di volte, allora le grandezze a e b sono incommensurabili tra di loro. Infatti, supposto il contrario, che cioè le grandezze a e b abbiano una misura comune m, allora m dovrebbe misurare anche i resti successivi c, d, e, f.... Ma in questa serie, per il teorema X, 1 (dato che da a, come pure da b ecc., si sottrae sempre più della loro metà), deve presentarsi alfine un termine g minore di m e tuttavia misurabile per mezzo di m, ciò che è assurdo.

Questo procedimento infinito, di cui diamo in seguito esempi geometrici e aritmetici, fornisce un criterio affatto generale dell'incommensurabilità, e la sua scoperta deve essere stata la conclusione di tutto un periodo di sviluppo della scienza matematica, sulle origini del quale si hanno varie ipotesi.

M. CANTOR così descrive lo sviluppo del concetto del numero irrazionale:

Partendo da un triangolo rettangolo isoscele di cateto 1, si è proceduto alla misura dell'ipotenusa. Essa è minore di 2 e maggiore di 1. Ma non si riesce a esprimere la sua lunghezza per mezzo di una frazione; anche se si prendono per i cateti multipli di 1, si trovano al massimo valori approssimati. « È un grande passo », dice ENRICO VOGT (Acta mathematica di Eneström, 1906-07, pag. 6-23) « dedurre dai tentativi falliti l'impossibilità. » Finchè si misura praticamente, non si va oltre il valore approssimato; ma occorre invece un'astrazione per arrivare al concetto dell'irrazionale. Questa astrazione può consistere o nella concezione della misura come processo infinito, o nella dimostrazione dell'impossibilità di una misura esatta. Così LAMBERT ha dimostrato l'irrazionalità di π, e poi LINDEMANN la sua trascendenza. Ma il riconoscimento dell'irrazionalità di una grandezza ebbe nel suo sviluppo tre fasi:

1) il riconoscimento che tutti i risultati ottenuti con *la misura* di questa grandezza sono inesatti;

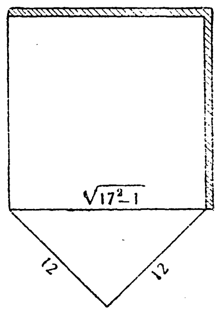
2) *la convinzione* dell'impossibilità di indicare il suo valore preciso;

3) la dimostrazione dell'irrazionalità stessa.

Gli Indiani hanno calcolato l'ipotenusa del quadrato in funzione del lato, mediante la frazione:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}.$$

Questo numero corrisponde all'8° valore approssimato dello sviluppo in frazione continua di $\sqrt{2}$, e quindi è molto esatto. La conoscenza di una approssimazione talmente grande, acquistata con un procedimento empirico, è tanto più sorprendente, in quanto gli indiani non conoscevano la dimostrazione del teorema di Pitagora. THIBAUT (Journal of the asiatic society, Calcutta 1875) spiega nella maniera seguente, come gli indiani hanno potuto arrivare a questo risultato soddisfacente. La diagonale del quadrato di lato 12 è quasi eguale a 17 ($2 \times 12^2 = 288$, $17^2 = 289$). Se si toglie dunque dal quadrato di lato 17 uno gnomone di area 1 (v. figura), allora rimane un quadrato, il cui lato è eguale approssimativamente a $17 - \frac{1}{34} =$ $= 12 + 4 + 1 - \frac{1}{34}$. Riducendo quindi i numeri trovati al quadrato unitario, dividendo cioè per 12, si ottiene per $\sqrt{2}$ il valore approssimato $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$. Gli Indiani consideravano



questa costruzione come precisa, e non come un'approssimazione; ciò mostra che nella conoscenza degli irrazionali essi non sono nemmeno arrivati alla prima delle fasi sopradette.

I Pitagorici invece hanno certamente riconosciuto l'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato, come pure di un segmento colla sua parte aurea.

Di un'antica dimostrazione aritmetica di stile pitagorico che si riferisce al primo caso, cioè all'irrazionatà di $\sqrt{2}$, dà un cenno ARISTOTELE (Analytica priora I, 23): l'ipotesi della razionalità porterebbe all' assurdo di supporre un numero intero contemporaneamente pari e dispari. In questo cenno sembra di riconoscere la dimostrazione che ci è stata pure conservata dalle edizioni antiche (Anarizio) come prop. 116 o scolio alla prop. 115 di questo libro. Se $\sqrt{2}$ è razionale, vuol dire che si ha

$$2=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2},\ \text{cioè}\ m^2=2n^2,$$

con m e n interi. Ora, se m ed n sono ambedue pari, si può dividere per 2 l'eguaglianza precedente; è lecito dunque supporre che si abbia

$$m^2=2n^2$$

dove m è necessariamente pari, ed n dispari. Ma, posto $m=2m_1$ si deduce

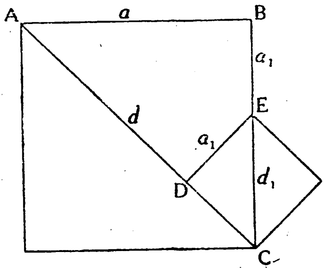
$$n^2=2m_1{}^2$$

e — per essere pari il suo quadrato — anche n dovrà esser pari, contro l'ipotesi.

In luogo di ricorrere al precedente ragionamento aritmetico, l'incommensurabilità del lato colla diagonale del quadrato, si può dimostrare per via geometrica applicando il criterio della nostra prop. X, 2.

Si sottragga dalla diagonale $AC=d$ il lato $a=AB=AD$, e si conduca poi la perpendicolare DE.

Sarà allora $DC=DE=BE=a_1$ il lato d'un nuovo quadrato sopra cui si potrà operare come sopra il dato. Se a e d avessero una misura comune allora questa dovrebbe misurare anche la loro differenza a_1, e quindi anche la differenza d_1, di a e a_1. Insomma questa grandezza finita, misura comune di a e d, dovrebbe misurare le diagonali e i lati di una serie illimitata di quadrati successivi,



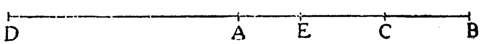
che — per il teorema di Pitagora e secondo la prop. 2 — vanno indefinitamente decrescendo.

In modo analogo si può dare la dimostrazione dell'incommensurabilità del segmento colla sua parte aurea, cioè l'irrazionalità delle radici dell'equazione

$$x^2 = a(a - x).$$

Questa dimostrazione è presentata da CAMPANO come segue:

Se AC è la sezione aurea del segmento AB, e se si pone $AD = AB$, allora da XIII, 5, segue che AB è la sezione aurea



di BD. Perciò se, viceversa, si prende $CE = CB$, sarà EC la sezione aurea di AC e così via. Siccome poi il segmento maggiore in una sezione aurea è minore di tutto il segmento, ma è minore del doppio del segmento minore (XIII, 3), segue che il segmento minore è contenuto totalmente una sola volta nel segmento maggiore. Si vede dunque che il processo delle divisioni successive indicate nella prop. 2 nel nostro caso non ha termine, e quindi AB e AC sono incommensurabili tra loro; in altre parole: il rapporto di un segmento e della sua parte aurea è irrazionale.

Dei tempi di Euclide non si è conservato nessun testo aritmetico, e anzi il creatore del X° libro trascura deliberatamente la costruzione di esempi aritmetici. È interessante perciò notare che i matematici del secolo 16° hanno cercato di aritmetizzare le dimostrazioni di Euclide. Come esempio citiamo quello di MICHELE STIEFEL (Arithmetica integra, 1544), in cui si procede per sottrazioni successive. In questo esempio si considerano le due grandezze $\sqrt{8}$ e $\sqrt{6}$ e si formano le differenze

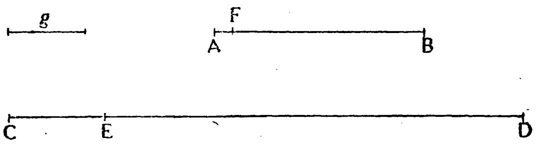
$$1)\ \sqrt{8}-\sqrt{6};\ 2)\ \sqrt{6}-(\sqrt{8}-\sqrt{6})=\sqrt{24}-\sqrt{8};\ldots$$

fino alla decima sottrazione che dà $\sqrt{1352}-\sqrt{1350}$ ecc.

3.

Date due grandezze commensurabili, trovare la loro massima comune misura.

Siano le due grandezze commensurabili date AB, CD, di cui la minore sia AB; si deve trovare la massima comune misura di AB, CD.



Ora, la grandezza AB o misura CD, o no. Se la misura, siccome misura anche sè stessa, AB sarà certamente misura comune di AB, CD; ed è chiaro che sarà anche la massima. Infatti una grandezza più grande di AB non può misurare AB.

Si supponga ora che AB non misuri CD. In tal caso, sottraendo, ripetute volte di seguito, la minore dalla maggiore, dei resti che si ottengono qualcuno misurerà il suo precedente; perchè AB, CD non sono incommensurabili [prop. 2]. Allora, si supponga che AB misuri ED e dia per resto EC minore di essa, che EC misuri FB e dia per resto AF minore di essa, che AF misuri CE.

Ciò posto, poichè AF misura CE, e a sua volta CE misura AB, AF misurerà di conseguenza anche FB. Ma misura anche sè stesso; quindi AF misurerà anche tutta AB. Inoltre, AB misura DE; perciò AF misurerà anche ED. Ma misura anche CE; quindi misurerà anche tutta CD; Dunque AF è misura comune di AB, CD. — Dico inoltre che è anche la massima. Giacchè, se non lo fosse, vi sarebbe una certa grandezza maggiore di AF, che misurerebbe AB, CD. Sia questa g. E allora, poichè g misura AB, e a sua volta AB misura ED, g misurerà anche ED. Ma misura anche tutta CD; perciò g misurerà anche FB. Ma misura anche tutta AB; perciò misurerà anche AF, la più grande [cioè, misurerà] la più piccola; il che è impossibile. Perciò nessuna grandezza più grande di AF misurerà AB, CD; quindi AF è la massima comune misura di AB, CD.

Dunque è stata trovata la massima comune misura delle due grandezze commensurabili date AB, CD; ciò che si doveva dimostrare.

Corollario.

Da ciò che precede è reso manifesto, che, se una grandezza misura due grandezze, misurerà anche la loro massima comune misura.

Questa proposizione e il porisma accluso corrisponde alla proposizione VII, 2, dove si cerca il massimo comun divisore di numeri, invece che di grandezze. L'algoritmo:

$$\begin{array}{llll}
a : b\,,\ p & & & \\
\underline{\ -\,bp\ } & & & \\
& c : b\,,\ q & & \\
& \underline{\ -\,qc\ } & & \\
& & d : c\,,\ r & \\
& & \underline{\ -\,rd\ } & \\
& & \quad 0 &
\end{array}$$

conduce al resto 0 nel caso di due grandezze commensurabili.

ZEUTHEN (Videnskabernes selskabs Copenaghen, 1917) da un passo della Topica di Aristotele argomenta che i Greci usavano il metodo delle divisioni successive allo scopo di assegnare valori approssimati dei rapporti irrazionali, e che essi di più consideravano la legge di formazione di resti successivi come definizione di tali rapporti (v. Introduzione).

Il procedimento delle divisioni successive fu poi dal CATALDI (1597) trasformato nell'algoritmo della frazione continua. [1]

4.

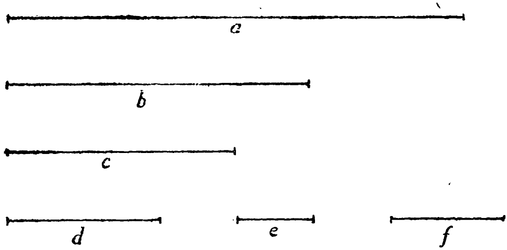
Date tre grandezze commensurabili trovare la loro massima comune misura.

Siano le tre grandezze commensurabili date a, b, c; si deve trovare la massima comune misura di a, b, c.

---

[1] Cfr. E. Bortolotti. *P. A. Cataldi ed i primi algoritmi infiniti*. Bologna 1920 - Boll. Mathesis 1919. n. 1 a 12. Cfr. inoltre l'articolo dello stesso autore « La scoperta dell'irrazionale e le frazioni continue » in Per. di Mat., Maggio 1931.

Si prenda la massima comune misura delle due grandezze a, b, e sia d [prop. 3]. Ora, o d misura c, o no. Si supponga, in primo luogo, che la misuri. E allora, poichè d misura c, e misura anche a, b, la stessa d misurerà di conseguenza le grandezze a, b, c; quindi d è comune



misura di a, b, c. Ed è chiaro che è anche la massima; giacchè una grandezza maggiore di d non misura a, b.

Si supponga ora che d non misuri c. Dico, in primo luogo, che c, d sono commensurabili. Infatti, essendo a, b, c commensurabili, le misurerà una certa grandezza, la quale evidentemente misurerà anche a, b; e quindi misurerà anche la massima comune misura di a, b, che è d [prop. 3, cor.]. Ma essa misura anche c; quindi la detta grandezza misurerà anche c, d. Dunque c, d sono commensurabili.

Si prenda ora la loro massima comune misura, e sia e [prop. 3]. Quindi, poichè e misura d, e a sua volta d misura a, b, segue che e misurerà anche a, b. Ma essa misura anche c. Dunque e misura a, b, c; dunque e è misura comune di a, b, c. Dico inoltre che è anche la massima. Infatti, se è possibile, sia f una certa grandezza maggiore di e, la quale misuri a, b, c. Ora, poichè f misura a, b, c, misurerà certo anche a, b e la massima comune misura di a, b [prop. 3, Cor.]. Ma la massima comune misura di a, b è d; quindi f misura d. Ma misura anche c; quindi f misura c, d e perciò f misurerà anche la massima misura di c, d. Ma questa è e; quindi f misurerà e, la maggiore [cioè, misurerà] la minore; il che è impossibile. Dunque nessuna grandezza maggiore di e misura a, b, c; quindi e è la massima comune misura di a, b, c se d non misura c; ma se la misura, la stessa d è la massima comune misura.

Dunque è stata trovata la massima comune misura di tre grandezze commensurabili date.

Corollario.

Per ciò che precede è chiaro che, se una grandezza misura tre grandezze, misurerà anche la loro massima comune misura.

Similmente poi, anche nel caso di più grandezze, si troverà la loro massima comune misura, e si estenderà il corollario. Ciò che si doveva dimostrare.

Per i numeri questa proposizione è dimostrata in VII, 3.

Si può trovare il M. C. D. di tre grandezze anche direttamente, sottraendo sempre la più piccola grandezza dalle altre due (Cfr. Enriques - Chisini: « Teoria geometrica delle equazioni » Vol. II pag. 560).

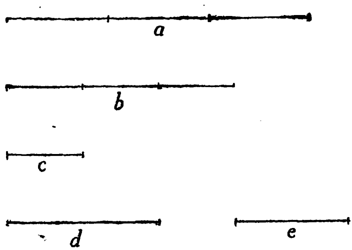
5.

Le grandezze commensurabili hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un altro numero.

Siano a, b, grandezze commensurabili; dico, che a ha con b il rapporto che un numero ha con un altro numero.

Infatti, essendo a, b, commensurabili, le misurerà una certa grandezza. Sia c quella che le misura; quante volte c misura a, altrettante unità siano in d; quante volte c misura b, altrettante unità siano in e.

Ora, poichè c misura a secondo il numero delle unità



che sono in d, e l'unità similmente misura d secondo il numero delle unità che sono in esso, segue che lo stesso numero di volte d'unità misura il numero d e c la grandezza a. Perciò

$$c : a = 1 : d;$$

[VII, def. 20]

quindi, invertendo

$$a : c = d : 1.$$

[V, 7, cor.]

Inoltre, poichè c misura b secondo il numero delle unità che sono in e, e l'unità similmente misura e secondo il numero delle unità che sono in esso, segue che tante volte l'unità misura il numero e quante c la grandezza b. Perciò

$$c : b = 1 : e$$

Ma fu dimostrato che $a : c = d : 1$; quindi *ex aequo*

$$a : b = d : e.$$

[V, 22]

Dunque le grandezze commensurabili a, b hanno tra loro lo stesso rapporto che il numero d ha con il numero e; c. d. d.

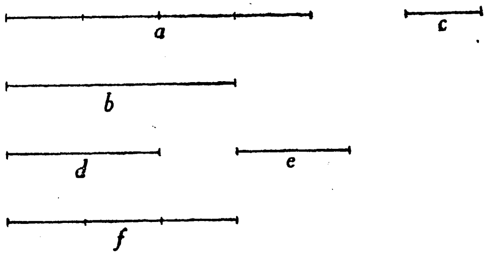
Nella dimostrazione si sfrutta la definizione VII, 20 dell'eguaglianza di due rapporti, nella quale però si tratta di numeri e non di grandezze in generale. Qui invece si tratta dell'eguaglianza di due rapporti, l'uno di grandezze, e l'altro di numeri. Ma allora si deve prima stabilire che i numeri si possono considerare come grandezze particolari, perciò occorre provare che le grandezze soddisfacenti alle condizioni indicate per i numeri nella definizione VII, 20, soddisfano anche alla definizione V, 5 di grandezze proporzionali. Questa dimostrazione è svolta da HEATH (Volume III, pag. 25), seguendo SIMSON.

COMMANDINO ha mostrato come, seguendo la dimostrazione di Euclide, si può trovare effettivamente il valore numerico del rapporto di due grandezze commensurabili. Egli osserva anche che la proposizione 5, vale ancora quando a, b sono segmenti, i cui quadrati stanno tra loro come due numeri quadrati, e anche nel caso in cui a e b siano superficie anzichè segmenti. Invece, per quanto riguarda la questione come deve essere formulata la proposizione nel caso di grandezze incommensurabili, p. es. nel caso di due segmenti commensurabili solo 2ª potenza, egli rinvia alla prop. 9.

6.

Se due grandezze hanno tra loro il rapporto che un numero ha con un altro numero, le grandezze stesse saranno commensurabili.

Infatti, le grandezze a, b abbiano tra loro lo stesso rapporto che il numero d ha con il numero e; dico che le grandezze a, b sono commensurabili.



Si divida infatti a in tante parti uguali, quante unità sono in d, e sia c uguale a una di esse; sia poi f composta di tante grandezze uguali a c, quante unità sono in e.

Ora, poichè tante grandezze uguali a c sono in a, quante unità sono in d, quella parte che l'unità è di d, la stessa parte è d della grandezza a; quindi

$$c : a = 1 : d \qquad \text{[VII, def. 20]}$$
$$a : c = d : 1 \qquad \text{[V, 7, cor.]}$$

Inoltre, poichè tante grandezze uguali a c sono in f, quante unità sono in e, segue che

$$c : f = 1 : e \qquad \text{[VII, def. 20]}$$

Ma fu anche dimostrato che $a : c = d : 1$; quindi *ex aequo*

$$a : f = d : e \qquad \text{[V, 22]}$$

Ma $d : e = a : b$; quindi anche $a : b = a : f$. [V, 11] Quindi a ha lo stesso rapporto con ciascuna delle grandezze b, f. Perciò è $b = f$ [V, 9]. Ma c misura f; misura quindi anche b. Ma misura anche a; perciò c misura a, b. Quindi a è commensurabile con b.

Dunque, se due grandezze, ecc....

COROLLARIO

Per quanto precede è chiaro che, dati due numeri, per es. d, e, ed una retta, per es. a, è possibile costruire una proporzione tale che il numero d stia al numero e, come la retta data sta ad un'altra retta [f].

Se poi si prende anche b media proporzionale tra le rette a, f, allora si avrà

$$a : f = \text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (b);$$

[cfr. V, def. 9]

cioè come la prima sta alla terza, così la figura descritta sulla prima a una figura simile e similmente descritta sulla seconda [VI, 20, cor. 2]. Ma

$$a : f = \text{numero } d : \text{numero } e;$$

quindi risulta

Anche qui si ammette nella dimostrazione che grandezze proporzionali nel senso della definizione VII, 20 sono anche proporzionali secondo la definizione V, 5.

La 1ª parte del corollario dice: se a è un segmento dato, e se m e n sono due numeri interi, allora si può determinare un segmento x tale che si abbia

$$a : x = m : n$$

La 2ª parte del corollario avverte che analogamente si può determinare un segmento y in modo che si abbia:

numero d : numero e = quadrato (a) : quadrato (b);

c. d. d.

$$a^2 : y^2 = m : n.$$

Questo segmento y si trova come la media proporzionale tra a e il segmento x, di cui alla 1ª parte del corollario, cioè

$$a : y = y : x.$$

Infatti, dalla definizione V, 9 e da VI, 19 segue allora che a sta ad x come un'area costruita sopra il segmento a sta ad un'area simile costruita sopra il segmento y, e quindi in particolare

$$a : x = a^2 : y^2,$$

da cui

$$a^2 : y^2 = m : n.$$

Nella simbolica moderna si procederebbe come segue: da

$$a : y = y : x$$

segue

$$a^2 : y^2 = y^2 : x^2,$$

ossia

$$a^2 : y^2 = ax : x^2$$

Quindi

$$a^2 : y^2 = a : x,$$

ossia

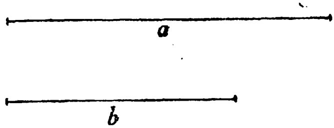
$$a^2 : y^2 = m : n.$$

7.

Le grandezze incommensurabili non hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un altro numero.

Siano a, e grandezze incommensurabili; dico che a non ha con e il rapporto che un numero ha con un altro numero.

Infatti, se *a* ha con *e* il rapporto che un numero ha con un altro numero, sarà *a* commensurabile con *e* [prop. 6].



Ma non lo è; perciò *a* non ha con *e* il rapporto che un numero ha con un altro numero.

Dunque, le grandezze incommensurabili ecc...

« Se due grandezze non stanno tra loro nel rapporto di un numero (intero) ad un altro numero, allora esse sono incommensurabili ». Questo è secondo STIEFEL (Arithmetica integra) un complemento necessario alla X, 2. Infatti, se due grandezze sono incommensurabili, allora il procedimento della X, 2, non avendo un termine, è incapace di stabilire il fatto della loro incommensurabilità. Ma applicando invece la proposizione 7 si trova subito, p. es., che le grandezze $\sqrt{24}$, $\sqrt{8}$ sono incommensurabili, perchè il loro rapporto

$$\sqrt{24} : \sqrt{8} = \sqrt{3}$$

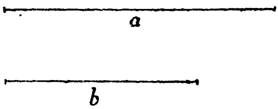
non è un « numero ».

8.

Se due grandezze non hanno fra di loro lo stesso rapporto che un numero ha con un altro numero, le due grandezze saranno incommensurabili.

Infatti due grandezze *a*, *b* non abbiano fra di loro lo stesso rapporto che un numero ha con un altro numero: dico che le grandezze *a*, *b* sono incommensurabili.

Infatti, se fossero commensurabili, *a* avrebbe con *b* il rapporto che un numero ha con un altro numero [prop. 5];



ma non lo ha, quindi le grandezze *a*, *b* sono incommensurabili.

Dunque se due grandezze ecc...

9.

I quadrati costruiti su rette commensurabili in lunghezza hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; e i quadrati, che hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, avranno anche i loro lati commensurabili in lunghezza. — Ma i quadrati costruiti su rette incommensurabili in lunghezza non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; e i quadrati che non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato non hanno i loro lati commensurabili in lunghezza.

Infatti, siano *a*, *b* commensurabili in lunghezza; dico che il quadrato costruito su *a* ha con il quadrato costruito su *b* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Infatti, essendo a commensurabile in lunghezza con b, a ha con b il rapporto che un numero ha con un numero [prop. 5]. Abbia il rapporto che c ha con d. Quindi, poichè

$$a : b = c : d,$$

e, a sua volta, il rapporto del quadrato costruito su a al quadrato su b è duplicato del rapporto di a a b, giacchè le

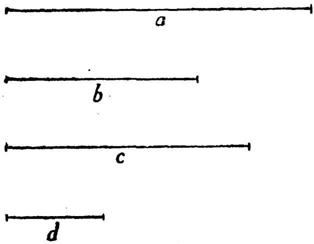


figure stanno fra loro nel rapporto duplicato [ossia, come i quadrati] dei lati omologhi [VI, 20, cor.]; e il rapporto del quadrato di c al quadrato di d è duplicato del rapporto di c a d, giacchè fra due numeri quadrati v'è un solo medio proporzionale, e il numero quadrato con altro numero quadrato ha un rapporto duplicato di quello che ha il lato con il lato [VIII. 11]; segue che anche

$$\text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (b) = c^2 : d^2$$

Inoltre si abbia che:

$$\text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (b) = c^2 : d^2;$$

dico che a è commensurabile in lunghezza con b.

Infatti, poichè

$$\text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (b) = c^2 : d^2$$

e il rapporto del quadrato su a al quadrato su b è duplicato del rapporto di a a b, e il rapporto del quadrato di c al quadrato di d è duplicato del rapporto di c a d, segue che anche

$$a : b = c : d.$$

Quindi a con b ha il rapporto che il numero c ha con il numero d; perciò a è commensurabile in lunghezza con b [X, 6].

Inoltre, a sia incommensurabile in lunghezza con b; — dico che il quadrato su a non ha con il quadrato su b il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Infatti, se il quadrato su a al quadrato su b avesse il rapporto che un numero quadrato ha ad un numero quadrato, a sarebbe commensurabile con b. Ma non lo è; quindi il quadrato su a al quadrato su b non ha il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Ancora, il quadrato su a al quadrato su b non abbia il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; dico che a è incommensurabile in lunghezza con b.

Infatti, se a fosse commensurabile con b, il quadrato su a al quadrato su b avrebbe il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Ma non lo ha; quindi a non è commensurabile in lunghezza con b.

Dunque, i quadrati ecc...

Corollario

Per le cose dimostrate è manifesto che rette commensurabili in lunghezza sono sempre commensurabili anche in potenza, ma quelle commensurabili in potenza non sempre sono commensurabili anche in lunghezza.

LEMMA.

Nei libri aritmetici è stato dimostrato che i numeri piani simili hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato [VIII, 26], e che se due numeri hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, essi sono numeri piani simili.

Da ciò appare che i numeri piani non simili, cioè quelli che non hanno i lati proporzionali [VII, def. 22], non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Infatti, se lo avessero, sarebbreo numeri piani simili; ciò che è contro l'ipotesi. Dunque i numeri piani non simili non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Nella dimostrazione si fa uso della proposizione VI, 20, a cui corrisponde per i numeri la proposizione VIII, 11. La VI, 20 dice sostanzialmente quanto segue:

« Superficie simili (in questo caso quadrati, a^2 e b^2) stanno nel « rapporto duplicato » dei lati, vale a dire che se L è la media proporzionale delle due superficie ($a^2 : L = L : b^2$), la prima superficie sta alla seconda nel rapporto dei lati omologhi ($a^2 : L = a : b$). »

EUCLIDE ammette implicitamente nella dimostrazione della X, 9 che se due rapporti sono eguali, anche i rapporti *duplicati* sono eguali. La dimostrazione si completa in questo punto come segue. Si tratta di dimostrare che se a e b sono due segmenti, e m, n due numeri interi, per modo che si abbia

$$a : b = m : n,$$

allora si ha anche

$$a^2 : b^2 = m^2 : n^2 ,$$

e inversamente.

Sia adesso L la media proporzionale di a^2 e b^2,

$$a^2 : L = L : b^2 .$$

Da VI, 20 segue

$$a^2 : L = a : b$$

sosia

$$L : b^2 = a : b .$$

Si determini p in modo che si abbia

$$m^2 : p = p : n^2 ;$$

allora si ha secondo VIII, 11

$$m^2 : p = m : n ,$$

oppure

$$p : n^2 = m : n .$$

Ne segue

$$a^2 : L = m^2 : p$$

e inoltre

$$L : b^2 = p : n^2 ,$$

da cui

$$a^2 : b^2 = m^2 : n^2 ,$$

c. d. d.

In uno scolio si afferma che secondo PLATONE questa proposizione sarebbe stata dimostrata da TEETETO, seppure non ancora in tutta la sua generalità.

Così, a poco a poco, attraverso la scoperta pitagorica degli irrazionali e le dimostrazioni di TEODORO di Cirene per i casi speciali ($\sqrt{3}$,... $\sqrt{7}$), si è arrivati ad un criterio generale delle irrazionalità quadratiche, stabilito certamente da EUDOSSO, ed enunciato qui da EUCLIDE, criterio che dice:

« Due grandezze, i cui quadrati non stanno tra loro come numeri quadrati, sono incommensurabili. » In linguaggio moderno « la radice quadrata d'una frazione irreducibile i cui termini non sono quadrati perfetti è irrazionale ».

CAMPANO dimostra l'irrazionalità del rapporto della diagonale e del lato di un quadrato, osservando appunto che i loro quadrati stanno nel rapporto 1: 2, cioè nel rapporto di due numeri non quadrati. Infatti in uno scolio a VIII, 8 si dimostra che è impossibile trovare la media proporzionale tra un numero e il suo doppio, vale a dire due grandezze il cui rapporto è = 1: 2, non stanno tra loro come due numeri quadrati.

CLAVIO dimostra e illustra anzi con esempi il fatto che le grandezze di cui nella X, 9 possono avere tra di loro il rapporto di numeri quadrati ecc., senza essere commensurabili con il segmento razionale dato (con l'unità).

STIEFEL nella sua « Arithmetica integra » (1544) dice che i numeri irrazionali presentano delle proprietà che poco si accordano con quelle dei numeri razionali (essi, p. es., non posseggono una unità comune), e che si ravvicinano piuttosto alle proprietà delle superficie: così EUCLIDE parla di superficie e di segmenti invece che di numeri irrazionali.

10.

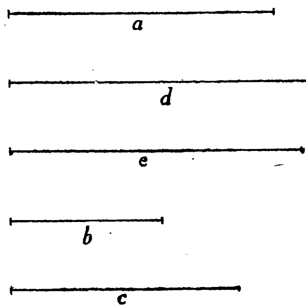
Trovare due rette incommensurabili con una retta data, una in lunghezza soltanto, l'altra anche in potenza.

Sia a la retta data; si debbono trovare due rette incommensurabili con a, una in lunghezza soltanto, l'altra anche in potenza.

Si prendano due numeri b, c non aventi fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, cioè numeri piani non simili [Lemma prec.], e si faccia in modo che

$$b : c = \text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (d)$$

— abbiamo infatti imparato a far ciò [prop. 6, cor.]; — quindi è commensurabile il quadrato su a con il quadrato su b [prop. 6]. E poichè b a c non ha il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure, per conseguenza, il quadrato su a con il quadrato su d ha



il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi a è incommensurabile in lunghezza con d.

Si prenda e, media proporzionale fra a e d; allora:

$$a : d = \text{quadrato } (a) : \text{quadrato } (e).$$

[V, def. 9]

Ma a è incommensurabile in lunghezza con d; quindi anche il quadrato su a è incommensurabile con il quadrato su e; perciò a è incommensurabile in potenza con e.

Dunque, sono state trovate due rette incommensurabili con la retta data e; e, precisamente, d soltanto in lunghezza, e invece in potenza e anche in lunghezza.

CLAVIO pospone questa proposizione alla 11, perchè nella sua dimostrazione se ne fa uso.

L'ordine di successione accolto « in codicibus vulgatis » egli attribuisce ad un errore originario di scrittura.

CAMPANO fa seguire alla proposizione l'esempio seguente:

Dato il segmento a, allora la diagonale d di a^2 e la media proporzionale $\sqrt{d.a}$ sono grandezze della natura richiesta. Infatti d ed a sono incommensurabili nella 1ª potenza, a e $\sqrt{d.a}$ lo sono anche nella 2ª potenza.

11.

Se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima è commensurabile con la seconda, anche la terza sarà commensurabile con la quarta; e se la prima è incommensurabile con la seconda, anche la terza sarà incommensurabile con la quarta.

Siano a, b, c, d quattro grandezze proporzionali, tali che

$$a : b = c : d,$$

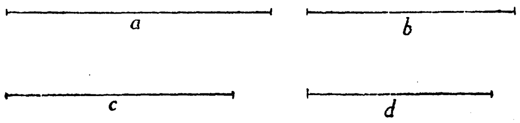
e sia a commensurabile con b; dico che sarà anche c commensurabile con d.

Infatti, poichè e è commensurabile con b, segue che a ha con b il rapporto che un numero ha con un numero [prop. 5]. Ma siccome

$$a : b = c : d,$$

anche c ha con d il rapporto che un numero ha con un numero; quindi c è commensurabile con d [prop. 6].

Sia invece a incommensurabile con b; dico che sarà anche c incommensurabile con d. Infatti, poichè a è incom-



mensurabile con b, segue che a non ha con b il rapporto che un numero ha con un numero [prop. 7].

Ma

$$a : b = c : d;$$

quindi neppure c ha con d il rapporto che un numero ha con un numero; perciò c è incommensurabile con d [prop. 8].

Dunque, se quattro grandezze, ecc...

Se

$$a : b = c : d,$$

allora da

$$a : b = m : n,$$

dove m e n sono numeri interi, segue

$$c : d = m : n.$$

E se

$$a : b \neq m : n,$$

allora

$$c : d \neq m : n.$$

Questa proposizione risale probabilmente a TEETETO.

CLAVIO mostra in un lemma a X, 11, come si possono trovare quanti si vogliano numeri che non stiano tra loro come numeri quadrati, p. es., tutti i numeri primi.

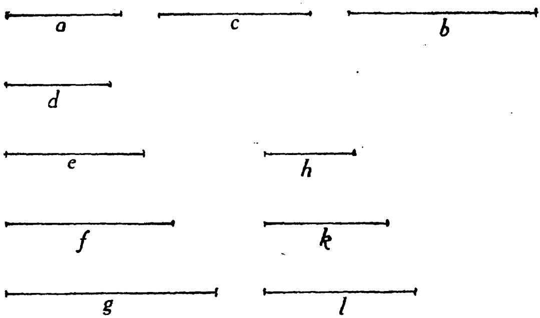
12.

Le grandezze che sono commensurabili con una stessa grandezza sono commensurabili anche fra loro.

Sia, infatti, ciascuna delle grandezze a, b commensurabile con c; dico che è anche a commensurabile con b.

Infatti, poichè a è commensurabile con c, segue che a ha con c il rapporto che un numero ha con un numero [prop. 5].

Abbia il rapporto che b ha con e. Inoltre, poichè c è



commensurabile con b, segue che c ha con b il rapporto che un numero ha con un numero [prop. 5]. Abbia il rapporto che f ha con g. E dati quanti si vogliano rapporti, per es. il rapporto di d ad e, e di f a g, si prendano i numeri h, k, l che siano ordinatamente nei dati rapporti [VIII. 4], dimodochè sia

$$d : e = h : k; \quad f : g = k : l.$$

Allora, poichè $a : c = d : e$, e anche $d : e = h : k$, segue che

$$a : c = h : k \qquad [V.\ 11].$$

Inoltre, poichè $c : b = f : g$ e anche $f : g = k : l$, segue che

$$c : b = k : l \qquad [V. 11].$$

Ma anche $a : c = h : k$; quindi *ex aequo*:

$$a : b = h : l \qquad [V. 22].$$

Quindi a ha con b il rapporto che il numero h ha con il numero b; perciò a è commensurabile con b [prop. 6].

Dunque, le grandezze commensurabili con una stessa grandezza, sono commensurabili anche fra loro; c. d. d.

Si abbia

$$a : c = m : n$$

$$c : b = p : q,$$

dove m, n, p, q sono numeri razionali.

Si trovi un numero razionale x, tale che si abbia

$$p : q = n : x.$$

Allora si avrà anche

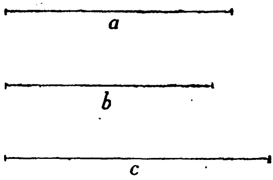
$$a : b = m : x.$$

13.

Se due grandezze sono commensurabili, e una di esse è incommensurabile con un'altra grandezza, anche la seconda è incommensurabile con questa.

Siano a, b due grandezze commensurabili, e una di esse, a, sia incommensurabile con un'altra grandezza c; dico che anche la seconda b è incommensurabile con c.

Se, infatti, fosse b commensurabile con c, mentre è anche a commensurabile con b, sarebbe anche a commensurabile con c [prop. 12]. Ma è anche incommensurabile;



il che è impossibile. Quindi a non è commensurabile con c; perciò è incommensurabile.

Dunque, se due grandezze sono commensurabili, ecc....

Lemma

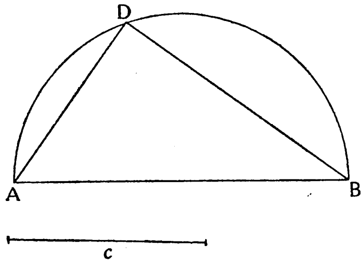
Date due rette disuguali, trovare di quanto il quadrato della maggiore supera il quadrato della minore.

Siano AB, c le due rette date disuguali, e AB la maggiore di esse; si deve trovare di quanto il quadrato di AB supera il quadrato di c.

Si descriva su AB il semicerchio ABD, e in esso si determini AD uguale a c [IV, 1], e si conduca DB. È manifesto che l'angolo ADB è retto [III, 3], e che il quadrato di AB supera il quadrato di AD, cioè di c, del quadrato di DB [I, 47].

Similmente poi, date due rette, si trova la retta il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati delle rette date nel modo seguente.

Siano AD, DB le due rette date, e si debba trovare la retta il cui quadrato sia uguale alla somma dei loro quadrati. Si pongano per ciò in modo che comprendano l'angolo retto formato da AD, DB, e si conduca AB; anche



ora è manifesto che AB è la retta, il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati di AD, DB [I, 47]; c. d. d.

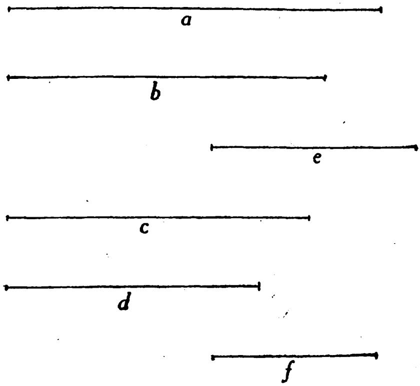
14.

Se quattro rette sono proporzionali, e il quadrato della prima supera il quadrato della seconda del quadrato di una retta ad essa (prima) commensurabile, anche il quadrato della terza supererà quello della quarta del quadrato di una retta ad essa (terza) commensurabile. E se il quadrato della prima supera il quadrato della seconda del quadrato di una retta a essa incommensurabile, anche il quadrato della terza supererà quello della quarta del quadrato di una retta ad essa incommensurabile.

Siano a, b, c, d quattro rette proporzionali, tali che

$$a : b = c : d,$$

e il quadrato di a superi quello di b del quadrato di e, e il quadrato di c superi quello di d del quadrato di f; dico che, se a è commensurabile con e, è anche c commensu-



rabile con f, e se a è incommensurabile con e, anche c è incommensurabile con f.

Infatti, poichè $a : b = c : d$, segue che anche

$$\text{quadrato } (a) : \textit{quadrato } (b) = \\ = \text{quadrato } (c) : \text{quadrato } (d) \qquad [\text{VII}, 11].$$

Ma

$$\text{quadrato } (a) = \text{quadrato } (e) + \text{quadrato } (b),$$
$$\text{quadrato } (c) = \text{quadrato } (d) + \text{quadrato } (f).$$

Quindi

$$\text{quadrato } (e) + \text{quadrato } (b) : \text{quadrato } (b) = \\ = \text{quadrato } (d) + \text{quadrato } (f) : \text{quadrato } (d),$$

Quindi, scomponendo [V, 17]:

$$\text{quadrato } (e) : \text{quadrato } (b) = \\ = \text{quadrato } (f) : \text{quadrato } (d);$$

quindi anche [VI, 22]:

$$e : b = f : d$$

e invertendo [V, 7 Cor.]:

$$b : e = d : f.$$

Ma anche

$$a : b = c : d$$

quindi *ex aequo* [V, 22]:

$$a : e = c : f$$

Dunque, se a è commensurabile con e, è anche c commensurabile con f; se a è incommensurabile con e, è anche c incommensurabile con f.

Dunque, se ecc....

Se

$$a : b = c : d,$$

allora si ha

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$$

e inoltre

$$\{(a^2 - b^2) + b^2\} : b^2 = \{(c^2 - d^2) + d^2\} : d^2.$$

Da qui, scomponendo, si ricava

$$(a^2 - b^2) : b^2 = (c^2 - d^2) : d^2,$$

e

$$\sqrt{a^2 - b^2} : b = \sqrt{c^2 - d^2} : d$$

e finalmente

$$a : \sqrt{a^2 - b^2} = c : \sqrt{c^2 - d^2}.$$

Questa proposizione, insieme con le altre 15 e 16 prepara un criterio per riconoscere la razionalità delle radici di un'equazione di 2° grado:

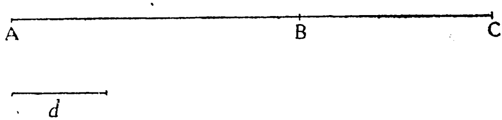
$$x^2 - ax + \frac{b^2}{4} = 0.$$

15.

Se due grandezze commensurabili si sommano, anche la somma sarà commensurabile con ciascuna di esse; e se la somma è commensurabile con una di esse, anche le grandezze primitive saranno commensurabili.

Infatti, si faccia la somma delle grandezze commensurabili AB, BC; dico che anche la somma AC è commensurabile con ciascuna delle grandezze AB, BC.

Infatti, poichè AB, BC sono commensurabili, una certa grandezza le misurerà. Sia d quella che le misura. Poichè



dunque d misura AB, BC, misurerà anche la somma AC. Ma misura anche AB, BC; quindi d misura AB, BC, AC; perciò AC è commensurabile con ciascuna delle grandezze AB, BC [Def. 1].

Sia ora AC commensurabile con AB; dico che anche AB, BC sono commensurabili.

Infatti, poichè AC, AB sono commensurabili, una certa grandezza le misurerà. Sia d quella che le misura. Poichè, dunque, d misura CA, AB, misurerà anche la restante BC. Ma misura anche AB; quindi d misurerà AB, BC; quindi AB, BC sono commensurabili [Def. 1].

Dunque, se due grandezze ecc....

Da

$$a = mc$$
$$b = nc$$

segue

$$a + b = (m + n)\ c$$

e

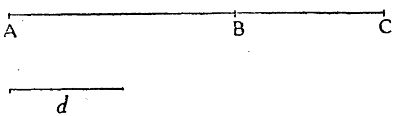
$$a - b = (m - n)\ c.$$

16.

Se due grandezze incommensurabili si sommano, anche la somma sarà incommensurabile con ciascuna di esse; e se la somma è incommensurabile con una di esse, anche le grandezze primitive saranno incommensurabili.

Date le grandezze incommensurabili AB, BC, si faccia la loro somma; dico che anche la somma AC è incommensurabile con ciascuna delle grandezze AB, BC.

Infatti, se CA, AB non fossero incommensurabili, le misurerebbe una certa grandezza. Sia d, se è possibile,



quella che le misura. Poichè, dunque, d misura CA, AB, misurerà anche la restante BC. Ma misura anche AB; perciò d misura AB, BC. Quindi AB, BC sono commensurabili; ma, per ipotesi, sono anche incommensurabili; e questo è impossibile. Quindi, nessuna grandezza misurerà CA, AB; dunque CA, AB sono incommensurabili. Allo stesso modo potremo dimostrare che anche AC, CB sono incommensurabili. Quindi AC è incommensurabile con ciascuna delle grandezze AB, BC.

Sia ora AC incommensurabile con una delle grandezze AB, BC. In primo luogo, sia incommensurabile con AB; dico che anche AB, BC sono incommensurabili. Infatti, se fossero commensurabili, le misurerebbe una certa grandezza. Sia d quella che le misurerebbe. Poichè, dunque, d misura AB, BC, misurerà anche la somma AC. Ma misura anche AB; quindi d misura CA, AB. Dunque CA, AB sono commensurabili; ma, per ipotesi, sono anche incommensurabili; e questo è impossibile. Quindi, nessuna grandezza misurerà AB, BC; perciò AB, BC sono incommensurabili.

Dunque, se due grandezze ecc....

La dimostrazione si fa per assurdo, in base al teorema precedente.

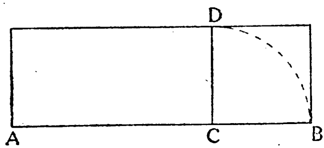
LEMMA

Se ad una retta si applica un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata, il parallelogrammo applicato è uguale al rettangolo contenuto dai due segmenti della retta risultanti dall'applicazione.

Infatti, alla retta AB si applichi il parallelogrammo AD, che sia in difetto del quadrato DB; dico che AD è uguale al rettangolo contenuto da AC, CB.

Ciò è chiaro per sè stesso; infatti, poichè DB è quadrato, è $DC = CB$, ed è rettangolo $(AD) =$ rettangolo $(AC, CD) =$ rettangolo (AC, CB).

Dunque, se ad una retta ecc....



Se a e x indicano segmenti, e si ha $x < a$, allora

$$ax - x^2 = (a - x)\ x.$$

In un secondo lemma, non accolto nell'edizione di Heiberg, si trova la risoluzione geometrica dell'equazione

$$x\,(a - x) = \frac{b^2}{4} \qquad (a > b)$$

Sopra il segmento a, come diametro, si costruisce un semicerchio, e sulla perpendicolare nel punto di mezzo di a si porta il segmento $\frac{b}{2}$. Per l'estremo di $\frac{b}{2}$ si tira la parallela ad a, e dal punto in cui questa incontra il cerchio si abbassa la perpendicolare su a, la quale incontrerà a nel punto cercato.

In CLAVIO si trova lo scolio seguente: Se si vuole dividere un segmento in due parti tali che l'area del rettangolo sopra esse costruito sia eguale all'area di un poligono dato, allora quest'ultima non deve superare l'area del quadrato costruito sopra la metà del segmento dato. In simboli algebrici, se si ha

$$x\,(a - x) = \frac{b^2}{4},$$

dove a è dato, deve aversi

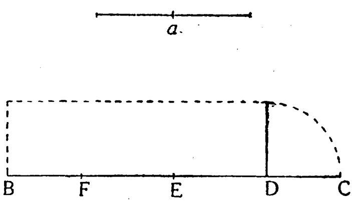
$$\frac{b^2}{4} \leq \frac{a^2}{4},$$

altrimenti l'equazione non è risolubile geometricamente (cioè x non è reale). Questo scolio fornisce dunque il criterio della *realità delle radici.*

CLAVIO osserva ancora che il secondo lemma è un caso speciale del problema risolto in VI, 28.

17.

Date due rette disuguali, se alla maggiore si applica un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato della minore e che divida la retta stessa in parti commensurabili in lunghezza, il quadrato della maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta con essa (*maggiore*) *commensurabile. — E, nel caso che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta con essa commensurabile, se si applica alla maggiore un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato della minore, questo la divide in parti commensurabili in lunghezza.*



Siano a, BC due rette disuguali, di cui sia BC la maggiore, e si applichi a BC un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato della minore, a, cioè al quadrato della metà di a, e sia questo parallelogrammo il rettangolo (BD, DC), e sia BD commensurabile in lunghezza con DC; dico che il quadrato di BC supera quello di a del quadrato di una retta con essa commensurabile.

Infatti, si divida BC in due parti uguali nel punto E si faccia DE uguale a EF. Quindi anche la restante DC è uguale a BF. E poichè la retta BC è stata divisa in parti uguali nel punto E e in parti disuguali nel punto D, ne segue che: rettangolo (BD, BC) + quadrato (ED) = = quadrato (EC) [II, 5], e lo stesso vale per i loro quadrupli; quindi il quadruplo del rettangolo (BD, DC) + + il quadruplo del quadrato (ED) = al quadruplo del quadrato (EC).

Ma

quadrato (a) = quadruplo del rettangolo (BD, DC)

e

quadrato (DF) = quadruplo del quadrato (DE),

perchè DF è doppio di DE; e

quadrato (BC) = quadruplo del quadrato (EC),

poichè BC è doppio di CE. Quindi

quadrato (a) + quadrato (DF) = quadrato (BC);

cosicchè il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di DF. Bisogna dimostrare che BC è anche commensurabile con DF. Infatti poichè BD è commensurabile in lunghezza con DC, è anche BC commensurabile in lunghezza con CD [prop. 15]. Ma CD è commensurabile in lunghezza con $CD + BF$; perchè CD è uguale a BF. Quindi anche BC è commensurabile in lunghezza con $BF + CD$ [prop. 12]; perciò BC è commensurabile in lunghezza anche con la restante FD [propos. 15]; quindi il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di una retta commensurabile con essa.

Ora, il quadrato di BC superi il quadrato di a del quadrato di una retta commensurabile con essa, e si applichi a BC un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato di a e sia esso il rettangolo (BD, DC); si deve dimostrare che BD è commensurabile in lunghezza con DC.

Infatti, con la stessa costruzione precedente, potremo dimostrare allo stesso modo che il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di FD. Ma il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di una retta con essa commensurabile. Quindi BC è commensurabile in lunghezza con FD; cosicchè BC è commensurabile in lunghezza anche con tutta la restante $BF + DC$ [prop. 15]. Ma la somma $BF + DC$ è commensurabile con DC [prop. 6]. Cosicchè BC è commensurabile in lunghezza anche con CD [prop. 12]; e quindi, sottraendo, BD è commensurabile in lunghezza con DC [prop. 15].

Dunque, date due rette disuguali ecc...

Nella prima parte della proposizione viene mostrato che la condizione necessaria affinchè la radice dell'equazione

$$ax - x^2 = \frac{b^2}{4} \qquad (a > b)$$

sia razionale, è che sia razionale il quoziente $a : \sqrt{a^2 - b^2}$.

Nella seconda parte si dimostra che questa condizione è anche sufficiente. La dimostrazione è fatta nel modo seguente:

Se a e b sono due segmenti ($a > b$), e se a è diviso in due parti x, $a - x$ tali che si abbia

$$(1) \qquad x(a-x) = \frac{b^2}{4},$$

allora dall'ipotesi che x sia commensurabile con $(a - x)$ si deduce che è commensurabile con $\sqrt{a^2 - b^2}$, e inversamente, se a è commensurabile con $\sqrt{a^2 - b^2}$, allora x è commensurabile con $(a - x)$.

Infatti, se si divide a in due parti eguali, e se dal punto di mezzo si porta in ambo le parti il segmento $\frac{a}{2} - x$, allora da II, 5 si deduce

$$x(a-x) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

e perciò $4x(a-x) + 4\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = a^2$. Tenendo conto della (1) si ricava

$$b^2 + (a-2x)^2 = a^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a-2x)^2,$$
$$\sqrt{a^2 - b^2} = a - 2x.$$

Se dunque x e $(a - x)$ sono commensurabili, allora secondo X, 15 si ha che a è commensurabile anche con x, quindi con $a - 2x$, cioè con $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Viceversa, se a è commensurabile con $\sqrt{a^2 - b^2}$, cioè con $a - 2x$, allora a è commensurabile con $2x$, con x, e quindi anche con $a - x$.

La discussione fatta sulle radici dell'equazione mostra con evidenza che quì si tratta di un'equazione *numerica* di 2° grado. Infatti la risoluzione dell'equazione generale di 2° grado è stata già svolta sotto forma geometrica nel libro VI°, dove però i coefficienti dell'equazione erano soggetti alla sola condizione naturale che le radici dell'equazione risultino reali e non negative (le radici negative sono state introdotte solo nel secolo 17°).

Ma la questione *della razionalità o meno delle radici* che è senza importanza nella costruzione geometrica di queste, è però essenziale, quando si tratta di una equazione numerica. Perciò questa questione viene posta solo nel X° libro, che è dedicato alla teoria dei numeri irrazionali.

Si può ritenere che l'equazione di 2° grado

$$a(a-x)=x^2,$$

che ha una parte importantissima nel X° libro, e corrisponde al problema geometrico della sezione aurea, abbia spinto già i Pitagorici ad occuparsi delle radici irrazionali delle equazioni di 2° grado. Secondo ZEUTHEN, anzi, si può ritenere con sicurezza, che i Pitagorici, occupandosi delle equazioni di 2° grado e applicando il teorema di Pitagora, siano stati condotti alla scoperta che tali equazioni portano ad irrazionali.

Molti autori antichi attribuiscono ai Pitagorici la scoperta del metodo di *applicazione delle aree,* che significa la risoluzione geometrica delle equazioni quadratiche. Ma per questo problema era necessario ai Pitagorici di definire *l'eguaglianza di aree* e, passando al calcolo numerico, *la grandezza* di un'area. Ora, essi sapevano, come già gli egiziani, che, assumendo come unità di area il quadrato costruito sull'unità di lunghezza, l'area di un rettangolo è eguale al prodotto dei due lati. Ma nel caso in cui i lati siano incommensurabili coll'unità di lunghezza, non solo la dimostrazione del detto teorema, che procede per divisione del rettangolo in quadrati, cade in difetto, ma il teorema stesso perde il suo significato. La difficoltà fu superata trattando geometricamente il concetto generale di grandezza e creando ciò che ZEUTHEN chiama un' « algebra geometrica », cioè un calcolo simbolico di cui EUCLIDE fa continuamente uso, ma che evidentemente ha origine assai più antica.

Questa astrazione nel considerare i problemi ravvicina notevolmente la trattazione di Euclide al metodo algebrico. L'uso delle lettere *a, b, c*... per indicare i segmenti e le aree, poi il fatto che il testo di EUCLIDE, che pur ricorre all'immagine geometrica, riesce completamente comprensibile anche senza la figura e perciò facilmente traducibile in linguaggio algebrico moderno, finalmente il prescindere dai valori numerici particolari per mezzo della simbolica geometrica, conferiscono effettivamente alla trattazione di Euclide il valore di una trattazione algebrica intrinseca.

Neppure i matematici posteriori, almeno DIOFANTO e gli arabi, sono riusciti a superare questo grado dell'astrazione matematica: una più alta generalità si raggiunge appena nel Rinascimento.

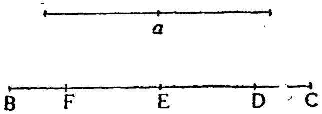
Solo la mancanza di un istrumento algebrico costringe talvolta EUCLIDE, come pure i suoi commentatori, a ricorrere agli esempi numerici, dove si lascia al lettore il compito della generalizzazione. Così p. es., EUCLIDE si limita nelle figure a considerare il doppio, o il triplo di un segmento, laddove il lettore facilmente si convince che la sostituzione di un'altro fattore nulla toglie alla validità della dimostrazione. Lo stesso fa DIOFANTO, e perfino FERMAT il quale, nelle quadrature che noi adesso indichiamo col simbolo $\int x^{\frac{p}{q}} dx$ attribuisce a p e q i valori 1, 2 o 2, 3, adoperando però questi numeri in modo da non lasciar nessun dubbio circa la validità generale del risultato.

18.

Date due rette disuguali, se si applica alla maggiore un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato della minore e che divida la retta stessa in parti incommensurabili, il quadrato della maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta con essa (maggiore) incommensurabile. — E, nel caso che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta con essa incommensurabile, se si applica alla maggiore un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato della minore, questo la divide in parti incommensurabili.

Siano a, BC due rette disuguali, di cui sia BC la maggiore, e si applichi a BC un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte della minore, a, e sia esso il rettangolo (BD, DC) [cfr. il Lemma alla precedente prop. 17] e sia BD incommensurabile in lunghezza con DC; dico che il quadrato di BC supera quello di a del quadrato di una retta con essa incommensurabile.

Infatti, con la stessa costruzione precedente, potremo dimostrare allo stesso modo che il quadrato di BC supera



il quadrato di a del quadrato di FD. Bisogna dimostrare che BC è incommensurabile in lunghezza con DF. Infatti, è anche BC incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 16]. Ma DC è commensurabile con la somma $BF + DC$ [prop. 6]; quindi anche BC è incommensurabile con la somma $BF + DC$ [prop. 13]. Cosicchè anche la restante FD è incommensurabile in lunghezza con BC [prop. 13]. Allora anche la restante FD è incommensurabile in lunghezza con BC [prop. 16]. Ma il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di FD; quindi il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di una retta con essa incommensurabile.

Ora, il quadrato di BC superi il quadrato di a del quadrato di una retta con essa incommensurabile, e si applichi a BC un parallelogrammo che sia in difetto di una figura quadrata e uguale alla quarta parte del quadrato di a, e sia esso il rettangolo (BD, DC). Si deve dimostrare che BD è incommensurabile in lunghezza con DC.

Infatti, con la stessa costruzione precedente, allo stesso modo potremo dimostrare che il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di FD. Ma il quadrato di BC supera il quadrato di a del quadrato di una retta con essa incommensurabile. Quindi BC è incommensurabile in lunghezza con FD; cosicchè BC è incommensurabile in lunghezza anche con tutta la restante $BF + DC$ [prop. 16]. Ma la somma $BF + DC$ è commensurabile in lunghezza con DC [prop. 6]; quindi BC è incommensurabile anche con DC [prop. 13]; perciò, sottraendo, anche BD è incommensurabile in lunghezza con DC [prop. 16].

Dunque, date due rette ecc....

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 17, e stabilisce la condizione necessaria e sufficiente affinchè le radici della detta equazione di 2° grado siano irrazionali. E precisamente EUCLIDE dimostra che, se

$$x + y = a,$$
$$xy = \frac{b^2}{4},$$

allora, quando x è incommensurabile con y, anche a è incommensurabile con $\sqrt{a^2 - b^2}$, e viceversa.

Fino a questo punto EUCLIDE ha parlato di grandezze commensurabili e incommensurabili. Adesso incomincerà a trattare dei razionali ed irrazionali, secondo il senso euclideo, indicato nella def. 3, e specificato nel lemma seguente.

Lemma

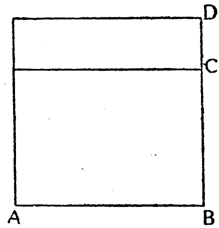
Essendo stato già dimostrato che le rette commensurabili in lunghezza sono sempre commensurabili anche in potenza, e che le rette commensurabili in potenza non sono sempre commensurabili anche in lunghezza, ma possono in lunghezza essere commensurabili o incommensurabili, è chiaro che, se una retta è commensurabile con una data retta razionale, essa può chiamarsi razionale e commensurabile con questa non solo in lunghezza, ma anche in potenza, poichè le rette commensurabili in lunghezza sono tali sempre anche in potenza. Se poi una retta è commensurabile in potenza con una data retta razionale, se lo è anche in lunghezza, si dice anche in questo caso che è razionale e commensurabile con quella in lunghezza e in potenza; se invece una retta commensurabile in potenza con una data retta razionale, è con questa incommensurabile in lunghezza, si dice anche in questo caso razionale ma commensurabile soltanto in potenza.

19

Il rettangolo contenuto da rette razionali fra loro commensurabili in lunghezza [*secondo uno dei modi predetti*] *è razionale.*

Infatti, sia il rettangolo AC contenuto dalle rette razionali commensurabili in lunghezza AB, BC; dico che AC è razionale.

Si descriva, infatti, su AB il quadrato AD; allora AD è razionale. E poichè AB è commensurabile in lun-



ghezza con BC, ed AB è uguale a BD, è anche BD commensurabile in lunghezza con BC. E inoltre

$$DA : AC = BD : BC \qquad [VI, 1].$$

Quindi DA è commensurabile con AC [prop. 11]. Ma DA è razionale; quindi è razionale anche AC [Def. 4].

Dunque, il rettangolo contenuto da rette razionali ecc...

Se a e b sono razionali (nel senso più generale d'Euclide) e se si ha

$$a : b = m : n,$$

allora il prodotto $a \,.\, b$ è razionale.

Infatti da $a : b = m : n$, segue per VI, 1

$$a^2 : ab = a : b,$$

ossia

$$a^2 : ab = m : n,$$

Siccome, a essendo razionale, si ha [X, def. 4] che anche a^2 è razionale, si deduce che $a \,.\, b$ è razionale.

Commandino a questo punto svolge la dimostrazione del teorema:

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

basandosi sulla relazione geometrica tra il rettangolo $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$ ed i quadrati costruiti sopra i suoi lati.

Dalla figura risulta

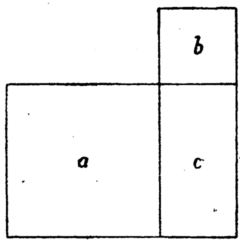
$$c = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b},$$

e

$$a : c = c : b.$$

Quindi effettivamente

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}:$$



20.

Se un'area razionale è applicata a una retta razionale, essa ha per larghezza una retta razionale e commensurabile con quella a cui è applicata.

Infatti, l'area razionale AC sia applicata alla retta AB razionale in uno dei modi già detti, ed abbia per larghezza BC; dico che BC è razionale e commensurabile in lunghezza con BA.

Si descriva, infatti, su AB il quadrato AD; quindi AD è razionale [Def. 4]. Ma anche AC è razionale; quindi DA è commensurabile con AC. Ed inoltre:

[VI, 1].

Allora DB è commensurabile con BC [prop. 11]; ma DB è uguale a BA; quindi anche BC è razionale e commensurabile in lunghezza con AB [Def. 3].

Dunque, se un'area razionale ecc....

Se il prodotto ab è razionale, cioè se si ha

$$ab : a^2 = m : n \qquad \text{(X, Def. 4)},$$

dove a è razionale, allora si ha anche

$$b : a = m : n ,$$

ossia anche il secondo fattore b è razionale.

In uno scolio CLAVIO mostra come si possano costruire quanti si vogliano segmenti b, c, d,... ecc., che siano commensurabili con quello dato a solo nella 2ª potenza.

Per questo scopo, si ponga

$$a^2 : b^2 : c^2 : d^2 : ... = 3 : 5 : 7 : 11 : ...$$

dove nel 2° membro si considerano soltanto numeri primi. Che il rapporto di due numeri primi non può essere eguale al rapporto di due quadrati, CLAVIO dimostra nel modo seguente: Se due numeri primi fossero nel rapporto di due quadrati, allora essi si comporterebbero come numeri piani simili (VIII, 26), e perciò uno di essi dovrebbe dividere il secondo, ciò che è impossibile.

Con questo CLAVIO dimostra che $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$,.... sono irrazionalità di classi differenti.

21.

Il rettangolo contenuto da rette razionali commensurabili soltanto in potenza è irrazionale, e il lato del quadrato *ad esso equivalente è irrazionale. Si chiami questo linea mediale.*

Sia il rettangolo AC contenuto dalle rette razionali AB, BC commensurabili soltanto in potenza; dico che AC è irrazionale, e che il lato del quadrato ad esso equivalente è irrazionale; si chiami questo linea mediale.

Si descriva infatti su AB il quadrato AD; quindi AD è razionale [Def. 4]. E poichè AB è incommensurabile in lunghezza con BC, poichè per ipotesi AB e BC sono commensurabili soltanto in potenza, ed è AB uguale a BD, segue che DB è incommensurabile in lunghezza con BC. Inoltre

$$DB : BC = AD : AC; \qquad \text{[VI, 1]}$$

quindi DA è incommensurabile con AC [prop. 11]. Ma DA è razionale; quindi AC è irrazionale [Def. 4]; e perciò anche il lato del quadrato equivalente ad AC è irrazionale; questo si chiami linea mediale; c. d. d.

Lemma

Date due rette, la prima sta alla seconda, come il quadrato della prima sta al rettangolo delle due rette.

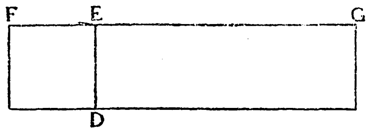
Siano FE, EG due rette. Dico che

$$FE : EG = \text{quadrato } (FE) : \text{rettangolo } (FE, EG).$$

Si descriva infatti su FE il quadrato DF, e si completi GD. Allora, poichè:

$$FE : EG = FD : DG \qquad \text{[VI, 1]}$$

ed $FD =$ quadrato (FE), $DG =$ rettangolo $(DE, EG) =$ $=$ rettangolo (FE, EG), segue che



$$FE : EG = \text{quadrato } (FE) : \text{rettangolo } (FE, EG).$$

Similmente anche, come il rettangolo (FE, EG) sta al quadrato (EF), cioè come GD sta a FD, così GE sta ad EF; c. d. d.

Se il rapporto $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$: è irrazionale, cioè

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n,$$

qualunque siano i numeri razionali m e n, allora, essendo

$$\alpha : \sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta},$$

si ha anche

$$\alpha : \sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} \neq m . n;$$

cioè, se α è razionale, $\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta}$ è irrazionale, e perciò è irrazionale anche $\sqrt{\sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta}} = \sqrt[4]{\gamma}$. La quantità $\sqrt[4]{\gamma}$ si chiama mediale.

La mediale è dunque *la media geometrica tra due grandezze commensurabili solo nella 2ª potenza,* ed è sempre irrazionale.

Campano rileva che il quadrato di una mediale è irrazionale e che tale quadrato può dirsi *prodotto mediale*, perchè eguale alla media geometrica dei due quadrati i cui lati sono commensurabili solo nella seconda potenza.

Michele Stiefel nella sua *Arithmetica integra* dice: Estraendo la radice quadrata da un numero non quadrato, si ottiene un quadrato mediale. E analogamente estraendo la radice cubica da un numero razionale, che non sia un cubo esatto, si ottiene il cubo mediale, ecc.

CLAVIO osserva che l'inverso del teorema precedente non vale, cioè un prodotto mediale non è necessariamente il prodotto di due grandezze razionali commensurabili nella 2^a potenza, ma può essere eguale anche al prodotto di due grandezze irrazionali, p. es. al prodotto di due mediali.

COMMANDINO dà l'esempio: 2 e $\sqrt{8}$. Il loro prodotto mediale è $\sqrt{32}$, la sua radice quadrata $\sqrt[4]{32}$ è la mediale ed è irrazionale.

Per la concezione e la simbolica moderna «il prodotto mediale» $\alpha\sqrt{\beta}$ «grandezza razionale commensurabile coll'unità nella seconda potenza», e $\sqrt{\beta}$, sono la medesima cosa, e cioè sono radici quadrate sopra numeri non quadrati. EUCLIDE invece nella sua simbolica geometrica ha bisogno di questa distinzione, perchè della prima espressione, che è un'area, egli sa estrarre la radice quadrata mentre della seconda, che è una lunghezza, non lo sa fare.

Osserviamo ancora, in relazione alla prop. 17, che se le due radici dell'equazione sono incommensurabili, cioè razionali e commensurabili nella seconda potenza, allora il coefficiente $\frac{b^2}{4}$ si presenta come un prodotto mediale.

Infine notiamo che del lemma

$$a : b = a^2 : ab$$

si è fatto già uso nelle proposizioni 19, 20, 21.

22.

Il quadrato di una retta mediale applicato a una retta razionale ha come larghezza una retta razionale, incommensurabile in lunghezza con quella a cui è applicato.

Sia a mediale, CB razionale, e si applichi a BC il rettangolo BD, uguale al quadrato di a, avente per larghezza

CD; dico che CD è razionale e incommensurabile in lunghezza con CB.

Infatti, poichè a è mediale, il suo quadrato è equivalente al rettangolo contenuto da rette razionali, commensurabili soltanto in potenza [prop. 21]; sia il suo quadrato equivalente a GF. Ma il suo quadrato è equivalente anche a BD; quindi BD è equivalente a GF. Ma essi sono equiangoli; e in parallelogrammi equivalenti ed equiangoli i lati che comprendono angoli uguali sono inversamente proporzionali [VI, 14]; quindi si ha la proporzione:

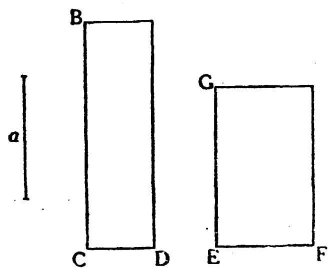
$$BC : EG = EF : CD.$$

Quindi anche:

$$\text{quadrato } (BC) : \text{quadrato } (EG) = \text{quadrato } (EF) : \text{quadrato } (CD)$$

[VI, 20-22].

Ma il quadrato di CB è commensurabile con il quadrato di EG, essendo ambedue queste rette razionali;



quindi anche il quadrato di EF è commensurabile con il quadrato di CD [prop. 11]. Ma il quadrato di EF è razionale; perciò è razionale anche il quadrato di CD [Def. 4].

Quindi CD è razionale; e poichè EF è incommensurabile in lunghezza con EG, essendo esse rette commensurabili soltanto in potenza, ed inoltre

$$EF : EG = \text{quadrato } (EF) : \text{rettangolo } (FE, EG)$$
[cfr. Lemma],

segue che il quadrato di EF è incommensurabile con il rettangolo FE, EG [prop. 11]. Ma il quadrato di CD è commensurabilt con il quadrato di EF, essendo tali rette commensurabili in potenza, e il rettangolo delle rette DC, CB è commensurabile con il rettangolo delle rette FE, EG, essendo questi rettangoli equivalenti al quadrato di a; quindi anche il quadrato di CD è incommensurabile con il rettangolo delle rette DC, CB [prop. 13]. Ma

$$\text{quadrato } (CD) : \text{rettangolo } (DC, CB) = DC : CB$$
[cfr. Lemma],

quindi DC è incommensurabile in lunghezza con CB [prop. 11].

Dunque, CD è razionale ed incommensurabile in lunghezza con CB. c. d. d.

In questa proposizione si tratta di dimostrare che, essendo data una mediale $\sqrt[4]{\gamma}$ e una lunghezza $\sqrt{\alpha}$ razionale, cioè commensurabile coll'unità o nella prima o nella seconda potenza, si può sempre scrivere

$$\sqrt[4]{\gamma} = \sqrt{\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}} \tag{1}$$

dove $\sqrt{\beta}$ è una lunghezza anch'essa razionale, ma tale però che

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n \quad (m,\ n \text{ numeri razionali}).$$

Per la definizione della mediale (prop. 21) si ha

$$\left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2 = \sqrt{\delta} \,.\, \sqrt{\varepsilon}$$

dove $\sqrt{\delta}$ e $\sqrt{\varepsilon}$ sono lunghezze razionali (nel senso di EUCLIDE), tali però che

$$\sqrt{\delta} : \sqrt{\varepsilon} \neq m : n.$$

Dalla (1) segue

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon} : \sqrt{\beta},$$

e quindi

$$\alpha : \delta = \varepsilon : \beta,$$

e siccome α, δ, ε sono commensurabili nella prima potenza coll'unità, anche β lo è, e quindi $\sqrt{\beta}$ è razionale. Siccome poi si ha

$$\sqrt{\delta} : \sqrt{\varepsilon} = \delta : (\sqrt{\delta} \,.\, \sqrt{\varepsilon}),$$

si ha anche

$$\delta : (\sqrt{\delta} \,.\, \sqrt{\varepsilon}) \neq m : n,$$

ossia

$$\delta : (\sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}) \neq m : n.$$

Ma

$$\alpha : \delta = m : n,$$

perciò

$$\alpha : (\sqrt{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}) \neq m : n$$

e quindi

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n, \qquad \text{c. d. d.}$$

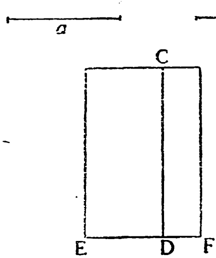
Un prodotto mediale si può dunque sempre rappresentare come un prodotto di due lunghezze razionali, commensurabili solo nella 2ª potenza, uno dei fattori potendosi scegliere ad arbitrio.

23.

Una retta commensurabile con una mediale è mediale.

Sia a una retta mediale e sia b una retta commensurabile con a; dico che anche b è mediale.

Infatti, si scelga una retta razionale CD, e si applichi a CD il rettangolo CE equivalente al quadrato di a, avente per larghezza ED; quindi ED è razionale e incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 22]. Si applichi poi a CD il rettangolo CF equivalente al quadrato di b, avente per larghezza DF. Ora, poichè a è commen-



surabile con b, anche il quadrato di a è commensurabile con il quadrato di b. Ma

$$\text{rettangolo } (EC) = \text{quadrato } (a);$$
$$\text{rettangolo } (CF) = \text{quadrato } (b);$$

quindi EC è commensurabile con CF.

Inoltre:

$$\text{rettangolo } (EC) : \text{rettangolo } (CF) = ED : DF$$

[VI, 1];

quindi ED è commensurabile in lunghezza con DF

[prop. 11]. Ma ED è razionale e incommensurabile in lunghezza con DC; quindi anche DF è razionale [Def. 3] e incommensurabile in lunghezza con DC [prop. 13]; dunque CD, DF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza. Ma la retta, il cui quadrato è equivalente al rettangolo di due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, è mediale. Quindi, la retta il cui quadrato è equivalente al rettangolo della retta CD, DF è mediale. Ma il quadrato di b è equivalente al rettangolo delle rette CD, DF; dunque b è mediale.

COROLLARIO.

Da quanto precede appare che una superficie commensurabile con una superficie mediale è mediale.

LEMMA.

Analogamente a quanto è stato detto per le rette razionali [cfr. Lemma prop. 18], segue anche per le rette mediali che una retta commensurabile con una mediale si dice mediale e commensurabile con quella non solo in lunghezza, ma anche in potenza; giacchè in generale le rette commensurabili in lunghezza sono tali sempre anche in potenza.

Se poi una retta è commensurabile in potenza con una mediale, se lo è anche in lunghezza, le rette si dicono anche in questo caso mediali e commensurabili in lunghezza e potenza; se invece è (commensurabile) soltanto in potenza, esse si dicono mediali commensurabili soltanto in potenza.

Se $\sqrt[4]{\alpha}$ è una mediale e se si ha

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : x^2 = m : n ,$$

allora si ha

$$x = \sqrt[4]{\beta} ,$$

cioè anche x è una mediale.

Infatti, si abbia (X, 21) $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 = \sqrt{\gamma} \, . \, \sqrt{\delta}$, dove

(1) $$\sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta} \mp m : n ,$$

e $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ sono razionali (commensurabili coll'unità nella prima o anche nella seconda potenza). Si ponga

$$x^2 = \sqrt{\gamma} \, . \, y ,$$

allora si avrà

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : x^2 = \sqrt{\delta} : y$$

e quindi

(2) $$\sqrt{\delta} : y = m : n ;$$

si deduce che y è razionale, cioè

$$y = \sqrt{\varepsilon} .$$

Da (1) e (2) segue

$$\sqrt{\gamma} : \sqrt{\varepsilon} \mp m : n ,$$

e quindi $x = \sqrt{\sqrt{\gamma} \, . \, \sqrt{\varepsilon}}$ è della forma $\sqrt[4]{\beta}$, cioè anche x è una mediale, c. d. d.

Nel corollario si aggiunge che se x^2 è commensurabile col prodotto mediale $\left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2$, allora x^2 è anche un prodotto mediale; ciò segue appunto dalla decomposizione $x^2 = \sqrt{\gamma} \, . \, \sqrt{\varepsilon}$.

In questo corollario EUCLIDE introduce per la prima volta il concetto di prodotto mediale.

CLAVIO osserva in un scolio che esistono mediali incommensurabili tra di loro, sia nella prima sia nella seconda potenza.

STIEFEL fa in proposito 3 esempi:

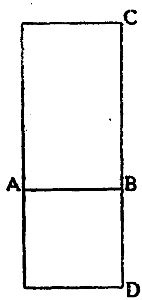
Data la mediale $\sqrt[4]{6}$, la mediale $\sqrt[4]{96}$ è commensurabile con essa nella prima potenza, $\sqrt[4]{24}$ è commensurabile solo nella seconda potenza, mentre $\sqrt[4]{12}$ non è commensurabile con $\sqrt[4]{6}$ nè nella prima nè nella seconda potenza.

24.

Il rettangolo contenuto da rette mediali commensurabili in lunghezza secondo uno dei modi predetti [cfr. Lemma preced.] è *mediale.*

Infatti, sia il rettangolo AC contenuto dalle rette mediali AB, BC commensurabili in lunghezza; dico che AC è mediale.

Si descriva infatti su AB il quadrato AD: esso è me-



diale. E poichè AB è commensurabile in lunghezza con BC, e AB è uguale a BD, anche DB è commensurabile in lunghezza con BC; perciò anche DA è commensurabile con AC [VI, 1; prop. 11]. Ma DA è mediale; quindi anche AC è mediale [prop. 23, Coroll.]; c. d. d.

Se si ha

$$\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} = m : n,$$

dove $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali ed m, n sono numeri razionali, allora $\sqrt[4]{\alpha}\ \sqrt[4]{\beta}$ è un prodotto mediale.

Infatti, si ha

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \left(\sqrt[4]{\alpha} \,.\, \sqrt[4]{\beta}\right) = \sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} = m : n\,.$$

Quindi, essendo $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ un prodotto mediale, anche $\sqrt[4]{\alpha} \,.\, \sqrt{\beta}$ è, per la prop. 23, un prodotto mediale.

Conveniamo dunque in seguito di indicare con le lettere α, β, γ,... m, n,... grandezze e numeri propriamente razionali, cioè commensurabili coll'unità nella prima potenza, con

$$\sqrt{\alpha}\,,\ \sqrt{\beta}\,,\ \sqrt{\gamma}\,,\ldots$$

grandezze razionali (in senso euclideo) commensurabili coll'unità solo nella seconda potenza, con

$$\sqrt[4]{\alpha}\,,\ \sqrt[4]{\beta}\,,\ \sqrt[4]{\gamma}$$

mediali, e infine i prodotti mediali con

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2,\ \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2,\ \left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2,\ldots$$

i quali non differiscono in sostanza da

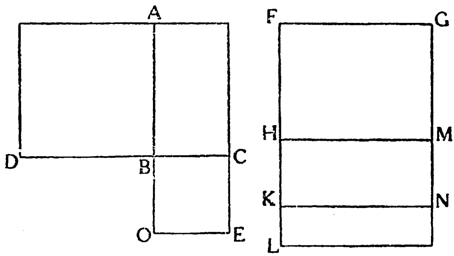
$$\sqrt{\alpha}\,,\ \sqrt{\beta}\,,\ \sqrt{\gamma}\,,\ldots$$

25.

Il rettangolo contenuto da rette mediali commensurabili soltanto in potenza, o è razionale o è mediale.

Sia infatti il rettangolo AC contenuto dalle mediali AB, BC commensurabili soltanto in potenza: dico che AC o è razionale o è mediale.

Si descrivano infatti su AB, BC, i quadrati AD, BE. Così ciascuno degli AD, BE è mediale; si tracci la retta



razionale FG, e ad essa si applichi il rettangolo GH, equivalente al quadrato AD, di larghezza FH; e alla retta HM si applichi il rettangolo MK equivalente al rettangolo AC, di larghezza HK e inoltre in modo simile alla retta KN si applichi NL, di larghezza KL. Così FH, HK, KL sono su di una stessa retta; e poichè ciascuno degli AD, BE è mediale, e AD è uguale a GH, BE è uguale a NL, anche ciascuno dei GH, NL è mediale: ma sono applicati sulla retta razionale FG; perciò ciascuna delle FH, KL è razionale e incommensurabile in lunghezza con la FG [prop. 22]. Inoltre, poichè AD,

BE sono commensurabili, anche GH, NL, saranno commensurabili. Ma $GH : NL = FH : KL$ [VI. 1]. Così FH, KL sono commensurabili in lunghezza [prop. 11]: quindi FH, KL sono razionali e commensurabili in lunghezza. Perciò $FH \times GL$ è razionale [prop. 19].

E poichè $DB = BA$, $OB = BC$, sarà $DB : BC = AB : BO$. Ma $DB : BC = DA : AC$ [VI, 1] e a $AB : BO = AC : CO$ [VI, 1]. Perciò $DA : AC = AC : CO$.

Ma $AD = GH$, $AC = MK$, e $CO = NL$, dunque $GH : MK = MK : NL$.

Perciò anche $FH : HK = HK : KL$ [VI, 1]: così $FH = KL$ è uguale HK^2 [VI, 17]. Ma $FH \times KL$ è razionale; perciò anche HK^2 è razionale. Così HK è razionale; e se è commensurabile in lunghezza con la retta FG, HN è razionale [prop. 19]. Se invece è incommensurabile in lunghezza con la retta FG, le KH, HM sono razionali commensurabili soltanto in potenza. Perciò HN è mediale [prop. 21]. Quindi HN o è razionale o è mediale. Ma $HN = AC$; perciò AC o è razionale o è mediale.

Dunque un rettangolo ecc.

Se si ha

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = m : n\,,$$

allora il prodotto $\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta}$ *è razionale o è un prodotto mediale.*

Euclide lo dimostra nel modo seguente:

Sia δ un numero razionale arbitrario.

Allora si ha (X, 22)

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 = \delta\,.\,\sqrt{\varepsilon}$$

e

$$\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\beta}=\delta\,.\,x$$

$$\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\delta\sqrt{\eta}\,.$$

Quindi

$$\delta\sqrt{\varepsilon}:\delta\sqrt{\eta}=\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2:\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2,$$

ossia (X, 11) $\sqrt{\varepsilon}:\sqrt{\eta}=m:n$ e quindi (X, 19) il prodotto $\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\eta}$ è razionale.

Da

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2:\left(\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\beta}\right)=\left(\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\beta}\right):\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2,$$

segue $\sqrt{\varepsilon}:x=x:\sqrt{\eta}$, e quindi

$$x^2=\sqrt{\varepsilon}\,.\,\sqrt{\eta},$$

cioè x^2 è razionale. Dunque x è commensurabile coll'unità o nella prima o nella seconda potenza, cioè

$$x=k$$

o

$$x=\sqrt{k}\,.$$

Nel primo caso si ha che $\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta}=\delta k$ è razionale (X, 19), nel secondo caso

$$\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\beta}=\delta\,\sqrt[4]{k}$$

è un prodotto mediale (X, 21).

Commandino illustra la proposizione con alcuni esempi:

(1) $$\sqrt[4]{54}\,\sqrt[4]{26}=\sqrt[2]{3\,.\,\sqrt{2\,.\,3}\,.}\,\sqrt[2]{2\,.\,\sqrt{2\,.\,3}}=6;$$

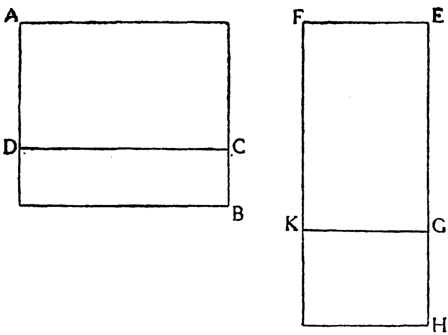
(2) $$\sqrt[4]{128}\,.\,\sqrt[4]{72}=\sqrt{2^5\,.\,3}\,.$$

Più in generale si ha $\sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta}\,\sqrt[4]{\alpha}=\sqrt{\alpha\beta}\,.$

26.

Una superficie mediale non supera un'altra superficie mediale di una superficie razionale.

Infatti, se è possibile, la superficie mediale AB superi la mediale AC della razionale DB, e sia data la razio-



nale EF alla quale si applichi il parallelogrammo rettangolo FH, di larghezza EH, equivalente ad AB; e si sottragga FG equivalente ad AC. Così rimarrà $BD = KH$: ma DB è razionale. Così anche KH è razionale; e poichè ciascuna delle AB, AC è mediale e $AB = FH$, $AC = FG$, anche ciascuno degli FH, FG è mediale; e sono applicati sulla retta razionale EF; dunque ciascuna delle HE, EG è razionale e incommensurabile in lunghezza con la retta EF [prop. 22]. E poichè DB è razionale ed equivalente ad HK, anche KH è razionale; ed è applicato alla retta razionale EF; così GH è razionale e commensurabile in lunghezza colla EF [propos. 20]. Ma anche FG è razionale e incommensurabile in lunghezza con la EF; perciò EG, GH sono incommensurabili in lunghezza [prop. 23].

Ma $EG : GH = EG^2 : EG \times GH$ [prop. 21, Lemma].

Perciò $EG^2, EG \times GH$ sono incommensurabili [prop. 11]: ma $EG^2 + GH^2$ è commensurabile con EH^2 perchè ciascuno dei due è razionale, e il doppio di $EG \times GH$ è commensurabile con la superficie $EG \times GH$ [prop. 6]: infatti è il suo doppio e così $EG^2 + GH^2$ e il doppio di $EG \times GH$ sono incommensurabili [prop. 23]. Quindi anche $EG^2 + GH^2 + 2EG \times GH$, cioè EH^2 [II, 4] è incommensurabile con $EG^2 + GH^2$ [prop. 16]. Ma $EG^2 + GH^2$ è razionale perciò EH^2 è irrazionale [def. 4]. Quindi EH è irrazionale. Dunque non può essere razionale.

Dunque una superficie mediale non supera un'altra mediale di una superficie razionale; c. d. d.

La differenza di due prodotti mediali non può essere razionale:

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 \neq \gamma .$$

La dimostrazione si fa per assurdo.

Se fosse

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma , \tag{1}$$

allora, posto (X, 22)

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 = \delta \sqrt{\varepsilon} , \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \delta \sqrt{\eta} .$$

dove δ è razionale e arbitrario; e posto ancora

$$\gamma = \delta k ,$$

si dedurrebbe dalla (1)

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\eta} + k ,$$

ossia

$$\varepsilon = \eta + k^2 + 2k\sqrt{\eta} .$$

La somma di queste tre aree è irrazionale, cioè incommensurabile con la somma delle due aree razionali $(\eta + k^2)$. Infatti si ha:

$$\eta : k\sqrt{\eta} = \sqrt{\eta} : k = \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 : \gamma ,$$

quindi $\eta : k\sqrt{\eta} \neq m : n$. Invece si ha evidentemente

$$(\eta + k^2)^2 : \eta = m : n ,$$

e quindi $$(\eta + k^2) : 2k\sqrt{\eta} \neq m : n .$$

Dunque

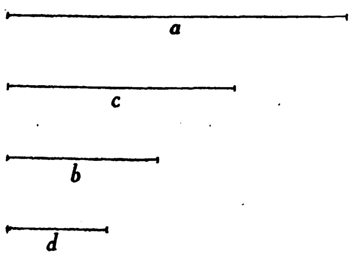
$$(\eta + k^2 + 2k\sqrt{\eta}) : (\eta + k^2) \neq m : n .$$

Si deduce che l'area ε è irrazionale e quindi che anche $\sqrt{\varepsilon}$ è irrazionale, ciò che contradice all'ipotesi. Si conclude così che la (1) non può aver luogo.

27.

Trovare delle rette mediali, commensurabili soltanto in potenza e comprendenti una superficie razionale.

Si pongano le a, b, commensurabili soltanto in potenza, e sia c la loro media proporzionale [VI, 12]. Poichè a, b



sono razionali, commensurabili soltanto in potenza, $a \times b$, cioè c^2, è mediale [prop. 21]; allora anche c è mediale [prop. 21]. E poichè $a : b = c : d$, ed a, b sono commensurabili solo in potenza, anche c, d sono commensurabili solo in potenza [prop. 11]. Ma c è mediale: dunque anche d è mediale [prop. 23]. Perciò c, d sono mediali, commensurabili solo in potenza. Dico ch'esse comprendono una superficie razionale. Infatti, poichè $a:b = c:d$, permutando [V, 16] $a : c = b : d$. Ma $a : c = c : b$, perciò anche $c : b = b : d$ [V, 11]. Così $c \times d = b^2$ [VI, 17]. Ma b^2 è razionale, quindi anche $c \times d$ è razionale.

Dunque sono state trovate delle rette mediali, commensurabili solo in potenza, che comprendono una superficie razionale; c. d. d.

Trovare due mediali x e y commensurabili solo nella 2ª potenza e tali che il prodotto xy sia razionale.

Si considerino due grandezze razionali $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, commensurabili coll'unità nella prima o nella seconda potenza, e tali che si abbia

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n .$$

Si avrà anche evidentemente

$$\alpha : \beta \neq m : n ,$$

essendo m, n numeri interi diversi dai precedenti.

Si determini x dalla proporzione

$$\sqrt{\alpha} : x = x : \sqrt{\beta}$$

e si ponga

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = x : y .$$

Si avrà allora

$$x^2 = \sqrt{\alpha} . \sqrt{\beta} ,$$

cioè x^2 è un prodotto mediale, e x è una mediale. Inoltre si avrà

$$x : y \not\models m : n\,,$$
$$x^2 : y^2 = m : n$$

Quindi anche y^2 è una mediale (X, 23) commensurabile con x solo nella 2^a potenza.

Da

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = x : y$$

ossia

$$\sqrt{\alpha} : x = \sqrt{\beta} : y\,,$$

e da

$$\sqrt{\alpha} : x = x : \sqrt{\beta}\,,$$

si deduce

$$x : \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} : y$$

ossia

$$(\sqrt{\beta})^2 = x\,y\,.$$

Quindi xy è razionale, c. d. d. Così per esempio se le due grandezze di partenza sono α e $\sqrt{\beta}$, si ottiene

$$x = \sqrt{\alpha\sqrt{\beta}}\quad,\quad y = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\beta}}\,.$$

Se invece le grandezze sono $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ allora si avrà

$$x = \sqrt{\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}}\,,\quad y = \sqrt{\beta\,\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}}\,.$$

Dalle proposizioni 24-27 segue che nelle due equazioni

$$xy = A$$
$$x^2 - y^2 = B$$

che corrispondono ad una equazione di 4° grado, si possono presentare i casi seguenti in quanto alla irrazionalità o meno delle radici:

1) x e y sono razionali, commensurabili nella prima potenza. Allora A e B debbono essere razionali.

2) x e y sono razionali, commensurabili però solo nella seconda potenza (con l'unità). In questo caso A deve essere un prodotto mediale, B deve essere razionale.

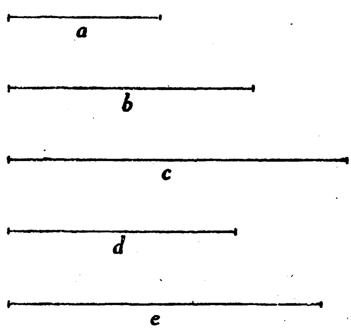
3) x e y sono mediali, commensurabili tra loro nella prima potenza. Allora A deve essere un prodotto mediale, e B deve essere irrazionale.

4) x e y sono mediali, commensurabili tra loro solo nella 2ª potenza. In questo caso B deve essere irrazionale, A può essere o razionale o un prodotto mediale.

28.

Trovare delle mediali, commensurabili soltanto in potenza, che comprendono una superficie mediale.

Si pongano le a, b, c razionali e commensurabili soltanto in potenza, e si prenda la d, media proporzionale tra le a, b [VI, 13] e sia $b : c = d : e$. [VI, 12]. Poichè a, b sono razionali, commensurabili soltanto in potenza, $a \times b$, cioè d^2, è mediale [prop. 21]. Così d è mediale. E poichè b, c sono commensurabili soltanto in potenza, e $b : c = d : e$, anche d, e sono commensura-



bili solo in potenza [prop. 11]. Ma d è mediale; così anche e è mediale [prop. 23].

Perciò d, e sono mediali, commensurabili soltanto in potenza. Dico che esse comprendono una superficie mediale. Infatti, poichè $b : c = d : e$, permutando [V, 16] $b : d = c : e$.

Ma $b : d = d : a$; così $d : a = c : e$.

Perciò $a \times c = d \times e$ [VI, 16]. Ma $a \times c$ è mediale. Quindi anche $d \times e$ è mediale.

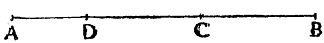
Dunque sono state trovate delle mediali, ecc.; c. d. d.

LEMMA I.

Trovare due (numeri) quadrati, tali che anche la loro somma sia un quadrato.

Si pongano i due numeri AB, BC, o (entrambi) pari o dispari. Poichè, tanto se si sottrae un numero pari da un numero pari, quanto se si sottrae un numero dispari da un numero pari, i risultati sono pari [IX, 24, 26], la differenza AC è pari. Si divida AC in due parti uguali in D. Siano inoltre AB, BC numeri piani simili o quadrati, che pure sono numeri piani simili.

Così $AB \times BC + CD^2 = BD^2$ [II, 6]. Ma $AB \times BC$



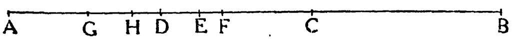
è un quadrato, perchè abbiamo dimostrato che se due numeri piani simili, moltiplicati tra loro, formano un numero, questo è un quadrato [IX, 1]. Dunque sono stati trovati due numeri quadrati, $AB \times BC$ e CD^2, la cui somma è BD^2. Ed è manifesto che sono stati anche trovati due numeri quadrati, BD^2 e CD^2, in modo che la loro differenza $AB \times BC$ è un quadrato, se AB, BC sono numeri piani simili. Se non sono numeri piani simili, i due numeri quadrati trovati sono BD^2 e DC^2, la cui differenza $AB \times BC$ non è un quadrato; c. d. d.

LEMMA II.

Trovare due (numeri) quadrati in modo che la loro somma non sia un quadrato.

Sia infatti $AB \times BC$ un quadrato, come dicemmo [Lemma I], e CD sia pari, e sia diviso in due parti uguali in D. Allora è manifesto che $AB \times BC + CD^2 = BD^2$ [Lemma I]. Si sottragga l'unità DE.

Così $AB \times BC + CE^2 < BD^2$. Dico quindi che la



somma del numero quadrato $AB \times BC$ con CE^2, non è un quadrato.

Infatti, se fosse un quadrato, o sarebbe uguale al quadrato di BE, o minore; non è infatti maggiore, perchè l'unità non lo divide.

Sia dapprima, se è possibile,

$$AB \times BC + CE^2 = BE^2,$$

e sia $GA = 2DE$. Poichè $AC = 2CD$, $AG = 2DE$, sarà $GC = 2EC$, e così GC è diviso in E in due parti uguali. Quindi $GB \times BC + CE^2 = BE^2$ [II, 6].

Ma abbiamo supposto anche $AB \times BC + CE^2 = BE^2$; perciò $GB \times BC + CE^2 = AB \times BC + CE^2$. Togliendo la parte comune, CE^2, concluderemo che $AB = GB$, il che è assurdo. Dunque $AB \times BC + CE^2$ non può essere uguale al quadrato di BE. Dico che non può essere neanche minore. Infatti, se è possibile, sia $AB \times BC + CE^2 = BF^2$ ed $HA = 2DF$: di nuovo concluderemo che $HC = 2CF$; perciò anche CH sarebbe diviso in due parti uguali in F, e per questo

$$HB \times BC + FC^2 = BF^2 \text{ [II, 6]}.$$

Ma abbiamo supposto che anche

$$AB \times BC + CE^2 = BF^2,$$

perciò dovrebbe essere

$$HB \times BC + CF^2 = AB \times BC + CE^2,$$

il che è impossibile. Così $AB \times BC + CE^2$ non è uguale ad una superficie minore di BE^2; ma abbiamo dimostrato che non è neppure uguale a BE^2; dunque $AB \times BC + CE^2$ non è un quadrato; c. d. d.

Trovare due mediali x e y commensurabili tra di loro solo nella 2ª potenza, il cui prodotto sia un prodotto mediale.

Si prendano ad arbitrio 3 grandezze razionali $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, commensurabili coll'unità nella 1ª o nella 2ª potenza, ma che a due a due siano commensurabili solo nella 2ª potenza.

Si trovano le mediali richieste x e y ponendo

$$\sqrt{\alpha} : x = y : \sqrt{\beta} ,$$

(1) $$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\gamma} = x : y .$$

Infatti si ha allora

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = x^2 ,$$

quindi x^2 è un prodotto mediale, e x è una mediale. Siccome poi, per la (1), y è commensurabile con x nella 2ª potenza, si deduce che anche y è una mediale (prop. 23).

Avendosi $\sqrt{\beta} : \sqrt{\gamma} = x : y$, ossia $\sqrt{\beta} : x = \sqrt{\gamma} : y$, e avendosi inoltre $\sqrt{\beta} : x = x : \sqrt{\alpha}$, si deduce $x : \sqrt{\alpha} = \sqrt{\gamma} : y$, ossia

$$xy = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\gamma} ,$$

cioè xy è un prodotto mediale, c. d. d.

Nel lemma I viene risolto il problema di *trovare un numero quadrato, decomponibile nella somma di due quadrati.* Per questo scopo si considerano due prodotti simili (i cui fattori cioè siano proporzionali)

$$ap \cdot bp \quad \text{e} \quad aq \cdot bq ,$$

in modo che siano tutti e due pari o tutti e due dispari.

Allora si ha, secondo II, 6,

$$abp^2 \cdot abq^2 + \left(\frac{abp^2 - abq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{abp^2 + abq^2}{2}\right)^2 .$$

Ognuno di questi tre termini è un quadrato esatto.

Si può anche esprimere questo risultato così: se il prodotto $\alpha\beta$ è un quadrato e se α e β sono ambedue pari o dispari, allora la relazione

$$\alpha\beta + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 ,$$

dà una soluzione del problema.

Se il primo termine non è formato di prodotti simili, allora la differenza degli altri due termini non è un quadrato perfetto.

Nel lemma 2° EUCLIDE mostra, con un ragionamento indiretto, che se si considera l'espressione

$$abp^2 \cdot abq^2 + \left(\frac{abp^2 - abq^2}{2} - 1\right)^2$$

la somma di questi due quadrati non è un quadrato perfetto.

Nel 1° lemma EUCLIDE assegna dunque *tutte le soluzioni intere dell'equazione*

$$x^2 + y^2 = z^2 ,$$

risolvendo così un problema importante e fondamentale, anche dal punto di vista della teoria dei numeri moderna. Basta osservare che la generalizzazione di questo problema al caso di 4 quadrati rimane tuttora insoluta, e che la sua trattazione richiede i mezzi più complicati.

La soluzione di EUCLIDE

$$x = abpq$$
$$y = \frac{abp^2 - abq^2}{2}$$
$$z = \frac{abp^2 + abq^2}{2}$$

(dove a, b, p, q sono numeri interi qualsiansi soggetti alla sola condizione che abp^2 e abq^2 siano ambedue pari o dispari) contiene come casi particolari le soluzioni attribuite ai suoi predecessori PITAGORA e PLATONE.

Astraendo dal fattore di proporzionalità ab, le soluzioni si possono mettere sotto la forma seguente:

$$x = n\ (2m + n)$$
$$y = 2m\ (m + n)$$
$$z = y + n^2 = x + 2m^2 ,$$

dove adesso occorre soltanto che n sia dispari.

Ponendo in particolare $m = 1$, $n + 1 = l$, si ottiene la soluzione di Platone indicata in I, 48:

$$x = l^2 - 1, \quad y = 2l, \quad z = l^2 + 1.$$

29.

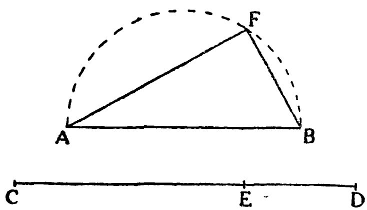
Trovare due rette razionali, commensurabili solo in potenza, in modo che il quadrato costruito sulla maggiore superi il quadrato costruito sulla minore, del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore.

Sia data infatti la retta razionale AB, e due numeri quadrati, CD, DE, tali che la loro differenza CE non sia un quadrato (Lemma I); su AB si descriva un semicerchio AFB, e sia

$$DC : CE = BA^2 : AF^2 \text{ [prop. 6, coroll.]},$$

e si conduca FB.

Poichè $BA^2 : AF^2 = DC : CE$, BA^2 ha con AF^2 lo stesso rapporto che DC ha con CE. Così, BA^2, AF^2



sono commensurabili [prop. 6]; ma AB^2 è razionale: quindi anche AF^2 è razionale; perciò anche AF è razionale. E poichè DC non ha con CE il rapporto di due numeri quadrati, neppure BA^2 ha con AF^2 lo stesso rapporto di due quadrati. Perciò AB, AF sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9]. Così BA, AF sono razionali, commensurabili solo in potenza.

E poichè $DC : CE = BA^2 : AF^2$, convertendo [V, 19, coroll.] $CD : DE = AB^2 : BF^2$. Ma CD ha con DE lo stesso rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò anche AB^2 ha con BF^2 lo stesso rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Così AB, BF sono commensurabili in lunghezza [prop. 9] ed $AB^2 = AF^2 + FB^2$. Quindi AB^2 supera AF^2 del quadrato di BF, che è commensurabile con AB.

Dunque sono state trovate due rette razionali, ecc.

Una delle due grandezze razionali x e y, di cui nel problema, p. es., x, si può prendere ad arbitrio. Siano poi α, β due numeri interi, tali che $\alpha^2 - \beta^2$ non sia un quadrato perfetto (Prop. 28, lemma 2), allora si trova y, ponendo

$$(1) \qquad x^2 : y^2 = \alpha^2 : (\alpha^2 - \beta^2)....$$

Sarà allora x^2 razionale, e quindi anche y sarà razionale commensurabile con x solo nella seconda potenza.

Per V, 19 si ha

$$x^2 : (x^2 - y^2) = \alpha^2 : \beta^2,$$

ossia (X, 9) x e $\sqrt{x^2 - y^2}$ sono commensurabili nella 1ª potenza.

Le due grandezze x e y sono dunque razionali, commensurabili tra loro solo nella seconda potenza e tali che $\sqrt{x^2 - y^2}$ è commensurabile nella prima potenza con la maggiore y.

Siccome la x si può prendere ad arbitrio, e y deve soddisfare alla (1), si possono perciò presentare 3 casi.

1° caso. Si prende x razionale, commensurabile coll'unità nella prima potenza. Allora y risulta commensurabile coll'unità solo nella seconda potenza. Oppure x sia commensurabile coll'unità solo nella seconda potenza. Allora y può essere commensurabile coll'unità

o nella 2^a potenza (2^o caso)

o nella 1^a potenza (3^o caso).

In simboli:

$$1^\circ \text{ caso: } \quad x = \gamma, \qquad y = \gamma\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}};$$

$$2^\circ \text{ caso: } \quad x = \sqrt{\gamma}, \qquad y = \sqrt{\gamma}\,.\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}};$$

$$3^\circ \text{ caso: } \quad x = \gamma\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}}, \qquad y = \gamma;$$

($\alpha^2 - \beta^2$ non è un quadrato perfetto).

La proposizione 29 è un complemento alla discussione dell'equazione

$$z^2 \pm az \pm \frac{b^2}{4} = 0,$$

e precisamente essa insegna quali debbono essere i coefficienti razionali a, b, commensurabili nella 1^a potenza, affinchè la radice dell'equazione proposta

$$z = \mp\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \mp \frac{b^2}{4}}$$

sia composta di due addendi $\frac{a}{2}$, $\pm\sqrt{\frac{a^2}{4} \mp \frac{b^2}{4}}$ razionali e commensurabili tra loro solo nella seconda potenza. Si ottengono tutti i coefficienti a, b della natura richiesta, eguagliando questi addendi ai valori sopraindicati di x e y, e risolvendo rispetto ad a e b.

Le equazioni e le soluzioni rispettive in relazione ai varii casi sono allora le seguenti:

1° caso:

$$z(a-z) = \frac{b^2}{4}, \quad z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$$

2° caso:

$$z(a+z)=\frac{b^2}{4}, \quad z=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}-\frac{a}{2}$$

3° caso:

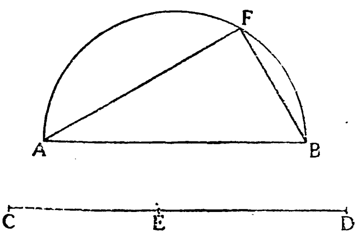
$$z(z-a)=\frac{b^2}{4}, \quad z=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}+\frac{a}{2}.$$

30.

Trovare due rette razionali, commensurabili solo in potenza, in modo che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, del quadrato di una retta incommensurabile con la maggiore.

Sia data la retta razionale AB, e due numeri quadrati CE, ED, in modo che la loro somma CD non sia un quadrato: su AB si descriva un semicerchio AFB, e sia $DC : CE = BA^2 : AF^2$ [prop. 6, coroll.] e si conduca FB.

Così, similmente a quanto si è fatto nella proposizione precedente, dimostreremo che le rette razionali BA e AF sono commensurabili solo in potenza; e poichè $DC : CE = BA^2 : AF^2$, convertendo [V, 19, coroll.] sarà $CD : DE = BA^2 : BF^2$. Ma CD non ha con DE



il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; perciò neppure AB^2 ha con BF^2 il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Così, AB, BF sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9] e $AB^2 = AF^2 + FB^2$.

Dunque, le rette AB, AF sono razionali, commensurabili soltanto in potenza, ecc....

Siamo m, n numeri interi tali che $m^2 + n^2$ non sia un quadrato perfetto (Prop. 28, lemma 2).

Si prenda ad arbitrio la grandezza razionale x, e si determini y dalla proporzione

$$x^2 : y^2 = (m^2 + n^2) : m^2, \tag{1}$$

Si verifica subito che x e y sono razionali e commensurabili tra loro solo nella seconda potenza.

Dalla (2) si ricava

$$x^2 : (x^2 - y^2) = (m^2 + n^2) : n^2,$$

quindi x e $\sqrt{x^2 - y^2}$ sono razionali e commensurabili tra loro solo nella seconda potenza.

Questa proposizione assegna i valori dei coefficienti razionali a, b dell'equazione

$$z^2 \pm az \pm \frac{b^2}{4} = 0,$$

supposti adesso (a differenza della precedente propos. 29) commensurabili tra loro solo nella seconda potenza, per cui la radice composta di due addendi $\frac{a}{2}$, $\sqrt{\frac{a^2}{4} \mp \frac{b^2}{4}}$ razionali e commensurabili tra loro solo nella 2^a potenza. Si deve avere cioè

$$x = \frac{a}{2},$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4} \mp \frac{b^2}{4}},$$

ossia

$$\frac{a}{2}=x\,,\quad \frac{b}{2}=\sqrt{\pm(x^2-y^2)}\,.$$

Anche qui, come nella prop. 29, in quanto alla natura delle grandezze x e y si possono presentare 3 casi

1° caso: $\quad x=\gamma\,, \qquad y=\dfrac{m\gamma}{\sqrt{m^2+n^2}}\,;$

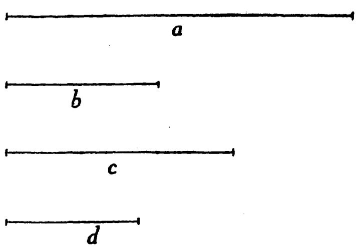
2° caso: $\quad x=\sqrt{\gamma}\,, \qquad y=\dfrac{m\sqrt{\gamma}}{\sqrt{m^2+n^2}}\,;$

3° caso: $\quad x=\dfrac{\gamma\sqrt{m^2+n^2}}{m}\,, \qquad y=\gamma\,.$

31.

Trovare due mediali, commensurabili soltanto in potenza, comprendenti un rettangolo razionale, in modo che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore.

Sian date due rette razionali, a, b, commensurabili soltanto in potenza, in modo che il quadrato della maggiore a superi il quadrato della minore b di una retta commensura-



bile in lunghezza con la a [prop. 29]; e sia $c^2 = a \times b$; ma $a \times b$ è mediale; perciò c è mediale. Sia poi $c \times d = b^2$; ma b^2 razionale; allora anche $c \times d$ è razionale. E poichè $a : b = a \times b : b^2$ e $c^2 = a \times b$, $b^2 = c \times d$, sarà $a : b = c^2 : c \times d$. Ma $c^2 : c \times d = c : d$; perciò anche $a : b = c : d$. Ma a, b sono commensurabili soltanto in potenza, così anche c, d sono commensurabili soltanto in potenza; e c è mediale; dunque anche d è mediale [prop. 23]. E poichè $a : b = c : d$, e a^2 supera b^2 del quadrato di una retta commensurabile con a, anche c^2 supera d^2 del quadrato di una retta commensurabile con c.

Dunque sono state trovate due mediali, commensurabili soltanto in potenza, c, d, comprendenti un rettangolo razionale, e tali che c^2 supera d^2 del quadrato di una retta commensurabile con c.

Similmente dimostreremo che c^2 supera d^2 del quadrato di una retta incommensurabile con c, se a^2 supera b^2 del quadrato di una retta incommensurabile con a [prop. 30].

Si prendano ad arbitrio due numeri

$$\alpha, \quad \sqrt{\beta}$$

razionali, commensurabili solo nella 2ª potenza, e tali che si abbia (X, 29)

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} = m\chi.$$

Allora per la prop. X, 21 si ha che

$$x = \sqrt{\alpha \sqrt{\beta}}$$

è una mediale. Se si pone poi

$$x : \sqrt{\beta} = \sqrt{\beta} : y ,$$

il prodotto $xy = \beta$ è razionale.

Siccome $\alpha : \sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\beta} : \beta$, e $x^2 = \alpha\sqrt{\beta}$, segue

$$\alpha : \sqrt{\beta} = x^2 : xy ,$$

ossia

$$\alpha : \sqrt{\beta} = x : y$$

Ne segue che x e y sono due mediali (X, 23), commensurabili solo nella 2ª potenza (X, 11).

Siccome $\sqrt{\alpha^2 - \beta} = m\alpha$, si ha (X. 14)

$$\sqrt{x^2 - y^2} = mx .$$

Restano così determinate due mediali x, y, commensurabili solo nella 2ª potenza, e tali che $\sqrt{x^2 - y^2}$ è commensurabile nella 1ª potenza con la maggiore.

In maniera analoga si possono trovare due mediali x, y, commensurabili solo nella 2ª potenza

$$x : y = \alpha : \sqrt{\beta} ,$$

il cui prodotto xy sia razionale, e tali che

$$\sqrt{x^2 - y^2} \mp mx ;$$

basta scegliere α e β in modo che

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} \mp m\alpha .$$

Siccome $x : y = \alpha : \sqrt{\beta}$, le due mediali stanno nello stesso rapporto delle due grandezze razionali, di cui nella proposizione 29, dove si aveva

$$x^2 : y^2 = \alpha^2 : (\alpha^2 - \beta^2) ,$$

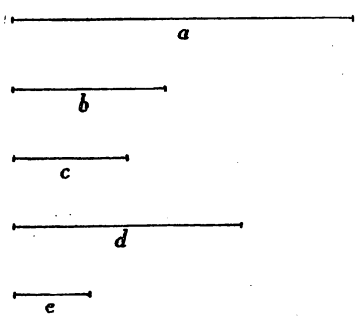
con α e β numeri interi qualsiansi e $\alpha^2 - \beta^2$ non un quadrato perfetto. Si potrebbe dunque anche qui, scegliendo una mediale come unità, distinguere 3 casi per le coppie x, y delle mediali.

CLAVIO osserva che la prop. X, 29 rende superflua tutta la dimostrazione di Euclide, meno le ultime righe.

32.

Trovare due mediali, commensurabili solo in potenza, che comprendano un rettangolo mediale, in modo che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, del quadrato di una retta commensurabile con la maggiore.

Sian date tre rette razionali, a, b, c, commensurabili soltanto in potenza, in modo che a^2 superi c^2 del quadrato



di una retta commensurabile con a [prop. 29] e sia $d^2 = a \times b$. Così d^2 è mediale; perciò anche d è mediale [prop. 21]. Sia inoltre $d \times e = b \times c$; poichè $a \times b : b \times c = a : c$ [prop. 21, lemma] e $d^2 = a \times b$, $d \times e = b \times c$, sarà $a : c = d^2 : d \times e$.

Ma $d^2 : d \times e = d : e$ [prop. 21, lemma]; perciò anche $a : c = d : e$. E poichè a, c sono commensurabili soltanto in potenza, anche d, e sono commensurabili soltanto in potenza [prop. 11]. Ma d è mediale: allora anche e è mediale [prop. 23]; e poichè $a : c = d : e$, ed a^2 supera c^2 del quadrato di una retta commensurabile con a, anche d^2 supera e^2 del quadrato di una retta commensurabile con d [prop. 24]. Dico ora che anche $d \times e$ è mediale. Infatti, poichè $b \times c = d \times e$, e $b \times c$ è mediale [prop. 21], anche $d \times e$ lo è.

Dunque sono state trovate due mediali, d, e, commensurabili solo in potenza, in modo che il loro rettangolo è mediale, e il quadrato della maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta commensurabile con sè. Similmente dimostreremo che d^2 supera e^2 del quadrato di una retta incommensurabile con d, se a^2 supera c^2 del quadrato di una retta incommensurabile con a [prop. 30].

Per trovare le due mediali x, y di cui nel problema, si scelgano ad arbitrio 3 grandezze razionali α, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, commensurabili tra loro solo nella 2ª potenza, e tali che sia soddisfatta la condizione della prop. 29

$$\sqrt{\alpha^2 - \gamma} = m\alpha .$$

Si ponga allora

$$x^2 = \alpha \sqrt{\beta} ,$$

dove x risulta una mediale (X, 21).

Per trovare y, si ponga

$$x . \, y = \sqrt{\beta} . \sqrt{\alpha} .$$

Si avrà quindi

$$\alpha\sqrt{\beta} : \sqrt{\beta}\sqrt{\gamma} = \alpha : \sqrt{\gamma}, \quad \text{e} \quad \alpha : \sqrt{\gamma} = x^2 : xy,$$

perciò

$$x : y = \alpha : \sqrt{\gamma} .$$

Si deduce che x e y sono commensurabili nella 2ª potenza, e che quindi (X, 23) anche y è una mediale.

Da $\sqrt{\alpha^2 - \gamma} = m\alpha$, si deduce

$$\sqrt{x^2 - y^2} = mx$$

e inoltre da

$$xy = \sqrt{\beta} . \sqrt{\gamma}$$

si deduce che xy è un prodotto mediale. Le grandezze trovate x e y soddisfano dunque a tutte le condizioni richieste.

Siccome α, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ si possono scegliere in maniera arbitraria, purchè siano razionali, commensurabili solo nella 2ª potenza, e soddisfino alla relazione $\sqrt{\alpha^2 - \gamma} = \alpha \sqrt{1 - m^2}$, segue che si possono avere 3 casi:

1. $\alpha = K$, $\sqrt{\beta} = \sqrt{e}$, $\sqrt{\gamma} = K\sqrt{1 - m^2}$.
2. $\alpha = \sqrt{K}$, $\sqrt{\beta} = e$, $\sqrt{\gamma} = \sqrt{K(1 - m^2)}$.
3. $\alpha = \sqrt{K}$, $\sqrt{\beta} = \sqrt{e}$, $\sqrt{\gamma} = \sqrt{K(1 - m^2)}$.

In corrispondenza si hanno per x e y i seguenti valori:

1. $x = \sqrt{K\sqrt{e}}$, $y = \dfrac{K\sqrt{e(1 - m^2)}}{\sqrt{K\sqrt{e}}}$.
2. $x = \sqrt{e\sqrt{K}}$, $y = \dfrac{e\sqrt{K(1 - m^2)}}{\sqrt{e\sqrt{K}}}$.
3. $x = \sqrt[4]{\alpha\beta}$, $y = \dfrac{\sqrt{eK(1 - m^2)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}$.

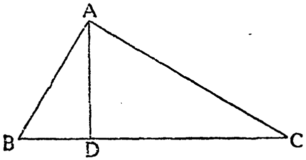
Qui K, e, m sono grandezze razionali, commensurabili coll'unità nella 1ª potenza; esse del resto sono affatto arbitrarie.

Se si considerano $x \pm y$ come soluzioni di una equazione di 2ª grado, allora (X, 23) i coefficienti a e b risultano necessariamente mediali, commensurabili tra loro nella 1ª potenza, avendosi

$$\frac{a}{2} = x\,,\ \frac{b}{2} = \sqrt{x^2 - y^2} = mx\,.$$

Lemma.

Sia ABC un triangolo rettangolo, avente retto l'angolo A, e si conduca la perpendicolare AD. Dico che



$$CB \times BD = BA^2,\ BC \times CD = CA^2,$$
$$BD \times DC = AD^2, BC \times AD = BA \times AC.$$

Prima di tutto dimostriamo che $CB \times BD = BA^2$.

Infatti, poichè nel triangolo rettangolo è stata condotta dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare AB alla base, i triangoli ABD, ADC sono simili fra loro e con l'intero ABC [VI, 8]. E poichè ABC è simile ad ABD, sarà $CB : BA = BA : BD$ [VI, 4].

Perciò $CB \times BD = AB^2$.

Per la stessa ragione anche $BC \times CD = AC^2$.

E poichè, se in un triangolo rettangolo si conduce dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare alla base, la retta condotta è media proporzionale fra le parti in cui la base è divisa, sarà $BD : DA = AD : DC$.

Perciò $BD \times DC = DA^2$.

Dico inoltre che $BC \times AD = BA \times AC$. Infatti, poichè, come abbiamo detto, i triangoli ABC, ABD sono simili, sarà $BC : CA = BA : AD$.

Così

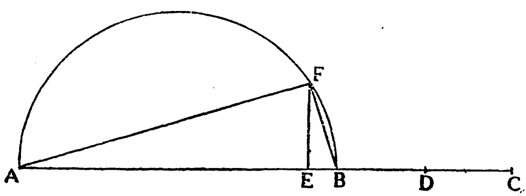
$$BC \times AD = BA : AC \text{ [VI, 16]}; \qquad \text{c. d. d.}$$

Indicando in un triangolo rettangolo l'ipotenusa con c, i due cateti con a, b, l'altezza con h, i due segmenti in cui questa divide c con p e q, si ha: $cp = a^2$, $cq = b^2$, $pq = h^2$, $ch = ab$.

33.

Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia razionale, e il rettangolo da esse compreso sia mediale.

Siano date due rette razionali AB, BC, commensurabili solo in potenza, in modo che il quadrato della maggiore AB superi il quadrato della minore BC del quadrato



di una retta incommensurabile con la AB, si divida BC in due parti uguali in D, e alla retta AB si applichi un parallelogrammo equivalente al quadrato di BD o di DC, mancante di un quadrato [VI, 28] e sia esso $AE \times EB$, su AB si descriva una semicirconferenza AFB, si conduca la perpendicolare EF alla AB, e si conducano AF, FB.

Poichè le AB, BC sono rette disuguali, e AB^2 supera BC^2 del quadrato di una retta incommensurabile con sè stesso, e alla retta AB è stato applicato un parallelogrammo equivalente alla quarta parte del quadrato di BC (cioè al quadrato costruito sulla metà di BC) mancante di un quadrato, cioè $AE \times EB$, le AE ed EB saranno incommensurabili [prop. 18].

Si ha poi: $AE : EB = BA \times AE : AB \times BE$; e $BA \times AE = AF^2$, $AB \times BE = BF^2$. Così AF^2, FB^2 sono incommensurabili; perciò AF, FB sono incommensurabili in potenza. E poichè AB è razionale, anche AB^2 è razionale. Così la somma dei quadrati $AF^2 + FB^2$ è razionale [I, 47]; e poichè anche $AE \times EB = EF^2$, ed abbiamo supposto che $AE \times EB = BD^2$, sarà $EF = BD$. Così BC è uguale al doppio di FE. Perciò anche $AB \times BC$ e $AB \times EF$ sono commensurabili [propos. 6]. Ma $AB \times BC$ è mediale [prop. 21], quindi anche $AB \times EF$ è mediale [prop. 23].

Ma $AB \times EF = AF \times BF$. Così anche $AF \times FB$ è mediale. Ma abbiamo anche dimostrato che la somma dei loro quadrati è razionale.

Dunque si son trovate due rette, incommensurabili in potenza, ecc.

Trovare due grandezze c, a, incommensurabili in potenza, tali che $c^2 + a^2$ sia razionale e che cd sia un prodotto mediale.

Per questo scopo si scelgano in modo arbitrario due grandezze razionali a, b, commensurabili solo in 2ª potenza e tali che si abbia (X, 30)

$$\sqrt{a^2 - b^2} : a \mp m : n.$$

Si trovino poi x e y dalle relazioni seguenti:

$$x + y = a, \quad xy = \frac{b^2}{4}.$$

Sarà allora (X, 18)

$$x : y \mp m : n$$

(Per la costruzione geometrica di x, y vedi la Nota alla proposizione 16).

Si ponga adesso

$$ax = c^2, \quad ay = d^2.$$

Si avrà allora

$$c^2 : d^2 = ax : ay \mp m : n,$$

ossia c e d *sono incommensurabili in 2ª potenza*. Si ha poi

$$c^2 + d^2 = ax + ay = a^2,$$

quindi razionale. Infine si ha

$$c^2d^2 = ax \,.\, ay = a^2 \,.\, xy = \frac{a^2b^2}{4},$$

quindi $cd = \frac{ab}{2}$, e siccome ab è un prodotto mediale (X, 21) segue che anche cd *è un prodotto mediale* (X, 23).

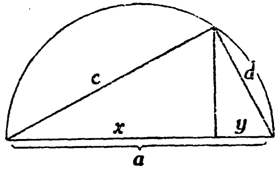
Euclide dà poi la costruzione geometrica dei segmenti c, d. Questa costruzione è evidente. Dopo aver trovato x, y, soddisfacenti alle relazioni

$$x + y = a, \quad xy = \frac{b^2}{4},$$

si descrive un semicerchio con diametro a e dividendo a nelle due parti x e y, si traccia per il punto di divisione la perpendicolare ad a. Si ottiene così un triangolo rettangolo, i cui cateti sono c e d (v. lemma alla prop. precedente).

In questa proposizione EUCLIDE trova in sostanza le radici c, d di un' equazione *biquadratica*

$$x^4 - a^2x^2 + \frac{a^2b^2}{4} = 0.$$



Per questo scopo EUCLIDE risolve prima l' equazione di 2° grado

$$x^2 - ay^2 + \frac{b^2}{4} = 0,$$

di cui le radici sono

$$x, y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{4}}.$$

Si ottiene allora

$$c = \sqrt{ax}, \quad d = \sqrt{ay},$$

ossia

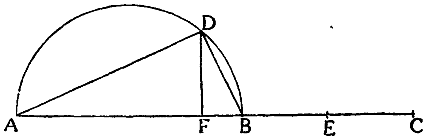
$$(1) \qquad c = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad d = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

L' ipotesi di EUCLIDE $\sqrt{a^2 - b^2} : a \neq m : n$ porta che le radici c e d sono incommensurabili in 2ª potenza ($c^2 : d^2 \neq m : n$).

34.

Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia mediale, ed il rettangolo da esse compreso sia razionale.

Siano date due rette mediali AB, BC, commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia razionale, in modo che AB^2 superi BC^2 del quadrato di una retta incommensurabile con AB [prop. 31]; su AB si descriva una semicirconferenza ADB, si divida BC in due parti uguali in E, e alla retta AB si applichi un paral-



lelogrammo $AF \times FB$, equivalente al quadrato di BE, e mancante di un quadrato [VI, 28]. Così AF, FB sono incommensurabili in lunghezza [prop. 18]; da F si abbassi la perpendicolare FD alla retta AB e si conducano AD, BD. Poichè AF, FB sono incommensurabili, anche $BA \times AF$ e $AB \times BF$ saranno incommensurabili. Ma $BA \times AF = AD^2$, $AB \times BF = DB^2$; dunque AD^2, DB^2 saranno incommensurabili.

E poichè AB^2 è mediale, anche $AD^2 + DB^2$ è mediale [III, 31; I, 47]. E siccome BC è uguale al doppio di DF, sarà anche $AB \times BC$ uguale al doppio di $AD \times FD$. Ma $AB \times BC$ è razionale. Allora anche $AB \times FD$ è razionale [prop. 6; def. 4].

Ma $AB \times FD = AD \times DB$ [prop. 32, lemma] perciò anche $AD \times DB$ è razionale.

Dunque sono state trovate due rette, AD, DB, incommensurabili in potenza, ecc.

Trovare due grandezze u, v, incommensurabili in 2ª potenza, tali che $u^2 + v^2$ sia un prodotto mediale e uv sia razionale.

Per questo scopo si trovano, in conformità alla proposizione X, 31 due mediali

$$\sqrt[4]{\gamma} \text{ e } \sqrt[4]{\delta}$$

soddisfacenti alle condizioni seguenti:

1) esse sono commensurabili in 2ª potenza;

2) il prodotto $\sqrt[4]{\gamma} \,.\, \sqrt[4]{\delta}$ è razionale;

3) $\sqrt{\left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{\delta}\right)^2} \mathrel{+\!\!\!\!=} n \sqrt[4]{\gamma}$.

Si trovano poi, secondo VI, 28, le due grandezze x e y soddisfacenti alle relazioni seguenti:

$$x + y = \sqrt[4]{\gamma}, \quad xy = \frac{\sqrt{\delta}}{4}.$$

Si avrà allora (X, 18)

$$x : y \mathrel{+\!\!\!\!=} m : n,$$

e quindi anche

$$\sqrt[4]{\gamma}\, x : \sqrt[4]{\gamma}\, y \mathrel{+\!\!\!\!=} m : n.$$

Poniamo adesso

$$\sqrt[4]{\gamma}\, x = u^2,$$

$$\sqrt[4]{\gamma}\, y = v^2$$

con che risulta

$$u^2 : v^2 \mathrel{+\!\!\!\!=} m : n.$$

Avremo

$$u^2 + v^2 = \sqrt[4]{\gamma}\, (x + y) = \left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2$$

e quindi $u^2 + v^2$ è *un prodotto mediale.*

Si ha poi

$$\sqrt[4]{\gamma} \,.\, \frac{\sqrt[4]{\delta}}{2} = \sqrt[4]{\gamma} \,.\, \sqrt{xy} = \sqrt{\sqrt[4]{\gamma}\, x \,.\, \sqrt[4]{\gamma} \,.\, y} = \sqrt{u^2 \,.\, v^2} = uv\,;$$

e siccome per ipotesi $\sqrt[4]{\gamma} \,.\, \sqrt[4]{\delta}$ è razionale, segue che anche uv è razionale.

Le grandezze u, v soddisfano dunque alle condizioni richieste.

Osservazione. Le grandezze u, v soddisfano alle due equazioni

$$u^2+v^2=\left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2, \quad u\,v=\sqrt[4]{\gamma}\,.\,\frac{\sqrt[4]{\delta}}{2}$$

e quindi sono ancora, come nella proposizione 33, radici dell'*equazione biquadratica*

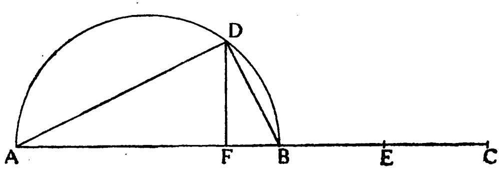
$$x^2-\left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2 x+\frac{\sqrt{\gamma}\,.\,\sqrt{\delta}}{4}=0\,.$$

Soltanto adesso le costanti a, b non sono più razionali, ma sono mediali ($a=\sqrt[4]{\gamma}$, $b=\sqrt[4]{\delta}$).

35.

Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia mediale, il rettangolo da esse compreso sia anch'esso mediale e al tempo stesso sia incommensurabile con la somma dei quadrati.

Sian date due rette mediali AB, BC, commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia



mediale, e inoltre AB^2 superi BC^2 del quadrato di una retta incommensurabile con AB [prop. 32]; su AB si descriva una semicirconferenza ADB, e si compiano le altre costruzioni, come sopra.

Poichè AF, FB sono incommensurabili in lunghezza, anche AD, DB sono incommensurabili in potenza [propos. 11]; e poichè AB^2 è mediale, anche $AD^2 + DB^2$ è mediale [prop. 23, coroll.]; e poichè $AF \times FB = BE^2 = DF^2$, sarà $BE = DF$. Così BC è uguale al doppio di FD; perciò anche $AB \times BC$ è uguale al doppio di $AB \times FD$. Ma $AB \times BC$ è mediale. Allora anche $AB \times FD$ è mediale.

Ma $AB \times FD = AD \times DB$; allora anche $AD \times DB$ è mediale. E poichè AB, BC sono incommensurabili in lunghezza, e CB, BE sono commensurabili, anche AB, BE sono incommensurabili [prop. 13]. Perciò AB^2 e $AB \times BE$ sono incommensurabili [prop. 21, lemma; prop. 11].

Ma $AD^2 + DB^2 = AB^2$ [I, 47] e $AB \times FD = AB \times BE = AD \times DB$. Allora $AD^2 + DB^2$ e $AD \times DB$ sono incommensurabili.

Dunque sono state trovate due rette, AD, DB, incommensurabili in potenza, ecc.

Trovare due segmenti u, v incommensurabili tra loro in 2ª potenza e tali che $u^2 + v^2$ e uv siano prodotti mediali, incommensurabili tra loro.

Per questo scopo di costruiscono in base alla X, 32 due mediali $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$, soddisfacenti alle 4 condizioni seguenti:

1) $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} \neq m : n$;

2) $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = m : n$;

3) $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta}$ sia un prodotto mediale;

4) $\sqrt{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \mp m \sqrt[4]{\alpha}$.

Ciò premesso si pone

$$u_1 + v_1 = \sqrt[4]{\alpha}, \quad u_1 v_1 = \left(\frac{\sqrt[4]{\beta}}{2}\right)^2.$$

Avremo allora (X, 18)

$$u_1 : v_1 \mp m : n$$

e quindi anche (X, 11)

$$(1) \qquad u_1 \sqrt[4]{\alpha} : v_1 \sqrt[4]{\alpha} \mp m : n.$$

Siccome $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ è un prodotto mediale e siccome si ha

$$u_1 \sqrt[4]{\alpha} : v_1 \sqrt[4]{\alpha} = (u_1 + v_1) \sqrt[4]{\alpha} = \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2,$$

segue che

(2) $\qquad u_1 \sqrt[4]{\alpha} + v_1 \sqrt[4]{\alpha}$ è un prodotto mediale.

Si ha poi (X, 32 Lemma)

$$\sqrt[4]{\alpha} \, . \, \frac{\sqrt[4]{\alpha}}{2} = \sqrt{u_1 \sqrt[4]{\alpha}} \sqrt{v_1 \sqrt[4]{\alpha}}$$

e quindi si deduce che

(3) $\qquad \sqrt{u_1 \sqrt[4]{\alpha}} \, . \, \sqrt{v_1 \sqrt[4]{\alpha}}$ è un prodotto mediale.

Si ha infine

$$\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} \mp m : n,$$

ossia

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \left(\sqrt[4]{\alpha} : \frac{\sqrt[4]{\alpha}}{2}\right) \mp m : n.$$

Osservando che

$$u_1 \sqrt[4]{\alpha} + v_1 \sqrt[4]{\alpha} = \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2,$$

$$\sqrt{u_1 \sqrt[4]{\alpha} \, . \, v_1 \sqrt[4]{\alpha}} = \sqrt[4]{\alpha} \, . \, \frac{\sqrt[4]{\beta}}{2},$$

si deduce

(4) $$\left(u_1 \sqrt[4]{\alpha} + v_1 \sqrt[4]{\alpha}\right) : \sqrt{u_1 \sqrt[4]{\alpha} \, . \, v_1 \sqrt[4]{\alpha}} \neq m : n.$$

Da (1), (2), (3), (4) segue che i segmenti

$$u = \sqrt{u_1 \sqrt[4]{\alpha}}, \quad v = \sqrt{v_1 \sqrt[4]{\alpha}}$$

soddisfano alle condizioni richieste nel problema.

36.

Se si sommano due rette razionali, commensurabili solo in potenza, la somma è irrazionale, e si dirà binomiale [καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων].

Si sommino infatti due rette razionali AB, BC, commensurabili solo in potenza. Dico che la somma AC è irrazionale.

Infatti, poichè AB, BC sono incommensurabili in lunghezza (essendo commensurabili solo in potenza) e $AB : BC = AB \times BC : BC^2$ [prop. 21, lemma], an-

che $AB \times BC$ e BC^2 sono incommensurabili [prop. 11]. Ma $AB \times BC$ e il doppio di $AB \times BC$ sono commensurabili [prop. 6], e $AB^2 + BC^2$, BC^2 sono commensurabili (infatti AB, BC sono razionali, commensurabili solo in potenza); allora il doppio di $AB \times BC$ e $AB^2 + BC^2$ sono incommensurabili [prop. 13] e, componendo, il doppio di $AB \times BC$, sommato con AB^2 e con BC^2, cioè AC^2 [II, 4], è incommensurabile con $AB^2 + BC^2$.

Ma $AB^2 + BC^2$ è razionale; quindi AC^2 è irrazionale. Perciò anche AC è irrazionale, e si dice *binomiale*; c. d. d.

Se si addizionano due segmenti razionali, ma commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, la loro somma è *irrazionale*; noi la chiameremo somma *binomiale*.

Dimostrazione. Si abbiano due segmenti

$$\sqrt{\alpha}\,,\ \sqrt{\beta}$$

tali che

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n\,,$$

ma

$$\alpha : \beta = m : n\,.$$

Consideriamo la somma $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Abbiamo, per la prop. II, 4,

(1) $$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 2\sqrt{\alpha\beta} + \alpha + \beta\,.$$

Ora da $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} \neq m : n$ si deduce

$$\beta : \sqrt{\alpha\beta} \neq n : m\,,$$

invece si ha

$$\beta : \alpha + \beta = n : (n + m).$$

Quindi β e $\alpha + \beta$ sono commensurabili, mentre β e $\sqrt{\alpha\beta}$ sono incommensurabili. Si deduce (X, 13) che anche $\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha + \beta$ sono incommensurabili tra loro. Si ha pure

$$2\sqrt{\alpha\beta} : (\alpha + \beta) \neq m : n$$

e da qui in virtù della prop. X, 16,

(2) $$\sqrt{\alpha\beta} + (\alpha + \beta) : (\alpha + \beta) \neq m : n .$$

Ma $\alpha + \beta$ è (un'area) razionale, quindi $2\sqrt{\alpha\beta} + \alpha + \beta$ ossia (1) $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ è irrazionale.

Si deduce così che anche $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ è irrazionale, c. d. d.

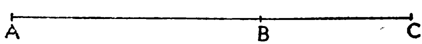
37.

Se si sommano due rette mediali commensurabili solo in potenza e tali che comprendano un rettangolo razionale, la somma è irrazionale e si dirà prima bimediale [καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη].

Si sommino infatti due rette mediali, AB, BC, commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia razionale [prop. 27].

Dico che la somma AC è irrazionale.

Infatti, poichè AB, BC sono incommensurabili in lunghezza, anche $AB^2 \times BC^2$ e il doppio di $AB \times BC$ saranno incommensurabili. E, componendo, AB^2, sommato con BC e con il doppio di $AB \times BC$, è incommen-



surabile con $AB \times BC$ [prop. 16]. Ma $AB \times BC$ è razionale: infatti abbiamo supposto che il rettangolo compreso da AB e BC fosse razionale. Così AC^2 è irrazionale. Dunque AC è irrazionale, e si dirà *prima bimediale*; c. d. d.

Siano $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ le due mediali date. Si ha per ipotesi:

1) $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} \neq m : n$,

2) $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = m : n$,

3) $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale.

Si tratta di dimostrare che

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} \text{ è irrazionale.}$$

Da $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} \neq m : n$ si deduce, similmente a quanto si è fatto nella dimostrazione della proposizione precedente,

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \neq m : n .$$

Componendo si ricava

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \neq m : n ,$$

e osservando che

$$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + 2\sqrt{\alpha\beta} ,$$

si deduce

$$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2 : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \neq m : n .$$

Ma, per ipotesi, $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale; perciò

$$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2 \text{ è irrazionale}$$

e quindi anche

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} \text{ è irrazionale,}$$ c. d. d.

La somma $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ si dirà *la prima bimediale.*

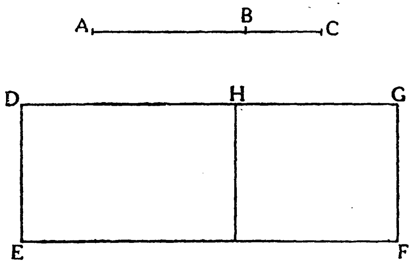
38.

Se si sommano due mediali, commensurabili solo in potenza e tali che comprendano un rettangolo mediale, la somma è irrazionale e si dirà seconda binomiale [ἐκ δύο μέσων δευτέρα].

Si sommino due mediali AB, BC commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia mediale. Dico che AC è irrazionale.

Si ponga infatti la retta razionale DE, e alla retta DE si applichi DF, equivalente al quadrato di AC, di altezza DG [I, 44].

Poichè $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$ [II, 4], alla retta DE si applichi EH, equivalente alla somma $AB^2 + BC^2$.



Così la rimanente parte $HF = 2AB \times BC$.

E poichè ciascuna delle AB, BC è mediale, anche $AB^2 + BC^2$ è mediale. Abbiamo inoltre supposto che anche $2AB \times BC$ fosse mediale.

Ed $EH = AB^2 + BC^2$, $FH = 2AB \times BC$.

Così, ciascuno degli EH, HF è mediale. E sono applicati alla retta razionale DE. Così, ciascuna delle DH, HG è razionale, e incommensurabile in lunghezza con la retta DE [prop. 22].

Ora, poichè AB, BC sono incommensurabili in lunghezza e $AB : BC = AB^2 : AB \times BC$ [prop. 21 lemma], AB^2 e $AB \times BC$ sono incommensurabili [prop. 11]. Ma AB^2 e $AB^2 + BC^2$ sono commensurabili [prop. 6]. Così $AB^2 + BC^2$ e $2AB \times BC$ sono incommensurabili [prop. 13].

Ma $EH = AB^2 + BC^2$, $HF = 2AB \times BC$. Allora EH, HF sono incommensurabili; perciò anche DH, HG sono incommensurabili in lunghezza [VI, 1; prop. 11]. Dunque DH, HG sono razionali, commensurabili solo in potenza. Quindi DG è irrazionale [prop. 36]. Ma DE è razionale, e il rettangolo compreso da una retta razionale e una irrazionale è irrazionale [prop. 20]. Perciò DF è irrazionale, e un quadrato equivalente ad esso è irrazionale. Ma $AC^2 = DF$; dunque AC è irrazionale e si dirà *seconda bimediale*; c. d. d.

Siano $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ le mediali date. Per ipotesi

1) $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} \neq m : n$;
2) $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = m : n$;
3) $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è mediale.

Si tratta di dimostrare che

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} \text{ è irrazionale.}$$

Sia γ un segmento razionale arbitrariamente scelto, e si formino i quozienti

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) : \gamma = y$$

$$2\sqrt[4]{\alpha\beta} : \gamma = z .$$

Siccome $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ e quindi anche $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ sono prodotti mediali, come pure $\sqrt[4]{\alpha\beta}$, si deduce che y, z *sono segmenti razionali*, incommensurabili con γ in 1[a] potenza.

Dall'ipotesi 1) si deduce (X, 11)

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt[4]{\alpha\beta} \neq m : n ,$$

mentre dall'ipotesi 2) si ha

$$\sqrt{\alpha} : (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = (m + n) : n .$$

Quindi (X, 13)

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \neq m : n$$

e perciò i quozienti y, z sono incommensurabili in 1[a] potenza (cfr. VI, 1; X, 11).

La proposizione 36 ci insegna allora che

$$y + z \text{ è irrazionale,}$$

quindi è irrazionale anche $(y + z)\gamma$ (cfr. X, 20).

Ora si ha

$$(y + z)\gamma = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + 2\sqrt[4]{\alpha\beta} = \left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2,$$

quindi è irrazionale anche il segmento $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$, c. d. d.

Il segmento $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ dicesi *seconda bimediale.*

In uno scolio COMMANDINO osserva che l'affermazione che $(y + z)\gamma$ sia irrazionale segue dalla prop. X, 20. Infatti, se $(y + z)\gamma$ fosse razionale, allora un razionale diviso per un razionale darebbe un irrazionale, in contraddizione con la X, 20.

L'espressione più generale di una seconda binominale è

$$\sqrt[4]{\alpha}\,(1+\sqrt{m}),$$

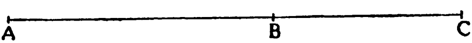
con la condizione che αm non sia il quadrato di un numero razionale.

39.

Se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia razionale, e il loro rettangolo sia mediale, la somma è irrazionale, e si dirà maggiore [μείζων].

Si sommino infatti due rette AB, BC, incommensurabili in potenza, aventi le proprietà indicate. Dico che AC è irrazionale.

Infatti, poichè $AB \times BC$ è mediale, anche $2AB \times BC$ è mediale [propp. 6, 23, coroll.]. Inoltre, $AB^2 + BC^2$



è razionale. Così, $2AB \times BC$ e $AB^2 + BC^2$ sono incommensurabili. Perciò anche $AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$, cioè AC^2 [II, 4] e $AB^2 + BC^2$ sono incommensurabili [prop. 16].

Dunque AC^2 è irrazionale; perciò anche AC è irrazionale, e si dirà *maggiore*; c. d. d.

Siano t, s i due segmenti dati. Per ipotesi

1) $t^2 : s^2 \mp m : n$;
2) $t^2 + s^2$ è razionale;
3) ts è mediale (cioè prodotto mediale, trattandosi di un'area).

Si deve dimostrare che la somma

$$t + s,$$

detta *maggiore*, è irrazionale.

Anzitutto si osservi che l'esistenza di due segmenti t ed s, soddisfacenti alle condizioni 1), 2), 3) è assicurata dalla prop. X, 33.

Dalle condizioni 2) e 3) si deduce

$$(t^2 + s^2) : \ ts \mp m : n,$$

quindi anche (X, 16)

$$(t^2 + s^2 + 2ts) : (t^2 + s^2) \mp m : n,$$

e perciò $(t + s)^2$ è irrazionale. Si conclude che anche $t + s$ è irrazionale, c. d. d.

Per ottenere l'espressione più generale della maggiore poniamo

$$t^2 + s^2 = m, \quad ts = \frac{1}{2}\sqrt{n},$$

dove m e n sono numeri razionali.

Allora si ricava $(t + s)^2 = m + \sqrt{n}$, e quindi

$$t + s = \sqrt{m + \sqrt{n}}$$

Questa espressione non può ridursi alla forma $\alpha + \sqrt{\beta}$ a meno che $m^2 - n$ non sia quadrato perfetto. Questa condizione è espressa appunto da Euclide in 1). Infatti, t^2, s^2 sono radici dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - mx + \frac{n}{4} = 0.$$

Per l'ipotesi 1), $\frac{t^2}{s^2}$ è irrazionale, quindi il discriminante

$$m^2 - n$$

non è un quadrato perfetto.

40.

Se si sommano due rette, incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia mediale, ed il loro rettangolo sia razionale, la somma sarà una retta irrazionale, e si dirà lato di un quadrato uguale alla somma di un'area razionale con una mediale.

Si sommino infatti due rette AB, BC, incommensurabili in potenza, che abbiano le proprietà indicate. Dico che AC è irrazionale. Infatti, poichè $AB^2 + BC^2$ è mediale,

e $2AB \times BC$ è razionale, $AB^2 + BC^2$ e $2AB \times BC$ sono incommensurabili. Perciò anche AC^2 e $2AB \times BC$ sono incommensurabili [prop. 16]. Ma $2AB \times BC$ è razionale. Allora AC^2 è irrazionale; perciò AC è irrazionale, e si dirà *lato di un quadrato uguale alla somma di un'area razionale con una mediale.*

Siano t ed s i segmenti dati. Per ipotesi si ha

1) $t^2 : s^2 \mp m : n$;
2) $t^2 + s^2$ è mediale;
3) ts è razionale.

Si deve dimostrare che

$t + s$ è irrazionale.

L'esistenza dei segmenti t ed s è assicurata dalla prop. X, 34. Dalle condizioni 2) e 3) si deduce

$$(t^2 + s^2) : 2ts \mp m : n$$

e quindi anche (X, 16)

$$(t + s)^2 : 2ts \mp m : n .$$

Ma $2ts$ è razionale, quindi $(t + s)^2$ è irrazionale, perciò è irrazionale anche $t + s$, c. d. d.

EUCLIDE chiama la somma irrazionale $t + s$ « il lato della somma di un'area razionale con un'area mediale ».

Questa nuova irrazionalità non differisce sostanzialmente dalla « maggiore ».

41.

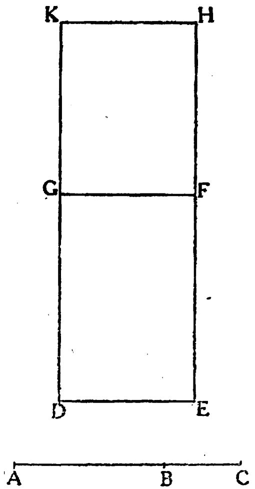
Se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia mediale, ed il loro rettangolo sia anch'esso mediale e al tempo stesso sia incommensurabile con la somma dei quadrati, la somma sarà una retta irrazionale, e si dirà lato di un quadrato uguale alla somma di due aree mediali.

Si sommino infatti due rette AB, BC, incommensurabili in potenza, che abbiano le proprietà indicate. Dico che AC è irrazionale. Si tracci la DE, razionale, e alla DE si applichi DF, equivalente alla somma $AB^2 + BC^2$, e poi GH equivalente a $2AB + BC$.

Allora $DH = AC^2$ [II, 4]. E poichè $AB^2 + BC^2$ è mediale ed è equivalente a DF, anche DF è mediale, ed applicato alla retta razionale DE. Così DG è razionale e incommensurabile in lunghezza con la DE [prop. 22].

Per la stessa ragione anche GK è razionale e incommensurabile in lunghezza con GF, cioè con DE. E poichè $AB^2 + BC^2$ è incommensurabile con $2AB \times BC$, anche

DF e *GH* sono incommensurabili. Perciò anche *DG*, *GK* sono incommensurabili [VI, 1; prop. 11]; inoltre sono razionali; allora *DG*, *GK* sono razionali, commensurabili



solo in potenza. Dunque *DK* è irrazionale [prop. 36], mentre *DE* è razionale. Così *DH* è irrazionale, e ogni quadrato ad esso equivalente è irrazionale. Ma $AC^2 = DH$. Dunque *AC* è irrazionale: si dirà *lato di un quadrato uguale alla somma di due aree mediali;* c. d. d.

Le ipotesi sono:

1) $t^2 : s^2 \not= m : n$;
2) $t^2 + s^2$ è mediale;
3) $t \cdot s$ è mediale;
4) $(t^2 + s^2) : ts \not= m : n$.

Devesi dimostrare che

$$t + s \text{ è irrazionale.}$$

Sia γ un segmento razionale arbitrario. Poniamo

$$t^2 + s^2 = \gamma x, \ 2ts = \gamma y \, .$$

Dalle condizioni 2), 3) e dalla prop. X, 22 segue che x è razionale e incommensurabile con γ in 1ª potenza, e lo stesso vale per y. Dalla 4) segue

$$(t^2 + s^2) : 2ts \neq m : n \, ,$$

e quindi si deduce (VI, 1; X, 11) che x e y sono incommensurabili solo in 2ª potenza.

I segmenti x e y soddisfano dunque alle ipotesi della prop. X, 36, e quindi la loro somma $x + y$, detta binominale, è irrazionale. Ma si ha

$$(x + y)\gamma = t^2 + s^2 + 2s = (t + s)^2 \, ,$$

cioè $(t + s)^2$ è irrazionale, e perciò anche $t + s$ è irrazionale, c. d. d.

La somma $t + s$ viene chiamata da Euclide « lato della somma di due aree mediali ».

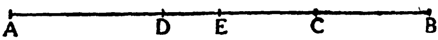
La sua espressione è $\sqrt{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$.

Lemma.

Con questo lemma dimostreremo che le suddette rette irrazionali si possono dividere in un solo modo, se si vuole che le parti abbiano le proprietà indicate.

Si supponga che la AB sia divisa in due modi in C e in D, e si supponga $AC > DB$.

Dico che $AC^2 + CB^2 > AD^2 + DB^2$. Sia infatti



AB diviso per metà in E. Poichè $AC > DB$, si tolga la parte comune DC. Rimarrà $AD > CB$. Ma $AE = EB$.

Così $DE < EC$. Allora i punti C, D non distano egualmente dal punto medio di AB.

E poichè $AC \times CB + EC^2 = EB^2$ [II, 5], e $AD \times DB + DE^2 = EB^2$ sarà $AC \times CB + EC^2 = AD \times DB + DE^2$. Ma, fra essi, $DE^2 < EC^2$; quindi rimarrà $AC \times CB < AD \times DB$; perciò anche $2AC \times CB < 2AD \times DB$.

Dunque rimarrà $AC^2 + CB^2 > AD^2 + DB^2$;

c. d. d.

Questo lemma (di cui Euclide fa uso nella proposizione seguente) afferma:

Si divida il segmento a in due segmenti in due modi differenti

$$x + y = a \qquad x > y.$$
$$u + v = a. \qquad u \geqq v.$$

Se si ha

$$x > u,$$

allora si ha anche

$$x^2 + y^2 > u^2 + v^2.$$

Dimostrazione.

Si ha

$$x - (x - v) > u - (x - v)$$

ossia

$$v > u - (x - v).$$

Da qui si ricava

$$\frac{a}{2} - v < \frac{a}{2} - [u - (x - v)]$$

ossia

$$\frac{a}{2} - v < x - \frac{a}{2},$$

avendosi $u + v = a$.

Dalla proposizione II, 5 si deduce

$$xy + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$uv + \left(\frac{a}{2} - v\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

e quindi

$$xy + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = uv + \left(\frac{a}{2} - v\right)^2.$$

Sottraendo la disuguaglianza $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{2} - v\right)^2$, si ottiene $xy < uv$, e quindi anche

$$2xy < 2uv.$$

Sottraendo questa disuguaglianza dall'eguaglianza

$$(x + y)^2 = (u + v)^2$$

si ricava

$$x^2 + y^2 > u^2 + v^2, \qquad \text{c. d. d.}$$

42.

Una retta binomiale è divisa in un modo soltanto nelle sue componenti.

Sia AB una retta binomiale, divisa in C nelle sue componenti. Allora AC, CB saranno razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 36]. Dico che AB non si può dividere in nessun altro punto in due rette razionali commensurabili solo in potenza. Infatti, se è possibile, si divida in D, in modo che anche AD, DB siano razionali, commensu-

rabili solo in potenza. Allora è manifesto che AC è diverso da DB. Siano infatti uguali, se è possibile; dovrebbero essere uguali anche AD e CB.

Inoltre $AC : CB = BD : DA$, e AB sarebbe divisa nello stesso modo tanto dal punto D come dal punto C, contro l'ipotesi. Perciò AC, DB non sono uguali.

Per la stessa ragione i punti C, D non distano ugualmente dal punto medio; la stessa differenza che c'è tra AC^2+CB^2 e AD^2+DB^2 ci sarà anche tra $2AD\times DB$ e $2AC \times CB$, perchè $AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB = = AB^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \times DB$ [II, 4].

Ma la differenza tra $AC^2 + CB^2$ e $AD^2 + DB^2$ è una superficie razionale: infatti entrambi son razionali; allora anche la differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$ è una superficie razionale, pur essendo mediale, il che è assurdo: la differenza tra due superficie mediali infatti non può essere razionale [prop. 26]. Dunque una retta binomiale non si può dividere in due punti diversi nelle sue parti, cioè si può dividere solo in un punto; c. d. d.

Un segmento binomiale si può decomporre in un sol modo nelle sue componenti.

In simboli moderni: se si ha

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

dove α, β, x, y, sono numeri razionali e il rapporto $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$ non è razionale, allora si ha necessariamente

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{x}, \quad \sqrt{\beta} = \sqrt{y}.$$

In particolare da

$$\alpha + \sqrt{\beta} = x + \sqrt{y}$$

segue necessariamente

$$\alpha = x, \quad \sqrt{\beta} = \sqrt{y}.$$

Dimostrazione.

Nelle ipotesi fatte sia dunque

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \tag{1}$$

e si supponga

$$\sqrt{\alpha} \neq \sqrt{x}\,,$$
$$\sqrt{\alpha} \neq \sqrt{y}\,.$$

Dalla (1) e dalla prop. II, 4 si deduce

$$(\alpha + \beta) - (x + y) = 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{\beta\alpha}\,.$$

Ma il primo termine è razionale, quindi anche $2\sqrt{xy} - 2\sqrt{\alpha\beta}$ è razionale, ciò che è impossibile, perchè $\sqrt{xy}$ e $\sqrt{\alpha\beta}$ sono prodotti mediali, e quindi la loro differenza (X, 26) non può essere razionale (si noti che non può aversi $\sqrt{xy} = \sqrt{\alpha\beta}$, perchè allora tanto $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ quanto $\sqrt{\alpha}$ e $\sqrt{\beta}$ sarebbero radici di una medesima equazione di 2° grado).

Si deduce così che non si può decomporre in due modi differenti un segmento in due segmenti razionali, commensurabili solo in 2ª potenza.

STIEFEL illustra la proposizione 42 con l'esempio seguente: $12 + \sqrt{48}$ è una binominale; essa è bensì decomponibile in 6 e $6 + \sqrt{48}$, oppure in $12 + \sqrt{12}$ e $\sqrt{12}$, oppure ancora in $6 + \sqrt{12}$ e $6 + \sqrt{12}$ ecc. Ma tali componenti non sono « razionali, commensurabili in 2ª potenza ».

43.

Una retta prima bimediale è divisa in un solo modo nelle sue componenti.

Sia la prima bimediale AB divisa in C, in modo che AC, CB siano mediali, commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia razionale; dico che AB non può essere diviso in tal modo da nessun altro punto.

Infatti, se è possibile, sia diviso in D in modo che AD,

DB siano mediali, commensurabili solo in potenza, tali che il rettangolo, da esse compreso sia razionale. Ora, poichè la differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$ è

uguale alla differenza tra $AC^2 + CB^2$ e $AD^2 + DB^2$
uguale alla differenza tra $AC^2 + CB^2$ e $AD + DB^2$ [prop. 41, lemma)], e la differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$ è razionale, perchè entrambi son razionali, anche la differenza tra $AC^2 + CB^2$ e $AD^2 + DB^2$ sarebbe razionale, sebbene mediale; il che è assurdo [propos. 26].

Dunque una retta prima bimediale, ecc.

Una prima bimediale si può decomporre in un sol modo nelle sue componenti mediali.

In simboli, se

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y},$$

dove $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ e $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{y}$ soddisfano alle condizioni della prop. 37, allora si ha necessariamente

$$\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{x}, \ \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{y}.$$

Oppure ancora, ricordando che l'espressione generale della prima bimediale è $\sqrt[4]{\alpha} + \dfrac{m}{\sqrt[4]{\alpha}}$, da

$$\sqrt[4]{\alpha} + \frac{m}{\sqrt[4]{\alpha}} = \sqrt[4]{x} + \frac{n}{\sqrt[4]{x}}$$

si deduce

$$\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{x}, \ m = n.$$

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della proposizione precedente.

Infatti, si ha

$$2\sqrt[4]{xy} - 2\sqrt[4]{\alpha\beta} = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) .$$

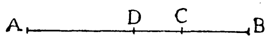
Ma il primo membro è razionale (v. prop. 37, ipotesi 3), mentre il secondo membro, nell'ipotesi $\sqrt{\alpha} \neq \sqrt{x}$, $\sqrt{\alpha} \neq \sqrt{y}$, è necessariamente irrazionale (Prop. X, 26), ciò che è assurdo.

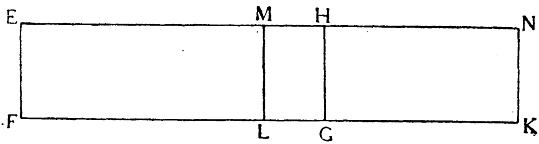
44.

Una retta seconda bimediale è divisa da un punto soltanto nelle sue componenti.

Sia la seconda bimediale AB divisa in C, in modo che AC, CB siano mediali, commensurabili solo in potenza, e tali che il rettangolo da esse compreso sia mediale [prop. 38]; allora è manifesto che il punto C non è il punto medio di AB, perchè le parti non sono commensurabili. Dico che AB non è divisa in alcun altro punto nelle sue componenti.

Infatti, se è possibile, sia AB divisa anche in D, in modo che AC, DB non siano uguali; supponiamo che AC sia maggiore (è manifesto che anche $AD^2 + DB^2 < < AC^2 + CB^2$, come sopra abbiamo dimostrato [prop. 41, lemma]) e che AD, DB siano mediali, commensurabili solo in potenza, tali che il loro rettangolo sia mediale. Si ponga la retta razionale EF, e ad essa si applichi un rettangolo EK, equivalente al quadrato di AB, e si tolga EG, equivalente ad $AC^2 + CB^2$. Allora la rimanente parte HK è uguale a $2AC \times CB$ [II, 4]. Di nuovo, si tolga EL, equivalente ad $AD^2 + DB^2$, che abbiamo dimostrato esser minore di $AC^2 + CB^2$.





Così, $MK = 2AD \times DB$. E poichè $AC^2 + CB^2$ è mediale, EG è mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF: dunque EH è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con EF [prop. 22].

Per la stessa ragione anche HN è razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF. E poichè AC, CB sono mediali, commensurabili soltanto in potenza, AC e CB sono incommensurabili in lunghezza.

Ma $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$ [prop. 21, lemma]; allora anche AC^2 e $AC \times CB$ sono incommensurabili [prop. 11]. Ma AC^2 e $AC^2 + CB^2$ sono commensurabili; infatti AC, CB sono commensurabili in potenza; e $AC \times CB$, $2AC \times CB$ sono commensurabili [prop. 6]. Perciò anche $AC^2 + CB^2$ e $2AC \times CB$ sono incommensurabili [prop. 13]. Ma $EG = AC^2 + CB^2$, $HK = 2AC \times CB$. Allora EG, HK sono incommensurabili; quindi anche EH, HN sono incommensurabili in lunghezza [VI, 1; prop. 11].

Sono inoltre razionali. Allora EH, HN sono razionali, commensurabili solo in potenza. Ma se si sommano due rette razionali, commensurabili soltanto in potenza, la somma è irrazionale ed è detta binomiale [prop. 36]; quindi EN è binomiale, divisa in H. Nello stetto modo dimostreremo che anche EM, MN sono razionali, commensurabili solo in potenza. Ed EN, che è binomiale, sarà divisa in due punti diversi H ed M [il che è assurdo; prop. 42]; ed EH, MN non sono uguali, perchè $AC^2 + CB^2 > > AD^2 + DB^2$; e siccome $AD^2 + DB^2 > 2AD \times DB$, a maggior ragione $AC^2 + CB^2 > 2AD \times DB$, cioè $EG > MK$. Quindi anche $EH > MN$ [VI, 1]. E così EH, MN non sono uguali; c. d. d.

Una seconda bimediale si può decomporre in un sol modo nelle sue componenti.

Si abbia dunque una seconda bimediale

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}, \quad \sqrt[4]{\alpha} > \sqrt[4]{\beta}$$

dove $\sqrt[4]{\alpha}$ e $\sqrt[4]{\beta}$ soddisfano alle condizioni seguenti (X, 38):

1) $\sqrt[4]{\alpha}$ e $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali;
2) esse sono commensurabili solo in 2^a potenza;
3) $\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\beta}$ è mediale.

Si abbia adesso

$$\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}, \text{ con } \sqrt[4]{y} > \sqrt[4]{x} \tag{4}$$

dove $\sqrt[4]{x}$ e $\sqrt[4]{y}$ soddisfano alle stesse condizioni 1), 2), 3).

Si tratta di dimostrare che si ha allora necessariamente

$$\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{y}, \ \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{x}.$$

Supponiamo il contrario, e si abbia p. es.,

$$\sqrt[4]{\alpha} > \sqrt[4]{y},$$

Allora dal lemma alla proposizione 41 si deduce

(5) $$\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}.$$

Sia γ un numero razionale arbitrario, e si ponga

(6) $$\begin{cases} z\gamma=\left(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}\right)^2, \\ u\gamma=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}. \end{cases}$$

Sottraendo si ottiene

(7) $$z\gamma-u\gamma=\left(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}\right)^2-(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=2\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta}.$$

Se si pone adesso

(8) $$v\gamma=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

dalla prima delle (6) e dalla (11) si ricava

$$z\gamma-v\gamma=\left(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}\right)^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$$

e tenendo conto della (4),

(9) $$z\gamma-v\gamma=\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2\sqrt[4]{x}\,.\,\sqrt[4]{y}.$$

Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ sono mediali, segue che anche $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ è mediale, e siccome γ è razionale, si deduce dalla seconda delle (6) e in virtù della prop. X, 22 che:

u è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Per la stessa ragione, essendo per le (7) e (3) $(z-u)\gamma$ mediale, si deduce che

$z-u$ è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono commensurabili solo in 2ª potenza, e siccome si ha (X, 11)

$$\sqrt[4]{\alpha}:\sqrt[4]{\beta}=\sqrt{\alpha}:\sqrt[4]{\alpha}\;\sqrt[4]{\beta}$$

segue che anche $\sqrt{\alpha}$ e $\sqrt[4]{\alpha}\;\sqrt[4]{\beta}$ sono incommensurabili. Ma $\sqrt{\alpha}$ è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ e quindi anche (X, 15) con $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

Si conclude che

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}, \quad 2\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta}$$

sono incommensurabili.

I secondi membri delle (6) e (7) sono dunque incommensurabili, quindi (VI, 1, X, 11) anche

$$u,\ z - u \text{ sono incommensurabili.}$$

La X, 36 ci insegna allora che la somma

$$u + (z - u) = z$$

dei due segmenti razionali u e $z - u$ è irrazionale; essa non è che la binomiale.

La binomiale z risulta dunque decomposta nelle somma di due segmenti razionali commensurabili solo in 2ª potenza. Analogamente si dimostra che i segmenti v e $z - v$ sono razionali e commensurabili solo in 2ª potenza. Si ottiene così una seconda decomposizione della stessa binomiale z

$$z = v + (z - v),$$

la quale, come dimostreremo subito, è essenzialmente distinta dalla prima decomposizione, ciò che è assurdo, perchè contradice alla proposizione 42.

Infatti, la seconda delle (6) e la (8) in virtù della diseguaglianza (5) danno

$$u \neq v.$$

D'altra parte si ha

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 2\sqrt[4]{x}\,\sqrt[4]{y}$$

e quindi per la (5)

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 2\sqrt[4]{x}\,\sqrt[4]{y}.$$

Dalla seconda delle (6) e dalla (8) si deduce allora

$$u\gamma > (z - v)\gamma$$

e quindi

$$u \neq z - v.$$

Le due decomposizioni

$$z = u + (z - u)$$
$$z = v + (z - v)$$

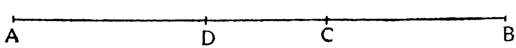
risultano dunque essenzialmente distinte, c. d. d.

45.

Una retta maggiore *è divisa in un punto soltanto nelle sue componenti.*

Sia AB, retta maggiore, divisa in C in modo che AC, CB siano incommensurabili in potenza, e formino la somma $AC^2 + CB^2$ razionale, e $AC \times CB$ mediale [prop. 39]. Dico che AB non è divisa in altro punto nelle sue componenti.

Infatti, se è possibile, sia divisa anche in D, in modo che AD, DB siano incommensurabili in potenza, formino la somma $AD^2 + DB^2$ razionale, e $AD \times DB$ sia mediale.



Poichè la differenza tra $AC^2 + CB^2$ e $AD^2 + DB^2$ è uguale alla differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$, e la differenza tra $AC^2 + CB^2$ ed $AD^2 + DB^2$ è razionale, perchè entrambi sono razionali, anche la differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$ sarebbe razionale, quantunque sia mediale, il che è impossibile [prop. 26]. Quindi una retta maggiore non è divisa in punti diversi nelle sue componenti. Dunque è divisa in un sol punto; c. d. d.

Un segmento « maggiore » si può dividere in un sol modo nelle sue componenti.

Sia

$$z = x + y$$

un segmento maggiore, dove si ha

(1) $$x^2 : y^2 \mp m : n,$$
(2) $$x^2 + y^2 \text{ razionale},$$
(3) $$xy \text{ mediale}.$$

Si supponga che si abbia un'altra decomposizione

$$z = u + v\,,$$

dove u, v soddisfano ancora alle condizioni (1), (2), (3).

Da $(x + y)^2 = (u + v)^2$ si deduce

(4) $$(x^2 + y^2) - (u^2 + v^2) = 2uv - 2xy.$$

Ma il primo membro è razionale, per l'ipotesi (2), mentre per la (3) il 2° membro è mediale, ciò che è assurdo.

Anche qui, come già nella dimostrazione della prop. 42, occorre completare la dimostrazione di EUCLIDE osservando che i due membri della (4) non possono essere tutti e due nulli. Infatti se fosse

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = \text{cost.}$$
$$xy = uv, = \text{cost.}$$

i valori assoluti di x e y sarebbero biunivocamente determinati e non potrebbero differire da quelli di u e v.

46.

Il lato di un quadrato equivalente alla somma di una superficie razionale con una mediale è diviso in un punto solamente nelle sue componenti.

Sia la retta AB, lato di un quadrato equivalente alla somma di uno spazio razionale con un mediale divisa in C, in modo che AC, CB siano incommensurabili ic potenza, formino la somma $AC + CB^2$ mediale, e $2AC \times CB$ razionale [prop. 40]. Dico che AB non è divisa in alcun

altro punto nelle sue componenti. Infatti, se è possibile, sia diviso anche in D, in modo che AD, DB siano incommensurabili in potenza, formino la somma $AD^2 + DB^2$ mediale, e $2AD \times DB$ razionale. Allora, poichè la differenza tra $2AC \times CB$ e $2AD \times DB$ è uguale alla differenza tra $AD^2 + DB^2$ ed $AC^2 + CB^2$, e la differenza tra $2AC \times CB$ e $2AD \times DB$ è razionale anche la differenza tra $AD^2 + DB^2$ e $AC^2 + CB^2$ è razionale, quantunque mediale, il che è impossibile [prop. 26]. Quindi il lato di un quadrato equivalente alla somma di una superficie razionale con una mediale non può esser diviso in punti. Dunque è diviso in un sol punto: c. d. d.

Sia z « il lato della somma di un'area razionale e di un'area mediale », vale a dire (X, 40)

(1) $$z = x + y$$

dove si ha:

$$x^2 : y^2 \neq m : n$$

$$x^2 + y^2 \text{ mediale}$$

$$2xy \text{ razionale.}$$

Se si ha adesso un'altra decomposizione

$$z = u + v,$$

dove i segmenti u e v soddisfano alle stesse 3 condizioni a cui soddisfano x e y, allora u e v coincidono necessariamente con x e y. La dimostrazione è analoga a quelle delle propp. precedenti, e consiste nell'osservare che se u, v non coincidono con x, y allora nella relazione

$$2xy - 2uv = (u^2 + v^2) - (x^2 + y^2)$$

il primo membro è razionale, mentre il secondo è mediale, ciò che è assurdo.

Risulta dunque dimostrata l'unicità della decomposizione (1).

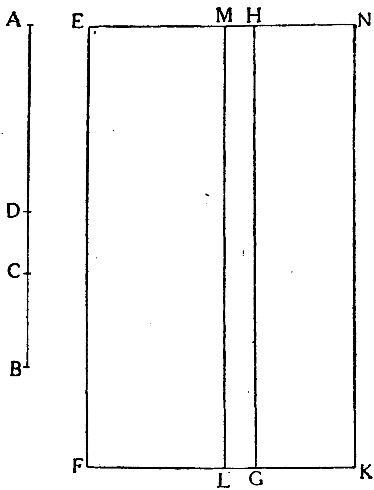
47.

Il lato di un quadrato equivalente alla somma di due superficie mediali è diviso in un punto soltanto nelle sue componenti.

Sia la retta AB divisa in C in modo che AC, CB siano incommensurabili in potenza, formino la somma $AC^2 + CB^2$ mediale, $AC \times CB$ mediale ed al tempo stesso incommensurabile con $AC^2 + CB^2$ [prop. 41]. Dico che AB non è diviso da alcun altro punto in modo simile.

Infatti, se è possibile, sia divisa anche in D; com'è chiaro, AC, DB non sono uguali: si supponga maggiore AC e si ponga la retta razionale EF, ad essa si applichi EG equivalente ad $AC^2 + CB^2$, e si applichi HK, equivalente al rettangolo $2AC \times CB$. Così $EK = AB^2$ [II, 4].

Ancora, alla retta EF si applichi EL, equivalente ad $AD^2 + DB^2$. Allora la rimanente parte $2AD \times DB = MK$. E poichè abbiamo supposto che $AC^2 + CB^2$ fosse mediale, anche EG è mediale; ed è applicato alla retta razionale EF; quindi HE è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la EF [prop. 22]. Per la stessa ragione anche HN è razionale e incommensurabile in lunghezza



con la EF. Ora, poichè $AC^2 + CB^2$ e $2AC \times CB$ sono incommensurabili, anche EG, GN sono incommensurabili [VI, 1; prop. 11]; sono inoltre razionali. Quindi EH, HN sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque EN, binomiale, è divisa in H [prop. 36]. Similmente dimostreremo che è divisa anche in M, mentre EH, MN non sono uguali: allora una retta binomiale sarebbe divisa in punti diversi, il che è impossibile [prop. 42]. Allora il lato di un quadrato equivalente alla somma di due superficie mediali non è diviso in punti diversi; dunque è diviso in un sol punto; c. d. d.

Sia z « il lato della somma di due aree mediali », cioè (X, 41)

(1) $$z = x + y\,, \quad x > y$$

dove si ha:

$$x^2 : y^2 \mathrel{\not=} m : n\,,$$
$$x^2 + y^2 \text{ mediale,}$$
$$xy \text{ mediale,}$$
$$(x^2 + y^2) : xy \mathrel{\not=} m : n$$

Si tratta di dimostrare che la decomposizione (1) è unica. Infatti supponiamo il contrario, e si abbia un'altra decomposizione

(2) $$z = u + v\,, \quad u > v,$$

dove u, v soddisfano alle stesse condizioni scritte sopra per x e y, e supponiamo che si abbia

$$u > x\,.$$

Sia α un segmento razionale qualsiasi, e poniamo

$$\alpha r = x^2 + y^2\,, \quad \alpha s = 2xy$$
$$\alpha p = u_2 + v^2\,, \quad \alpha q = 2uv.$$

Allora si ha

$$\alpha(r + s) = (x + y)^2 = z^2,$$

$$2uv = (u + v)^2 - (u^2 + v^2) = z^2 - (u^2 + v^2) = \alpha(r + s) - \alpha p.$$

Per ipotesi $x^2 + y^2$, ossia αr, è mediale, e siccome α è razionale, segue che (X, 22)

r è anche razionale e commensurabile con α solo in 2ª potenza.

Per la stessa ragione anche

s è razionale e commensurabile con α solo in 2ª potenza.

Siccome si ha

$$(x^2 + y^2) : 2xy \mathrel{\not=} m : n$$

si deduce che αr, αs sono incommensurabili, ossia r e s sono in commensurabili in 1ª potenza, ma sono invece commensurabili (essendo segmenti razionali) in 2ª potenza.

Si conclude che (X, 36)

$$r + s \text{ è una binomiale.}$$

Analogamente si dimostra che anche $p + q$ è una binomiale. Siccome si ha $x + y = u + v$, con $x > y$, $u > v$ e $u > x$, si deduce (lemma alla prop. 41)

$$u^2 + v^2 > x^2 + y^2 ,$$

ossia

$$\alpha p > \alpha r , \quad p > r .$$

Avendosi poi

$$r + s = p + q ,$$

si vede che la stessa binomiale risulta decomposta in due modi essenzialmente distinti, ciò che è impossibile per la prop. X, 42.

Risulta dunque provata l'unicità della decomposizione (1) del segmento z.

Seconda serie di definizioni.

1. Data una retta razionale e una retta binomiale divisa nelle sue parti, nella quale la differenza in potenza tra la parte maggiore e la minore è equivalente al quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore, se la parte maggiore è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data, essa si dirà *prima binomiale.*

2. Se la parte minore è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data, essa si dirà *seconda binomiale.*

3. Se nessuna delle due parti è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data, essa si dirà *terza binomiale.*

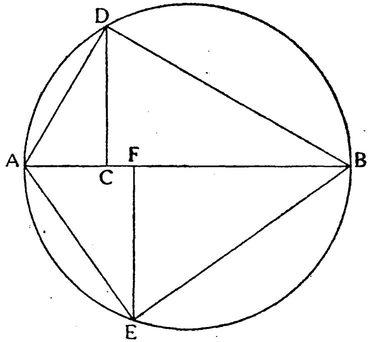
4. Ancora, se la differenza tra la parte maggiore e la minore, in potenza, è equivalente al quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con la maggiore, e questa maggiore è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data, essa si dirà *quarta binomiale.*

5. Se la minore è commensurabile con la data, si dirà *quinta binomiale.*

6. Se nessuna delle due, si dirà *sesta binomiale.*

STIEFEL nella sua Arithmetica integra costruisce tutte le sei specie di binomiali nel modo seguente.

Il diametro AB sia razionale, commensurabile coll'unità in 1[a] potenza. Sia CD la media proporzionale tra $\frac{AB}{4} = AC$ e il resto CB del diametro.



Analogamente sia EF la media proporzionale di $\frac{AB}{3} = AF$ e il resto FB del diametro.

Allora le varie binominali sono:

$$AD + DC = \frac{AB}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ è la prima binomiale,}$$

$$BD + BC = \frac{AB}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) \text{ è la seconda binomiale,}$$

$$DB + BE = \frac{AB}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \text{ è la terza binomiale,}$$

$$AB + BE = AB\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \text{ è la quarta binomiale,}$$

$$EB + BF = AB\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2}{3}\right) \text{ è la quinta binomiale,}$$

$$AE + EF = AB\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \text{ è la sesta binomiale.}$$

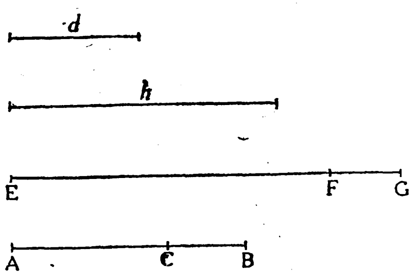
Così p. es., se $AB = 12$, allora le 6 binomiali sono ordinatamente:

1) $6 + \sqrt{27}$; 2) $\sqrt{108} + 9$; 3) $\sqrt{108} + \sqrt{96}$;
4) $12 + \sqrt{96}$; 5) $\sqrt{96} + 8$; 6) $\sqrt{48} + \sqrt{32}$.

48.

Trovare una retta prima binomiale.

Sian dati due numeri AC, CB, in modo che AB abbia con BC il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato, ed AB non abbia con CA il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato [prop. 28, lemma]; si ponga una retta razionale d, e sia EF commensurabile in lunghezza con la d; allora EF sarà razionale [def. 3]; e si abbia $BA : AC = EF^2 : FG^2$ [prop. 6, coroll.]. Ma AB ha con AC il rapporto di un numero ad un numero. Allora anche EF^2 ha con FG^2 il rapporto che un numero ha con un numero. Perciò EF^2, FG^2 sono commensurabili [prop. 6]; ed EF è razionale; perciò anche FG è razionale. E poichè BA non ha con AC il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato,



neppure EF^2 ha con FG^2 il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Così EF, FG sono razionali, commensurabili soltanto in potenza; dunque EG è binomiale.

Dico che è *prima*.

Infatti, poichè $BA : AC = EF^2 : FG^2$, e $BA > AC$, sarà anche $EF^2 > FG^2$ [V, 14]. Sia dunque $FG^2 + h^2 = EF^2$; poichè $BA : AC = EF^2 : FG^2$, convertendo [V, 19, coroll.] $AB : BC = EF^2 : h^2$. Ma AB ha con BC il rapporto che un quadrato ha con un quadrato; perciò anche EF^2 ha con h^2 il rapporto che un quadrato ha con un quadrato. Quindi EF, h sono commensurabili in lunghezza [prop. 9]. Così la differenza tra EF^2 ed FG^2 è il quadrato di una retta commensurabile con EF, e inoltre EF, FG sono razionali, ed EF, d sono commensurabili in lunghezza.

Dunque EG è *prima binomiale*; c. d. d.

Trovare una prima binomiale, cioè una binomiale della forma

$$l\alpha + \sqrt{\beta},$$

dove α è un segmento razionale dato a priori, con la condizione che si abbia

$$l\alpha > \sqrt{\beta}, \quad \sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha = n : m.$$

Costruzione.

Si scelgono a piacere due numeri quadrati m^2, n^2, tali che $m^2 - n^2$ non sia un quadrato perfetto, e si pone

$$l^2\alpha^2 : \beta = m^2 : (m^2 - n^2).$$

Da questa eguaglianza segue che β è commensurabile con $l\alpha$ solo in 2^a potenza, quindi

$$l\alpha + \sqrt{\beta} \text{ è una binomiale.}$$

Poi da

$$(l^2\alpha^2 - \beta) : l^2\alpha^2 = n^2 : m^2,$$

ossia da

$$\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha = n : m,$$

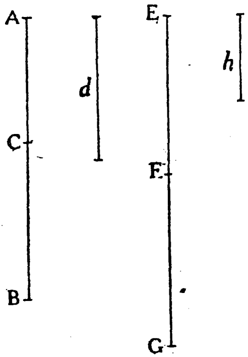
si conclude che $l\alpha + \sqrt{\beta}$ è una prima binomiale. Si ha

$$l\alpha + \sqrt{\beta} = l\alpha + l\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

49.

Trovare una seconda binomiale.

Siano dati due numeri AC, CB, per modo che la somma AB abbia con BC il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, e con AC non abbia il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato [prop. 28, lemma]. Si ponga la retta razionale d e la EF, commensurabile in lunghezza con la d; allora la EF è razionale. Sia ora anche $CA : AB = EF^2 : FG^2$ [prop. 6, coroll.]; allora anche EF^2 ed FG^2 sono commensurabili



[prop. 6]. Perciò anche FG è razionale. E poichè CA non ha con AB il rapporto di un numero quadrato con un numero quadrato, neppure EF^2 ha con FG^2 il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Allora EF, FG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9]; perciò EF, FG sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque EF è binomiale [prop. 36]. Bisogna ora dimostrare che è *seconda* binomiale.

Infatti, poichè, invertendo, $BA : AC = GF^2 : FE^2$, e $BA > AC$, sarà $GF^2 > FE^2$ [V, 14].

Sia $GF^2 = EF^2 + h^2$. Convertendo, $AB : BC = FG^2 : h^2$. Ma AB ha con BC il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Allora anche FG^2 ha con h^2 il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Perciò FG, h sono commensurabili in lunghezza [prop. 9]. Quindi la differenza tra FG^2 ed FE^2 è il quadrato di una retta commensurabile con FG; ed FG, FE sono razionali, commensurabili solo in potenza, e la minor parte EF è commensurabile in lunghezza con la retta data d. Dunque EG è *seconda binomiale*; c. d. d.

Trovare una seconda binomiale, cioè una binomiale della forma

$$\sqrt{\beta} + l\alpha, \quad (\alpha \text{ razionale, data a priori})$$

con la condizione che si abbia

$$\sqrt{\beta} > l\alpha, \quad \sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} = n : m$$

Fissato a piacere il segmento $l\alpha$, si trova β dalla proporzione

$$l^2\alpha^2 : \beta = (m^2 - n^2) : m^2,$$

dove $m^2 - n^2$ non è un quadrato perfetto.

Segue subito intanto che $\sqrt{\beta}$ è commensurabile con $l\alpha$ solo in 2ª potenza, e quindi $\sqrt{\beta} + l\alpha$ è una binomiale. Inoltre si ha evidentemente $\sqrt{\beta} > l\alpha$. Infine si ha

$$\beta - l^2\alpha^2 : \beta = n^2 : m^2$$

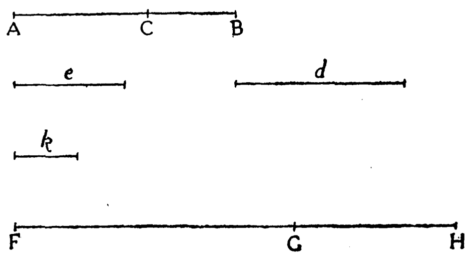
e quindi

$$\sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} = n : m, \qquad \text{c. d. d.}$$

50.

Trovare una retta terza binomiale.

Sian dati due numeri AC, CB per modo che AB abbia con BC il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato, ed invece con AC non abbia il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Sia dato inoltre un altro numero non quadrato d, che non abbia con alcuno dei BA, AC il rapporto di un quadrato ad un quadrato; si ponga una certa retta razionale e, e sia $d : AB = e^2 : FG^2$ [prop. 6, coroll.]. Allora e, FG sono commensurabili [prop. 6],



ed e è razionale; perciò anche FG è razionale. E poichè d, AB non hanno fra loro il rapporto di due quadrati, neppure e^2 ed FG^2 avranno fra loro il rapporto di due quadrati. Allora e, FG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9]. Sia ora $BA : AC = FG^2 : GH^2$; così FG^2, GH^2 sono commensurabili; ma FG è razionale; allora anche GH è razionale; e poichè BA, AC non hanno fra loro il rapporto di due quadrati, neppure FG^2, GH^2 avranno fra loro il rapporto di due quadrati. Così FG, GH sono incommensurabili in lunghezza; perciò FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque FH è binomiale [prop. 36]. Dico che è *terza binomiale*. Infatti, poichè $d : AB = e^2 : FG^2$, e $BA : AC = FG^2 : GH^2$, *ex aequo* [V, 22] sarà $d : AC = e^2 : GH$. Ma d, AC non hanno fra loro il rapporto di due quadrati. Così neppure e^2, GH^2 hanno tra loro il rapporto di due quadrati.

Perciò e, GH sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9]. E poichè $BA : AC = FG^2 : GH^2$, sarà $FG^2 > GH^2$ [V, 14]. Sia dunque $FG^2 = GH^2 + k^2$; allora, convertendo [V, 19, coroll.], $AB : BC = FG^2 : k^2$; ma AB, BC hanno fra loro il rapporto di due quadrati. Perciò anche FG^2, k^2 hanno tra loro il rapporto di due quadrati. Allora FG, k sono commensurabili in lunghezza; e così la differenza tra FG^2 e GH^2 è il quadrato di una retta commensurabile con FG; inoltre FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza, e nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la retta e.

Dunque FH è *terza binomiale;* c. d. d.

Trovare una terza binomiale, cioè una binomiale della forma

$$\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma},$$

tale che si abbia

$$\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma}\,, \quad \sqrt{\beta}:\sqrt{\beta-\gamma}=m:n\,.$$

Costruzione.

Siano m^2, n^2 due numeri quadrati arbitrarii, tali però che m^2-n^2 non sia un quadrato. Sia inoltre p un numero intero arbitrario, che non sia un quadrato perfetto, e tale che il rapporto $\frac{p}{m^2-n^2}$ non sia eguale al rapporto di due quadrati. Ciò premesso, si ponga

$$\alpha^2:\beta=p:m^2, \tag{2}$$

dove α è un segmento razionale dato a priori. Siccome p è supposto non quadrato, il rapporto $\frac{p}{m^2}$ non è eguale al rapporto di due quadrati. Dunque $\sqrt{\beta}$ è un segmento razionale, commensurabile con α solo in 2^a potenza. Per trovare γ poniamo

$$\beta:\gamma=m^2:(m^2-n^2) \tag{2}$$

Sarà anche $\sqrt{\gamma}$ un segmento razionale, commensurabile con α solo in 2^a potenza, perchè si ha da (1) e (2), per V, 22,

$$\alpha^2:\gamma=p:(m^2-n^2).$$

Inoltre, la (2) mostra che $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\gamma}$ sono commensurabili solo in 2^a potenza, quindi

$$\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma} \text{ è una binomiale.}$$

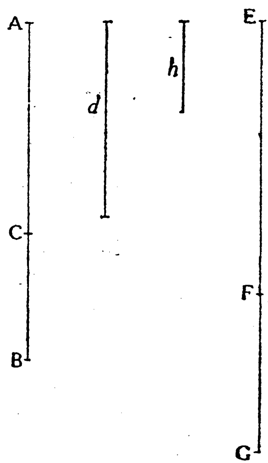
Inoltre dalla (2) si ha $\sqrt{\beta}>\sqrt{\gamma}$, e infine dalla stessa (2) si ricava

$$\beta:\beta-\gamma=m^2:n^2, \text{ ossia } \sqrt{\beta}:\sqrt{\beta-\gamma}=m:n\,, \quad \text{c. d. d.}$$

51.

Trovare una retta quarta binomiale.

Sian dati due numeri AC, CB, per modo che AB non abbia nè con BC, nè con AC il rapporto di un quadrato ad un quadrato [prop. 28, lemma]. E si ponga la retta razionale d, e sia EF commensurabile in lunghezza con la d. Allora EF è razionale. Sia inoltre $BA : AC = EF^2 : FG^2$ [prop. 6, coroll]. Allora EF^2, FG^2 sono commensurabili [prop. 6]; così anche FG è razionale. E poichè BA, AC non hanno tra loro il rapporto di due quadrati, neppure EF^2, FG^2 avranno tra loro il rapporto di due quadrati. Allora EF, FG sono incommensurabili in lunghezza.



Allora EF, FG sono razionali, commensurabili solo in potenza: perciò FG è binomiale [prop. 36]. Dico che è *quarta binomiale*. Infatti, poichè $BA : AC = EF^2 : FG^2$, sarà $EF^2 > FG^2$ [V, 14]. Sia dunque $EF^2 = FG^2 + h^2$.

Allora, convertendo, [V, 19, coroll.], $AB : BC = EF^2 : h^2$. Ma AB, BC non hanno fra loro il rapporto di due quadrati; dunque neppure EF^2, h^2 avranno fra loro il rapporto di due quadrati. Perciò EF, h sono incommensurabili in lunghezza. Così, la differenza tra EF^2 ed FG^2 è il quadrato di una retta incommensurabile con EF; inoltre EF, FG sono razionali, commensurabili solo in potenza, ed EF, d sono commensurabili in lunghezza.

Dunque EG è *quarta binomiale*; c. d. d.

Trovare una quarta binomiale, cioè una binomiale della forma

$$l\alpha + \sqrt{\beta}$$

dove si abbia $l\alpha > \sqrt{\beta}$, $l\alpha : \sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} \neq m : n$ ($l\alpha$ essendo come nelle proposizioni precedenti un segmento commensurabile in 1ª potenza col segmento razionale α).

A tale scopo si fissano due numeri interi qualsiasi m, n, tali che nessuno dei rapporti $(m+n):m$, $(m+n):n$ sia eguale al rapporto di due quadrati perfetti.

Si pone quindi

$$(m+n):m = l^2\alpha^2 : \beta. \tag{1}$$

Il segmento $l\alpha + \sqrt{\beta}$ sarà la binomiale cercata.

Infatti, dalla (1) segue che $\sqrt{\beta}$ è razionale, ma incommensurabile con $l\alpha$ in 1ª potenza.

Quindi $l\alpha + \sqrt{\beta}$ è una binomiale.

Dalla (1) segue ancora $l\alpha > \sqrt{\beta}$, e inoltre si ricava

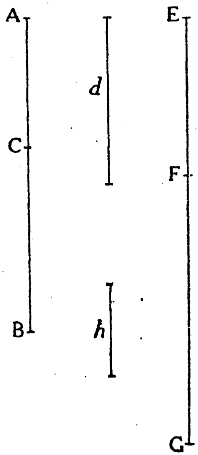
$$l^2\alpha^2 - \beta : l^2\alpha^2 = n : (m+n).$$

Dunque, $\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta}$ e $l\alpha$ non sono commensurabili in 1ª potenza. Risulta dunque provato che $l\alpha + \sqrt{\beta}$ è una quarta binomiale.

52.

Trovare una retta quinta binomiale.

Siano dati due numeri AC, CB, per modo che AB non abbia con alcuno dei due il rapporto di un quadrato ad un quadrato [prop. 28, lemma]; si ponga una retta razionale d, e sia EF commensurabile con d. Allora EF è razionale. Sia ora $CA : AB = EF^2 : FG^2$; ma CA,



AB non hanno tra loro il rapporto di due quadrati; allora neppure EF^2, FG^2 avranno tra loro il rapporto di due quadrati; perciò EF, FG sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque EG è binomiale.

Dico ora che è *quinta binomiale.* Infatti, poichè $CA : AB = EF^2 : FG^2$, invertendo [V, 7, coroll.]

$BA : AC = FG^2 : FE^2$. Allora $GF^2 > FE^2$ [V, 14]. Sia dunque $GF^2 = FE^2 + h^2$; convertendo [V, 19, coroll.] $AB : BC = GF^2 : h^2$. Ma AB, BC non hanno fra loro il rapporto di due quadrati: allora neppure FG^2, h^2 hanno tra loro il rapporto di due quadrati. Così, FG, h sono incommensurabili in lunghezza. Perciò la differenza tra FG^2 ed FE^2 è il quadrato di una retta incommensurabile con FG. Inoltre GF, FE sono razionali, commensurabili solo in potenza, e la minor parte EF è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data d.

Dunque EG è quinta *binomiale*; c. d. d.

Trovare una quinta binomiale

$$\sqrt{\beta} + l\alpha,$$

dove si abbia $\sqrt{\beta} > l\alpha$, $\sqrt{\beta} : \sqrt{\beta - l^2\alpha^2} \neq m : n$.

Conservando le notazioni della proposizione precedente, si ponga

$$m : (m + n) = l^2\alpha^2 : \beta.$$

Allora si conclude subito che $\sqrt{\beta}$ è razionale, incommensurabile con $l\alpha$ in 1ª potenza. Inoltre $\sqrt{\beta} > l\alpha$, e poi

$$(m + n) : n = \beta : (\beta - l^2\alpha^2),$$

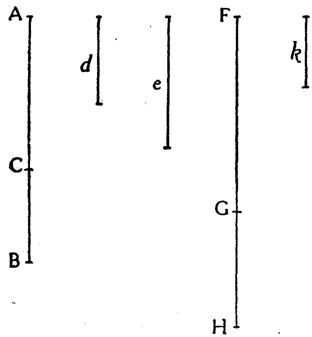
cioè $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\beta - l^2\alpha^2}$ sono incommensurabili in 1ª potenza. Dunque $\sqrt{\beta} + l\alpha$ è una quinta binomiale.

53.

Trovare una retta sesta binomiale.

Sian dati due numeri AC, CB, per modo che AB non abbia con alcuno di loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. E sia dato un altro numero d, che non sia un quadrato, e che non abbia con alcuno dei BA, AC il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Si ponga una retta razionale e, e sia $d : AB = e^2 : FG^2$; così e^2, FG^2 sono commensurabili [prop. 6]; ma e è razionale, dunque anche FG è razionale. E poichè d non ha con AB il rapporto di un numero quadrato con un numero quadrato, neppure e^2 ha con FG^2 il rapporto di un numero quadrato con un numero quadrato. Quindi e, FG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9].

Sia ora $BA : AC = FG^2 : GH^2$ [prop. 6, coroll.]; così FG^2, GH^2 sono commensurabili; ma GH^2 è razionale, perciò anche GH è razionale. E poichè BA non ha con AC il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato, neppure FG^2 ha con GH^2 il rapporto di un quadrato ad un quadrato.



Quindi e, FG, sono incommensurabili in lunghezza. Sia ora nuovamente $BA : AC = FG^2 : GH^2$; allora

FG^2, GH^2 sono commensurabili, GH^2 è razionale e quindi anche GH è razionale. E poichè AB non ha con AC il rapporto che un quadrato ha con un quadrato, neppure FG^2 ha con GH^2 il rapporto che un quadrato ha con un quadrato. Così FG, GH sono incommensurabili in lunghezza. Perciò FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza; quindi FH è binomiale.

Bisogna ora dimostrare che è *sesta*. Infatti, poichè $d : AB = e^2 : FG^2$, e $BA : AC = FG^2 : GH^2$, *ex aequo* sarà $d : AC = e^2 : GH^2$. Ma d non ha con AC il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Perciò neppure e^2 ha con GH^2 il rapporto di un quadrato ad un quadrato. Così e, GH, sono incommensurabili in lunghezza; ma abbiamo dimostrato che anche e, FG sono incommensurabili; quindi ciascuna delle FG, GH, è incommensurabile con la retta e. E poichè $BA : AC = FG^2 : GH^2$, sarà $FG^2 > GH^2$ [V, 14].

Sia $FG^2 = GH^2 + k^2$. Convertendo si avrà $AB : BC = FG^2 : k^2$. Ma AB non ha con BC il rapporto di un numero quadrato ad un numero quadrato. Perciò neppure FG^2 ha con k^2 il rapporto di un quadrato ad un quadrato. E così FG, k sono incommensurabili in lunghezza. Allora FG^2 supera GH^2 del quadrato di una retta incommensurabile con FG, ed FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza; e nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la data e.

Dunque FG è una retta sesta binomiale; c. d. d.

Trovare una sesta binomiale

$$\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma},$$

dove si ha $\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma}$, e $\sqrt{\beta} : \sqrt{\beta - \gamma} \neq m : n$.

Per questo scopo, fissando di nuovo due numeri interi m, n, tali che nessuno dei rapporti $(m+n):m$, $(m+n):n$ sia eguale al rapporto di quadrati perfetti, si scelga inoltre un numero intero p, soggetto alla sola condizione che anche i rapporti $p:(m+n)$, $p:m$ non siano eguali a un rapporto di quadrati perfetti.

Sia poi α un segmento razionale, arbitrariamente scelto. Poniamo

$$p:(m+n) = \alpha^2 : \beta; \tag{1}$$

$$(m+n):m = \beta : \gamma. \tag{2}$$

Allora $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ è la binomiale cercata.

Infatti, dalla (1) segue che $\sqrt{\beta}$ è commensurabile con α solo nella 2^a potenza. Lo stesso vale anche per il segmento $\sqrt{\gamma}$, perchè dalla (2) segue che γ è commensurabile con β in 1^a potenza: inoltre dalla medesima (2) e dalle ipotesi sui numeri m e n, si deduce che $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\gamma}$ sono commensurabili solo in 2^a potenza, e quindi $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ è una binomiale.

Infine si ha evidentemente $\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma}$ e inoltre

$$\beta : (\beta - \gamma) = (m+n) : n,$$

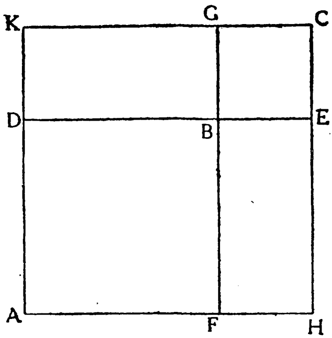
e quindi $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\beta - \gamma}$ non sono commensurabili in 1^a potenza.

Risulta dunque provato che $\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$ è una sesta binomiale.

LEMMA.

Siano due quadrati *AB*, *BC*, disposti in modo che *DB*, *BE* giacciano su una stessa retta. Allora anche *FB*, *BG* saranno per diritto. Si completi il parallelogrammo *AC*. Dico che *AC* è un quadrato, che *DG* è medio proporzionale tra *AB*, *BC*, e inoltre *DC* è medio proporzionale tra *AC*, *CB*.

Infatti, poichè $DB = BF$, $BE = BG$, sarà $DE = GF$. Ma $DE = AH = KC$, $FG = AK = HC$



[I, 34], perciò $AH = KC = AK = HC$.

Allora il parallelogrammo AC è equilatero; ma è rettangolo, dunque è quadrato.

E poichè $FB : BG = DB : BE$, ed $FB : BG = AB : DG$, $DB : BE = DG : BC$ [VI, 1] sarà anche $AB : DG = DG : BC$. Dunque DG è medio proporzionale tra AB, BC.

Dico ora che DC è medio proporzionale tra AC, CB.

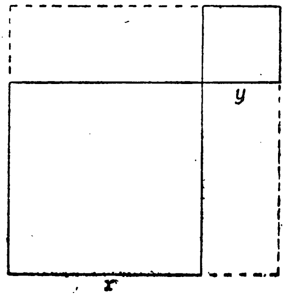
Infatti, poichè $AD : DK = KG : GC$, perchè sono rispettivamente uguali, componendo si ha $AK : KD = KC : CG$. Ma $AK : KD = AC : CD$, $KC : CG = DC : CB$; allora $AC : DC = DC : BC$.

Dunque DC è medio proporzionale tra AC, CB;

c. d. d.

Se si adattano diagonalmente due quadrati x^2, y^2 e si completa la figura per ottenere il quadrato $(x + y)^2$, si vede che (VI, 1)

$$x^2 : xy = x : y,$$
$$xy : y^2 = x : y,$$



quindi

$$x^2 : xy = xy : y^2,$$

cioè il rettangolo xy è medio proporzionale fra i quadrati x^2, y^2.

Analogamente si ha

$$(x+y)^2 : (x+y)y = (x+y) : y,$$
$$(x+y)y : y^2 = (x+y) : y,$$

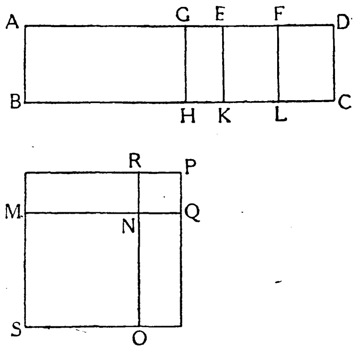
cioè il rettangolo $(x+y)y$ è medio proporzionale dei quadrati $(x+y)^2$ e y^2.

54.

Se un rettangolo è formato da una retta razionale e da una prima binomiale, la retta il cui quadrato è equivalente a detto rettangolo è irrazionale e si dice binomiale.

Sia infatti il rettangolo AC compreso da una retta razionale AB e dalla binomiale AD. Dico che la retta, il cui quadrato equivale ad AC, è irrazionale, e si dice binomiale.

Infatti, poichè AD è prima binomiale, sia e il punto di divisione. Sia AE la parte maggiore. È chiaro allora che AE, ED sono razionali, commensurabili soltanto in potenza, e che AE^2 supera ED^2 del quadrato di una retta commensurabile con AE, e AE è commensurabile in lunghezza con la data AB.



Si divida ED in due parti uguali. Poichè AE^2 supera ED^2 del quadrato di una retta commensurabile con AE, se si applica alla quarta parte del quadrato minore, cioè al quadrato EF^2, un parallelogrammo equivalente alla maggiore AE, mancante di un quadrato, la AE vien divisa in parti commensurabili [prop. 17]. Si applichi dunque alla AE il rettangolo $AG \times GE$, equivalente al quadrato EF^2. Allora AG, GE saranno commensurabili in lunghezza. Da G, E, F si conducano le parallele GH, EK, FL a ciascuna delle AB, CD. Si costruisca il quadrato SN, equivalente al parallelogrammo AH, e $NP =$ $= GK$ [II, 14]; e si dispongano in modo che MN, NQ

siano per diritto; allora anche RN, NO saranno per diritto. Si completi il parallelogrammo SP; così SP è un quadrato; e poichè $AG \times GE = EF^2$, sarà $AG : EF = FE : EG$ [VI, 17].

Perciò anche $AH : EL = EL : KG$ [VI, 1]. Così EL è medio proporzionale fra SN e NP. Ma anche MR è medio proporzionale tra gli stessi SN, NP. Perciò $EL = MR$. Quindi anche $EL = OQ$ [I, 43]. Ma anche $AH + GK = SN + NP$; perciò la somma $AC = SP = MQ^2$. Dunque MQ^2 è equivalente ad AC.

Dico che MQ è binomiale. Infatti, poichè AG è commensurabile con GE, la AE è commensurabile con ciascuna delle AG, GE [prop. 15]. Ma abbiamo supposto che anche le AE, AB fossero commensurabili. Perciò anche le AG, GE sono commensurabili con la AB. Ma AB è razionale, dunque ciascuna delle AG, GE è razionale. Quindi anche AH, KG sono razionali [prop. 19], e AH, GK sono commensurabili. Ma $AH = SN$, $GK = NP$. Allora anche SN, NP, cioè MN^2, NQ^2, sono razionali e commensurabili. E poichè AE, ED sono incommensurabili in lunghezza, mentre AE, AG sono commensurabili, come pure DE, EF, le AG, EF sono incommensurabili. Perciò anche AH ed EL saranno incommensurabili [VI, 1; prop. 11]. Ma $AH = SN$, $EL = MR$. Perciò anche SN, MR saranno incommensurabili. Inoltre $SN : MR = ON : NR$ [VI, 1]. Allora ON, NR sono incommensurabili [prop. 11]. Ma $ON = MN$, $NR = NQ$. Quindi MN, NQ sono incommensurabili. Ed MN^2, NQ^2 sono commensurabili, e ciascuna d'essi è razionale. Dunque MN, NQ sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Così, la MQ è binomiale, ed $MQ^2 = AC$; c. d. d.

Se si fa il prodotto di un segmento razionale e di una prima binomiale, la radice quadrata di questo prodotto è un segmento irrazionale e precisamente una binomiale.

Sia

$$\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})$$

il detto prodotto. Per la definizione di prima binomiale si ha (v. Definizioni II. 1, dopo X, 47)

$$l\alpha > \sqrt{\beta} \tag{1}$$

$$\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha = m : n. \tag{2}$$

Dividiamo il segmento $l\alpha$ in due parti x, y in modo che si abbia

$$x + y = l\alpha, \tag{3}$$

$$xy = \frac{\beta}{4}. \tag{4}$$

Allora saranno x e y segmenti razionali, commensurabili con α in 1ª potenza (X, 17).

Poniamo adesso

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 = \alpha x \\ v^2 = \alpha y. \end{array} \right. \tag{5}$$

Per la (4) si ha (VI, 17)

$$x : \frac{\sqrt{\beta}}{2} = \frac{\sqrt{\beta}}{2} : y,$$

e quindi

$$\alpha x : \frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha = \frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha : \alpha y,$$

ossia $\frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha$ è la media proporzionale tra αx, αy.

Per le (5) si ha dunque

$$u^2 : \frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha = \frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha : v^2.$$

Ma per il lemma precedente si ha

$$u^2 : uv = uv : v^2,$$

quindi si deduce

$$\frac{\sqrt{\beta}}{2}\alpha = u \cdot v. \tag{6}$$

Dalle (5), (6) e (3) si ricava

$$(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = \alpha(x+y) + \sqrt{\beta}\cdot\alpha =$$
$$= \alpha \cdot l\alpha + \alpha \cdot \sqrt{\beta} = \alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})$$

e quindi

$$\sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})} = u + v.$$

Da questa espressione di $\sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})}$ si deduce facilmente che essa rappresenta una binomiale. Infatti, si è già osservato che x, y sono segmenti razionali, commensurabili con α in 1ª potenza. Quindi, per (5), le aree u^2, v^2 sono razionali, e perciò i segmenti u, v sono anch'essi razionali. Resta da provare che questi sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza. Si ha

$$u : v = u^2 : uv$$

e per le (5) e (6) si ottiene

$$u : v = x : \frac{\sqrt{\beta}}{2}.$$

Ma x è commensurabile coll'unità (cioè con α) in 1ª potenza, mentre $\frac{\sqrt{\beta}}{2}$ non lo è, quindi x e $\frac{\sqrt{\beta}}{2}$ non sono commensurabili in 1ª potenza. Lo stesso vale dunque per u e v, c. d. d.

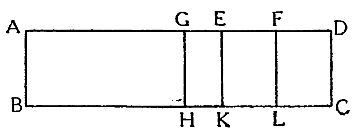
A questa proposizione STIEFEL osserva nella sua Aritmetica Integra (liber II, Cap. XVII): « In questa proposizione si cerca la radice quadrata di una prima binomiale ». Egli aggiunge una serie di esempi, dove l'estrazione di una radice quadrata conduce alla binomiale prima, seconda ecc., p. es. $\sqrt{34+\sqrt{1152}} = \sqrt{18}+4$ (ove $34+\sqrt{1152}$ è una prima binomiale, $\sqrt{18}+4$ è seconda binomiale).

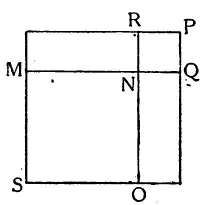
Questa interpretazione di STIEFEL è caratteristica per il suo tempo, mentre in verità questa proposizione dà la condizione della riducibilità dell'espressione $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$.

55.

Se un'area è compresa da una retta razionale e una seconda binomiale, la retta il cui quadrato è equivalente a detta area è irrazionale, ed è detta prima bimediale.

L'area infatti $ABCD$ sia compresa dalla retta razionale AB e dalla seconda binomiale AD. Dico che la retta il cui quadrato equivale all'area AC è prima bimediale.





Infatti, poichè AD è seconda binomiale, si divida in E nelle sue parti, per modo che AE sia la parte maggiore. Così AE, ED sono razionali, commensurabili solo in potenza, AE^2 supera ED^2 del quadrato d'una retta commensurabile con AE, e la parte minore ED è commensurabile in lunghezza con la retta AB. Si divida ora ED per metà in F, e alla retta AE si applichi $AG \times GE$, equivalente al quadrato EF^2, e mancante d'un quadrato.

Così AG, GE sono commensurabili in lunghezza [prop. 17]. Dai punti G, E, F si conducano le parallele GH, EK, FL alle AB, CD; e si costruisca un quadrato SN, equivalente al parallelogrammo AH, e NP equivalente al parallelogrammo GK, e si dispongano in modo che MN, NQ siano per diritto. Così anche RN, NO saranno per diritto. Si completi il parallelogrammo SP. Allora da ciò che è stato dimostrato appare che MR è medio proporzionale tra SN, NP, ed è uguale ad EL; e che $MQ^2 = AC$. Occorre dimostrare che MQ è prima bimediale. Poichè AE, ED sono incommensurabili in lunghezza, mentre ED, AB sono commensurabili, le AE, AB saranno incommensurabili [prop. 13]. E poichè AG, EG sono commensurabili, anche AE è commensurabile con ciascuna delle AG, GE. Ma AE, AB sono incommensurabili in lunghezza. Perciò anche le AG, GE sono incommensurabili con la AB; così BA e AG, GE sono razionali, commensurabili soltanto in potenza. Quindi ciascuna delle AH, GK è mediale, e per conseguenza anche ciascuna delle SN, NP è mediale.

Così, anche MN, NQ sono mediali. E poichè AG, GE sono commensurabili in lunghezza, anche AH, GK, cioè SN, NP oppure MN^2, NQ^2 sono commensurabili. E poichè AE, ED sono commensurabili in lunghezza, ed anche AE, AG sono commensurabili, come ED, EF, le AG, EF sono incommensurabili. Dimodochè AH, EL, cioè SN, MR, cioè ON, NR, cioè MN, NQ sono incommensurabili in lunghezza.

Ma abbiamo dimostrato che MN, NQ sono mediali. Così MN, NQ sono mediali, commensurabili in potenza. Dico ora che esse comprendono un'area razionale. Infatti, poichè abbiamo supposto che DE fosse commensurabile con ciascuna delle AB, EF, anche AB, EF sono commensurabili. E ciascuna delle due è razionale. Perciò EL, cioè MR, è razionale.

Ma $MR = MN \times NQ$. E se si sommano due mediali commensurabili solo in potenza, tali che comprendono un'area razionale, la somma è irrazionale, e si dice prima bimediale.

Dunque MQ è prima bimediale; c. d. d.

La radice quadrata di un prodotto di un segmento razionale e di una seconda binomiale è una prima mediale.

Si abbia dunque il prodotto

$$\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta}),$$

dove, per la definizione della seconda binomiale, si ha

$$(1) \qquad \sqrt{\beta} > l\alpha, \quad \sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} = m : n.$$

Dividiamo il segmento $\sqrt{\beta}$ in due parti x, y in modo che si abbia

$$(2) \qquad x + y = \sqrt{\beta},$$

$$(3) \qquad xy = \frac{l^2\alpha^2}{4}.$$

Dalla (1), in virtù della prop. X, 17, si deduce che x e y sono commensurabili tra loro in 1ª potenza.

Ciò premesso si ponga

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha x = u^2 \\ \alpha y = v^2 . \end{cases}$$

Per la (3) si ha

$$x : \frac{l\alpha}{2} = \frac{l\alpha}{2} : y,$$

e quindi

$$\alpha x : \alpha \frac{l\alpha}{2} = \alpha \frac{l\alpha}{2} : \alpha y,$$

ossia, per le (4),

$$u^2 : \alpha \frac{l\alpha}{2} = \alpha \frac{l\alpha}{2} : v^2.$$

Ma avendosi anche

$$u^2 : uv = uv : v^2,$$

si deduce

$$(5)\qquad uv = \alpha \cdot \frac{l\alpha}{2} .$$

Ora si ha, per le (4), (5) e (2)

$$(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = \alpha(x + y) + \alpha \cdot l\alpha = \alpha\sqrt{\beta} + \alpha \cdot l\alpha = \\ = \alpha(l\alpha + \sqrt{\beta}),$$

e quindi

$$\sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})} = u + v.$$

È facile adesso provare che $u + v$ è una prima bimediale.

Infatti, osserviamo anzitutto che x, y sono commensurabili tra loro in 1ª potenza, e siccome la loro somma $x + y = \sqrt{\beta}$ è commensurabile con α solo in 2ª potenza, segue che x, y sono commensurabili con α solo in 2ª potenza. Lo stesso vale per αx e αy, i quali risultano dunque (X, 21) prodotti mediali. Avendosi

$$u = \sqrt{\alpha x}, \quad v = \sqrt{\alpha y},$$

si deduce (X, 21) che u, v *sono mediali.*

Siccome x, y sono commensurabili in 1ª potenza, anche αx, αy, u^2 e v^2 *sono commensurabili tra loro in 1ª potenza.*

D'altra parte, siccome x è incommensurabile con α in 1ª potenza, lo stesso vale anche per αx e $\alpha \frac{l\alpha}{2}$, ossia, per (4) e (5), u^2 e uv sono incommensurabili in 1ª potenza, e lo stesso vale dunque per u e v.

Risulta perciò che u, v *sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza.*

Inoltre dalla (5) si deduce (X, 19) che il prodotto $uv = \alpha \cdot \frac{l\alpha}{2}$ è razionale, perchè ambedue i fattori sono razionali e commensurabili tra loro in 1ª potenza.

I segmenti u, v sono dunque due mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, e tali che il prodotto uv è razionale. La loro somma $u + v$, e quindi $\sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})}$, è per definizione (X, 37) una prima bimediale.

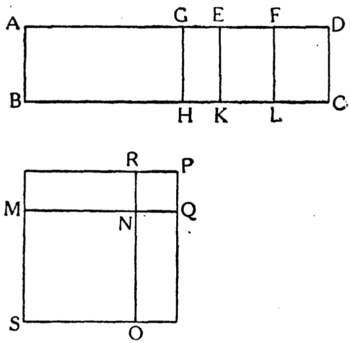
56.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una terza binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è irrazionale, ed è detta seconda bimediale.

L'area $ABCD$ sia infatti compresa dalla retta razionale AB e dalla terza binomiale AD, divisa in E nelle sue parti, delle quali la maggiore è AE. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AC è irrazionale, e vien detta seconda bimediale.

Si paragonino infatti le stesse cose di prima. Poichè AD è terza binomiale, AE, ED sono razionali, commensurabili solo in potenza, ed AE^2 supera ED^2 del quadrato di una retta commensurabile con AE, e inoltre nessuna delle due rette AE, ED è commensurabile in lunghezza con AB, procedendo come nella proposizione precedente dimostreremo che $MQ^2 = AC$, ed MN, NQ

sono mediali, commensurabili solo in potenza. Perciò MQ è bimediale.



Bisogna ora dimostrare che è *seconda*.

Poichè DE, AB, cioè DE, EK sono incommensurabili in lunghezza, mentre DE, EF sono commensurabili, ED ed EK sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13] e sono razionali. Così FE, EK sono razionali, commensurabili solo in potenza. Per questa ragione EL, cioè MR, è mediale [prop. 21] ed è compresa dalle rette MN, NQ. Così $MN \times NQ$ è mediale.

Dunque MQ è bimediale [prop. 38]; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale e di una terza binomiale è una seconda bimediale.

Si abbia dunque il prodotto

$$\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}), \quad (\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma})$$

dove per definizione di terza binomiale si ha

$$\sqrt{\beta - \gamma} : \sqrt{\beta} = m : n. \tag{1}$$

Inoltre α non è commensurabile in 1ª potenza con $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\gamma}$. Poniamo ancora, come nelle proposizioni precedenti

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{\gamma}{4};$$

e inoltre poniamo

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Allora si ricava

$$uv = \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{2},$$

$$u + v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})}.$$

Si deduce facilmente che avendosi $u = \sqrt{\alpha x}$, $v = \sqrt{\alpha y}$, u e v sono mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza. Inoltre il loro prodotto $uv = \alpha \frac{\sqrt{\gamma}}{2}$ è un prodotto mediale. Per la X, 38 si conclude perciò che la somma $u + v$ è una seconda bimediale.

57.

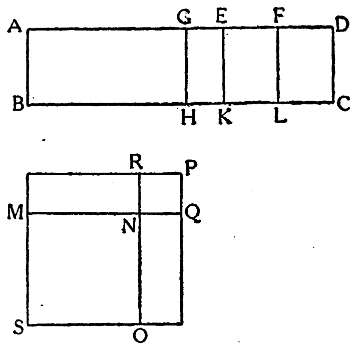
Se un'area è compresa da una retta razionale e da una quarta binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è irrazionale, e vien detta maggiore.

L'area AC sia infatti compresa dalla retta razionale AB e dalla quarta binomiale AD, divisa in E nelle sue parti, delle quali la maggiore sia AE.

Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AC è irrazionale, e vien detta *maggiore*.

Infatti, poichè AD è quarta binomiale, AE, ED sono razionali, commensurabili solo in potenza, ed AE^2 supera ED^2 del quadrato di una retta commensurabile con AE;

e inoltre AE, AB sono commensurabili in lunghezza. Si divida DE per metà in F, e alla retta AE si applichi il parallelogrammo $AG \times GE$, equivalente al quadrato



EF^2; allora AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. [prop. 18]. Si conducano quindi GH, EK, FL parallele alla retta AB, e si facciano le altre costruzioni, come prima.

Quindi è manifesto che $MQ^2 = AC$. Bisogna ora dimostrare che MQ, è irrazionale, e vien detta *maggiore*. Poichè AG, EG sono incommensurabili in lunghezza, anche AH, GK, cioè SN, NP sono incommensurabili.

Allora MN, NQ sono incommensurabili in potenza. E poichè AE, AB sono commensurabili in lunghezza, AK è razionale [prop. 19]; ma $AK = MN^2 + NQ^2$; perciò anche $MN^2 + NQ^2$ è razionale. E poichè DE, AB, cioè DE, EK sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13], mentre DE, EF sono commensurabili, EF, EK sono incommensurabili in lunghezza.

Allora EK, EF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Perciò LE, cioè MR, è mediale [prop. 21]. Ma è compreso dalle rette MN, NQ. Così $MN \times NQ$ è mediale, $MN^2 + NQ^2$ è razionale, ed MN, NQ sono commensurabili solo in potenza. Ma se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia razionale, e il loro rettangolo sia mediale, la somma è irrazionale, e si dice maggiore [prop. 39].

Dunque MQ è irrazionale e si dice maggiore; ed $MQ^2 = AC$; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale e di una quarta binomiale è la cosidetta maggiore (X, 39).

Si abbia dunque il prodotto

$$\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta}), \quad (l\alpha > \sqrt{\beta}),$$

dove per definizione della quarta binomiale si ha

(1) $$\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha \neq m : n,$$

e inoltre $l\alpha$, $\sqrt{\beta}$ sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza.

Poniamo ancora

$$x + y = l\alpha, \quad xy + \frac{\beta}{4};$$
$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Allora si ricava

$$uv = \alpha\frac{\sqrt{\beta}}{2},$$
$$u + v = \sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})}.$$

Per la (1) si ha (X, 17) che x, y sono incommensurabili, quindi anche u^2, v^2 sono incommensurabili. *Perciò i segmenti u, v sono incommensurabili in 2ª potenza.*

Si ha poi

$$u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha \cdot l\alpha,$$

quindi $u^2 + v^2$ *è razionale.*

Infine, siccome α e $\frac{\sqrt{\beta}}{2}$ sono razionali, commensurabili solo in 2ª potenza, segue che $uv = \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{2}$ *è un prodotto mediale.*

Da quanto precede e dalla definizione della maggiore (X, 39) segue subito che $u + v$, ossia $\sqrt{\alpha(l\alpha + \sqrt{\beta})}$ è una maggiore, c. d. d.

58.

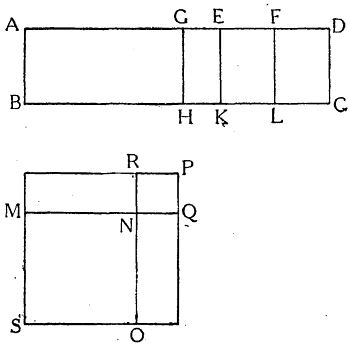
Se un'area è compresa da una retta razionale e da una quinta binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detto spazio è irrazionale, e si dice lato d'un quadrato equivalente alla somma d'un'area razionale con una mediale.

L'area AC sia infatti compresa dalla razionale AB e dalla quinta binomiale AD, divisa in E nelle sue parti, in modo che AE sia la parte maggiore. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AC è irrazionale, e vien detta retta il cui quadrato equivale alla somma d'un'area razionale con una mediale.

Si proceda infatti come nelle dimostrazioni precedenti. È chiaro allora che $MQ^2 = AC$. Occorre ora dimostrare che MQ è una retta il cui quadrato equivale alla somma d'un'area razionale con una mediale. Infatti, poichè AG, GE sono incommensurabili, AH, HE, cioè MN^2, NQ^2

lo sono pure; così MN, NQ sono incommensurabili in potenza.

E poichè AD è quinta binomiale, ed ED è la sua parte maggiore, ED ed AB sono commensurabili in lunghezza.



Ma AE, ED sono incommensurabili; perciò anche AB, AE sono incommensurabili in lunghezza. Allora AK, cioè $MN^2 + NQ^2$, è mediale [prop. 21]. E poichè DE, AB, cioè DE, EK sono commensurabili in lunghezza, ed anche ED, EF sono commensurabili, le EF, EK sono commensurabili [prop. 12].

Ma EK è razionale. Allora anche EL, cioè MR, oppure $MN \times NQ$, è razionale [prop. 13]. Così MN, NQ sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, e il loro rettangolo è razionale. Dunque MQ è il lato d'un quadrato equivalente alla somma di uno spazio razionale con uno mediale [prop. 40] ed $MQ^2 = AC$; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale e di una quinta binomiale è un segmento irrazionale, detto « lato della somma di un'area razionale e di un'area mediale » (X, 40).

Si abbia dunque il prodotto

$$\alpha(\sqrt{\beta} + l\alpha), \quad (\sqrt{\beta} > l\alpha),$$

dove, per definizione di quinta binomiale, si deve avere

$$\sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} \mp m : n \tag{1}$$

e dove inoltre α e $\sqrt{\beta}$ sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza.

Poniamo di nuovo

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{l^2\alpha^2}{2};$$

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Allora si ricava

$$uv = \alpha \cdot \frac{l\alpha}{2},$$

$$u + v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} + l\alpha)}.$$

Devesi dimostrare che $u + v$ è « lato della somma di un'area razionale e di un'area mediale », cioè che si ha (X, 40):

1) u, v incommensurabili in 2ª potenza.
2) $u^2 + v^2$ mediale.
3) Il prodotto uv è razionale.

Infatti, per la (1), si ha che x, y sono incommensurabili tra loro (X, 18), e quindi anche u^2, v^2. Dunque la condizione 1) è soddisfatta.

Da

$$u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha\sqrt{\beta},$$

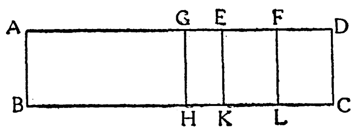
$$uv = \alpha \cdot \frac{l\alpha}{2},$$

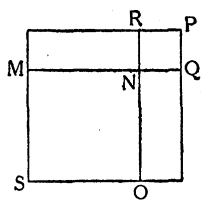
si deduce che sono soddisfatte anche le condizioni 2), 3), c. d. d.

59.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una retta binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è irrazionale, e si dice che il suo quadrato è uguale alla somma di due aree mediali.

L'area $ABCD$ sia compresa dalla retta razionale AB, e dalla sesta binomiale AD, divisa in E nelle sue parti, di cui la maggiore sia AE. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AC è il lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali.





Si proceda infatti come nelle dimostrazioni precedenti. È chiaro allora che $MQ^2 = AC$ ed MN, NQ sono incommensurabili in potenza. E poichè EA, AB sono incommensurabili in lunghezza, EA e AB sono razionali, commensurabili solo in potenza. Così AK, cioè $MN^2 + NQ^2$ è mediale [prop. 21]. Di nuovo, poichè ED, AB sono incommensurabili in lunghezza, FE ed EK sono incommensurabili. Perciò FE, EK sono razionali, commensurabili solo in potenza. Così EL, cioè MR, oppure $MN \times NQ$, è mediale. E poichè AE, EF sono incommensurabili, anche AK, EL lo sono. Ma $AK = MN^2 + NQ^2$, $EL = MN \times NQ$. Allora $MN^2 + NQ^2$ ed $MN \times NQ$ sono incommensurabili. E ciascuno di loro è mediale, ed MN, NQ sono incommensurabili in potenza.

Dunque MQ è il lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali, ed $MQ^2 = AC$; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale e di una sesta binomiale è un segmento irrazionale, detto « lato della somma di due aree mediali » (X, 41).

Si abbia dunque il prodotto

$$\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}), \quad (\sqrt{\beta} > \sqrt{\gamma})$$

dove, per definizione di sesta binomiale, si deve avere

$$(1) \qquad \sqrt{\beta - \gamma} : \sqrt{\beta} \mp m : n,$$

e inoltre $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ sono commensurabili tra loro e con α solo in 2^a potenza.

Poniamo ancora

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{\gamma}{4},$$

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Allora si ricava

$$uv = \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{2},$$

$$u + v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})}.$$

Devesi dimostrare che $u+v$ è « lato della somma di due aree mediali », cioè che si ha (X, 41):

1) u, v incommensurabili in 2ª potenza.
2) u^2+v^2 è mediale.
3) uv è un prodotto mediale.
4) $(u^2+v^2):uv \mp m:n$.

Infatti, dalla (1) si deduce (X, 18) che x, y sono incommensurabili tra loro, e quindi anche u^2, v^2. Dunque la condizione 1) è soddisfatta. Dalle relazioni

$$u^2+v^2=\alpha(x+y)=\alpha\sqrt{\beta},$$
$$uv=\alpha\frac{\sqrt{\gamma}}{2},$$

si deduce che sono soddisfatte anche le condizioni 2), 3).

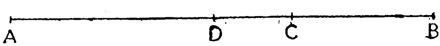
Infine avendosi

$$(u^2+v^2):uv=\sqrt{\beta}:\frac{\sqrt{\gamma}}{2},$$

si conclude che la condizione 4) è soddisfatta, c. d. d.

LEMMA.

Se una linea retta è divisa in parti disuguali, la somma dei quadrati delle parti supera il doppio del rettangolo da esse compreso.



Sia la retta AB divisa in C in parti disuguali; e sia AC la maggiore. Dico che $AC^2+CB^2>2AC\times CB$.

Infatti, sia AB diviso per metà in D; poichè una retta è divisa in parti uguali in D e in parti disuguali in C, sarà $AC \times CB + CD^2 = AD^2$ [II, 5]. Perciò $AC \times CB < AD^2$. Allora $2AC \times CB < 2AD^2$.

Ma $AC^2 + CB^2 = 2(AD^2 + DC^2)$ [II, 9]. Dunque $AC^2 + CB^2 > 2AC \times CB$; c. d. d.

Se $x \neq y$, si ha

$$x^2 + y^2 > 2xy.$$

Dimostrazione. Per II, 5, si ha

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

e quindi

$$xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

ossia anche

$$2xy < 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Ma per II, 9 si ha

$$x^2 + y^2 = 2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right].$$

Quindi si conclude

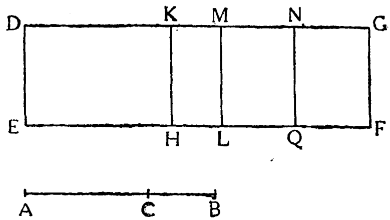
$$x^2 + y^2 > 2xy,$$ c. d. d.

Questo lemma che si può dedurre direttamente dalla prop. II, 7, è stata già applicato nella dimostrazione della prop. X, 47.

60.

Il quadrato di una retta binomiale applicato ad una retta razionale, ha come larghezza una retta prima binomiale.

Sia AB una retta binomiale, divisa in C nelle sue parti, per modo che AC sia la parte maggiore, si ponga la retta razionale DE, e ad essa si applichi $DEFG$, equivalente ad AB^2, di larghezza DG. Dico che DG è prima binomiale.



Infatti a DE si applichi $DH = AC^2$, e $KL = BC^2$. Allora la rimanente parte [II, 4] $2AC \times CB = MF$. Ora si dimezzi MG in N, e si conduca la parallela NQ. Così $MQ = NF = AC \times CB$. E poichè AB è divisa in C nelle sue parti, AC, CB sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 36]. Allora AC^2, CB^2 sono razionali e commensurabili. Perciò anche $AC^2 + CB^2$ [è commensurabile con $AC^2 + CB^2$, e quindi è razionale]; inoltre $AC^2 + CB^2 = DL$.

Quindi anche DL è razionale: ed è applicato alla retta razionale DE; perciò DM è razionale, e commensurabile in lunghezza con la DE [prop. 20]. Di nuovo, poichè AC, CB son razionali, commensurabili solo in potenza, $2AC \times CB$, cioè MF, è mediale [prop. 21]. Ed è applicato alla retta razionale ML. Così MG è razionale, e incommensurabile in lunghezza con la ML, cioè con DE [prop. 22]. Ma MD è razionale, e commensurabile in lunghezza con la retta DE. Così DM, MH sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13]. E sono razionali: allora DM, MG sono razionali, commensurabili solo in potenza. Quindi DG è binomiale [prop. 36].

Occorre ora dimostrare che è prima binomiale. Poichè $AC \times CB$ è medio proporzionale fra AC^2 e CB^2, anche MQ è medio proporzionale fra LH, KL.

Allora $DH : MQ = MQ : KL$, cioè $DK : MN = MN : MK$. Così $DK \times KM = MN^2$ [VI, 17]. E poichè AC^2, CB^2 sono commensurabili, anche DH, KM sono commensurabili.

E poichè $AC^2 + CB^2 > 2AC \times CB$ [cfr. Lemma prec.], sarà $DL > MF$. Allora anche $DM > MG$ e $DK \times KM = MN^2 =$ quarta parte di MG^2, e DK, KM sono commensurabili.

Ma se son date due rette disuguali, ed alla maggiore si applica un'area equivalente alla quarta parte del quadrato della minore, e mancante di un quadrato, se la parte maggiore vien così divisa in parti commensurabili, la differenza fra i quadrati della maggiore e della minore è il quadrato di una retta commensurabile con la maggiore [prop. 17]. Allora DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta commensurabile con DM; DM, MG sono razionali, e la maggiore, DM, è commensurabile in lunghezza con la data retta razionale DE.

Dunque DG è prima binomiale; c. d. d.

Se si divide il quadrato di una binomiale per un segmento razionale, si ottiene una prima binomiale.

Sia $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ la binomiale data, e sia $\sqrt{\gamma}$ un segmento razionale. Posto

$$(1) \qquad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\sqrt{\gamma}\cdot x,$$

si tratta di dimostrare che x è una prima binomiale. Dimostrazione.

Poniamo

$$(2) \qquad \sqrt{\gamma}\cdot y=\alpha, \quad \sqrt{\gamma}\cdot z=\beta,$$

sottraendo le (2) dalla (1) si ricava

$$\sqrt{\gamma}\cdot x-\sqrt{\gamma}(y+z)=2\sqrt{\alpha\beta},$$

ossia

$$(3) \qquad \sqrt{\gamma}\cdot\frac{x-(y+z)}{2}=\sqrt{\alpha\beta}.$$

Siccome $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ è una binomiale, α e β e quindi anche $\alpha+\beta$ sono razionali (X, 15). Ma $\alpha+\beta=\sqrt{\gamma}(y+z)$, e $\sqrt{\gamma}$ è razionale, quindi (X, 20) $y+z$ è un segmento razionale, commensurabile con $\sqrt{\gamma}$ in 1ª potenza.

Siccome $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ sono razionali, commensurabili tra loro in 1ª potenza, segue che

$$2\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\gamma}[x-(y+z)]$$

è un prodotto mediale (X, 21). Ma $\sqrt{\gamma}$ è razionale, quindi (X, 21) $x-(y+z)$ è razionale, *incommensurabile* con $\sqrt{\gamma}$ in 1ª potenza.

I due segmenti $y+z$, $x-(y+z)$ sono dunque tutti e due razionali, il primo commensurabile, il secondo incommensurabile con $\sqrt{\gamma}$ in 1ª potenza. Essi sono perciò incommensurabili tra loro in 1ª potenza (X, 13). *Quindi la loro somma*

$$x=(y+z)+[x-(y+z)]$$

è una *binomiale* (X, 36).

Resta da dimostrare che x è una *prima* binomiale.

Per questo scopo si osservi che si ha (Lemma alla prop. 53)

$$\alpha:\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha\beta}:\beta$$

e quindi, per (2) e (3),

$$\sqrt{\gamma}\cdot y : \sqrt{\gamma}\cdot\frac{x-(y+z)}{2} = \sqrt{\gamma}\cdot\frac{x-(y+z)}{2} : \sqrt{\gamma}\cdot z,$$

ossia

$$y : \frac{x-(y+z)}{2} = \frac{x-(y+z)}{2} : z,$$

da cui

$$yz = \left(\frac{x-(y+z)}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Inoltre, siccome α e β sono commensurabili, si ha per la (2) che anche i segmenti y e z sono commensurabili in prima potenza. Ricordando la prop. 17, che esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due radici di una equazione di 2° grado (nel nostro caso y e z) siano commensurabili in 1ª potenza, si deduce subito la seguente relazione di commensurabilità:

$$\sqrt{(y+z)^2-[x-(y+z)]^2} : (y+z) = m : n. \tag{5}$$

Avendosi (lemma X, 59) $\alpha+\beta > 2\sqrt{\alpha\beta}$, segue, per le (2) e (3),

$$\sqrt{\gamma}\cdot y + \sqrt{\gamma}\cdot z > \sqrt{\gamma}[x-(y+z)],$$

ossia

$$y+z > x-(y+z). \tag{6}$$

Infine, si è già dimostrato sopra che

$(y+z)$ è commensurabile in 1ª potenza con il segmento razionale dato $\sqrt{\gamma}$. (7)

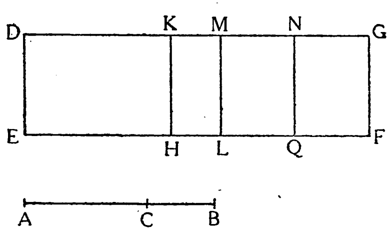
Le (5), (6), (7) mostrano che $x=(y+z)+[x-(y+z)]$ è *effettivamente una prima binomiale* (X, 47. Def. II, 1).

61.

Il quadrato di una retta prima bimediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta seconda binomiale.

Sia AB una retta prima bimediale, divisa in C nelle sue mediali, di cui la maggiore sia AC; sia data la razionale DE, e ad essa si applichi il parallelogrammo DF, equivalente ad AB^2, di larghezza DG. Dico che DG è seconda binomiale.

Si facciano infatti le stesse costruzioni delle proposizioni precedenti. Poichè AB è prima bimediale, divisa in C, le AC, CB sono mediali, commensurabili solo in potenza, comprendenti uno spazio razionale [prop. 37]. Perciò anche AC^2, CB^2 sono mediali [prop. 21]. Allora DL è mediale; ma è applicato alla retta razionale DE : così MD è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la DE [prop. 22]. Ancora, poichè $2AC \times CB$ è razionale ed è applicato alla retta razionale ML, anche MG è razionale, e commensurabile in lunghezza con ML, cioè con DE. Allora DM, MG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13]; sono inoltre razionali; allora DM, MG son razionali, commensurabili solo in potenza.



Dunque DG è binomiale [prop. 36].

Occorre ora dimostrare che è *seconda*. Infatti, poichè $AC^2 + CB^2 > 2AC \times CB$ [prop. 59, lemma] sarà anche $DL > MF$. Perciò anche $DM > MG$. E poichè AC^2, CB^2 sono commensurabili, anche DH, KL lo sono.

Quindi anche DK, KM saranno commensurabili [VI, 1; prop. 11]. E $DK \times KM = MN^2$; dunque DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta commensurabile con sè; ed MG, DE sono commensurabili in lunghezza.

Dunque DG è seconda binomiale; c. d. d.

Il quoziente del quadrato di una prima bimediale (X, 37) e di un segmento razionale è una seconda binomiale (X, 47. Def. II, 2).

Sia dunque $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ una prima bimediale, e γ un segmento razionale. Posto

$$(1) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma x,$$

si tratta di dimostrare che x è una seconda binomiale.

Dimostrazione:

Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali, i loro quadrati $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ sono prodotti mediali (X, 21), e siccome per la definizione di prima bimediale $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ sono commensurabili, segue (X, 15 e X, 23, corollario) che $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è un prodotto mediale.

Posto dunque

$$(2) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma y,$$

sarà y un segmento razionale, commensurabile con γ solo in 2ª potenza (X, 22).

Posto ancora

$$(3) \qquad 2\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta} = \gamma z;$$

si conclude che, il prodotto $\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[4]{\beta}$ essendo razionale (definizione della prima binomiale) (X, 37), il segmento z è razionale e commensurabile con γ in 1ª potenza, perchè il fattore γ è razionale (X, 20).

Dei due segmenti y, z il primo è commensurabile con γ solo in 2ª potenza, il secondo anche in 1ª potenza. Quindi essi sono tra loro incommensurabili in 1ª potenza. Essendo tutti e due razionali, si deduce che la loro somma $y+z$ è una binomiale. Ma sommando le (2) e (3) si ha

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma(y+z),$$

e confrontando con la (1), si deduce

$$x=y+z.$$

Quindi x è una binomiale. Avendosi (X, 59, lemma)

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2>2\sqrt[4]{\alpha\beta},$$

si deduce

(4) $$x>z.$$

Posto $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2=\gamma u, \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma v$, saranno u e v commensurabili tra loro in 1ª potenza (X, 37).

Si ha poi dalle (2) e (3) $u\cdot v=\frac{z^2}{4}$, $u+v=y$. Quindi applicando la prop. X, 17 si ha

(5) $$\sqrt{y^2-z^2}:y=m:n.$$

Infine si è già visto che

(6) il segmento minore z è commensurabile con γ in 1ª potenza.

Le (4), (5) e (6) mostrano che $x=y+z$ è una seconda binomiale (X, 47), c. d. d.

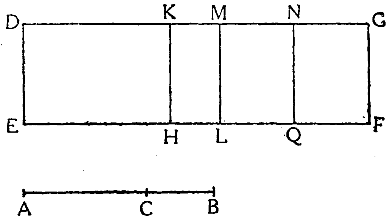
62.

Il quadrato di una retta seconda bimediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta terza binomiale.

Sia AB una retta seconda bimediale, divisa in C nelle sue mediali, in modo che la parte maggiore sia AC, la

DE sia razionale, e ad essa si applichi un parallelogrammo DF equivalente ad AB^2, di larghezza DG. Dico che DG è terza binomiale.

Si facciano infatti le stesse costruzioni delle proposizioni precedenti. Poichè AB è seconda bimediale, divisa in C, le AC, CB sono mediali commensurabili solo in potenza, comprendenti un rettangolo mediale [prop. 38]. Perciò anche $AC^2 + CB^2$ è mediale.



Inoltre $AC^2 + CB^2 = DL$. Allora anche DL è mediale; ed è applicato alla retta razionale DE: così MD è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la DE [prop. 22]. Per la stessa ragione anche MG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la ML, cioè con DE. Quindi ciascuna delle DM, MG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la DE. E poichè AC, CB sono incommensurabili in lunghezza, ed $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$, anche AC^2 ed $AC \times CB$ sono incommensurabili. Perciò anche $AC^2 + CB^2$ e $2AC \times CB$, cioè DL ed MF sono incommensurabili. Quindi anche DM, MG sono incommensurabili; e sono razionali: dunque DG è binomiale [prop. 36].

Occorre ora dimostrare che è terza. Allo stesso modo di prima potremo concludere che $DM > MG$, e DK, KM sono commensurabili. E $DK \times KM = MN^2$. Allora DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta commensurabile con DM. E nessuna delle rette DM, MG è commensurabile in lunghezza con la DE.

Dunque DG è terza binomiale; c. d. d.

Il quoziente del quadrato di una seconda bimediale (X, 38) e di un segmento razionale è una terza binomiale (X, 47. Def. II, 3).

Sia $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ una seconda bimediale. Posto

$$(1) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma x,$$

si tratta di dimostrare che x è una terza binomiale.

Dimostrazione:

Posto, come nella proposizione precedente,

$$(2) \qquad \begin{cases} \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma y, \\ 2\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\beta} = \gamma z, \end{cases}$$

si deduce in virtù della definizione della seconda bimediale che i primi membri delle (2) sono prodotti mediali (X, 15, X, 23) e che quindi (X, 22) *i segmenti y, z sono razionali, incommensurabili col segmento razionale γ in 1^a potenza.*

Per ipotesi $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono incommensurabili in 1^a potenza e quindi, avendosi $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} = \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \sqrt[4]{\alpha\beta}$, anche $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ sono incommensurabili in 1^a potenza. Dall'altra parte $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ e quindi anche la loro somma è commensurabile con $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$. Si deduce così che

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2, \quad 2\sqrt[4]{\alpha\beta}$$

sono incommensurabili in 1ª potenza (X, 13).

Dalle (2) si ha perciò che y, z *sono incommensurabili in 1ª potenza*. Perciò

$$y + z = x \text{ è una binomiale.}$$

Si è già visto che

(3) y e z sono incommensurabili in 1ª potenza col segmento razionale γ.

Come già nella proposizione precedente si dimostra in modo analogo che si ha

(4) $$y > z$$

(5) $$\sqrt{y^2 - z^2} : y = m : n.$$

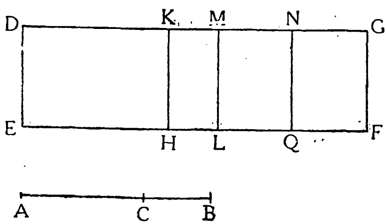
Le relazioni (3), (4), (5) mostrano subito (X, 47. Def. II, 3) che $x = y + z$ è una terza binomiale. c. d. d.

63.

Il quadrato di una retta maggiore, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta quarta binomiale.

Sia la maggiore AB divisa in C, in modo che sia $AC > CB$, e DE sia razionale. A DE si applichi un parallelogrammo DF, equivalente ad AB^2, di larghezza DG. Dico che DG è quarta binomiale.

Si facciano le stesse costruzioni delle proposizioni pre-



cedenti. Poichè AB, maggiore, è divisa in C, le AC, CB

sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il loro rettangolo è mediale. E poichè $AC^2 + CB^2$ è razionale, DL è razionale. Perciò DM è razionale, e commensurabile in lunghezza con DE. Di nuovo, poichè $2AC \times CB$, cioè MF, è mediale, ed è applicato alla retta razionale ML, anche MG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con DE. Così DM, MG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13].

Perciò DM, MG sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque DG è binomiale.

Occorre dimostrare che è quarta. Nello stesso modo di prima dimostreremo che $DM > MG$ e $DK \times KM = MN^2$. Ora, poichè AC^2, CB^2 sono incommensurabili, anche DH, KL lo sono. Perciò DK, KM sono incommensurabili. Ma se son date due rette disuguali, ed alla maggiore si applica un parallelogrammo mancante di un quadrato ed equivalente alla quarta parte del quadrato della minore, la differenza tra i quadrati della maggiore e della minore è il quadrato d'una retta incommensurabile con la maggiore [prop. 18]. Allora DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta incommensurabile con DM e DM è commensurabile con la data DE.

Dunque DG è quarta binomiale; c. d. d.

Il quoziente del quadrato di una maggiore (X, 39) e di un segmento razionale è una quarta binomiale (X, 47. Def. II, 4).

Sia $t + s$ la detta maggiore, e α un segmento razionale. Si avrà dunque: 1) $t^2 : s^2 \neq m : n$, 2) $t^2 + s^2$ è razionale, 3) ts è un prodotto mediale. Posto

$$(t + s)^2 = \alpha x, \tag{1}$$

si tratta di dimostrare che x è una quarta binomiale.

Dimostrazione:

Poniamo

$$t^2 + s^2 = \alpha y, \tag{2}$$

$$2ts = \alpha z, \tag{3}$$

si avrà allora $(t+s)^2 = \alpha(y+z)$, e quindi

$$x = y + z. \tag{4}$$

Dalla (2) si deduce che αy è razionale, quindi (X, 20) y è razionale e commensurabile con α in 1^a potenza. Dalla (3) si deduce che αz è un prodotto mediale, e quindi z è razionale e incommensurabile con α in 1^a potenza (X, 22). Risulta dunque che i segmenti y, z sono ambedue razionali, ma (X, 13) incommensurabili tra loro in 1^a potenza. *Perciò* $y + z = x$ *è una binomiale* (X, 36).

Come nella proposizione precedente si dimostra che si ha

$$y > z. \tag{5}$$

Dall'altra parte, posto

$$t^2 = \alpha u, \quad s^2 = \alpha v$$

e quindi, per le (2) e (3)

$$u + v = y, \quad uv = \frac{z^2}{4}, \tag{6}$$

si deduce che, avendosi $t^2 : s^2 \mathrel{\mp\!\!\!\!\!=} m : n$, u e v sono incommensurabili tra loro in 1^a potenza (VI, 1, X, 11).

Applicando perciò la prop. X, 18, si avrà in virtù delle (6)

$$\sqrt{y^2 - z^2} : y \mathrel{\mp\!\!\!\!\!=} m : n. \tag{7}$$

Infine si è già visto che

(8) il segmento maggiore y è commensurabile in 1^a potenza col segmento razionale dato.

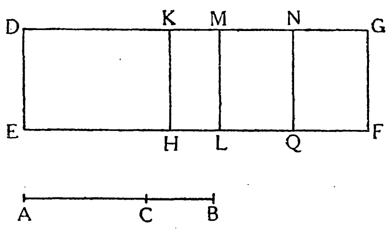
Dalle relazioni (5), (7) e (8) si conclude subito che $x = y + z$ è una quarta binomiale, c. d. d.

64.

Se il quadrato di una retta è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, ed è applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta quinta binomiale.

Sia AB una retta il cui quadrato è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, divisa in C, in modo che AC sia maggiore, ed alla DE si applichi DF, equivalente ad AB^2, di larghezza DG. Dico che DG è quinta binomiale.

Si facciano le stesse costruzioni di prima. Poichè il quadrato di AB è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, ed AB è divisa in C, le AC, CB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro



quadrati è mediale, ed il loro rettangolo è razionale; ora, poichè $AC^2 + CB^2$ è mediale, anche DL lo è; allora DM è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la DE [prop. 22].

Di nuovo, poichè $2AC \times CB$, cioè MF, è razionale, MG è pure razionale, e commensurabile con DE [prop.

20]. Allora DM, MG sono incommensurabili; perciò DM, MG sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque DG è binomiale. Dico che è *quinta*.

Nel modo solito dimostreremo che $DK \times KM = MN^2$ e DK, KM sono incommensurabili in lunghezza. Allora DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta commensurabile con DM [prop. 18]. E DM, MG sono commensurabili solo in potenza, e la minore MG è commensurabile in lunghezza con DE.

Dunque DG è quinta binomiale; c. d. d.

Se si divide il quadrato del « lato della somma di un'area razionale e un'area mediale » per un segmento razionale, si ottiene una quinta binomiale.

Sia $t + s$ « il lato della somma di un'area razionale e di un'area mediale », e sia α un segmento razionale. Si avrà dunque (X, 40): 1) $t^2 : s^2 \neq m : n$; 2) $t^2 + s^2$ è un prodotto mediale; 3) ts è razionale.

Posto

$$(t + s)^2 = \alpha x,$$

si tratta di dimostrare che x è una quinta binomiale (X, 47. Def. II, 5).

Posto ancora

$$t^2 + s^2 = \alpha y, \quad 2ts = \alpha z,$$

e quindi

$$x = y + z,$$

si deduce facilmente che i segmenti y, z sono ambedue razionali, il primo commensurabile con α solo in 2^a potenza, il secondo anche in 1^a potenza. Quindi y, z sono commensurabili tra loro solo in 2^a potenza, e perciò la loro somma $y + z = x$ è una binomiale.

Posto di nuovo $t^2 = \alpha u$, $s^2 = \alpha v$, e quindi

$$u + v = y, \quad uv = \frac{z^2}{4},$$

si vede subito che u, v sono incommensurabili in 1^a potenza, e applicando di nuovo la prop. X, 18 si deduce la relazione di incommensurabilità:

(1) $$\sqrt{y^2 - z^2} : y \mp m : n;$$

si ha poi

(2) $$y > z,$$

e infine si è già visto che

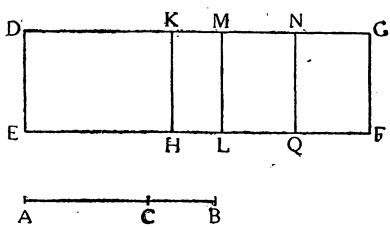
(3) il segmento minore z è commensurabile in 1^a potenza col segmento razionale dato α.

Le relazioni (1), (2), (3) provano che $x = y + z$ è effettivamente una quinta binomiale, c. d. d.

65.

Se il quadrato di una retta è equivalente alla somma di due aree mediali, ed è applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta sesta binomiale.

Sia AB una retta il cui quadrato equivale alla somma di due aree mediali, divisa in C, la DE sia razionale, e ad essa sia applicato DF, di larghezza DG. Dico che DG



è sesta binomiale. Si facciano infatti le stesse costruzioni di prima. Poichè il quadrato di AB è equivalente alla somma di due aree mediali, ed AB è divisa in C, le AC,

CB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il loro rettangolo è mediale, ed inoltre la somma dei quadrati è incommensurabile con il rettangolo [prop. 41]. Perciò, per quanto è stato prima dimostrato, DL ed MF sono mediali: e sono applicati alla retta razionale DE; perciò ciascuna delle DM, MG è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con DE [prop. 22]. E poichè $AC^2 + CB^2$ e $2AC \times CB$ sono incommensurabili, DL ed MF lo sono pure. Perciò anche DM, MG sono incommensurabili [VI, 1; prop. 11]. E così DM, MG sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque DG è binomiale.

Dico che è *sesta*.

Infatti, nel solito modo, dimostreremo che $DK \times KM = MN^2$ e DK, KM sono incommensurabili in lunghezza. Per la stessa ragione DM^2 supera MG^2 del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con DM. E nessuna delle rette DM, MG è commensurabile in lunghezza con la data retta DE.

Dunque DG è sesta binomiale; c. d. d.

Se si divide il quadrato del « lato della somma di due aree mediali » per un segmento razionale si ottiene una sesta binomiale.

Sia $t + s$ « il lato della somma di due aree mediali », e sia α un segmento razionale. Si avrà dunque (X, 41):
1) $t^2 : s^2 \neq m : n$, 2) $t^2 + s^2$ è mediale, 3) ts è un prodotto mediale, 4) $(t^2 + s^2) : ts \neq m : n$.

Posto

$$(t + s)^2 = \alpha x,$$

sarà x una sesta binomiale (X, 47, Def. II, 6).

Dimostrazione:

Posto

$$t^2 + s^2 = \alpha y, \quad 2ts = \alpha z$$

e quindi

$$x = y + z,$$

si deduce facilmente che *y e z sono segmenti razionali, incommensurabili con α in 1ª potenza.* Siccome poi si ha per ipotesi

$$(t^2 + s^2) : ts \mp m : n,$$

ossia

$$\alpha y : \alpha z \mp m : n,$$

si conclude y e z sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza. *Perciò la loro somma $x = y + z$ è una binomiale.*

Posto come prima $t^2 = \alpha u$, $s^2 = \alpha v$, e quindi $u + v = y$, $uv = \frac{z^2}{4}$, e applicando la prop. X, 18 si deduce in maniera analoga che

(1) $$\sqrt{y^2 - z^2} : y \mp m : n.$$

Inoltre si ha

(2) $$y > z,$$

(3) ambedue i segmenti y, z sono incommensurabili con α in 1ª potenza.

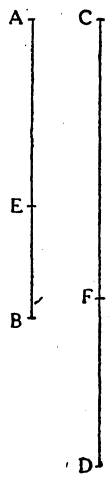
Le (1), (2) e (3) provano che $x = y + z$ è effettivamente una sesta binomiale, c. d. d.

66.

Una retta commensurabile in lunghezza con una retta binomiale, è anch'essa binomiale, e dello stesso ordine.

Sia AB binomiale, e CD sia commensurabile con la AB. Dico che CD è binomiale, dello stesso ordine di AB. Infatti, poichè AB è binomiale, si divida in E nelle sue parti, e sia AE la parte maggiore. Allora AE, EB sono razionali, commensurabili soltanto in potenza.

Sia $AB : CD = AE : CF$; allora anche $EB : FD = AB : CD$; ma AB, CD sono commensurabili in lunghezza. Dunque anche AE, CF ed EB, FD lo sono [prop. 11]. Ed AE, EB sono razionali. Allora anche CF, FD lo sono. Inoltre, $AE : CF = EB : FD$. Così, permutando, $AE : EB = CF : FD$. Ma AE, EB sono commensurabili solo in potenza; perciò anche CF, FD sono commensurabili solo in potenza; e sono razionali. Dunque CD è binomiale.



Dico ora che è dello stesso ordine di AB.

Infatti AE^2 supera EB^2 del quadrato di una retta commensurabile od incommensurabile con AE. Ora, se AE^2 supera EB^2 del quadrato di una retta commensurabile con AE, anche CF^2 supera FD^2 del quadrato di una retta commensurabile con CF. E se è commensurabile con la data retta razionale AE, anche CF sarà commensurabile con AE; perciò ciascuna delle AB, CD è prima binomiale, cioè dello stesso ordine. Se poi è commensurabile con la data razionale EB, anche FD è commensurabile con EB; perciò di nuovo, sarà dello stesso ordine di AB; infatti ciascuna di loro è seconda binomiale. Che se poi non è commensurabile con alcuna delle rette AE, EB, nessuna delle rette CF, FD è commensurabile con essa, e ciascuna è terza binomiale. Inoltre, se AE^2 supera EB^2 del quadrato di una retta incommensurabile con AE, anche CF^2 supera FD^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CF; e se è commensurabile con la data retta razionale AE, anche CF è commensurabile, e ciascuna di esse è quarta binomiale. Se poi lo è EB, anche FD è commensurabile, e ciascuna è quinta. E se nessuna delle AE, EB lo è, neppure alcuna delle CF, FD è commensurabile con la data retta razionale, e ciascuna è sesta.

Perciò una retta commensurabile in lunghezza con una retta binomiale è anch'essa binomiale, e dello stesso ordine; c. d. d.

Se x è un segmento commensurabile in 1ª potenza con una binomiale $\alpha + \sqrt{\beta}$,

$$\alpha + \sqrt{\beta} : x = m : n, \tag{1}$$

allora si può decomporre il segmento x in due parti

$$x = y + z,$$

in modo che sia soddisfatta la proporzione

$$(\alpha + \sqrt{\beta}) : \alpha = x : y.$$

Da qui si può dedurre facilmente che y e z sono come α, $\sqrt{\beta}$ *razionali e commensurabili solo in seconda potenza.*

Quindi x è una binomiale. Che essa sia della stessa specie della binomiale $\alpha + \sqrt{\beta}$ si deduce dalle considerazioni che seguono:

1) Se α (il maggiore dei segmenti α, $\sqrt{\beta}$) è commensurabile con un dato segmento razionale, allora anche y (il maggiore dei segmenti y, z) è commensurabile con lo stesso segmento razionale, e viceversa.

2) Se si ha

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha = m : n,$$

allora, per la prop. X, 14, si ha pure

$$\sqrt{y^2 - z^2} : y = m : n.$$

3) E se invece si ha

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha \neq m : n$$

allora, per la medesima prop. X, 14, si avrà pure

$$\sqrt{y^2 - z^2} : y \neq m : n.$$

Risulta dunque provato che secondo che $\alpha + \sqrt{\beta}$ è una binomiale prima, seconda, terza ecc., anche $x = y + z$ è una binomiale prima, seconda, terza ecc., c. d. d.

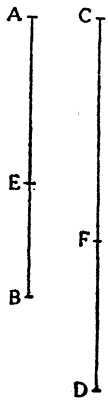
CLAVIO dimostra in un uno scolio che un segmento commensurabile con una binomiale solo in 2ª potenza, è ancora una binomiale, ma non necessariamente della medesima specie.

67.

Una retta commensurabile con una retta bimediale è anch'essa bimediale, e dello stesso ordine.

Sia AB bimediale, e sia CD commensurabile in lunghezza con AB. Dico che CD è bimediale, dello stesso ordine di AB.

Infatti, poichè AB è bimediale, si divida in E nelle sue mediali. Allora AE, EB sono mediali, commensurabili solo in potenza. E sia $AB : CD = AE : CF$; allora anche $EB : FD = AB : CD$. Ma AB, CD sono commensurabili in lunghezza: così anche ciascuna delle AE, EB è commensurabile con ciascuna delle CF, FD. Ma



AE, EB sono mediali; dunque anche CF, FD lo sono. E poichè $AE : EB = CF : FD$, ed AE, EB sono commensurabili solo in potenza, anche CF, FD sono commensurabili solo in potenza; ma abbiamo dimostrato che esse sono mediali: dunque CD è bimediale.

Dico ora che è dello stesso ordine di AB.

Infatti, poichè $AE : EB = CF : FD$, sarà anche $AE^2 : AE \times EB = CF^2 : CF \times FD$; e permutando sarà $AE^2 : CF^2 = AE \times EB : CF \times FD$. Ma AE^2, CF^2 sono commensurabili. Allora anche $AE \times EB$, $CF \times FD$ lo sono [prop. 11]. Così, se $AE \times EB$ è razionale, anche $CF \times FD$ lo è; se è mediale, è mediale, e ciascuna è *seconda*.

Per questa ragione CD è dello stesso ordine di AB; c. d. d.

Se $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ è una bimediale (X, 37, 38) e se x è un segmento commensurabile con essa,

(1) $$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right) : x = m : n,$$

allora x è ancora una bimediale, e precisamente della medesima specie di $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$.

Dimostrazione:

Si decomponga x in due parti,

$$x = y + z,$$

in modo che si abbia

(2) $$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right) : x = \sqrt[4]{\alpha} : y$$

si avrà pure

(3) $$\left(\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}\right) : x = \sqrt[4]{\beta} : z$$

Dalle relazioni (1), (2) e (3) segue (X, 11) che y è commensurabile con $\sqrt[4]{\alpha}$ in prima potenza, e z è commensurabile con $\sqrt[4]{\beta}$. Quindi (X, 23) *y, z sono mediali.* Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza (X, 37 e 38), e siccome si ha dalle (2) e (3)

(4) $$\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} = y : z,$$

si deduce che anche y e z sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza (X, 11) *e che quindi $x = y + z$ è una bimediale.*

Per dimostrare che la bimediale $y + z$ è della stessa specie di $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$, cioè bimediale prima o seconda, secondo che la bimediale $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ è prima o seconda, occorre mostrare che secondo che il prodotto $\sqrt[4]{\alpha}\ \sqrt[4]{\beta}$ è razionale o mediale, anche il prodotto yz

è razionale o mediale. Ora ciò si vede osservando che si ha dalla (4)

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : y^2 = \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\beta} : yz.$$

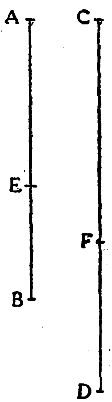
Ma per la (2) $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ e y^2 sono commensurabili in 1ª potenza, quindi anche yz è commensurabile con $\sqrt[4]{\alpha}\ \sqrt[4]{\beta}$ in 1ª potenza, e perciò yz è razionale, se $\sqrt[4]{\alpha}\ \sqrt[4]{\beta}$ è razionale, e sarà mediale se è mediale il prodotto $\sqrt[4]{\alpha}\ \sqrt[4]{\beta}$, c. d. d.

68.

Una retta commensurabile con una maggiore, *è anch'essa maggiore.*

Sia AB maggiore e sia la CD commensurabile con la AB. Dico che CD è maggiore.

Si divida AB in E. Allora ciascuna delle AE, EB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro qua-



drati è razionale, il loro rettangolo è mediale. Si facciano le stesse costruzioni di prima. Poichè $AB:CD=AE:CF$, ed $AB:CD=EB:FD$, anche $AE:CF=EB:FD$. Ma AB, CD sono commensurabili. Perciò anche ciascuna delle AE, EB è commensurabile con ciascuna delle CF, FD. E poichè $AE : CF = EB : FA$, e permutando $AE : EB = CF : FD$, componendo anche $AB : BE = CD : DF$. Perciò anche $AB^2 : BE^2 = CD^2 : DF^2$. Similmente dimostreremo che anche $AB^2:AE^2=CD^2:CF^2$; perciò anche $AB^2 : AE^2+EB^2 = CD^2 : CF^2 + FD^2$. Permutando dunque $AB^2:CD^2=AE^2+EB^2:CF^2+FD^2$.

Ma AB^2, CD^2 sono commensurabili. Così anche $AE^2 + EB^2$ e $CF^2 + FD^2$ lo sono. Ed $AE^2 + EB^2$ è razionale, come pure $CF^2 + FD^2$. Nello stesso modo anche $2AE \times EB$ e $2CF \times FD$ sono commensurabili.

E $2AE \times EB$ è mediale: allora anche $2CF \times FD$ lo è. Così CF, FD sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il loro rettangolo è mediale.

Quindi la CD è irrazionale, detta maggiore.

Dunque una retta commensurabile con una maggiore è maggiore; c. d. d.

Se $t+s$ è una maggiore (X, 39), cioè si ha 1) $t^2 : s^2 \neq m : n$, 2) t^2+s^2 è razionale, 3) ts è mediale, e se x è un segmento commensurabile con $t+s$ in 1ª potenza,

$$(1) \qquad (t+s) : x = m : n$$

allora anche x è una maggiore.

Dimostrazione:

Si ponga $x=y+z$ in modo che si abbia

$$(2) \qquad (t+s) : x = t : y$$

e quindi anche

(3) $$(t + s) : x = s : z.$$

Dalle (2) e (3) si ricava

$$t : y = s : z,$$

e quindi (V, 16)

(4) $$t : s = y : z.$$

Siccome $t^2 : s^2 \neq m : n$, anche

(5) $$y^2 : z^2 \neq m : n.$$

Dalla (4) si deduce (V, 18) $(t + s) : s = x : z$ e (VI, 20) $(t + s)^2 : s^2 = x^2 : z^2$. Analogamente si ricava $(t + s)^2 : t^2 = x^2 : y^2$. Perciò $(t + s)^2 : (t^2 + s^2) = x^2 : (z^2 + y^2)$, ossia (V, 16)

(5*) $$(t + s)^2 : x^2 = (t^2 + s^2) : (z^2 + y^2).$$

Ma per la (1) $(t + s)^2$ e x^2 sono commensurabili, quindi lo stesso vale per $(t^2 + s^2)$ e $(z^2 + y^2)$.

Perciò, essendo razionale $t^2 + s^2$, si conclude che

(6) $$z^2 + y^2 \text{ è razionale.}$$

In modo analogo segue dalla (4) che ts è commensurabile con yz, e quindi, essendo ts mediale anche

(7) $$yz \text{ è mediale.}$$

Le (5), (6) e (7) provano che $x = y + z$ è una maggiore, c. d. d.

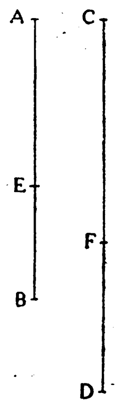
Osservazione. La dimostrazione di EUCLIDE in alcuni punti non è completa. Così, p. es., la diseguaglianza (5), conseguenza della (4), non viene rilevata esplicitamente. Poi la proposizione (5*) non viene dedotta riferendosi a qualche proposizione precedente.

69.

Il quadrato di una retta commensurabile con un'altra retta il cui quadrato è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, è anch'esso equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale.

Sia il quadrato di AB equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale. E la CD sia commensurabile con la AB. Occorre dimostrare che anche il quadrato di CD è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale.

Si divida AB in E nelle sue rette; allora AE, EB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il loro rettangolo razionale [prop. 40].



Si facciano le stesse costruzioni di prima. In modo simile dimostreremo che CF, FD sono incommensurabili in potenza, ed $AE^2 + EB^2$, $CF^2 + FD^2$ sono commensurabili, come pure $AE \times EB$, $CF \times FD$. Perciò anche $CF^2 + FD^2$ è mediale, $CF \times FD$ è razionale.

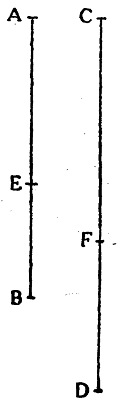
Dunque il quadrato di CD è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale; c. d. d.

Se $t + s$ è « il lato della somma di un'area razionale e un'area mediale », cioè se (X, 40) 1) $t^2 : s^2 \neq m : n$, 2) $t^2 + s^2$ è un prodotto mediale, 3) ts è razionale, e se $x = y + z$ è commensurabile con $t + s$ in 1ª potenza, allora anche x è « il lato della somma di un'area razionale e un'area mediale ».

70.

Il quadrato di una retta commensurabile con un'altra retta il cui quadrato è equivalente alla somma di due aree mediali, è anch'esso equivalente alla somma di due aree mediali.

Sia il quadrato di AB equivalente alla somma di due



aree mediali, e sia CD commensurabile con AB. Bisogna dimostrare che anche il quadrato di CD è equivalente alla somma di due aree mediali.

Infatti, poichè il quadrato di AB è equivalente alla somma di due aree mediali, si divida in E nelle sue rette. Così AE, EB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il rettangolo è mediale, ed inoltre $AE^2 + EB^2$, $AE \times EB$ sono incommensurabili [prop. 41]. Si facciano le stesse costruzioni di prima. In modo simile dimostreremo che CF, FD sono incommensurabili in potenza, e che AE^2+EB^2, CF^2+FD^2 sono commensurabili, come pure $AE \times EB$, $CF \times FD$; perciò anche $CF^2 + FD^2$ è mediale, $CF \times FD$ è mediale, ed inoltre $CF^2 + FD^2$, $CF \times FD$ sono incommensurabili.

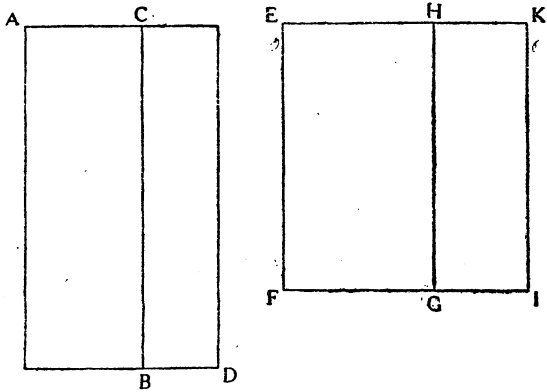
Dunque il quadrato di CD è equivalente alla somma di due aree mediali; c. d. d.

Se $t + s$ è « il lato della somma di due aree mediali » (X, 41), e se $x = y + z$ è un segmento commensurabile in 1ª potenza con $t + s$, allora anche x è « il lato della somma di due aree mediali ».

71.

Se il quadrato di una retta è equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, questa retta può essere una delle seguenti quattro irrazionali: o binomiale, o prima bimediale, o maggiore, o lato d'un quadrato equivalente alla somma d'un'area razionale con una mediale.

Sia AB razionale, e CD mediale. Dico che una retta il cui quadrato è equivalente ad AD, è binomiale, o è prima bimediale, o è maggiore, o è lato d'un quadrato equivalente alla somma d'un'area razionale con una mediale.



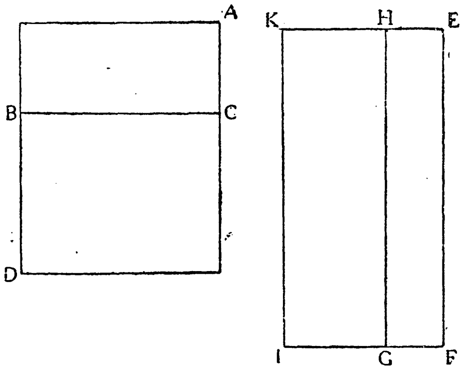
Infatti o $AB > CD$, o $AB < CD$. Sia dapprima $AB > CD$. Si ponga la razionale EF, e alla retta EF si applichi EG, equivalente ad AB, di larghezza EH; e ancora alla EF si applichi HI, equivalente a DC, di larghezza HK. Poichè AB è razionale, ed $AB = EG$, anche EG è razionale. Ed è applicato alla EF, ed ha per larghezza EH. Allora EH è razionale, ed è commensurabile in lunghezza con EF. Ancora, poichè CD è mediale, e $CD = HI$, anche HI è mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, ed ha per larghezza HK. Così HK è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con EF. E poichè CD è mediale, ed AB è razionale, AB e CD sono incommensurabili. Perciò anche EG, HI lo sono. Ma $EG : HI = EH : HK$. Perciò anche EH, HK sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale.

Allora EH, HK sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque EK è binomiale, divisa in H. E poichè $AB > CD$, ed $AB = EG$, $CD = HI$, sarà anche $EG > HI$. Così anche $EH > HK$ [V, 14]. Ora EH^2 supera HK^2 del quadrato di una retta commensurabile con EH o incommensurabile.

Superi dapprima del quadrato d'una retta commensurabile con EH; anche la maggiore HE è commensurabile con la data EF. Dunque EK è prima binomiale. Ma EF è razionale: e se un'area è compresa da una retta razionale e da una prima binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è binomiale [prop. 54]. Quindi la retta il cui quadrato equivale ad EI è binomiale; perciò anche la retta il cui quadrato equivale ad AD è binomiale.

Se poi EH^2 supera HK^2 del quadrato di una retta incommensurabile con EH, anche la maggiore EH è commensurabile in lunghezza con la data razionale EF; allora EK è quarta binomiale; ma EF è razionale: e se un'area è compresa da una retta razionale e da una quarta binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è la irrazionale detta maggiore. Così, la retta il cui quadrato equivale ad EI è maggiore. Dunque anche la retta il cui quadrato equivale ad AD è maggiore.

Sia ora $AB < CD$. Perciò anche $EG < HI$. Allora anche $EH < HK$ [VI, I; V,14]. Ma HK^2 supera EH^2 del quadrato di una retta o commensurabile o incommen-



surabile con HK. Superi dapprima del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con HK. E la minore EH sia commensurabile in lunghezza con la data razionale EF. Così EK è seconda binomiale. Ma EF è razionale. E se un'area è compresa da una retta razionale e una seconda binomiale, la retta il cui quadrato è equivalente a detta area è prima bimediale [prop. 55]. Quindi la retta il cui quadrato è equivalente ad EI è prima bimediale. Dunque anche la retta il cui quadrato è equivalente ad AD è prima bimediale.

Se poi HK^2 supera HE^2 del quadrato di una retta incommensurabile con HK, anche la minore EH è commensurabile con la data razionale EF.

Così EK è quinta binomiale. Ma EF è razionale. E se un'area è compresa da una retta razionale e da una quinta binomiale, la retta il cui quadrato è equivalente a detta area è il lato d'un quadrato equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale. Allora la retta il cui quadrato è equivalente ad EI è il lato d'un quadrato equivalente alla somma d'un'area razionale con una mediale. Perciò anche la retta il cui quadrato è equivalente ad AD è lato d'un quadrato equivalente alla somma d'un'area razionale con una mediale.

Dunque, se il quadrato di una retta, ecc.; c. d. d.

Sia α^2 un'area razionale, e $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ un'area mediale.

Allora $\sqrt{\alpha^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2}$ è

1) o una binomiale,
2) o una prima bimediale,
3) o una maggiore,
4) o il lato della somma di un'area razionale e un'area mediale.

Dimostrazione.

Sia γ un segmento razionale, arbitrariamente scelto, e poniamo

$$\alpha^2 = \gamma x, \quad \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma y.$$

Allora γx è razionale e quindi (X, 20) x *è razionale, commensurabile con* γ *in 1ª potenza.*

Siccome γy è un prodotto mediale, segue (X, 22) *che* y *è razionale, incommensurabile con* γ *in 1ª potenza.*

Da qui si deduce che x e y sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza; e siccome sono ambedue razionali, si ha che

$x + y$ *è una binomiale* (X, 36).

Ora possono darsi due casi:

$$1) \quad \alpha^2 > \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$$

$$2) \quad \alpha^2 < \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2.$$

Esaminiamo questi due casi.

1) Sia $\alpha^2 > \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$. Allora $x > y$. Possono di nuovo darsi due casi:

$$\text{a)}\ \sqrt{x^2 - y^2} : x = m : n$$

$$\text{b)}\ \sqrt{x^2 - y^2} : x \neq m : n.$$

Se vale a), allora (X, 47. Def. II, 1) $x + y$ *è una prima binominale*, perchè $x > y$ e perchè x è commensurabile con γ in 1ª potenza. Ma per la prop. X, 54 la radice quadrata $\sqrt{(x+y)\gamma}$ di un prodotto di una prima binomiale e di un segmento razionale γ è una binomiale. Quindi

$$\sqrt{(x+y)\gamma} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2} \quad \text{\emph{è una maggiore.}}$$

Se vale invece b), allora (X, Def. II, 4) $x + y$ *è una quarta binomiale.* Per la prop. X, 57 si conclude allora che

$$\sqrt{(x+y)\gamma} \quad \text{è una maggiore.}$$

2) Si abbia adesso $\alpha^2 < \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, quindi $x < y$, e si considederino i due casi possibili:

$$\text{a)}\ \sqrt{y^2 - x^2} : y = m : n$$

$$\text{b)}\ \sqrt{y^2 - x^2} : y \neq m : n.$$

Se vale a), allora (X, 47, Def. II, 2) $x + y$ *è una seconda binomiale,* e quindi (X, 55)

$$\sqrt{(x+y)\gamma} \quad \text{è \emph{una prima bimediale.}}$$

Se vale invece b), allora (X, 47. Def. II, 5) $x + y$ è una quinta binomiale, e quindi (X, 58)

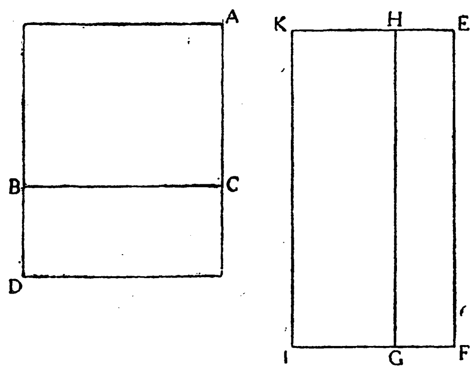
$\sqrt{(x+y)\gamma}$ è « il lato della somma di un'area razionale e di un'area mediale ».

72.

Se il quadrato di una retta è equivalente alla somma di due aree mediali incommensurabili tra loro, tale retta, irrazionale, o è seconda bimediale o lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali.

Si sommino infatti due aree mediali incommensurabili fra loro, AB, CD. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AD è o seconda bimediale o lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali.

Infatti, o $AB > CD$, o $AB < CD$. Sia, per esempio, dapprima $AB > CD$, e sia data la retta razionale EF; alla EF si applichi EG, equivalente ad AB, di larghezza EH, ed HI, equivalente a CD, di larghezza HK. Poichè ciascuno degli AB, CD è mediale, anche ciascuno degli EG, HI lo sarà. E sono applicati alla EF, razionale, ed hanno per larghezza EH, HK. Allora ciascuna delle



EH, HK è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la EF. E poichè AB, CD sono incommensurabili, ed $AB = EG$, $CD = HI$, anche EG, HI saranno incommensurabili. Ma $EG : HI = EH : HK$; perciò anche EH, HK saranno incommensurabili in lunghezza. Quindi EH, HK sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque EK è binomiale. Ma EH^2 supera HK^2 del quadrato di una retta commensurabile od incommensurabile con EH. Superi dapprima del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza: nessuna delle rette EH, HK è commensurabile in lunghezza con la retta razionale data EF. Allora EK è terza binomiale. Ma EF è razionale. E se un'area è compresa da una retta razionale e da una terza binomiale, la retta il cui quadrato equivale a detta area è seconda bimediale [prop. 56]. Allora la retta il cui quadrato equivale ad EI, cioè ad AD, è seconda bimediale.

Se poi EH^2 supera HK^2 del quadrato di una retta incommensurabile con EH, ciascuna delle EH, HK è incommensurabile in lunghezza con la EF. Così EK è sesta binomiale. E se un'area è compresa da una retta razionale e da una sesta binomiale, la retta il cui quadrato è equivalente a detta area è lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali [prop. 59].

Perciò la retta il cui quadrato equivale ad AD è lato d'un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali.

Dunque, se il quadrato di una retta, ecc....

Se $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ sono due mediali, tali che

$$(1) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 \mp m : n,$$

allora $\sqrt{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2}$ è o una seconda bimediale o « il lato della somma di due aree mediali ».

Dimostrazione. Sia, per fissare le idee, $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 > \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, e sia γ un segmento razionale arbitrariamente scelto. Poniamo

$$(2) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 = \gamma x, \quad \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma y.$$

Per ipotesi γx e γy sono prodotti mediali, e siccome γ è razionale, segue (X, 22) *che x e y sono ambedue razionali, incommensurabili con γ in 1^a potenza.* Da (1) e (2) si deduce

$$x : y \mp m : n.$$

e quindi (X, 36) $x + y$ *è una binomiale.*

Si possono adesso presentare due casi.

1) $\sqrt{x^2 - y^2} : x = m : n$. Allora da quanto precede (X, 47. Def. II, 3) $x + y$ è una terza binomiale e quindi (X, 56)

$$\sqrt{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2} = \sqrt{\gamma(x + y)} \text{ è una seconda bimediale.}$$

2) $\sqrt{x^2 - y^2} : x \mp m : n$. In questo caso (X, 47. Def. II, 6) $x + y$ è una sesta binomiale e quindi (X, 59)

$\sqrt{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2} = \sqrt{\gamma(x + y)}$ è « il lato della somma di due aree mediali », c. d. d.

Una binomiale e le irrazionali che ne derivano non sono uguali nè a una mediale nè tra loro. Infatti il quadrato di una mediale, applicato ad una retta razionale ha larghezza razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la retta a cui è applicato. Il quadrato poi di una binomiale, applicato ad un retta razionale ha per larghezza una retta prima binomiale. Il quadrato di una retta prima bimediale applicato ad una retta razionale ha per larghezza una retta seconda binomiale. Il quadrato di una retta seconda bimediale, applicato ad una retta razionale ha per larghezza una retta terza bimediale. Il quadrato di una maggiore, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta quarta binomiale. Un quadrato equivalente alla somma di un'area razionale con una mediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta quinta binomiale. Un quadrato equivalente alla somma di due aree mediali, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta sesta binomiale. Le larghezze indicate differiscono quindi dalla prima e fra di loro: dalla prima, perchè è razionale; fra di loro, perchè non sono dello stesso ordine.

Dunque le stesse rette irrazionali differiscono tra loro.

In uno scolio COMMANDINO riassume così la classificazione delle irrazionalità finora considerate e ottenute per addizione:

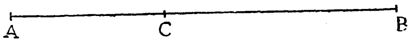
« Sette sono li senarii, de quali fin qui s'è detto. Il *primo* dimostra la generatione delle linee irrationali, il *secondo* la divisione percioche ad un sol punto si dividono. Il *terzo* la inventione delle linee di due nomi cioè della prima, seconda, terza, quarta, quinta e sesta, poi segue il *quarto* senario, che dichiara in qual modo queste linee sono differenti fra loro conciosiacosa, che usando quelli di due nomi mostri la differenza delle sei linee irrationali. Nel *quinto* dimostra l'applicatione o vero adattatione de quadrati, che si fanno dalle irrationali, cioè quali irrationali facciano le larghezze de spatii adattati. Nel *sesto* in che modo le linee commensurabili alle irrationali siano d'una medesima spetie, nel *settimo* manifestamente insegna la differenza di esse ».

73.

Se da una retta razionale si toglie una retta razionale commensurabile con la data solo in potenza, la rimanente è irrazionale, e si dice apotome.

Dalla razionale AB si tolga la razionale BC, commensurabile con AB solo in potenza. Dico che la rimanente AC è irrazionale, detta apotome.

Infatti, poichè AB, BC sono incommensurabili in lunghezza, e $AB : BC = AB^2 : AB \times BC$, anche AB^2,



$AB \times BC$ sono incommensurabili. Ma $AB^2 + BC^2$, AB^2 sono commensurabili; ed $AB \times BC$, $2AB \times BC$ sono commensurabili; e poichè $AB^2 + BC^2 = 2AB \times BC + CA^2$ anche AC^2, $AB^2 + BC^2$ sono incommensurabili.

Ma $AB^2 + BC^2$ è razionale.

Dunque AC è irrazionale, detta apotome; c. d. d.

$\alpha - \sqrt{\beta}$ è irrazionale.

Dimostrazione: Siccome si ha per ipotesi

$$\alpha : \sqrt{\beta} \neq m : n,$$

avendosi

$$\alpha : \sqrt{\beta} = \alpha^2 : \alpha\sqrt{\beta},$$

segue (X, 11)

$$\alpha^2 : \alpha\sqrt{\beta} \neq m : n.$$

Ma si ha

$$(\alpha^2 + \beta) : \alpha^2 = m : n \ (\text{X, } 15),$$

quindi

$$(\alpha^2 + \beta) : \alpha\sqrt{\beta} \neq m : n$$

Siccome si ha (II, 7)

$$\alpha^2 + \beta = 2\alpha\sqrt{\beta} + (\alpha - \sqrt{\beta})^2$$

si deduce (X, 13, 16)

$$(\alpha^2 + \beta) : (\alpha - \sqrt{\beta})^2 \neq m : n.$$

Siccome $\alpha^2 + \beta$ è razionale, segue che $(\alpha - \sqrt{\beta})^2$ è irrazionale e quindi anche $\alpha - \sqrt{\beta}$ è irrazionale (X, Def. 4).

Questa proposizione, come pure le proposizioni seguenti, trattano di concetti analoghi a quelli trattati nelle proposizioni 36-41. Soltanto invece del segno $+$ figura il segno $-$, invece della binomiale $\alpha + \sqrt{\beta}$ figura l'apotome $\alpha - \sqrt{\beta}$.

74.

Se da una retta mediale si toglie una retta mediale, commensurabile con la data solo in potenza, e tale che il rettangolo da esse compreso sia razionale, la rimanente parte è irrazionale, detta prima apotome *della mediale.*

Dalla mediale AB si tolga infatti BC, commensurabile con la retta AB solo in potenza, e tale che il rettangolo $AB \times BC$ sia razionale. Dico che la rimanente AC è l'irrazionale detta prima apotome di una mediale.

Infatti, poichè AB, BC sono mediali, anche AB^2, BC^2

lo sono. Ma $2AB \times BC$ è razionale; dunque $AB^2 \times BC^2$ sono incommensurabili. Perciò anche $2AB \times BC$ è incommensurabile col rimanente AC^2, perchè, se il tutto è incommensurabile con una delle parti, anche le grandezze date dapprincipio saranno incommensurabili.

Ma $2AB \times BC$ è razionale.

Perciò AC^2 è irrazionale. Dunque AC è irrazionale, e vien detta prima apotome della mediale.

Se le mediali $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono commensurabili tra loro solo in seconda potenza, e se il prodotto $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale, allora il segmento $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}$, detto *prima apotome della mediale*, è irrazionale.

Dimostrazione.

Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali, segue che $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è un prodotto mediale. Ma per ipotesi $2\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale, quindi

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!|} m : n.$$

Per la prop. X, 16 si deduce allora che

$$\left[\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - \sqrt[4]{\alpha\beta}\right] : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!|} m : n,$$

ossia

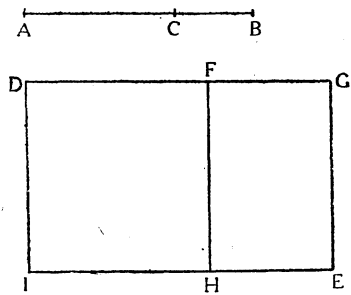
$$\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)^2 : 2\sqrt[4]{\alpha\beta} \mathrel{=\!\!\!|\!\!\!|} m : n.$$

Si conclude che, essendo $2\sqrt[4]{\alpha\beta}$ razionale, $\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è irrazionale, e quindi che anche $\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)$ è irrazionale (X, Def. 4).

75.

Se da una mediale si toglie una mediale commensurabile con la data solo in potenza, e tale che l'area da esse compresa sia mediale, la rimanente parte è irrazionale e vien detta seconda apotome *della mediale.*

Dalla mediale AB si tolga la mediale CB, commensurabile con la AB solo in potenza, e tale che l' area $AB \times BC$ da esse compresa sia mediale. Dico che la rimanente AC è irrazionale, detta seconda apotome della mediale.



Sia data infatti la razionale DI, e ad essa si applichi DE, equivalente a $AB^2 \times BC^2$, di larghezza DG; alla DI si applichi ancora DH, equivalente a $2AB \times BC$, di larghezza DF. Così il rimanente $FE = AC^2$. E poichè AB^2, BC^2 son mediali e commensurabili, anche DE lo sarà. Ed è applicato alla retta razionale DI, ed ha per larghezza DG. Allora DG è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con DI [prop. 22]. Di nuovo, poichè $AB \times BC$ è mediale, anche $2AB \times BC$ lo sarà; ma è equivalente a DH. Allora anche DH è mediale. Ed è applicato alla razionale DI, ed ha per larghezza DF. Perciò DF è razionale ed incommensurabile in lunghezza con DI. E poichè AB, BC sono commensurabili solo in potenza, sono incommensurabili in lunghezza. Allora anche AB^2, $AB \times BC$ sono incommensurabili.

Ma AB^2, $AB^2 \times BC^2$ sono commensurabili; ed $AB \times BC$, $2AB \times BC$ sono commensurabili. Allora $2AB \times BC$ ed $AB^2 \times BC^2$ sono incommensurabili [prop. 13].

Ma $DE = AB^2 \times BC^2$, $DH = 2AB \times BC$. Così DE, DH sono incommensurabili.

Ma $DE : DH = GD : DF$ [VI, 1]. Così GD, DF sono incommensurabili. E ciascuna è irrazionale. Allora GD, DF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Perciò FG è apotome [prop. 73]. Ma DI è razionale. E l'area compresa da una retta razionale e una irrazionale è irrazionale [prop. 20] e la retta il cui quadrato è equivalente a detta area è irrazionale. Ora $AC^2 = FE$.

Dunque AC è l'irrazionale detta seconda apotome della mediale; c. d. d.

Se le mediali $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono commensurabili tra loro solo in 2ª potenza e se $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è mediale (X, 28), allora il segmento $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}$, detto *seconda apotome della mediale*, è irrazionale.

Dimostrazione.

Sia γ un segmento razionale, arbitrariamente scelto. Poniamo

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma x \\ 2\sqrt[4]{\alpha\beta}=\gamma y\ ; \end{cases}$$

sottraendo si ottiene (II, 7)

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma(x-y).$$

Siccome $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ sono prodotti mediali, segue (X, 15, Corollario 23) che $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, ossia γx, è un prodotto mediale. Siccome γ è razionale, si deduce (X, 22) che x è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Nello stesso modo si dimostra che y è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Avendosi $\sqrt[4]{\alpha}:\sqrt[4]{\beta}=\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2:\sqrt[4]{\alpha\beta}$ (X, 11), e siccome per ipotesi $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono incommensurabili in 1ª potenza, segue che anche $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ sono incommensurabili. Ma $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è commensurabile con $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ (X, 15), quindi $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è incommensurabile con $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ (X, 13). Dalle (1) si deduce allora che γx, γy e quindi anche x, y sono incommensurabili in 1ª potenza (VI, 1, X, 11).

Da ciò che precede si conclude che $x-y$ è un'apotome (X, 73).

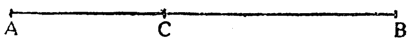
Ora dalla prop. X, 20 si può dedurre facilmente che il prodotto di un segmento razionale γ e di un segmento irrazionale $x-y$ è irrazionale. Perciò $\left(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, e quindi anche $\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}$, è irrazionale, c. d. d.

76.

Se da una retta se ne toglie un'altra incommensurabile in potenza con la data, e tale che la somma dei quadrati sia razionale, e il loro rettangolo mediale, la rimanente è irrazionale, e vien detta minore.

Dalla retta AB si tolga la BC, incommensurabile in potenza con la AB, e tale che risponda alle condizioni predette. Dico che la rimanente AC è l'irrazionale detta minore.

Infatti, poichè $AB^2 \times BC^2$ è razionale, e $2AB \times BC$



è mediale, $AB^2 \times BC^2$ e $2AB \times BC$ sono incommensurabili. Ora, convertendo, $AB^2 \times BC^2$ è incommensurabile con AC^2; ma $AB^2 \times BC^2$ è razionale. Così AC^2 è irrazionale. Dunque AC è irrazionale; e vien detta minore; c. d. d.

Se si ha 1) $t^2 : s^2 \mathrel{\ddagger} m : n$, 2) $t^2 + s^2$ razionale, 3) ts mediale (X, 33), allora il segmento $t - s$, *detto minore*, è irrazionale.

Dimostrazione.

Avendosi, per ipotesi,

$$(t^2 + s^2) : 2ts \mathrel{\ddagger} m : n,$$

si deduce (II, 7, X, 16)

$$(t^2 + s^2) : (t - s)^2 \mathrel{\ddagger} m : n.$$

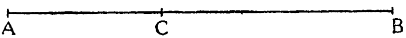
Siccome $t^2 + s^2$ è razionale per ipotesi, segue che $(t - s)^2$, e quindi anche $t - s$, è irrazionale, c. d. d.

77.

Se da una retta se ne toglie un'altra incommensurabile in potenza con la data, e tale che la somma dei loro quadrati sia mediale, e il doppio del loro rettangolo sia razionale, la rimanente sarà irrazionale e si dice retta che, sommata con una razionale, dà per totale una mediale.

Dalla retta AB si tolga la BC, incommensurabile in potenza con la AB, e tale che risponda ai requisiti richiesti. Dico che la rimanente AC è la irrazionale indicata.

Infatti, poichè $AB^2 + BC^2$ è mediale, e $2AB \times BC$



è razionale, $AB^2 + BC^2$ e $2AB \times BC$ sono incommensurabili. Così anche il rimanente AC^2 e $2\,AB \times BC$ sono incommensurabili. Ma $2AB \times BC$ è razionale; quindi AC^2 è irrazionale. Dunque AC è quella retta irrazionale che, sommata con una razionale, dà per totale una mediale;

c. d. d.

Se si ha 1) $t^2 : s^2 \ddagger m : n$, 2) $t^2 + s^2$ mediale, 3) $2ts$ razionale (X, 34), allora il segmento $t - s$ è irrazionale; $(t - s)$ si dice il segmento che, sommato con un razionale, da per totale una mediale.

Dimostrazione.

Si ha per ipotesi

$$(t^2 + s^2) : 2ts \ddagger m : n,$$

e quindi (II, 7, X, 16)

$$(t - s)^2 : 2ts \mp m : n.$$

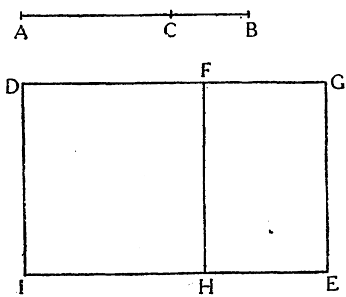
Ma $2ts$ è razionale per ipotesi, quindi $(t - s)^2$, e perciò anche $(t - s)$ è irrazionale, c. d. d.

OSSERVAZIONE. Invece di chiamare la nuova irrazionalità « segmento che aumentato di un'area razionale dà un tutto mediale », la si può invece chiamare, per analogia alla prop. X, 70, « il lato della differenza di un'area mediale e di un'area razionale ».

78.

Se da una retta se ne toglie un'altra incommensurabile in potenza con la data, tale che la somma dei quadrati delle due rette sia mediale, il doppio del loro rettangolo sia anch'esso mediale, e inoltre la somma dei quadrati sia incommensurabile col doppio rettangolo, la rimanente retta è irrazionale; si dice retta che, sommata con una mediale dà per totale una mediale.

Dalla retta AB si tolga BC incommensurabile in potenza con la AB, e che abbia i requisiti richiesti. Dico che la rimanente AC è la retta irrazionale che sommata con



una mediale dà per totale una mediale. Sia data infatti la razionale DI, e ad essa si applichi DE equivalente ad $AB^2 + BC^2$, di larghezza DG, e si tolga DH, equivalente a $2AB \times BC$. Così il rimanente $FE = AC^2$ [II, 7]. E poichè $AB^2 + BC^2$ è mediale, ed uguale a DE, DE è mediale. Ed è applicato alla razionale DI, ed ha per larghezza DG. Allora DG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con DI. Di nuovo, poichè $2AB \times BC$ è mediale ed uguale a DH, DH è mediale. Ed è applicato alla razionale DI, ed ha per larghezza DF. Allora DF è razionale ed incommensurabile in lunghezza con DI. E poichè $AB^2 + BC^2$, $2AB \times BC$ sono incommensurabili, anche DE, DH lo sono. Ma $DE : DH = DG : DF$; perciò DG, DF sono incommensurabili. Ed entrambi sono razionali. Allora GD, DF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Perciò FG è apotome. Ma FH è razionale. E l'area compresa da un'apotome e una retta razionale è irrazionale, e la retta il cui quadrato equivale a detta area è irrazionale.

Ma $AC^2 = FE$. Dunque AC è irrazionale e si dice retta che sommata con una mediale dà totale mediale;

c. d. d.

Se si ha 1) $t^2 : s^2 \mp m : n$, 2) $t^2 + s^2$ mediale, 3) $2ts$ razionale e 4) $(t^2 + s^2) : 2ts \mp m : n$ (X, 35), allora il segmento $t - s$, è irrazionale, e si dice segmento che, sommato con un mediale, dà per risultato un mediale.

Dimostrazione.

Sia γ un segmento razionale arbitrario, e si ponga

$$(1) \qquad \begin{cases} t^2 + s^2 = \gamma x, \\ \quad 2ts = \gamma y. \end{cases}$$

Sottraendo si ricava (II, 7)

$$(t - s)^2 = \gamma(x - y). \tag{2}$$

Siccome γx è un prodotto mediale, segue che x è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza (X, 22). Analogamente y è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Avendosi, per ipotesi, $(t^2 + s^2) : 2ts \not= m : n$, ossia

$$\gamma x : \gamma y \not= m : n, \text{ segue (X, 11) } x : y \not= m : n.$$

Pertanto si conclude che $x - y$ è un'apotome (X, 73).

Per la prop. X, 20 si conclude allora che anche $\gamma(x - y)$, ossia $(t - s)^2$ è irrazionale, quindi $(t - s)$ è irrazionale, c. d. d.

OSSERVAZIONE. Il segmento $(t - s)$, per analogia con la prop. X, 41, si può chiamare « lato della differenza di due aree mediali ».

79.

Ad una apotome è adiacente una sola retta razionale commensurabile solo in potenza con la somma delle due.

Sia AB apotome, e ad essa sia adiacente BC. Allora AC, CB sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dico che nessun'altra retta razionale commensurabile solo in potenza con la retta totale, è adiacente ad AB.

Infatti, se è possibile, sia questa BD. Allora AD, DB sarebbero razionali, commensurabili solo in potenza. E poichè $AD^2 + DB^2$ supera $2AD \times DB$ di tanto quanto $AC^2 + CB^2$ supera $2AC \times CB$ (infatti la differenza è sempre AB^2), permutando, la differenza tra $AD^2 + DB^2$ ed $AC^2 + CB^2$ è uguale alla differenza tra $2AB \times DB$ e $2AC \times CB$. Ma $AD^2 + DB^2$ supera $AC^2 + CB^2$ di un'area razionale, perchè entrambi sono razionali; perciò anche $2AD \times DB$ supera $2AC \times CB$ d'un'area razionale, il che non può essere, perchè sono entrambe mediali,

ed una mediale non supera una mediale d'un'area razionale [prop. 26]. Allora nessun' altra retta razionale commensurabile solo in potenza con la somma delle due, è adiacente alla AB.

Dunque una sola retta razionale, ecc.; c. d. d.

Un' apotome $\alpha - \sqrt{\beta}$ (X, 73) non si può dividere in due modi differenti in due parti razionali, commensurabili in 2ª potenza.

Infatti, se fosse

$$\alpha - \sqrt{\beta} = x - y, \quad (\alpha \neq x, \quad \sqrt{\beta} \neq y)$$

dove anche x e y siano razionali, commensurabili solo in 2ª potenza, si avrebbe

$$\alpha^2 + \beta - 2\alpha\sqrt{\beta} = x^2 + y^2 - 2xy,$$

ossia

$$(\alpha^2 + \beta) - (x^2 + y^2) = 2\alpha\sqrt{\beta} - 2xy.$$

Ora in questa eguaglianza il primo membro è razionale, mentre il secondo è un prodotto mediale, perchè tanto $2\alpha\sqrt{\beta}$ quando $2xy$ sono prodotti mediali (X, 21; X, 26), ciò che è assurdo. Quindi deve aversi necessariamente $\alpha = x$, $\sqrt{\beta} = y$, c. d. d.

80.

Alla prima apotome di una mediale è adiacente una sola retta mediale commensurabile solo in potenza con la *somma delle due e tale che con detta somma comprenda un'area razionale.*

Sia infatti AB la prima apotome di una mediale e BC sia adiacente alla AB. Allora AC, CB sono mediali,

commensurabili solo in potenza, e comprendono l'area $AC \times CB$ razionale. Dico che nessun'altra mediale è commensurabile con la AB, se è commensurabile solo in potenza con la somma delle due e se, con tale somma, comprende un'area razionale.

Infatti, se è possibile, sia adiacente anche la AB. Quindi AD, DB sono mediali, commensurabili solo in potenza, e comprendono l'area $AD \times DB$ razionale. Ora, poichè $AD^2 \times DB^2$ supera $2AD \times DB$ di tanto quanto $AC^2 \times CB^2$ supera $2AC \times CB$ (infatti la differenza è sempre AB^2), permutando, la differenza tra $AD^2 + DB^2$ ed $AC^2 + CB^2$ sarà uguale alla differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$. Ma la differenza tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$ è un'area razionale, perchè entrambi son razionali: quindi anche la differenza tra $AD^2 + DB^2$ ed $AC^2 + CB^2$ è razionale, il che è impossibile, perchè entrambe sono mediali: ed una mediale non supera un' altra mediale d' un' area razionale [prop. 26].

Dunque, alla prima apotome d'una mediale, ecc.

c. d. d.

Una prima apotome d'una mediale si può presentare in un sol modo come differenza di due mediali, commensurabili solo in 2ª potenza e il cui prodotto sia razionale.

Si abbia dunque

$$(1) \qquad \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta} = x - y,$$

dove tanto $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ quanto x e y soddisfino alle condizioni (X, 74) di essere mediali, commensurabili tra loro in 2ª potenza e di aver il loro prodotto razionale. In queste ipotesi si deve avere necessariamente $\sqrt[4]{\alpha} = x$, $\sqrt[4]{\beta} = y$.

Infatti, dalla (1) si deduce

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - 2\sqrt[4]{\alpha\beta} = x^2 + y^2 - 2xy,$$

ossia

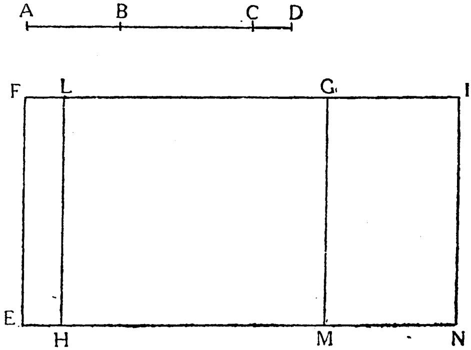
$$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - (x^2 + y^2) = 2\sqrt[4]{\alpha\beta} - 2xy.$$

Per ipotesi, il secondo membro di questa eguaglianza è razionale, mentre il primo membro, se si ha $\sqrt[4]{\alpha} \neq x$, $\sqrt[4]{\beta} \neq y$, è necessariamente un'area mediale, quale differenza di due aree mediali diseguali. Ciò è assurdo, quindi deve aversi $\sqrt[4]{\alpha} = x$, $\sqrt[4]{\beta} = y$, c. d. d.

81

Alla seconda apotome d'una mediale è adiacente una sola mediale commensurabile solo in potenza con la somma delle due, e tale che lo spazio compreso da essa e da tale somma sia mediale.

Sia AB seconda apotome d'una mediale e sia BC adiacente ad AB. Allora AC, CB son mediali, commensurabili solo in potenza, tali che l'area $AC \times CB$ da esse compresa è mediale. Dico che nessun'altra retta mediale è adiacente alla AB, se è commensurabile solo in potenza



con la somma delle due, e comprende con detta somma un'area mediale.

Infatti, se è possibile, sia BD adiacente. Allora anche AD, DB sono mediali, commensurabili solo in potenza, tali che comprendono $AD \times DB$ mediale [prop. 75]. Sia data la razionale EF, e ad essa si applichi EG equivalente ad $AC^2 + CB^2$, di larghezza EM; e si tolga l'area HG, equivalente a $2AC \times CB$, di larghezza HM. Allora il rimanente $EL = AB^2$ [II, 7].

Di nuovo, alla EF si applichi EI, equivalente ad $AD^2 + DB^2$, di larghezza EN. Ma $EL = AB^2$; allora il rimanente $HI = 2AD + DB$ [II, 7].

E poichè AC, CB sono mediali, anche $AC^2 + CB^2$ lo sono. Ed $AC^2 + CB^2 = EG$. Quindi anche EG è mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, ed ha per larghezza EM. Così EM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con EF. Di nuovo, poichè $AC \times CB$ è mediale, anche $2AC \times CB$ lo sarà.

Ma $HG = 2AC \times CB$; allora anche HG è mediale: ed è applicato alla retta razionale AF, ed ha per larghezza HM. Così HM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con EF [prop. 22]. E poichè AC, CB sono commensurabili solo in potenza, essi sono incommensurabili in lunghezza. Ma $AC : CB = AC^2 : AC \times CB$. Perciò AC^2 ed $AC \times CB$ sono incommensurabili. Ma AC^2, $AC^2 + CB^2$ sono commensurabili, ed $AC \times CB$, $2AC \times CB$ pure.

Perciò $AC^2 + CB^2$, $AC \times CB$ sono incommensurabili. Ma $EG^2 = AC^2 + CB^2$, $GH = 2AC \times CB$. Allora EG, HG sono incommensurabili. Ma $EG : HG = EM : MH$. Così EM, MH sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale. Quindi EM, MH sono razionali, commensurabili solo in potenza. Allora EH è apotome [prop. 73]: ed MH gli è congruente.

Nello stesso modo dimostreremo che anche HN gli è congruente. Così ad un'apotome sarebbero congruenti rette diverse, commensurabili solo in potenza con la retta totale, il che è impossibile.

Dunque alla seconda apotome di una mediale, ecc.

c. d. d.

Una seconda apotome di una mediale si può presentare in un sol modo come differenza di due mediali, commensurabili tra loro solo in 2^a potenza, e il cui prodotto sia mediale.

Si abbia dunque

$$(1) \qquad \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta} = x - y,$$

dove tanto $\sqrt[4]{\beta}$ e $\sqrt[4]{\delta}$, quanto x e y soddisfino alle condizioni (X, 75) di essere mediali commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, e di avere il loro prodotto mediale. In queste ipotesi si ha necessariamente $\sqrt[4]{\alpha}=x$, $\sqrt[4]{\beta}=y$.

Infatti, poniamo

(2) $$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma u,$$

(3) $$2\sqrt[4]{\alpha\beta}=\gamma v,$$

dove γ è un segmento razionale arbitrariamente scelto.

Per sottrazione si ricava

$$\left(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma(u-v).$$

Posto ancora

(4) $$x^2+y^2=\gamma z,$$

si deduce dalla (1)

$$x^2+y^2-\left(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}\right)^2=2xy;\quad \text{(II, 7)}$$

ossia

(5) $$\gamma z-\gamma(u-v)=2xy.$$

Siccome $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali, segue che $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, ossia γu, è un prodotto mediale (X, 15 e corollario 23). Quindi (X, 22) u è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza. Analogamente si deduce dalla (3) e dalle ipotesi fatte, che v è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza. Per ipotesi si ha $\sqrt[4]{\alpha}:\sqrt[4]{\beta}\mp m:n$, quindi si ha anche (X, 11) $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2:\sqrt[4]{\alpha\beta}\mp m:n$.

D'altra parte si ha $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2:\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2=m:n$, e quindi (X, 13)

$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2:\sqrt[4]{\alpha\beta}\mp m:n$, ossia $\gamma u:\gamma v\mp m:n$, ossia finalmente (VI, 1) $u:v\mp m:n$.

Da quanto precede si deduce subito *che* $u-v$ *è un'apotome* (X, 73). Nello stesso modo si deduce che $z-[z-(u-v)]$ è un'apotome.

Ma si ha

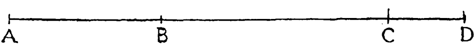
$$u-v=z-[z-(u-v)],$$

e se $\sqrt[4]{\alpha} \neq x$, $\sqrt[4]{\beta} \neq y$, si ha certamente $u \neq z$, $v \neq z - (u - v)$, e quindi la medesima apotome risulta rappresentata in due modi differenti come differenza di due segmenti razionali, commensurabili solo in 2ª potenza, ciò che contraddice alla prop. X, 79. Quindi $x = \sqrt[4]{\alpha}$, $y = \sqrt[4]{\beta}$, c. d. d.

82.

Ad una retta minore *è adiacente una sola retta incommensurabile in potenza con la somma delle due, e tale che la somma dei quadrati della retta e di tale somma sia razionale, e il doppio del rettangolo da esse compreso sia mediale.*

Sia AB minore, e alla AB sia adiacente BC. Allora AC, CB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il doppio rettangolo è mediale. Dico che nessun'altra retta che abbia questi requisiti è adiacente alla AB. Infatti, se è possibile, sia adiacente BD. Allora anche AD, DB, incommensurabili in potenza, hanno le qualità dette. E poichè la differenza tra $AD^2 + DB^2$ e $AC^2 + CB^2$ è uguale alla differenza



tra $2AD \times DB$ e $2AC \times CB$, ed $AD^2 + DB^2$ supera $AC^2 + CB^2$ d'un'area razionale, perchè entrambi son razionali, anche $2AD \times DB$ supera $2AC \times CB$ d'un'area razionale, il che è impossibile, perchè entrambi son mediali.

Dunque ad una retta minore, ecc. c. d. d.

Un segmento *minore* si può presentare in un sol modo come differenza di due segmenti, incommensurabili in 2ª potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia razionale e il loro prodotto sia mediale (v. X, 76).

Si abbia dunque

$$(1) \qquad t - s = x - y$$

dove t, s e x, y soddisfano alle condizioni sopradette. Allora si ha necessariamente

$$t = x, \quad s = y.$$

Infatti, se ciò non fosse vero, nell'eguaglianza che si deduce dalla (1)

$$(t^2 + s^2) - (x^2 + y^2) = 2ts - 2xy,$$

il primo membro sarebbe razionale, mentre il secondo sarebbe mediale, ciò che è assurdo. Quindi deve aversi necessariamente $t = x$, $s = y$, c. d. d.

83.

Ad una retta che sommata con una razionale dà per totale una mediale, è adiacente una sola retta incommensurabile in potenza con la retta totale, e tale che la somma del suo quadrato e di quello della retta totale sia mediale, e il doppio del loro rettangolo sia razionale.

Sia AB una retta che sommata con una razionale dà una retta totale mediale, e sia BC adiacente ad AB. Allora AC, CB sono incommensurabili in potenza, ed hanno i requisiti richiesti. Dico che nessun'altra retta che ha quei requisiti è congruente alla AB.

Infatti, se è possibile, sia adiacente DB. Allora anche le rette AD, DB sono incommensurabili in potenza, ed hanno i requisiti richiesti. Ora, poichè, $AD^2 + DB^2$ supera $AC^2 + CB^2$ di tanto di quanto $2AD \times DB$ supera $2AC \times CB$ e $2AD \times DB$ supera $2AC \times CB$ di

un'area razionale (infatti ognuno è razionale), anche $AD^2 + DB^2$ supera $AC^2 + CB^2$ d'un'area razionale, il che è impossibile, perchè entrambi son mediali. Quindi alla AB non è adiacente nessun'altra retta incommensurabile in potenza con la retta totale, e che con essa abbia i requisiti detti. Dunque una sola è adiacente; c. d. d.

Si abbia dunque

$$t - s = x - y,$$

dove t, s e x, y soddisfano alle condizioni enunciate. Allora si ha necessariamente $t = x$, $s = y$. Infatti, nell'eguaglianza

$$(t^2 + s^2) - (x^2 + y^2) = 2ts - 2xy$$

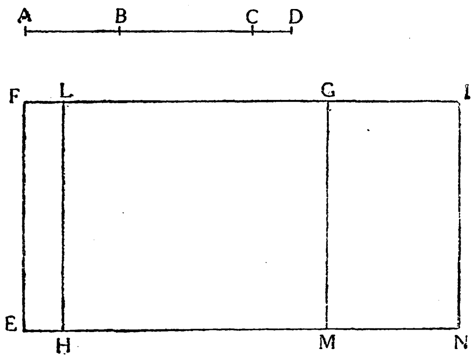
il secondo membro è razionale, mentre, se fosse $t \neq x$, $s \neq y$, il primo membro sarebbe mediale, ciò che è assurdo.

84.

Ad una retta che sommata con una mediale dà una somma mediale una sola retta è adiacente, incommensurabile in potenza con la retta totale, in modo che la somma dei quadrati della retta adiacente e della retta totale sia mediale, il loro doppio rettangolo sia mediale, ed inoltre sia incommensurabile con la somma dei quadrati.

La retta AB, sommata con una mediale, dia una retta totale mediale; e BC le sia adiacente. Allora AC, CB sono incommensurabili in potenza, ed hanno i requisiti richiesti. Dico che nessun'altra retta che abbia quei requisiti è adiacente alla AB.

Infatti, se è possibile, sia questa BD, in modo che anche AD, DB siano incommensurabili in potenza, che $AD^2 + DB^2$ sia mediale, $2AD \times DB$ sia pure mediale,



ed inoltre $AD^2 + DB^2$ e $2AD \times DB$ siano incommensurabili. Sia data la razionale EF, e ad EF si applichi EH equivalente ad $AC^2 + CB^2$, di larghezza EM, e sempre alla EF si applichi HG equivalente a $2AC \times CB$, di larghezza HM. Così il rimanente $AB^2 = EL$.

Di nuovo, alla EF si applichi EI, equivalente ad $AD^2 + DB^2$, di larghezza EN.

Ma $AB^2 = EL$. Quindi il rimanente $2AD \times DB = HI$. E poichè $AC^2 + CB^2$ è mediale, e $AC^2 + CB^2 = EG$, anche EG è mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, ed ha per larghezza EM. Allora EM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con EF [prop. 22].

Di nuovo, poichè $2AC \times CB$ è mediale, e $2AC \times CB = HG$, anche HG è mediale. Ed è applicato alla razionale EF, ed ha per larghezza HM. Allora HM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la retta EF [prop. 22]. E poichè $AC^2 + CB^2$ e $2AC \times CB$ sono incommensurabili, anche EG, HG lo sono. Così anche EM, MH sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale. Allora EM, MH sono razionali, commensurabili solo in potenza. Perciò EH è apotome [prop. 73] ed HM le è congruente.

In modo simile dimostreremo inoltre che EH è apotome, ed HN le è congruente. Così sarebbero congruenti due diverse rette, ciascuna apotome, commensurabili solo in potenza con la retta totale, il che abbiamo dimostrato che è impossibile [prop. 79]. Allora nessun'altra retta è congruente alla AB.

Dunque alla AB una sola retta è congruente, che sia incommensurabile in potenza con la retta totale, ecc.

c. d. d.

Si abbia dunque

$$t - s = x - y, \tag{1}$$

dove

$$\left.\begin{array}{ll} t^2 : s^2 \mp m : n; & x^2 : y^2 \mp m : n; \\ t^2 + s^2 \text{ è mediale}; & x^2 + y^2 \text{ è mediale}; \\ 2ts \text{ è mediale}; & 2xy \text{ è mediale}; \\ (t^2 + s^2) : 2ts \mp m : n; & (x^2 + y^2) : 2xy \mp m : n. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Allora si ha necessariamente $t = x$, $s = y$. Infatti, scelto in modo arbitrario un segmento razionale α, si ponga

$$t^2 + s^2 = \alpha u; \quad 2ts = \alpha v \tag{3}$$

si avrà quindi $(t-s)^2=\alpha(u-v)$. Si ponga inoltre

$$(4) \qquad x^2+y^2=\alpha z$$

si avrà allora (II, 7) $x^2+y^2-(t-s)^2=2xy$, ossia

$$(5) \qquad \alpha z-\alpha(u-v)=2xy.$$

Dalle (3) e dalle ipotesi fatte sopra t e s si conclude facilmente che u e v sono razionali, commensurabili con α e tra di loro solo in 2ª potenza (X, 22, VI, 1, X, 11). Quindi $u-v$ è un'apotome (X, 73). In modo analogo si deduce dalle (4), (5) che $z-[z-(u-v)]$ è un'apotome. Risulta dunque che la medesima apotome è rappresentata in due modi

$$u-v=z-[z-(u-v)],$$

dove, se $t \neq x$ e $s \neq y$, si ha certamente $u \neq z$, $v \neq z-(u-v)$. Ciò contradice alla prop. X, 79, e quindi $t=x$, $s=y$, c. d. d.

Terza serie di definizioni.

1) Date una retta razionale e un'apotome, se il quadrato della retta totale supera il quadrato della retta congruente del quadrato di una retta commensurabile con sè, e la retta totale è commensurabile in lunghezza con la data razionale, essa si dice *prima apotome*.

2) Se la retta congruente è commensurabile in lunghezza con la data razionale, ed il quadrato della retta totale supera il quadrato della congruente del quadrato di una retta commensurabile con sè, essa si dice *seconda apotome*.

3) Se nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la retta data razionale, anche il quadrato della retta

totale supera la congruente del quadrato di una retta commensurabile con sè, essa si dice *terza apotome*.

Di nuovo, se il quadrato della retta totale supera il quadrato della congruente del quadrato di una retta incommensurabile con sè, se la retta totale è commensurabile in lunghezza con la data razionale, si dice *quarta apotome*.

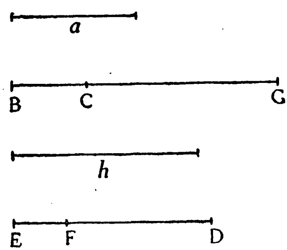
5) Se la congruente le è commensurabile, *quinta*.

6) Se nessuna delle due, *sesta*.

85.

Trovare una prima apotome.

Sia data la razionale a, e sia BG commensurabile in lunghezza con la a. Allora anche BG è razionale. Siano dati due numeri quadrati DE, EF, la cui differenza FD non sia un numero quadrato [prop. 28, lemma I]. Allora ED non ha con DF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. E sia $ED:DF=BG^2:GC^2$.



Così BG^2, GC^2 sono commensurabili. Ma BG^2 è razionale. Allora GC^2 è razionale. Perciò anche GC è razionale. E poichè ED non ha con DF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure BG^2 ha con GC^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Allora BG, GC sono incommensurabili in lunghezza; e ciascuna è razionale; allora BG, GC sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque BC è apotome [prop. 73].

Dico ora che è prima.

Infatti, sia h^2 equivalente alla differenza tra BG^2 e GC^2; poichè $ED : DF = BG^2 : GC^2$, anche convertendo $ED : EF = BG^2 : h^2$. Ma ED ha con EF il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Allora anche BG^2 ha con h^2 il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; perciò BG, h sono commensurabili in lunghezza. Ma BG^2 supera GC^2 del quadrato di h. Allora BG^2 supera GC^2 del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con sè, e l'intera BG è commensurabile con la data razionale a. Quindi BC è prima apotome. Dunque è stata trovata una prima apotome; c. d. d.

Trovare una prima apotome.

Si sceglie ad arbitrio un segmento razionale α, e un segmento $l\alpha$ con esso commensurabile in 1ª potenza. Si scelgono due numeri m, n, tali che $m^2 - n^2$ non sia un quadrato perfetto. Si determina poi β dalla eguaglianza:

$$l^2\alpha^2 : \beta = m^2 : (m^2 - n^2) \quad \text{(X, 6, Corollario).}$$

Allora β sarà razionale, e $\sqrt{\beta}$ sarà ancora razionale, commensurabile però con $l\alpha$ solo in 2ª potenza. Perciò $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è un'apotome (X, 73). Essa è inoltre una prima apotome. Infatti si ha

$$l^2\alpha^2 : \beta = m^2 : (m^2 - n^2),$$

e quindi (V, 19 Corollario)

$$l^2\alpha^2 : (l^2\alpha^2 - \beta) = m^2 : n^2,$$

ossia

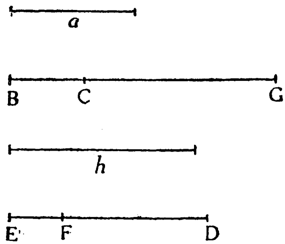
$$l\alpha : \sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} = m : n,$$

e quindi (X, Def. III, 1) $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è effettivamente una prima apotome, c. d. d.

86.

Trovare una seconda apotome.

Sia data la razionale a e sia CG commensurabile in lunghezza con la a. Allora CG è razionale. E siano dati due numeri quadrati DE, EF, la cui differenza DF non sia un numero quadrato; e sia $FD : DE = CG^2 : GB^2$. Allora CG^2, CB^2 sono commensurabili. Ma CG^2 è razionale; perciò anche GB^2 lo sarà. Così anche GB è razionale. E poichè CG^2 non ha con GB^2 la ragione di un



numero quadrato con un numero quadrato, CG e GB sono incommensurabili. E ciascuna è razionale. Allora GB,

CB sono razionali, commensurabili solo in potenza. Quindi BC è apotome [prop. 73].

Dico ora che è seconda.

Infatti la differenza tra BC^2 e GC^2 è h^2. E poichè $BG^2 : GC^2 = ED : DF$, convertendo, $BG^2 : h^2 = DE : EF$. E ciascuno dei DE, EF è un quadrato. Allora BG^2 ha con h^2 la ragione di un numero quadrato ad un numero quadrato. Così BG, h sono commensurabili in lunghezza. E la differenza tra BG^2 e GC^2 è h^2; perciò BG^2 supera GC^2 del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con BG. E la retta congruente CG è commensurabile con la data razionale a. Quindi BC è seconda apotome.

Dunque è stata trovata la seconda apotome BC;

c. d. d.

Trovare una seconda apotome (X, Def. III, 2)

Per questo scopo, conservando le notazioni della proposizione precedente, si ponga

$$(1) \qquad (m^2 - n^2) : m^2 = l^2\alpha^2 : \beta.$$

allora $l\alpha$ sarà razionale e $\sqrt{\beta}$ razionale, commensurabile con $l\alpha$ solo in 2ª potenza, e quindi $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è un'apotome. Inoltre si ha dalla (1)

$$m^2 : n^2 = \beta : (\beta - l^2\alpha^2);$$

ossia

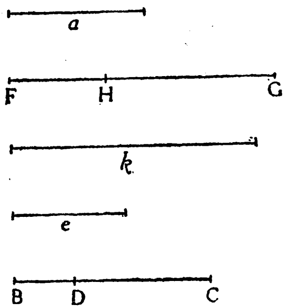
$$m : n = \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta - l^2\alpha^2},$$

da cui si conclude subito che $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è una 2ª apotome, c. d. d.

87.

Trovare una terza apotome.

Sia data la razionale a, e tre numeri, e, BC, CD, non aventi fra di loro la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, ma CB abbia con BD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato; e sia $e : BC = a^2 : FG^2$ [prop. 28, lemma I]; e $BC : CD = FG^2 : GH^2$. Ora, poichè $e : BC = a^2 : FG^2$, a^2 ed



FG^2 sono commensurabili. Ma a^2 è razionale. Allora anche FG^2 lo sarà; perciò FG è razionale. E poichè e non ha con BC la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure a^2 ha con FG^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Così a, FG sono incommensurabili in lunghezza. Di nuovo, poichè $BC : CD = FG^2 : GH^2$, gli FG^2 e GH^2 sono commensurabili. Ma FG^2 è razionale; quindi anche GH^2 lo sarà. Perciò GH è razionale. E poichè BC non ha con CD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure FG^2 ha con GH^2 la ragione di un numero quadrato con un numero quadrato. Perciò FG, GH sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale.

Quindi FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque FH è apotome [prop. 73].

Dico ora che è terza.

Infatti, poichè $e : BC = a^2 : FG^2$, $BC : CD = FG^2 : HG^2$, *ex aequo* [V, 22], $e : CD = a^2 : HG^2$. Ma e non ha con CD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi neppure a^2 ha con GH^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò a, GH sono incommensurabili in lunghezza. Quindi nessuna delle rette FG, GH è commensurabile in lunghezza con la data razionale a.

Sia ora k^2 la differenza tra FG^2 e GH^2; poichè dunque $BC : CD = FG^2 : GH^2$, convertendo [V, 19, corollario] sarà $BC : BD = FG^2 : k^2$.

Ma BC ha con BD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi anche FG^2 ha con k^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò FG, k sono commensurabili in lunghezza [prop. 9], ed FG^2 supera GH^2 del quadrato di una retta commensurabile con sè. E nessuna delle rette FG, GH è commensurabile in lunghezza con la data razionale a. Quindi FG è terza apotome.

Dunque è stata trovata la terza apotome FG; c. d. d.

Trovare una terza apotome, cioè un'apotome

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma},$$

in cui $\sqrt{\beta}$ o $\sqrt{\gamma}$ siano incommensurabili in 1ª potenza col segmento razionale α prefissato e che si abbia inoltre $\sqrt{\beta - \gamma} : \sqrt{\beta} = n : m$.

Per questo scopo siano p, m, n tre numeri arbitrari, tali però che i tre numeri p, m^2, $(m^2 - n^2)$ non stiano due a due in rapporto di quadrati perfetti. Si pone poi

$$(1) \qquad p : m^2 = \alpha^2 : \beta,$$

$$(2) \qquad m^2 : (m^2 - n^2) = \beta : \gamma.$$

Allora si avrà che $\sqrt{\beta}$ è razionale, incommensurabile con α in 1ª potenza, e che $\sqrt{\gamma}$ è pure esso razionale, incommensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza. Perciò $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ è un'apotome (X, 73).

Dalle (1) e (2) si deduce (V, 22)

$$p : (m^2 - n^2) = \alpha^2 : \gamma,$$

quindi $\sqrt{\gamma}$ è commensurabile con α solo in 2ª potenza.

Dalla (2) segue, convertendo,

$$m^2 : n^2 = \beta : (\beta - \gamma) \qquad \text{(V, 19 Corollario)}$$

e quindi

$$m : n = \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta - \gamma}.$$

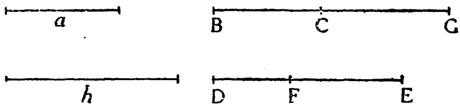
Risulta così che $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ è una terza apotome (X, Def. III, 3).

88.

Trovare una quarta apotome.

Sia data la razionale a e sia BG commensurabile in lunghezza con la a. Allora anche BG è razionale. E siano dati due numeri DF, FE, in modo che la somma DE non abbia con ciascuno dei DF, EF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

E sia $DE : EF = BG^2 : GC^2$. Allora BG^2, GC^2 sono commensurabili. Ma BG^2 è razionale. Così anche GC^2 lo sarà. Perciò GC sarà razionale. E poichè DE



non ha con EF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure BG ha con GC^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò BG, GC sono incommensurabili in lunghezza; e ciascuna è razionale. Allora BG, GC sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque BC è apotome [prop. 73]. Sia ora h^2 la differenza tra BG^2 e GC^2. Poichè dunque $DE : EF = BG^2 : GC^2$, anche convertendo $ED : DF = BG : h$. Ma ED non ha con DF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi neppure BG^2 ha con h^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò BG, h sono incommensurabili in lunghezza. Ma BG^2 supera GC^2 del quadrato di h. Quindi BG^2 supera GC^2 del quadrato di una retta incommensurabile con sè. E la somma BG è commensurabile in lunghezza con la data razionale a. Quindi BC è quarta apotome.

Dunque è stata trovata una quarta apotome; c. d. d.

Trovare una quarta apotome, cioè un'apotome

$$l\alpha - \sqrt{\beta}$$

in cui il segmento maggiore, cioè $l\alpha$, sia commensurabile in 1[a] potenza con un segmento razionale α prefissato, e tale inoltre che si abbia

$$\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha \mp m : n.$$

Per questo scopo, fissato il segmento $l\alpha$, si scelgono due numeri m, n che non stiano alla loro somma $m + n$ in rapporto di quadrati perfetti. Si pone poi

$$(1) \qquad (m + n) : n = l^2\alpha^2 : \beta.$$

Sarà $\sqrt{\beta}$ un segmento razionale $< l\alpha$ e commensurabile con $l\alpha$ solo in 2[a] potenza (X, 9) e quindi $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è *un' apotome* (X, 73).

Dalla (1) si deduce poi, convertendo,

$$(m + n) : m = l^2\alpha^2 : l^2\alpha^2 - \beta, \quad \text{(V, 19 Corollario)}$$

ossia

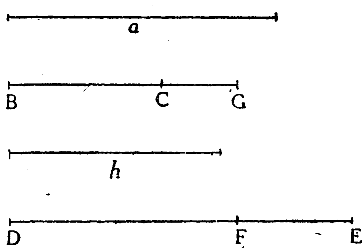
$$\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha \mp m : n,$$

perchè per ipotesi $m + n$, m non stanno tra di loro come quadrati perfetti. Risulta così (X, Def. III, 4) che $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è una quarta apotome, c. d. d.

89.

Trovare una quinta apotome.

Sia data la razionale a e sia CG commensurabile in lunghezza con la retta a. Allora CG è razionale. E siano



dati due numeri DF, FE, in modo che DE non abbia con alcuno dei numeri DF, FE la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. E sia $FE : ED = CG^2 : GB^2$. Così anche GB^2 è razionale. Perciò anche BG è razionale. E poichè $DE : EF = BG^2 : GC^2$, e DE non ha con EF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure BG^2 ha con GC^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Così BG, GC sono incommensurabili in lunghezza [prop. 9]. E ciascuna è razionale. Perciò BG, GC sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque BC è apotome [prop. 73].

Dico ora che è quinta.

Sia infatti h^2 la differenza tra BG^2 e GC^2. Poichè dunque $BG^2 : GC^2 = DE : EF$, convertendo sarà $ED : DF = BG^2 : h^2$. Ma ED non ha con DF la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò neppure BG^2 ha con h^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò BG, h sono incommensurabili in lunghezza.

Ma la differenza tra BG^2 e GC^2 è h^2; così GB^2 supera GC^2 del quadrato di una retta incommensurabile con BG. E la adiacente CG è commensurabile in lunghezza con la razionale data a. Quindi BC è quinta apotome.

Dunque è stata trovata la quinta apotome BC;

c. d. d.

Trovare una quinta apotome, cioè un'apotome

$$\sqrt{\beta} - l\alpha,$$

in cui il segmento minore $l\alpha$ sia commensurabile col segmento razionale α prefissato, e tale che si abbia

$$\sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} \neq m : n.$$

Per questo scopo, conservando le notazioni della dimostrazione precedente, e le ipotesi fatte sui numeri m, n, si pone

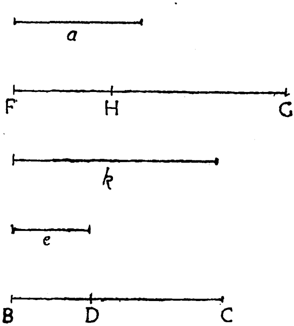
$$n : (m + n) = l^2\alpha^2 : \beta.$$

Allora si prova in maniera perfettamente analoga che $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è una quinta apotome.

90.

Trovare una sesta apotome.

Sia data la razionale a, e tre numeri e, BC, CD non aventi fra loro la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato; ed inoltre neppure CB abbia con BD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. E sia $e : BC = a^2 : FG^2$, $BC : CD = FG^2 : GC^2$.



Ora, poichè $e : BC = a^2 : FG^2$, sarà a^2 commensurabile con FG^2. Ma a^2 è razionale; allora anche FG^2 è razionale; perciò è razionale anche FG. E poichè e non ha con BC la ragione di un numero quadrato ad un numero quadrato, neppure a^2 ha con FG^2 la ragione di un numero quadrato con un numero quadrato. Allora a, FG sono incommensurabili in lunghezza. Di nuovo, poichè $BC : CD = FG^2 : GH^2$, sarà FG^2 commensurabile con GH^2. Ma FG^2 è razionale. Perciò anche GH^2 è razionale. Allora GH è razionale. E poichè BC non ha con CD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure FG^2 ha con GH^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Allora FG, GH sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale. Quindi FG, GH sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque FH è apotome.

Dico ora che è sesta.

Infatti, poichè $e : BC = a^2 : FG^2$, $BC : CD = FG^2 : GH^2$, *ex aequo* sarà $e : CD = a^2 : GH^2$. Ma e non ha con CD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Allora neppure a^2 ha con GH^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò a, GH sono commensurabili in lunghezza. Dunque nessuna delle rette FG, GH è commensurabile in lunghezza con la razionale a. Sia ora k^2 la differenza tra FG^2 e GH^2 [prop. 13, lemma].

Poichè dunque $BC : CD = FG^2 : GH^2$, convertendo, $CB : BD = FG^2 : k^2$. Ma CB non ha con la BD la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Allora neppure FG^2 ha con k^2 la ragione che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò FG, k sono incommensurabili in lunghezza. Ma la differenza fra FG^2 e GH^2 è k^2. Allora FG^2 supera GD^2 del quadrato di una retta incommensurabile con FG. E nessuna delle rette FG, GH è commensurabile in lunghezza con la data razionale a.

Quindi FH è sesta apotome.

Dunque è stata trovata la sesta apotome FH; c. d. d.

Trovare una sesta apotome, cioè un'apotome

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$$

in cui ambedue i segmenti $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ siano incommensurabili in 1ª potenza col segmento razionale prefissato α, e tale che si abbia

$$\sqrt{\beta-\gamma} : \sqrt{\beta} \mathrel{\not=} m : n.$$

Per questo si scelgono tre numeri p, m, n che a due a due non stiano in rapporto di quadrati perfetti, e inoltre lo stesso valga pei numeri m e $m-n$.

Si pone allora

$$p : m = \alpha^2 : \beta, \tag{1}$$

$$m : n = \beta : \gamma. \tag{2}$$

Si vede allora che $\sqrt{\beta}$ è razionale (X, 6), incommensurabile con α in 1ª potenza (X, 9). Dalla (2) si deduce che anche $\sqrt{\gamma}$ è razionale, commensurabile con $\sqrt{\beta}$ solo in 2ª potenza.

Quindi $\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$ *è un'apotome.*

Dalle (1) e (2) si ricava $p : n = \alpha^2 : \gamma$ (V, 22), e quindi anche $\sqrt{\gamma}$ è incommensurabile con α in 1ª potenza.

Infine dalla (2) si ricava, convertendo, $m : (m-n) = \beta : \beta-\gamma$, e quindi $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\beta-\gamma}$ sono incommensurabili in 1ª potenza. Da quanto precede risulta effettivamente che $\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}$ è una sesta apotome.

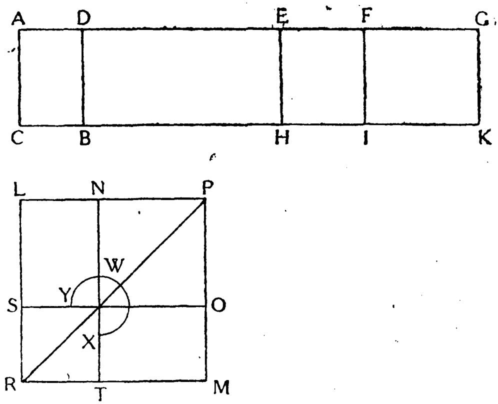
91.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una prima apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area è apotome.

L'area AB sia compresa dalla razionale AC e dalla prima apotome AD. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AB è apotome.

Infatti, poichè AD è prima apotome, le sia congruente DG. Allora AG, GD sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 73]; l'intera AG è commensurabile alla data razionale AC, ed AG^2 supera GD^2 del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con AG. Allora, se alla retta AG si applica un'area equivalente alla quarta parte del quadrato DG^2, e mancante di un quadrato, la retta vien divisa in parti commensurabili [prop. 17]. Si divida DG in due parti uguali in E, e alla AG si applichi un'area equivalente ad EG^2, mancante di un quadrato; e sia $AF \times FG$. Così AF, FG sono commensurabili. Poi per i punti E, F, G si conducano le parallele EH, FI, GK alla AC.

Poichè AF, FG sono commensurabili in lunghezza, anche AG è commensurabile con ognuna delle AF, FG. Ma AG, AC sono commensurabili; perciò anche ciascuna delle AF, FG è commensurabile in lunghezza con AC. Ma AC è razionale; perciò anche ciascuna delle AF, FG lo sarà. Allora anche ciascuno degli AI, FK è razionale [VI, 1; prop. 11]. E poichè DE, EG sono commensurabili in lunghezza, anche DG è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle DE, EG. Ma DG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta AC. Perciò anche ciascuna delle DE, EG è razionale, ed incom-



mensurabile in lunghezza con la retta AC. Dunque ciascuno dei DH, EK è mediale [prop. 20].

Sia dunque AI equivalente al quadrato LM, e si tolga il quadrato NO comune, equivalente ad FK, avente l'angolo LPM. Allora i quadrati LM, NO sono posti intorno alla stessa diagonale. Sia PR la loro diagonale, e si descriva la figura. Ora, poichè $AF \times FG = EG^2$, sarà [VI, 17] $AF : EG = EG : FG$. Ma $AF : EG = AI : EK$ ed $EG : FG = EK : KF$ [VI, 1], perciò EK è medio proporzionale fra AI e KF.

Ma anche MN è medio proporzionale tra LM, NO, come sopra è stato dimostrato; ed $AI = LM$, $KF = NO$. Perciò anche $MN = EK$. Ma $EK = DH$, $MN = LO$. Allora $DK = YWX + NO$. Ma anche $AK = LM + NO$.

Quindi il rimanente $AB = ST$. Ma $ST = LN^2$ perciò $LN^2 = AB$. Dunque LN è il « lato » di AB.

Dico che LN è apotome.

Infatti ciascuno degli LM, NO, cioè LP^2, PN^2 è razionale. Perciò anche ciascuno degli LP, PN è razionale. Di nuovo, poichè DH è mediale, e $DH = LO$, anche LO è mediale. Ora, poichè AO è mediale, ed NO è razionale, LO ed NO sono incommensurabili. Ma $LO : NO = LP : NP$; così LP, PN sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale; allora LP, PN sono razionali, commensurabili solo in potenza. Perciò LN è apotome [prop. 73]. E il suo quadrato equivale ad AB. Quindi la retta il cui quadrato equivale ad AB è apotome.

Dunque se un'area, ecc.; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α e di una prima apotome $l\alpha - \sqrt{\beta}$, è un'apotome.

Siccome $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è una prima apotome, si ha (X, Def. III, 1) che $l\alpha$ e $\sqrt{\beta}$ sono segmenti razionali, incommensurabili tra loro in prima potenza, e inoltre $\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha = m : n$. Da qui si deduce che, se si pone

$$x + y = l\alpha, \quad xy = \frac{\beta}{4},$$

le incognite x, y sono commensurabili tra loro in 1ª potenza (X, 17).

Viene anche di conseguenza che x, y sono commensurabili con $(x + y)$ (X, 15), ossia con $l\alpha$, cioè x, y sono razionali. Perciò sono razionali anche i prodotti $l\alpha \cdot x$, $l\alpha \cdot y$ (X, 19).

Per ipotesi $\sqrt{\beta}$ è razionale, incommensurabile con α in 1ª potenza. Quindi (X, 21) $\frac{\sqrt{\beta}}{2} \cdot \alpha$ è un prodotto mediale.

Poniamo adesso

$$(1) \qquad u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Avendosi $xy = \frac{\beta}{4}$, segue (VI, 17) $x : \frac{\sqrt{\beta}}{2} = \frac{\sqrt{\beta}}{2} : y$, e quindi $\alpha x : \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{2} = \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{2} = \alpha y$. Ma si ha pure $u^2 : uv = uv : v^2$ (VI, 53, lemma), ossia, per le (1), $\alpha x : uv = uv : \alpha y$. Si deduce perciò che

$$uv = \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{2},$$

ossia

$$\alpha\sqrt{\beta} = 2uv. \tag{2}$$

D'altra parte $u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha \cdot l\alpha$. Sottraendo l'eguaglianza (2) si ricava

$$(u - v)^2 = \alpha(l\alpha - \sqrt{\beta}),$$

e quindi $u - v = \sqrt{\alpha(l\alpha - \sqrt{\beta})}$. Ora, αx e αy essendo razionali, segue per le (1) *che anche u e v sono razionali*. Poi, essendo $\alpha\sqrt{\beta}$ un prodotto mediale, segue che anche uv è un prodotto mediale. Quindi v^2 e uv sono incommensurabili tra loro, perchè v^2 è razionale, mentre uv è irrazionale. Ma si ha $v^2 : uv = v : u$ (VI, 1). Quindi v e u sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Tanto basta per affermare che $u - v = \sqrt{\alpha(l\alpha - \sqrt{\beta})}$ è un'apotome (X, 74), c. d. d.

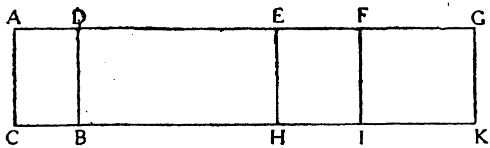
92.

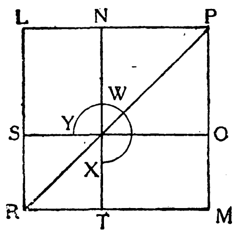
Se un'area è compresa da una retta razionale e da una seconda apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area è prima apotome di una mediale.

L'area AB sia compresa da una retta razionale e da una seconda apotome. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AB è prima apotome di una mediale.

Sia infatti DG adiacente alla retta AD.

Allora *AG*, *GD* sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 73]. E la adiacente *DG* è commensurabile alla data razionale *AC;* mentre il quadrato dell'intera *AG* supera il quadrato di *HD* del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *AG*. Ora, poichè AG^2 supera GD^2 del quadrato di una retta commensurabile, se alla retta *AG* si applica un' area equivalente alla quarta parte di GD^2, mancante di un quadrato, essa vien divisa in parti commensurabili [prop. 17]i Ora si divida *DG* in due parti eguali in *E*; ed alla *AG* si applichi un'area





equivalente ad EG^2, mancante di un quadrato. E sia essa *AF* × FG. Allora *AF*, *FG* sono commensurabili in lunghezza. Perciò anche *AG* è commensurabile in lunghezza con ciascuno degli *AF*, *FG* [prop. 15]. Ma *AG* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta *AC*. Così anche ciascuna delle *AF*, *FG* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta *AC*. Perciò ciascuno degli AI, FK è mediale [prop. 20]. Di nuovo, poichè DE, EG sono commensurabili, anche DG è commensurabile con ciascuno dei DE, EG. Ma DG, AC sono commensurabili in lunghezza; quindi ciascuno dei DE, EK è razionale.

Si costruisca ora il quadrato $LM = AI$, e si tolga NO equivalente all'area EK posta nello stesso angolo LPM, nel quale è LM. Allora i quadrati LM, NO son posti intorno alla stessa diagonale. Sia essa PR, e si descriva la figura. Ora, poichè AI, FK sono mediali ed $AI = LP^2$, $FK = PN^2$, anche LP^2, PN^2 sono mediali; perciò LP, PN sono mediali, commensurabili sono in potenza.

E poichè $AF \times FG = EF^2$, sarà

$$AF : EG = EG : FG \qquad [VI, 17]$$

Ma $AF : EG = AI : EK$ [VI, 1] ed anche $EG : FG = EK : FK$. Perciò EK è medio proporzionale fra AI, FK. Ma anche MN è medio proporzionale fra LM, NO; [prop. 53, lemma]. Ed $AI = LM$, $FK = NO$. Perciò anche $MN = EK$. Ma $DH = EK$, $LO = MN$ [I, 43]. Perciò $DK = YWX + NO$. Ora poichè $AK = LM + NO$, di cui $DK = YWX + NO$, sarà il rimanente $AB = TS$. Ma $TS = LN^2$. Allora $LN^2 = AB$. Dunque LN è il «lato» di AB.

Dico ora che LN è prima apotome di una mediale. Infatti, poichè EK è razionale, ed $EK = LO$, anche LO cioè $LP \times PN$, è razionale; ma abbiamo dimostrato che NO è mediale; perciò LO, NO sono incommensurabili. Inoltre $LO : NO = LP : PN$ [VI, 1]. Perciò LP, PN sono incommensurabili in lunghezza. Così LP, PN sono mediali, commensurabili solo in potenza, e comprendono un'area razionale. Allora LN è prima apotome di una mediale [prop. 74]. Ed $LN^2 = AB$.

Dunque la retta il cui quadrato ecc. c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α e di una seconda apotome ($\sqrt{\beta} - l\alpha$) è una prima apotome di una mediale.

Siccome $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è una seconda apotome, si ha (X, Def. III, 2) che $\sqrt{\beta}$ e $l\alpha$ sono razionali, incommensurabili tra loro in 1ª potenza, e inoltre si ha $\sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} = m : n$. Da qui si deduce, come nella proposizione precedente, che ponendo

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{l^2\alpha^2}{2}$$

le incognite x e y sono commensurabili in 1ª potenza tra loro, e con $x + y$, ossia con $\sqrt{\beta}$. Quindi x, y sono segmenti razionali. Per ipotesi $l\alpha$ non è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza, quindi nemmeno con x e y, perciò (X, 21)

$$l\alpha \cdot x \quad \text{e} \quad l\alpha \cdot y \quad \text{sono prodotti mediali,}$$

invece il prodotto

$$\frac{l\alpha}{2} \cdot \alpha \text{ è razionale.}$$

Poniamo di nuovo

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y$$

e quindi

(1) $$u^2 + v^2 = (x + y) = \alpha\sqrt{\beta}.$$

Siccome si è dimostrato che αx, αy quindi u, v sono prodotti mediali, segue che u e v sono mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza. (Osservazione: la parola « solo » non è qui senz'altro giustificata. Il fatto che u, v sono commensurabili tra loro *solo* in 2ª potenza, verrà stabilito soltanto più sotto). Si ricava poi facilmente che si ha

(2) $$2uv = \alpha \cdot l\alpha.$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ricava

$$(u - v)^2 = \alpha(\sqrt{\beta} - l\alpha),$$

e quindi

$$u - v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} - l\alpha)}$$

Che $u - v$ siano una prima apotome di una mediale (X, 74) si prova subito, osservando che si ha $uv = \frac{l\alpha^2}{2}$ quindi il prodotto uv è razionale. Poi, v^2 essendo un prodotto mediale, uv e v^2 sono incommensurabili tra loro, e quindi anche u, v sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza. I segmenti u e v sono dunque mediali, commensurabili tra loro in 2ª potenza, e tali che il loro prodotto è razionale.

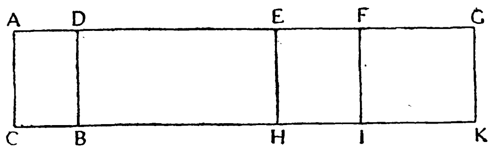
Tanto basta per affermare (X, 74) che $u - v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} - l\alpha)}$ è una prima apotome bimediale, c. d. d.

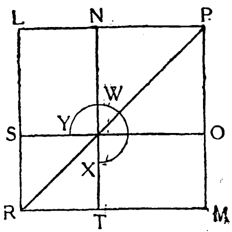
93.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una terza apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area è seconda apotome di una mediale.

L'area AB sia compresa dalla retta razionale AC e dalla terza apotome AD. Dico che la retta il cui quadrato equivale all'area AB è seconda apotome di una mediale. Infatti sia DG congruente alla AD. Allora AG, GD, sono razionali, commensurabili solo in potenza, nessuna delle rette AG, GD è commensurabile in lunghezza con la data AC, e il quadrato dell'intera AG supera il quadrato della congruente DG del quadrato di una retta commensurabile con AG. Poichè dunque AG^2 supera DG^2 del quadrato di una retta commensurabile con AG, se alla AG si applica un'area equivalente alla quarta parte di DG^2, mancante di un quadrato, essa vien divisa in parti commensurabili [prop. 17].

Ora si divida DG in due parti uguali in E, ed alla retta AG si applichi un'area equivalente ad EG^2, mancante di un quadrato; sia essa $AF \times FG$. Per i punti E, F, G si conducano le parallele EH, FI, GK alla AC. Allora AF,





FG sono commensurabili. Perciò AI, FK sono commensurabili [VI, 1; prop. 11]. E poichè AF, FG sono commensurabili in lunghezza, anche AG è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle AF, FG [prop. 15]. Ma AG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta AC. Perciò anche AF, FG lo sono [prop. 13]. Così ciascuno degli AI, FK è mediale [prop. 20].

Di nuovo, poichè DE, EG sono commensurabili in lunghezza, anche DG è commensurabile in lunghezza con ciascuno dei DE, EG [prop. 15]. Ma GD è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta AC. Perciò anche ciascuna delle DE, EG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la retta AC [prop. 13]. Così ciascuno dei DH, EK è mediale [prop. 20]. E poichè AG, GD sono commensurabili solo in potenza, AG e GD sono incommensurabili in lunghezza; ma AG, AF e DG, EG sono commensurabili in lunghezza. Perciò AF, EG sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13]. Ma $AF : EG = AI : EK$ [VI, 1]. Dunque AI, EK sono incommensurabili [prop. 11].

Si costruisca dunque il quadrato $LM = AI$, e si tolga NO, equivalente ad FK, posto nello stesso angolo nel quale è LM. Così LM, NO sono posti intorno alla stessa diagonale [VI, 26]. Sia essa PR, e si descriva la figura. Ora poichè $AF \times FG = EG^2$, sarà $AF : EG = EG : FG$ [VI, 17]. Ma $AF : EG = AI : EK$ [VI, 1], ed $EG : FG = EK : FK$. Perciò anche $AI : EK = EK : FK$. Così KE è medio proporzionale fra AI, FK. Ma anche MN è medio proporzionale fra i quadrati LM, NO [prop. 53, lemma]. Ed $AI = LM$, $FK = NO$. Allora anche $EK = MN$. Ma $MN = LO$ [I, 43], $EK = MN$. Perciò anche $DK = YWX + NO$.

Ma inoltre $AK = LM + NO$; allora il rimanente $AB = ST = LN^2$. Dunque LN è «il lato» di AD.

Dico che LN è seconda apotome di una mediale. Infatti, poichè abbiamo dimostrato che AI, FK sono mediali, ed $AI = LP^2$, $FK = PN^2$, anche ciascuno degli LP^2, PN^2 è mediale. Perciò ciascuna delle LP, ON è mediale. E poichè AI, FK sono commensurabili, anche LP^2, PN^2 lo saranno.

Di nuovo, poichè abbiamo dimostrato che AI ed EK sono incommensurabili, anche LM ed MN, cioè LP^2 ed $LP \times PN$ sono incommensurabili. Perciò anche LP, PN sono incommensurabili in lunghezza. Dunque LP, PN sono mediali, commensurabili solo in potenza.

Dico ora che esse comprendono un'area mediale. Infatti, poichè abbiamo dimostrato che EK è mediale, ed $EK = LP \times PN$, anche $LP \times PN$ è mediale. Perciò LP, PN sono mediali, commensurabili solo in potenza, e comprendono un'area mediale. Allora LN è seconda apotome di una mediale [prop. 75]. E il suo quadrato equivale ad AB.

Dunque la retta il cui quadrato equivale ad AB è seconda apotome di una mediale; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α per una terza apotome $(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})$ è una seconda apotome di una bimediale (X, 75).

Siccome $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ è, per ipotesi, una terza apotome, si ha (X, Def. III, 3) che $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ sono segmenti razionali, incommensurabili con α e tra loro in 1ª potenza, e inoltre si ha $\sqrt{\beta - \gamma} : \sqrt{\beta} = m : n$.

Da qui segue senz'altro (X, 17) che ponendo

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{\gamma}{4},$$

le incognite x, y sono commensurabili in 1ª potenza tra di loro e quindi anche con $x + y$, ossia con $\sqrt{\beta}$ (X, 15).

Ma $\sqrt{\beta}$ è incommensurabile con α in 1ª potenza, quindi (X, 13) anche x e y sono incommensurabili con α in 1ª potenza. Ne segue che i prodotti αx, αy sono mediali (X, 21). Per la medesima ragione è mediale il prodotto $\frac{\sqrt{\beta}}{2} \cdot \alpha$. Inoltre, siccome x è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza, mentre $\sqrt{\gamma}$ non è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza, segue (X, 13) che x e $\sqrt{\beta}$ sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Perciò si ha

$$\alpha x : \alpha \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \mp m : n.$$

Si ponga adesso

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = xy$$

e quindi

$$u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha\sqrt{\beta}. \tag{1}$$

Si ricava, come nelle proposizioni precedenti,

$$2uv = \alpha\sqrt{\gamma}. \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ricava $(u - v)^2 = \alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})$ ossia

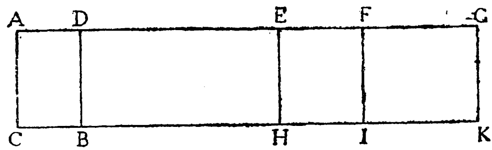
$$u - v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}.$$

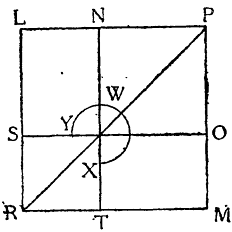
Ora si vede facilmente che $u - v$ è una seconda apotome di una mediale. Infatti, siccome x e y sono commensurabili in 1ª potenza, *segue che anche u^2, v^2 sono commensurabili.* E siccome αx non è commensurabile con $\alpha \frac{\sqrt{\gamma}}{2}$, si ha $u^2 : uv \mp m : n$, ossia (VI, 1, X, 11) $u : v \mp m : n$. Infine αx, αy essendo prodotti mediali, segue che u, v sono mediali. Il loro prodotto $uv = \frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{2}$ è un prodotto mediale. I segmenti u, v risultano dunque mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, e il loro prodotto è mediale. Tanto basta per affermare (X, 75) che $u - v$ è una seconda apotome di una mediale, c. d. d.

94.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una quarta apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area è minore.

Sia l'area AB compresa dalla retta razionale AC e dalla quarta apotome AD. Dico che la retta il cui quadrato equivale a detta area è minore.





Sia infatti DG congruente ad AD. Allora AG, GD sono razionali, commensurabili solo in potenza, ed AG è commensurabile in lunghezza con la data razionale AC, e il quadrato dell'intera AG supera il quadrato della congruente DG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG. Ora, poichè AG^2 supera GD^2 del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG, se alla AG si applica un'area equivalente alla quarta parte di DG^2, mancante di un quadrato, essa vien divisa in parti incommensurabili [prop. 18]. Sia dunque DG divisa in E in due parti uguali, ed alla retta AG si applichi un'area equivalente ad EG^2, mancante di un quadrato, e sia essa $AF \times FG$. Così AF, FG sono incommensurabili. Ora per E, F, G si conducano EH, FI, GK parallele alle AC, BD. Poichè dunque AG è razionale e commensurabile in lunghezza con la retta AC, l'area AK è razionale. Di nuovo, poichè DG, AC sono incommensurabili in lunghezza, e ciascuna è razionale, DK è mediale [prop. 21]. Inoltre, poichè AF, FG sono incommensurabili in lunghezza, AI ed FK sono incommensurabili [VI, 1; prop. 11]. Si costruisca ora il quadrato $LM = AI$, e si tolga NO equivalente all'area FK, posto nello stesso angolo LPM. Allora i quadrati LM, NO sono posti intorno alla stessa diagonale [VI, 26]. Sia essa PR, e si descriva la figura.

Ora, poichè $AF \times FG = EG^2$; sarà $AF : EG = EG : FG$ [VI, 17]. Ma $AF : EG = AI : EK$, $EG : FG = EK : FK$ [VI, 1]. Perciò EK è medio proporzionale fra AI, FK. Ma anche MN è medio proporzionale fra i quadrati LM, NO [prop. 53, lemma] ed $AI = LM$, $FK = NO$. Perciò anche $EK = MN$. Ma $DH = EK$, $LO = MN$ [I, 43]. Allora $DK = YWX + NO$. Ora, poichè $AK = LM + NO$, dei quali $DK = YWX + NO$, sarà $AB = ST = LN^2$. Dunque LN è «il lato» di AB.

Dico che LN è l'irrazionale detta *minore*. Infatti, poichè AK è razionale, ed $AK = LP^2 + PN^2$, anche $LP^2 + PN^2$ è razionale. Di nuovo, poichè DK è mediale, e $DK = 2LP \times PN$, anche $2LP \times PN$ è mediale. E poichè abbiamo dimostrato che AI ed FK sono incommensurabili, anche LP^2, PN^2 sono incommensurabili. Allora LP, PN sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il doppio del loro rettangolo è mediale.

Perciò LN è l'irrazionale detta minore [prop. 76]. Ed $LN^2 = AB$.

Dunque la retta il cui quadrato, ecc.; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α per una quarta apotome $(l\alpha - \sqrt{\beta})$ è un minore (X, 76).

Siccome $l\alpha - \sqrt{\beta}$ è una quarta apotome, si ha (X, Def. III, 4) che il segmento maggiore $l\alpha$ è commensurabile con α in 1ª potenza, mentre $\sqrt{\beta}$ non lo è. Inoltre α, $\sqrt{\beta}$ sono razionali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, e si ha $\sqrt{l^2\alpha^2 - \beta} : l\alpha \neq m : n$.

Si deduce che ponendo

$$x + y = l\alpha, \quad xy = \frac{\beta}{4},$$

le incognite x, y sono incommensurabili tra loro (X, 18) in prima potenza.

Inoltre per ipotesi si ha che $\alpha \cdot l\alpha$ è razionale (X, 19) e $\alpha\sqrt{\beta}$ è mediale.

Poniamo

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y$$

e quindi

$$u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha \cdot l\alpha; \tag{1}$$

si ricava facilmente

$$2uv = \alpha\sqrt{\beta}. \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ha $(u - v)^2 = \alpha(l\alpha - \sqrt{\beta})$, ossia

$$u - v = \sqrt{\alpha(l\alpha - \sqrt{\beta})}.$$

Ora è facile provare che $u - v$ è un minore. Infatti, siccome x e y sono incommensurabili tra loro in 1[a] potenza, anche αx, αy sono incommensurabili tra loro. Quindi

1) *u^2, v^2 sono incommensurabili tra loro.*

Dalla (1) e dalla (2) si ricava poi che

2) $u^2 + v^2$ è razionale,

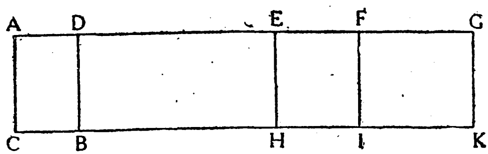
3) uv è un mediale.

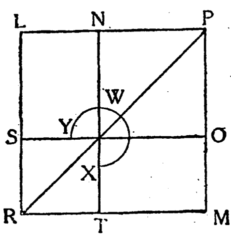
I due segmenti u, v soddisfano dunque alle 3 condizioni della prop. X, 76, e quindi $u - v$ è un minore, c. d. d.

95.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una quinta apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area è la retta che, sommata con una superficie razionale, dà per somma una mediale.

L'area AB sia compresa da una retta razionale AC e dalla quinta apotome AD. Dico che la retta il cui qua-





drato equivale all'area AB è la retta che, sommata con una razionale, dà per somma una mediale.

Infatti, sia DG congruente alla AD. Allora AG, GD sono razionali, commensurabili solo in potenza, e la congruente GD è commensurabile in lunghezza alla data razionale AC; ma il quadrato dell'intera AG superi il quadrato della congruente GD del quadrato di una retta incommensurabile con AG; allora, se alla retta AG si applica un'area equivalente alla quarta parte di DG^2, e mancante di un quadrato, essa vien divisa in parti incommensurabili [prop. 18]. La DG sia dunque divisa in E in due parti uguali, ed alla AG si applichi un'area equivalente ad EG^2, mancante di un quadrato; e sia questa $AF \times FG$. Allora AF, FG sono incommensurabili in lunghezza. E poichè AG, CA sono incommensurabili in lunghezza, e ciascuna è razionale, AK è mediale [prop. 21]. Di nuovo, poichè DG è razionale, e commensurabile in lunghezza con la AC, DK è razionale [prop. 19]. Si costruisca dunque il quadrato $LM = AI$, e si tolga il quadrato NO equivalente all'area FK, posto nello stesso angolo LPM. Allora i quadrati LM, NO sono posti intorno alla stessa diagonale [VI, 26]. Sia essa PR e si descriva la figura. Allo stesso modo dimostreremo che $LN^2 = AB$.

Dico che LN è una retta che, sommata con una razionale, dà per somma una retta mediale. Poichè infatti abbiamo dimostrato che AK è mediale, e $AK = LP^2 + PN^2$, $LP^2 + PN^2$ è mediale. Di nuovo, poichè DK è razionale, e $DK = 2LP \times PN$, anche questo è razionale.

E poichè AI, FK sono incommensurabili, anche LP^2,

PN^2 lo sono. Perciò LP, PN sono incommensurabili in potenza; la somma dei loro quadrati è mediale, il doppio del loro rettangolo è razionale. Quindi la rimanente LN è l'irrazionale che sommata con una superficie razionale dà per totale una retta mediale, ed LN è « il lato » di AB.

Dunque la retta il cui quadrato, ecc.; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α per una quinta apotome $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è ciò che, sommato con una superficie razionale, dà per risultato una mediale.

Siccome $\sqrt{\beta} - l\alpha$ è una quinta apotome, si ha (X, Def. III, 5) che il segmento minore $l\alpha$ è commensurabile con α in 1^a potenza, mentre $\sqrt{\beta}$ non lo è. Inoltre, $\sqrt{\beta}$ e $l\alpha$ sono razionali, commensurabili tra loro solo in seconda potenza, e si ha $\sqrt{\beta - l^2\alpha^2} : \sqrt{\beta} \neq m : n$.

Posto di nuovo

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{l^2\alpha^2}{4},$$

si deduce (X, 18) che x, y sono incommensurabili tra loro in 1^a potenza.

Inoltre, per ipotesi, $\alpha\sqrt{\beta}$ è mediale (X, 21) e $\alpha \cdot l\alpha$ è razionale (X, 19).

Poniamo

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y,$$

e quindi

$$u^2 + v^2 = \alpha(x + y) = \alpha\sqrt{\beta}; \tag{1}$$

si ricava facilmente

$$2uv = \alpha \cdot l\alpha. \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ottiene $(u - v)^2 = \alpha(\sqrt{\beta} - l\alpha)$ e quindi

$$u - v = \sqrt{\alpha(l\alpha - \sqrt{\beta})}.$$

Ora è facile provare che $u - v$ è ciò che con una superficie razionale dà una mediale.

Infatti, siccome x e y sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza, lo stesso vale per αx, αy. Quindi

1) u^2 e v^2 sono incommensurabili tra loro.

I oltre dalla (1) e dalla (2) si deduce che

2) $u^2 + v^2$ è un prodotto mediale,

3) uv è razionale.

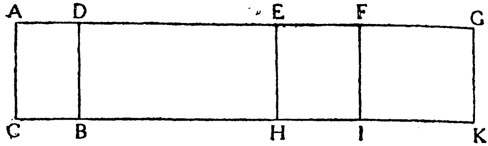
I due segmenti u, v soddisfano dunque alle 3 condizioni della prop. X, 77, e quindi $u - v$ è effettivamente ciò che dovevasi dimostrare.

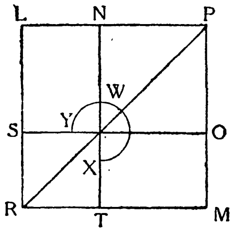
96.

Se un'area è compresa da una retta razionale e da una sesta apotome, la retta il cui quadrato equivale a detta area, sommata con una superficie mediale, dà per somma una mediale.

L'area AB sia compresa dalla razionale AC e dalla sesta apotome AD. Dico che la retta il cui quadrato equivale ad AB, sommata con una mediale, dà per somma una retta mediale.

Infatti, sia DG congruente alla AD. Allora AH, HD sono razionali, commensurabili solo in potenza, e nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la data AC, mentre il quadrato dell'intera AG supera il quadrato della congruente DG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG. Ora, poichè AG^2 supera GD^2 del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG, se alla AG si applica un'area equivalente alla quarta parte di DG^2, e mancante di un quadrato, essa vien divisa in parti incommensurabili. Si divida quindi DG in due parti uguali, nel punto E, ed alla AG si applichi un'area equivalente ad EG^2, mancante di un





quadrato; e sia essa $AF \times FG$. Allora AF, FG sono incommensurabili in lunghezza.

Ma $AF : FG = AI : FK$. Così AI, FK sono incommensurabili. E poichè AG, AC sono razionali, commensurabili solo in potenza, AK è mediale [prop. 21]. Di nuovo, poichè AC, DG sono razionali, ed incommensurabili in lunghezza, anche DK è mediale [id.]. Poichè quindi AG, GD sono commensurabili solo in potenza, AG, GD sono incommensurabili in lunghezza.

Ma $AG : GD = AK : KD$ [VI, 1]. Allora AK, KD sono incommensurabili. Si costruisca quindi il quadrato $LM = AI$, e si tolga NO, equivalente all'area FK, posto nello stesso angolo. Così i quadrati LM, NO son posti intorno alla stessa diagonale. Sia essa PR e si descriva la figura. Nello stesso modo di prima dimostreremo che $LN^2 = AB$.

Dico che LN è la retta che, sommata con una mediale, dà per somma una retta mediale. Infatti, poichè abbiamo dimostrato che AK è mediale, ed $AK = LP^2 + PN^2$, $LP^2 + PN^2$ è mediale. Di nuovo, poichè abbiamo dimostrato che DK è mediale, e $DK = 2LP \times PN$, anche $2LP \times PN$ è mediale.

E poichè abbiamo dimostrato che AK e DK sono incommensurabili, anche $LP^2 + PN^2$ e $2LP \times PN$ lo sono. E poichè AI, FK sono incommensurabili, anche LP^2, PN^2 lo sono. Così LP, PN sono incommensurabili in lunghezza, la somma dei loro quadrati è mediale, il doppio del loro rettangolo è mediale, ed inoltre la somma dei quadrati è incommensurabile col doppio rettangolo. Quindi LN è l'irrazionale che sommata con una mediale dà per totale una mediale [prop. 78] e LN è «il lato» di AB.

Dunque la retta il cui quadrato, ecc.; c. d. d.

La radice quadrata del prodotto di un segmento razionale α per una sesta apotome $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$, è ciò che sommato con una superficie mediale dà per risultato una mediale.

Siccome $\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$ è una sesta apotome, si ha (X, Def. III, 6) che $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ sono razionali, incommensurabili con α e tra di loro in 1ª potenza. Inoltre si ha $\sqrt{\beta - \gamma} : \sqrt{\beta} \neq m : n$. Da qui, posto

$$x + y = \sqrt{\beta}, \quad xy = \frac{\gamma}{4},$$

si deduce (X, 18) che x, y sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Inoltre i prodotti $\alpha\sqrt{\beta}$, $\alpha\sqrt{\gamma}$ sono ambedue mediali (X, 2).

Poniamo

$$u^2 = \alpha x, \quad v^2 = \alpha y.$$

Avremo

$$(1) \qquad u^2 + v^2 = \alpha(x+y) = \alpha\sqrt{\beta}.$$

Inoltre si ricava facilmente

$$(2) \qquad 2uv = \alpha\sqrt{\gamma}.$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ottiene $(u - v)^2 = \alpha\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}$, ossia

$$u - v = \sqrt{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}.$$

Ora è facile dimostrare che $u - v$ è ciò che sommato con una superficie mediale dà per risultato una mediale.

Infatti, siccome x e y sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza, lo stesso vale per αx, αy. Quindi

1) u^2 e v^2 sono incommensurabili tra loro.

Dalla (1) e dalla (2) si deduce che

2) $u^2 + v^2$ è mediale,

3) uv è mediale.

Inoltre $(u^2 + v^2) : 2uv = \sqrt{\beta} : \sqrt{\gamma}$, e siccome, per ipotesi, $\sqrt{\beta}$ e $\sqrt{\gamma}$ sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza, segue che

4) $(u^2 + v^2) : 2uv \neq m : n$.

I segmenti u, v soddisfano dunque alle 4 condizioni della prop. X, 78, e quindi $u - v$ è effettivamente ciò che, sommato con una superficie mediale, dà per risultato una mediale.

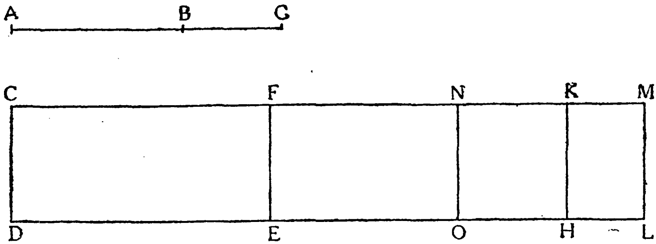
97.

Il quadrato di un' apotome, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una prima apotome.

Sia AB apotome, CD razionale, ed alla CD si applichi CE equivalente ad AB, di larghezza CF. Dico che CF è prima apotome.

Infatti sia BG congruente alla AB. Allora AG, GB sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 73].

Ed alla CD si applichi $CH = AG^2$, $KL = BG^2$. Allora l'intero $CL = AG^2 + CB^2$. Di cui $CE = AB^2$. Allora il rimanente $FL = 2AG \times GB$ [II, 7]. Sia ora FM diviso in due parti uguali nel punto N, e per N si conduca NO parallela a CD. Così $FD = LN = AG \times GB$. E poichè AG^2+CB^2 è razionale, e $DM = AG^2+GB^2$



anche DM è razionale. Ed è applicato alla retta razionale CD, di larghezza CM. Allora CM è razionale, e commensurabile in lunghezza con la retta CD [prop. 20]. Di nuovo, poichè $2AG \times GB$ è mediale, ed $FL = 2AG \times GB$, FL è mediale. Ed è applicato alla retta razionale CD, ed ha per larghezza FM. Allora FM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 22].

E poichè $AG^2 + GB^2$ è razionale, e $2AG \times GB$ è mediale, AG^2+GB^2 è incommensurabile con $2AG\times GB$. Ma $CL = AG^2 + CB^2$, $FL = 2AG \times GB$. Allora DM, FL sono incommensurabili. Ma $DM : FL = CM : FM$; allora CM, FM sono incommensurabili in lunghezza [prop. 11]. E ciascuna è razionale: quindi CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque CF è apotome [prop. 73].

Dico ora che è prima.

Infatti, poichè $AG \times GB$ è medio proporzionale tra AG^2 e GB^2 [prop. 21 lemma], e $CH = AG^2$, $KL = BG^2$, $NL = AG \times GB$, anche NL sarà medio proporzionale tra CH, KL. Perciò $CH : NL = NL : KL$. Ma $CH:NL = CK:NM$, ed $NL:KL = NM:KM$; $CK \times KM$ è allora equivalente a MN [VI, 17], cioè alla quarta parte di FM^2. E poichè AG^2, GB^2 sono commensurabili, anche CH, KL lo sono. Ma $CH : KL = CK : KM$. Allora CH, KM sono commensurabili [prop. 11]. Ora, poichè CM, MF sono due rette disuguali, ed alla CM è applicata un'area $CK \times KM$ equivalente alla quarta parte di FM^2, e mancante di un quadrato, e poichè CK, KM sono commensurabili, CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la data razionale CD. Quindi CF è prima apotome.

Dunque il quadrato di un'apotome ecc.; c. d. d.

Se si divide il quadrato di una apotome $(\alpha - \sqrt{\beta})^2$ per un segmento razionale γ si ottiene una prima apotome.

Si abbia dunque

$$(\alpha - \sqrt{\beta})^2 = \gamma \cdot x, \tag{1}$$

dove α, $\sqrt{\beta}$ sono razionali, commensurabili tra loro solo in 2^a potenza. Si tratta di dimostrare che x è una prima apotome. Per questo scopo poniamo

$$\gamma \cdot y = \alpha^2, \quad \gamma \cdot z = \beta$$

e quindi

$$\gamma(y + z) = \alpha^2 + \beta. \tag{2}$$

Siccome $\alpha^2 + \beta$, e quindi anche $\gamma(y + z)$, è razionale, segue

(X, 20) che $y+z$ è razionale e commensurabile con γ in 1ª potenza.

Dalla (1) e dalla (2) si ottiene per sottrazione

$$\gamma(y+z-x)=2\alpha\sqrt{\beta},$$

e siccome $\alpha\sqrt{\beta}$ è per ipotesi un prodotto mediale, segue che $y+z-x$ è razionale e incommensurabile con γ in 1ª potenza (X, 22). I due segmenti $(y+z)$, $(y+z-x)$ sono dunque ambedue razionali, il primo commensurabile con γ in 1ª potenza, il secondo no. Quindi essi sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Perciò la loro differenza

$$(y-z)-(y+z-x)=x$$

è un' apotome (X, 73).

Resta a dimostrare che x sia una prima apotome.

Ora, $\alpha^2 : \alpha\sqrt{\beta}=\alpha\sqrt{\beta} : \beta$, ossia, avendosi $\alpha^2=\gamma\cdot y$, $\beta=\gamma\cdot z$, $\alpha\sqrt{\beta}=\gamma\cdot\frac{y+z-x}{2}$,

$$\gamma\cdot y : \gamma\cdot\frac{y+z-x}{2}=\gamma\cdot\frac{y+z-x}{2} : \gamma\cdot z,$$

e quindi

$$y : \frac{y+z-x}{2}=\frac{y+z-x}{2} : z.$$

Da qui si deduce $yz=\frac{(y+z-x)^2}{4}$ (VI, 17). Siccome α^2 e β sono commensurabili, segue che y e z sono commensurabili tra loro in 1ª potenza (VI, 1; X, 11). La prop. X, 17 fornisce allora per la loro somma $y+z$ e prodotto $yz=\left(\frac{y+z-x}{2}\right)^2$ la seguente relazione di commensurabilità:

$$\sqrt{(y+z)^2-(y+z-x)^2} : (y+z)=m : n.$$

Questa relazione insieme al fatto che $y+z$ è commensurabile in 1ª potenza col segmento razionale dato γ, prova che x è una prima apotome (X, Def. III, 1).

98.

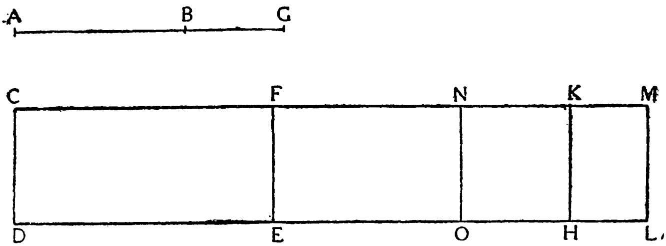
Il quadrato di una prima apotome di una mediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una seconda apotome.

Sia AB la prima apotome di una mediale, CD sia razionale, e alla retta CD si applichi CE equivalente ad AB^2, di larghezza CF. Dico che CF è seconda apotome.

Infatti, sia AB adiacente alla BG. Allora AG, GB sono mediali, commensurabili solo in potenza, e comprendono un'area razionale [prop. 74]. Alla retta CD si applichi CH, equivalente ad AG^2, di larghezza CK, e KL, equivalente a GB^2, di larghezza KM. Perciò tutto $CL = AG^2 + GB^2$. Allora anche CL è mediale; ed è applicato alla razionale CD, ed ha per larghezza CM. Quindi CM è razionale ed incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 22]. E poichè $CL = AG^2 + GB^2$, di cui $AB^2 = CE$, il rimanente $2AG \times GB$ sarà equivalente ad FL [II, 7]. Ma $2AG \times GB$ è razionale; perciò CL è razionale. Ed è applicato alla retta razionale FE, ed ha per larghezza FM. Quindi anche FM è razionale, e commensurabile in lunghezza con CD [prop. 20].

Poichè dunque $AG^2 + GB^2$, cioè CL, è mediale, e $2AG \times GB$, cioè FL, è razionale, CL ed FL sono incommensurabili. Ma $CL : FL = CM : FM$. Allora CM, FM sono incommensurabili [prop. 11]. E ciascuna è razionale. Allora CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque CF è apotome [prop. 73].

Dico ora che è seconda. Sia infatti FM divisa in due parti uguali in N, e per N si conduca la parallela NO alla CD. Allora $FO = NL = AG \times GB$. E poichè



$AG \times GB$ è medio proporzionale tra AG^2 e GB^2 [prop. 21, lemma] ed $AG^2 = CH$, $AG \times GB = NL$, $BG^2 = KL$, anche NL sarà medio proporzionale tra CH, KL.

Allora $CH : NL = NL : KL$. Ma $CH : NL = CK : NM$, $NL : KL = NM : MK$.

Perciò $CK : NM = NM : KM$. Così $CK \times KM$ è equivalente ad NM^2 [VI, 17], cioè alla quarta parte di FM^2. Ora, poichè CM, MF sono due rette disuguali, e alla maggiore CM è applicata l'area $CK \times KM$ equivalente alla quarta parte di MF^2, e mancante di un quadrato, ed essa vien divisa in parti commensurabili, CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con CM [prop. 17]; e la congruente FM è commensurabile in lunghezza con la data razionale CD. Allora CF è seconda apotome. Dunque il quadrato della prima apotome di una mediale, ecc.; c. d. d.

Se si divide il quadrato della prima apotome di una mediale $\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)^2$ per un segmento razionale γ, allora si ottiene una seconda apotome.

Si abbia dunque

$$(1)\qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma x,$$

dove $\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}$ è una prima apotome di una mediale; allora (X, 74) $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, e tali che $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale. Si tratta di dimostrare che x è una seconda apotome (X, Def. 3, 2).

Per questo scopo si ponga

$$(2)\qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2=\gamma y,\quad \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma z$$

e quindi

$$(3)\qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2=\gamma(y+z).$$

Dalla (3) si deduce (X, 15 e 23 corollario) che $\gamma(y+z)$ è un prodotto mediale, e che quindi (X, 22) $y+z$ è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Sottraendo la (1) dalla (3) si ricava

$$(4)\qquad \gamma(y+z-x)=2\sqrt[4]{\alpha\beta},$$

e siccome $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è per ipotesi razionale, si deduce (X, 20) che $(y+z-x)$ è razionale e commensurabile con γ in 1ª potenza.

I due segmenti $(y+z)$, $(y+z-x)$ sono dunque ambedue razionali, il secondo commensurabile con γ in 1ª potenza, il primo no. Essi sono quindi incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Perciò la loro differenza

$$(y+z)-(y+z-x)=x$$

è un'apotome (X, 73).

Resta da dimostrare che x sia una prima apotome. Si ha $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \sqrt[4]{\alpha\beta}=\sqrt[4]{\alpha\beta} : \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, ossia per la (2) e la (3) $\gamma y : \frac{\gamma(y+z-x)}{2}=$ $=\frac{\gamma(y+z-x)}{2} : \gamma z$, ossia ancora $y : \frac{y+z-x}{2}=\frac{y+z-x}{2} : z$

Quindi

$$yz = \frac{(y + z - x)^2}{4}.$$

Ma dalla (2) si conclude che y e z sono commensurabili in 1ª potenza, e perciò, per la prop. X, 17, la loro somma $y + z$ e il prodotto $yz = \frac{(y + z - x)^2}{4}$ sono legati con la seguente relazione di commensurabilità: $\sqrt{(y + z)^2 - (y + z - x)^2} : (y + z) = m : n$.

Questa relazione, insieme alla circostanza che il segmento (minore) $y + z - x$ è commensurabile in 1ª potenza col segmento razionale dato γ, prova che $x = (y + z) - (y + z - x)$ è una seconda apotome (X, Def. III, 2).

99.

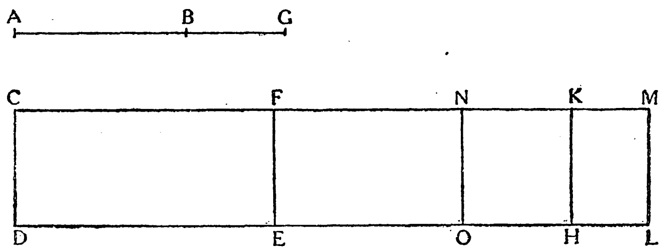
Il quadrato della seconda apotome di una mediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una terza apotome.

Sia AB seconda apotome di una mediale, CD sia razionale, ed a CD si applichi CE, equivalente ad AB^2, di larghezza CF.

Dico che CF è terza apotome.

Sia infatti BG congruente ad AB. Allora AG, GB sono mediali, commensurabili solo in potenza, e comprendono un'area mediale [prop. 75]. Alla retta CD si applichi CH, equivalente ad AG^2, di larghezza CK, e alla retta KH si applichi KL, equivalente a BG^2, di larghezza KM. Allora l'intero $CL = AG^2 + GB^2$.

Ma $AG^2 + GB^2$ è mediale. Dunque anche CL è mediale. Ed è applicato alla razionale CD, ed ha per larghezza CM. Perciò CM è razionale ed incommensurabile in lunghezza con CD. E poichè $CL = AG^2 + GB^2$, di cui $CE = AB^2$, il rimanente LF sarà uguale a $2AG \times GB$ [II, 7]. Sia ora FM diviso per metà in N, e si conduca la parallela NO alla CD. Allora $FO = NL = AG \times GB$. Ma $AG \times GB$ è mediale. Così anche FL lo sarà. Ed è applicato alla razionale EF, ed ha per larghezza FM. Perciò FM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 22]. E poichè AG, GB sono commensurabili solo in potenza, AG e GB sono incommensurabili in lunghezza. Perciò anche AG^2 e $AG \times GB$ sono incommensurabili [prop. 21, lemma; prop. 11]. Ma AG^2 ed $AG^2 + GB^2$, $AG \times GB$ e $2AG \times GB$ sono com-



mensurabili. Allora $AG^2 + GB^2$ e $2AG \times GB$ sono incommensurabili [prop. 13]. Ma $CL = AG^2 + GB^2$; $FL = 2AG \times GB$; perciò CL, FL sono incommensurabili. E poichè $CL : FL = CM : FM$, le CM, FM sono incommensurabili in lunghezza. E ciascuna è razionale. Perciò CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque CF è apotome [prop. 73].

Dico ora che è terza. Infatti, poichè AG^2, GB^2 sono commensurabili, anche CH, KL lo sono. Perciò anche

CK, KM sono commensurabili [VI, 1; prop. 11]. E poichè $AG \times GB$ è medio proporzionale tra AG^2 e GB^2 [prop. 21, lemma], e $CH = AG^2$, $KL = GB^2$, $NL = AG \times GB$, anche NL è medio proporzionale tra CH e KL. Così $CH : NL = NL : KL$. Ma $CH : NL = CK : NM$, $NL : KL = NM : KM$.

Perciò $CK : MN = MN : KM$. Allora [VI, 17] $CK \times KM$ è equivalente ad MN^2, cioè alla quarta parte di FM^2. Poichè dunque CM, MF sono due rette disuguali, e alla CM è applicata un'area equivalente alla quarta parte di FM^2, mancante di un quadrato, ed essa vien divisa in parti commensurabili, CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta commensurabile con CM; e nessuna delle rette CM, MF è commensurabile in lunghezza con la data razionale CD. Allora CF è terza apotome.

Dunque il quadrato della seconda apotome di una mediale, ecc.; c. d. d.

Se si divide il quadrato della seconda apotome di una mediale $\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)^2$ per un segmento razionale γ si ottiene una terza apotome.

Si abbia dunque

$$(1) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma x,$$

dove $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}$ è seconda apotome di una mediale, quindi (X, 75) $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza e tali che $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è mediale. Devesi dimostrare che x è una terza apotome (X, Def. III, 3).

Per questo scopo, si ponga

$$(2) \qquad \left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 = \gamma y, \quad \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma z$$

e quindi

(3) $$\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma(y + z).$$

Si deduce dalla (3) che $\gamma(y + z)$ è un prodotto mediale e che quindi (X, 22) $(y + z)$ è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

Dalla (1) e dalla (3) si ricava per sottrazione

(4) $$2\sqrt[4]{\alpha\beta} = \gamma(y + z - x),$$

e quindi si conclude in modo analogo che $(y + z - x)$ è razionale incommensurabile anch'esso con γ in 1ª potenza.

Si ha poi $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \sqrt[4]{\alpha\beta} = \sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta}$, quindi (VI, 1, X, 11) $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ è incommensurabile con $\sqrt[4]{\alpha\beta}$. D'altra parte $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\gamma}\right)^2$ è commensurabile con $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, perchè, per ipotesi, $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$, $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ sono commensurabili. Si deduce che $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ e $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ sono incommensurabili tra loro.

Dalla (3) e dalla (4) si deduce allora che $(y + z)$ e $(y + z - x)$ sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza.

I due segmenti $(y + z)$, $(y + z - x)$ risultano così ambedue razionali, incommensurabili tra loro in 1ª potenza. Perciò la loro differenza

$$(y + z) - (y + z - x) = x$$

è un' apotome.

Inoltre si deduce, come nelle proposizioni precedenti, che

$$yz = \frac{(y + z - x)^2}{4},$$

e siccome dalla (2) segue che y e z sono commensurabili tra loro in 1ª potenza, si trae, per la proposizione X, 17, la seguente relazione:

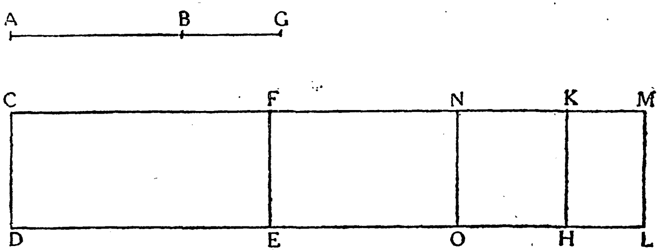
$$\sqrt{(y + z)^2 - (y + z - x)^2} : (y + z) = m : n.$$

Questa relazione, insieme alla circostanza già provata sopra che i segmenti $(y+z)$, $(y+z-x)$ sono ambedue incommensurabili in 1[a] potenza col segmento razionale dato γ, prova che $(y+z)-(y+z-x)=x$ è una terza apotome (X, Def. III, 3).

100.

Il quadrato di una minore, *applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una quarta apotome.*

Sia AB minore, e CD sia razionale; alla razionale CD si applichi CE equivalente ad AB^2, di larghezza CF. Dico che CF è quarta apotome. Infatti sia BG congruente ad AB. Allora AG, GB sono incommensurabili in potenza, formano AG^2+GB^2 razionale e $2AG \times GB$ mediale [prop. 76]. Ed alla CD è applicato CH equivalente ad AG^2, di larghezza CK, e $KL=BG^2$, di larghezza KM. Allora l'intero $CL=AG^2+GB^2$. Ma AG^2+GB^2 è razionale. Perciò anche CL lo sarà. Ed è applicato alla razionale CD, ed ha per larghezza CM.



Allora CM è razionale e commensurabile in lunghezza con la CD [prop. 20].

E poichè l'intero $CL=GB^2+GB^2$, di cui $CE=AB^2$, il rimanente $FL=2AG \times GB$ [II, 7]. Sia ora FM diviso per metà in N, e per N si conduca la parallela NO a ciascuna delle CD, ML. Allora $FO = NL = AG \times GB$. E poichè $2AG \times GB$ è mediale, ed è equivalente ad FL, anche FL è mediale. Ed è applicato alla retta razionale FE, ed ha per larghezza FM. Così FM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la retta CD [prop. 22]. E poichè $AG^2 + GB^2$ è razionale, e $2AG \times GB$ è mediale, $AG^2 + CB^2$ e $2AG \times GB$ sono incommensurabili.

Ma $CL = AG^2 + GB^2$, ed $FL = 2AG \times GB$. Perciò CL, FL sono incommensurabili. Ma $CL : FL = CM : MF$; perciò CM, MF sono incommensurabili in lunghezza [prop. 11]. E ciascuna è razionale. Allora CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque CF è apotome [prop. 73].

Dico ora che è quarta. Infatti, poichè AG, GB sono incommensurabili in potenza, anche AG^2 e GB^2 lo sono. E $CH = AG^2$, $KL^2 = GB^2$. Perciò CH, KL sono incommensurabili. Ma $CH : KL = CK : KM$. Allora CK, KM sono incommensurabili in lunghezza [prop. 11]. E poichè $AG \times GB$ è medio proporzionale tra AG^2, GB^2, ed $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, $AG \times GB = NL$, anche NL è medio proporzionale tra CH, KL.

Allora $CH:NL=NL:KL$. Ma $CH:NL=CK:NM$ $NL:KL = NM : KM$; quindi $CK:MN = MN:KM$. Perciò $CK \times KM$ è equivalente ad MN^2, cioè alla quarta parte di FM. Ora, poichè CM, MF sono due rette disuguali, ed alla CM è applicato $CK \times KM$ equivalente alla quarta parte di MF, mancante di un quadrato, ed essa vien divisa in parti incommensurabili, CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CM [prop. 18]. E l'intera CM è commensurabile in lunghezza con la data razionale CD. Allora CF è quarta apotome.

Dunque il quadrato di una minore, ecc.; c. d. d.

Se si divide il quadrato di un « minore » $(t-s)^2$ per un segmento γ, si ottiene una quarta apotome.

Si abbia dunque

(1) $$(t-s)^2=\gamma x,$$

dove $(t-s)^2$ è un « minore », cioè si ha (X, 76):

1) $t^2:s^2 \mp m:n$, 2) t^2+s^2 è razionale, 3) $2ts$ è mediale. Devesi dimostrare che x è una quarta apotome.

Si ponga

(2) $$t^2=\gamma y, \quad s^2=\gamma z$$

e quindi

(3) $$t^2+s^2=\gamma(y+z).$$

Siccome t^2+s^2 è, per ipotesi, razionale, si deduce (X, 20) che $(y+z)$ è razionale, commensurabile con γ in 1ª potenza. Dalla (1) e dalla (3) si ricava per sottrazione

$$2ts=\gamma(y+z-x),$$

e siccome $2ts$ è, per ipotesi, mediale, si deduce (X, 22) che $(y+z-x)$ è razionale, incommensurabile con γ in 1ª potenza.

I due segmenti $(y+z)$, $(y+z-x)$ risultano dunque ambedue razionali, il primo commensurabile con γ in 1ª potenza, il secondo no. Essi sono dunque per di più incommensurabili tra loro in 1ª potenza, e perciò la loro differenza

$$(y+z)-(y+z-x)=x$$

è un'apotome (X, 73).

Inoltre si deduce, come nelle proposizioni precedenti,

$$yz=\frac{(y+z-x)^2}{4},$$

ei sccome dalla (2) segue che y e z sono *incommensurabili* tra loro in 1ª potenza (avendosi per ipotesi $t^2 : s^2 \mp m : n$), si ha per la prop. X, 18 la seguente relazione di incommensurabilità tra la loro somma $(y + z)$ e il prodotto $yz = \frac{(y + z - x)^2}{4}$:

$$\sqrt{(y + z)^2 - (y + z - x)^2} \mp m : n.$$

Questa diseguaglianza insieme al fatto già stabilito sopra che il segmento maggiore $y + z$ è commensurabile in 1ª potenza col segmento razionale dato γ, prova che $(y + z) - (y + z - x) = x$ è una quarta apotome (X, Def. III, 4).

101.

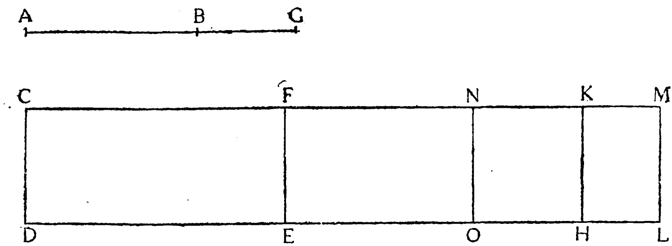
Il quadrato di una retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale, applicato ad un retta razionale, ha per larghezza una quinta apotome.

Sia AB la retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale; sia CD razionale, ed alla CD si applichi CE equivalente ad AB^2, di larghezza CF. Dico che CF è quinta apotome.

Sia infatti BG congruente alla AB.

Allora AG, GB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il doppio del loro rettangolo è razionale [prop. 77]. Alla CD si applichi $CH = AG^2$, $KL = GB^2$. Allora l'intero $CL = AG^2 + GB^2$. Ma $AG^2 + GB^2$ è mediale; perciò anche CL lo sarà; ed è applicato alla razionale CD, ed ha per larghezza CM. Allora CM è razionale ed incommensurabile con la CD [prop. 22]. E poichè $CL = AG^2 + GB^2$, di cui $CE = AB^2$, sarà il rimanente $FL =$

$= 2AG \times GB$ [II, 7]. Si divida ora FM per metà in N, e per N si conduca la parallela NO a ciascuna delle



CD, ML. Allora $FO = NL = AG \times GB$. E poichè $2AG \times GB$ è razionale, ed è equivalente ad FL, anche FL è razionale. Ed è applicato alla razionale EF, ed ha per larghezza FM. Perciò FM è razionale e incommensurabile in larghezza con CD [prop. 20]. E poichè CL è mediale ed FL è razionale, CL ed FL sono incommensurabili. Ma $CL : FL = CM : MF$; perciò CM, MF sono incommensurabili in lunghezza [prop. 11]. E ciascuna è razionale. Allora CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza; dunque CF è apotome [prop. 73]. Dico ora che è quinta. Infatti in modo simile dimostreremo che $CK \times KM$ è equivalente ad NM^2, cioè alla quarta parte di FM^2. E poichè AG^2, GB^2 sono incommensurabili, ed $AG^2 = CH$, $GB^2 = KL$, CH e KL sono incommensurabili.

Ma $CH : KL = CK : KM$; perciò CK, KM sono incommensurabili in lunghezza [prop. 11]. Ora, poichè CM, MF sono due rette disuguali, ed alla CM è applicata un'area equivalente alla quarta parte di FM^2, mancante di un quadrato, ed essa vien divisa in parti incommensurabili, CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CM [prop. 18]. E la congruente FM è commensurabile con la data razionale CD.

Dunque CF è quinta apotome; c. d. d.

Si abbia dunque

$$(t - s)^2 = \gamma x, \tag{1}$$

dove $t - s$ è ciò che con una superficie razionale dà un totale mediale, cioè (X, 77): 1) $t^2 : s^2 \mp m : n$, 2) $t^2 + s^2$ è mediale, 3) $2ts$ è razionale.

Devesi dimostrare che x è una quinta apotome.

Per questo scopo si ponga di nuovo

$$t^2 = \gamma y, \quad s^2 = \gamma z, \tag{2}$$

e quindi

$$(t^2 + s^2) = \gamma(y + z), \quad 2ts = \gamma(y + z - x). \tag{3}$$

Dalle (3) si deduce subito che i segmenti $(y + z)$, $(y + z - x)$ sono ambedue razionali, il primo commensurabile con γ in 1ª potenza, il secondo no, e quindi incommensurabili fra loro in 1ª potenza. Perciò la loro differenza

$$(y + z) - (y + z - x),$$

è un'apotome (X, 73). Inoltre si ha, come nelle proposizioni precedenti,

$$yz = \frac{(y + z - x)^2}{4},$$

e sîccome dalle (2) segue che y e z sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza, si conclude per la prop. X, 18, che

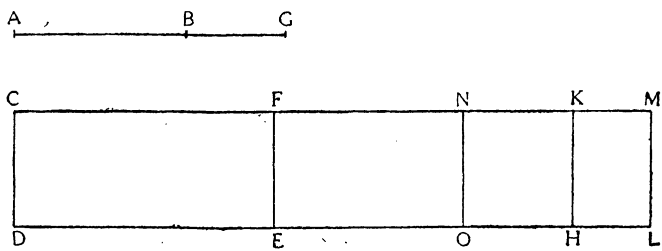
$$\sqrt{(y + z)^2 - (y + z - x)^2} : (y + z) \mp m : n.$$

Da questa relazione e dal fatto già stabilito che il segmento minore $(y + z - x)$ è commensurabile con γ in 1ª potenza, si conclude che $(y + z) - (y + z - x) = x$ è una quinta apotome (X, Def. III, 5).

102.

Il quadrato di una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una sesta apotome.

Sia AB una retta che, sommata con una mediale, dà per totale una mediale, sia CD razionale, ed alla CD si applichi CE, equivalente ad AB^2, di larghezza CF. Dico che CF è sesta apotome. Sia infatti BG congruente alla AB. Allora AG, GB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il doppio del loro rettangolo è mediale, ed $AG^2 + GB^2$ è incommensurabile con $2AG \times GB$ [prop. 78]. Alla CD si applichi ora $CH = AG^2$, di larghezza CK, e $KL = BG^2$. Così l'intero $CL = AG^2 + GB^2$. Perciò anche CL è mediale. Ed è applicato alla razionale CD, ed ha per larghezza CM. Allora CM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con la retta CD [prop. 22]. Ora, poichè $CL = AG^2 + GB^2$, di cui $CE = AB^2$, sarà il rimanente



$FL = 2AG \times GB$ [II, 7]. Ma $2AG \times GB$ è mediale. Allora anche FL lo è. Ed è applicato alla razionale FE, ed ha per larghezza FM. Perciò FM è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con CD [prop. 22]. E poichè $AG^2 + GB^2$ è incommensurabile con $2AG \times GB$, e $CL = AG^2 + GB^2$, $FL = 2AG \times GB$, sarà CL incommensurabile con FL. Ma $CL : FL = CM : MF$; perciò CM, MF sono incommensurabili in lunghezza.

E ciascuna è razionale. Allora CM, MF sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque CF è apotome [prop. 73].

Dico che è sesta. Infatti, poichè $FL = 2AG \times GB$, si divida la retta FM per metà in N, e per N si conduca la parallela NO alla CD. Allora $FO = NL = AG \times GB$. E poichè AG, GB sono incommensurabili in potenza, AG^2 e GB^2 sono incommensurabili. Ma $CH = AG^2$, $KL = GB^2$. Perciò CH, KL sono incommensurabili. Ma $CH : KL = CK : KM$. Così CK, KM sono incommensurabili [prop. 11]. E poichè $AG \times GB$ è medio proporzionale fra AG^2 e GB^2 [prop. 21, lemma] e $CH = AG^2$, $KL = GB^2$, $NL = AG \times GB$, anche NL sarà medio proporzionale tra CH, KL.

Allora $CH : NL = NL : KL$; e per la stessa ragione CM^2 supera MF^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CM [prop. 18]. E nessuna di esse è commensurabile con la data razionale CD.

Dunque CF è sesta apotome, ecc.; c. d. d.

Si abbia dunque

$$(t - s)^2 = \gamma x, \tag{1}$$

dove $(t - s)$ è ciò che con una superficie mediale dà un risultato mediale, cioè (X, 78): 1) $t^2 : s^2 \mp m : n$, 2) $t^2 + s^2$ è mediale,

3) $2ts$ è mediale e 4) $(t^2+s^2):2ts \mathrel{\mp} m:n$. Devesi provare che x è una sesta apotome (X, Def. III, 6).

La dimostrazione si svolge in maniera perfettamente analoga come nelle pp. precedenti. Basta osservare che ponendo

$$(2) \qquad t^2=\gamma y, \quad s^2=\gamma z,$$

si avrà

$$\gamma(y+z)=t^2+s^2, \quad \gamma(y+z-x)=2ts,$$

e quindi segue che i segmenti $(y+z)$, $(y+z-x)$ sono ambedue razionali, incommensurabili con γ in 1ª potenza (perchè per ipotesi, tanto t^2+s^2, quanto $2ts$, sono prodotti mediali). La condizione 4), e cioè $(t^2+s^2):2ts=m:n$ prova inoltre che $(y+z)$, $(y+z-x)$ sono incommensurabili tra loro in 1ª potenza, quindi la differenza

$$(y+z)-(y+z-x)=x$$

è un'apotome. Infine, in virtù della prop. X, 18, si trae la relazione $\sqrt{(y+z)^2-(y+z-x)^2}:(y+z) \mathrel{\mp} m:n$, osservando che $yz=\dfrac{(y+z-x)^2}{4}$, e che per le (2) y e z sono incommensurabili tra loro. Ciò prova che x è una sesta apotome.

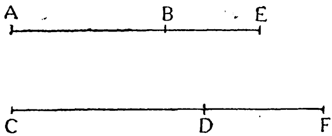
103.

Una retta commensurabile in lunghezza con una apotome è apotome dello stesso ordine.

Sia AB apotome, e sia CD commensurabile in lunghezza con AB. Dico che anche CD è apotome dello stesso ordine di AB. Infatti, poichè AB è apotome, sia BE congruente ad AB. Allora AE, EB sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 73].

Sia $BE:DF=AB:CD$ [VI, 12]; poichè un termine di un rapporto sta all'altro come tutti a tutti

[V, 12], $AE : CF = AB : CD$. Ma AB, CD sono commensurabili in lunghezza. Così anche AE, CF e BE, DF lo sono [prop. 11]. Ma AE, EB sono razionali. commensurabili solo in potenza. Quindi anche CF, FD sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 13]. Ora, poichè $AE : CF = BE : DF$, permutando [V, 16] $AE : EB = CF : FD$. Ma AE^2 supera EB^2 del quadrato di una retta commensurabile o no con AE; se supera



del quadrato di una retta commensurabile con AE, anche CF^2 supera FD^2 del quadrato di una retta commensurabile con CF [prop. 14]. E se AE è commensurabile in lunghezza con la retta data razionale, anche CF le è commensurabile [prop. 12]; se BE, anche DF; se nessuna delle due rette AE, EB, neppure alcuna delle rette CF, FD [prop. 13]. Se poi AE^2 supera EB^2 del quadrato una retta incommensurabile con AE, anche CF^2 supera FD^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CF [prop. 14]. E se AE è commensurabile in lunghezza con la retta data razionale, anche CF le è commensurabile, se BE, anche DF [prop. 12]; se nessuna delle due rette AE, EB, neppure alcuna delle rette CF, FD [prop. 13].

Dunque CD è apotome [prop. 73] dello stesso ordine di AB; c. d. d.

Se $\alpha - \sqrt{\beta}$ è un'apotome, e inoltre

$$(1) \qquad (\alpha - \sqrt{\beta}) : x = m : n,$$

allora secondo che $\alpha - \sqrt{\beta}$ è una prima, seconda, ... sesta apotome, anche x sarà una prima, seconda, ... sesta apotome.

Dimostrazione.

Si immagini il segmento x come differenza di due segmenti y, z:

$$x = y - z,$$

dove z soddisfi alla proporzione

$$(2) \qquad \sqrt{\beta} : z = (\alpha - \sqrt{\beta}) : x. \qquad \text{(VI, 12)}$$

Da qui si ricava

$$\alpha : (z + x) = (\alpha - \sqrt{\beta}) : x,$$

ossia

$$(3) \qquad \alpha : y = (\alpha - \sqrt{\beta}) : x.$$

La (2) e la (3), confrontate con la (1), mostrano che z è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1^a potenza, e che y è commensurabile con α in 1^a potenza.

Siccome α, $\sqrt{\beta}$ sono commensurabili solo in 2^a potenza, segue (X, 13) che anche y, z sono commensurabili solo in 2^a potenza, quindi $x = y - z$ è un'apotome. Che x poi sia un'apotome della medesima specie di $\alpha - \sqrt{\beta}$ segue dalle considerazioni seguenti:

1) Siccome α, y sono commensurabili tra loro in 1^a potenza, segue che secondo che α è commensurabile o no in 1^a potenza con un segmento razionale dato γ, anche y sarà commensurabile o no con γ. Lo stesso si dica per $\sqrt{\beta}$ e z.

2) Dalla X, 14 si deduce che secondo che

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha = m : n \quad \text{o} \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha \neq m : n,$$

si avrà anche

$$\sqrt{y^2 - z^2} : y = m : n \quad \text{o} \quad \sqrt{y^2 - z^2} : y \neq m : n.$$

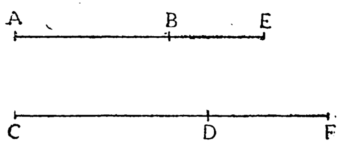
104.

Una retta commensurabile con l'apotome di una retta mediale è anch'essa apotome di una mediale, e dello stesso ordine.

Sia AB l'apotome di una mediale, e sia CD commensurabile in lunghezza con la AB. Dico che anche CD è apotome d'una mediale, e dello stesso ordine di AB.

Infatti, data AB apotome di una mediale, le sia adiacente EB. Così AE, EB sono mediali, commensurabili solo in potenza [propp. 74, 75].

E sia $AB : CD = BE : DF$ [VI, 12]. Allora anche AE, CF e BE, DF sono commensurabili [V, 12;



prop. 11]. Ma AE, EB sono mediali, commensurabili solo in potenza. Così anche CF, FD sono mediali [prop. 23] commensurabili solo in potenza [prop. 13]. Dunque CD è apotome d'una mediale [propp. 74-75].

Dico ora che è dello stesso ordine di AB. Infatti, poichè $AE : EB = CF : FD$ [V, 12; V, 16] sarà anche [prop. 21, lemma] $AE^2 : AE \times EB = CF^2 : CF \times FD$.

Ma AE^2, CF^2 sono commensurabili. Allora anche $AE \times EB$, $CF \times FD$ lo sono. Dunque, se $AE \times EB$ è razionale, anche $CF \times FD$ lo è; se $AE \times EB$ è mediale, anche $CF \times FD$ lo è [prop. 23, coroll.].

Dunque CD è apotome di una mediale, e dello stesso ordine di AB; c. d. d.

Un segmento x, che sia commensurabile in 1ª potenza con un'apotome di una mediale, è anch'esso un'apotome dello stesso ordine.

Sia $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}$ un'apotome di una mediale, e si abbia

$$\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right) : x = m : n.$$

Devesi dimostrare che, secondo che $\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right)$ è una prima o seconda apotome d'una mediale, anche x è una prima o seconda apotome d'una mediale.

Si rappresenti x come differenza di due segmenti y e z,

$$x = y - z,$$

dove z soddisfi alla proporzione

$$\left(\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}\right) : x = \sqrt[4]{\beta} : z;$$

si ricava allora

$$\sqrt[4]{\alpha} : y = \sqrt[4]{\beta} : z = m : n.$$

Risulta dunque che $\sqrt[4]{\alpha}$ e y, come pure $\sqrt[4]{\beta}$ e z sono commensurabili tra loro in 1ª potenza.

Ma $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\beta}$ sono, per ipotesi (X, 74, 75), mediali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza. Lo stesso vale perciò per y e z (X, 23, X, 13). Epperò la differenza $x = y - z$ è un'apotome d'una mediale (X, 74, 75).

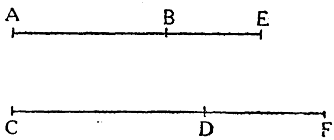
Si ha poi $\sqrt[4]{\alpha} : \sqrt[4]{\beta} = y : z$, e quindi $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2 : \sqrt[4]{\alpha\beta} = y^2 : yz$.

Ma $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ sono commensurabili tra loro, quindi anche $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ e xz sono commensurabili tra loro (V, 16, X, 11). Perciò secondo che $\sqrt[4]{\alpha\beta}$ è razionale o mediale, anche yz è razionale o mediale (X, 24, corollario). Si conclude (X, 74, 75) che secondo che $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta}$ è una prima o seconda apotome d'una mediale, anche $x = y - z$ è una prima o seconda apotome d'una mediale.

105.

Una retta commensurabile con una minore è minore.

Sia AB *minore*, e sia CD commensurabile con AB. Dico che anche CD è minore. Si facciano infatti le stesse costruzioni. Poichè AE, EB sono incommensurabili in potenza [prop. 76], anche CF, FD lo sono [prop. 13]. Ora, poichè $AE : EB = CF : FD$ [V, 12; V, 16],



sarà anche $AE^2 : EB^2 = CF^2 : FD^2$ [VI, 20, coroll.]. Allora, componendo [V, 18], $AE^2 + EB^2 : EB^2 = CF^2 + FD^2 : FD^2$. Ma EB^2, DF^2 sono commensurabili; allora anche $AE^2 + EB^2$ e $CF^2 + FD^2$ lo sono; [V, 16; prop. 11]. Ma $AE^2 + EB^2$ è razionale [prop. 76]; allora anche $CF^2 + FD^2$ lo è; di nuovo, poichè $AE^2 : AE \times EB = CF^2 : CF \times FD$ [prop. 21, lemma], ed AE^2, CF^2 sono commensurabili, anche $AE \times EB$, $CF \times FD$ lo sono. Ma $AE \times EB$, è mediale [prop. 76]; perciò anche $CF \times FD$ lo è [prop. 23, coroll.]. Allora

CF, FD sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il loro rettangolo è mediale.

Dunque CD è minore [prop. 76]; c. d. d.

Sia $(t - s)$ un minore; se si ha

$$(t - s) : x = m : n,$$

allora anche x è un minore.

Si ponga

$$x = y - z, \quad (t - s) : x = t : y.$$

Si avrà allora

(1) $$s : z = t : y = m : n.$$

Per X, 76 si ha $t^2 : s^2 \neq m : n$, quindi per la (1), si ha pure (X, 13).

a) $y^2 : z^2 \neq m : n$

Si ha poi dalla (1) $t : s = y : z$, ossia $t^2 : s^2 = y^2 : z^2$ (VI, 22) e quindi $(t^2 + s^2) : s^2 = (y^2 + z^2) : z^2$ (V, 18). Ma s^2, z^2 sono commensurabili tra loro, quindi lo stesso vale per $(t^2 + s^2)$, $(y^2 + z^2)$. Siccome $t^2 + s^2$ è per ipotesi, razionale (X, 76), segue che anche

b) $y^2 + z^2$ è razionale.

Da $t^2 : ts = y^2 : yz$ e dalla commensurabilità di t^2, y^2, si deduce la commensurabilità di ts, yz. E siccome ts è mediale, segue (X, 23, corollario) che anche

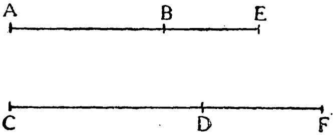
c) yz è mediale.

Risulta dunque che y, z soddisfano alle 3 condizioni a), b), c, che valgono a definire un minore (X, 76). Quindi $x = y - z$ è un minore.

106.

Una retta commensurabile con una retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale, è anch'essa una retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale.

Sia AB una retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale; e sia CD commensurabile con AB. Dico che anche CD è una retta che sommata



con una razionale dà per totale una retta mediale. Sia infatti BE congruente alla AB. Allora AE, EB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il loro rettangolo è razionale [prop. 77].

Si proceda nel modo solito. Come prima dimostreremo che $CF : FD = AE : EB$, e che $AE^2 + EB^2$, $CF^2 + FD^2$ e $AE \times EB$, $CF \times FD$ sono commensusurabili. Perciò anche CF, FD sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il loro rettangolo è razionale.

Dunque CD è una retta che, sommata con una razionale, dà per totale una retta mediale [prop. 77]; c. d. d.

Se $t - s$ è ciò che sommato con una superficie razionale dà per risultato una mediale, e se

$$(t - s) : x = m : n,$$

allora anche x è una retta che sommata con una razionale dà per totale una mediale.

Ponendo, come nelle proposizioni precedenti,

$$x = y - z, \quad (t - s) : x = t : y,$$

si ricava

$$t : y = s : z = m : n,$$
$$(t^2 + s^2) = (y^2 + z^2) : y^2.$$

Perciò y è commensurabile con t in 1ª potenza, z è commensurabile con s, $t^2 + s^2$ è commensurabile con $y^2 + z^2$. Quindi i segmenti y e z soddisfano alle medesime condizioni, a cui per ipotesi soddisfano t, s, e precisamente si ha (X, 77):

a) $y^2 : z^2 \mp m : n$

b) $y^2 + z^2$ è mediale

c) yz è razionale.

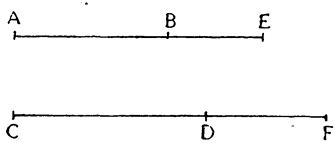
Risulta così provato che $x = y - z$ è ciò che sommato con una razionale dà un risultato mediale.

107.

Una retta commensurabile con una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale, è anch'essa una retta che, sommata con una mediale, dà per totale una mediale.

Sia AB una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale, e sia CD commensurabile con AB.

Dico che anche CD è una retta che sommata con una mediale dà per totale una retta mediale.



Sia infatti BE adiacente alla AB, e si proceda come prima. Allora AE, EB sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è razionale, il loro rettangolo è mediale. E inoltre la somma dei quadrati è incommensurabile col rettangolo [prop. 78]. Ma le rette AE, EB, come è stato dimostrato, sono commensurabili con le rette CF, FD; ed inoltre $AE^2 + EB^2$, $CF^2 + FD^2$, ed $AE \times EB$, $CF \times FD$ sono commensurabili. Perciò anche CF, FD sono incommensurabili in potenza, la somma dei loro quadrati è mediale, il loro rettangolo è mediale, ed inoltre la somma dei quadrati è incommensurabile col rettangolo.

Dunque la retta CD, sommata con una mediale, dà per totale una mediale [prop. 78]; c. d. d.

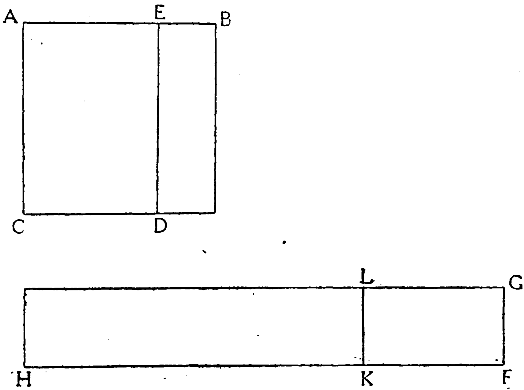
La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della proposizione precedente.

108.

Se si toglie un'area mediale da un'area razionale, la retta il cui quadrato equivale alla differenza tra le aree è una delle due irrazionali: o apotome, o minore.

Dall'area razionale BC si tolga la mediale BD. Dico che la retta il cui quadrato equivale alla rimanente area EC è una delle due irrazionali: o apotome, o minore.

Sia data infatti la razionale FG, ed alla FG si applichi il rettangolo GH, equivalente a BC, e si tolga GK, equivalente a DB. Allora il rimanente $EC = LH$. Ora, poichè BC è razionale, BD è mediale, e $BC = GH$, $BD = GK$, GH sarà razionale e GK mediale. E sono applicati alla razionale FG. Allora FH è razionale e commensurabile in lunghezza con FG [prop. 20], ed FK sarà razionale ed incommensurabile in lunghezza con



FG [prop. 22]. Perciò FH, FK sono incommensurabili in lunghezza [prop. 13]. Così FH, FK sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Perciò KH è apotome [prop. 73], e KF le è congruente. Ora HF^2 supera FK^2 del quadrato di una retta commensurabile o no con HF.

Superi dapprima del quadrato di una retta commensurabile: anche l'intera HF è commensurabile in lunghezza con la data FG. Perciò KH è prima apotome. Ma una retta il cui quadrato equivale all'area compresa da una retta razionale e da una prima apotome è apotome [prop. 91]; perciò la retta il cui quadrato equivale all'area LH, cioè EC, è apotome.

Se invece HF^2 supera FK^2 del quadrato di una retta incommensurabile con HF, KH sarà quarta apotome.

Ma una retta il cui quadrato equivale all'area compresa da una retta razionale e da una quarta apotome è minore [prop. 94]; c. d. d.

Se α^2 è un'area razionale, e $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è un'area mediale, allora $\sqrt{\alpha^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2}$ è un'apotome o una minore.

Dimostrazione.

Si γ un segmento razionale arbitrariamente scelto.

Si ponga

$$\alpha^2 = \gamma x, \quad \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma y.$$

Si avrà allora

$$\alpha^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma(x - y).$$

Siccome γx è razionale, segue (X, 20) che x è razionale, commensurabile con γ in 1ª potenza. Siccome poi γy è mediale, si deduce (X, 22) che y è razionale, commensurabile con γ solo in 2ª potenza. I segmenti x, y sono perciò ambedue razionali, incommensurabili tra loro in 1ª potenza, e quindi la loro differenza $x - y$ è un'apotome (X, 73). Ora possono darsi due casi:

a) $\sqrt{x^2 - y^2} : x = m : n$

b) $\sqrt{x^2 - y^2} : x \neq m : n$.

Nel caso a) si ha (X, Def. III, 1) che $x - y$ è una prima apotome, perchè, come si è già visto, il segmento maggiore x è commensurabile con γ in 1ª potenza. Dalla prop. X, 91 si deduce allora che

$$\sqrt{\gamma(x - y)} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2} \text{ è un'apotome.}$$

Nel caso b) invece $x - y$ risulta una quarta apotome (X, Def. III. 4) e quindi per la prop. X, 94

$$\sqrt{\gamma(x - y)} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2} \text{ è una minore.}$$

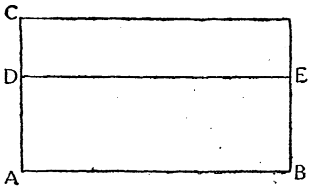
109.

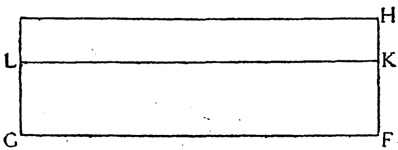
Se un'area razionale vien tolta da un'area mediale, sorgono altre due rette irrazionali; o prima apotome di una mediale, o una retta che sommata con una razionale dà per totale una retta mediale.

Dall'area mediale BC si tolga l'area razionale BD. Dico che la retta il cui quadrato equivale all'area rimanente EC è una delle due irrazionali: o prima apotome di una mediale o una retta che, sommata con una razionale, dà per totale una retta mediale.

Sia data infatti la razionale FG, e si applichino le aree, similmente a quanto si è fatto prima. Allora allo stesso modo consegue che FH è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la FG, KF è razionale e commensurabile in lunghezza con la FG. Così FH, FK sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 13].

Dunque KH è apotome [prop. 73], ed FK le è congruente. Ora HF^2 supera FK^2 del quadrato di una retta commensurabile con HF, o no. Se HF^2 supera FK^2 del quadrato di una retta commensurabile con HF, e la congruente FK è commensurabile in lunghezza con la data razionale FG, KH è seconda apotome; ma FG è razionale, perciò la retta il cui quadrato equivale all'area LH, cioè EG, è prima apotome di una mediale [prop. 92]. Se invece HF^2 supera FK^2 del quadrato di una retta incommensurabile con HF, e la congruente FK è commensurabile in lunghezza con la data razionale FG, la KH è quinta apotome. Perciò la retta il cui quadrato equivale all'area EC è quella che, sommata con una razionale, dà per totale una retta mediale [prop. 95]; c. d. d.





Se $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$ è un'area mediale, e α^2 è un'area razionale, allora $\sqrt{\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - \alpha^2}$ è o una prima apotome di una mediale o ciò ch con una superficie razionale dà un risultato mediale.

Dimostrazione. Sia γ un segmento razionale arbitrariamente scelto. Si ponga

$$\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 = \gamma x, \quad \alpha^2 = \gamma y$$

e quindi

$$\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - \alpha^2 = \gamma(x - y),$$

Siccome $\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2$, ossia γy, è mediale, segue che x è razionale, commensurabile con γ solo in 2^a potenza (X, 22). Siccome poi α^2, ossia γy, è razionale, segue che y è razionale, commensurabile con γ in 1^a potenza (X, 20). I segmenti x, y risultano dunque ambedue razionali, incommensurabili tra loro in 1^a potenza e per ciò $x - y$ è un'apotome (X, 73)

Ora possono darsi due casi:

a) $\sqrt{x^2 - y^2} : x = m : n$

b) $\sqrt{x^2 - y^2} : x \neq m : n$.

Nel caso a), dato che il segmento minore y è commensurabile col segmento razionale γ prefissato, si deduce che $x - y$ è una seconda apotome (X, Def. III, 2) e quindi, per la prop. X, 92,

$$\sqrt{\gamma(x-y)} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - \alpha^2}$$ è una prima apotome di una mediale.

Nel caso b) invece $x - y$ risulta una quinta apotome (X, Def. III, 2) e quindi (X, 95)

$$\sqrt{\gamma(x-y)} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^2 - \alpha^2}$$ è ciò che con una superficie razionale dà un risultato mediale.

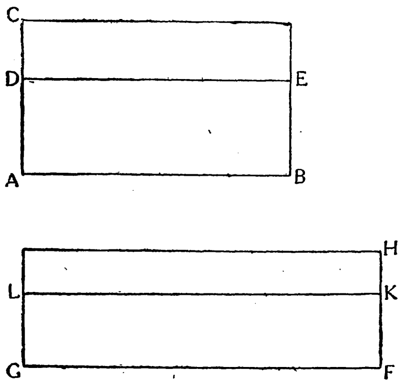
110.

Se da un'area mediale si toglie un'area mediale, incommensurabile con l'intera, sorgono due irrazionali: o una seconda apotome di una mediale, o una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale.

Si tolga infatti, come nelle figure precedenti, dall'area mediale BC l'area mediale BD, incommensurabile con l'intera. Dico che la retta il cui quadrato equivale all'area EC è una delle due rette irrazionali: o seconda apotome di una mediale, o una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale.

Infatti, poichè ciascuna delle aree BC, BD è mediale, e BC, BD sono incommensurabili, similmente a quanto si è fatto pirma concluderemo che ciascuna delle FH,

FK è razionale ed incommensurabile in lunghezza con la FG [prop. 22]. E poichè BC, BD, cioè GH, GK, sono incommensurabili, anche HF, FK lo sono [VI, 1;



prop. 11]. Allora FH, FK sono razionali commensurabili solo in potenza. Dunque KH è apotome [prop. 73]. Ora, se FH^2 supera FK^2 del quadrato di una retta commensurabile con FH, e nessuna delle due rette FH, KF è commensurabile in lunghezza con la data razionale FG, la KH è terza apotome. Ma KL è razionale, e il rettangolo compreso da una retta razionale e da una terza apotome è irrazionale, e la retta il cui quadrato equivale a tale rettangolo è irrazionale, e si dice seconda apotome di una mediale [prop. 93].

Dunque la retta il cui quadrato equivale all'area LH, cioè EC, è seconda apotome di una mediale.

Se invece FH^2 supera FK^2 del quadrato di una retta incommensurabile con FH, e nessuna delle rette HF, FK è commensurabile in lunghezza con la FG, la KH è sesta apotome. Ma una retta il cui quadrato sia equivalente al rettangolo compreso da una retta razionale e da una sesta apotome è una retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale [prop. 96]. Dunque la retta il cui quadrato equivale ad LH, cioè EC, sommata con una mediale, dà per totale una mediale; c. d. d.

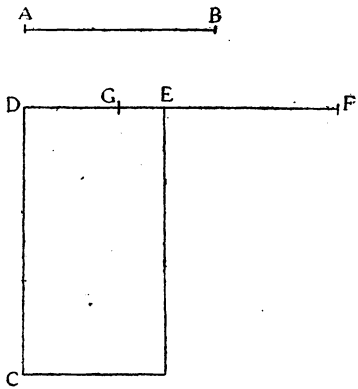
La dimostrazione è analoga a quella della proposizione precedente, e si basa sulle proposizioni X, 93, X, 96.

111.

Un' apotome non è lo stesso che una retta binomiale.

Sia AB apotome. Dico che AB non è lo stesso che una binomiale.

Infatti, se è possibile, lo sia. Sia data la razionale DC ed alla CD si applichi il rettangolo CE equivalente ad



AB^2, di larghezza DE. Poichè AB è apotome, DE è prima apotome [prop. 97]. Le sia adiacente EF. Così

DF, FE sono razionali, commensurabili solo in potenza, FD^2 supera FE^2 del quadrato di una retta commensurabile con DC. Di nuovo, poichè AB è binomiale, DE è prima binomiale [prop. 60]. Si divida in G nelle sue parti e sia DG la parte maggiore. Allora DG, GE sono razionali, commensurabili solo in potenza, DG^2 supera GE^2 del quadrato di una retta commensurabile con DG, e la parte maggiore DG è commensurabile in lunghezza con la data razionale DC. Così anche DF è commensurabile in lunghezza con la retta DG [prop. 12]. Perciò anche la rimanente GF è commensurabile in lunghezza con la DF [prop. 15]. Ma DF, EF sono incommensurabili in lunghezza. Perciò anche FG, EF lo sono [prop. 13]. Allora GF, FE sono razionali, commensurabili solo in potenza. Dunque EG è apotome [prop. 73]. Ma è razionale, il che è impossibile.

Dunque una apotome non è lo stesso di una retta binomiale; c. d. d.

In questa proposizione EUCLIDE dimostra un teorema notevole e fondamentale, e cioè che un'apotome $\alpha - \sqrt{\beta}$ non è mai eguale a una binomiale $\gamma + \sqrt{\delta}$.

Infatti, posto che si abbia

$$\alpha - \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta},$$

si arriva a un assurdo. Sia ε un segmento razionale arbitrariamente scelto, e si ponga

$$(\alpha - \sqrt{\beta})^2 = \varepsilon x.$$

Per la prop. X, 97 si deduce che x è una prima apotome. Perciò si avrà

$$x = y - z,$$

dove y, z sono segmenti razionali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, di cui il primo, cioè y, è commensurabile con ε in 1ª potenza. Inoltre (X, Def. III, 1)

$$\sqrt{y^2 - z^2} : y = m : n.$$

Nello stesso tempo

$$(\gamma + \sqrt{\delta})^2 = \varepsilon x,$$

e quindi, per la prop. X, 60, x è una prima binomiale.

Perciò

$$x = u + v, \quad u > v$$

dove u, v sono segmenti razionali, commensurabili tra loro solo in 2ª potenza, di cui il maggiore, cioè u, è commensurabile con ε in 1ª potenza (X, Def. II, 1). Inoltre

$$\sqrt{u^2 - v^2} : u = m : n.$$

Inoltre

$$y - z = u + v.$$

Da quanto precede segue che u e y sono commensurabili tra loro in 1ª potenza (X, 12), perchè ambedue sono commensurabili in 1ª potenza con γ. Quindi anche $y - u$, y sono commensurabili tra loro in 1ª potenza (X, 15). Ma y è incommensurabile con z in 1ª potenza, quindi anche $y - u$ è incommensurabile con z in 1ª potenza (X, 13).

Siccome $y - u$, z sono ambedue razionali, segue che

$$(y - u) - z \text{ è un'apotome (X, 73).}$$

La differenza $(y - u) - z$ risulta dunque irrazionale. Ma nello stesso tempo essa è razionale, perchè si ha $(y - u) - z = v$, ciò che è assurdo.

Osservazione. Nelle proposizioni 97-102 si considerano i quadrati dell'apotome, della prima apotome di una mediale ecc., divisi ordinatamente per un segmento razionale. Siccome i quozienti ottenuti (apotome prima, seconda ecc.) sono tutti distinti tra di loro, segue che anche l'apotome, la prima apotome di una mediale ecc.

sono irrazionalità essenzialmente distinte. L'importanza della proposizione 111 consiste in ciò che essa permette inoltre di provare che le irrazionalità or dette sono essenzialmente distinte dalle irrazionalità analoghe, munite del segno +, e cioè dalla binomiale, dalla prima bimediale ecc.

[COROLLARIO]

L'apotome e le irrazionali che ne derivano non sono uguali nè ad una mediale, nè fra loro.

Infatti il quadrato di una mediale, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza alla retta a cui è applicato [prop. 22].

Il quadrato poi di una apotome, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una prima apotome [prop. 97]; il quadrato della prima apotome di una mediale, applicato ad una razionale, ha per larghezza una seconda apotome [prop. 98]; il quadrato della seconda apotome di una mediale, applicato ad una razionale, ha per larghezza una terza apotome [prop. 99]; il quadrato di una minore, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una quarta apotome [prop. 100]; il quadrato di una retta che sommata con una razionale dà una mediale, applicato ad una razionale, ha per larghezza una quinta apotome [prop. 101]; il quadrato di una retta che, sommata con una mediale, dà per totale una mediale, applicato ad una razionale, ha per larghezza una sesta apotome [prop. 102]. Ora, poichè dette larghezze differiscono dalla prima e fra di loro: dalla prima, perchè è razionale, e fra di loro, perchè non sono dello stesso ordine, è manifesto che le stesse irrazionali differiscono tra loro. E poichè abbiamo dimostrato che un'apotome non è una retta binomiale [prop. 111], e che le rette irrazionali che derivano dall'apotome, applicate ad una razionale, hanno per larghezza un'apotome, ciascuna secondo il suo ordine, le irrazionali che derivano dall'apotome sono diverse dalle irrazionali che derivano dalla binomiale, in modo che le tredici irrazionali hanno quest'ordine:

Mediale

Binomiale

Prima bimediale

Seconda bimediale

Maggiore

« Lato » della somma di un' area razionale con una mediale

« Lato » della somma di due aree mediali

Apotome

Prima apotome di una mediale

Seconda apotome di una mediale

Minore

Retta che sommata con una razionale dà per totale una mediale

Retta che sommata con una mediale dà per totale una mediale.

112.

Il quadrato di una retta razionale, applicato ad una binomiale, ha per larghezza un'apotome le cui parti sono commensurabili con quelle della binomiale; inoltre stanno nello stesso rapporto, e l'apotome così formata avrà lo stesso ordine della binomiale.

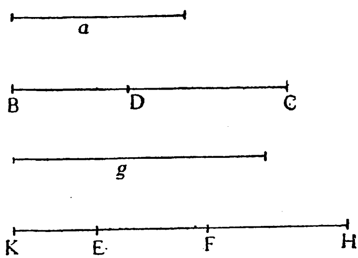
Sia a razionale, BC binomiale, di cui sia DC la parte maggiore, e sia $BC \times EF = a^2$. Dico che EF è apotome, le cui parti sono commensurabili con le rette CD, DB, stanno nello stesso loro rapporto, ed inoltre la EF ha lo stesso ordine di BC.

Infatti, sia anche $BD \times g = a^2$.

Ora, poichè $BC \times EF = BD \times g$, sarà

$$CB : BD = g : EF \qquad [VI, 16].$$

Ma $CB > BD$. Allora anche $g > EF$ [V, 16; V, 14]. Sia $EH = g$. Allora $CB : DB = HE : EF$. Perciò, dividendo [V, 17], $CD : BD = HF : FE$.



Sia $HF : FE = FK : KE$. Perciò anche $HK : KF = FK : KE$; infatti uno degli antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti a quella dei conseguenti [V, 12]. Ma $FK : KE = CD : DB$. Perciò anche $HK : KF = CD : DB$. Ma CD^2, DB^2 sono commensurabili [prop. 36]; quindi anche HK^2, KF^2 lo sono [VI, 20 coroll.; prop. 11]. Ma $HK^2 : KF^2 = HK : KE$, perchè le tre rette HK, KF, KE sono proporzionali [V, def. 9]. Allora HK, KE sono commensurabili in lunghezza [prop. 11]. Perciò anche HE, EK lo sono [prop. 15]. E poichè $a^2 = EH \times BD$, ed a^2 è razionale, anche $EH \times BD$ è razionale. Ed è applicato alla razionale BD; così EH è razionale, e commensurabile in lunghezza con la BD [prop. 20]. Perciò anche EK, che le è commensurabile, è razionale e commensurabile in lunghezza con la BD [prop. 12].

Ora, poichè $CD : DB = FK : KE$, e CD, DB sono commensurabili solo in potenza, anche FK, KE sono commensurabili solo in potenza [prop. 11]. Ma KE è razionale; allora anche FK lo è. Così FK, KE sono razionali, commensurabili solo in potenza.

Dunque EF è apotome [prop. 73].

Ora, CD^2 supera DB^2 del quadrato di una retta commensurabile od incommensurabile con CD.

Se CD^2 supera DB^2 del quadrato di una retta commensurabile con CD, anche FK^2 supera KE^2 del quadrato di una retta commensurabile con FK [prop. 14]. E se CD è commensurabile in lunghezza con la retta data razionale, anche FK le è commensurabile [propp. 11, 12]; se BD, anche KE [prop. 12]; se nessuna delle due CD, DB, neppure alcuna delle FK, KE.

Se poi CD^2 supera DB^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CD, anche FK^2 supera KE^2 del quadrato di una retta incommensurabile con CD, anche FK^2 supera KE^2 del quadrato di una retta incommensurabile con FK [prop. 14]. E se CD è commensurabile in lunghezza con la data razionale, anche FK lo è; se BD, anche KE; se nessuna delle due, neppure alcuna delle FK, KE.

Dunque FE è apotome, le sue parti FK, KE sono commensurabili alle parti CD, DB della binomiale, e sono nello stesso rapporto; ed inoltre è dello stesso ordine di BC; c. d. d.

Se μ è un segmento razionale, e $\alpha + \sqrt{\beta}$ è una binomiale, allora, posto

$$\mu^2 = (\beta + \sqrt{\beta})x,$$

x sarà un'apotome $= \gamma - \sqrt{\delta}$, e precisamente del medesimo ordine della binomiale $\alpha + \sqrt{\delta}$. Inoltre

$$\alpha : \gamma = \sqrt{\beta} : \sqrt{\delta} = m : n.$$

Dimostrazione.

Si ponga

$$\eta^2 = y\sqrt{\beta}.$$

Si ricava allora

$$(\alpha + \sqrt{\beta})x = y\sqrt{\beta},$$

ossia

$$\alpha + \sqrt{\beta} : \sqrt{\beta} = y : x. \qquad \text{(VI, 16)}$$

Quindi $y > x$ (V, 16; V, 14).

Dall'ultima proposizione si trae

$$\alpha : \sqrt{\beta} = (y - x) : x. \qquad \text{(V, 17)}$$

Poniamo

$$(y - x) : x = z : (z - x) = \alpha : \sqrt{\beta}$$

si avrà allora

$$(y - x + z) : z = z : (z - x) \qquad \text{(V, 12)}$$

e quindi

$$(y - x + z) : z = \alpha : \sqrt{\beta}. \qquad \text{(V, 11)}$$

Siccome $\alpha + \sqrt{\beta}$ è una binomiale, segue che $\alpha^2 : \beta = m : l$ (X, 36), quindi (VI, 22, X, 11)

$$(y - x + z)^2 : z^2 = m : l.$$

Da $(y - x + z) : z = z : (z - x)$ si deduce (V, Def. 9)

$$(y - x + z)^2 : z^2 = (y - x + z) : (z - x).$$

Quindi

$$(y - x + z) : (z - x) = m : l.$$

Perciò anche y e $(z - x)$sono commensurabili in 1ª potenza (X, 15).

Siccome si è posto $\eta^2 = y\sqrt{\beta}$, e η^2 è razionale, segue che y è razionale, commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza (X, 20). *Quindi anche* $(z - x)$ *è razionale commensurabile con* $\sqrt{\beta}$ *in 1ª potenza.*

Siccome si è posto $\alpha : \sqrt{\beta} = z : (z - x)$, e siccome α, $\sqrt{\beta}$ sono commensurabili solo in 2ª potenza, segue che z è razionale, commensurabile con $(z - x)$ solo in 2ª potenza. Si conclude che

$$x = z - (z - x) \text{ è un' apotome (X, 73).}$$

Osserviamo inoltre che dalla proporzione precedente $\alpha : \sqrt{\beta} = z : (z - x)$ *segue che* z *è commensurabile con* α *in 1ª potenza, perchè* $\sqrt{\beta}$ $(z - x)$*sono commensurabili tra loro in 1ª potenza.*

Il segmento $x = z - (z - x)$ risulta dunque un' apotome, i cui termini sono rispettivamente commensurabili in 1ª potenza coi termini α, $\sqrt{\beta}$ della binomiale, e sono inoltre ad essi proporzionali.

Segue perciò:

1) Secondo che α è commensurabile o no in 1ª potenza con un segmento razionale dato ε, anche z sarà commensurabile o no in 1ª potenza con ε (X, 11, 12).

2) Lo stesso vale per $\sqrt{\beta}$ e $(z - x)$

3) Secondo che si ha $\sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha = m : p$,

$$\text{o } \sqrt{\alpha^2 - \beta} : \alpha \mp m : p,$$

si avrà anche

$$\sqrt{z^2 - (z - x)^2} : z = m : p,$$

$$\text{o } \sqrt{z^2 - (z - x)^2} : z \mp m : p \qquad \text{(X, 14)}$$

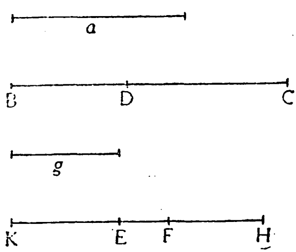
Si conclude (cfr. X, Def. II e X, Def. III) che $x = z - (z - x)$ è effettivamente un'apotome del medesimo ordine della binomiale $\alpha + \sqrt{\beta}$; c. d. d,

113.

Il quadrato di una retta razionale, applicato ad una apotome, ha per larghezza una binomiale, le cui parti sono commensurabili con quelle dell'apotome, e sono nello stesso rapporto; ed inoltre la binomiale così formata è dello stesso ordine dell'apotome.

Sia a razionale, BD apotome, e sia $BD \times KH = a^2$, per modo che il quadrato della razionale a applicato alla apotome BD, abbia per larghezza KH.

Dico che KH è binomiale, le cui parti sono commen-



surabili con la BD, e sono nello stesso rapporto; ed inoltre KH è dello stesso ordine di BD.

Infatti, sia CD congruente alla BD. Allora BC, CD sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 73]. E sia $BC \times g = a^2$. Ma a^2 è razionale, allora anche $BC \times g$ lo è. Ed è applicato alla razionale BC. Perciò g è razionale, commensurabile in lunghezza con la BC [prop. 20].

Ora, poichè $BC \times g = BD \times KH$, sarà [VI, 16] $CB : BD = KH : g$. Ma $BC > BD$. Allora anche $KH > g$ [V, 16; V, 14]. Sia data $KE = g$; allora KE, BC sono commensurabili in lunghezza. E poichè $CB : BD = HK : KE$, convertendo [V, 19, coroll.] $BC : CD = KH : HE$. Sia $KH : HE = HF : FE$.

Allora anche $KF : FH = KH : HE = BC : CD$ [V, 19].

Ma BC, CD sono commensurabili solo in potenza. Allora anche KF, FH sono commensurabili solo in potenza [prop. 11]. E poichè $KH : HE = KF : FH$, $KH : HE = HF : FE$, sarà anche $KF : FH = HF : FE$. Perciò anche il primo sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo [V, def. 9]; così anche $KF : FE = KF^2 : FH^2$. Ma KF^2, FH^2 sono commensurabili; infatti KF, FH sono commensurabili in potenza. Allora anche KF, FE sono commensurabili in lunghezza [prop. 11]. Perciò anche KF, KE sono commensurabili in lunghezza [prop. 15]. Ma KE è razionale e commensurabile in lunghezza con la BC [prop. 12]. E poichè $BC : CD = KF : FH$, permutando [V, 16] $BC : KF = DC : FH$.

Ma BC, KF sono commensurabili. Allora anche FH,

DC sono commensurabili in lunghezza [prop. 11]. Ma BC, CD sono razionali, commensurabili solo in potenza. Così anche KF, FH sono razionali, commensurabili solo in potenza. Così anche KF, FH sono razionali, commensurabili solo in potenza [prop. 13].

Dunque KH è binomiale [prop. 36]. Ora, se BC^2 supera CD^2 del quadrato di una retta commensurabile con BC, anche KF^2 supera FH^2 del quadrato di una retta commensurabile con KF [prop. 14]. E se BC è commensurabile in lunghezza con la data razionale, anche KF lo è [prop. 12]; se CD è commensurabile in lunghezza con la data razionale, anche FH lo è; se nessuna delle rette BC, CD, neppure alcuna delle rette KF, FH [prop. 13]. Se poi BC^2 supera CD^2 del quadrato di una retta incommensurabile con BC, anche KF^2 supera FH^2 del quadrato di una retta incommensurabile con KF [prop. 14]. E se BC è commensurabile in lunghezza con la data razionale, anche KF lo è; se CD, anche FH [prop. 12]; se nessuna delle due BC, CD, neppure alcuna delle KF, FH.

Dunque KH è binomiale, le cui parti KF, FH sono commensurabili con le parti BC, CD dell'apotome e sono nello stesso rapporto; ed inoltre KH è dello stesso ordine di BC; c. d. d.

Se η è un segmento razionale, e $\alpha - \sqrt{\beta}$ è un'apotome, allora, posto

$$\eta^2 = (\alpha - \sqrt{\beta})x,$$

x sarà una binomiale $= \gamma + \sqrt{\delta}$, del medesimo ordine dell'apotome $\alpha - \sqrt{\beta}$. E inoltre si avrà

$$\alpha : \gamma = \sqrt{\beta} : \sqrt{\delta} = m : n.$$

Dimostrazione.

Si ponga

$$\eta^2 = \alpha y.$$

Allora y sarà un segmento razionale, commensurabile con α in 1ª potenza. Siccome si ha

$$\alpha : (\alpha - \sqrt{\beta}) = x : y,$$

si deduce $x > y$ (V, 16, V, 14). Dall'ultima proporzione si trae $\alpha : \sqrt{\beta} = x : (x - y)$. Poniamo

$$\alpha : \sqrt{\beta} = x : (x - y) = z : (x - y - z).$$

Da questa proporzione si trae

$$(x - z) : z = x : (x - y),$$

quindi

$$(x - z) : z = \alpha : \sqrt{\beta}.$$

I segmenti $(x - z)$, z sono dunque commensurabili solo in 2ª potenza.

Da $x : (x - y) = (x - z) : z$ e $x : (x - y) = z : (x - y - z)$ si deduce

$$(x - z) : z = z : (x - y - z),$$

e quindi si può scrivere (V, Def. 9)

$$(x - z)^2 : z^2 = (x - z) : (x - y - z).$$

Siccome $x - z$, z sono commensurabili in 1ª potenza, segue che anche $(x - z)$ e $(x - y - z)$, e perciò anche $(x - z)$ e y, sono commensurabili tra loro in 1ª potenza. Ma y è razionale, commensurabile con α in 1ª potenza.

Quindi anche $(x - z)$ è razionale, commensurabile con α in 1ª potenza (X, 12).

Da $\alpha : \sqrt{\beta} = (x - z) : z$, si deduce allora che z è commensurabile con $\sqrt{\beta}$ in 1ª potenza (X, 11), quindi anche z è razionale.

I segmenti z, $(x - z)$ risultano dunque ambedue razionali, e, come si è già osservato, essi sono commensurabili tra loro in 2ª potenza. Perciò

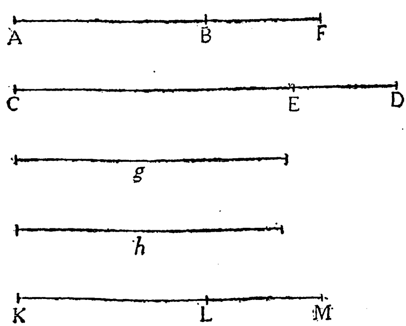
$$x = (x - z) + z \text{ è una binomiale.}$$

Siccome i termini z, $(x - z)$ di questa binomiale e i termini α, $\sqrt{\beta}$ della apotome sono ordinatamente proporzionali e commensurabili tra loro, si deduce come nella proposizione precedente, che la binomiale x è del medesimo ordine dell'apotome $\alpha + \sqrt{\beta}$, c. d. d.

114.

Se un'area è compresa da un'apotome e da una retta binomiale, le cui parti siano commensurabili a quelle dell'apotome e siano nello stesso rapporto, la retta il cui quadrato equivale a detta area è razionale.

L'area infatti $AB \times CD$ sia compresa dall'apotome AB e dalla retta binomiale CD, la cui parte maggiore sia CE, e le parti CE, ED della binomiale siano commen-



surabili alle parti AF, FB dell'apotome e stiano nello stesso rapporto; ed inoltre sia $g^2 = AB \times CD$.

Dico che g è razionale.

Sia data infatti la razionale h, ed alla retta CD si applichi un'area equivalente ad h^2, di larghezza KL. Così KL è apotome, le cui parti, KM, ML sono commensurabili con le parti CE, ED della binomiale e sono nello stesso rapporto [prop. 92].

Ma CE, ED sono commensurabili alle rette AF, FB, e sono nello stesso rapporto. Così $AF : FB = KM : ML$.

Perciò, permutando [V, 16] $AF : KM = BF : LM$. Allora anche $AB : KL = AF : KM$ [V, 19].

Ma AF, KM sono commensurabili [prop. 12]; così anche AB, KL lo sono [prop. 11].

Ma $AB : KL = CD \times AB : CD \times KL$. Allora anche $CD \times AB$ e $CD \times KL$ sono commensurabili [prop. 9].

Ma $CD \times KL = h^2$. Allora $CD \times AB$ ed h^2 sono commensurabili.

Ma $g^2 = CD \times AB$. Perciò g^2, h^2 sono commensurabili. Ma h^2 è razionale. Così anche g^2 è razionale. Perciò g è razionale: ed è il «lato» di $CD \times AB$.

Dunque, se un'area è compresa da un'apotome e da una binomiale, ecc.; c. d. d.

COROLLARIO

Di qui ci appare che è possibile che un'area razionale sia compresa da rette irrazionali; c. d. d.

Se i termini di un'apotome $(\alpha - \sqrt{\beta})$ e di una binomiale $(m\alpha + m\sqrt{\beta})$ sono rispettivamente proporzionali, allora la radice quadrata del loro prodotto è razionale:

$$\sqrt{(\alpha - \sqrt{\beta})(m\alpha + m\sqrt{\beta})} = \eta.$$

dove η è razionale.

Dimostrazione.

Sia ε un segmento razionale, arbitrariamente scelto, e si ponga

$$\varepsilon^2 = (m\alpha + m\sqrt{\beta})x.$$

Allora, per la prop. X, 112, x è un'apotome:

$$x = \gamma - \sqrt{\delta},$$

e inoltre per la medesima proposizione

$$\gamma : m\alpha = \sqrt{\delta} : m\sqrt{\beta} = p : l.$$

Da qui si trae

$$\alpha : \gamma = \sqrt{\beta} : \sqrt{\delta},$$

e quindi

$$\alpha : \gamma = (\alpha - \sqrt{\beta}) : (\gamma - \sqrt{\delta}). \qquad \text{(V, 19)}$$

Ma α, γ sono commensurabili tra loro in 1ª potenza, quindi anche $(\alpha - \sqrt{\beta})$, $(\gamma - \sqrt{\delta})$ sono commensurabili tra loro in 1ª potenza. Avendosi

$$(\alpha - \sqrt{\beta}) : (\gamma - \sqrt{\delta}) = (\alpha - \sqrt{\beta})(m\alpha + m\sqrt{\beta}) : (\gamma - \sqrt{\delta})(m\alpha + m\sqrt{\beta}),$$

ossia

$$(\alpha - \sqrt{\beta}) : (\gamma - \sqrt{\delta}) = \eta^2 : \varepsilon^2,$$

segue che anche η^2 e ε^2 sono commensurabili tra loro. Ma ε^2 è razionale, quindi anche η^2 è razionale. Perciò η è razionale, c. d. d.

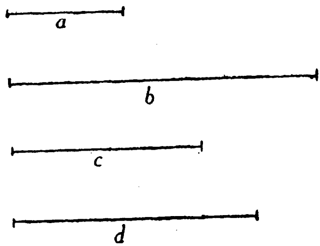
115.

Da una mediale sorgono infinite irrazionali, e nessuna è uguale ad una delle precedenti.

Sia a mediale.

Dico che da a sorgono infinite irrazionali, e nessuna è uguale ad una delle precedenti.

Sia data la razionale b, e sia $c^2 = b \times a$. Così c è irrazionale [def. 4]; infatti l'area compresa da una irrazionale ed una razionale è irrazionale [prop. 20]. E non



è uguale ad una delle precedenti; infatti il quadrato di nessuna delle precedenti, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza una mediale.

Di nuovo, sia $d^2 = b \times c$. Allora d^2 è irrazionale [prop. 20]. Perciò d è irrazionale [def. 4]. Nè è uguale ad alcuna delle precedenti; infatti il quadrato di nessuna delle precedenti, applicato ad una retta razionale, ha per larghezza c.

Ora in questo modo appare che si può seguitare all'infinito: dalla mediale sorgono infinite irrazionali, e nessuna è uguale ad alcuna delle precedenti; c. d. d.

In questa proposizione viene indicato un metodo che permette di costruire, a partire da una mediale, un numero qualsivoglia di nuove irrazionalità essenzialmente distinte tra di loro.

Sia $\sqrt[4]{\alpha}$ una mediale, e sia β un segmento razionale qualsiasi.

Allora

$$s = \sqrt{\sqrt[4]{\alpha} \cdot \beta}$$

è irrazionale, perchè dalla prop. X, 20 si può dedurre che il prodotto di un segmento razionale e di un segmento irrazionale, è necessariamente irrazionale.

Questa nuova irrazionalità s è essenzialmente distinta da tutte le irrazionalità considerate finora, perchè nessuna di queste gode della proprietà che il suo quadrato, diviso per un segmento razionale, dia una mediale.

Nello stesso modo, a partire da s, si costruisce l'irrazionalità

$$t = \sqrt{s\beta}, \text{ ecc.}$$

Osservazione. Questa proposizione, in cui lo sguardo del matematico si volge verso nuove irrazionalità, sembra, anche ad HEIBERG, sia aggiunta solo più tardi.

NOTA
SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI CUBICHE [1]

Alcuni storici delle Matematiche — E. BORTOLOTTI [2] e G. VACCA [3] — hanno attirato recentemente l'attenzione su ciò che il libro X degli Elementi è stato oggetto di profondi studi da parte dei matematici italiani del Rinascimento.

Il capitolo 14 del « Liber Abaci » di LEONARDO PISANO costituisce, secondo il VACCA, una esposizione originale, sotto forma algebrica, del libro X. In particolare l'ultima sezione « De inventione radicuum binomiorum et recisorum » [4] contiene anzitutto la trasformazione che coi nostri simboli si scrive

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$$

cioè, col linguaggio di LEONARDO, la somma di un binomio

$$a+\sqrt{b}$$

e del suo reciso

$$a-\sqrt{b}$$

è uguale alla radice di un unico binomio.

LEONARDO procede più avanti allo studio delle radici cubiche e dei loro prodotti, assumendo a fondamento della trattazione lo sviluppo del cubo di un binomio che già si trova in DIOFANTO IV, 9, ma che probabilmente LEONARDO non conobbe.

---

(1) Nota di M. T. ZAPELLONI.

(2) *L'Algebra nella scuola matematica bolognese nel sec. XVI,* in Per. di Mat. (V, 3) 1922, e l' « *Algebra* », opera di RAFAEL BOMBELLI, in questa collezione, n. 7, Bologna, Zanichelli, 1929.

(3) *Sul commento di Leonardo Pisano al libro X di Euclide e sulla risoluzione delle equazioni cubiche.* « Bollettino dell'Unione Mat. It. » (Apr. 1930).

(4) Roma, 1857.

Ma egli si arresta dinannzi alla somma di due radicali cubici

$$\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3},$$

dei quali dice « aliter dici non possunt pulchrius ». E qui finisce senza osservare che il problema di sommare codesti due radicali avrebbe condotto ad una equazione cubica.

Tuttavia della risoluzione cubica LEONARDO si era già occupato, come egli stesso racconta nell'opuscolo Flos. Intorno al 1226, essendosi egli incontrato con Federico II, l'astrologo dell'imperatore, GIOVANNI PANORMITA, gli aveva proposto di risolvere l'equazione

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

LEONARDO tentò allora di esprimere la radice per mezzo di uno degli irrazionali euclidei classificati nel libro X; ma riuscì a dimostrare che una soluzione di tale natura è impossibile (1).

Dovette quindi contentarsi di una soluzione approssimata che calcolò con metodo a noi sconosciuto, a meno di $\frac{1}{60^6}$.

Seguendo il BONCOMPAGNI, non pare che i Matematici dei secoli XIV e XV siano proceduti oltre LEONARDO, ma nel secolo XVI il libro X dell'Euclide veniva profondamente meditato dai matematici, come si vede, per esempio, al I Libro dell'Algebra del BOMBELLI, nel quale in particolare viene posto il problema di trasformare un radicale cubico $\sqrt[3]{\sqrt{n} \pm m}$ in un binomio euclideo $\sqrt{v} \pm u$, problema che il BOMBELLI dimostra equivalere alla risoluzione di un'equazione cubica.

Di quì appunto il BORTOLOTTI è stato indotto a pensare che proprio attraverso questa via SCIPIONE DAL FERRO sia pervenuto per la prima volta a risolvere l'equazione cubica generale. E il VACCA spiega più semplicemente l'idea.

Si ponga

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = x;$$

---

(1) Scritti di LEONARDO PISANO, II, pag. 228 e segg.

elevando a cubo ed applicando le regole insegnate da LEONARDO si trova

$$x^3 = 3\sqrt{(a^2-b)x} + 2a$$

quindi l'equazione priva di 2° termine

$$x^3 = px + q$$

ha per soluzione

$$x = \sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-b},$$

dove si ponga

$$a = \frac{q}{2}, \quad b = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}:$$

che è la soluzione di SCIPIONE DAL FERRO.

Questa via sembra giustamente al VACCA più semplice e naturale di quella esposta dal TARTAGLIA e da lui comunicata al CARDANO che la pubblicò, com'è noto, nel 1545.

Per ulteriori notizie sulla risoluzione delle equazioni cubiche, cfr., oltre i lavori citati, l'art. di D. GIGLI nel III volume delle « Questioni ».

Questi pochi cenni bastino a richiamare l'attenzione del lettore sull'importanza che il libro X degli Elementi ha avuto nello sviluppo dell'Algebra moderna.

La sua influenza non si limita agli inizi di questo sviluppo, perchè anche gli studi di RUFFINI e di ABEL per dimostrare l'impossibilità della risoluzione per radicali dell'equazione di 5° grado prendono le mosse dalla classificazione degli irrazionali euclidei: in luogo di irrazionali formati con radicali di 2° grado sovrapposti, si tratta di radicali formati con la sovrapposizione di radicali di indice qualunque; ad ogni modo la forma tipica di questi irrazionali è una estensione della forma euclidea, e gioca, com'è noto, nella dimostrazione del teorema fondamentale di RUFFINI-ABEL. (Cfr. Introduzione).

INDICE

LIBRO X: