Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Algebra elementare [vol. II, ad uso dei Licei classici e del corso superiore degli Istituti tecnici]

Zanichelli, Bologna, 1932. (Edizioni successive varie)

EDIZIONE NAZIONALE OPERE DI
FEDERIGO ENRIQUES

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

ALGEBRA ELEMENTARE

VOLUME SECONDO

AD USO DEI LICEI CLASSICI

E DEL CORSO SUPERIORE DEGLI ISTITUTI TECNICI

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
1932 - X

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - V-1932-X

PREFAZIONE

Questo volume viene a completare il nostro trattato di Algebra Elementare per i Licei classici e gli Istituti tecnici; e ad esso seguirà, fra breve, il II Volume per i Licei scientifici.

Spieghiamo qui i criterii generali, che ispirano la scelta e l'ordinamento della materia ed anche la forma della nostra esposizione. In accordo colle norme didattiche ministeriali, noi abbiamo concepito e concepiamo che la trattazione scolastica dell'Algebra debba riuscire «essenzialmente semplice, cioè non infarcita di proposizioni, che, pur potendo essere utili, non sono necessarie per i risultati che si vogliono raggiungere»; e quindi che essa debba tendere nel modo più rapido allo scopo della posizione, della risoluzione, della discussione dei problemi. Così le considerazioni astratte e gli sviluppi algoritmici sono ridotti al minimo compatibile colla chiarezza e colla precisione, ed invece larga parte è data alle applicazioni, cioè ai problemi concreti che — caso per caso — servono ad illustrare sotto ogni aspetto i risultati teorici e le regole generali: in primo luogo ai problemi della Geometria, che anche nello sviluppo storico appaiono così connessi alla costruzione dell'Algebra, ed in misura più prudente a facili problemi di Fisica.

In relazione al diverso grado di maturità intellettuale degli alunni, abbiamo dato al I Volume, in confronto del II, un assetto più semplice, uno sviluppo più sobrio, una forma più familiare e discorsiva. Bandita sistematicamente ogni sottigliezza critica, abbiamo fatto scaturire spontaneamente il *concetto dei numeri relativi dalle più comuni applicazioni concrete, che conducono anche, nel modo più naturale, a lumeggiare le regole per le operazioni sopra di essi (Cap. I). Così nel Cap. II abbiamo presentato la notazione letterale come ovvia estensione dell'uso di esprimere con formule le regole di misura che s'incontrano nella Geometria pratica; e, chiarita accuratamente la formulazione letterale delle proprietà fondamentali delle operazioni, ne abbiamo dedotto come conseguenze immediate, e nella loro forma schematica più semplice, i procedimenti di trasformazione e semplificazione delle espressioni razionali (intere e fratte). Seguono, pur essi volutamente brevi, i Cap. III e IV sulle potenze, sui monomi e polinomi in generale e sulle relative operazioni.*

Questi quattro Capitoli possono benissimo essere svolti nei primi due trimestri di studio dell'Algebra: e l'ordinamento del libro, nei riguardi delle dipendenze logiche tra le varie sue parti, è stato studiato in modo che l'insegnante possa a questo punto passare senz'altro al Cap. VI sulle equazioni di primo grado. Lo studio del Cap. V sui polinomi ordinati secondo le potenze di una o più indeterminate, il quale, per la natura stessa dell'argomento, è più astratto e più lungo dei precedenti, può essere rimandato all'anno successivo; e noi riteniamo che un tale ordine didattico presenti, sotto varî riguardi, non trascurabili vantaggi. Anzitutto conviene far passare al più presto gli alunni dalle considerazioni formali, per se stesse aride ed oscure, nei loro fini, per i principianti, alle applicazioni e ai problemi concreti. D'altra parte è soltanto nello studio delle equazioni che l'alunno si rende ragione della opportunità di attribuire, nelle espressioni algebriche intere, l'ufficio privilegiato di lettere ordinatrici a talune di quelle che vi compaiono in confronto delle altre (incognite in confronto dei dati); e alcuni sviluppi relativi ai polinomi ordinati (per es. la ricerca della regola di divisione) risultano più facili e chiari a chi già possegga, almeno fino ad un certo punto, la nozione e il maneggio delle equazioni di primo grado. Infine la teoria dei polinomi ordinati (cui, a dir vero, *si suol dare per tradizione uno sviluppo forse più ampio di quanto sia strettamente richiesto dall'insegnamento medio) trova qualche applicazione effettiva soltanto nello studio di argomenti (equazioni di secondo grado o di grado superiore e riconducibili al secondo), che hanno il loro posto nei programmi dei Licei e del Corso superiore degli Istituti tecnici. Circa il contenuto di questo nostro Cap. V rileviamo, come particolarmente espressivo tanto dal punto di vista didattico quanto da quello concettuale, il sistematico raffronto fra le operazioni su polinomi ordinati in una indeterminata e le analoghe operazioni su numeri interi assoluti, nella consueta notazione decimale.*

Particolare cura è stata posta (Cap. VI) nel chiarire il concetto di « equazione » in contrapposto a quello di « identità »: e alle regole di risoluzione delle equazioni di primo grado abbiamo guidato l'alunno per via induttiva, traverso una serie diligentemente scelta e ordinata di problemi, ciascuno dei quali, trattato prima su dati numerici, poi in generale, è atto a mettere in luce l'uno o l'altro dei varî tipi di limitazioni, che per le soluzioni e per i dati possono essere imposte dall' enunciato. Abbiamo in particolare insistito più del consueto sulla impostazione e sulla discussione dei problemi di moto uniforme, che meglio degli altri si prestano a suscitare la curiosità e l'interesse degli alunni e, d'altra parte, costituiscono un'ottima preparazione a concetti e considerazioni fondamentali per la Fisica.

Tenendo conto che nelle prime classi dei Licei e dei Corsi superiori dell' Istituto Tecnico si trovano per lo più riuniti alunni di varia provenienza e di preparazione non uniforme, abbiamo ritenuto di dover premettere a questo II Volume un Capitolo introduttivo di « Richiami e complementi », in cui, dopo un rapidissimo riassunto delle definizioni e delle regole del Calcolo letterale, si riprendono con cura particolare i concetti di equazione e di sistema, le nozioni di equazioni o sistemi equivalenti o conseguenti, i principî generali di *eliminazione; e dalle note proprietà delle disuguaglianze numeriche si deducono, in quella misura prudente che conviene alle Scuole, cui il libro è destinato, gli analoghi principî generali di risoluzione e discussione delle disuguaglianze in una indeterminata. Il Capitolo si chiude con la trattazione dei sistemi di primo grado, che costituiscono un argomento nuovo per gli alunni provenienti dai Ginnasi.*

I Cap. II-V, che per il contenuto e la mole costituiscono la parte preponderante e caratteristica del volume, sono dedicati alla teoria delle equazioni e dei problemi di secondo grado, argomento essenziale e tipico della Matematica elementare, che abbiamo presentato come un tutto a sè, lumeggiandone i due aspetti algebrico e geometrico, ma riducendo allo stretto necessario le premesse aritmetiche ed algoritmiche, in cui gli alunni sogliono incontrare le maggiori difficoltà. Nel Cap. II, fatta risultare dal problema della media geometrica la necessità dell'ampliamento del campo dei numeri razionali, diamo, in forma che ci lusinghiamo sarà accolta dagli Insegnanti con favore, i principî dell'Aritmetica dei numeri reali e la applicazione alla determinazione delle radici quadrate. Studiatamente breve è il Cap. III sul calcolo dei radicali quadratici, mentre è ampio e dettagliato il Cap. IV sulle equazioni e i problemi di secondo grado. Vien qui dato il primo avviamento alla discussione dei problemi, con speciale riguardo a quelli di applicazione dell'Algebra alla Geometria; e seguono i cenni sulle equazioni e i sistemi di grado superiore, riconducibili ad equazioni di secondo grado, illustrati ciascuno con la corrispondente interpretazione geometrica. A conclusione e complemento di questa parte vengono stabiliti (Cap. V) nella forma più semplice possibile il concetto di funzione e la rispettiva rappresentazione per mezzo del diagramma cartesiano, con riguardo pressochè esclusivo alle funzioni di primo e secondo grado; e, dopo un cenno delle più semplici applicazioni dei diagrammi rettilinei e parabolici, si illustra con estrema sobrietà l'uso di questi ultimi nella discussione dei problemi di secondo grado. È bensì vero che *i programmi dei Licei classici non comprendono esplicitamente i concetti di funzione e del relativo diagramma, ma essi sono assolutameate imposti dalle necessità del programma di Fisica, ed anche per se stessi costituiscono un elemento di cultura, che, per importanza, non cede di fronte a nessuno degli argomenti tradizionali dei programmi dell' insegnamento della Matematica nelle Scuole classiche.*

I Cap. VI e VII sono dedicati alle radici d' indice qualsiasi, al calcolo dei rispettivi radicali, alle potenze ad esponente reale dei numeri positivi, l' VIII all' equazione esponenziale e ai logaritmi. Della esistenza ed unicità delle radici aritmetiche, della potenza ad esponente irrazionale qualsiasi di un numero positivo, del logaritmo è data, caso per caso, una giustificazione induttiva o geometrica, mentre la dimostrazione aritmetica rigorosa è aggiunta in carattere più piccolo, per richiamare l' attenzione degli Insegnanti sulla opportunità di subordinare lo svolgimento di tali considerazioni critiche e inevitabilmente sottili al vario grado di preparazione della scolaresca. È invece dato un certo sviluppo ai calcoli logaritmici, illustrati con numerosi esempi, in cui è fatto uso sistematico della Tavola di logaritmi a quattro decimali, di cui è corredato il volume. Esso si chiude con due Capitoli brevissimi (IX e X) sui cenni richiesti dai programmi intorno alle progressioni e ai principî della Matematica Finanziaria.

Come già si è accennato, anche in questo nostro nuovo testo abbiamo conservato l' uso di due corpi tipografici diversi: al solito è stampato in carattere ordinario ciò, che, nel suo insieme, corrisponde al programma minimo; mentre in carattere minuto si trovano tutti quei complementi (taluni anche essenziali), che l' Insegnante, ove la necessità lo imponga, può tralasciare in parte o anche del tutto, senza timore che risulti sconnesso l' assetto logico della trattazione.

Ciascuno dei due volumi è completato da una larga raccolta di esercizi, di tipo, per quanto è possibile, vario; si tratta in massima parte di problemi semplici, adatti alla media *levatura degli alunni, ordinati in relazione agli sviluppi del testo e secondo il loro grado di difficoltà, corredati, ogni qualvolta occorra, da un' opportuna traccia. Ma accanto a questi problemi di pura e semplice esercitazione si è fatto posto anche a qualche complemento logico (come la giustificazione rigorosa delle operazioni sui numeri irrazionali) e a taluni cenni di ulteriori sviluppi (come, in questo stesso volume, i calcoli numerici approssimati, la ricerca delle radici razionali delle equazioni algebriche a coefficienti razionali, le progressioni geometriche infinite e la determinazione delle frazioni generatrici dei decimali periodici, ecc.).*

Affidiamo il nostro lavoro agli Insegnanti, i quali, come dicemmo in altra occasione oramai lontana, debbono essere di un libro elementare piuttosto i collaboratori che gli interpreti; e dal loro senso pedagogico, dal loro amore alla Scuola attendiamo il giudizio e il consiglio. Fin d' ora ci è grato esprimere la nostra riconoscenza alla prof. Pierina Quintili del R. Istituto Tecnico « V. Gioberti » di Roma e al prof. Aldo Graffi del R. Liceo Scientifico « A. Righi » di Bologna, per le utili osservazioni, che hanno avuto la cortesia di comunicarci.

U. A. - F. E.

CAPITOLO I

Richiami e complementi

Prima di proseguire lo studio dell'Algebra oltre i limiti del programma svolto negli anni precedenti, gioverà riassumere quelle nozioni già acquisite, che occorre aver ben presenti per comprendere in modo preciso e sicuro gli ulteriori sviluppi della materia. Non intendiamo, naturalmente, rifare tutto il cammino; e ci limiteremo a richiamare per sommi capi i concetti e i risultati essenziali, tralasciando generalmente le dimostrazioni e le dilucidazioni particolari, che ogni alunno potrà rivedere nel testo usato precedentemente [1]. Solo, in vista di future applicazioni, aggiungeremo qua e là qualche osservazione complementare (soprattutto sulle disuguaglianze e sui principî generali relativi alle equazioni); e da ultimo daremo una trattazione alquanto diffusa dei sistemi di equazioni di 1° grado, che costituiscono un argomento nuovo per gli alunni provenienti dai Ginnasi.

Numeri relativi e notazione letterale

1. L'Algebra, in confronto dell'Aritmetica, presenta, come si è rilevato fin dalle prime considerazioni su di essa, due caratteristiche essenziali:

---

[1] Cfr., ad es., U. AMALDI - F. ENRIQUES, *Algebra Elementare*, vol. I, ad uso dei Ginnasi superiori e del corso inferiore degli Istituti Tecnici, Bologna, Zanichelli.

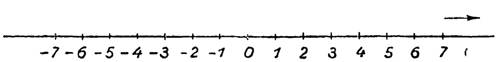
I Capitoli di questo libro si citeranno nel seguito con I_1, II_1, III_1, IV_1, ecc.

1) In luogo dei numeri interi e fratti *assoluti* dell'Aritmetica, si considerano generalmente nell'Algebra i numeri interi e fratti *relativi*, cioè contrassegnati col $+$ o col $-$: numeri *positivi* o *negativi*, o, se si vuole, « numeri da aggiungere » o « da togliere » (I_1, nn. 1-2).

2) Per studiare le proprietà dei numeri relativi, e delle rispettive operazioni, *in generale*, cioè indipendentemente dai valori speciali, che ad essi, caso per caso, si intendono attribuiti, codesti numeri si denotano (ciascuno col suo segno) per mezzo di lettere, e i risultati delle operazioni da eseguirsi su di essi si indicano con formule od *espressioni letterali* od *algebriche* (II_1, nn. 1-2).

Ad ogni numero (intero o fratto), diverso da zero, corrispondono due numeri relativi, che si ottengono dal dato, premettendogli il segno $+$ oppure il segno $-$; e, viceversa, ad ogni numero relativo corrisponde un numero assoluto, che da esso si ottiene sopprimendo il segno e che si chiama il suo *valore assoluto*. Il valore assoluto di un numero relativo a si denoterà con $|a|$.

È noto come spesso torni utile la rappresentazione geometrica dei numeri relativi per mezzo dei punti di una *retta graduata*. Scelti ad arbitrio su di una retta un *verso* o *senso positivo* e un punto O (*origine*) e adottata una unità di misura, si rappresenta ogni numero relativo a per mezzo del punto A, che ha da O la distanza $|a|$ e cade, rispetto ad O, dalla parte positiva o negativa, secondo il segno di a.



Ricordiamo che, davanti ai numeri positivi aritmeticamente dati, il segno $+$, per semplicità, non si scrive, cioè « si sottintende »; così, ad es., invece di $+3$, $+\frac{2}{5}$,... si scrive 3, $\frac{2}{5}$,....

2. Ai numeri relativi si estendono le operazioni fondamentali dell'Aritmetica; e, data la loro importanza, ne richiamiamo qui le regole, per quanto a questo punto esse debbano oramai essere possedute nel modo più preciso e sicuro:

1) *La somma di due numeri relativi di ugual segno è quel numero, che ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi e lo stesso loro segno. La somma di due numeri relativi di segno contrario è il numero, che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti dei due addendi e il segno di quello di essi, che ha il valore assoluto maggiore.*

2) *La differenza di due numeri relativi è uguale alla somma del minuendo e dell'opposto del sottraendo.*

3) *Il prodotto di due numeri relativi è quel numero, che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due fattori ed è positivo o negativo, secondo che i due fattori hanno segni uguali o contrari.*

4) *Il quoziente di due numeri relativi è quel numero, che ha come valore assoluto il quoziente del valore assoluto del dividendo per quello del divisore, ed è positivo o negativo, secondo che dividendo e divisore hanno segni uguali o contrari.*

Poichè per sottrarre un numero relativo da un altro basta sommargli l'opposto, la sottrazione e l'addizione, nel campo dei numeri relativi, costituiscono, in sostanza, una medesima operazione, che si chiama *addizione algebrica*.

Va poi rilevato che, anche per i numeri relativi come già per quelli assoluti, la divisione per 0 è un'operazione priva di senso, cosicchè nel calcolo letterale, mentre una lettera può di solito rappresentare un numero relativo qualsiasi (e quindi anche nullo), *si deve sempre escludere per una lettera il valore* 0, *quando essa si voglia usare come divisore*. E così, ogni qual volta si sia condotti ad adottare come divisore una espressione letterale qualsiasi, bisogna escludere per le lettere, che vi compaiono, tutti quei sistemi di valori, per cui l'espressione si annulla.

Con questa avvertenza si estendono senz'altro alle frazioni aventi termini letterali o *frazioni algebriche* tutte le regole di calcolo, che nell'Aritmetica valgono per le frazioni ordinarie.

3. L'addizione e la moltiplicazione dei numeri relativi godono delle stesse *proprietà formali*, che alle stesse operazioni spettano nel campo dei numeri assoluti. Per l'addizione valgono:

1) la *proprietà commutativa*

$$a + b = b + a;$$

2) la *proprietà associativa*

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

3) la *proprietà additiva dello zero*

$$a + 0 = a.$$

Per la moltiplicazione:

1) la *proprietà commutativa*

$$ab = ba;$$

2) la *proprietà associativa*

$$(ab)c = a(bc);$$

3) la *proprietà distributiva rispetto alla somma*

$$(a + b)c = ac + bc;$$

4) la *proprietà moltiplicativa dello zero*

$$a \cdot 0 = 0.$$

Vale, inoltre, la *legge di annullamento del prodotto*: affinchè un prodotto sia nullo è necessario e sufficiente che sia nullo uno, almeno, dei fattori.

Le varie uguaglianze, che abbiamo dianzi scritto per esprimere le proprietà formali della addizione e della moltiplicazione, sono altrettante *identità*, cioè sono uguaglianze, che si mantengono vere, comunque si scelgano i valori da attribuire alle singole lettere, che vi compaiono.

Da queste identità fondamentali discendono, direttamente o indirettamente, anche tutte quelle altre identità, che, insieme con esse, costituiscono le *regole del calcolo letterale*.

4. Fra queste regole sono particolarmente importanti quelle relative al *calcolo delle potenze*.

Com'è ben noto, dato un numero relativo a (*base*) e un numero intero positivo (od assoluto) n (*esponente*), si dice potenza n^{ma} di a il prodotto di n fattori uguali ad a e si designa con a^n, cioè si pone

$$a^n = \underset{1}{a}\,\underset{2}{a}\,\underset{3}{a}\ldots\underset{n}{a};$$

cosicchè *ogni potenza ad esponente* pari *di un qualsiasi numero relativo* (sia esso positivo o negativo) *risulta* positiva; *mentre ogni potenza ad esponente* dispari *è* positiva *o* negativa, *secondo che tale è la base.*

Orbene, le regole or ora accennate sono espresse dalle identità, la cui dimostrazione è pressochè immediata:

(I) $$(ab)^n = a^n b^n;$$

(II) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

(III) $$a^m a^n = a^{m+n};$$

(IV) $$(a^m)^n = a^{mn};$$

(V) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

In queste identità a e b denotano due numeri relativi quali si vogliono, mentre m ed n indicano due interi positivi (od assoluti) pur essi arbitrarî; solo nell'ultima di esse deve essere $m > n$.

Ma fin dagli elementi del calcolo letterale si è visto che è possibile dare un senso alla (V) anche per $m \leq n$ (cioè per m minore od uguale ad n), purchè si estenda opportunamente il concetto di potenza.

Precisamente, si dà un senso alla (V) per $m = n$, facendo la convenzione di attribuire al segno a^0 (cui la primitiva definizione di potenza non dà alcun significato) il valore 1, cioè ponendo, qualunque sia il numero relativo a (diverso da zero),

$$a^0 = 1.$$

Similmente alla (V) si dà un senso anche per $m < n$, convenendo che il simbolo a^{-p}, quando p sia un qualsiasi numero intero positivo (ed a un qualsiasi numero relativo diverso da zero), significhi il reciproco di a^p, cioè ponendo

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Introdotte così, accanto alle potenze ad esponente intero positivo, anche quelle ad esponente nullo o intero negativo, si riconosce agevolmente che per tutte queste potenze si mantengono valide, senza alcuna eccezione, le identità (I)-(V).

5. Prima di procedere oltre in questo rapido riassunto aggiungiamo alcune ovvie *proprietà delle disuguaglianze fra numeri relativi*, che nel seguito dovremo, in varie occasioni, richiamare.

È ben noto che di due numeri relativi disuguali a e b il primo è maggiore o minore del secondo, secondo che la differenza $a - b$ risulta positiva o negativa; cioè si ha

$$a > b \quad \text{o} \quad a < b$$

secondo che è

$$a - b > 0 \quad \text{o} \quad a - b < 0.$$

Tenendo conto di questo criterio, si giustificano immediatamente le seguenti osservazioni:

A) Da $a > b$ *consegue* $-a < -b$.

Infatti se la differenza $a - b$ è positiva, la differenza $-a - (-b) = -a + b = b - a$, come sua opposta, risulta negativa.

Quando si applica la precedente proprietà si dice che « si cambia senso alla disuguaglianza ».

B) Da $a > b$ *consegue, qualunque sia il numero relativo* c,

$$a + c > b + c.$$

In parole: *Se ad ambo i membri di una disuguaglianza si aggiunge uno stesso numero relativo, si ottiene una disuguaglianza nello stesso senso.*

Infatti

$$a + c - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0.$$

C) Da $a > b$, $c > d$ *consegue*

$$a + c > b + d,$$

cioè: *Sommando membro a membro due disuguaglianze di ugual senso, si ottiene ancora una disuguaglianza nel medesimo senso.*

Infatti

$$a + c - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d) > 0.$$

Naturalmente il teorema vale anche se le disuguaglianze sono più di due.

D) Da $a > b$ *consegue* $ac > bc$ *se* c *è* positivo, $ac < bc$ *se* c *è* negativo.

Cioè: *Moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza nello stesso senso o nel senso opposto, secondo che codesto numero è positivo o negativo.*

Infatti, essendo $a - b > 0$, la differenza $ac - bc = (a - b)c$ è positiva o negativa secondo che tale è c.

E) Le proprietà sinora rilevate sono generali, cioè valgono per numeri indifferentemente positivi o negativi. Nel campo dei numeri positivi vale quest'altra: *Se* a, b, c, d *sono numeri tutti positivi, da* $a > b$, $c > d$ consegue $ac > bd$.

Cioè: *Moltiplicando membro a membro due* (o più) *disu-*

guaglianze di ugual senso fra numeri positivi, si ottiene ancora una disuguaglianza nel medesimo senso.

Infatti moltiplicando ambo i membri della disuguaglianza $a > b$ per $c > 0$ e quelli della $c > d$ per $b > 0$, si ottiene

$$ac > bc, \quad bc > bd,$$

onde risulta appunto

$$ac > bd.$$

Si tenga presente che la validità del precedente teorema dipende in modo essenziale dalla condizione che i numeri, di cui si tratta, siano tutti positivi. Se a, b, c, d non sono tutti positivi, può verificarsi, pur essendo $a > b$, $c > d$, uno qualsiasi dei tre casi

$$ac > bd, \quad ac = bd, \quad ac < bd.$$

Ad es., si ha:

$$-2 > -3, \qquad 5 > 4 \qquad \text{e} \quad (-2)\,5 > (-3)\,4;$$
$$-2 > -3, \qquad 6 > 4 \qquad \text{e} \quad (-2)\,6 = (-3)\,4;$$
$$-2 > -3, \quad -4 > -5 \quad \text{e} \quad (-2)(-4) < (-3)(-5).$$

F) Dal precedente teorema discende il seguente corollario, particolarmente importante: *Se a e b sono entrambi positivi, secondo che è*

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b,$$

si ha rispettivamente, per qualsiasi intero positivo n,

$$a^n > b^n \quad \text{o} \quad a^n = b^n \quad \text{o} \quad a^n < b^n;$$

e, viceversa, secondo che è

$$a^n > b^n \quad \text{o} \quad a^n = b^n \quad \text{o} \quad a^n < b^n,$$

si ha rispettivamente

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b.$$

La prima parte è una immediata conseguenza della proprietà *E*) e della analoga proprietà delle uguaglianze; la seconda parte si dimostra subito per esclusione. Se ad esempio, si suppone $a^n > b^n$, non può essere nè $a = b$, nè $a < b$, perchè, in forza della prima parte, ne risulterebbe rispettivamente $a^n = b^n$ o $a^n < b^n$.

G) Se m ed n sono due interi positivi ed a è un qualsiasi numero positivo diverso da 1, da $m > n$ consegue $a^m > a^n$ o $a^m < a^n$, secondo che è $a > 1$ o $a < 1$.

Infatti, essendo $m - n > 0$, da $a > 1$ consegue, per il teor. prec., $a^{m-n} > 1$ e quindi, moltiplicando ambo i numeri per $a^n > 0$, $a^m > a^n$. Similmente nel caso $a < 1$.

H) Se a, b hanno lo stesso segno, da $a > b$ consegue

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Infatti si ha

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab},$$

e questa frazione algebrica, in quanto il numeratore $b - a$ è per ipotesi negativo, mentre il denominatore, come prodotto di due fattori di uguai segno, è positivo, è certamente negativa.

Monomî, polinomî, frazioni algebriche

6. Una espressione letterale si dice *intera*, rispetto alle lettere che vi compaiono, se le operazioni, che vi sono indicate sono soltanto addizioni algebriche e moltiplicazioni. Si dice, invece, *fratta* se fra le operazioni, che vi sono indicate, vi è anche qualche divisione, il cui divisore sia letterale.

Fra le espressioni intere si è chiamato *monomio* ogni prodotto di fattori quali si vogliano (cioè numerici o letterali, uguali o disuguali). Ogni monomio si può scrivere (sotto *forma ridotta*) come prodotto di un fattore numerico o *coefficiente* (che può ridursi ad 1 o a -1) e di un certo numero di potenze ad esponente intero positivo di lettere diverse (*parte letterale*). Per es. nel monomio $-3a^2bc^3$ il coefficiente è -3, la parte letterale è a^2bc^3.

Grado di un monomio *rispetto ad una sua lettera* è l'esponente (intero positivo), con cui questa lettera vi compare (quando esso sia scritto in forma ridotta); *grado totale* o, semplicemente, *grado* del monomio è la somma dei suoi gradi rispetto alle varie lettere in esso contenute. Così il monomio or ora scritto è di grado 2 (o 2^0) rispetto ad a, di grado 1 (o 1^0) rispetto a b, di grado 3 (o 3^0) rispetto a c; ed è di grado totale $2+1+3=6$ (o 6^0).

Talvolta, in accordo con la definizione di potenza ad esponente nullo (n. 4), torna comodo dire che un monomio è di *grado nullo* (o *zero*) rispetto ad una qualsiasi lettera, che non vi sia contenuta.

Così pure si estende talvolta il nome di « monomio » ai prodotti, in cui compaiono come fattori anche potenze ad esponente negativo, come ad es.

$$3a^2b^{-3}c^{-1}d^4.$$

Tenendo conto del significato degli esponenti negativi (n. 4), si vede subito che i prodotti di questo genere non sono altro che frazioni algebriche (a termini monomiali). Così

$$3a^2b^{-3}c^{-1}d^4 = \frac{3a^2d^4}{b^3c}.$$

Perciò questi monomî in senso esteso si possono dire monomî *fratti*, chiamando *interi* quelli, che contengono soltanto potenze ad esponente positivo. Ma noi nel seguito, quando parleremo di « monomî », senza nulla avvertire in contrario, intenderemo di riferirci a questi ultimi.

7. Due monomî si dicono *simili*, se contengono le medesime lettere, ciascuna al medesimo esponente, cioè se hanno la medesima parte letterale (e, quindi, differiscono, al più, per il coefficiente): tali sono, ad es., $-3a^3b^2$ e $4a^3b^2$ oppure a^2b^3 e $-\frac{2}{3}a^2b^3$.

8. Le operazioni sui monomî, come, in genere, su ogni specie di espressioni letterali, non si possono che indicare. Ma per lo più le espressioni, cui si è così condotti, si possono *semplificare*.

Così, quando in una somma algebrica di monomî compaiono monomî simili, questi *si riducono*; cioè alla somma parziale di questi monomî, simili fra loro, si sostituisce il monomio simile ad essi, che ha come coefficiente la somma algebrica dei loro coefficienti. Così, ad es.,

$$a^2b^3 - 3a^3b^2 - \frac{2}{3}a^2b^3 + 4a^3b^2 = \frac{1}{3}a^2b^3 + a^3b^2.$$

Il prodotto di due (o più) monomî si scrive senz'altro, sotto forma ridotta, prendendo come coefficiente il prodotto dei coefficienti dei monomî fattori e come parte letterale il prodotto delle lettere, che in essi compaiono, elevate ciascuna alla somma degli esponenti, che essa ha nei singoli fattori. Per esempio:

$$\left(\frac{1}{2}a^3bc^2\right)\left(-\frac{3}{5}ab^2\right) = -\frac{3}{10}a^4b^3c^2.$$

Perciò il grado del monomio prodotto, rispetto ad ogni sua lettera, è uguale alla somma dei gradi dei diversi monomî fattori rispetto a quella lettera. Similmente il grado (totale) del prodotto è uguale alla somma dei gradi dei fattori.

9. Quando si vuol dividere un monomio per un altro, bisogna escludere il valore 0 per ciascuna delle lettere, che compaiono nel monomio divisore.

Il quoziente dei due monomî non è, in generale, un monomio, bensì una frazione algebrica. Affinchè si riduca ad un monomio o, come si suol dire, il primo monomio sia *divisibile* per il secondo, occorre e basta che il monomio dividendo contenga tutte le lettere del divisore, elevate ciascuna ad un esponente, che non sia minore di quello che essa ha nel divisore. E, sotto questa ipotesi, il monomio quoziente ha come coefficiente il quoziente dei coefficienti dei due monomî dati; e la sua parte letterale si ottiene da quella del monomio dividendo, sottraendovi dall'esponente di ciascuna sua lettera l'esponente, che essa ha nel divisore. Così, ad esempio,

$$\frac{-3a^4b^2c^3}{5a^2b} = -\frac{3}{5}a^2bc^3.$$

In ogni altro caso, purchè i due monomî dati abbiano qualche lettera comune, è facile scrivere un monomio, per cui essi risultino entrambi divisibili: basta prendere nei due monomî dati tutte (e sole) le lettere comuni, elevate ciascuna al minore dei due esponenti, con cui essa compare nei due monomî. Il coefficiente si può prendere a piacere: se i coefficienti dei due monomî sono entrambi interi, converrà assumerlo uguale al loro massimo comun divisore. Un tale monomio (determinato a meno del coefficiente) è quello di *massimo* grado rispetto a ciascuna sua lettera, per il quale i due monomî dati risultino entrambi divisibili, e perciò si chiama il loro *massimo comun divisore* (M. C. D.). Per es. il M. C. D. di $4a^5b^2c^3d$ e $-3a^3b^2c^7e^3$ è $a^3b^2c^3$ (od ogni altro monomio simile a questo).

La frazione algebrica, che ha per termini due dati monomî, si semplifica, dividendo numeratore e denominatore per il loro M. C. D. Così

$$\frac{4a^5b^2c^3d}{-3a^3b^2c^7e^3}=\frac{4a^2d}{-3c^4e^3}.$$

10. Per sommare più frazioni algebriche, i cui termini siano tutti monomî, bisogna ridurle allo stesso denominatore, e come tale si può prendere il prodotto dei loro denominatori. Ma si rende più semplice il risultato, prendendo come denominatore comune il *minimo comune multiplo* (m. c. m.) dei denominatori delle date frazioni, cioè quel monomio (determinato a meno del coefficiente), che sia divisibile per tutti codesti denominatori e risulti di grado *minimo* rispetto a ciascuna sua lettera. Esso si ottiene prendendo come sua parte letterale il prodotto di tutte le lettere comuni e non comuni ai varî denominatori, elevate ciascuna al maggiore degli esponenti, con cui essa vi compare. Il coefficiente si potrà prendere ad arbitrio; e se i coefficienti dei monomî dati sono interi, converrà assumerlo uguale al minimo comune multiplo di codesti coefficienti. Così, il m. c. m. di

$3a^4bc^2$ e $2ab^3$ è $6a^4b^3c^2$; e si ha, ad es.

$$\frac{1}{3a^4bc^2} - \frac{c}{2ab^3} = \frac{2b^2 - 3a^3c^2}{6a^4b^3c^2}.$$

11. È noto che si chiama *polinomio* ogni somma di due o più monomî, non tutti simili fra loro (*termini*). I polinomî si scrivono di regola sotto forma ridotta; cioè prima se ne scrivono in forma ridotta tutti i termini e poi si riducono gli eventuali termini simili. Se dopo ciò il polinomio comprende due o tre o quattro termini ecc., esso si chiama, rispettivamente, *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, ecc.

Di un polinomio, scritto in forma ridotta, si dice « *grado rispetto ad una delle sue lettere* », il massimo dei gradi dei suoi termini rispetto a codesta lettera. E, analogamente, si dice « *grado totale* » o, semplicemente, « *grado* » del polinomio il massimo dei gradi totali dei suoi termini. Così, ad es., il polinomio

$$a^2 - 4ab^3 + 3a^2b + 5b + 1$$

è di 2° grado rispetto ad a, di 3° rispetto a b; ed è di grado (totale) 4.

Un polinomio, di cui tutti i termini siano di ugual grado, si dice *omogeneo*; per es., il trinomio

$$a^2 + 3ab - 5b^2$$

è omogeneo (di 2° grado).

12. La somma di due (o più) polinomî è data dal polinomio, che ha per termini tutti i termini dei polinomî addendi; e il prodotto di due polinomî è dato dalla somma dei prodotti parziali, che si ottengono moltiplicando successivamente ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo. Nell'uno e nell'altro caso la sola semplificazione possibile è quella proveniente dalla riduzione degli eventuali termini simili.

Il quoziente di due polinomî non si può, in generale, che indicare con la frazione algebrica, che ha per termini i due polinomî (escludendo per le lettere, che compaiono nel divisore, quei valori, per cui esso si annulla). Ma in ogni caso conviene cercare se questa frazione algebrica si possa semplificare. Una facile semplificazione si ha, quando tutti i termini del numeratore e del denominatore risultino divisibili per uno stesso monomio (o polinomio).

Per le frazioni algebriche a termini polinomiali valgono le solite regole di calcolo. Così esse non cambiano valore, se si moltiplicano i due termini per uno stesso monomio o polinomio (purchè per le lettere che compaiono in questo moltiplicatore si escludano quei valori per cui esso si annulla). Profittando di questa proprietà, si possono ridurre due (o più) frazioni algebriche allo stesso denominatore, e, quindi, sommarle algebricamente.

13. Bisogna tener presenti le seguenti identità, che, come si è visto negli elementi, si ottengono, come immediata applicazione della regola per la moltiplicazione dei polinomi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ed è utile ricordare anche queste altre:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Polinomî ordinati
secondo le potenze di una indeterminata

14. Un polinomio di grado n in una indeterminata x, quando si scriva in forma ridotta e si ordinino i suoi termini secondo le potenze decrescenti della indeterminata, assume l'aspetto

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

dove a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n denotano $n + 1$ numeri dati o $n + 1$ espressioni letterali date, le quali non debbono contenere la x, ma rispetto alle lettere, che vi figurano, possono essere di natura qualsiasi (monomiali o polinomiali, intere o fratte).

Spesso torna utile denotare un tale polinomio con una lettera A o B, ecc.; e quando si vuol mettere in evidenza la indeterminata, da cui esso dipende, si scrive $A(x)$ o $B(x)$, ecc. Se poi in un polinomio $A(x)$ si vuole attribuire alla x un certo valore c, il valore corrispondentemente assunto da $A(x)$ si denota con $A(c)$.

15. Nella teoria dei polinomî in una indeterminata è fondamentale il cosiddetto *principio di identità* (per la dimostrazione cfr. V_1, nn. 4-6):

Se due polinomi in una stessa indeterminata x, assumono valori uguali per qualsiasi valore attribuito alla x, sono necessariamente dello stesso grado e hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei termini di ugual grado nella x.

In altre parole, se A e B sono due polinomî in una stessa indeterminata, l'identità $A = B$ implica necessariamente che A e B si riducano allo stesso polinomio.

16. Per ricordare come si dispongano e si eseguiscano le operazioni fondamentali sui polinomî ordinati in una stessa indeterminata, giova tener presente l'analogia fra la scrittura di codesti polinomî e quella dei numeri interi (assoluti) nel consueto sistema di numerazione decimale. Tutti ben sappiamo che, ad es., con la scrittura 7235 si indica la somma

$$7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Si può, dunque, dire che ogni numero intero viene così rappresentato come il valore, che un certo polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di una indeterminata x (a coefficienti interi compresi fra 0 e 9), assume, quando alla x si attribuisce il valore 10.

Orbene, le operazioni sui polinomî ordinati si dispongono e si eseguiscono in modo perfettamente analogo a quello, che tutti abbiamo imparato, fin dall'Aritmetica pratica, per le operazioni sui numeri interi.

Per il caso della addizione e della moltiplicazione basterà qui indicare due esempî:

1) Addizione:

$$\begin{array}{rrrrr}
3x^4 & -\,2x^3 & +\;\;x^2 & +\,5x & -\,6 \\
 & 4x^3 & -\,7x^2 & -\;\;x & +\,9 \\
\hline
3x^4 & +\,2x^3 & -\,6x^2 & +\,4x & +\,3
\end{array}$$

2) Moltiplicazione:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -\;5x^2 & & +\,3 \\
 & & & 3x^2 & -\;\;x & +\,2 \\
\hline
6x^5 & -\,15x^4 & & +\;9x^2 & & \\
 & -\;\;2x^4 & +\,5x^3 & & -\,3x & \\
 & & 4x^3 & -\,10x^2 & & +\,6 \\
\hline
6x^5 & -\,17x^4 & +\,9x^3 & -\;\;x^2 & -\,3x & +\,6
\end{array}$$

Conviene ricordare che nel prodotto di due polinomi si hanno sempre due termini, che non possono mai ridursi coi rimanenti, cioè il prodotto dei due termini di grado *massimo* dei due fattori e quello dei due termini di grado *minimo*. Perciò, in particolare, il grado del prodotto è sempre uguale alla somma dei gradi dei fattori.

Sono notevoli le seguenti identità, che si giustificano eseguendo le moltiplicazioni indicate nei primi membri:

$$(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1})(x-a)=x^n-a^n,$$

$$(x^{2n-1}-ax^{2n-2}+a^2x^{2n-3}-\ldots+a^{2n-2}x-a^{2n-1})(x+a)=x^{2n}-a^{2n},$$

$$(x^{2n}-ax^{2n-1}+a^2x^{2n-2}-\ldots-a^{2n-1}x+a^{2n})(x+a)=x^{2n+1}+a^{2n+1}.$$

17. È opportuno fermarsi un po' più a lungo sulla divisione.

La frazione algebrica $\frac{A}{B}$, che indica il quoziente di due polinomî in una stessa indeterminata x (con la esclusione di quei valori della x, per cui B si annulla), si può, in generale, semplificare.

Nel caso di due numeri interi assoluti a e b, è notorio che il quoziente può essere in casi speciali un numero intero (a divisibile per b). In ogni altro caso si ha

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad \text{o, in forma intera,} \quad a = bq + r,$$

dove q ed r sono certi due ben determinati numeri interi assoluti, di cui il secondo è minore di b (q « quoziente intero di a per b » ed r « resto della divisione di a per b »).

Analogamente, nel caso di due polinomî $A(x)$, $B(x)$, di cui il primo abbia un grado n maggiore od uguale al grado m di B, la frazione algebrica $\frac{A}{B}$ si può, in casi speciali, ridurre ad un certo nuovo polinomio Q di grado $n-m$ in x (quoziente di A per B); e in tal caso A si dice *divisibile* per B. In ogni altro caso si possono determinare due certi polinomî Q ed R, tali che il primo sia di grado $n-m$, il secondo di grado minore del grado m di B, e sussista la identità

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

o, in forma intera,

(1) $$A = BQ + R.$$

Il polinomio Q si chiama *quoziente intero* (e, talvolta, se non vi è pericolo di equivoco, semplicemente *quoziente*) di A per B, mentre R si chiama *resto*, e l'operazione, con cui si trovano i due polinomî Q ed R, si designa col nome di « divisione dei polinomî in una stessa indeterminata ».

Tenuto conto dell'uso, che se ne dovrà fare in avvenire, richiamiamo qui la corrispondente regola:

Dati due polinomî A, B in una stessa indeterminata, di cui il primo sia di grado non minore del secondo, si divide A per B con le operazioni seguenti:

1°) *Si ordinano entrambi i polinomî secondo le potenze decrescenti della indeterminata.*

2°) *Si divide il primo termine di A per il primo termine di B e si sottrae da A il prodotto di B per il « quoziente parziale » così ottenuto. La differenza è il « primo resto parziale ».*

3°) *Si divide il primo termine di questo resto parziale per il primo termine di B e si sottrae dal primo resto parziale il prodotto di B per questo « secondo quoziente parziale » e si ottiene il « secondo resto parziale ».*

4°) *Si ripete il procedimento fino a quando si perviene ad una divisione esatta oppure ad un resto parziale di grado minore del divisore.*

Nel primo caso A è divisibile per B ed il quoziente è la somma Q dei quozienti parziali successivamente ottenuti, talchè si ha

$$A = BQ.$$

Nel secondo caso i polinomî A e B sono legati alla somma Q dei quozienti parziali (quoziente intero) *e all'ultimo resto parziale R* (resto della divisione) *dalla identità*

$$A = BQ + R, \tag{1}$$

dove (giova ripeterlo) *il resto R è di grado minore del divisore B.*

Se, ad es., si prende

$$A = 6x^5 + x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1, \quad B = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$$

si trova

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & +\ x^4 & -\ 6x^3 & +\ 3x^2 & & -\ 1 & 3x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
\cline{7-7}
-\ 6x^5 & +\ 2x^4 & -\ 4x^3 & +\ 2x^2 & & & 2x^2 + x - 3 \\
\cline{1-6}
 & 3x^4 & -\ 10x^3 & +\ 5x^2 & & -\ 1 & \\
 & -\ 3x^4 & +\ x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & & \\
\cline{2-6}
 & & -\ 9x^3 & +\ 3x^2 & +\ x & -\ 1 & \\
 & & 9x^3 & -\ 3x^2 & +\ 6x & -\ 3 & \\
\cline{3-6}
 & & & & 7x & -\ 4 &
\end{array}
$$

cioè

$$Q = 2x^2 + x - 3, \quad R = 7x - 4.$$

Importa tener presente che la identità

$$A = BQ + R, \tag{1}$$

sotto la condizione che R sia di grado minore di B, *caratterizza* il quoziente Q e il resto R della divisione di A per B; cioè, *se, dati due polinomî A e B in una stessa indeterminata, di cui il secondo sia di grado minore del primo, si trovano in un modo qualsiasi* (senza ricorrere alla divisione di A per B) *due polinomî Q ed R, soddisfacenti alla identità* (1) *ed R è di grado minore di B, questi due polinomî Q ed R sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione di A per B.*

18. Una frazione algebrica $\frac{A}{B}$, i cui termini siano polinomî in una stessa indeterminata, si dice *propria* od *impropria*, secondo che il grado n del numeratore A è minore o no del grado m del denominatore B. Si è visto or ora che una frazione impropria $(n \geq m)$ si può sempre decomporre nella somma di un polinomio Q di grado $n - m$ e di una frazione propria $\frac{R}{Q}$.

Supponiamo ora che una frazione $\frac{A}{B}$ sia propria, cioè sia $n < m$. Una tale frazione non si può semplificare, o come si suol dire, è *irriducibile*, se i due polinomî A e B non hanno alcun divisore comune, il che si esprime dicendo che essi sono *primi* fra loro.

Se invece A e B hanno qualche divisore comune, fra i polinomî, che li dividono esattamente entrambi, ne esiste sempre uno (determinato a meno di un moltiplicatore numerico), che è di grado *massimo*. È il cosiddetto *massimo comun divisore* (M. C. D.) di A e B.

Esso si trova con un procedimento di successive divisioni, perfettamente analogo a quello, con cui in Aritmetica si calcola il massimo comun divisore di due numeri interi (assoluti); supposto, come si è detto, che il grado n di A sia minore del grado m di B, si divide B per A; se B non è divisibile per A ed è R_1 il resto, si divide A per R_1; se neppur questa volta la divisione risulta esatta ed è R_2 il nuovo resto, si divide R_1 per R_2, e così si continua. Il procedimento ha certamente termine, perchè R_1 è, al massimo, di grado $n-1$, R_2 è, al massimo, di grado $n-2$, e così via. Ma possono darsi due casi: o si finisce col trovare un resto di grado 0, cioè un numero, e allora i due polinomî sono primi fra loro (cioè privi di divisori comuni); oppure dopo un certo numero di divisioni si trova un ultimo resto di grado ≥ 1, il quale divide esattamente il resto precedente; e allora quell'ultimo resto è il M. C. D. di A e B.

Indicatolo con M, si avrà

$$A = A_1 M, \quad B = B_1 M,$$

dove A_1, B_1 sono due polinomî primi fra loro, e risulterà

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1 M}{B_1 M} = \frac{A_1}{B_1},$$

cioè la frazione algebrica sarà resa irriducibile.

19. In varie questioni, soprattutto relative alle equazioni, si è condotti a dividere un polinomio $A(x)$ per un binomio di 1° grado della forma $x - c$, dove c denota un numero dato. Se n è il grado di $A(x)$, il quoziente Q sarà di grado $n-1$, mentre il resto dovrà risultare di grado zero, cioè ridursi ad un numero r, che sarà nullo se A è divisibile per $x-c$. In ogni caso sussisterà l'identità caratteristica (n. 17)

$$A(x)=(x-c)Q(x)+r.$$

Attribuendo in essa ad x il valore c si deduce

$$A(c)=r,$$

cioè *il resto della divisione di un polinomio per $x-c$ è il valore, che il polinomio assume, quando ad x si attribuisce il valore c.*

E di qui risulta che *affinchè un polinomio in x sia divisibile per $x-c$, è necessario e sufficiente che esso assuma il valore zero, quando vi si attribuisce ad x il valore c.*

20. Il quoziente intero di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x-c$ si può trovare applicando la regola generale del n. 17; ma si può calcolare più rapidamente con la cosiddetta REGOLA DEL RUFFINI (V_1, n. 32):

Quando un polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di un'indeterminata x, si divide per un binomio $x-c$, il quoziente, ordinato anch'esso nel medesimo modo, ha lo stesso primo coefficiente del dividendo, e ciascuno degli altri suoi coefficienti si ottiene, moltiplicando quello immediatamente precedente per c e aggiungendo il coefficiente di ugual posto del dividendo. Il termine noto si ottiene quando si arriva ad utilizzare il penultimo coefficiente del dividendo; e, se si applica ancora una volta la stessa regola, si ottiene il resto della divisione.

Se, per es., si vuol dividere $2x^4-3x^3-15x-6$ per $x-3$, l'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
3 & 2 & -3 & 0 & -15 & -6 \\
 & & 6 & 9 & 27 & 36 \\
\hline
 & 2 & 3 & 9 & 12 & 20
\end{array}$$

Il quoziente è dunque $2x^3+3x^2+9x+12$ e il resto 20.
Eseguendo con la regola del Ruffini, le divisioni

$$\frac{x^n - a^n}{x-a}, \quad \frac{x^{2n} - a^{2n}}{x+a}, \quad \frac{x^{2n+1}+a^{2n+1}}{x+a}$$

si ritrovano le identità del n. 16.

21. Anche i polinomì in due indeterminate x, y si scrivono, di regola, ordinati in modo opportuno: dato un tale polinomio, si comincia col distinguere in esso le varie parti omogenee (n. 11), cioè si decompone il polinomio nella somma dei varî gruppi di termini di ugual grado (totale) rispetto ad x e y; questi polinomì parziali si considerano l'uno dopo l'altro nell'ordine, per es., decrescente dei loro gradi; e, infine, in ciascuno di essi i termini si ordinano secondo le potenze decrescenti di una delle indeterminate, per es. della x (onde, in quanto la somma degli esponenti delle due indeterminate è in ognuno di essi costante, i termini di ogni polinomio parziale risultano ordinati secondo le potenze crescenti della y). Così un polinomio di 2° grado in x, y si scriverà

$$ax^2+bxy+cy^2+hx+ky+l.$$

Equazioni

22. Già nel caso dei problemi di 1° grado si è visto che, quando si applica l'Algebra alla risoluzione di un problema, per es. ad una sola incognita x, si è condotti a tradurlo in una *equazione*

(2) $$A(x)=B(x),$$

dove $A(x)$ e $B(x)$, *primo* e *secondo membro*, denotano certe due espressioni contenenti l'incognita. Se i dati del problema non sono assegnati numericamente, compaiono nei due membri dell'equazione anche le lettere, con cui si è convenuto di indicare codesti dati.

In ogni caso importa aver ben chiara la differenza essenziale, che intercede fra un' equazione (2) e le identità fra espressioni letterali, di cui abbiamo avuto occasione di richiamare numerosi esempi nei nn. prec. (esempio tipico la identità caratteristica (1), che lega dividendo, divisore, quoziente e resto di una qualsiasi divisione di polinomî in una stessa indeterminata). Ogni identità è, per definizione, un' uguaglianza che *vale comunque si fissino i valori delle lettere che vi compaiono* (con la sola avvertenza di escludere, quando intervenga qualche frazione algebrica, quei valori, per i quali eventualmente si annulli il denominatore e quindi la frazione risulti priva di senso).

Invece un' *equazione* (2), una volta fissati, come si suppone, i valori dei dati letterali del problema, *non è verificata da qualsiasi valore dell' incognita, bensì soltanto da valori particolari,* che sono appunto quelli richiesti dal corrispondente problema. Insomma ogni equazione è una *uguaglianza di condizione*, che si impone alla incognita, allo scopo di determinarne il valore.

È noto che si dice *soluzione* o anche *radice* di un' equazione ogni valore (numerico o letterale) dell' incognita, che faccia assumere lo stesso valore ai due membri dell' equazione. E *risolvere* un' equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni.

Se $A(x)$, $B(x)$ sono, rispetto alla incognita x, due polinomî, l' equazione (2) si dice *intera*. Si dice invece *fratta*, se fra i termini di $A(x)$ e $B(x)$ (*termini dell' equazione*) compare qualche frazione algebrica, contenente l' incognita al denominatore.

In quest' ultimo caso si presentano come *eccezionali* quei valori dell' incognita, per i quali si annulla il denominatore di qualche termine fratto dell' equazione. Ciascuno di essi, sostituito al posto della incognita, rende *privo di senso* almeno un termine dell' equazione, e perciò, in accordo con le convenzioni del calcolo letterale, non può dirsi soluzione dell' equazione.

Giova, infine, ricordare che talvolta si incontrano equazioni che non ammettono nessuna soluzione, e che perciò si dicono *impossibili* od *assurde*: tale è, ad es., la $x^2 = -4$.

Per contrario può accadere che, dopo avere scritta l'equazione, in cui si traduce un problema a dati letterali, ci si accorga che, per valori speciali di codesti dati, l'equazione risulti soddisfatta da qualsiasi valore della incognita, cioè cessi di essere un'equazione vera e propria per ridursi ad una identità. Ciò si suole esprimere anche dicendo che, per quei certi valori dei dati, l'equazione diventa *indeterminata*.

23. Per lo studio delle equazioni è essenziale aver ben compreso il concetto di *equivalenza* fra equazioni.

Due equazioni

$$A(x) = B(x), \quad A'(x) = B'(x) \tag{3}$$

si dicono *equivalenti*, se hanno le medesime soluzioni. Perciò, per poter concludere che due equazioni sono equivalenti bisogna accertarsi che *ogni* soluzione della prima renda soddisfatta la seconda e, viceversa, *ogni* soluzione della seconda renda soddisfatta la prima.

Ma talvolta accade che si riesca soltanto ad assicurarsi che di due equazioni (3) la seconda è soddisfatta da *tutte* le soluzioni della prima, senza poter escludere che ammetta anche qualche altra soluzione. In tal caso si dice che la seconda equazione *è una conseguenza* della prima o *consegue* dalla prima.

Si può perciò dire che due equazioni sono equivalenti, quando ciascuna di esse consegue dall'altra.

In ogni caso *due equazioni, che siano entrambe equivalenti ad una stessa equazione, sono equivalenti fra loro.*

24. Per dedurre da un'equazione data altre equazioni equivalenti, o quanto meno conseguenti, servono, come già si è visto nel caso delle equazioni di 1° grado, alcuni teoremi generali o *principî*, che qui, in vista della loro importanza anche per il seguito, riprenderemo e chiariremo. Li stabiliremo considerando esclusivamente equazioni *intere*; e vedremo poi come gli stessi principî si possano, con opportune avvertenze, utilizzare anche nel caso delle equazioni *fratte*.

25. Sussiste anzitutto il PRINCIPIO DI ADDIZIONE: *Da un' equazione si ottiene un' equazione equivalente, aggiungendo ad ambo i membri una stessa espressione intera rispetto all' incognita*, che può, in particolare, ridursi ad una espressione nei soli dati letterali od anche ad un semplice numero.

Indicata con M questa espressione, dobbiamo dimostrare che una qualsiasi equazione

$$A = B, \tag{4}$$

dove A e B rappresentano due polinomî in una stessa incognita x, è equivalente alla

$$A + M = B + M; \tag{5}$$

cioè che ogni soluzione della (4) soddisfa anche alla (5), e, viceversa, ogni soluzione della (5) soddisfa alla (4).

A tale fine osserviamo che se c è una soluzione della (4), vuol dire che i due polinomî A e B, quando vi si attribuisca ad x il valore c, assumono valori uguali. Ma è allora manifesto che assumono valori uguali anche i due polinomî $A + M$ e $B + M$, cioè ogni soluzione della (4) soddisfa alla (5). Similmente, se per un certo valore della x, assumono valori uguali i due polinomi $A + M$ e $B + M$, altrettanto accade di A e C, cosicchè ogni soluzione della (5) soddisfa anche alla (4). Perciò le due equazioni sono equivalenti.

26. Pensando data la

$$A + M = B + M \tag{5}$$

e tenendo conto che essa, come si è visto or ora, è equivalente alla

(4) $$A = B$$

abbiamo che: *Se nei due membri di un' equazione si sopprimono due termini fra loro uguali, si ottiene un' equazione equivalente alla data.*

27. Un altro corollario immediato del principio di addizione è il PRINCIPIO DI TRASPORTO: *Da un' equazione si ottiene un' equazione equivalente, trasportando un qualsiasi termine da un membro all' altro, purchè gli si cambi il segno.*

Infatti, in un' equazione intera, in cui sia A il polinomio a primo membro, indichiamo con M un termine del secondo membro e con B la somma di tutti gli altri, cosicchè l' equazione si possa scrivere

(6) $$A = B + M.$$

Basta aggiungere ad ambo i membri il termine M, cambiato di segno, e tener conto del principio di addizione, per concludere che la (6) è equivalente alla

$$A - M = B + M - M \quad \text{ossia} \quad A - M = B,$$

la quale si può dire appunto ottenuta dalla (6), trasportando dal secondo membro al primo il termine M e cambiandogli segno.

28. Riprendiamo infine una qualsiasi equazione (intera)

(4) $$A = B$$

e, indicando con M, come al n. 25, una espressione intera rispetto alla incognita x, confrontiamo la (4) con l' equazione

(7) $$MA = MB,$$

che dalla data si ottiene, moltiplicandone ambo i membri per M. Trasportando nelle due equazioni tutti i termini al primo membro, abbiamo che la (4) è equivalente alla

$$(4') \qquad A - B = 0,$$

e la (7) alla

$$(7') \qquad MA - MB = 0 \quad \text{ossia} \quad M(A - B) = 0.$$

Ma perchè risulti uguale a zero un prodotto, occorre e basta che si annulli uno dei fattori. Perciò la (7′) e quindi anche la sua equivalente (7), è soddisfatta non soltanto dalle soluzioni della (4′), cioè della (4), bensì anche dalle eventuali soluzioni della nuova equazione

$$(8) \qquad M = 0,$$

le quali saranno, in generale, diverse da quelle della (4).

Vediamo così che, in generale, la (7) non risulta equivalente alla equazione data (4), ma si può dire soltanto una sua conseguenza.

Può darsi tuttavia che la (8) non abbia alcuna soluzione: e ciò si verifica certamente, se M si riduce ad un semplice numero diverso da zero, o ad una espressione anche contenente la incognita, ma non mai nulla. In tal caso le due equazioni (4), (7) sono equivalenti.

Possiamo, dunque, enunciare il seguente PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE: *Da un' equazione si ottiene un' equazione equivalente, moltiplicandone ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero o per una espressione letterale* (anche contenente l' incognita), *la quale non sia mai nulla.*

Se invece si moltiplicano ambo i membri di un' equazione per una espressione intera rispetto all' incognita, la quale per qualche valore di questa si annulli, la nuova equazione è una conseguenza della data, ed ammette, come soluzioni in più di questa, tutti quei valori della incognita, per cui si annulla l' espressione considerata, e che già non soddisfano alla equazione data.

Queste soluzioni, che la (7) ha in più della (4), si dicono soluzioni della (7), *estranee* alla (4).

29. Le considerazioni precedenti si possono invertire. Immaginiamo data un' equazione della forma

$$MA = MB, \tag{7}$$

cioè un'equazione, i cui due membri abbiano a fattor comune una certa espressione M, intera rispetto all'incognita; e confrontiamola con la equazione

$$A = B, \tag{4}$$

che dalla data si ottiene, dividendone ambo i membri per M, o, come anche si dice, sopprimendovi il fattore comune M.

Se M è un semplice numero diverso da zero, o un' espressione contenente soltanto dati letterali e non nulla, o infine anche un' espressione contenente l' incognita, ma tale che non si annulli per alcun valore di questa, le (4), (7) sono, come pocanzi, equivalenti.

Se invece la M contiene l' incognita e per qualche valore di questa si annulla, cioè se l' equazione

$$M = 0 \tag{8}$$

ammette qualche soluzione, la (4) ha, in meno della (7), tutte quelle soluzioni della (8) che sono ad essa estranee. Ciò si esprime, dicendo che la (4) « ha perduto », rispetto alla (8), codeste radici della (8).

Possiamo, dopo ciò, enunciare il seguente PRINCIPIO DI DIVISIONE: *Da un' equazione si ottiene un' equazione equivalente, dividendone ambo i membri per un loro fattore comune, che sia un numero diverso da zero od anche un' espressione intera rispetto all' incognita, la quale non si annulli mai per alcun valore dell' incognita.*

Se, invece, questo fattore comune è un' espressione intera rispetto all' incognita, che per qualche valore di questa si annulli, l' equazione ottenuta dalla data, dividendone ambo i membri per codesto fattore, può aver perduto, rispetto all' equazione data, qualche soluzione; e precisamente avrà perduto quelle soluzioni dell' equazione, ottenuta uguagliando a zero la espressione considerata, che sieno ad essa estranee.

In ogni caso, il fatto che la equazione

(7) $$MA = MB$$

ammette tanto le soluzioni della

(4) $$A = B,$$

quanto quelle eventuali della

(8) $$M = 0$$

si esprime dicendo che « la (7) si decompone nelle due equazioni (4) e (8) ».

30. Sinora abbiamo parlato di equazioni *intere*. Quando si passa a considerare equazioni *fratte*, bisogna tener conto di quei valori eccezionali della incognita, che annullano il denominatore di qualche termine fratto e che, come già si è rilevato (n. 22), non si possono dire soluzioni dell' equazione, in quanto rendono privo di senso qualche suo termine.

Se questi valori eccezionali mancano, cioè se tutti i denominatori dei termini fratti dell' equazione, pur contenendo l' incognita, si conservano, per qualsiasi valore di essa, diversi da zero, i principî dianzi enunciati restano ancora applicabili, come nel caso di un' equazione intera.

Ma, quando non si verifica questa circostanza del tutto particolare, codesti principî si possono applicare alle equazioni fratte soltanto a patto che *si escludano per l'incognita*, sia nell' equazione da cui si parte, sia in quelle che mano mano se ne deducono, *gli accennati valori eccezionali*.

Stabilita questa esclusione, i termini dell' equazione fratta considerata si possono trasportare tutti a primo membro. Con ciò può darsi che i termini fratti si elidano, a due a due, tutti quanti, cosicchè si pervenga ad un' equazione intera

(9) $$A(x) = 0.$$

Se nessuno dei valori esclusi per l'incognita soddisfa a questa equazione, essa è senz'altro equivalente all'equazione fratta, da cui si è partiti. Se invece anche uno solo di codesti valori eccezionali è soluzione della (9), quest'equazione intera non si può dire equivalente alla data equazione fratta, bensì soltanto una sua conseguenza.

Ma in generale non accadrà che, col trasporto dei termini dell'equazione a primo membro, tutti i termini fratti si elidano a vicenda; ed allora i varî termini si ridurranno alla stesso denominatore e dopo ciò si sommeranno. In tal modo si perverrà ad un'equazione della forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0, \tag{10}$$

dove A e B rappresentano due polinomî in x.

In ogni caso i valori, che vanno esclusi per l'incognita, sono quelli, che annullano il denominatore B, cioè le soluzioni dell'equazione intera

$$B(x) = 0; \tag{11}$$

e saranno soluzioni della (10) tutte le soluzioni dell'equazioni intera

$$A(x) = 0, \tag{12}$$

che non sono soluzioni della (11). E qui si presentano due casi, analoghi a quelli incontrati pocanzi, quando abbiamo supposto che l'equazione fratta, col trasporto dei termini a primo membro, si riducesse intera. Se nessuno dei valori eccezionali per l'incognita, cioè delle soluzioni della (11), soddisfa all'equazione intera (12), questa è equivalente all'equazione fratta (10). In caso contrario, l'equazione intera (12) ha, in più della equazione fratta (10), quelle sue soluzioni che soddisfano anche la (11), e che perciò rendono la (10) priva di senso.

Vediamo così che la risoluzione di una qualsiasi equazione fratta si può sempre far dipendere da quella di un'equazione intera, la quale si dice dedotta dalla data « liberandola dai denominatori ».

31. Delle varie eventualità dianzi accennate, parlando in generale, daremo esempi concreti più avanti, quando avremo imparato a risolvere le equazioni di 2° grado (Cap. IV).

Ma fin d'ora conviene riflettere sul modo, in cui praticamente un'equazione fratta si può liberare dai denominatori. Per fissare le idee, immaginiamo che l'equazione fratta proposta sia della forma

$$\frac{M}{N} = \frac{M'}{N'}, \tag{13}$$

dove M, N, M', N' denotano altrettante espressioni intere rispetto all'incognita x. Per liberarla dai denominatori, dobbiamo, secondo quanto si è detto al n. prec., cominciare con l'escludere per la x gli eventuali valori per cui si annulla N o N'. Dopo ciò, trasportati tutti i termini a primo membro, cioè scritta la (13) sotto la forma

$$\frac{M}{N} - \frac{M'}{N'} = 0, \tag{14}$$

dobbiamo ridurre i varî termini allo stesso denominatore. Se non riusciamo a trovare fattori comuni ad N ed N', non possiamo prendere, come denominatore comune, che il prodotto NN' e perveniamo all'equazione

$$\frac{MN' - M'N}{NN'} = 0,$$

talchè l'equazione intera voluta è la

$$MN' - M'N = 0 \quad \text{ossia} \quad MN' = M'N;$$

e quest'equazione intera si ottiene direttamente dalla (13), *moltiplicandone ambo i membri per il prodotto NN' dei denominatori dei varî termini fratti.*

Se poi si riesce a trovare un divisore comune ad N ed N', talchè sia $N = PQ$, $N' = P'Q$, dove Q, P, P' designano altrettante espressioni intere rispetto alla x, la (14) si può scrivere

$$\frac{M}{PQ} - \frac{M'}{P'Q} = 0$$

e si può assumere come denominatore comune dei suoi termini il prodotto $PP'Q$. Si perviene così alla

$$\frac{MP' - M'P}{PP'Q} = 0$$

e l'equazione intera

$$MP' - M'P = 0 \quad \text{ossia} \quad MP' = M'P$$

si ottiene direttamente dalla data, moltiplicandone ambo i membri per il prodotto $PP'Q$, or ora trovato come multiplo comune dei denominatori dei suoi varî termini fratti.

Analogamente si procede in ogni altro caso.

32. Un'ultima avvertenza. Quando nella risoluzione algebrica di un problema si è condotti ad un'equazione fratta e si è, perciò, costretti ad escludere per l'incognita qualche valore, come eccezionale per codesta equazione, bisogna poi cercare direttamente se i valori così esclusi per l'incognita abbiano qualche significato in relazione al problema proposto.

33. È ben noto che si dice *grado* di un'equazione intera il grado, rispetto all'incognita, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini e si eseguiscano fra di essi tutte le possibili riduzioni.

Nei corsi precedenti già si sono studiate le *equazioni di* 1° *grado*.

Qui basterà ricordare che ogni equazione di 1° grado, ove si trasportino al primo membro tutti i termini contenenti l'incognita e al secondo tutti quelli noti, assume la forma (*normale*)

$$ax = b, \tag{15}$$

dove a e b denotano ciascuno un numero o una data espressione letterale non contenente l'incognita.

Se $a \gtrless 0$ (*caso generale*), si trova, dividendo ambo i membri per a, che la (15) ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{b}{a}.$$

Se è $a = 0$, mentre $b \gtrless 0$, la (15) non ammette nessuna soluzione (*caso d'impossibilità*).

Infine se è simultaneamente $a = 0$, $b = 0$, ogni numero, come ogni possibile espressione letterale, soddisfa alla (15) (*caso d'indeterminazione*).

Delle equazioni di 2° grado ci occuperemo nei prossimi Capitoli II-IV.

Disuguaglianze

34. Come vedremo in seguito, soprattutto nella discussione delle equazioni e dei problemi di 2° grado, si è talvolta condotti a considerare due espressioni $A(x)$, $B(x)$ in una stessa indeterminata e a cercare per quali valori della x la prima assuma valori maggiori oppure minori della seconda, cioè a studiare la disuguaglianza

$$A(x) > B(x) \quad \text{oppure} \quad A(x) < B(x).$$

Queste si possono dire *disuguaglianze di condizione* per la x, ed è perciò che taluno le chiama, per analogia con le equazioni, *disequazioni* o *inequazioni*; ma noi, seguendo l'uso più corrente, le chiameremo senz'altro *disuguaglianze nella indeterminata* x.

Avvertiamo che qualche volta interessa conoscere per quali valori della x la $A(x)$ risulti *maggiore od anche uguale* alla $B(x)$ (oppure *minore od anche uguale*). Si scrive allora

$$A(x) \geq B(x) \quad \text{oppure} \quad A(x) \leq B(x);$$

e queste relazioni di condizione, che contemplano anche il caso dell'uguaglianza, si chiamano comunemente ancora disuguaglianze. Volendo essere più precisi, si possono indicare col nome di *limitazioni*.

35. Alle disuguaglianze in una indeterminata (e quindi anche alle limitazioni) si estendono in modo ovvio concetti e risultati già stabiliti per le equazioni.

Come queste, le disuguaglianze si dicono *intere* se tali sono, rispetto alla indeterminata, le espressioni che vi compaiono nei due membri. Se anche una sola di queste due espressioni è fratta rispetto all'incognita, la disuguaglianza si dice *fratta*.

Di una qualsiasi disuguaglianza

$$A(x) > B(x) \tag{9}$$

si dice *soluzione* ogni valore (numerico o letterale) della x, che la renda soddisfatta, cioè, precisamente, faccia assumere alla espressione $A(x)$ un valore maggiore di quello corrispondentemente assunto dalla $B(x)$.

E due disuguaglianze si dicono *equivalenti*, se ogni soluzione della prima soddisfa anche alla seconda e viceversa.

Ragionando in modo perfettamente analogo a quello dei nn. 25-27 e tenendo conto di una nota proprietà delle disuguaglianze fra numeri (n. 5B), si estendono alle disuguaglianze *intere* in una indeterminata il *principio di addizione* e quello di *trasporto*.

Qualche nuova avvertenza occorre, quando da una disuguaglianza si vuol dedurne una equivalente, moltiplicandone ambo i membri per uno stesso numero o per una stessa espressione. Si ricordi, infatti, che insieme con una disuguaglianza fra numeri

$$a > b$$

sussiste anche la

$$ac > bc$$

se c è un numero *positivo*, la

$$ac < bc$$

se c è un numero *negativo* (n. 5D). Si riconosce allora, ragionando in modo analogo a quello del n. 28, che una disuguaglianza

$$A(x) > B(x)$$

è equivalente alla

$$MA(x) > MB(x),$$

se M è un numero *positivo* o un' espressione letterale *sempre positiva* (per qualsiasi scelta dei valori delle lettere che vi compaiono); è invece equivalente alla

$$MA(x) < MB(x),$$

se M è un numero *negativo* o un' espressione letterale *sempre negativa.*

36. Sulle disuguaglianze *fratte* ci limitiamo a qualche osservazione. Anche per esse, come per le equazioni fratte (n. 30), vanno esclusi quei valori della indeterminata, che rendono privo di senso qualche termine fratto, annullandone il denominatore.

Con questa esclusione, anche in una disuguaglianza fratta si possono trasportare tutti i termini in un membro. Eseguendo, dopo ciò, le operazioni indicate, si può darle sempre la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \tag{16}$$

dove A e B rappresentano due polinomî in x. Affinchè questa disuguaglianza sia soddisfatta, occorre e basta che codesti due polinomî assumano valori di ugual segno. Vediamo così che le soluzioni della (16) sono date da tutti (e soli) i valori di x, che rendono soddisfatte simultaneamente o le due disuguaglianze intere

$$A(x) > 0, \quad B(x) > 0,$$

oppure le due disuguaglianze contrarie

$$A(x) < 0, \quad B(x) < 0.$$

37. Le disuguaglianze intere si classificano, come le analoghe equazioni, a seconda del grado. E, naturalmente, si chiama *grado* di una disuguaglianza intera il grado, rispetto alla indeterminata, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini e si eseguiscano fra di essi le possibili riduzioni.

Consideriamo, come applicazione delle generalità precedenti le *disuguaglianze* (intere) *di* 1° *grado*, che si trattano in modo perfettamente analogo alle corrispondenti equazioni.

Se, data una disuguaglianza di 1° grado, si trasportano in quel membro, che deve risultare maggiore, tutti i termini, che contengono l'indeterminata, nell'altro tutti i termini noti, e si riducono gli eventuali termini simili, si ottiene una disuglianza equivalente, che ha la forma

$$ax > b. \tag{17}$$

Supposto $a \gtrless 0$ (*caso generale*), si dividano ambo i membri per a. Se $a > 0$, la (17) è equivalente (n. prec.) alla

$$x > \frac{b}{a},$$

cioè risulta soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x maggiori di $\frac{b}{a}$. Se invece $a < 0$, la (17) è equivalente alla

$$x < \frac{b}{a},$$

ed è quindi soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x minori di $\frac{b}{a}$.

E anche qui, come per le equazioni, si possono presentare disuguaglianze *impossibili* oppure *soddisfatte da qualsiasi valore della* x. Se $a = 0$, la (17) si riduce a $0 > b$, cosicchè risulta impossibile se è $b \geq 0$, soddisfatta da ogni possibile valore di x se $b < 0$. Se infine è simultaneamente $a = 0$, $b = 0$, la (17) è senz'altro impossibile.

Per avere qualche esempio del caso generale, consideriamo la disuguaglianza

$$10 - 7x > 15 - 10x.$$

Se ne deducono successivamente le seguenti disuguaglianze ad essa equivalenti:

$$-7x + 10x > 15 - 10,$$

$$3x > 5,$$

$$x > \frac{5}{3}.$$

Similmente dalla

$$x - 3 > \frac{7x - 11}{5}$$

si deduce successivamente:

$$5x - 15 > 7x - 11,$$

$$5x - 7x > 15 - 11,$$

$$-2x > 4,$$

$$x < -2.$$

Sistemi di equazioni di 1° grado

38. Torniamo alle equazioni. Vi sono problemi, in cui si chiede di determinare due o più grandezze non conosciute, e che, perciò, quando si trattano con l'Algebra, conducono ad equazioni in altrettante incognite.

Noi qui ci limiteremo a considerare equazioni in due sole incognite, ma le generalità, che esporremo in questo n. e nei seguenti, valgono in ogni caso.

Dicesi *equazione nelle due incognite* x *e* y ogni *uguaglianza di condizione* della forma

$$A(x,y) = B(x,y), \tag{18}$$

dove $A(x,y)$ e $B(x,y)$ rappresentano due date espressioni contenenti x e y. E si dice *intera* se entrambe le espressioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ sono intere rispetto ad x e y, cioè se esse sono due polinomî in queste due incognite. Si dice invece *fratta*, se in $A(x,y)$ o in $B(x,y)$, o in entrambe, compare, come termine, qualche frazione algebrica, contenente a denominatore almeno una delle incognite.

Di un'equazione (18) si dice *soluzione* ogni coppia di valori (numerici od anche letterali), che sostituiti rispettivamente ad x ed y, fanno assumere alle due espressioni $A(x,y)$, $B(x,y)$ un medesimo valore.

Naturalmente, se l'equazione è fratta, vanno qui escluse quelle coppie *eccezionali* di valori, che rendono privo di senso qualche suo termine, annullandone il denominatore.

39. Alle equazioni in due incognite si estende la definizione di equivalenza (n. 23), dicendosi *equivalenti* due equazioni nelle stesse incognite x e y, quando ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, e viceversa.

Si estendono altresì i principî dei nn. 25-29; in particolare, si può anche in queste equazioni trasportare un termine da un membro all'altro, purchè gli si cambi segno (e, ove l'equazione sia fratta, si escludano per le incognite le coppie di valori eccezionali).

Infine, anche qui, di un'equazione intera si dice *grado* il grado, *rispetto al complesso delle incognite*, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini dell'equazione (e si riducano gli eventuali termini simili).

Nel seguito di questo Capitolo ci limiteremo a considerare equazioni (intere) di 1° grado. Una tale equazione si dice ridotta a *forma normale*, quando si sono trasportati a primo membro tutti i termini contenenti le incognite, a secondo tutti i termini noti. Perciò un'equazione di 1° grado in due incognite x e y, quando sia ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$ax + by = c,$$

dove a, b, c denotano tre numeri dati (od anche tre date espressioni letterali, non contenenti le incognite).

40. Prendiamo, ad es., l'equazione (di 1° grado, normale)

$$3x + 2y = 12. \tag{19}$$

Si vede subito che una tale equazione ammette infinite soluzioni. Se, per es., si dà ad x il valore 0, si ottiene per la y l'equazione (in una sola incognita)

$$2y = 12,$$

la cui soluzione è $y = 6$, cosicchè una soluzione della (19) è data da $x = 0$, $y = 6$. Se invece si dà ad x il valore 1, si ha per y l'equazione

$$3 + 2y = 12,$$

che è soddisfatta da $y = \frac{9}{2}$; ed $x = 1$, $y = \frac{9}{2}$ è una nuova soluzione della (19).

Insomma, dato ad arbitrio, un valore alla x, risulta determinato un valore per la y, che si ottiene risolvendo la data equazione, come se fosse un'equazione nella sola incognita y. Così tutte le soluzioni della (19) sono date dalle coppie di valori, che vengono assunti da

$$x \quad \text{e} \quad y = \frac{12 - 3x}{2},$$

quando ad x si attribuiscano tutti i possibili valori o, come si suol dire, si lasci « arbitraria ».

Consideriamo, allora, un'altra equazione di 1° grado nelle stesse incognite x e y, per es., la

$$4x - y = 5.$$

Anche questa ammette infinite equazioni; ma possiamo chiederci se le due equazioni considerate ammettano qualche soluzione comune, cioè se esista qualche coppia di valori, che, sostituiti rispettivamente ad x e y nelle due equazioni, le rendano soddisfatte entrambe.

Quando ci si propone di trovare le soluzioni comuni a due equazioni nelle stesse incognite, si dice che « si fa sistema delle due equazioni » od anche che « si fanno coesistere le due equazioni »; e le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni si dicono senz'altro *soluzioni del sistema*.

Risolvere il sistema vuol dire trovarne tutte le possibili soluzioni.

Un sistema si rappresenta di solito, scrivendone le equazioni l'una sotto l'altra e unendole con una graffa. Così, nel caso delle due equazioni dianzi considerate, si scrive

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - y = 5. \end{cases}$$

41. Come nel caso delle equazioni (n. 23), due sistemi si dicono *equivalenti*, quando tutte le soluzioni del primo soddisfano anche al secondo e, viceversa, ogni soluzione del secondo soddisfa anche al primo.

E per risolvere i sistemi si procede in modo analogo a quello che si tiene per le equazioni in una sola incognita, cioè si cerca di passare dal sistema dato ad altri sistemi equivalenti, mano mano più semplici, fino ad ottenerne uno, che permetta di riconoscerne agevolmente la soluzione (o le soluzioni).

Nel caso dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite si possono seguire tre metodi, che sostanzialmente si equivalgono, e che ci condurranno a concludere che ogni sistema siffatto *in generale* (cioè all'infuori di qualche caso particolare di eccezione) ammette una soluzione ed una sola.

42. *Metodo di sostituzione.* Riprendiamo il sistema del n. 40

$$(20)\qquad \begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - \ \ y = \ \ 5. \end{cases}$$

Si tratta di trovare per x e y due valori, che rendano soddisfatte entrambe queste equazioni. Se si tien conto soltanto della prima, le sue soluzioni, come si è visto al n. 40, sono date dalle coppie di valori, che si ottengono da

$$(21)\qquad x \quad \text{e} \quad y = \frac{12 - 3x}{2},$$

attribuendo ad x tutti i possibili valori. Di queste coppie di valori dobbiamo considerare soltanto quelle, che soddisfano anche alla seconda equazione. Ora esprimendo che la coppia di valori (21) soddisfa a questa seconda equazione, cioè sostituendo in essa al posto della y l'espressione

$$\frac{12 - 3x}{2},$$

si trova l'equazione

$$(22)\qquad 4x - \frac{12 - 3x}{2} = 5,$$

la quale contiene la sola incognita x ed è di 1° grado. Essa definisce quel valore di x, per cui le (21) danno una soluzione comune delle due equazioni, cioè una soluzione del sistema. Risolvendo la (22), si trova $x = 2$ e, sostituendo questo valore di x nella seconda delle (21), si ottiene $y = 3$. Il sistema dato ammette dunque la soluzione $x = 2$, $y = 3$; e, in forza dello stesso ragionamento, non ne può ammettere altra.

Il metodo così spiegato si può enunciare con la seguente

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite x ed y col metodo di sostituzione, si risolve una delle due equazioni rispetto ad una delle incognite, per es. la y, come se la x fosse conosciuta, e l'espres-*

sione così ottenuta si sostituisce al posto di y nell'altra equazione. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, che, risolta, dà il valore di questa incognita. Quello della y si ottiene, sostituendo codesto valore di x nella rispettiva espressione dianzi trovata.

43. *Metodo di confronto.* Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x + 6y = 15, \\ 5x - 4y = 13. \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, si trova che tutte le soluzioni della prima sono date dalle coppie di valori

$$x, \quad y = \frac{15 - 4x}{6}, \tag{23}$$

dove ad x si diano tutti i valori possibili. Similmente tutte le soluzioni della seconda equazione sono date dalle coppie di valori

$$x, \quad y = \frac{5x - 13}{4} \tag{24}$$

dove ancora si attribuiscano ad x tutti i possibili valori. Per avere una soluzione del sistema (cioè comune alle due equazioni) bisogna trovare un valore di x tale, che faccia assumere lo stesso valore alle due espressioni fornite per la y dalle (23) e (24). Si è così condotti all'equazione

$$\frac{15 - 4x}{6} = \frac{5x - 13}{4}, \tag{25}$$

che contiene la sola x ed è di 1° grado. Risolvendola si trova $x = 3$; dopo di che il valore di y si trova ponendo $x = 3$ nell'una o nell'altra delle espressioni di y date dalle (23) e (24). Risulta $y = \frac{1}{2}$, onde il sistema ammette la soluzione $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$, e nessun'altra.

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite col metodo di confronto si risolvono entrambe le equazioni rispetto ad una stessa incognita, per es. rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, e si uguagliano le due espressioni così ottenute per la y. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, la quale, risolta, fornisce il valore di questa incognita. Quello di y si ottiene, sostituendo questo valore di x in una qualsiasi delle due espressioni di y dianzi trovate.*

44. In ognuno dei due metodi precedenti si perviene alla risoluzione del sistema, deducendo da esso una nuova equazione (la (22) nel primo metodo, la (25) nel secondo), che contiene soltanto una delle incognite (la x): questa equazione si dice ottenuta dal sistema *eliminando* l'altra incognita (cioè la y). Il terzo metodo, che ci resta da spiegare, conduce direttamente a questa eliminazione. Ma è necessario premettere qualche considerazione generale, che interessa non soltanto per i sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, di cui qui ci occupiamo, bensì anche per sistemi quali si vogliano.

45. Se, dato un sistema, si riesce a scrivere un'equazione, la quale sia soddisfatta da *tutte* le soluzioni di esso, si dice che la nuova equazione è *una conseguenza* del sistema o *consegue* da esso.

Consideriamo, allora, per fissare le idee, un sistema di due equazioni in due incognite

$$A = 0, \quad A' = 0. \tag{26}$$

Se q, q' sono due numeri quali si vogliano, l'equazione

$$qA + q'A' = 0 \tag{27}$$

si dice *combinazione lineare* delle (26) di *moltiplicatori* q, q'. Per es., prendendo $q = 1$, $q' = 1$, oppure $q = 1$, $q' = -1$, si hanno le due combinazioni lineari

$$A + A' = 0 \quad \text{o} \quad A - A' = 0,$$

che si dicono ottenute dalle (26) « sommandole » o, rispettivamente, « sottraendole membro a membro ».

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema:

Un qualsiasi sistema ammette come sue conseguenze tutte le combinazioni lineari delle sue equazioni.

Riferendoci per semplicità al sistema in due incognite (26), dobbiamo far vedere che ogni sua soluzione soddisfa anche l'equazione (27), comunque siansi presi i moltiplicatori q e q'. Ora ciò è evidente, perchè se certi due valori delle incognite soddisfano le (26), vuol dire che essi annullano simultaneamente le due espressioni A ed A'; ed allora essi annullano necessariamente (comunque siansi presi q e q') anche l'espressione $qA + q'A'$, cioè rendono soddisfatta anche la (27).

Nello stesso modo il teorema si dimostra per un sistema di quante si vogliano equazioni.

Dal teor. prec. risulta che se delle equazioni di un sistema, del quale si ignori se abbia o no soluzioni, si riesce a formare una combinazione lineare, che sia impossibile, è certamente impossibile anche il dato sistema. Se, invero, esso avesse una soluzione, questa dovrebbe soddisfare anche alla combinazione lineare considerata.

46. Al teorema precedente si può dare una forma più precisa: *Da un sistema di quante si vogliano equazioni si ottiene un sistema equivalente, sostituendo ad una di esse una loro combinazione lineare, purchè questa dipenda effettivamente dall'equazione, che si vuol sostituire, cioè sia tale che il corrispondente moltiplicatore sia diverso da zero.*

Nel caso di due equazioni (26) dobbiamo far vedere che un tale sistema è equivalente al sistema

$$(28) \qquad A = 0, \quad qA + q'A' = 0,$$

purchè sia $q' \gtrless 0$.

Infatti sappiamo già che ogni soluzione di (26) soddisfa anche il sistema (28), perchè (n. prec.) l'equazione

$$qA + q'A' = 0$$

è una conseguenza del sistema (26). Viceversa, ogni soluzione del sistema (28), annullando insieme le due espressioni A e $qA + q'A'$, fa assumere il valore 0 anche alla $q'A'$ e quindi, essendo per ipotesi $q' \gtrless 0$, alla stessa A'; cioè soddisfa al sistema dato $A = 0$, $A' = 0$.

47. Giova aggiungere una osservazione. Al n. prec. abbiamo considerato un sistema della forma $A = 0$, $A' = 0$, cioè abbiamo supposto che in ciascuna delle equazioni tutti i termini fossero stati portati a primo membro, mentre spesso si è condotti a considerare equazioni che hanno termini in entrambi i membri (come accade per le equazioni di 1° grado, ridotte a forma normale). Ora è facile riconoscere che per formare una combinazione lineare di due (o più) equazioni quali si vogliano non occorre portarne tutti i termini a primo membro. Invero, supponiamo di avere due equazioni della forma

$$A = B, \quad A' = B'.$$

Per formarne una combinazione lineare di moltiplicatori q e q', dovremmo, secondo la definizione del n. prec., cominciar col trasportare tutti i termini a primo membro e poi considerare l'equazione

$$q(A - B) + q'(A' - B') = 0.$$

Ma sciogliendo le parentesi e ritrasportando i termini qB, $q'B'$ a secondo membro, quest'ultima equazione si scrive

$$qA + q'A' = qB + q'B',$$

e, come si vede, si può ottenere direttamente, come combinazione lineare delle due equazioni date, sotto la loro forma primitiva.

48. *Metodo dei coefficienti uguali* o *della combinazione lineare.* Consideriamo il sistema

$$(29) \qquad \begin{cases} 5x + 3y = -3, \\ -2x + 4y = 22. \end{cases}$$

Si è visto or ora che si ottiene un sistema equivalente sostituendo ad una delle due equazioni, per es., alla seconda, una qualsiasi combinazione lineare delle (29), (purchè sia diverso da 0 il moltiplicatore della seconda). Ora si possono sempre scegliere i moltiplicatori in modo che nella nuova equazione, risulti eliminata (cioè venga a mancare) una delle due incognite. Per es., se si vuole eliminare dalle (29) la y, basta moltiplicare ambo i membri della prima equazione per il coefficiente 4 della y nella seconda ed ambo i membri della seconda per il coefficiente 3 della stessa y nella prima, e poi sottrarre membro a membro le equazioni così ottenute. Invero, le due date equazioni, quando se ne moltiplicano ambo i membri, rispettivamente, per i due moltiplicatori indicati, diventano

$$\begin{cases} 4 \cdot 5x + 4 \cdot 3y = -12, \\ -3 \cdot 2x + 3 \cdot 4y = 66, \end{cases}$$

e, sottratte membro a membro, danno l'equazione nella sola x

$$26x = -78,$$

che, risolta, dà $x = -3$. Dopo di ciò, attribuendo ad x questo valore in una delle due equazioni (29), per es. nella prima, si trova la

$$-15 + 3y = -3 \quad \text{ossia} \quad 3y = 12,$$

la quale dà $y = 4$.

Del resto a questo valore della y si può giungere anche direttamente, eliminando, in modo analogo, fra le (29) la x: basta moltiplicare ambo i membri della prima di codeste equazioni per 2 e quelli della seconda per 5 (con che i coefficienti della x nelle due equazioni risultano opposti) e poi sommarle membro a membro. Si trova così la

$$26y = 104,$$

da cui risulta appunto $y = 4$.

In pratica, per eseguire comodamente il calcolo, giova scrivere accanto a ciascuna equazione il rispettivo moltiplicatore, disponendo, ad es., l'operazione nel modo seguente:

$$\begin{array}{rl} \begin{matrix}4\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=-3\\ -2x+4y=22\end{array}\right. \\ \hline - & \left\{\begin{array}{l}20x+12y=-12\\ -6x+12y=66\end{array}\right.\\ \hline & 26x \qquad = -78\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \begin{matrix}2\\5\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=-3\\ -2x+4y=22\end{array}\right. \\ \hline + & \left\{\begin{array}{l}10x+6y=-6\\ -10x+20y=110\end{array}\right.\\ \hline & \qquad 26y=104\end{array}$$

o, più semplicemente,

$$\begin{array}{rl} \begin{matrix}4\\-3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=-3\\ -2x+4y=22\end{array}\right. \\ \hline & 26x \qquad = -78\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \begin{matrix}2\\5\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 5x+3y=-3\\ -2x+4y=22\end{array}\right. \\ \hline & \qquad 26y=104\end{array}$$

Se nelle date equazioni i due coefficienti della incognita, che si vuole eliminare, sono interi e hanno qualche fattore comune, giova scegliere i due moltiplicatori in modo che il valore assoluto comune dei nuovi coefficienti di codesta incognita risulti uguale al minimo multiplo comune dei valori assoluti dei coefficenti primitivi. Per es.

$$\begin{array}{rl} \begin{matrix}4\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 9x-6y=4\\ 15x+8y=6\end{array}\right. \\ \hline & 81x \qquad = 34\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \begin{matrix}-5\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{l} 9x-6y=4\\ 15x+8y=6\end{array}\right. \\ \hline & \qquad 54y=-2\end{array}$$

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite col metodo dei coefficienti uguali si moltiplicano ambo i membri delle due equazioni per moltiplicatori (diversi da 0) tali, che i coefficienti di una delle incognite, per es., della y, risultino fra loro uguali od opposti. Dopo di ciò, sottraendo o, rispettivamente, sommando membro a membro le due equazioni così ottenute, si perviene ad una equazione, che contiene soltanto la x e, risolta, dà il valore di questa incognita. La y si determina sia sostituendo il valore trovato per la x in una delle date equazioni, sia eliminando da queste, in modo analogo, la x.*

49. Per ciascuno dei sistemi considerati sin qui (nn. 42-48) abbiamo trovato una soluzione (ed una sola); ma si possono anche presentare *casi di impossibilità* e *casi di indeterminazione.*

Prendiamo, ad es., il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ -6x + 8y = 5; \end{cases}$$

e proviamo a risolverlo con uno qualsiasi dei due metodi dianzi indicati, per es. col metodo di confronto (n. 43). Risolvendo entrambe le equazioni rispetto alla y e uguagliando le due espressioni così ottenute, troviamo l'equazione

$$\frac{3x-2}{4} = \frac{6x+5}{8},$$

che liberata dai divisori, diventa

$$6x - 4 = 6x + 5,$$

ed è un'equazione impossibile, in quanto, ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$6x - 6x = 9 \quad \text{ossia} \quad 0 \cdot x = 9.$$

Non esiste, dunque, nessun valore di x, che insieme con un conveniente valore di y, renda soddisfatte le due date equazioni: il sistema è *impossibile.*

E il fatto si spiega facilmente osservando, che se si dividono ambo i membri della seconda equazione per -2, si ottiene l'equazione equivalente

$$3x - 4y = -\frac{5}{2},$$

la quale contraddice alla prima delle date, in quanto richiede che l'espressione $3x - 4y$, la quale per la prima deve assumere il valore 2, risulti, invece, uguale a $-\frac{5}{2}$.

Consideriamo in secondo luogo il sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5, \\ 8x - 12y = -20. \end{cases}$$

Applicando ancora il metodo di confronto, si è condotti all'equazione nella sola x

$$\frac{2x+5}{3} = \frac{8x+20}{12},$$

che, liberata dai divisori, diventa

$$8x + 20 = 8x + 20$$

e si riduce ad una identità. Ciò vuol dire che l'incognita x non risulta soggetta ad alcuna condizione; o, in altre parole, ad ogni possibile valore di x si può associare un valore per y, che insieme con esso renda soddisfatto il sistema: il sistema è *indeterminato*. E il fatto risulta evidente, se si osserva che le due equazioni date sono fra loro equivalenti, in quanto la seconda si deduce dalla prima, moltiplicandone ambo i membri per -4.

Discussione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite

50. Gli esempi dei nn. prec. ci hanno mostrato che per un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite sono possibili varî casi: in generale esso ammette una soluzione (ed una sola); ma può anche non ammetterne nessuna, oppure ammetterne infinite. Qui, discutendo in generale un tale sistema, faremo vedere che questi sono i soli casi possibili, e assegneremo dei criteri, che permettono di decidere, anche senza risolvere il sistema, a quale dei casi esso corrisponda.

Il sistema, ove si immagini ridotto a forma normale e si denotino i coefficienti con lettere, si può scrivere

$$(30) \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

dove a, b, c, a', b', c' rappresentano sei numeri dati (od anche sei espressioni letterali non contenenti le incognite).

Per risolvere questo sistema, cominciamo con l'eliminare la y, formando la combinazione lineare delle (30), che ha per moltiplicatori b' e $-b$:

$$\begin{array}{r} \begin{matrix} b' \\ -b \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned} \right. \\ \hline (ab' - a'b)x = cb' - c'b. \end{array} \tag{31}$$

Otteniamo così, come conseguenza del sistema, un'equazione, che contiene la sola x. Affinchè essa sia possibile (e determinata), occorre e basta (n. 33) che sia diverso da zero il coefficiente dell'incognita, cioè si abbia

$$ab' - a'b \gtrless 0, \tag{32}$$

il che intanto implica che non possono essere simultaneamente nulli b e b'.

Esamineremo poi i casi di eccezione, che si presentano quando sia

$$ab' - a'b = 0,$$

e qui supporremo senz'altro soddisfatta la condizione (32). Sotto questa ipotesi troviamo, come soluzione della (31),

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}. \tag{33}$$

Similmente, possiamo eliminare fra le (30) la x, formando la loro combinazione lineare di moltiplicatori $-a'$ e a (i quali, sotto l'ipotesi (32), non possono essere entrambi nulli). Troviamo così

$$\begin{array}{r} \begin{matrix} -a' \\ a \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned} \right. \\ \hline (ab' - a'b)y = ac' - a'c, \end{array} \tag{34}$$

cioè un'equazione nella sola y, la quale, sotto la stessa ipotesi (32), è anch'essa possibile ed ha la soluzione

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \tag{35}$$

Ora osserviamo che ciascuna delle due equazioni (31), (34) è una conseguenza del sistema dato (n. 45), cosicchè deve risultare soddisfatta da ogni possibile soluzione del sistema. Di qui discende che questo non può essere soddisfatto che dai due valori di x e y, che soddisfano le (31), (34), cioè da quelli forniti dalle formule (33), (35).

Viceversa sostituendo questi valori di x ed y nelle equazioni del sistema dato (30), si verifica che veramente esse risultano entrambe soddisfatte. Perciò si conclude, che, *sotto l'ipotesi*

$$ab' - a'b \gtrless 0, \tag{32}$$

il sistema (30) *ammette un'unica soluzione, data da*

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \tag{36}$$

Ciò vale, comunque siano stati prefissati i coefficienti delle equazioni del sistema (anche in parte nulli), purchè beninteso, resti valida la condizione essenziale (32).

51. Passiamo ad esaminare i casi di eccezione, che si presentano quando sia

$$ab' - a'b = 0, \tag{37}$$

cioè si annulli l'espressione, che in entrambe le formule risolutive (36) del caso generale compare come denominatore.

Faremo vedere che *sotto l'ipotesi* (37) *il sistema è impossibile* o *indeterminato.*

A tal fine conviene distinguere e discutere successivamente varî casi.

1) Sempre sotto l'ipotesi (37), supponiamo dapprima che sia diversa da zero almeno una delle due espressioni $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, che compaiono nelle formule risolutive (36) come numeratori. Sia, per es.,

$$cb' - c'b \gtrless 0, \tag{38}$$

il che implica che i coefficienti b e b' non possono essere entrambi nulli. Sotto queste ipotesi (37), (38), l'equazione (31), che al n. prec. abbiamo dedotto dalle equazioni del dato sistema (30), come loro combinazione lineare di moltiplicatori b' e $-b$, si riduce a

$$0 \cdot x = cb' - c'b,$$

e poichè il secondo membro è diverso da zero, risulta impossibile (n. 33). È quindi impossibile anche il sistema (30), di cui essa è una conseguenza (n. 45).

Allo stesso risultato si perviene, supponendo diverso da zero l'altro numeratore $ac' - a'c$ delle (36). Abbiamo, dunque, che *quando è nullo il denominatore* $ab' - a'b$ *delle formule risolutive, mentre è diverso da zero almeno uno dei due numeratori* $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, *il sistema* (30) *è impossibile.*

2) Esaminiamo dopo ciò il caso, in cui, essendo sempre verificata l'ipotesi

$$ab' - a'b = 0, \tag{37}$$

si annullano simultaneamente entrambi i numeratori delle (36), cioè si ha

$$cb' - c'b = 0, \quad ac' - a'c = 0; \tag{39}$$

e supponiamo che sia diverso da zero uno almeno dei quattro coefficienti a, b, a', b' delle incognite.

Sotto quest'ultima ipotesi faremo vedere che basta tener conto, oltre che della (37), di una delle (39) per riconoscere che anche l'altra di queste è necessariamente soddisfatta, e, in ogni caso, il sistema (30) è indeterminato.

Invero, supposto, per fissare le idee, $b \gtrless 0$, si deduce dalla (37) e da quella delle (39), che contiene b, cioè, in questo caso, dalla prima,

$$a' = \frac{b'}{b} a, \qquad c' = \frac{b'}{b} c, \tag{40}$$

cosicchè intanto, moltiplicando ambo i membri di queste due uguaglianze numeriche rispettivamente per c e per a e sottraendo membro a membro, si vede che è verificata necessariamente anche la seconda della (39). Inoltre, tenendo conto delle (40), la seconda delle equazioni del dato sistema (30) si può scrivere

$$\frac{b'}{b} ax + b'y = \frac{b'}{b} c \quad \text{ossia} \quad \frac{b'}{b}(ax + by) = \frac{b'}{b} c;$$

onde si vede che, se è $b' \lessgtr 0$, questa seconda equazione delle (30) si ottiene dalla prima, moltiplicandone ambo i membri per $\frac{b'}{b}$ ed è quindi ad essa equivalente; mentre, se è invece $b' = 0$, si riduce alla identità $0 = 0$. Nell'uno e nell'altro caso, il sistema (33), ammette tutte (e sole) le soluzioni della sua prima equazione (che contiene il coefficiente b supposto diverso da zero)

$$ax + by = c,$$

cioè tutte le coppie di valori, che si ottengono da

$$x, \quad y = \frac{c - ax}{b},$$

dando alla x ogni possibile valore.

Ad analoghi risultati si perviene, supponendo diverso da zero, anzichè b, uno qualsiasi degli altri tre coefficienti a o a' o b' delle incognite. Abbiamo dunque che: *Se, sotto l'ipotesi*

$$ab' - a'b = 0, \tag{37}$$

è diverso da zero uno almeno dei quattro coefficienti delle incognite ed è nullo quello dei numeratori $cb' - c'b$, $ac' - a'c$ delle formule risolutive (36), *che contiene codesto coefficiente diverso da zero, è nullo anche l'altro numeratore, e il sistema ammette tutte* (e sole) *le soluzioni di quella delle sue due equazioni, che contiene il coefficiente supposto diverso da zero.*

In questo caso, in quanto si può attribuire un valore arbitrario ad *una* delle incognite, mentre il valore dell'altra risulta, volta per volta, corrispondentemente determinato, si dice che il sistema presenta una *indeterminazione semplice.*

3) Alle varie ipotesi esaminate sin qui sfugge soltanto il caso, in

cui siano simultaneamente nulli tutti e quattro i coefficienti delle incognite, cioè sia

$$a = 0, \quad b = 0, \quad a' = 0, \quad b' = 0;$$

ed in tal caso risultano nulli nelle formule risolutive (36), come nel caso 2), tanto il denominatore, quanto i due numeratori, cioè sono verificate sia la (37), sia le (40). Ma qui le due equazioni del dato sistema (30) si riducono alle due uguaglianze numeriche

$$0 = c, \quad 0 = c',$$

onde si vede direttamente che se anche uno solo dei termini noti c, c' è diverso da zero il sistema è *impossibile,* mentre, se è $c = 0$, $c' = 0$, svanisce completamente.

In quest'ultimo caso, in quanto il sistema si può ritener soddisfatto da ogni possibile coppia di valori di x ed y, si dice che si ha una *indeterminazione doppia* o *completa.*

52. I risultati della precedente discussione si possono raccogliere nella seguente tabella:

<table>
<tr><th colspan="3">IPOTESI</th><th>Natura del sistema</th><th>Soluzioni</th></tr>
<tr><td colspan="3">$ab' - a'b \lessgtr 0$</td><td>possibile e determinato</td><td>$x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$
$y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$ab' - a'b = 0$</td><td colspan="2">$ac' - a'c$ e $cb' - c'b$ non entrambi nulli</td><td>impossibile</td><td></td></tr>
<tr><td>$ac' - a'c = 0 \left\{\begin{matrix} a \gtrless 0 \\ a' \gtrless 0 \end{matrix}\right\}$</td><td>e quindi $cb' - c'b = 0$</td><td rowspan="2">indeterminato semplicemente</td><td>$x = \dfrac{c - by}{a}$, y arb.ia
$x = \dfrac{c' - b'y}{a'}$, y arb.ia</td></tr>
<tr><td>$cb' - c'b = 0 \left\{\begin{matrix} b \gtrless 0 \\ b' \gtrless 0 \end{matrix}\right\}$</td><td>e quindi $ac' - a'c = 0$</td><td>x arb.ia, $y = \dfrac{c - ax}{b}$
x arb.ia, $y = \dfrac{c' - a'x}{b'}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">$a = 0,\ b = 0,\ a' = 0,\ b' = 0$</td><td>$c'$, c' non entrambi nulli</td><td>impossibile</td><td></td></tr>
<tr><td>$c = 0,\ c' = 0$</td><td>indeterminato doppiamente</td><td>x arb.,ia y arb.ia</td></tr>
</table>

53. Per ricordare ed enunciare più rapidamente le formule risolutive (36) e i risultati della precedente discussione, possono tornare utili una definizione e una notazione (che si possono estendere al caso di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite e che, a dir vero, acquistano il loro pieno interesse soltanto in questo caso più generale).

I binomi $ab' - a'b$, $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, che compaiono nelle formule risolutive (36) e che hanno tanta parte nella discussione, si chiamano ciascuno (al pari di ogni binomio analogo) il *determinante* dei quattro numeri che vi compaiono, e si denotano, rispettivamente, con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Insomma, dati quattro numeri, disposti in quadrato, si dice loro *determinante* il numero, che si ottiene sottraendo dal prodotto dei due numeri, posti diagonalmente a sinistra in alto e a destra in basso, il prodotto degli altri due.

Possiamo perciò dire che *un sistema di due equazioni di* 1° *grado in due incognite è possibile e determinato sempre e soltanto quando è diverso da zero il determinante dei coefficienti delle incognite.*

Le formule risolutive (36) si possono scrivere

$$(36') \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Il denominatore comune di queste espressioni dei valori delle due incognite è appunto il determinante dei coefficienti, mentre il numeratore è, per ciascuna incognita, quel determinante, che dal denominatore si ottiene, sostituendo ai coefficienti della incognita considerata i rispettivi termini noti (portati a secondo membro). È questa la cosiddetta REGOLA DEL CRAMER, dal nome del matematico svizzero GABRIELE CRAMER (1704-1752), cui si deve questo risultato (nel caso generale di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite).

Problemi di 1° grado in due incognite

54. *Un numero (intero assoluto) di due cifre, diminuito di* 45, *dà il numero formato dalle stesse due cifre, prese in ordine inverso; e, d'altra parte, è uguale agli* $\frac{8}{3}$ *di questo secondo numero. Trovare quel numero.*

Indicate rispettivamente con x e y la cifra delle unità e quella delle decine del numero cercato, questo si può scrivere $x + 10y$, mentre il numero formato con le stesse due cifre in ordine inverso è $10x + y$. Si deve dunque avere

$$x + 10y - 45 = 10x + y, \quad x + 10y = \frac{8}{3}(10x + y).$$

Riducendo queste due equazioni a forma normale e dividendo ambo i membri della prima per 9, ambo i membri della seconda per 11, si trova

$$\begin{cases} x - \ \ y = -5 \\ 7x - 2y = 0. \end{cases}$$

Basta moltiplicare per 2 ambo i membri della prima equazione e poi sottrarla membro a membro dalla seconda per ottenere

$$5x = 10 \quad \text{e quindi} \quad x = 2.$$

Si ricava allora dalla prima equazione $y = 7$ e il numero cercato è 72.

55. *Dividendo un numero (intero assoluto) per un altro, si ottiene come quoziente* 18, *come resto* 9. *Se il primo numero si moltiplica per* 3 *e il secondo si aumenta di* 51, *si ottiene come quoziente* 9 *e come resto* 18. *Trovare i due numeri.*

Indicatili con x e y, e tenuto conto della relazione caratteristica, che intercede fra dividendo, divisore, quoziente e resto, si è condotti alle due equazioni

$$x = 18y + 9, \quad 3x = 9(y + 51) + 18,$$

ossia

$$\begin{cases} x - 18y = 9, \\ x - \ \ 3y = 159, \end{cases}$$

e si trova $x = 189$, $y = 10$.

56. *Trovare due numeri, conoscendone la somma s e la differenza d.*

Si deve avere

$$\begin{cases} x + y = s, \\ x - y = d. \end{cases}$$

Sommando membro a membro queste due equazioni e poi, similmente, sottraendole, si trova

$$2x = s + d, \quad 2y = s - d,$$

e quindi

$$x = \frac{1}{2}(s + d), \quad y = \frac{1}{2}(s - d).$$

57. *Un paese A è collegato ad un paese B da una strada, che per* 13 km. *è in salita e per altri* 8 *in discesa, e la pendenza dei due tratti è la stessa. Un ciclista per andare da A a B impiega* $1^h 42^m$. *Più tardi ritorna da B ad A, mantenendo, sia in salita che in discesa, le stesse velocità che nell'andata, e impiega a percorrere la strada un quarto d'ora di meno. Quali sono state, in km./h, le sue due velocità in salita e in discesa?*

Qui, in luogo delle velocità, conviene assumere, come incognite, il tempo x impiegato dal ciclista a percorrere 1 km. in salita e l'analogo tempo y, impiegato dal ciclista a percorrere 1 km. in discesa. Preso il minuto come unità di tempo, abbiamo subito, come equazioni del problema, le

$$\begin{cases} 13x + 8y = 102, \\ 8x + 13y = 87. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema, con uno qualsiasi dei metodi appresi ai nn. 42, 43, 48, si ottiene $x = 6$, $y = 3$. Trovati, così, quanti minuti impiega il ciclista a percorrere 1 km. in salita o in discesa, si conclude che le corrispondenti velocità sono state di 10 e di 20 km./h.

58. *Due treni, lunghi rispettivamente m.* 125 *e m.* 155, *corrono in senso inverso su due binari paralleli e impiegano a sfilare completamente l'uno davanti all'altro (dall'istante,* *in cui si trovano affiancati i fanali delle due locomotive a quello, in cui si trovano affiancati i due fanali di coda)* 10^s. *Se corressero nello stesso senso, impiegherebbero a sfilare completamente l'uno rispetto altro* $1^m 10^s$. *Quali sono, in km./h., le velocità dei due treni?*

Indichiamo con x e y le velocità dei due treni in m./sec. (cioè i numeri di metri, che l'uno o l'altro percorre in un secondo). È chiaro che, se uno dei due treni, per es. il primo, fosse fermo, l'altro impiegherebbe ancora, a sfilargli davanti, 10^s, purchè avesse una velocità uguale alla somma $x+y$ delle velocità effettive dei due treni; e poichè il secondo treno per sfilare completamente davanti al primo, deve percorrere tanti metri quant'è la somma delle lunghezze dei due treni, cioè 280 m., e ad ogni secondo percorrerebbe $x+y$ m., si deve avere

$$10(x+y)=280 \quad \text{ossia} \quad x+y=28.$$

Teniamo similmente conto di quello, che accadrebbe, se i due treni corressero nello stesso senso. Se il primo treno fosse fermo, l'altro impiegherebbe ancora $1^m 10^s$, cioè 70^s, a sfilargli completamente davanti, purchè avesse una velocità uguale alla differenza $x-y$ delle due velocità effettive, e poichè lo spazio che esso dovrebbe percorrere sarebbe ancora di 280 m., si deve avere

$$70(x-y)=280 \quad \text{ossia} \quad x-y=4.$$

Siamo dunque condotti al sistema

$$\begin{cases} x+y=28, \\ x-y=4, \end{cases}$$

che (n. 56) ammette l'unica soluzione $x=16$, $y=12$. Sono queste le velocità, in m./sec., dei due treni; quelle in km./h. sono rispettivamente 57,6 e 43,2.

Si noti che il problema ha due soluzioni, perchè il primo treno può avere indifferentemente una qualsiasi di queste due velocità (spettando, in ciascun caso, al secondo l'altra velocità).

Cenni sui sistemi di equazioni di 1° grado in più di due incognite

59. I metodi appresi ai nn. 42, 43, 48 per la risoluzione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, servono anche a risolvere i sistemi analoghi di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite.

Ci limiteremo qui a qualche considerazione sui sistemi di tre equazioni di 1° grado in tre incognite x, y, z. Per risolvere un tale sistema, si può procedere nel modo seguente. Da due delle equazioni date, per es. dalle prime due, si deduce, con uno qualsiasi dei metodi dei nn. 42, 43, 48, un'equazione che contenga soltanto due delle incognite, per es. x e y (cioè si elimina la z); e, similmente, si deduce un'altra equazione che contenga solo x e y, partendo, anzichè dalle due prime equazioni del sistema, dalla terza e da una delle altre due. Risolvendo il sistema delle due equazioni in x e y, così ottenute, si trovano i valori di queste due incognite; e basta sostituire codesti valori in una qualsiasi delle equazioni del sistema, per avere un'equazione nella sola z, la quale permette di trovare il valore di questa terza incognita.

In generale un tale sistema ammette *una soluzione* (ed una sola); ma naturalmente possono anche qui presentarsi *casi di impossibilità* o *di indeterminazione*. La impossibilità si verifica, quando una delle equazioni contraddice ad una delle altre (o ad entrambe). La indeterminazione può essere di diverse specie. Può darsi anzitutto che il sistema contenga due equazioni distinte, mentre la terza sia una combinazione lineare delle prime due o si riduca addirittura ad una identità; ed allora il sistema ammette infinite soluzioni, in quanto una delle incognite resta libera di assumere ogni possibile valore, e a ciascuno di questi valori corrispondono per le altre due incognite valori determinati (caso d'indeterminazione *semplice*). In secondo luogo può accadere che il sistema sia equivalente ad una sola delle sue equazioni, mentre ciascuna delle altre due sia equivalente alla prima o si riduca ad una identità; ed allora il sistema ammette tutte le soluzioni di quell'unica equazione, talchè si possono dare valori arbitrarî a due incognite, restando, volta per volta, determinato il valore della terza (caso d'indeterminazione *doppia*). Può infine succedere che tutte e tre le equazioni del sistema si riducano ad identità, ed allora le incognite restano libere di assumere ciascuna, indipendentemente dalle altre, ogni possibile valore (caso d'indeterminazione *completa* o *tripla*).

Di tali eventualità eccezionali ci riserviamo di indicare qualche esempio negli Esercizî, e qui ci accontenteremo di applicare il procedimento di risoluzione dianzi accennato a due sistemi aventi effettivamente una soluzione (ed una sola).

60. 1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x - 2y - 2z = 3, \\ 3x + 4y + 2z = 13. \end{cases}$$

Se eliminiamo la z dalle due prime equazioni, prendendone la combinazione lineare di moltiplicatori 2 e -1, e così dalla seconda e dalla terza, sommandole membro a membro (e dividendo poi ambo i membri per 2), otteniamo il sistema in x e y

$$\begin{cases} 3x + 8y = -1, \\ 2x + y = 8, \end{cases}$$

che ammette la soluzione $x = 5$, $y = -2$. Sostituendo questi valori nella prima equazione del sistema si trova $z = 3$, onde il sistema ammette la soluzione $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$.

2) Similmente risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ ax + by + cz = 0, \\ a^2x + b^2y + c^2z = (a-b)(b-c)(c-a), \end{cases}$$

dove a, b, c si suppongono disuguali a due a due.

Le due combinazioni lineari di moltiplicatori $-c$ ed 1 delle due prime equazioni e della seconda e della terza danno il sistema in x e y

$$\begin{cases} (a-c)x + (b-c)y = 0, \\ a(a-c)x + b(b-c)y = (a-b)(b-c)(c-a), \end{cases}$$

la cui soluzione è $x = c - b$, $y = a - c$. Sostituendo nella prima equazione del sistema, si ottiene per z il valore $b - a$, onde la soluzione del sistema è data da

$$x = c - b, \quad y = a - c, \quad z = b - a.$$

Capitolo II

Estrazione di radice quadrata e numeri reali

Preliminari

1. Abbiamo visto che per risolvere le equazioni e i sistemi di 1° grado occorrono soltanto *addizioni algebriche, moltiplicazioni* e *divisioni*, cosicchè, comunque si prefissino i valori interi o fratti dei coefficienti delle equazioni considerate, si trovano sempre (salvi i casi di impossibilità) certi valori, pur essi interi o fratti, che soddisfano alla data equazione o al dato sistema.

Ci proponiamo qui di far vedere che quando, invece, si passa alla risoluzione delle equazioni di 2° grado, si è condotti ad applicare, oltre le operazioni fondamentali suaccennate, un altro tipo di operazione, già noto per pratica dalle Scuole inferiori, cioè la *estrazione di radice quadrata*. onde poi risulterà, che, quando si fissino a caso i valori interi o fratti dei coefficienti di un'equazione di 2° grado, in generale accade, che non esiste nessun numero intero o fratto, che la renda soddisfatta.

Per fissare l'attenzione su problemi semplici e ben noti, ricorriamo alla teoria delle proporzioni fra grandezze geometriche, che abbiamo studiato di recente. In questa teoria si presentano due problemi fondamentali:

1) *costruzione della quarta proporzionale* dopo tre grandezze date, per es. dopo tre segmenti;

2) *costruzione della media proporzionale* fra due grandezze date, per es. fra due segmenti.

Il primo, come già sappiamo (V_1, n. 2) è un problema di 1° grado. Se invero sono a, b, c le lunghezze (assolute e diverse da zero) dei tre segmenti dati, la lunghezza x del quarto proporzionale è definita dall'equazione

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

che, liberata dai denominatori, dà luogo all'equazione di 1° grado (normale)

$$ax = bc,$$

la quale, comunque siano stati prefissati i numeri interi o fratti a, b, c (per natura loro diversi da zero), ammette, come sua unica soluzione, il numero, pur esso intero o fratto,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Consideriamo, invece, il secondo problema. La lunghezza x del medio proporzionale fra due segmenti a e b è definita dall'equazione

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

che, liberata dai denominatori, si trasforma nell'equazione di 2° grado, di tipo particolarmente semplice,

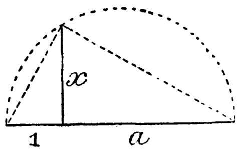
$$x^2 = ab;$$

e possiamo anzi semplificarla ulteriormente, supponendo di voler trovare il medio proporzionale fra il segmento unità e quello di lunghezza (assoluta) a, talchè si sia condotti all'equazione

(1) $$x^2 = a.$$

Ora si vede facilmente che, quando si fissi per a un valore intero o fratto, non esiste, per lo più, nessun valore intero o fratto, che renda soddisfatta l'equazione (1). Invero, si rifletta che, se una frazione numerica $\frac{p}{q}$ è irriducibile (cioè a termini primi fra loro), anche il suo quadrato $\frac{p^2}{q^2}$ è irriducibile (perchè i fattori primi di p^2 e q^2 sono quelli stessi di p e, rispettivamente, q, presi ciascuno due volte). Perciò la equazione (1) non può essere soddisfatta da un x intero, se non quando a sia il quadrato di un numero intero, cioè uno dei cosiddetti *quadrati perfetti* 1, 4, 9, 16,...; e non può essere soddisfatta da una frazione $\frac{p}{q}$, se non quando a sia una frazione, i cui due termini siano entrambi quadrati perfetti.

Esclusi questi due casi speciali, la (1) non ammette, nel campo dei numeri interi e fratti, nessuna soluzione.



Questo risultato sembra, a tutta prima, in contraddizione col fatto geometrico ben noto, che il problema, che ci ha condotti alla (1), ammette sempre una soluzione. Sappiamo infatti che il medio proporzionale fra due dati segmenti si può sempre costruire (con riga e compasso), per es. applicando la costruzione ricordata dall'annessa figura [1].

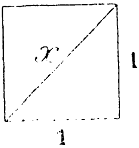
Ma, riflettendo meglio, si riconosce, che non vi è contraddizione alcuna. Infatti, nella misurazione delle grandezze geometriche si è visto che i numeri interi e fratti permettono di misurare soltanto le grandezze *commensurabili* con l'unità, e che per misurare anche quelle *incommensurabili*, bisogna estendere il campo dei numeri, introducendo, accanto ai numeri interi e fratti, che nel loro insieme si sono detti *razionali*, un nuovo tipo di numeri, che si sono chiamati *irrazionali*.

Ricordiamo anzi che l'esistenza di coppie di grandezze incommensurabili si è stabilita, indicando, come esempio tipico, il *lato* e la *diagonale*

---

[1] F. Enriques-U. Amaldi - *Geometria elementare*, Geom. piana, Parte II; Bologna, Zanichelli; Cap. VI, n. 24.

di un quadrato; e la incommensurabilità di questi due segmenti si è dimostrata, osservando che la lunghezza della diagonale rispetto al lato non può essere un numero intero o fratto, in quanto deve, in forza del teorema di Pitagora, soddisfare appunto ad un'equazione del tipo (1), cioè alla



$$x^2 = 2.$$

Orbene, faremo qui vedere che *ogni qual volta un'equazione del tipo* (1) *non ammette soluzione nel campo dei numeri razionali* (cioè, come si è detto, interi o fratti), *è soddisfatta da un numero irrazionale* (il che geometricamente vuol dire che il medio proporzionale fra l'unità e il segmento di lunghezza a è, in tal caso, incommensurabile con l'unità).

Ma per ben chiarire questo risultato fondamentale e, al tempo stesso, per fissare in modo preciso le nozioni aritmetiche, che ci occorreranno nel seguito, è necessario che prima, in una digressione, richiamiamo per sommi capi in qual modo, nella misurazione delle grandezze geometriche, si sia stati condotti alla definizione dei numeri irrazionali e delle operazioni su di essi [1].

Numeri reali

2. Torniamo dunque alla misurazione delle grandezze geometriche, e, per semplicità, riferiamoci al caso dei segmenti. Avvertiamo una volta per tutte che qui, per la natura stessa della questione, intenderemo per il momento di parlare esclusivamente di numeri *assoluti*.

Fissato un segmento U come unità, ricordiamo che un segmento A si dice *commensurabile* con U, se esiste un qualche sottomultiplo $\frac{1}{q}U$ dell'unità U, il quale sia conte-

---

[1] F. Enriques-U. Amaldi - Ibidem, Cap. VIII.

nuto un numero esatto di volte p in A, talchè sia

$$A = p\left(\frac{1}{q}U\right),$$

o, come si suole scrivere,

$$A = \frac{p}{q}U. \tag{2}$$

In tal caso è appunto il numero razionale $\frac{p}{q}$, che si assume come *rapporto* $A:U$ di A ad U o *misura* di A rispetto all'unità U. Questo rapporto o misura $\frac{p}{q}$ individua esattamente il segmento A rispetto alla unità U, in forza della relazione (2); e va notato che ogni altro numero razionale $\frac{m}{n}$ risulta minore o maggiore di $\frac{p}{q}$, secondo che si ha

$$\frac{m}{n}U < A \quad \text{o, rispettivamente,} \quad \frac{m}{n}U > A.$$

Passiamo dopo ciò al caso, in cui A sia *incommensurabile* con U, cioè non contenga un numero esatto di volte nessun sottomultiplo di U. In questo caso non è più possibile individuare il rapporto $A:U$ per mezzo di un numero razionale, ma si arriva al medesimo risultato, ricorrendo ad un procedimento di *indefinita approssimazione.*

Preso un qualsiasi numero razionale $\frac{m}{n}$, il corrispondente segmento, commensurabile con l'unità, $\frac{m}{n}U$ è, in questo caso, necessariamente minore o maggiore di A; e si continua a dire che $\frac{m}{n}$ è minore o maggiore del rapporto $A:U$, secondo che è

$$\frac{m}{n}U < A \quad \text{oppure} \quad \frac{m}{n}U > A.$$

Più precisamente, se $\frac{m}{n}$ è tale, che risulti simultaneamente

$$\frac{m}{n} U < A < \frac{m+1}{n} U,$$

si dice che $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$ sono, per il rapporto $A:U$, i due *valori approssimati, a meno di* $\frac{1}{n}$, il primo *per difetto*, il secondo *per eccesso.*

E, incidentalmente, conviene osservare, che nulla di più occorre per la pratica. Infatti, in ogni applicazione concreta è perfettamente inutile considerare per le grandezze, di cui si tratta, i sottomultipli al disotto di un certo grado di piccolezza, perchè già i nostri sensi e gli stessi strumenti di misura, di cui ci serviamo, non ci permettono di valutarli; e, caso per caso, si può senza danno fermarsi ad una conveniente approssimazione.

Volendo, anche in questo caso della incommensurabilità, determinare esattamente il rapporto $A:U$, bisogna profittare della possibilità di spingere la valutazione approssimata di tale rapporto quanto avanti si vuole, e tenere conto insieme di tutti gli infiniti suoi lavori approssimati (per difetto e per eccesso). Precisamente si pensi ripartito il campo di *tutti* i numeri razionali assoluti (*escluso lo* 0) in due classi H e K, assegnando alla classe H tutti i numeri razionali minori di $A:U$ (valori approssimati per difetto), alla classe K tutti i numeri razionali maggiori (valori approssimati per eccesso). Si viene così a determinare nel campo dei numeri razionali la cosiddetta *sezione* $(H \mid K)$, corrispondente al rapporto $A:U$, la quale è perfettamente analoga a quella, che, nel caso di due grandezze commensurabili di rapporto $\frac{p}{q}$, si otterrebbe, assegnando ad una classe H tutti i numeri razionali minori di $\frac{p}{q}$, alla classe K tutti i numeri maggiori. La sola differenza sta nel fatto, che, mentre nel caso di A incommensurabile con U le due classi contengono *tutti*, senza eccezione, i numeri razionali, nel caso di A commensurabile con U ne resta escluso *uno* (ed uno solo), precisamente il numero $\frac{p}{q}$, che dà il rapporto delle due grandezze. Se i numeri razionali si pensano ordinati nel loro ordine crescente, si può dire che in entrambi i casi le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, andando, per così dire, l'una verso l'altra, individuano il posto occupato, in codesto insieme ordinato di numeri, dal rapporto $A:U$. Se A ed U sono commensurabili, un tale posto è precisamente quello del valore razionale del rispettivo rapporto; se, invece, A ed U sono incommensurabili, al loro rapporto corrisponde, nell'insieme ordinato dei numeri razionali, una lacuna; ed è a questa lacuna, che si fa corrispondere, per definizione, uno di quei numeri di nuovo tipo, che si sono chiamati *irrazionali* (assoluti).

Così, ricorrendo alle corrispondenti sezioni, si definiscono nello stesso modo tanto i numeri razionali, quanto quelli irrazionali, i primi come rapporti di grandezze commensurabili, i secondi come rapporti di grandezze incommensurabili.

Gli uni e gli altri, nel loro insieme, costituiscono il campo dei *numeri reali* (assoluti).

3. Alla definizione dei numeri irrazionali, per mezzo delle corrispondenti sezioni, siamo pervenuti in base alla considerazione *geometrica* dei rapporti delle grandezze. Ma importa rilevare che a codesta definizione si può dare anche una forma puramente *aritmetica* e, perciò, più adatta allo studio dell'Algebra.

A tal fine si osservi anzitutto che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, che definiscono la sezione $(\boldsymbol{H}|\boldsymbol{K})$, corrispondente ad un qualsiasi numero reale (cioè, come or ora si è detto, razionale o irrazionale), godono delle seguenti tre proprietà:

1) *Ogni numero razionale* (assoluto e diverso da 0), ***eccettuato al più uno***, *appartiene ad una (e ad una sola) delle due classi.*

2) *La classe* $\boldsymbol{H}$ *contiene, con ogni suo numero, anche tutti i numeri razionali minori: e la classe* $\boldsymbol{K}$ *contiene, con ogni suo numero, anche tutti i numeri razionali maggiori.*

3) *La classe* $\boldsymbol{H}$ *non contiene un* massimo *(cioè un numero maggiore di tutti gli altri), nè la classe* $\boldsymbol{K}$ *contiene un* minimo *(cioè un numero minore di tutti gli altri).*

Orbene, si dimostra che, viceversa, comunque si riesca a ripartire il campo dei numeri razionali assoluti (escluso lo 0) in due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, le quali godano delle proprietà 1), 2), 3), queste due classi costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$, corrispondente ad un determinato numero reale; cioè esiste sempre un numero reale (ed uno solo), che è maggiore di tutti i numeri della classe $\boldsymbol{H}$ e minore di tutti i numeri della classe $\boldsymbol{K}$.

Infatti, si distinguano due casi, secondo che le due classi lasciano fuori un numero razionale (e per la prima proprietà non può essere che uno solo), oppure li comprendono tutti. Nel primo caso l'unico numero razionale escluso deve essere, in forza della proprietà 2), necessariamente maggiore di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$, minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}$, cosicchè le due classi costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$, corrispondente a codesto numero razionale. Se poi le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ comprendono tutti i numeri razionali, si è visto in Geometria, tenendo conto della *continuità* delle grandezze, che esiste sempre un segmento A (ed uno solo), necessariamente incommensurabile con l'unità U, il quale ammette, rispetto ad U, un rapporto $A:U$, maggiore di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$, minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}$; cioè le due classi date costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$, corrispondente al rapporto irrazionale $A:U$.

Concludiamo, dunque, che *le sezioni del campo dei numeri razionali, che corrispondono a tutti i possibili numeri reali, sono caratterizzate dalle tre proprietà* 1), 2), 3).

D'or innanzi, quando vorremo indicare che un certo numero reale a corrisponde ad una sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$, scriveremo

$$a = (\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K}).$$

4. Sempre restando nel campo dei numeri assoluti, notiamo che ogni numero irrazionale, per la sua stessa definizione, occupa un posto ben determinato nell'ordine crescente dei numeri razionali, cosicchè resta senz'altro stabilito un *ordine crescente di tutti i numeri reali assoluti.*

Di qui e dalle note proprietà della disuguaglianza fra numeri razionali seguono immediatamente i criterî di disuguaglianza fra numeri reali, in particolare fra numeri irrazionali. Dati due numeri reali a ed a', il primo è *maggiore* del secondo ($a > a'$), e quindi il secondo è *minore* del primo ($a' < a$), quando esiste qualche numero razionale, che sia al tempo stesso minore di a e maggiore di a' (e in tal caso esistono manifestamente infiniti numeri razionali siffatti). Pensando le sezioni $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$, corrispondenti, rispettivamente, ad a ed a', è $a > a'$, quando la classe $\boldsymbol{H}$ contiene qualche numero, che appartiene anche a $\boldsymbol{K}'$ (ed in tal caso le due classi hanno comuni infiniti numeri).

Due numeri reali non possono essere *uguali*, se non quando tutti i numeri razionali minori o maggiori dell'uno sono pur minori o, rispettivamente, maggiori dell'altro; cioè, quando le sezioni corrispondenti ai due numeri coincidono.

E da queste definizioni dell'uguaglianza e della disuguaglianza nel campo dei numeri reali discende senz'altro che si conservano valide per codeste relazioni le stesse proprietà formali, che valevano nel campo dei numeri razionali.

5. La definizione di un numero irrazionale a per mezzo della corrispondente sezione fa intervenire la totalità dei numeri razionali. Ma è manifesto che, per individuare il numero considerato, sono, per così dire, inutili i numeri troppo lontani, e bastano quelli prossimi ad esso.

Si può limitarsi a considerare, nella classe minore $\boldsymbol{H}$ della corrispondente sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, soltanto i numeri maggiori di uno di essi preso ad arbitrio, per es. del valore approssimato (per difetto) di a a meno di 1 o di $\frac{1}{10}$ o di $\frac{1}{100}$, ecc.; e così, nella classe maggiore K, si possono prendere soltanto i numeri minori di un analogo valore approssimato per eccesso. E non occorre nemmeno tener conto di tutti i numeri razionali, che così rimangono: basta estrarre dalla classe H o dalla K, o da tutte e due, una successione di infiniti valori *progressivamente approssimati* ad a.

In particolare, si può in tal modo ottenere per il numero irrazionale a una rappresentazione sotto *forma decimale*, analoga a quella consueta per i numeri razionali, che sono tutti rappresentabili come decimali limitati, oppure illimitati ma periodici [1]. A tal fine si cominci col prendere il massimo

---

[1] Ricordiamo dall'Aritmetica che se una frazione $\frac{p}{q}$, che supporremo ridotta ai minimi termini, si riduce in numero decimale, dividendone il numeratore per il denominatore con la nota regola per la divisione dei numeri interi, si ottiene un numero *finito* di cifre decimali, cioè un *decimale limitato*, soltanto quando il denominatore q non ammette divisori primi diversi dal 2 e dal 5. In tutti gli altri casi si ottengono *infinite* cifre decimali, le quali per altro si presentano (almeno da un certo posto in poi) *periodicamente*; cioè si ottiene un *decimale illimitato periodico* (con un eventuale *antiperiodo*). Per es.

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots; \quad \frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots; \quad \frac{49}{15} = 3{,}26666\ldots; \text{ ecc.}$$

o, come si suole anche scrivere,

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}; \qquad \frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}; \qquad \frac{49}{15} = 3{,}2\overline{6}; \text{ ecc.}$$

Viceversa ogni decimale illimitato periodico si può ottenere scrivendo in forma decimale una determinata frazione. Le regole per trovare le *frazioni generatrici* dei decimali illimitati periodici sono le seguenti:

1) La generatrice di un decimale periodico *semplice* (cioè privo di antiperiodo) ha per denominatore il numero formato da tante cifre 9, quante sono le cifre del periodo, e per numeratore il numero che si ottiene, sottraendo la eventuale parte intera dal numero formato da questa eventuale parte intera, seguita dal periodo.

2) La generatrice di un decimale periodico *misto* (cioè dotato di antiperiodo) ha per denominatore il numero formato da tante cifre 9 quante

intero contenuto in H (o lo zero, se questa classe non contiene nessun numero intero). Se così si trova, ad es., il 2, vuol dire che il 3 è in K, cioè a è compreso fra 2 e 3: e 2 è la *parte intera* di a. Poi dei numeri

$$2, \qquad 2{,}1 \qquad 2{,}2 \qquad 2{,}3 \ \ldots \ 2{,}9$$

si prenda l'ultimo, che appartiene ad H. Se esso è 2,7, il consecutivo, cioè 2,8 si trova in K, e 2,7 è il valore approssimato per difetto di a a meno di 0,1, mentre 2,8 è il corrispondente valore approssimato per eccesso.

Similmente si troveranno due analoghi valori approssimati a meno di 0,01, per es. 2,71 e 2,72; due valori approssimati a meno di 0,001, per es. 2,718 e 2,719; e così via.

Il procedimento non avrà mai termine, perchè ogni numero razionale è necessariamente minore o maggiore di a, per ipotesi irrazionale; cosicchè si sarà condotti a due successioni di infiniti decimali ciascuna

$$(3) \qquad 2 \qquad 2{,}7 \qquad 2{,}71 \qquad 2{,}718 \ \ldots,$$

$$(4) \qquad 3 \qquad 2{,}8 \qquad 2{,}72 \qquad 2{,}719 \ \ldots,$$

nella prima delle quali si hanno i valori approssimati di a per difetto, a meno di 1, di 0,1, di 0,01, di 0,001,... e nella seconda i corrispondenti valori approssimati per eccesso; e

---

sono le cifre del periodo, seguite da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo; il numeratore si ottiene, sottraendo la eventuale parte intera, seguita dall'antiperiodo, dal numero formato da codesta eventuale parte intera, seguita dall'antiperiodo e dal periodo.

Per es.,

$$0{,}\overline{63} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}; \quad 0{,}8\overline{3} = \frac{83-8}{90} = \frac{5}{6};$$

$$3{,}7\overline{3} = \frac{373-37}{90} = \frac{56}{15}; \text{ ecc.}$$

Dai decimali illimitati periodici si escludono quelli di periodo 9, perchè ciascuno di essi è sostituibile con un decimale limitato. Per es.,

$$0{,}999\ldots = 1; \quad 0{,}35999\ldots = 0{,}36; \quad 7{,}15999\ldots = 7{,}16; \text{ ecc.}$$

si riconosce facilmente che il solo numero reale, che sia maggiore di tutti i numeri della successione (3), minore di tutti quelli della (4) è appunto il numero irrazionale a. Ciò si esprime scrivendo

$$a = 2{,}718\ldots,$$

dove a secondo membro i puntini stanno ad indicare le infinite cifre decimali, che si otterrebbero, continuando indefinitamente il procedimento dianzi indicato.

E qui va aggiunta una osservazione essenziale. *Le infinite cifre, che successivamente si ottengono per un qualsiasi numero irrazionale* a, *non possono mai presentarsi periodicamente.* Se, invero, così accadesse, e si avesse, ad es.,

$$a = 2{,}718718718\ldots,$$

cioè si presentasse il periodo 718, l'unico numero maggiore di tutti i numeri della successione (3), minore di tutti quelli della (4) sarebbe, non già il numero irrazionale a, bensì il numero razionale (*frazione generatrice* del decimale periodico)

$$\frac{2718-2}{999} = \frac{2716}{999}.$$

Abbiamo dunque, che ogni numero irrazionale si può rappresentare sotto forma di un *decimale illimitato non periodico.*

Viceversa, se si prefissa ad arbitrio un decimale illimitato non periodico, quale ad es.

$$(5) \qquad 3{,}121122111222\ldots,$$

si riconosce agevolmente che esso rappresenta un ben determinato numero irrazionale. Infatti, si assegnino ad una classe $\boldsymbol{H}$ tutti i numeri razionali

$$(6) \qquad 3 \qquad 3{,}1 \qquad 3{,}12 \qquad 3{,}121 \qquad 3{,}1211 \;\ldots$$

(ottenuti da (5), prendendo successivamente la parte intera o una, o due, o tre,... cifre decimali) e, con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali minori; si assegnino invece ad una classe K i numeri razionali

(7) 4 3,2 3,13 3,122 3,1212 . . .

(ottenuti dai (6), aumentandone di 1 l'ultima cifra) e, con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali maggiori. È facile convincersi che queste due classi costituiscono una sezione $(H|K)$, la quale, in quanto dalle due classi non resta escluso nessun numero razionale, definisce un numero irrazionale. Questo numero risulta maggiore di tutti i numeri razionali (6) e minore di tutti i numeri (7), cosicchè, quando si scriva sotto forma decimale, dà luogo appunto al decimale illimitato (5).

Così, tenendo conto delle osservazioni precedenti e delle note proprietà dei decimali periodici, si conclude che: *Ogni numero reale è rappresentabile sotto forma di numero decimale* (limitato o illimitato e, in questo secondo caso, periodico o no); *e, viceversa, ogni numero decimale rappresenta un numero reale. Si tratta di un numero razionale, se il decimale è limitato oppure illimitato ma periodico; di un numero irrazionale se il decimale è illimitato e non periodico.*

6. Si è visto in Geometria che la interpretazione dei numeri irrazionali assoluti come rapporti di grandezze incommensurabili conduce a definire *geometricamente* per codesti numeri le operazioni fondamentali di *addizione, moltiplicazione, sottrazione* e *divisione,* in pieno accordo col caso dei numeri razionali (rapporti di grandezze commensurabili). Ma si è pur visto che codeste operazioni si possono definire anche *in modo puramente aritmetico,* partendo dalle sezioni corrispondenti ai numeri, su cui si vuole operare. Basta farsi guidare dalla analogia col caso dei numeri razionali, quando anche per questi si pensino le corrispondenti sezioni.

Cominciando dall'addizione, si osserva che se a ed a' sono due numeri razionali, la somma $a + a'$ è maggiore di tutte le somme che hanno per addendi due valori approssimati per difetto di a ed a', mentre è minore di tutte le analoghe somme di due valori approssimati per eccesso. Così, per definire la somma $a + a'$ di due numeri *reali* assoluti quali si vogliano, corrispondenti alle sezioni $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$ rispettivamente, si dimostra anzitutto che, se si indica con $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}'$ la classe formata da tutti i numeri, che si ottengono sommando a ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ ciascun numero di $\boldsymbol{H}'$, e con $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}'$ la classe formata analogamente coi numeri di $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}'$, queste due classi definiscono in ogni caso una sezione (per la dimostrazione vedansi gli Esercizî). Dopo ciò, si definisce come *somma* $a + a'$ dei due numeri reali a ed a' il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}')$.

Similmente, per definire il prodotto aa' di due numeri reali assoluti quali si vogliano $a = (\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $a' = (\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$, si comincia col dimostrare (vedansi gli Esercizî) che in ogni caso risulta definita una sezione dalle due classi $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}'$ e $\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'$, di cui la prima è costituita da tutti i numeri, che si ottengono, moltiplicando ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascun numero di $\boldsymbol{H}'$, e la seconda è formata analogamente coi numeri di $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}'$. Se a ed a' sono entrambi razionali, è manifesto che il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}')$ è il prodotto aa' di a per a'. In ogni altro caso, si assume, per definizione, come *prodotto* aa' dei due numeri reali assoluti a, a' il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}')$.

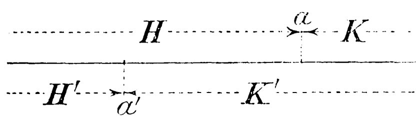
E questa definizione si completa, assumendo uguale a zero sia il prodotto di un qualsiasi numero reale per lo zero, sia il prodotto dello zero per un qualsiasi numero reale.

Dalle stesse definizioni dianzi ricordate risulta senz'altro che per l'addizione e la moltiplicazione, così estese al campo di tutti i numeri reali, assoluti, si mantengono valide tutte le proprietà formali, che per tali operazioni valgono nel campo dei numeri razionali (I, n. 3).

7. Giova osservare che dalla precedente definizione di prodotto segue, in particolare, la definizione delle successive *potenze* (ad esponente intero positivo od assoluto) di un qualsiasi numero reale $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$. Per es. il quadrato a^2 corrisponde alla sezione $(\boldsymbol{H}^2 | \boldsymbol{K}^2)$, dove $\boldsymbol{H}^2$ denota quella classe, che contiene non soltanto i quadrati di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$, bensì anche tutti i prodotti, che si ottengono moltiplicando ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascuno degli altri numeri della stessa classe; e $\boldsymbol{K}^2$ ha un significato analogo.

8. Passiamo alle operazioni inverse sui numeri reali assoluti.

Qualche speciale avvertenza occorre per la *sottrazione*. Dati due numeri reali $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, $a' = (\boldsymbol{H}' | \boldsymbol{K}')$, supponiamo $a > a'$. Ciò vuol dire (n. 4) che vi sono infiniti numeri razionali minori di a, cioè appartenenti alla classe $\boldsymbol{H}$, che sono maggiori di a', cioè appartengono alla classe $\boldsymbol{K}'$.



Si formi allora la classe $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, costituita da tutte le differenze, che si ottengono, sottraendo da ciascuno di quei numeri di $\boldsymbol{H}$, che appartengono anche a $\boldsymbol{K}'$, ciascuno dei numeri di $\boldsymbol{K}'$ minori di esso; e, d'altra parte, si formi la classe $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$, costituita da tutte le differenze, che si ottengono, sottraendo da ciascun numero di $\boldsymbol{K}$ ciascuno dei numeri di $\boldsymbol{H}'$ (i quali sono tutti minori). Le due classi $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$, così costruite, costituiscono (vedansi gli Esercizî) una sezione; e se il numero corrispondente a questa sezione $(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}' | \boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}')$ si somma, secondo il n. 6, al numero $a' = (\boldsymbol{H}' | \boldsymbol{K}')$, si ottiene precisamente il numero $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$. Perciò, in ogni caso, il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}' | \boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}')$ è la *differenza* $a - a'$ dei due numeri reali assoluti dati.

Infine, si dimostra (vedansi gli Esercizî) che, in ogni caso, risulta definita una sezione dalle due classi $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}'}, \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{H}'}$, dove $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}'}$ denota la classe di tutti i quozienti, che si ottengono dividendo ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascun numero di K', e la $\frac{K}{H'}$, è formata in modo analogo coi numeri delle classi K e H'. Di più si riconosce, che se il numero corrispondente alla sezione $\left(\frac{H}{K'}\middle|\frac{K}{H'}\right)$ si moltiplica, secondo il n. 6, per il numero $a' = (H' \mid K')$, si ottiene come prodotto il numero $a' = (H \mid K)$.

Perciò, in ogni caso, la sezione $\left(\frac{H}{K'}\middle|\frac{K}{H'}\right)$ definisce il *quoziente* $\frac{a}{a'}$, dei due numeri reali dati.

9. Nella pratica i numeri reali non si individuano per mezzo delle corrispondenti sezioni, ma se ne considerano valori approssimati (con un grado di approssimazione conveniente alla natura della questione che si vuol trattare); e i calcoli si fanno su questi valori approssimati.

Le norme fondamentali, che si debbono osservare in questi calcoli sono suggerite dalle stesse definizioni, che ai nn. prec. si sono indicate per le operazioni sui numeri reali, quando si pensino individuati per mezzo delle corrispondenti sezioni.

Così dal n. 6 risulta che, per avere un *valore per difetto* (o *per eccesso*) della *somma* o del *prodotto* di due (o più) numeri, basta sommare o moltiplicare fra loro altrettanti valori *per difetto* (o, rispettivamente, *per eccesso*) degli addendi o dei fattori.

Invece dal n. prec. discende che per avere un valore *per difetto* della differenza $a - a'$ di due numeri, basta prendere un valore *per difetto* h del minuendo, il quale sia maggiore del sottraendo a', e poi sottrarre da esso un valore *per eccesso* k' del sottraendo, il quale sia minore di h; e per avere un valore *per eccesso* basta sottrarre da un valore *per eccesso* k del minuendo un valore *per difetto* h' del sottraendo.

Infine per avere un valore *per difetto* di un quoziente, basta dividere un valore *per difetto* del dividendo per un valore *per eccesso* del divisore, mentre per avere del quoziente un valore *per eccesso*, basta dividere un valore *per eccesso* del dividendo per un valore *per difetto* del divisore.

Naturalmente il grado di approssimazione del risultato di ciascuna di queste operazioni dipende dal grado di approssimazione, con cui si son presi i dati; e vi sono regole, che permettono di prevedere quale grado di approssimazione abbia il risultato, quando i dati hanno un certo numero di cifre decimali esatte, o, viceversa, quante cifre esatte occorra avere nei dati, perchè il risultato presenti un prefissato grado di approssimazione. Vedansi in proposito gli Esercizi.

10. Sinora si è parlato esclusivamente di numeri reali *assoluti*. Ma, per le medesime ragioni che, fin dall'inizio dello studio dell'Algebra, ci hanno condotti ad introdurre i numeri razionali relativi, si considerano, accanto a questi, i numeri *irrazionali relativi,* cioè contrassegnati col + o col —, o, come anche qui si suol dire, *positivi* e *negativi*. I numeri relativi razionali ed irrazionali costituiscono, insieme con lo 0, il cosiddetto *campo dei numeri reali relativi*.

Ogni numero reale *positivo* si può pensare definito per mezzo di una sezione nel campo dei soli numeri razionali *positivi* (si ricordi l'osservazione fatta, per i numeri reali assoluti, al principio del n. 5); e, così, ogni numero reale *negativo* per mezzo di una sezione nel campo dei numeri reali *negativi*.

A questa definizione per mezzo di sezioni nel campo dei soli numeri positivi o dei soli numeri negativi fa eccezione lo 0, che corrisponde alla sezione costituita dalla classe di tutti i numeri negativi e da quella di tutti i numeri positivi.

Vale, naturalmente, per tutti i numeri reali relativi (cioè indifferentemente razionali o irrazionali) la rappresentazione geometrica per mezzo dei punti di una retta graduata, di cui sinora ci siamo sempre serviti limitatamente al caso di quelli razionali (I, n. 1). Ma qui va fatta una osservazione altrettanto ovvia, quanto importante. Ora che disponiamo di tutti i numeri razionali ed irrazionali, non solo ad ogni numero corrisponde sulla retta graduata un punto (ed uno solo), ma, viceversa, ad ogni punto, comunque preso sulla retta, corrisponde un numero (ed uno solo), mentre, quando si consideravano soltanto i numeri razionali, restavano esclusi quei punti, che dall'origine hanno una distanza incommensurabile con l'unità.

Questo fatto si esprime, dicendo che fra i numeri reali relativi e i punti di una retta graduata vi è una corrispondenza *biunivoca*, cioè univoca in entrambi i sensi (tanto fra numeri e punti, quanto fra punti e numeri).

11. Ai numeri reali relativi si estendono altresì le note regole (I, n. 2) per le operazioni fondamentali (addizione algebrica, moltiplicazione, divisione), le quali, come ben sappiamo, all'infuori delle norme per i segni, si riducono ad operazioni sui valori assoluti dei numeri relativi, su cui si vuole operare.

E per queste operazioni sui numeri reali relativi si conservano valide tutte le *proprietà formali*, che sussistono nel campo dei numeri razionali relativi (I, n. 3) e che già estendemmo ai numeri reali assoluti (n. 6).

12. D'or innanzi, tutte le volte che parleremo di « numeri », senza aggiungere alcuna avvertenza in contrario, intenderemo di riferirci a numeri reali relativi. E potremo senz'altro applicare tutti i teoremi e i procedimenti di calcolo letterale, sinora appresi, in quanto essi discendono tutti, direttamente o indirettamente, dalle proprietà formali delle operazioni fondamentali, che, come si è notato or ora, si mantengono valide nel campo di tutti i numeri reali relativi.

Così, ad es., varranno nel campo dei numeri reali relativi le regole per il calcolo delle potenze ad esponente intero (positivo o negativo) e le proprietà fondamentali delle disuguaglianze (I, nn. 4, 5).

E seguiteranno a valere, senza eccezione, i principî generali sulle equazioni (I, nn. 25-32) e le regole per la risoluzione delle equazioni di 1° grado (I, n. 33) e dei corrispondenti sistemi (I, nn. 38-59), anche quando i coefficienti di queste equazioni e di questi sistemi siano numeri relativi quali si vogliano, anzichè soltanto razionali, come accadeva nel primo nostro studio di tali argomenti.

Estrazione di radice quadrata dei numeri reali assoluti

13. Torniamo, dopo la precedente digressione, alla equazione di 2° grado

(1) $$x^2 = a,$$

e studiamola dapprima nel campo dei numeri reali assoluti, supponendo, naturalmente, che tale sia il numero a.

Ricordiamo che la (1) traduce in equazione il problema geometrico della costruzione del medio proporzionale fra l'unità e il segmento di lunghezza a (ed a sarà razionale o irrazionale, secondo che si tratta di un segmento commensurabile o incommensurabile con l'unità). Poichè sappiamo dalla Geometria che questo medio proporzionale si può sempre costruire, e risulta, in ogni caso, ben determinato, abbiamo senz'altro che la sua lunghezza fornisce una soluzione della (1) ed è anzi l'unica soluzione, che questa equazione possa ammettere nel campo dei numeri reali assoluti. Qui possiamo oramai aggiungere che, se a non è quadrato perfetto o quoziente di due quadrati perfetti (n. 1), quest'unica soluzione della (1) sarà un numero irrazionale.

In ogni caso, questo numero, che elevato a quadrato dà il numero a, si chiama (come già si è visto, per i numeri razionali, in Aritmetica) la *radice quadrata* (o *di indice* 2) di a, e si indica col simbolo $\sqrt{a}$, dove il segno $\sqrt{}$ non è che una deformazione tradizionale della iniziale della parola « radice ».

L'operazione, con cui si determina la radice di un numero, si dice « estrazione di radice », e codesto numero si chiama il « radicando ».

14. Dianzi ci siamo assicurati che un qualsiasi numero reale assoluto a ammette sempre una radice quadrata (ed una sola), servendoci della *interpretazione geometrica* della equazione (1). Ma, anche in vista di altre future estensioni, conviene far vedere come si possa prescindere da tale interpretazione geometrica, e dimostrare anche direttamente, in base alla sola *teoria aritmetica* dei numeri reali assoluti, l'*esistenza* (e la *unicità*) della radice quadrata (assoluta) di ogni numero reale (assoluto).

A tal fine ripartiamo il campo dei numeri razionali assoluti (escluso lo 0) in due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, assegnando alla prima tutti quei numeri, il cui quadrato sia minore di a.

alla seconda tutti quelli, il cui quadrato sia, invece, maggiore di a.

Queste due classi definiscono una sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$.

Per dimostrarlo basta far vedere che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ godono delle proprietà 1), 2), 3) del n. 3.

1) Ogni numero razionale assoluto appartiene o ad $\boldsymbol{H}$ o a $\boldsymbol{K}$, salvo il caso che il suo quadrato, anzichè minore o maggiore di a, sia proprio uguale ad esso; ed in tal caso codesto numero razionale assoluto è il *solo*, che resti escluso dalle due classi.

2) Se h è un numero di $\boldsymbol{H}$, cioè se è $h^2 < a$, anche ogni altro numero razionale assoluto minore di h ha un quadrato minore di a (I, n. 5, F) e quindi appartiene ad $\boldsymbol{H}$. E, similmente, ogni numero maggiore di un numero di $\boldsymbol{K}$ appartiene anch'esso a $\boldsymbol{K}$.

3) La classe $\boldsymbol{H}$ non può contenere un massimo. Infatti, preso in $\boldsymbol{H}$ un qualsiasi numero h, è facile determinare un intero assoluto p abbastanza grande, perchè il numero razionale assoluto $h + \frac{1}{p}$, manifestamente maggiore di h, appartenga ancora ad $\boldsymbol{H}$. Basta che risulti

$$\left(h + \frac{1}{p}\right)^2 < a,$$

cioè

$$h^2 + \frac{2h}{p} + \frac{1}{p^2} < a \quad \text{ossia} \quad \frac{2h}{p} + \frac{1}{p^2} < a - h^2;$$

e, questa disuguaglianza è certamente verificata, (I, n. 5 C) se si sceglie l'intero assoluto p abbastanza grande, perchè si abbia simultaneamente

$$\frac{2h}{p} < \frac{1}{2}(a - h^2), \qquad \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}(a - h^2).$$

Dopo ciò, si riconosce facilmente che il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ è precisamente la radice quadrata di a, cioè ammette, come suo quadrato, il numero a.

Invero, se esso è un numero razionale $\frac{p}{q}$, questo numero $\frac{p}{q}$ è l'unico escluso dalle due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ (e, perciò, compreso fra l'una e l'altra), e il suo quadrato, per la definizione stessa delle due classi, non può essere che uguale ad a.

Se invece il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ è irrazionale, il suo quadrato corrisponde (n. 7) alla sezione $(\boldsymbol{H}^2 \mid \boldsymbol{K}^2)$, ed è facile convincersi che a questa sezione corrisponde precisamente a, cioè a è maggiore di tutti i numeri della $\boldsymbol{H}^2$, minore di tutti quelli della $\boldsymbol{K}^2$. Infatti ogni numero di $\boldsymbol{H}^2$ o è il quadrato di un numero h di $\boldsymbol{H}$, e allora, per la definizione stessa della $\boldsymbol{H}$, si ha $h^2 < a$: oppure è il prodotto di due numeri diversi h_1, h_2 di $\boldsymbol{H}$, e dalle disuguaglianze $h_1^2 < a$, $h_2^2 < a$ discende (I, n. 5 E; II, n. 12) $h_1^2 h_2^2 < a^2$ e, quindi (I, n. 5 F; II, n. 12) $h_1 h_2 < a$. E analogamente si dimostra che a è minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}^2$.

Per concludere, non resta più che da osservare che ogni numero reale assoluto che sia minore o maggiore della $\sqrt{a}$, così trovata come corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, ha un quadrato rispettivamente maggiore o minore di a (I, n. 5, F; II, n. 12); cosicchè risulta effettivamente stabilito, per via puramente aritmetica, che *nel campo dei numeri reali assoluti ogni numero ha una radice quadrata ed una sola.*

A questo risultato non fa eccezione nemmeno lo zero, giacchè il solo numero a quadrato nullo è lo zero stesso, e si ha

$$\sqrt{0} = 0.$$

15. Se della radice quadrata di un numero reale assoluto a si vogliono la parte intera e le successive cifre decimali (n. 5), basta cercare, per tentativi, prima fra i numeri interi, poi fra i decimali con una sola cifra dopo la virgola, poi fra quelli con due cifre, ecc. due numeri consecutivi, i cui quadrati comprendano fra loro il numero a. Così nel caso di $\sqrt{2}$ si trova successivamente

$$1^2 < 2 < 2^2, \quad (1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2, \quad (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2, \quad (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2,$$
$$(1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2, \ldots,$$

onde si conclude

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Similmente, nel caso di $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$0^2 < \frac{1}{2} < 1^2, \quad (0{,}7)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}8)^2, \quad (0{,}70)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}71)^2,$$

$$(0{,}707)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}708)^2, \quad (0{,}7071)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}7072)^2, \ldots,$$

e quindi
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071 \ldots .$$

Questo procedimento si può applicare al calcolo di $\sqrt{a}$ anche quando di a si conosca soltanto un certo valore approssimato (e non si sappia nemmeno se a sia razionale o no). Ma in questo caso le cifre decimali di $\sqrt{a}$ si possono calcolare soltanto fino ad un certo posto dopo la virgola, il quale dipende dal numero delle cifre decimali che si conoscono per a. Per es. si prenda come valore del rapporto π della lunghezza della circonferenza al diametro il valore approssimato per difetto (a meno di 0,001)
$$\pi = 3,141.$$
Si trova in tal caso
$$1^2 < 3,141 < 2^2, \quad (1,7)^2 < 3,141 < (1,8)^2, \quad (1,77)^2 < 3,141 < (1,78)^2,$$
$$(1,772)^2 < 3,141 < (1,773)^2;$$
ma a questo punto bisogna fermarsi, perchè aggiungendo una nuova cifra decimale si trova
$$(1,7723)^2 = 3,1410 \ldots, \quad (1,7724)^2 = 3,1414 \ldots,$$
$$(1,7725)^2 = 3,1419 \ldots, \quad (1,7726)^2 = 3,1421 \ldots;$$
e, finchè non si conosca una nuova cifra decimale di π, non si può decidere se la quarta cifra decimale di $\sqrt{\pi}$ sia 3 o 4 o 5. Tenendo conto che la quarta cifra decimale di π è 5, si trova $\sqrt{\pi} = 1,7724 \ldots$; e così in ogni altro caso analogo.

Ricordiamo che già nelle Scuole medie inferiori si sono imparate regole pratiche, che permettono di trovare più rapidamente i valori decimali approssimati di una qualsiasi radice quadrata (per la giustificazione di tali regole vedansi gli Esercizî); e ancora più spediti riusciranno questi calcoli, quando avremo appreso l'uso delle cosiddette *Tavole dei logaritmi* (Cap. VIII).

Qui aggiungiamo che si posseggono anche regole, che permettono di prevedere con quale grado di approssimazione si possa trovare la radice quadrata di un numero, di cui sia dato un certo numero di cifre decimali, e, viceversa, quante cifre decimali occorra conoscere del numero per trovare con un prefissato grado di approssimazione la sua radice quadrata (vedansi gli Esercizî).

Estrazione di radice quadrata dei numeri reali relativi

16. Consideriamo oramai l'equazione

$$x^2 = a \tag{1}$$

nel campo dei numeri reali *relativi*, cioè cerchiamo le radici quadrate di un qualsiasi numero reale relativo.

Distinguiamo due casi, secondo che a è positivo o negativo.

Se a è positivo, è anzitutto manifesto che esso ammette come radice quadrata il numero positivo, che ha per valore assoluto la radice quadrata del valore assoluto di a (n. 14). Si dirà questa la radice quadrata *positiva* (od *aritmetica*) del numero positivo a, e si riserverà ad essa il simbolo $\sqrt{a}$. Ma è pur evidente che anche l'opposto $-\sqrt{a}$ del numero $\sqrt{a}$ dà una seconda radice di a, perchè

$$(-\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 = a.$$

Il numero $-\sqrt{a}$ si chiamerà la radice quadrata *negativa* di a; e, quando si vorranno indicare insieme queste due radici quadrate di a, si scriverà

$$\pm \sqrt{a}.$$

È facile assicurarsi, che il numero positivo a non ammette altre radici all'infuori di queste due. Infatti il quadrato di ogni numero diverso da $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$ ha un valore assoluto diverso da a (I, n. 5 *F*; II, n. 12).

Supponiamo invece che a sia negativo. In tal caso è chiaro che esso non ammette nessuna radice quadrata, perchè ogni numero reale relativo (sia esso positivo o negativo) ha sempre un quadrato positivo.

A questa impossibilità di trovare, nel campo dei numeri reali relativi, la radice quadrata di un numero negativo fa riscontro la impossibilità di risolvere ogni problema geometrico o fisico, che conduca alla ricerca di una tale radice, cioè si traduca in un' equazione del tipo (1) con $a < 0$. Ciò risulterà chiarito meglio in seguito; qui basterà, come esempio, considerare il problema di costruire un triangolo rettangolo, di cui a sia la lunghezza dell' ipotenusa, b quella di uno dei due cateti. La lunghezza dell' altro cateto è data, in forza del teorema di PITAGORA, da $\sqrt{a^2 - b^2}$. Ora questa estrazione di radice quadrata diventa impossibile quando sia $b > a$, corrispondentemente al fatto geometrico che non esiste nessun triangolo rettangolo, in cui un cateto sia maggiore dell' ipotenusa.

Bisogna per altro osservare che in ulteriori sviluppi dell'Algebra (equazioni di 3° grado) si è condotti ad espressioni implicanti estrazioni di radice quadrata di radicandi negativi, le quali tuttavia forniscono soluzioni effettive di problemi geometrici o fisici. Di qui ha avuto origine una ulteriore estensione del campo dei numeri, per cui i numeri reali relativi vengono a far parte del più ampio campo dei cosiddetti numeri *immaginari* o *complessi*; e in questo nuovo campo ampliato di numeri l'operazione di estrazione di radice quadrata (ed anche di indice qualsiasi) diventa possibile senza eccezione.

Riassumendo la precedente discussione (e tenendo conto che anche nel campo dei numeri reali relativi lo zero non ammette nessun' altra radice quadrata oltre se stesso) abbiamo che: *Nel campo dei numeri reali relativi ogni numero positivo ammette due radici quadrate, fra loro opposte; lo zero ammette come radice quadrata soltanto se stesso; ed ogni numero negativo è privo di radice quadrata.*

Capitolo III

Calcolo dei radicali quadratici

1. Alle operazioni di addizione algebrica, moltiplicazione e divisione, le quali, nel loro complesso, si sogliono chiamare operazioni *razionali*, perchè applicate a numeri razionali danno sempre, come risultati, numeri razionali, abbiamo aggiunto l' operazione di *estrazione di radice quadrata.*

Nella risoluzione dei problemi ci varremo oramai di tutte queste operazioni; e sarà comodo distinguere con nomi speciali le espressioni, in cui sulle lettere, che vi compaiono, sono indicate soltanto operazioni razionali, da quelle, in cui entra anche qualche *radicale quadratico*, cioè l' indicazione di qualche estrazione di radice quadrata, da eseguirsi su di una espressione letterale. Le prime si chiamano espressioni *razionali*, le seconde espressioni *irrazionali* (quadratiche). Le une e le altre si chiamano *intere*, se non vi è indicata nessuna divisione a divisore letterale; si chiamano invece *fratte* in caso contrario. Così, in particolare, espressione « razionale intera » sarà sinonimo di « polinomio »; espressione « razionale fratta » sarà sinonimo di « frazione algebrica » (o « somma di frazioni algebriche », sempre riducibile, come sappiamo, ad un' unica frazione algebrica).

Va notato che talvolta in un' espressione si è condotti a distinguere alcune delle lettere, che vi compaiono, dalle rimanenti; così nelle equazioni si distinguono le incognite x, y, ... dai dati a, b, ... Un' espressione contenente le x, y, ... si dice razionale o irrazionale, intera o fratta *rispetto alle* x, y, ..., secondo la natura delle operazioni che vi sono indicate *su queste lettere*, qualunque sia il modo, in cui vi compaiono le rimanenti a, b, ... Per es. l'espressione

$$\sqrt{a}\,x - \frac{a}{\sqrt{b}}$$

è razionale intera (di 1° grado) rispetto ad x (irrazionale intera rispetto ad a, irrazionale fratta rispetto a b).

2. Non bisogna dimenticare che l'estrazione di radice quadrata ha senso soltanto quando il radicando non è negativo. Perciò, come in ogni espressione razionale fratta vanno esclusi per le lettere, che vi compaiono, quei valori, per cui si annulla qualche divisore, così una espressione contenente qualche radicale quadratico, avrà senso soltanto a patto, che si escludano per le lettere quei valori, per cui i corrispondenti radicandi risultano negativi.

Per es. l'espressione $\sqrt{3x-5}$ ha senso, purchè sia

$$3x - 5 \geq 0 \quad \text{ossia} \quad x \geq \frac{5}{3};$$

la $\sqrt{(x-1)(3-x)}$, purchè sia

$$1 \leq x \leq 3;$$

la $\sqrt{x^2 - a^2}$, purchè sia

$$|x| \geq |a| \quad \text{cioè} \quad -|a| \leq x \leq |a|,$$

dove, come già altra volta si è detto (I, n. 1), $|a|$ denota il valore assoluto di a.

Si noti che può anche accadere, che un radicale quadratico abbia senso per ogni possibile scelta delle lettere, che vi compaiono, in quanto il radicando non possa mai risultare negativo. Così accade, ad es., per $\sqrt{x^2 + a^2}$.

3. Come già nel caso delle radici quadrate dei numeri positivi, anche in quello dei radicali quadratici quali si vogliano, intenderemo che il segno $\sqrt{}$ sia riservato ad indicare, di una qualsiasi espressione letterale (supposta po-

sitiva), la radice quadrata positiva, e metteremo in evidenza, davanti al simbolo $\sqrt{\ }$, il segno $-$, quando vorremo indicare la radice quadrata negativa.

Inoltre, per semplicità di locuzione, quando nel seguito parleremo di « radice quadrata », senza nulla aggiungere in contrario, intenderemo riferirci alla radice quadrata positiva.

4. Per la trasformazione e la semplificazione delle espressioni irrazionali (quadratiche) conviene tener presente l'identità, valida per definizione (sotto la ipotesi $a \geq 0$),

$$(\pm \sqrt{a})^2 = a. \tag{1}$$

Inoltre tornano spesso utili queste altre due identità:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b} \tag{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \tag{3}$$

valide la prima sotto le condizioni $a \geq 0$, $b \geq 0$, la seconda sotto le condizioni $a \geq 0$, $b > 0$; e la prima si mantiene vera anche nel caso di un prodotto di quanti si vogliano fattori.

In parole: *A*) *La radice quadrata del prodotto di due o più fattori* (non negativi) *è uguale al prodotto delle radici quadrate dei fattori.*

B) *La radice quadrata di una frazione algebrica* (a denominatore positivo e numeratore non negativo) *è uguale al quoziente delle radici quadrate dei due termini.*

La dimostrazione è immediata. Per giustificare la (2) basta far vedere che il quadrato del secondo membro è uguale ad ab; ed invero, applicando una nota proprietà delle potenze (identità I del n. 3 del Cap. I) e tenendo conto della (1), si trova

$$(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Analogamente si dimostra la (3).

5. Prima di indicare le più importanti applicazioni, che nel calcolo letterale trovano i due teoremi così stabiliti, conviene aggiungere una osservazione.

Talvolta si è condotti ad estrarre la radice quadrata del prodotto o del quoziente di due numeri (o di due espressioni) a, b, entrambi negativi. In tal caso le (2), (3) non valgono più, perchè $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ non hanno senso. Ma basta osservare che

$$ab = (-a)(-b), \qquad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b},$$

per riconoscere che per $a < 0$, $b < 0$ sussistono, in luogo delle (2), (3), le identità

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\,\sqrt{-b}, \tag{2'}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}. \tag{3'}$$

Le (2) e (2′), come pure le (3) e (3′), ri possono raccogliere in un'unica formula, scrivendo

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}, \tag{2''}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}} \tag{3''}$$

Ma di regola nel calcolo letterale si evita, per quanto è possibile, di introdurre il segno di valore assoluto, che complica le scritture e talvolta anche le ulteriori trasformazioni delle formule.

6. Torniamo ai teoremi del n. 4. La (2) trova un'immediata applicazione, quando un radicale quadratico ha come radicando il prodotto di un'espressione letterale per un coefficiente numerico, che sia un quadrato perfetto o il quoziente di due quadrati perfetti. Ad es.,

$$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}, \qquad \sqrt{\frac{9}{25}a} = \frac{3}{5}\sqrt{a}.$$

E in questi casi si dice che « si porta fuori del radicale il coefficiente numerico ».

Se il coefficiente numerico del radicando non è nè quadrato perfetto, nè quoziente di due quadrati perfetti, si può portare fuori ogni suo divisore che sia tale. Così

$$\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}, \quad \sqrt{\frac{18}{5}a} = 3\sqrt{\frac{2}{5}a}.$$

E altre volte può tornar comodo eseguire l'operazione inversa, cioè «portare sotto il segno di radice» un coefficiente numerico esterno, naturalmente elevandolo al quadrato. Per es.,

$$3\sqrt{a} = \sqrt{9a}, \quad \frac{2}{3}\sqrt{a} = \sqrt{\frac{4}{9}a}.$$

7. Applicando la (2) ad una potenza (ad esponente intero positivo qualsiasi) a^n, si ha, purchè sia $a > 0$,

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n; \tag{4}$$

cioè, quando su di un numero o su di una espressione letterale qualsiasi (≥ 0) si devono successivamente eseguire un elevamento a potenza e la estrazione di radice quadrata, è indifferente l'ordine, in cui si eseguiscono le due operazioni.

L'espressione $(\sqrt{a})^n$ si può sempre semplificare.

Distinguiamo due casi, secondo che n è pari o dispari, cioè della forma $2m$ oppure della forma $2m+1$ (dove m denota un altro numero intero positivo).

Se è $n = 2m$ si ha (I, n. 4; II, n. 12)

$$(\sqrt{a})^{2m} = ((\sqrt{a})^2)^m = a^m.$$

Perciò, in forza della (4), si ha (qualunque sia m, purchè sia $a \geq 0$)

$$\sqrt{a^{2m}} = a^m. \tag{4'}$$

Se invece è $n = 2m + 1$, si ha

$$(\sqrt{a})^{2m+1} = (\sqrt{a})^{2m}\sqrt{a} = a^m\sqrt{a};$$

e, quindi, in forza della (4), (qualunque sia m, purchè sia $a > 0$)

$$(4'') \qquad \sqrt{a^{2m+1}} = a^m \sqrt{a}.$$

Notiamo che la (4') si mantiene valida anche per $a < 0$ purchè m sia pari, mentre se m è dispari va sostituita con la

$$\sqrt{a^{2m}} = - a^m.$$

La (4'') per $a < 0$ non ha mai senso.

8. Le osservazioni precedenti permettono di semplificare ogni radicale, che abbia come radicando un monomio. In ogni caso si può portar fuori del radicale ogni fattore (numerico o letterale), che compaia nel radicando al quadrato o ad una qualsiasi potenza di esponente pari. Solo bisogna badare, caso per caso, di portar fuori soltanto fattori, che non siano negativi e di lasciare, in ogni caso, sotto il segno di radice un radicando non negativo. Così, ad es., si ha

$$\sqrt{3a^4b^3c^5} = a^2bc^2\sqrt{3bc},$$

purchè sia $b \geq 0$, $c \geq 0$.

E la massima semplificazione si ha, quando il monomio radicando sia un « quadrato perfetto », cioè il quadrato di un altro monomio. Ricordando la regola per la moltiplicazione dei monomî (I, n. 6), si riconosce che, affinchè ciò accada, occorre e basta che il monomio dato abbia positivo il coefficiente numerico e sia di grado pari rispetto a ciascuna delle lettere, che vi compaiono. Così è quadrato perfetto $2a^4b^2c^6$, non invece $9a^2bc^4$, e nemmeno $-4a^4b^2c^6$. Per il primo di questi monomî si ha (purchè sia $bc \geq 0$)

$$\sqrt{2a^4b^2c^6} = \sqrt{2}a^2bc^3.$$

Notiamo, incidentalmente, che il criterio or ora dato per riconoscere i monomî quadrati perfetti torna talvolta utile per vedere se la differenza di due monomi si possa decomporre nel prodotto della somma per la differenza di due monomî, in base alla nota identità (I, n. 13)

$$(5) \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Per es., si ha

$$3a^2b^6 - 4c^4d^2 = (\sqrt{3}ab^3 + 2c^2d)(\sqrt{3}ab^3 - 2c^2d),$$

purchè a, b, d siano tutti positivi.

9. Quando il radicando è un polinomio, il radicale quadratico non si può, in generale, semplificare.

Si può guardare, se, per caso, i varî termini del polinomio abbiano a fattor comune un monomio; e, se così accade, si raccoglie codesto monomio a fattor comune; e poi al prodotto così ottenuto si applica il teorema *A*) del n. 4. Per es.:

$$\sqrt{3a^2bc^3 - 2ab^3c^2 + a^3b^2c^4} = \sqrt{abc^2(3ac - 2b^2 + a^2bc^2)} =$$
$$= c\sqrt{ab}\,\sqrt{3ac - 2b^2 + a^2bc^2},$$

purchè sia $c \geq 0$, $ab \geq 0$.

Se una tale riduzione non è possibile (o se, essendo possibile, si è già eseguita), è sempre opportuno guardare, se il polinomio radicando sia un « quadrato perfetto », cioè il quadrato di un altro polinomio; e, naturalmente, a tale scopo giova tener presenti le formule (I, n. 13), che danno il quadrato di un binomio o trinomio, ecc.

10. Quando si incontra un'espressione fratta, il cui denominatore contenga qualche radicale quadratico, si cerca per lo più di rendere razionale codesto denominatore, cioè di far scomparire da esso i radicali.

Nel caso, che è il più semplice possibile, di un'espressione della forma

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$. Si ottiene così

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Per indicare un altro artificio che, in taluni casi, permette di rendere razionale il denominatore di un'espressione irrazionale fratta premettiamo l'osservazione che ogni differenza $a - b$, quando a e b si suppongano entrambi *positivi*, si può sempre decomporre nel prodotto di due fattori, in quanto, essendo $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$, si ha in forza della (5),

$$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}). \tag{6}$$

Ciò premesso, si consideri un'espressione irrazionale fratta del tipo

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

dove A denota un'espressione letterale qualsiasi (e si suppone $a > 0$, $b > 0$, $a \gtrless b$). Moltiplicando ambo i termini di questa frazione per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

e tenendo conto della (5), si trova

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Similmente

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Applicando successivamente due volte questo stesso artificio, si può trasformare in una frazione a denominatore razionale ogni espressione fratta della forma

$$\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.$$

11. Si dice *radicale quadratico doppio* ogni espressione della forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, dove A e B denotano due numeri o due espressioni razionali.

Sotto le condizioni $A>0$, $B>0$, $A^2>B$, valgono le due identità:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{7}$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \tag{8}$$

Esse si giustificano, verificando, per ciascuna, che i due membri (entrambi positivi per il loro stesso significato in forza della convenzione del n. 2) hanno quadrati uguali (I, n. 5*F*; II, n. 12).

Queste identità, quando A^2-B sia un quadrato perfetto, permettono di trasformare un radicale quadratico doppio nella somma o nella differenza di due radicali quadratici semplici.

Per cominciare da un caso numerico, si consideri $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$. Qui si ha $A=3$, $B=5$, $A^2-B=4$, onde in forza delle (7), (8), risulta

$$\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Così in $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$ si ha $A=a$, $B=a^2-b^2$, $A^2-B=b^2$; e quindi

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

CAPITOLO IV

Equazioni e problemi di secondo grado

Formula risolutiva generale

1. Nel Cap. III abbiamo studiato e risolto, nel campo dei numeri reali relativi, le equazioni di 2° grado del tipo particolare

$$x^2 = a,$$

le quali, fra le equazioni di 2° grado in una incognita, si sogliono distinguere col nome di *pure*.

Ci proponiamo ora di far vedere che anche la risoluzione di ogni altra equazione di 2° grado in una sola incognita, quando sia possibile, si riduce a quella di un'equazione pura.

Consideriamo, dunque, una qualsiasi equazione intera, in cui l'incognita x compaia al 2° grado. Quando tutti i termini si trasportino a primo membro e si eseguiscano tutte le possibili riduzioni di termini simili, restano, a primo membro, nel caso più generale, tre termini, fra loro irriducibili: uno in x^2, uno in x ed un termine indipendente dall'incognita; cioè l'equazione si può in ogni caso supporre ridotta alla forma, che diremo *normale*,

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

dove a, b, c rappresentano tre numeri (reali relativi) dati od anche tre date espressioni letterali quali si vogliano. Nel seguito, riferendoci a questa forma dell'equazione di 2° grado, diremo, per brevità, che a, b, c sono, rispettivamente il « primo », « secondo », « terzo coefficiente » dell'equazione.

e, più particolarmente, designeremo c col nome di « termine noto ».

Possiamo senz'altro supporre che a non sia nullo, giacchè se fosse $a = 0$, l'equazione si ridurrebbe di 1° grado. Sotto l'ipotesi $a \gtrless 0$, l'equazione (1) è equivalente a quella che se ne deduce, dividendone ambo i membri per a (I, n. 29), cioè ad

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se, per semplicità, i due nuovi coefficienti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ si indicano con p, q rispettivamente, l'equazione generale di 2° grado diventa

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

2. I coefficienti p e q possono benissimo annullarsi, e si hanno così due casi particolari, in cui l'equazione si risolve immediatamente.

Se è $p = 0$, l'equazione si riduce alla equazione pura

$$x^2 + q = 0.$$

Trasportando il termine noto al secondo membro

$$x^2 = -q,$$

vediamo che se q è positivo (e quindi $-q$ negativo) l'equazione non ammette soluzione alcuna (II, n. 16); mentre invece, se q è negativo, è soddisfatta dai due numeri, fra loro opposti,

$$\sqrt{-q} \quad \text{e} \quad -\sqrt{-q},$$

(e da nessun altro all'infuori di questi); e se q è anch'esso nullo, queste due soluzioni si riducono entrambe a zero.

Quando, invece, sia nullo q senza che sia tale p, l'equazione (2) si riduce a

$$x^2 + px = 0,$$

e si può scrivere

$$x(x+p)=0,$$

cosicchè si decompone (I, n. 28) nelle due equazioni di 1° grado

$$x=0, \quad x+p=0,$$

ed ammette perciò le due soluzioni, diverse o *distinte*, 0 e $-p$.

3. Esaminati questi casi particolari, torniamo all'equazione generale

(2) $$x^2+px+q=0.$$

Essa si risolve con un artificio, detto del *completamento del quadrato*, suggerito dalla formula che dà lo sviluppo del quadrato del binomio (I, n. 13).

Scritta la (2) sotto la forma

$$x^2+px=-q,$$

osserviamo che il primo membro, in quanto si può scrivere

$$x^2+2x\frac{p}{2},$$

dà due termini dello sviluppo del quadrato del binomio $x+\frac{p}{2}$; cosicchè, aggiungendo ad ambo i membri il termine mancante $\frac{p^2}{4}$, otteniamo l'equazione, equivalente alla (2) (I, n. 25),

$$x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

la quale si può addirittura scrivere

(3) $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Ora il primo membro di quest'equazione, essendo un quadrato perfetto, risulterà, per qualsiasi valore di x, o positivo o nullo. Perciò l'equazione ammetterà soluzioni soltanto quando sia positivo o nullo anche il secondo membro.

Se è

$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$

risulta dalla (3) che $x + \frac{p}{2}$ deve essere uguale all'una o all'altra delle radici quadrate di codesto numero positivo, cioè deve essere o

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

oppure

$$x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Otteniamo così per la nostra equazione le due soluzioni o radici *distinte*

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

che di solito si designano simultaneamente coll'unica formula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{4}$$

Se invece è

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \tag{5}$$

l'equazione (3) si riduce ad

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

cosicchè ammette come radice l'unica soluzione dell'equazione di 1° grado

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

cioè

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Ma poichè in quest'unico valore vengono a coincidere, quando si riduce a zero il binomio $\frac{p^2}{4} - q$, i due valori (4), da cui, quando codesto binomio è positivo, l'equazione (3) è soddisfatta, si suole dire che nel caso (5) qui considerato, l'equazione (3) ha *due* radici *coincidenti* nel valore $-\frac{p}{2}$, od anche la *radice doppia* $-\frac{p}{2}$.

Se infine è

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

l'equazione (3), come si è notato dapprincipio, è priva di radici.

Il binomio

$$\frac{p^2}{4} - q,$$

che col suo segno caratterizza i tre casi possibili per il numero di soluzioni ammesse dall'equazione di 2° grado (due radici distinte oppure due radici coincidenti oppure nessuna), dicesi *discriminante* dell'equazione (e talvolta anche del trinomio di 2° grado che ne costituisce il primo membro).

Possiamo quindi riassumere la precedente discussione nel seguente enunciato:

L'equazione di 2° *grado*

$$x^2 + px + q = 0, \tag{2}$$

quando il discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q$$

è positivo, ammette le due radici distinte

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

quando il discriminante è nullo, ammette due radici coincidenti (o una *radice doppia*) *di valore*

$$-\frac{p}{2};$$

e quando il discriminante è negativo, non ammette radice alcuna.

Nel campo dei numeri immaginari o complessi, in cui, come si è detto (II, n. 16), l'estrazione di radice quadrata è sempre possibile, ogni equazione di 2° grado ammette due radici (distinte o coincidenti).

La formula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{4}$$

che fornisce, quando esistono, le radici della (2), siano esse distinte o coincidenti, e che, come si verifica agevolmente, conduce anche nei casi particolari del n. prec. alle soluzioni là ottenute, si chiama la *formula risolutiva generale* della equazione (2).

4. Torna comodo possedere anche la formula risolutiva per l'equazione di 2° grado considerata nella sua forma primitiva

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Una tal formula si potrebbe ottenere direttamente, con un artificio analogo a quello usato nel n. prec. per la (2) (completamento del quadrato); ma, più semplicemente, noi sostituiremo nella (4) a p, q i rispettivi valori $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$. Otteniamo così

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ossia, riducendo allo stesso denominatore il radicando,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o, infine (III, n. 5),

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5}$$

È questa la formula risolutiva della (1).

Sotto la radice quadrata compare in essa il binomio

$$b^2 - 4ac,$$

cosicchè la (1) ammette due radici distinte o due radici coincidenti o nessuna radice (reale), secondo che codesto binomio è positivo o nullo o negativo; è se esso è nullo, il valore comune delle due radici è dato, come risulta dalla (5), da $\frac{-b}{2a}$.

Risulta dall'osservazione precedente che il segno del binomio $b^2 - 4ac$ deve, in ogni caso, coincidere con quello del discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q;$$

ed invero, sostituendo a p, q rispettivamente $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ si trova

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

cioè il binomio $b^2 - 4ac$ differisce dal discriminante soltanto per il divisore positivo $4a^2$. Siccome, per distinguere i tre casi che si possono presentare per le radici di un'equazione di 2° grado, basta il segno del discriminante (e non interessa il valore assoluto), così quando l'equazione è della forma (1), si usa chiamare *discriminante* il binomio $b^2 - 4ac$, per quanto esso, come si è or ora verificato, coincida solo in segno, e non in valore assoluto, con l'espressione, cui al n. prec. si era attribuito un tal nome.

La formula risolutiva (5) si semplifica, quando nell'equazione (1) il coefficiente della x ha in evidenza il fattore 2, come accade se i tre coefficienti sono interi e il secondo è pari. In tal caso l'equazione si può scrivere

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

e la formula risolutiva, come si verifica sostituendo nella (5) $2b$ a b, diventa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{6}$$

Qui, come discriminante, si suol prendere il binomio $b^2 - ac$, che si può chiamare « discriminante ridotto ».

5. Quando è proposta un' equazione di 2° grado, conviene anzitutto riconoscere se essa sia possibile, guardando il *segno del discriminante,* per il quale si adotterà l' espressione

$$b^2 - 4ac \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q, \tag{7}$$

secondo che nell' equazione il coefficiente del termine di 2° grado si è lasciato diverso da 1 o si è ridotto all' unità. E qui giova notare che, come risulta dalle espressioni (7), si è senz' altro sicuri che codesto discriminante non è negativo, e quindi l' equazione ammette radici, se, nel primo caso, a e c sono di segno contrario, sicchè il prodotto ac risulti negativo, o se, nel secondo caso, q è negativo.

Consideriamo qualche esempio di equazioni di 2° grado a coefficienti numerici.

1) $x^2 + x - 6 = 0$.

Qui abbiamo $p = 1$, $q = -6$, e poichè quest' ultimo è negativo, l' equazione è certamente possibile. Applicando la formula risolutiva (4), troviamo:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

cioè, distinguendo le due radici, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

2) $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

Qui $a = 4$, $b = -6$, $c = 1$, cosicchè il discriminante $b^2 - 4ac$ ha il valore 20, e applicando la formula risolutiva (5), si trova

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4};$$

cioè

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Applicando la (6) si trova più rapidamente:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

3) $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0.$

In questo caso $a = 3$, $b = -4$, $c = \frac{4}{3}$, e, quindi,

$$b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

L'equazione ammette dunque due radici coincidenti, il cui valore comune (n. prec.) è $\frac{2}{3}$.

4) $x^2 + x + 1 = 0.$

Essendo $p = 1$, $q = 1$, il discriminante è dato da

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4};$$

cosicchè l'equazione è impossibile.

6. Se l'equazione proposta è a coefficienti letterali, bisogna esaminare tutti i casi, che per le sue radici si possono presentare a seconda della scelta dei valori da attribuirsi alle lettere, che compaiono nei coefficienti. Queste lettere, pensate come *indeterminate* (cioè come suscettibili, ciascuna, di tutti i possibili valori, che non rendano privo di senso alcun termine dell'equazione), si chiamano i *parametri* dell'equazione proposta. Naturalmente questi parametri non vanno confusi con l'incognita: essi rappresentano sempre numeri, che si suppongono *dati*, e, caso per caso, si tratta di trovare quelle espressioni dell'incognita per mezzo dei parametri, che rendono soddisfatta l'equazione. Per es., nell'equazione generale di 2° grado, che, supposto diverso da zero il primo coefficiente, si può sempre scrivere sotto la forma

$$x^2 + px + q = 0, \tag{2}$$

i parametri sono p e q.

In ogni caso, nello studio di un'equazione di 2° grado, dipendente da uno o più parametri, converrà anzitutto determinare gli eventuali valori di questi, per cui, annullandosi il coefficiente del termine di 2° grado, l'equazione si riduce di 1° grado; e si dovrà calcolare la soluzione, in tal caso unica, che corrispondentemente spetta all'equazione.

Esaurita questa ricerca preliminare, si potrà supporre che l'equazione sia effettivamente di 2° grado, e si passerà a cercarne i casi di risolubilità, ponendo maggiore od uguale a zero il discriminante, che in generale dipenderà dai parametri *(condizione di possibilità)*. Si sarà così condotti ad una limitazione; e bisognerà riconoscere sotto quali condizioni per i parametri, presi singolarmente o gli uni rispetto agli altri, essa risulti soddisfatta.

L'esame ordinato e completo di tutti i casi, che così si possono presentare, e delle soluzioni, che, in ciascuno di essi, competono all'equazione data, ne costituisce la *discussione*.

Questa discussione è talvolta immediata; ma per lo più essa richiede considerazioni ausiliarie e avvedimenti particolari, che ci riserviamo di chiarire nel seguito di questo Cap. e nel successivo.

Qui intanto, come prima illustrazione delle osservazioni precedenti, considereremo un esempio. Sia data l'equazione:

$$(h - 2)x^2 - (2h + 1)x + h + 1 = 0,$$

dipendente dal parametro h.

Essa si riduce al 1° grado per $h-2=0$, cioè $h=2$; e per questo valore del parametro diventa precisamente

$$-5x+3=0,$$

cosicchè ammette l'unica soluzione $x=\frac{3}{5}$.

Escluso questo caso, cioè supposto $h \gtrless 2$, il discriminante è dato da

$$(2h+1)^2-4(h-2)(h+1)=8h+9;$$

cosicchè, per $8h+9=0$, cioè $h=-\frac{9}{8}$, l'equazione ha due radici coincidenti; e, poichè per tale valore del parametro essa si riduce, come si verifica facilmente, a

$$25x^2-10x+1=0,$$

il valore comune di queste due radici è $\frac{1}{5}$.

Se, infine, $8h+9>0$, cioè $h>-\frac{9}{8}$ (e, beninteso, $\gtrless 2$), l'equazione ammette due radici distinte, date da

$$x=\frac{2h+1\pm\sqrt{8h+9}}{2(h-2)}.$$

Per $h<-\frac{9}{8}$, risultando negativo il discriminante, l'equazione è impossibile.

Somma e prodotto delle radici di un'equazione di 2° grado

7. Per lo studio e la discussione delle equazioni di 2° grado sono particolarmente importanti due relazioni semplicissime, che intercedono fra i coefficienti e le radici.

Consideriamo l'equazione generale

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

e, supposto positivo o nullo il discriminante b^2-4ac, indichiamo con x_1, x_2 le due radici (distinte o coincidenti) dell'equazione, ponendo, per fissare le idee,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sommando membro a membro, otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

mentre, calcolando il prodotto delle due radici, e applicando la nota identità relativa al prodotto della somma per la differenza di due date espressioni (I, n. 13), troviamo

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Abbiamo dunque:

(8) $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

ossia: *In un'equazione di 2° grado, a discriminante non negativo, la somma delle due radici è uguale al quoziente del secondo coefficiente per il primo, cambiato di segno; e il prodotto delle due radici è uguale al quoziente del termine noto per il primo coefficiente.*

Naturalmente, se si prende l'equazione sotto la forma

(2) $$x^2 + px + q = 0,$$

si ha

(8') $$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Se il discriminante è nullo, $-\frac{b}{a}$ o, rispettivamente, $-p$ dà il doppio del valore comune delle due radici coincidenti.

8. Le relazioni (8) o (8') fra le radici e i coefficienti della equazione di 2° grado permettono di prevedere dai segni dei coefficienti quelli delle radici.

Riferendoci alla equazione (2), supposta a discriminante positivo, avremo anzitutto che, essendo

$$x_1 x_2 = q,$$

le due radici (distinte) risulteranno di segno uguale o contrario, secondo che q è positivo o negativo.

Se è $q > 0$, le due radici, in quanto è

$$x_1 + x_2 = -p,$$

saranno entrambe positive o entrambe negative, secondo che p è negativo o positivo.

Quando invece è $q < 0$, e quindi le radici sono di segno contrario, la

$$x_1 + x_2 = -p$$

ci dice che avrà valore assoluto maggiore quella delle due radici, che ha segno contrario a p.

Abbiamo così la seguente tabelletta, in cui si è supposto di rappresentare con x_1 la radice *di valore assoluto maggiore:*

$$\frac{p^2}{4} - q > 0$$

p	q	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
—	—	+	—
+	—	—	+

Notiamo che in questi due ultimi casi, cioè quando è $q < 0$, la *radice positiva* è data, tanto per $p > 0$ quanto per $p < 0$, da

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

I risultati precedenti si enunciano rapidamente, introducendo due convenienti modi di dire. Dati, in un certo ordine, più numeri relativi, quali sono, ad es., i tre coefficienti di un'equazione di 2° grado in forma normale, si dice che essi presentano una *permanenza* (di segno) ogni volta che due numeri consecutivi hanno segni uguali, una *variazione* ogni volta che due numeri consecutivi sono invece di segno contrario. È manifesto che, se a tutti i numeri considerati si cambia segno, restano invariati sia il numero delle permanenze, sia quello delle variazioni.

Ciò premesso, consideriamo il numero delle permanenze e quello delle variazioni, presentate dai tre coefficienti di un'equazione di 2° grado in forma normale. Per l'osservazione fatta or ora, possiamo sempre supporre di avere ridotto il primo ad essere positivo o, addirittura, uguale ad 1, e di considerare l'equazione sotto la forma (2). Sotto questa ipotesi, le combinazioni di segno dei coefficienti, nei quattro casi elencati nella precedente tabelletta, sono ordinatamente

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ + & - & + \\ + & - & - \\ + & + & - \end{array}$$

Nel primo caso (due radici, entrambe negative) abbiamo due permanenze; nel secondo (due radici positive) abbiamo due variazioni e nessuna permanenza; nel terzo (due radici di segno contrario, delle quali è maggiore in valore assoluto quella positiva) abbiamo prima una variazione e poi una permanenza; infine nel quarto (due radici di segno contrario, delle quali è maggiore in valore assoluto quella negativa) abbiamo prima una permanenza e poi una variazione. Possiamo quindi enunciare la seguente REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO: *Un'equazione di 2° grado (normale), a discriminante positivo, ha tante radici positive quante sono le variazioni presentate dai suoi coefficienti; e, se le due radici sono di segno contrario, è maggiore in valore assoluto quella positiva quando la variazione precede la permanenza, quella negativa in caso contrario.*

9. Tenendo conto delle relazioni (8) od (8') fra le radici e i coefficienti, si può immediatamente *scrivere l'equazione di 2° grado, che ha per radici due numeri dati.* Basta prendere come primo coefficiente l'unità, come secondo la somma dei due numeri dati, cambiata di segno, e come termine noto il loro prodotto. Per es. l'equazione, che ha le radici

$\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$ è data da

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{od anche} \quad 6x^2 + x - 2 = 0.$$

Nè è sostanzialmente diverso quest'altro problema: *Trovare due numeri, di cui si conoscano la somma e il prodotto.* Essi sono le radici dell'equazione di 2° grado, che ha come primo coefficiente l'unità, come secondo la somma data, cambiata di segno, e come termine noto il prodotto. Il problema ammette soluzione a patto che non risulti negativo il discriminante dell'equazione così ottenuta.

Decomposizione di un trinomio di 2° grado in fattori di 1° grado

10. Dalle relazioni fra coefficienti e radici (n. 7) discende un'altra notevole conseguenza. Tenendo conto delle (8), il trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$, supposto a discriminante non negativo, si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - [x_1 + x_2]x + x_1 x_2),$$

ossia

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{10}$$

Cioè chiamando, per brevità, « radici di un trinomio di 2° grado » quelle dell'equazione, che si ottiene uguagliandolo a zero: *Un trinomio di 2° grado a discriminante non negativo è identico al prodotto*

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

del primo coefficiente per i due binomi di 1° grado, che si ottengono sottraendo dall'indeterminata rispettivamente le due radici.

In particolare, se il discriminante è nullo, si ha più precisamente, indicando con x_0 il valore comune delle due radici coincidenti,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2. \tag{11}$$

Vediamo dunque che, come nel caso delle radici distinte, ciascuna di queste dà luogo, per il trinomio di 2° grado, ad un fattore di 1° grado, così, quando vi è un' unica radice x_0, il trinomio risulta divisibile per il quadrato del corrispondente binomio di 1° grado, onde resta giustificato il nome di *doppia*, che in tal caso abbiamo dato all' unica radice x_0 (n. 3).

Se poi il discriminante è negativo, il trinomio non è certamente decomponibile in fattori di 1° grado. Infatti, se così accadesse, ognuno di tali fattori, uguagliato a zero, darebbe un' equazione di 1° grado, la cui soluzione renderebbe soddisfatta anche l' equazione di 2° grado, ottenuta uguagliando a zero il trinomio, la quale, invece, non ha, in questo caso, nessuna radice.

Risulta così confermato, per i trinomî di 2° grado, il teorema generale, già noto (I, n. 19), che, affinchè un polinomio in una indeterminata x, sia divisibile per un binomio $x - c$, è necessario e sufficiente che esso si annulli per $x = c$.

Naturalmente, se il trinomio si prende sotto la forma $x^2 + px + q$, si ha

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \quad \text{o} \quad x^2 + px + q = (x - x_0)^2$$

secondo che è $\frac{p^2}{4} - q > 0$ o $\frac{p^2}{4} - q = 0$; mentre nel caso $\frac{p^2}{4} - q < 0$ il trinomio non è decomponibile in fattori di 1° grado.

11. La possibilità di decomporre un trinomio di 2° grado in fattori di 1° grado conduce talvolta a semplificare le frazioni algebriche. Consideriamo, ad es., la frazione

$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Poichè uguagliando a zero il numeratore e il denominatore, si ottengono le due equazioni

$$5x^2 - 13x + 6 = 0, \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

di cui la prima ammette le radici 2 e $\frac{3}{5}$ e la seconda le radici 2 e $-\frac{1}{3}$, si hanno le due identità

$$5x^2 - 13x + 6 = 5(x-2)\left(x - \frac{3}{5}\right) = (x-2)(5x-3),$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x+1);$$

e quindi

$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{(x-2)(5x-3)}{(x-2)(3x+1)}.$$

Esclusi per la x i valori eccezionali 2 e $-\frac{1}{3}$, che annullano il denominatore, si ottiene, semplificando, la identità

$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{5x-3}{3x+1}.$$

Disuguaglianze di 2° grado

12. Si ha qui un' importante applicazione della decomponibilità dei trinomî di 2° grado in fattori di 1°.

Dato un qualsiasi trinomio $ax^2 + bx + c$, immaginiamo che la indeterminata x assuma successivamente, in ordine crescente, tutti i possibili valori o, come si suol dire, *varî* da $-\infty$ a $+\infty$ (leggasi «da meno infinito a più infinito»). Corrispondentemente varia anche il valore del trinomio, e sappiamo che esso si annulla, al più, per due valori della indeterminata o *variabile* x (radici dell' equazione di 2° grado, che si ottiene uguagliandolo a zero). Ci proponiamo di riconoscere se per gli altri valori della x esso assuma valori positivi o negativi o di entrambi i segni.

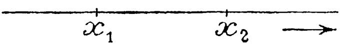
Distinguiamo a tal fine tre casi, secondo che il discriminante è positivo, nullo o negativo.

I. $b^2 - 4ac > 0$.

Il trinomio ha due radici distinte x_1, x_2 e sussiste l'identità

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{10}$$

Serviamoci qui della rappresentazione dei valori della x per mezzo di una retta graduata (II, n. 10), su cui immagi-



neremo segnati i due punti rappresentativi delle due radici x_1, x_2, supponendo, per fissare le idee, $x_1 < x_2$. Questi due punti dividono la retta graduata in tre parti od *intervalli*: l'« intervallo da $-\infty$ ad x_1 », costituito dai punti, che rappresentano i valori di $x \leq x_1$; l'« intervallo da x_1 ad x_2 », definito dalle limitazioni $x_1 \leq x \leq x_2$; e, infine, l'« intervallo da x_2 a $+\infty$ », costituito dai punti rappresentativi dei valori di $x \geq x_2$.

Ciò premesso, abbiamo che per ogni x *interno* all'intervallo da x_2 a $+\infty$, cioè per ogni $x > x_2$, le differenze $x - x_1$, $x - x_2$, in quanto è per ipotesi $x_1 < x_2$, sono tutte e due positive, mentre per ogni x interno all'intervallo da $-\infty$ ad x_1, cioè per ogni $x < x_1$, le stesse differenze sono tutte e due negative. In entrambi i casi il loro prodotto è positivo, e perciò il trinomio (10) assume un valore, il cui segno è quello stesso del suo primo coefficiente a. Se invece si prende per x un valore interno all'intervallo da x_1 ad x_2, la differenza $x - x_1$ risulta positiva e la $x - x_2$ negativa, cosicchè il valore corrispondentemente assunto dal trinomio (10) è di segno contrario ad a.

II. $b^2 - 4ac = 0$.

Indicato con x_0 il valore comune delle due radici coincidenti del trinomio, si ha l'identità

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2; \tag{11}$$

e, poichè $(x - x_0)^2$, per qualsiasi valore di $x \gtrless x_0$, risulta positivo, il corrispondente valore del trinomio ha sempre lo stesso segno di a.

III. $b^2 - 4ac < 0$.

In questo caso il trinomio non è decomponibile in fattori di 1° grado, ma, per ogni valore della x, il segno si può riconoscere direttamente. Si scriva invero

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right];$$

e al trinomio in parentesi quadra si applichi l'artificio del *completamento del quadrato* (n. 3); cioè, osservando che i primi due termini coincidono coi primi due termini del quadrato di $x + \frac{b}{2a}$, si aggiunga e si tolga in parentesi il termine mancante di codesto quadrato, cioè $\frac{b^2}{4a^2}$. Si ottiene così l'identità

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right],$$

ossia

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Dei due termini in parentesi quadra il primo, come quadrato di un binomio di 1° grado, non è mai negativo e si annulla soltanto per $x = -\frac{b}{2a}$, mentre il secondo non dipende da x ed, in forza dell'ipotesi $b^2 - 4ac < 0$, è sempre positivo. Perciò l'espressione in parentesi quadra è sempre positiva e il trinomio, per ogni possibile valore di x, ha costantemente il segno del suo primo coefficiente a.

Concludendo, possiamo enunciare il seguente teorema: *Un trinomio di 2° grado a discriminante positivo, per ogni valore della variabile esterno all'intervallo compreso fra le due radici, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente, men-*

tre ha il segno contrario per ogni valore della variabile interno a codesto intervallo.

Se il discriminante è nullo, il trinomio, per qualsiasi valore della variabile, diverso da quell'unico, per cui si annulla, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente.

Se, infine, il discriminante è negativo, il trinomio, per ogni possibile valore della variabile, senza eccezione, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente.

13. Questo teorema permette di risolvere, in ogni caso, le disuguaglianze di 2° grado. Basterà considerare qualche esempio.

Sia data la disuguaglianza

$$-10x^2 - x + 3 > 0 .$$

Il trinomio a primo membro ha discriminante positivo, e, poichè le sue radici sono $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{5}$, mentre il primo coefficiente è negativo, la disuguaglianza è soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x, compresi fra $-\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{2}$, cioè per $-\frac{3}{5} < x < \frac{1}{2}$.

Invece la disuguaglianza opposta

$$-10x^2 - x + 3 < 0 \quad \text{ossia} \quad 10^2 + x - 3 > 0$$

è verificata da tutti gli x esterni all'intervallo da $-\frac{3}{5}$ a $\frac{1}{2}$, cioè per $x > \frac{1}{2}$ e per $x < -\frac{3}{5}$.

Consideriamo, in secondo luogo, la disuguaglianza

$$3x^2 + 4x + \frac{4}{3} > 0 .$$

Qui il discriminante è nullo e il valore comune delle due radici coincidenti è $-\frac{2}{3}$, cosicchè, essendo positivo il primo coefficiente, la disuguaglianza è soddisfatta da ogni possibile valore di x, diverso da $-\frac{2}{3}$; mentre la disuguaglianza opposta

$$3x^2 + 4x + \frac{4}{3} < 0 \quad \text{ossia} \quad -3x^2 - 4x - \frac{4}{3} > 0$$

non è soddisfatta da alcun valore di x.

Prendiamo, infine, la disuguaglianza

$$4x^2 - x + 10 > 0.$$

Poichè il discriminante è negativo e il primo coefficiente del trinomio a primo membro è positivo, essa è soddisfatta da ogni possibile valore di x, senza eccezione; e la disuguaglianza opposta

$$4x^2 - x + 10 < 0 \quad \text{ossia} \quad -4x^2 + x - 10 > 0$$

non ammette soluzione alcuna.

Equazioni fratte riconducibili ad equazioni di 2° grado

14. Sappiamo che la risoluzione di un'equazione fratta si può ricondurre a quella di un'equazione intera, liberando l'equazione data dai denominatori (I, n. 31); ma si deve tener sempre ben presente, che nell'applicare questo procedimento bisogna escludere per l'incognita quei valori *eccezionali*, che, annullando il denominatore di qualche termine fratto dell'equazione data, rendono un tal termine privo di senso e non possono, quindi, essere considerati fra le possibili radici dell'equazione. Questi valori eccezionali si determinano, cercando le soluzioni delle equazioni intere, che si ottengono, uguagliando a zero i denominatori dei varî termini fratti dell'equazione data.

Dopo ciò, esclusi per l'incognita i valori così trovati, si passa a liberare l'equazione dai denominatori. A tal fine si debbono ridurre allo stesso denominatore tutti i termini (anche quelli, che siano eventualmente interi); e l'equazione intera, cui è riconducibile la data, si ottiene, moltiplicando ambo i membri dell'equazione così trasformata per il denominatore comune dei suoi termini.

Come denominatore comune si prende di regola il prodotto dei denominatori dei varî termini fratti dell'equazione data; ma si prende, invece, un loro multiplo comune di grado minore, se in codesti denominatori dei singoli termini si riesce a trovare qualche fattore comune. Ciò accade certamente, se nella ricerca dei valori eccezionali, si è constatato che un medesimo valore eccezionale annulla più denominatori, giacchè in questo caso, indicato con c questo speciale valore eccezionale, i denominatori, che per esso si annullano, sono tutti divisibili per $x - c$ (I, n. 19).

Queste avvertenze, che, così esposte in forma generale, possono riuscire alquanto difficili, risulteranno chiarite da qualche esempio di equazioni fratte riconducibili ad equazioni di 2° grado, che qui studieremo.

1) $$\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{13}{6}.$$

Si rileva subito che i valori eccezionali per cui il primo membro risulta privo di senso, sono $x = -1$ e $x = -2$. Esclusi per l'incognita questi valori, si libera l'equazione dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri per il loro prodotto $6(x+1)(x+2)$. Si ottiene così l'equazione intera

$$6(x+2)^2 + 6(x+1)^2 = 13(x+1)(x+2),$$

che, ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

e ammette le due radici distinte $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Poichè sono entrambe diverse dai valori eccezionali, esse sono anche le radici dell'equazione data. Si faccia la verifica.

2) $$\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}.$$

Il primo denominatore $2(x^2-1)$ si può anche scrivere (I, n. 13) sotto la forma $2(x+1)(x-1)$, onde risulta che esso è divisibile per il secondo denominatore $4(x+1)$.

Perciò i valori eccezionali per l'incognita sono qui $x=1$, $x=-1$. Esclusi questi valori, l'equazione si libera dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri semplicemente per $8(x^2 \quad 1)$. Si perviene in tal modo all'equazione intera

$$12-2(x-1)=x^2-1,$$

ossia, in forma normale,

$$x^2+2x-15=0.$$

Le sue due radici $x_1=3$, $x_2=-5$, entrambe diverse dai valori eccezionali, sono anche le radici dell'equazione data. Verificare.

3) $$\frac{6x^2+13x+11}{x^2+x+1}=\frac{2(3x-1)}{x-1}.$$

Il trinomio di 2° grado x^2+x+1, che compare a primo membro come denominatore, è a discriminante negativo, cosicchè non si annulla per alcun valore di x; e l'unico valore eccezionale è, per questa equazione, il valore 1, che annulla il secondo denominatore. Di qui risulta altresì che i due denominatori non hanno alcun fattore comune. Perciò, per liberare l'equazione dai denominatori, bisogna moltiplicarne ambo i membri per il loro prodotto. Si ottiene in tal modo l'equazione intera

$$(6x^2+13x+11)(x-1)=2(3x-1)(x^2+x+1),$$

che si riduce agevolmente alla forma normale

$$x^2-2x-3=0,$$

Essa ammette le due radici $x_1=3$ e $x_2=-1$, entrambe diverse dal valore eccezionale 1; esse danno perciò anche le radici della 3). Si faccia anche qui la verifica.

4) $$\frac{3(x^2+x+1)}{6x^2+11x-10}=\frac{3x-1}{3x-2}-\frac{5}{2x+5}.$$

In questo caso si presentano senz'altro come eccezionali i due valori $\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{2}$, che annullano, rispettivamente, i due denominatori di 1° grado. Ma bisogna cercare se per qualche altro valore si annulli anche il denominatore di 2° grado.

Ora uguagliandolo a zero, si ha l'equazione

$$6x^2+11x-10=0,$$

che ammette precisamente, come radici, i due valori $\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{2}$ già riconosciuti come eccezionali. Basta dunque escludere questi due valori; e poichè sussiste l'identità (n. 10)

$$6x^2+11x-10=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-2)(2x+5),$$

l'equazione si libera dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri semplicemente per $6x^2+11x \quad 10$. Si ottiene così l'equazione intera

$$3(x^2+x+1)=(3x-1)(2x+5)-5(3x-2),$$

ossia

$$3x^2-5x+2=0,$$

che ammette le due radici $x_1=1$, $x_2=\frac{2}{3}$.

Poichè quest'ultimo valore si è dovuto escludere, come eccezionale per la data equazione 4), resta per questa equazione soltanto la radice $x_1=1$.

Al solito si verifichi il risultato.

5) $$\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+5}+\frac{35}{x^2+3x-10}=0.$$

Come nell'esempio prec., il denominatore di 2° grado si annulla per gli stessi due valori 2 e — 5, per cui si annullano rispettivamente i due denominatori di 1° grado. Perciò i soli valori eccezionali per l'incognita sono appunto 2 e — 5: e per liberare l'equazione dai denominatori, basta moltiplicarne ambo i membri per $x^2+3x-10$. Perveniamo così all'equazione

$$x(x+5)+5(x-2)+35=0$$

ossia

$$x^2+10x+25=0. \tag{12}$$

Il discriminante di quest'equazione di 2° grado risulta nullo, cosicchè essa ammette due radici coincidenti. Ma il loro valore comune è — 5, cioè precisamente uno dei due valori eccezionali, che abbiamo dovuto escludere per l'incognita. Poichè ogni eventuale soluzione della equazione data deve pur soddisfare l'equazione intera (12) e quest'ultima è soddisfatta dall'unico valore — 5, che per la data va escluso, concludiamo che l'equazione 5), sotto la forma in cui è qui data, *non ammette soluzione alcuna.*

È per altro opportuno aggiungere un'osservazione. Prima di liberare la 5) dai denominatori, eseguiamo le operazioni indicate a primo membro. Perveniamo in tal modo all'equazione

$$\frac{x^2+10x+25}{x^2+\ 3x-10}=0,$$

la quale, ove si tenga conto delle due identità

$$x^2+10x+25=(x+5)^2, \quad x^2+3x-10=(x-2)(x+5),$$

si può scrivere

$$\frac{(x+5)^2}{(x-2)(x+5)}=0.$$

Se la frazione algebrica a primo membro si semplifica sopprimendo nei due termini il fattore comune $x+5$, si ottiene l'equazione

$$\frac{x+5}{x-2}=0 \tag{13}$$

che ammette come unico valore eccezionale $x=2$, ed, escluso questo valore, è equivalente all'equazione di 1° grado, $x+5=0$, la cui soluzione è $x=-5$.

Perciò quel valore -5, che per l' equazione data andava escluso come eccezionale, è una vera e propria soluzione dell' equazione (13), che dalla data si è dedotta, eseguendo le operazioni indicate e *semplificando la frazione algebrica*, che con ciò si era ottenuta a primo membro.

Si vede da questo esempio, che, quando, nel cercar di risolvere un' equazione fratta, si portano tutti i termini in un membro ed, eseguite le operazioni indicate, si semplifica la frazione algebrica così ottenuta, dividendone ambo i termini per un loro fattore comune, può darsi che la nuova equazione ammetta come soluzione qualche valore, che per l' equazione, quale era stata considerata dapprincipio, sia eccezionale.

Equazioni irrazionali riconducibili ad equazioni di 2° grado

15. Ad equazioni di 2° grado si possono ricondurre, in casi speciali, anche equazioni, contenenti nei loro termini qualche radicale quadratico, il cui radicando dipenda dalla incognita. Le equazioni di questo tipo costituiscono un caso particolare delle cosiddette equazioni *irrazionali*, designandosi con questo nome tutte le equazioni, in cui figurano non soltanto operazioni razionali (cioè di addizione algebrica, moltiplicazione e divisione), bensì anche di *estrazione di radice*, di indice qualsiasi, da eseguirsi su espressioni, contenenti l' incognita; mentre, per contrapposto, si dicono *razionali* le equazioni, intere e fratte, considerate sin qui, in cui sulla incognita non sono indicate che operazioni razionali,

Per ricondurre la risoluzione di un' equazione irrazionale, contenente radicali quadratici, a quella di un' equazione razionale, occorrono opportuni artifici; e, in ogni caso, sono necessarie particolari avvertenze, in quanto l' equazione, cui si è condotti, non è sempre equivalente alla data. Ci proponiamo di illustrare brevemente questi artifici e queste avvertenze; e, per ragionare sul concreto, cominciamo da un esempio.

Consideriamo l' equazione

$$\sqrt{8-7x}=4x-3. \tag{14}$$

Le soluzioni di questa equazione vanno cercate soltanto fra i valori di x, che non rendono priva di significato l' estrazione di radice quadrata indicata a primo membro; d' altra parte, poichè, per le convenzioni stabilite nel calcolo dei radicali, il simbolo a primo membro denota la radice *positiva* del radicando, vanno considerati per la x esclusivamente quei valori, che rendono positiva o, al minimo, nulla l' espressione a secondo membro.

Si è così condotti ad imporre alla incognita x le due limitazioni

$$8-7x\geq 0,\quad 4x-3\geq 0\quad \text{ossia}\quad \frac{3}{4}\leq x\leq\frac{8}{7}.$$

Ma in questo caso, come in ogni altro, in cui si tratti di equazioni irrazionali a coefficienti esclusivamente numerici, si può benissimo prescindere da questa ricerca preliminare dei valori, che si possono accettare per l'incognita, in quanto il procedimento di risoluzione che adotteremo, ci costringerà poi a verificare direttamente se i valori, cui saremo condotti, rendano effettivamente soddisfatta l'equazione proposta.

Il procedimento è molto semplice. Poichè, se sono uguali due numeri, sono pure uguali i loro quadrati, ogni eventuale radice della (14) soddisfa necessariamente anche l'equazione, che da essa si ottiene, elevandone a quadrato ambo i membri, cioè la

$$8 - 7x = (4x - 3)^2 \quad \text{ossia} \quad 16x^2 - 17x + 1 = 0. \tag{15}$$

Quest' equazione di 2° grado ammette le due radici $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{16}$ ed è fra queste che vanno cercate le radici della (14).

Ora si verifica direttamente che a quest'ultima equazione soddisfa la $x_1 = 1$, non la $x_2 = \frac{1}{16}$, cosicchè la $x_1 = 1$ è l'unica soluzione.

Ed è facile capire come, nel passaggio dalla (14) alla (15), si sia introdotta la soluzione estranea $x_2 = \frac{1}{16}$. Alla stessa equazione (15), cui siamo pervenuti, elevando a quadrato ambo i membri della (14), si perviene anche eseguendo la stessa operazione sull'equazione

$$-\sqrt{8 - 7x} = 4x - 3 \tag{14'}$$

e si verifica, che la soluzione $x_2 = \frac{1}{16}$, ottenuta dianzi come estranea, soddisfa appunto a questa equazione.

16. L'esempio precedente suggerisce una osservazione generale, che occorre tener presente tutte le volte che, per risolvere un'equazione, si è condotti ad elevarne a quadrato ambo i membri.

Data un'equazione qualsiasi

$$A = B, \tag{16}$$

confrontiamola con la

$$A^2 = B^2. \tag{17}$$

È manifesto, che ogni soluzione della (16), soddisfa necessariamente anche la (17), la quale è, dunque, in ogni caso una conseguenza della (16). Ma non si può dire che sia ad essa equivalente; anzi, in generale, la (17) ammette, oltre le radici della (16), qualche altra radice, perchè, trasportando tutti i termini a primo membro, si può scrivere

$$A^2 - B^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad (A - B)(A + B) = 0;$$

cosicchè si decompone nelle due equazioni

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad A + B = 0$$

cioè nella (16) e nella

(16′) $$-A = B.$$

Concludiamo dunque che: ***Elevando a quadrato ambo i membri di un' equazione, si ottiene un' equazione, che è in ogni caso una conseguenza della data, ma ammette, oltre le radici di questa, tutte le eventuali radici dell' equazione, che dalla data si ottiene, cambiando segno ad uno dei suoi membri.***

Se la (16′) è impossibile, cioè priva di radici, le (16), (17) sono certamente equivalenti.

17. Torniamo alle equazioni irrazionali. Se in un' equazione compare come termine un radicale $\sqrt{A}$, dove A denota una certa espressione contenente l' incognita, e si vuol liberare l' equazione da questo radicale, bisogna anzitutto ***isolarlo***, cioè si debbono trasportare tutti gli altri termini, che compaiono nello stesso membro di $\sqrt{A}$, nell' altro membro, così da ridurre l' equazione alla forma

(18) $$\sqrt{A} = B,$$

dove B rappresenta una certa espressione. Dopo ciò si elevano a quadrato ambo i membri e si cerca di risolvere l' equazione

(19) $$A = B^2$$

così ottenuta. Quando se ne siano trovate tutte le radici, bisogna riconoscere, sostituendole, una dopo l' altra, nella equazione data (18), quali di esse la rendano effettivamente soddisfatta e quali, invece, vadano rifiutate come ad essa estranee (e soddisfacenti alla $-\sqrt{A} = B$).

Si noti che una radice della (19) soddisfa certamente la (18), se fa assumere all' espressione B un valore positivo.

18. Illustriamo le considerazioni precedenti con qualche altro esempio di equazioni irrazionali (a coefficienti numerici). Qui si tratterà di equazioni riconducibili al 2° grado; ma può anche darsi che un' equazione irrazionale, ridotta razionale, risulti di 1° grado (vedasi qualche esempio negli Esercizi).

1) $\sqrt{x^2 - 3x - 3} + 6x + 15 = 8x + 6.$

Isolando il radicale si ottiene l' equazione

$$\sqrt{x^2 - 3x - 3} = 2x - 9,$$

da cui, elevando a quadrato i due membri, si deduce la

$$x^2 - 3x - 3 = (2x - 9)^2 \quad \text{ossia} \quad x^2 - 11x + 28 = 0.$$

Quest' equazione, conseguenza della data, ammette le due soluzioni $x_1 = 7$, $x_2 = 4$; e, sostituendole nella equazione data, si verifica che l'unica radice di questa è la $x_1 = 7$. La $x_2 = 4$ soddisfa invece l'equazione

$$-\sqrt{x^2 - 3x - 3} + 6x + 15 = 8x + 6.$$

2) $3\sqrt{6 + x - x^2} + 7x - 3 = 6x + 5.$

Operando come nell' esempio precedente, si è ricondotti all' equazione di 2° grado

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

le cui due radici $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, come si verifica direttamente, soddisfano entrambe l'equazione irrazionale data.

3) $\sqrt{25x^2 - 80x + 160} = 3x - 16.$

Col procedimento solito si perviene all' equazione di 2° grado

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Si verifica direttamente che nessuna delle sue due radici $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ soddisfa l'equazione data, che è perciò impossibile. Esse sono invece entrambe radici dell' equazione

$$-\sqrt{25x^2 - 80x + 160} = 3x - 16.$$

4) $\sqrt{8x + 9} = \sqrt{2x + 6} + \sqrt{x + 4}.$

Questa equazione si libererà dai suoi tre radicali, applicando due volte successivamente l'artificio dell' elevamento a quadrato. La prima volta si ottiene l'equazione

$$8x + 9 = 2x + 6 + x + 4 + 2\sqrt{(2x + 6)(x + 4)},$$

da cui, isolando l'unico radicale rimasto, si deduce

$$2\sqrt{(2x + 6)(x + 4)} = 5x - 1.$$

Con un nuovo elevamento a quadrato si perviene alla

$$4(2x + 6)(x + 4) = (5x - 1)^2 \quad \text{ossia} \quad 17x^2 - 66x - 95 = 0.$$

Questa equazione, conseguenza della data, ammette le due radici $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{19}{17}$, di cui solo la prima soddisfa la (4), mentre l'altra è la radice dell' equazione

$$\sqrt{8x+9} = \sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4}.$$

5) $\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x-5}$.

Qui a primo membro abbiamo un radicale doppio. Con un primo elevamento a quadrato otteniamo l' equazione

$$x + \sqrt{x-2} = 3x - 5,$$

da cui, isolando il radicale ed elevando ancora a quadrato i due membri, deduciamo, con facili riduzioni,

$$4x^2 - 21x + 27 = 0.$$

Delle due radici $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{9}{4}$ di questa equazione di 2° grado, si verifica che solo la prima soddisfa l' equazione data. L' altra soddisfa la

$$\sqrt{x-\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x-5}.$$

19. Talvolta un' equazione irrazionale si può liberare dai **radicali** anche senza elevarne a quadrato ambo i membri. Si consideri, ad es., l' equazione irrazionale fratta

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} = x. \tag{20}$$

Qui dovremmo cercare se esistano per l' incognita valori eccezionali (cioè tali, che annullando l' uno o l' altro dei denominatori, rendano privo di senso il corrispondente termine); ma possiamo tralasciare questa ricerca, riserbandoci al solito di verificare alla fine direttamente se i valori, che troveremo per la x, siano effettivamente radici dell' equazione proposta.

Cominciamo, dunque, col liberare i denominatori dai radicali (III, n. 11), moltiplicando ambo i termini della prima frazione algebrica per $x - \sqrt{2-x^2}$ e ambo i termini della seconda per $x + \sqrt{2-x^2}$. Otteniamo così l' equazione

$$\frac{x-\sqrt{2-x^2}}{2(x^2-1)} + \frac{x+\sqrt{2-x^2}}{2(x^2-1)} = x \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{x^2-1} = x$$

e questa equazione razionale fratta, liberata dal denominatore, dà l' equazione intera

$$x(x^2-2) = 0,$$

che si decompone nelle due equazioni

$$x = 0, \quad x^2 - 2 = 0.$$

Troviamo così per x i tre valori 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, di cui nessuno è eccezionale nè per l'equazione fratta ausiliaria, nè per la data; e si verifica direttamente che essi soddisfano tutti e tre la (20).

Problemi di 2° grado

20. Un problema in una sola incognita si dice di 2° grado, se, ricorrendo all'Algebra, la sua risoluzione si può far dipendere da quella di un'equazione di 2° grado rispetto all'incognita.

In questa risoluzione bisogna seguire norme perfettamente analoghe a quelle, che sono state date per il caso dei problemi di 1° grado (VI_1, n. 15).

In primo luogo si deve *scegliere l'incognita*, la quale sarà un semplice numero se si tratta di un problema aritmetico, la misura di una grandezza se il problema è geometrico o fisico; e in questo secondo caso bisogna stabilire quale *unità di misura* si intenda adottare per codesta incognita, in relazione con quelle eventualmente prefissate dall'enunciato del problema per i *dati*.

Il problema, qualunque esso sia, stabilisce fra i *dati* e l'*incognita* una qualche relazione, che è destinata a determinare il valore di questa incognita. Ma per lo più esso, accanto a siffatta relazione, che si può dire *quantitativa*, impone al valore dell'incognita qualche condizione puramente *qualitativa*, di natura aritmetica o di disuguaglianza. Ad es., un numero incognito di oggetti non può assumere che valori interi e positivi (o meglio assoluti); una lunghezza, un'area, un volume non può assumere che valori positivi; la distanza dei centri di due circonferenze, segantisi a vicenda, deve essere maggiore della differenza dei raggi e minore della loro somma, ecc. E quando si vuol risolvere algebricamente un problema, conviene fissare fin dapprincipio l'attenzione sia sulle condizioni quantitative, sia su quelle qualitative, che esso impone all'incognita.

Dopo ciò il problema si *mette in equazione* o, come anche si dice, *si intavola*; cioè si traduce la relazione quantitativa, stabilita dal problema fra i dati e l'incognita, in un'equazione: e qui supporremo che si pervenga ad un'equazione di 2° grado rispetto all'incognita x.

Se i dati sono assegnati numericamente, tali risultano anche i coefficienti dell'equazione, e si passa senz'altro a risolverla, applicando le formule risolutive generali.

Ove accada che l'equazione sia impossibile (cioè che il rispettivo discriminante sia negativo) vuol dire che anche il problema è impossibile. Se invece l'equazione ammette radici, non si possono senz'altro accettare come soluzioni del problema; bisogna esaminare se rendano soddisfatte anche le condizioni qualitative imposte dal problema; ed ove una radice non obbedisca a tali condizioni, essa, per quanto verifichi l'equazione, va rifiutata, come *estranea* o *non conveniente* al problema.

Talvolta, modificando opportunamente l'enunciato proposto, si riesce a formulare un nuovo problema, che ammetta precisamente come soluzione quella radice dell'equazione del problema dato, che si è riconosciuta estranea ad esso.

Si avverta altresì che se l'equazione del problema si presenta sotto forma fratta e perciò, nel risolverla, si è costretti ad escludere per l'incognita qualche valore, come eccezionale per l'equazione, bisogna verificare direttamente se questi valori eccezionali forniscano soluzioni pel problema proposto (I, n. 32).

Meno semplice risulta, in generale, la discussione del problema, se i dati, anzichè assegnati numericamente, sono rappresentati da lettere; ma su ciò torneremo al n. 25. Qui intanto illustreremo le considerazioni precedenti con alcuni esempi, particolarmente semplici, di problemi di 2° grado a dati numerici.

21. *La differenza di due numeri è* 8 *e il loro prodotto è* 65. *Trovare i due numeri.*

Assunto, come incognita x, il minore dei due numeri, potremo rappresentare l'altro con $x+8$, onde si dovrà avere

$$x(x+8)=65 \quad \text{ossia} \quad x^2+8x-65=0.$$

Il discriminante (ridotto) di quest'equazione è $4^2+65=81$, cosicchè essa ammette due radici distinte. Calcolandole, si trova $-4 \pm \sqrt{81}$, cioè 5 e -13. Sono questi i valori, che può avere il numero minore; i corrispondenti valori del numero maggiore si troveranno, aggiungendo 8. Il problema ammette, dunque, due soluzioni: 5 e 13, -13 e -5.

22. *Dividere il numero* 10 *in due parti, tali che il loro prodotto, aumentato della somma dei loro quadrati, dia* 79.

Assunta come incognita x una delle due parti, l'altra sarà $10-x$, cosicchè dovrà essere

$$x(10-x)+x^2+(10-x)^2=79,$$

ossia, riducendo l'equazione a forma normale,

$$x^2-10x+21=0.$$

Il discriminante (ridotto) è $5^2-21=4$, talchè l'equazione ammette due radici distinte. Esse sono date da $5 \pm \sqrt{4}$, cioè da 7 e 3. Poichè $10-7=3$, $10-3=7$, le due radici diverse della equazione conducono, per il problema, ad un'unica soluzione; cioè alla soluzione 7 e 3. Ciò dipende dal fatto, che le condizioni imposte dal problema ai due numeri richiesti sono *simmetriche*, cioè tali che, qualunque dei due numeri si prenda come incognita, si è sempre condotti alla medesima equazione.

23. *Alcuni operai dividono in parti uguali una gratificazione di L.* 360. *Se fossero stati* 2 *di meno, avrebbero ricevuto, ciascuno, L.* 6 *di più. Quanti sono quegli operai?*

Indichiamone il numero incognito con x. Per questa incognita non si potranno accettare che valori interi positivi (o, meglio, assoluti).

Ciascun operaio, nella ripartizione della gratificazione, riceve Lire $\frac{360}{x}$. Se fossero stati $x-2$, ciascuno avrebbe ricevuto Lire $\frac{360}{x-2}$. Deve dunque essere

$$\frac{360}{x}+6=\frac{360}{x-2}. \tag{21}$$

Per il significato stesso della incognita, non sono ammissibili per essa i valori 0 e 2, che vanno esclusi, come eccezionali, per questa equazione fratta. Perciò, per la risoluzione del nostro problema, possiamo sostituire alla (21) l'equazione intera, che se ne deduce, liberandola dai denominatori, cioè moltiplicandone ambo i membri per $x(x-2)$. Perveniamo così all'equazione

$$360(x-2)+6x(x-2)=360x,$$

ossia

$$x^2-2x-120=0.$$

Il discriminante (ridotto) è 121, cosicchè l'equazione ammette due radici. Esse sono 12 e -10. La seconda va rifiutata, come estranea al problema, il quale perciò ammette l'unica soluzione $x=12$.

24. *Un serbatoio d'acqua è munito di due condutture di afflusso, e, quando queste due condutture siano entrambe aperte, si riempie in* 24 *ore. Una delle due condutture, da sola, impiega, a riempire il serbatoio,* 20 *ore più dell'altra. Quante ore impiega, da sola, ciascuna delle due condutture?*

Indichiamo con x il numero d'ore impiegato, da sola, dalla seconda conduttura, con che dovrà essere $x>0$. Il numero d'ore impiegato dall'altra è $x+20$, cosicchè in 1 ora le due condutture riempiono, rispettivamente, le frazioni $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x+20}$ del serbatoio. Poichè insieme riempiono $\frac{1}{24}$ del serbatoio, si deve avere

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+20}=\frac{1}{24}.$$

I valori $x=0$, $x=-20$, che risultano eccezionali per questa equazione fratta, non convengono certo al problema. Possiamo quindi, senz'altro, sostituire a codesta equazione quella, che se ne deduce liberandola dai denominatori, cioè la

$$x^2-28x-480=0.$$

Quest'equazione ammette le due radici $14 \pm \sqrt{676}$, cioè 40 e -12, di cui solo la prima conviene al problema proposto. Concludiamo dunque che le due condutture per riempire il serbatoio impiegano, ciascuna da sola, rispettivamente 40 e 60 ore.

25. *Trovare un numero che, aumentato della sua radice quadrata positiva, dia* 90.

Indicato con x questo numero che, in quanto, per l'enunciato del problema, deve ammettere radici quadrate, non può essere che positivo, si è senz'altro condotti all'equazione irrazionale

$$x+\sqrt{x}=90. \tag{22}$$

Liberiamola dal radicale; cioè scriviamo successivamente

$$\sqrt{x}=90-x, \quad x=(90-x)^2, \tag{23}$$

e, infine,

$$x^2-181x+8100=0.$$

Il discriminante di quest'equazione è $\frac{361}{4}$, e le sue radici sono

$$\frac{181}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}}$$

cioè 81 e 100.

Ma non bisogna dimenticare che, nel liberare la (22) dal radicale, si può essere introdotta qualche radice ad essa estranea (n. 16). Ed in realtà si verifica direttamente che dei due valori 81 e 100 solo il primo soddisfa la (22), e perciò fornisce l'unica soluzione del problema proposto.

L'altro valore 100 soddisfa invece l'equazione

$$x-\sqrt{x}=90,$$

e dà, quindi, l'unica soluzione di quest'altro problema:

Trovare un numero che, diminuito della sua radice quadrata positiva, dia 90.

26. Nei problemi dei nn. precedenti i dati erano assegnati numericamente. Supponiamo invece che sia proposto un problema di 2° grado, in cui i dati siano rappresentati (tutti o in parte) da lettere. Conseguentemente anche l'equazione del problema contiene nei coefficienti codesti dati letterali, che ne costituiscono i parametri (n. 6).

Si può dire che in tal caso non si ha veramente un unico problema, bensì tutta un'infinità di problemi del medesimo tipo, cioè tanti quanti sono i problemi distinti, che si ottengono attribuendo valori diversi ai parametri. In generale fra questi problemi ve ne sono di possibili e di impossibili; e, fra quelli possibili, alcuni hanno due soluzioni, altri una sola. *Discutere* il problema vuol dire appunto riconoscere tutti questi casi possibili, determinando per ciascuno quali condizioni per i parametri siano necessarie e sufficienti, affinchè esso si presenti.

Poichè il problema, oltre le relazioni quantitative, che si traducono nell'equazione, può imporre all'incognita qualche condizione qualitativa (n. 20), nella discussione del problema si possono distinguere, almeno teoricamente, due parti: 1) la discussione dell'equazione in se stessa: e qui si tratterà di assegnare quali condizioni per i parametri siano necessarie e sufficienti, affinchè il discriminante dell'equazione risulti positivo (casi delle due radici distinte), oppure nullo (casi delle radici doppie), oppure negativo (casi d'impossibilità); 2) la discussione dei risultati così ottenuti, in relazione alle condizioni qualitative imposte dal problema all'incognita: si dovrà riconoscere, in ciascuno dei casi di possibilità dianzi caratterizzati, quali ulteriori condizioni per i parametri siano necessarie e sufficienti, affinchè almeno una delle radici corrispondenti dell'equazione convenga effettivamente al problema; e spesso accadrà che si debbano rifiutare, come estranei al problema, valori dell'incognita, che pur soddisfano all'equazione.

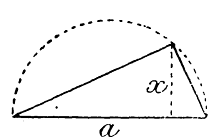
Ma nella pratica non sempre conviene discutere completamente l'equazione, prima di passare a tener conto delle condizioni qualitative; se da queste restano esclusi per i parametri certi valori, è inutile preoccuparsi di verificare se per codesti valori l'equazione sia o no possibile, giacchè in ogni caso le eventuali sue radici, cui così si perverrebbe, andrebbero poi rifiutate, come estranee al problema.

27. Nei casi più semplici, le osservazioni del n. prec. bastano per guidare nella discussione di un problema di 2º grado, come verrà mostrato dagli esempi, che tratteremo nei prossimi nn. 28-35. In altri casi occorrono considerazioni sussidiarie e artifici speciali, che spiegheremo nel prossimo Capitolo V.

Qui ci limitiamo ad aggiungere, che, come si vedrà in alcuni dei prossimi esempi, talvolta per giungere all'equazione del problema, conviene scrivere dapprima l'equazione. che lega l'incognita prescelta a qualche altra *incognita ausiliare,* e poi, trovate le espressioni di queste incognite ausiliarie per mezzo dei dati. sostituire queste espressioni nell'equazione scritta dianzi.

28. *Su di un segmento di data lunghezza* a, *preso come ipotenusa, costruire un triangolo rettangolo, il quale sia equivalente alla somma del quadrato della sua altezza, relativa all'ipotenusa, e del quadrato di dato lato* b.

Prendiamo, come incognita x l'altezza del triangolo rispetto all'ipotenusa. Per il suo stesso significato, x dovrà risultare positiva e non maggiore di $\frac{a}{2}$, che è la massima altezza dei triangoli rettangoli di ipotenusa a (in quanto il luogo dei loro vertici è la circonferenza di diametro a).



Per porre il problema in equazione basta osservare che l'area del triangolo è $\frac{1}{2}ax$, cosicchè deve risultare

(24) $$\frac{1}{2}ax = x^2 + b^2 \quad \text{ossia} \quad 2x^2 - ax + 2b^2 = 0.$$

Poichè il discriminante è dato da $a^2 - 16b^2$, questa equazione ammette due radici distinte o due radici coincidenti o nessuna radice, secondo che è

$$a^2 > 16b^2 \quad \text{o} \quad a^2 = 16b^2 \quad \text{o} \quad a^2 < 16b^2,$$

od anche, in quanto a e b sono, per dato, entrambi positivi, secondo che è

$$b < \frac{a}{4} \quad \text{o} \quad b = \frac{a}{4} \quad \text{o} \quad b > \frac{a}{4}.$$

In quest'ultimo caso il problema è senz'altro impossibile. Negli altri due bisogna tener conto delle condizioni qualitative, cui è soggetta la x. Se è $b < \frac{a}{4}$, le due radici, come risulta dai segni dei coefficienti della (24), sono entrambe positive e, poichè la loro somma è data da $\frac{a}{2}$, sono anche tutte e due minori di $\frac{a}{2}$. Perciò queste due radici

(25) $$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16b^2}}{4}$$

forniscono due soluzioni del problema. Se, infine, è $b = \frac{a}{4}$, le due radici coincidono in $\frac{a}{2}$, e si ha per il problema una sola soluzione (doppia).

29. *Dato un segmento* a, *determinarne la sezione aurea*. Si deve determinare quella parte x di a, il cui quadrato risulti equivalente al rettangolo della parte residua e dell'intero segmento. Naturalmente deve essere $0 < x < a$.

Ponendo il problema in equazione si è immediatamente condotti alla

$$(26)\qquad x^2 = a(a - x),$$

ossia

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Poichè il discriminante $\frac{5}{4}a^2$ è sempre positivo, quest'equazione ammette in ogni caso due radici distinte, le quali, come risulta dai segni dei coefficienti (n. 8), sono di segno contrario.

Mentre la radice negativa

$$(27)\qquad -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)a,$$

va rifiutata, come estranea al problema, quella positiva, cioè

$$(28)\qquad -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a,$$

è evidentemente minore di a, cosicchè conviene al problema, di cui dà l'unica soluzione. È questa dunque la *sezione aurea* del segmento a (lato del decagono regolare di raggio a).

È facile interpretare la radice negativa (27) dell'equazione del problema. Il suo valore opposto (o, se si vuole, il suo valore assoluto)

$$(29)\qquad \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)a$$

è la radice positiva dell'equazione, che dalla (26) si ottiene, cambiando segno alla x, cioè della

$$x^2 = a(a + x),$$

la quale ha naturalmente come radice negativa l'opposta della sezione aurea (28). Ora la precedente equazione si può anche scrivere

$$a^2 = x(x - a),$$

onde, confrontandola con la (26), si riconosce che la (29) dà la *lunghezza di quel segmento, la cui sezione aurea è il segmento dato* a (raggio del decagono regolare di lato a).

Del resto la radice negativa (27) si può anche interpretare direttamente, considerando il problema su di una retta graduata; ed è questa la considerazione, di cui conviene, di regola, valersi nei casi analoghi. Se sulla retta graduata, a partire dall'origine O, si prende il segmento $OA = a$ (il quale, per l'ipotesi $a > 0$, cadrà, rispetto a O, dalla parte positiva) e si interpreta la x come distanza (relativa) di un incognito punto X da O (il quale cadrà, rispetto ad O, dalla parte positiva o negativa, secondo che è $x > 0$ o $x < 0$), l'equazione (26), in quanto $a - x$ misura in ogni caso la distanza (relativa) XA, traduce il seguente problema: *Sulla retta OA trovare un punto X tale, che OX risulti medio proporzionale fra OA ed XA.* Il problema ammette le due soluzioni (27), (28). La seconda, cioè quella positiva, conduce ad un punto compreso fra O ed A (e dà luogo alla sezione aurea di OA); la soluzione negativa (27) dà invece un punto esterno al segmento O e, precisamente, situato rispetto ad O dalla parte opposta di A.

30. *Dalla sfera di dato raggio* R, *segare un segmento sferico ad una base, la cui superficie totale sia uguale a quella del cerchio di dato raggio* r.

Prendiamo come incognita l'altezza x del segmento sferico voluto, talchè dovrà essere $0 < x \leq 2R$.

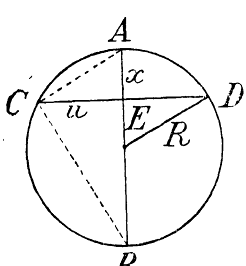
L'area della calotta corrispondente a codesto segmento è $2\pi Rx$; e, se per un momento assumiamo come incognita ausiliare u il raggio della base del segmento, l'area di questa è πu^2, cosicchè l'area della superficie totale è data da

$$\pi(2Rx + u^2);$$

e si dovrà avere

$$(30) \qquad \pi(2Rx + u^2) = \pi r^2 \quad \text{ossia} \quad 2Rx + u^2 = r^2.$$

Ma dalla figura, dove è $AE = x$, $CE = u$, $EB = 2R - x$,



e CE è l'altezza del triangolo rettangolo ABC, si ricava

$$x : u = u : (2R - x)$$

e quindi

$$u^2 = x(2R - x).$$

Sostituendo nella (30), si perviene all'equazione del problema

$$(31) \qquad 2Rx + x(2R - x) = r^2 \quad \text{ossia} \quad x^2 - 4Rx + r^2 = 0.$$

Poichè il discriminante, a meno del fattore 4, è uguale a $4R^2 - r^2$, la condizione di possibilità di questa equazione è data da

$$4R^2 \geq r^2 \quad \text{ossia} \quad \pi r^2 \leq 4\pi R^2.$$

Cioè, come si poteva prevedere, l'area del cerchio di dato raggio r, cui deve risultare uguale l'area della superficie totale del segmento sferico, non deve superare l'area della superficie della sfera. E la stessa condizione, in quanto R ed r sono positivi, si può anche scrivere $r \leq 2R$, cioè il raggio del cerchio dato non deve superare il diametro della sfera.

Se questa condizione non è soddisfatta, è impossibile, insieme con l'equazione (31), anche il problema.

Se $r < 2R$, l'equazione (31) ammette le due radici distinte ed entrambe positive

$$2R \pm \sqrt{4R^2 - r^2},$$

di cui, per altro, la maggiore, cioè quella corrispondente al segno $+$, è manifestamente maggiore di $2R$ e va quindi rifiutata, come estranea al problema; mentre l'altra, cioè la

$$2R - \sqrt{4R^2 - r^2}, \tag{32}$$

è minore di $2R$ e fornisce l'unica soluzione del problema (altezza del segmento sferico richiesto).

Se, infine, è $r = 2R$, le due radici della (31) coincidono nel valore $2R$, e il risultato è del tutto privo d'interesse; il segmento sferico è addirittura l'intera sfera, e ciò è ben naturale, in quanto il cerchio, alla cui superficie deve risultare uguale la superficie totale del segmento, è di raggio $2R$ ed ha quindi l'area $4\pi R^2$, uguale a quella della sfera.

31. Abbiamo così dato (nn. 28-30) tre esempi di applicazioni dell'Algebra alla Geometria. Sarà utile aggiungere in proposito qualche osservazione d'ordine generale.

Notiamo anzitutto che ciascuna delle equazioni di 2° grado (24), (26), (31), in cui abbiamo rispettivamente tradotti i tre problemi geometrici considerati, è *omogenea* rispetto al complesso delle lettere (*incognita* e *dati*), che vi compaiono. È questa una proprietà generale di tutte le equazioni, che si ottengono esprimendo in forma algebrica le relazioni fra grandezze geometriche, quando si rappresentino con lettere le lunghezze dei segmenti, che individuano codeste grandezze. Essa discende dall' ovvia circostanza, che non può sussistere una relazione di uguaglianza se non tra segmenti, o tra superficie, o tra solidi; ed ogni area di superficie è data (a meno di eventuali coefficienti numerici, indipendenti dall' unità di misura) dal prodotto delle lunghezze di due segmenti, e similmente, il volume di ogni solido è dato dal prodotto delle lunghezze di tre segmenti.

E se talvolta l' equazione, in cui si traduce un problema geometrico, sembra presentarsi in forma non omogenea, ciò dipende dal fatto che in quei suoi termini, che non obbediscono alla omogeneità, si sottintende come fattore, un conveniente numero di volte, il segmento di lunghezza 1 (che dal punto di vista algebrico sarebbe inutile scrivere). Così, quando, per giungere al problema aritmetico della estrazione di radice quadrata, abbiamo considerato il problema geometrico della costruzione del medio proporzionale x fra due dati segmenti a e b (II, n. 1), siamo stati condotti all'equazione omogenea, rispetto alle tre lettere a, b, x,

$$x^2 = ab.$$

Poi, per semplificare quest' equazione, abbiamo supposto che il segmento b si riducesse all' unità, con che l' equazione ha assunto la forma algebricamente non omogenea

$$x^2 = a.$$

Ma nella interpretazione geometrica il secondo membro non va considerato come la lunghezza di un segmento, bensì come l' area del rettangolo di dimensioni a ed 1.

In ogni caso questa *legge di omogeneità* può tornare utile, sia come regola per controllare la esattezza della equazione, in cui siasi tradotto un dato problema geometrico, sia, viceversa, come guida nell'interpretare geometricamente una data equazione.

32. In secondo luogo, riprendiamo le considerazioni del n. 26 sulla discussione dei problemi di 2° grado a dati letterali per fare un passo ulteriore.

Quando si tratta con l'Algebra un problema geometrico e, dopo avere caratterizzati i casi di possibilità, si sono ottenute, in base alle formule risolutive, le espressioni delle corrispondenti soluzioni, si cerca di dedurne la *costruzione* delle soluzioni trovate.

Le espressioni letterali di queste soluzioni danno una serie ben definita di operazioni, che eseguite sulle misure delle grandezze date, conducono a trovare le misure delle grandezze incognite. Orbene si cerca di *interpretare geometricamente* codeste operazioni algebriche, in guisa da trarne una serie di costruzioni, eseguibili con gli strumenti del disegno (riga, compasso, e, se fa comodo, anche squadra), le quali permettano di dedurre direttamente dalle grandezze date le grandezze incognite.

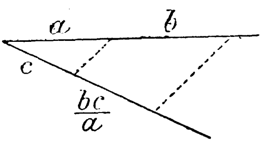
Le formule risolutive delle equazioni di 2° grado implicano soltanto operazioni razionali (cioè di somma algebrica, moltiplicazione, divisione) e di estrazione di radice quadrata. Perciò alla interpretazione geometrica di tali formule si arriverà in ogni caso, quando si sappiano interpretare i risultati delle operazioni elementari or ora indicate (subordinatamente alla condizione, che sia sempre rispettata la condizione di omogeneità).

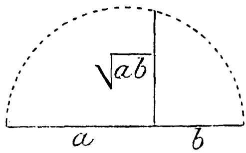
Non occorre spendere parole sulla costruzione della somma $a + b$ e della differenza $a - b$, dove con a e b, come con ogni altra lettera che useremo in queste considerazioni, intendiamo rappresentare numeri positivi (o assoluti), in quanto vanno interpretati come lunghezze di segmenti.

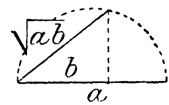
Le espressioni, che restano da interpretare e costruire sono semplicemente

$$\frac{bc}{a} \quad \text{e} \quad \sqrt{ab},$$

di cui la prima si può interpretare come il segmento quarto proporzionale dopo i tre segmenti a, b e c (II, n. 1) ed è





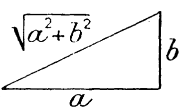


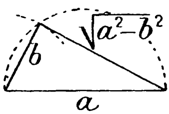
perciò costruibile col noto procedimento, suggerito dal cosiddetto teorema di Talete. La seconda si può interpretare, come il medio proporzionale fra i due segmenti a e b (II, n. 1), e si può costruire con procedimenti altrettanto noti.

A queste espressioni elementari vanno aggiunte, come particolarmente importanti, queste altre due

$$\sqrt{a^2+b^2}, \quad \sqrt{a^2-b^2},$$

che si interpretano e si costruiscono immediatamente, ricordando il teorema di Pitagora. La prima è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti a e b; l'altra è il secondo cateto del triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa a e per primo cateto b.





E le interpretazioni e le costruzioni così date per le varie espressioni elementari dianzi considerate permettono di interpretare e costruire anche ogni altra espressione, in cui figurino soltanto addizioni algebriche, moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici quadrate [1].

[1] Cfr. Enriques-Amaldi, *Geometria elementare*, Geometria piana, Parte II; Bologna, Zanichelli. Cap. IX, nn. 34-37.

33. Come illustrazione delle considerazioni precedenti, diamo la costruzione delle radici delle equazioni di 2° grado, considerate sotto le loro forme omogenee tipiche. Queste varie forme, quando il primo coefficiente sia ridotto all'unità, differiscono fra loro per i segni del secondo coefficiente e del termine noto e sono date da

$$x^2 \pm ax \pm b^2 = 0.$$

Ma siccome costrurremo, in valore assoluto, anche le radici negative, potremo limitarci a considerare i due tipi

$$x^2 - ax + b^2 = 0 \tag{33}$$

e

$$x^2 + ax - b^2 = 0, \tag{34}$$

giacchè gli altri due si riducono a questi, cambiando segno a x, e con ciò cambia il segno, ma non il valore assoluto, delle radici.

Cominciando dalla (33), notiamo che quest'equazione, in quanto si può scrivere

$$ax - x^2 = b^2 \quad \text{ossia} \quad x(a - x) = b^2,$$

traduce il problema geometrico di *determinare le dimensioni* (x e $a - x$) *del rettangolo di perimetro* 2a, *equivalente al quadrato di lato* b.

La condizione di possibilità della (33) è data da

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b^2,$$

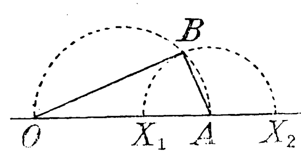
cioè, in quanto a e b sono positivi,

$$\frac{a}{2} \geq b.$$

Se $\frac{a}{2} > b$, le due radici della (33), fra loro distinte ed entrambe positive, sono date da

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2},$$

e si costruiscono sommando e sottraendo al segmento $\frac{a}{2}$ il segmento $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$, cioè il secondo cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa $\frac{a}{2}$ e di primo cateto b. La costruzione è effettuata nella unita figura dove $OA = \frac{1}{2}a$, $OB = b$ e le due radici (dimensioni del rettangolo voluto) sono rappresentate da OX_1, OX_2.



Se poi è $\frac{a}{2} = b$, le due radici coincidono nel valore $\frac{a}{2}$, cioè b, e il rettangolo voluto è lo stesso quadrato dato.

Passiamo alla (34), che in quanto si può scrivere

$$x(x + a) = b^2,$$

traduce il problema geometrico di *determinare le dimensioni del rettangolo* (x e $x + a$), *che abbia come differenza dei lati* a *e sia equivalente al quadrato di lato* b.

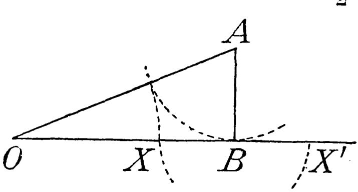
Qui, essendo negativo il termine noto, l'equazione è sempre possibile ed ammette in ogni caso due radici distinte e di segno contrario, che sono date da

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Quella positiva, cioè la

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}, \tag{35}$$

si costruisce sottraendo il segmento $\frac{a}{2}$ dall'ipotenusa $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$ del triangolo rettangolo di cateti $\frac{a}{2}$ e b. Nell'unita figura, dove $OB = b$, $AB = \frac{1}{2}a$, essa è rappresentata da OX. Il valore assoluto della radice negativa, cioè

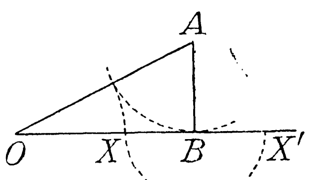


$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{a}{2}, \tag{36}$$

è rappresentato da OX', dove X' è il simmetrico di X rispetto a B.

Altrettanto facile è la costruzione delle soluzioni (25), (28), (32) dei problemi considerati ai nn. 28 - 30. L'alunno le costruisca per esercizio.

In particolare le costruzioni della sezione aurea (28) del segmento a e del segmento (29), che ammette a come sezione aurea, rientrano in quelle date or ora per la (35) e la (36), quando si supponga $b = a$. Si ricade così sulle ben note costruzioni, che sono suggerite dalla teoria dei triangoli simili (1).



(1) Enriques-Amaldi, *Geometria elementare*, Geom. piana, Parte II, Cap. VII, n. 37.

34. Torniamo alla risoluzione di problemi di 2° grado, per indicare, in questo n. e nel seguente, due esempi non più geometrici, ma fisici.

A quale distanza fra la Terra e la Luna (e sulla loro congiungente) dovrebbe trovarsi un terzo corpo celeste perchè potesse restare, rispetto ad esse, in quiete, sotto l'azione delle loro due attrazioni? Si prenda la distanza dalla Terra alla Luna uguale a km. 385000 *e la massa della Terra uguale ad* 81 *volte quella della Luna. Inoltre si tenga presente che le attrazioni esercitate su di uno stesso corpo celeste dagli altri corpi sono direttamente proporzionali alle masse di questi e inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal corpo attratto.*

Trattiamo il problema in generale, anche per non introdurre subito nei calcoli un numero così grande come la distanza fra la Terra e la Luna. Pensiamo dunque, due corpi celesti T ed L quali si vogliano, e indichiamo con $h > 0$ la loro distanza (misurata in km.), con k il rapporto tra la massa di T e quella di L, supponendo, per fissare le idee $k \geq 1$.

Chiamato C il corpo celeste, che vogliamo possa restare in quiete sotto le attrazioni simultanee di T ed L, abbiamo, per lo stesso enunciato del problema, che C deve trovarsi sulla retta TL e compreso fra T ed L. Perciò, se come incognita x assumiamo la distanza TC, deve essere

(37) $$0 < x < h.$$

Per porre il problema in equazione, osserviamo che le attrazioni esercitate da T e da L sullo stesso corpo C debbono stare fra loro nel rapporto k delle loro masse e, nello stesso tempo, nel rapporto degli inversi dei quadrati delle rispettive distanze x e $h - x$ da C. Insomma codeste due attrazioni debbono stare fra loro come $\frac{k}{x^2}$ sta a $\frac{1}{(h-x)^2}$. Ma perchè C resti in quiete, occorre e basta che le due attrazioni, le quali agiscono in senso opposto, si elidano a vicenda, cioè che il loro rapporto sia uguale ad 1. Si deve dunque avere

(38) $$\frac{k}{x^2} = \frac{1}{(h-x)^2}.$$

È questa l'equazione del problema. Si tratta di un'equazione fratta, i cui valori eccezionali $x = 0$ e $x = h$ vanno senz'altro esclusi, in forza delle condizioni (37). Con questa esclusione, possiamo sostituire alla (38), l'equazione, che se ne deduce, moltiplicandone ambo i membri per $x^2(h-x)^2$, cioè, in forma normale, la

(39) $$(k-1)x^2 - 2hkx + h^2k = 0.$$

Per $k = 1$ quest'equazione si riduce all'equazione di 1° grado

$$-2hx + h^2 = 0,$$

che ammette l'unica soluzione $\frac{h}{2}$; e il risultato era prevedibile. Infatti in questo caso, essendo $k = 1$, T ed L hanno masse uguali, ed è quindi evidente, che il corpo C, per poter restare in quiete rispetto a T ed L, deve trovarsi nel punto medio della loro distanza TL.

Escluso questo caso, cioè supposto $k > 1$, abbiamo che il discriminante dell'equazione di 2° grado (39) è dato, a meno del fattore 4, da h^2k cosicchè risulta sempre positivo; e la (39) ammette due radici, le quali, come si rileva dai segni dei cofficienti, sono entrambe positive. Esse sono date da

$$\frac{hk \pm \sqrt{h^2k}}{k-1} = \frac{k \pm \sqrt{k}}{k-1} h.$$

Ma, essendo

$$k + \sqrt{k} > k - 1 > 0,$$

la maggiore di queste due radici risulta maggiore di h e quindi estranea al problema. Quanto, invece, alla radice minore

$$\frac{k - \sqrt{k}}{k-1} h, \tag{40}$$

si osservi, che essendosi supposto $k > 1$ e quindi $k^2 > k$, risulta $\sqrt{k} > 1$ e $k > \sqrt{k}$, perchè in caso contrario si avrebbe, elevando a quadrato ambo i membri, rispettivamente (I, n. 5F) $k \leq 1$, $k^2 \leq k$. Perciò

$$0 < k - \sqrt{k} < k - 1,$$

e la radice (40), come minore di h, soddisfa effettivamente il problema, di cui costituisce l'unica soluzione.

Nel caso proposto dall'enunciato, cioè per $h = 385000$, $k = 81$, il valore della (40) è

$$\frac{81 - \sqrt{81}}{80} 385000 = \frac{9}{10} 385000 = 346500.$$

È questa, in km., la distanza dalla Terra, a cui, sulla congiungente della Terra con la Luna, dovrebbe trovarsi un corpo, perchè potesse restare, rispetto ad esse, in quiete.

35. *Dalla bocca di un pozzo di miniera si lascia cadere sul fondo una pietra, e fra l'istante, in cui si abbandona a se stessa la pietra e quello, in cui si avverte il suo tonfo sul fondo, passano* t *secondi. Quanto è profondo il pozzo? Si tenga presente che, quando si lascia cadere un corpo (e si prescinde dalla resistenza dell'aria), gli spazi, che esso percorre nella sua caduta, sono proporzionali ai quadrati delle* *durate della caduta, misurate a partire dall'istante, in cui il corpo si è abbandonato a se stesso, e che nel primo secondo di tempo esso percorre m.* 4,905. *D'altra parte si ricordi che il suono si propaga (di moto uniforme), percorrendo ad ogni secondo m.* 333.

Assumiamo come incognita x la profondità del pozzo, misurata in metri (e necessariamente positiva); e, per semplicità di scrittura poniamo

$$4{,}905 = \frac{1}{2} g, \quad 333 = v,$$

cioè indichiamo con g la cosiddetta *accelerazione della gravità* (in metri al secondo), e con v l'analoga misura della *velocità di propagazione del suono.*

Inoltre denotiamo per un momento con t_1 il numero di secondi, che la pietra impiega a cadere dalla bocca del pozzo al fondo, e con t_2 il numero di secondi, che il suono prodotto dalla pietra, battendo sul fondo, impiega per giungere alla bocca del pozzo. Si avrà

$$t_1 + t_2 = t, \tag{41}$$

con $t_1 < t$, $t_2 < t$.

Ora i numeri di metri, percorsi dalla pietra, cadendo per 1 o 2 o 3... o t_1 secondi, sono proporzionali rispettivamente a $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, t_1^2$; e, siccome nel primo minuto secondo la pietra percorre precisamente $\frac{1}{2} g$ metri, i numeri di metri percorsi cadendo per 2 o 3... o t_1 secondi, si otterranno moltiplicando rispettivamente $2^2, 3^3, \ldots, t_1^2$ per $\frac{1}{2} g$. Ma in t_1 secondi la pietra tocca il fondo del pozzo, cioè ne percorre tutta la profondità x: si avrà perciò

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2 \cdot$$

D'altra parte, poichè il suono ad ogni secondo percorre v metri e a salire dal fondo del pozzo alla bocca impiega t_2 secondi, sarà

$$x = v t_2. \tag{42}$$

Da queste due ultime equazioni si deduce

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad t_2 = \frac{x}{v},$$

e quindi, sostituendo nella (41),

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t. \tag{43}$$

Abbiamo dunque che il nostro problema conduce ad un'equazione irrazionale. Liberandola dal radicale, perveniamo all'equazione di 2° grado

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{1}{g} + \frac{t}{v}\right)x + t^2 = 0, \tag{44}$$

il cui discriminante

$$\frac{1}{g}\left(\frac{2t}{v} + \frac{1}{g}\right),$$

in quanto per dato è $t > 0$, $g > 0$, $v > 0$, risulta sempre positivo. Essa ammette perciò due radici distinte; e dai segni dei coefficienti si rileva che queste due radici sono entrambe positive. Poichè la (44) è una conseguenza dell' equazione (43) del problema, la soluzione di questo va cercata fra codeste due radici, che sono date da

$$v\left\{t + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g}\left(2t + \frac{v}{g}\right)}\right\}.$$

Ma la maggiore di queste due radici (cioè quella corrispondente al segno $+$) va rifiutata, perchè è manifestamente maggiore di vt, mentre la profondità del pozzo, in forza della (42), deve risultare uguale a vt_2, con $t_2 < t$. Non resta dunque che la radice minore; e, senza fare alcuna ulteriore verifica, siamo sicuri che essa soddisfa il problema, perchè questo, come risulta dall'esperienza, ammette indubbiamente una soluzione, e questa sua soluzione deve per necessità soddisfare l'equazione (43), in cui esso si traduce, e quindi anche la (44), che è una conseguenza della (43).

Concludiamo così che la profondità del pozzo è data, in metri da

$$v\left\{t + \frac{v}{g} - \sqrt{\frac{v}{g}\left(2t + \frac{v}{g}\right)}\right\}.$$

Ad es., prendendo $t = 5^s{,}5$ (e naturalmente $g = 9{,}81$, $v = 333$) si trova che la profondità del pozzo è, a meno di 1 cm., di m. 111,71.

Equazioni di grado superiore riconducibili ad equazioni di 2° grado

36. Vi sono tipi speciali di equazioni di grado superiore al 2°, le cui radici si possono trovare tutte, risolvendo soltanto equazioni di 2° grado. Ne daremo qui due esempi notevoli.

Consideriamo in primo luogo un'equazione di 4° grado, la quale non contenga potenze ad esponente dispari dell'incognita (*equazione biquadratica elementare*). Ove si trasportino tutti i termini in un membro, essa avrà la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

dove a, b, c sono coefficienti, che si suppongono noti; e, poichè è lecito supporre a diverso da zero, si potrà ridurre a

(45) $$x^4 + px^2 + q = 0,$$

dove con p e q si designano i rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$.

Ora codesta equazione si può anche scrivere

$$(x^2)^2 + px^2 + q = 0,$$

cosicchè abbiamo che, se x soddisfa all'equazione (45), il suo quadrato $u = x^2$ (che qui si prende come *incognita ausiliare*) dovrà soddisfare alla equazione (detta *risolvente* della data)

(46) $$u^2 + pu + q = 0.$$

Se quest'equazione ammette una soluzione positiva u_1, le due radici quadrate

$$\pm\sqrt{u_1}$$

soddisfaranno alla (45); cosicchè, secondo che la equazione ausiliare (46) ammette due radici positive, una o nessuna, l'equazione biquadratica ammetterà quattro radici (a due a due uguali in valore assoluto e di segno contrario) o due (fra loro uguali in valore assoluto e di segno contrario) o nessuna.

Il primo caso si verifica (n. 8) per

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad p < 0, \quad q > 0,$$

e le quattro radici sono date dall'unica formula

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}},$$

ove si scelgano nei quattro modi possibili i segni; il secondo caso si verifica sia per

$$q < 0,$$

e sotto questa ipotesi le due radici sono (n. 8)

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}},$$

sia per

$$\frac{p^2}{4}-q=0, \quad p<0,$$

e allora le radici si riducono a

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2}}.$$

Ad es., l'equazione

$$4x^4-25x^2+36=0$$

ammette le quattro radici $\pm 2,\ \pm\frac{3}{2}$; le

$$3x^4-25x^2-18=0, \quad 81x^4-72x^2+16=0$$

hanno le due radici ± 3 e, rispettivamente, $\pm\frac{2}{3}$; le

$$x^4+x^2+1=0, \quad 2x^4+3x^2+1=0$$

sono entrambe impossibili.

37. Un'altra specie di equazioni riconducibili ad equazioni di 2° grado sono le cosiddette equazioni di 3° e 4° grado *a radici reciproche* o, più semplicemente, *reciproche*. Per qualsiasi grado si designano con questo nome le equazioni (intere), in cui, quando tutti i termini siano portati in un membro e ordinati, come di solito, secondo le potenze decrescenti dell'incognita, i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi risultano o uguali od opposti. La ragione di tale denominazione si vedrà nel caso del 3° e del 4° grado, fra un momento.

Cominciando dalle equazioni reciproche di 3° grado, abbiamo che esse sono o dell'uno o dell'altro dei seguenti due tipi:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \tag{47}$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0. \tag{48}$$

Ora i primi membri di queste due equazioni si possono scrivere

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + b(x + 1)x,$$
$$ax^3 + bx^2 - bx - a = a(x^3 - 1) + b(x - 1)x;$$

ed, ove si ricordi (I, n. 16) che

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1), \quad x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

si perviene alle due identità

$$\left\{\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= (x + 1)(ax^2 + [b - a]x + a), \\ ax^3 + bx^2 - bx - a &= (x - 1)(ax^2 + [b + a]x + a), \end{aligned}\right. \tag{49}$$

le quali, del resto, si ottengono anche direttamente, dividendo, con la regola del RUFFINI (I, n. 20), i due polinomi a primo membro per $x + 1$ ed $x - 1$ rispettivamente.

Risulta di qui che la (47) si decompone nelle due equazioni

$$x + 1 = 0, \quad ax^2 + [b - a]x + a = 0,$$

e, quindi, ammette, oltre la radice -1, le eventuali radici di quest'ultima equazione (reciproca) di 2° grado.

Similmente, la (48), in forza della seconda delle identità (49), si decompone nelle due equazioni

$$x - 1 = 0, \quad ax^2 + [b + a]x + a = 0,$$

e perciò ammette, oltre la radice 1, le eventuali radici di quest' altra equazione (pur essa reciproca) di 2° grado.

Per ciascuna delle due equazioni di 2° grado dianzi ottenute, le due radici, supposte esistenti, hanno per prodotto 1 (n. 7), cioè sono fra loro reciproche, e, poichè tanto -1 quanto 1 è reciproco di se stesso, risulta giustificato il nome dato alle equazioni (47), (48).

P. es. le equazioni

$$x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0, \quad x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

ammettono le radici (si ricordi il n. 10 del Cap. III)

$$-1, \quad \frac{-5+\sqrt{21}}{2}, \quad \frac{-5-\sqrt{21}}{2}=\frac{2}{-5+\sqrt{21}}$$

e, rispettivamente,

$$1, \quad -2+\sqrt{3}, \quad -2-\sqrt{3}=\frac{1}{-2+\sqrt{3}}.$$

38. Le equazioni reciproche di 4° grado possono essere dei seguenti due tipi:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \tag{50}$$

$$ax^4+bx^3 \qquad -bx-a=0. \tag{51}$$

Si noti, che nell'equazione di questo secondo tipo manca il termine in x^2, perchè il rispettivo coefficiente, come corrispondente al termine equidistante dagli estremi, deve essere uguale al suo opposto, e quindi nullo.

Il metodo di risoluzione è, per questi due tipi di equazioni, diverso. Nel caso della (50), osserviamo che essa non ammette certamente la radice $x=0$, perchè il termine noto a non può annullarsi, senza che l'equazione si riduca di 3° grado. Perciò la (50) è equivalente (I, nn. 29, 30) all'equazione, che da essa si deduce, dividendone ambo i membri per x^2,

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

ossia

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0. \tag{52}$$

Se allora si prende come incognita ausiliare la

$$u=x+\frac{1}{x},$$

si ha, elevando a quadrato ambo i membri,

$$u^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

ossia

$$u^2-2=x^2+\frac{1}{x^2},$$

cosicchè, sostituendo nella (52) si è condotti alla equazione ausiliare di 2° grado (*risolvente* della data)

$$a(u^2-2)+bu+c=0. \tag{53}$$

Se u_1 è una sua soluzione, le eventuali soluzioni della equazione

$$x+\frac{1}{x}=u_1,$$

che si può scrivere

(54) $$x^2-u_1x+1=0$$

ed è perciò anch'essa di 2° grado, soddisfaranno anche alla (50).

In tal modo si ottengono tutte le soluzioni della (50), e poichè la (53) può avere al massimo due soluzioni e per ciascuna di esse la (54) può pur essa averne al massimo due, concludiamo che la (50) ammetterà al massimo quattro soluzioni; e, precisamente può averne 4 o 2 o nessuna.

Si noti che le radici della (54), quando esistono, hanno per prodotto 1 (n. 7), cosicchè anche per la equazione (50) le eventuali radici sono a due a due reciproche.

Per es. le equazioni

$$x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0 \quad \text{e} \quad x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$$

hanno le radici

$$2+\sqrt{3},\quad 2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}},\quad \frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{3+\sqrt{5}},$$

e, rispettivamente,

$$\frac{5+\sqrt{21}}{2},\quad \frac{5-\sqrt{21}}{2}=\frac{2}{5+\sqrt{21}}.$$

Per risolvere la (51) si procede in modo analogo a quello tenuto per le equazioni reciproche di 3° grado (n. prec.).

La (51) si può scrivere

$$a(x^4-1)+b(x^2-1)x=0,$$

ossia, in forza dell'identità $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$,

$$(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0,$$

cosicchè si decompone nelle due equazioni

$$x^2-1=0,\quad ax^2+bx+a=0.$$

Essa perciò ammette sempre le due radici 1 e -1, e, in più di queste, le eventuali radici dell'equazione (reciproca) di 2° grado, or ora scritta.

Anche per la (51) le radici sono a due a due reciproche.

Ad es., l'equazione

$$x^4+3x^3-3x-1=0$$

ammette le radici

$$1,\quad -1,\quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{-3+\sqrt{5}}.$$

Esempi di sistemi di grado superiore al 1°

39. Sappiamo risolvere i sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite (I, nn. 42-49). Qui ci proponiamo di considerare qualche esempio di sistemi, in cui compaia almeno un'equazione di 2° grado in due incognite; e anzitutto vogliamo far vedere che *la risoluzione di ogni sistema in due incognite x ed y, costituito da una equazione di* 1° *grado e da una di* 2°, *si può sempre ricondurre a quella di un'equazione di* 2° *grado in una sola incognita*. Perciò i sistemi di tale tipo si dicono *di* 2° *grado.*

Riferiamoci ad un esempio, e consideriamo il sistema

$$(55) \qquad \begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 8 = 0. \end{cases}$$

Per risolverlo ci varremo di quello stesso *metodo di sostituzione*, che abbiamo imparato ad applicare nel caso dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite (I, n. 40).

Si debbono trovare tutte le coppie di valori, che sostituiti nelle due equazioni, rispettivamente ad x ed y, le rendono soddisfatte entrambe. Se si considera soltanto la prima, e si vogliono tutte le sue soluzioni, si comincia col risolverla rispetto ad una delle incognite, per es. alla y, come se l'altra fosse conosciuta. Si trova in tal modo

$$(56) \qquad y = \frac{3x-2}{2};$$

e le soluzioni della prima delle (55) sono date da tutte (e sole) le coppie di valori, che si ottengono da

$$(57) \qquad x, \quad y = \frac{3x-2}{2}$$

attribuendo ad x tutti i possibili valori.

Fra queste infinite coppie di valori dobbiamo considerare quelle che, eventualmente, soddisfano anche la seconda equazione (55). Ora, esprimendo che la coppia di valori (57) soddisfa anche questa seconda equazione, cioè sostituendo in essa, al posto di y, l'espressione (56), otteniamo l'equazione

$$x^2 - (3x - 2)x + \frac{(3x-2)^2}{2} + 4x - 5(3x - 2) + 8 = 0,$$

ossia, eseguendo le operazioni indicate e semplificando,

(58) $$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Essa definisce quegli eventuali valori di x, per cui le (57) danno le soluzioni comuni alle due equazioni, cioè le soluzioni del sistema. Poichè la (58) ammette le due radici $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ e, in corrispondenza di questi due valori di x, la (56) dà rispettivamente $y_1 = 5$, $y_2 = 2$, il sistema (55) ammette le due soluzioni $x_1 = 4$, $y_1 = 5$ e $x_2 = 2$, $y_2 = 2$.

L'equazione nella sola x (58), che abbiamo dedotto come conseguenza del dato sistema, si può dire ottenuta da esso, *eliminando* l'incognita y, e si chiama la sua risultante in x.

Anzichè la y, si può similmente eliminare dal sistema la x, e si perviene alla *risultante* in y, naturalmente diversa dalla (58), ma pur essa di 2° grado. Naturalmente anche in questo secondo modo si ottengono per il sistema (55) le medesime soluzioni; e sarà un buon esercizio il verificarlo.

40. Il metodo di sostituzione dianzi spiegato è evidentemente applicabile ad ogni possibile sistema in due incognite, costituito da un'equazione di 1° grado e da una di 2°. Nel caso del sistema (55) abbiamo ottenuto due soluzioni, in quanto la risultante (58) aveva due radici; ma come ben si comprende, può anche succedere, secondo i casi, che la risultante abbia due radici coincidenti o sia priva di radici. Corrispondentemente il sistema avrà un'unica soluzione (da considerare come doppia) oppure non ne ammetterà alcuna.

Così, ad es. si verifica, applicando il metodo di sostituzione, che per il sistema

$$\begin{cases} 6x+y+4=0, \\ x^2-2xy-y^2+y-3=0, \end{cases}$$

la risultante in x è data dall'equazione

$$x^2+2x+1=0,$$

la quale ammette due radici coincidenti nel valore $x_0=-1$, cui corrisponde per il sistema l'unica soluzione (doppia) $x_0=-1$, $y_0=2$.

Invece per il sistema

$$\begin{cases} x-y-3=0, \\ x^2+2xy-y^2-10x+2y+2=0, \end{cases}$$

la risultante in x è

$$2x^2-8x-13=0;$$

e, poichè quest'equazione è priva di radici, il sistema è impossibile.

41. Fra i sistemi di 2° grado in due incognite ve ne sono taluni particolarmente notevoli per le interpretazioni geometriche, di cui sono suscettibili. Naturalmente resta applicabile ad essi il metodo di sostituzione del n. 39; ma, caso per caso, la loro forma suggerisce particolari artifici, che conducono al risultato più rapidamente.

Diamone qualche esempio, e cominciamo dal più semplice:

$$(59) \qquad \begin{cases} x+y=h, \\ xy=k, \end{cases}$$

dove h e k si suppongono dati (numeri od espressioni letterali). Si è qui condotti ad un problema già trattato: *Trovare due numeri, di cui si conoscono la somma e il prodotto* (n. 9). Questi due numeri sono le radici dell'equazione di

2° grado

(60) $$u^2 - hu + k = 0;$$

e la condizione di possibilità di quest'equazione, e quindi del sistema (59), è data da $\frac{h^2}{4} - k \geq 0$.

Se è precisamente $\frac{h^2}{4} - k > 0$, e sono u_1, u_2 le due radici distinte della (60), il sistema ammette le due soluzioni $x = u_1$, $y = u_2$ e $x = u_2$, $y = u_1$; cioè, scambiando in una soluzione i valori di x e y, si ottiene l'altra. Ciò deriva dal fatto che il sistema non varia, se nelle sue equazioni si scambiano fra loro le due incognite x ed y, o, come si suol dire, il sistema è *simmetrico*.

Ad un sistema del tipo (59) conduce il problema geometrico: *Determinare le dimensioni di un rettangolo di dato perimetro, che sia equivalente ad un dato quadrato.*

Se $2p$ è il perimetro prefissato, l il lato del quadrato dato (dove p ed l denotano due numeri positivi o, meglio, assoluti), le dimensioni di un tale rettangolo debbono essere due numeri x ed y, pur essi entrambi positivi, soddisfacenti alle due equazioni

$$x + y = p, \quad xy = l^2.$$

L'equazione di 2° grado, di cui essi sono le radici, è la

(61) $$u^2 - pu + l^2 = 0;$$

onde il problema è possibile a patto che sia

$$\frac{p^2}{4} \geq l^2,$$

o, ciò che è lo stesso, in quanto p ed l sono positivi (I, n. 5*F*),

$$\frac{p}{2} \geq l, \quad \text{ossia} \quad 2p \geq 4l;$$

e, sotto questa ipotesi, le due radici della (61), come risulta dai segni dei coefficienti (n. 8), sono entrambe positive e perciò rispondono effettivamente al problema. Abbiamo dunque che questo è possibile, purchè il perimetro prefissato non sia minore di quello del quadrato dato. Se è uguale, cioè se $2p = 4l$, le due radici della (61) coincidono ed hanno il valore $\frac{p}{2} = l$, cosicchè si ricade sul quadrato dato.

Risulta di qui che *tutti i rettangoli equivalenti ad un dato quadrato hanno perimetro maggiore di esso* (od anche, *tutti i rettangoli di perimetro uguale ad un dato quadrato hanno area minore*).

Al sistema (59) si riconduce anche il sistema

$$(62)\qquad \begin{cases} x - y = h, \\ xy = k, \end{cases}$$

scrivendolo:

$$\begin{cases} x + (-y) = h, \\ x(-y) = k. \end{cases}$$

Ad un sistema di questo tipo (62) conduce il problema del n. 20, come pure il problema geometrico; *Determinare le dimensioni di un rettangolo, conoscendo la differenza di queste dimensioni e l'area del rettangolo.*

42. Consideriamo, in secondo luogo, il sistema (anch'esso simmetrico)

$$(63)\qquad \begin{cases} x + y = h, \\ x^2 + y^2 = k. \end{cases}$$

Aggiungendo $2xy$ ad ambo i membri della seconda delle equazioni (63), si ottiene l'equazione equivalente (I, n. 25)

$$x^2 + y^2 + 2xy = k + 2xy \quad \text{ossia} \quad (x + y)^2 = k + 2xy,$$

che, tenendo conto della prima delle (63), si può scrivere

$$h^2 = k + 2xy \quad \text{ossia} \quad xy = \frac{h^2 - k}{2}.$$

Si è quindi condotti ad un sistema del tipo studiato al n. prec.

In modo analogo si risolve il sistema

$$(64) \qquad \begin{cases} x - y = h \\ x^2 + y^2 = k. \end{cases}$$

Basta sottrarre $2xy$ da ambo i membri della seconda equazione e poi proseguire come pocanzi.

Ad un sistema (63) o (64) si è condotti, quando si pone in equazione il problema geometrico: *Date l'ipotenusa e la somma o la differenza dei cateti di un triangolo rettangolo, determinare questi cateti.*

43. Prendiamo, infine, il sistema

$$(65) \qquad \begin{cases} x + y = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

La seconda equazione si può scrivere

$$(x + y)(x - y) = k$$

ossia, in forza della prima,

$$h(x - y) = k \quad \text{cioè} \quad x - y = \frac{k}{h}.$$

Poichè la prima delle (65) e quest'ultima equazione danno rispettivamente la somma e la differenza di x e y, basta sommarle e sottrarle membro a membro per dedurne (I, n. 56)

$$x = \frac{1}{2}\left(h + \frac{k}{h}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(h - \frac{k}{h}\right).$$

In modo del tutto simile si risolve il sistema

$$(66) \qquad \begin{cases} x - y = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

Ed è del tipo (65) o (66) il sistema, in cui si traduce il problema: *Determinare l'ipotenusa ed un cateto di un triangolo rettangolo, conoscendo la loro somma o la loro differenza e l'altro cateto.*

44. Nelle applicazioni dell'Algebra alla Geometria si è talvolta condotti anche a sistemi in due incognite, costituiti da due equazioni, entrambe di 2° grado.

I sistemi di questo tipo si dicono *di* 4° *grado*, perchè, in generale, la loro risoluzione si può ridurre a quella di un'equazione di 4° grado in una sola incognita.

Ad un particolare sistema di 4° grado si è condotti dal problema seguente: *Determinare le dimensioni di un rettangolo, che abbia una data diagonale* d *e sia equivalente al quadrato di dato lato* l.

Il sistema, che in tal caso si ottiene, è

$$x^2 + y^2 = d^2, \quad xy = l^2.$$

Consideriamo, più in generale, il sistema (ancora simmetrico)

$$(67) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = h, \\ \qquad xy = k, \end{cases}$$

dove h e k denotano due numeri (o due espressioni letterali) quali si vogliano, che per altro possiamo supporre soddisfacenti alle due condizioni $h > 0$, $k \gtrless 0$. Infatti per $h < 0$ la prima equazione risulta impossibile, mentre per $h = 0$ è soddisfatta soltanto da $x = 0$, $y = 0$; e d'altra parte per $k = 0$ la seconda equazione si decompone in $x = 0$ e $y = 0$, cosicchè si ricade su sistemi del tutto privi di interesse.

Per risolvere il sistema (67), si formi anzitutto la combinazione lineare delle due equazioni, che si ottiene sommando membro a membro alla prima la seconda, dopo aver moltiplicato ambo i membri di questa per 2. Otteniamo così l'equazione

$$(68) \quad x^2 + y^2 + 2xy = h + 2k \quad \text{ossia} \quad (x + y)^2 = h + 2k,$$

che si può sostituire, nel sistema (67), alla prima equazione (I, n. 46). Se $h + 2k < 0$, quest'equazione è impossibile, e quindi è tale anche il sistema. Escluso questo caso, la (68) si decompone nelle due equazioni

$$x + y = \sqrt{h + 2k}, \quad x + y = -\sqrt{h + 2k};$$

e, corrispondentemente, il sistema (67) risulta soddisfatto da tutte le eventuali soluzioni di ciascuno dei due seguenti sistemi

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{h + 2k}, \\ xy = k; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\sqrt{h + 2k}, \\ xy = k; \end{cases}$$

che sono entrambi del tipo considerato al n. 40. Il sistema (67) può dunque ammettere 4 soluzioni o 2 o nessuna.

45. Consideriamo, invece, il sistema, pur esso di 4° grado,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = h, \\ xy = k, \end{cases} \tag{69}$$

dove, per non ricadere su casi privi d'interesse, supporremo $h \gtrless 0$, $k \gtrless 0$. Non vale in questo caso un artificio analogo a quello del n. prec. Ricorriamo allora al metodo generale di sostituzione.

Dalla seconda equazione si rileva che, in ogni eventuale soluzione, i valori delle due incognite debbono essere entrambi diversi da zero. Perciò tutte le soluzioni della seconda equazione, fra le quali vanno cercate quelle del sistema, sono date da

$$x \text{ arbitraria e diversa da zero,} \quad y = \frac{k}{x}.$$

Sostituendo questa espressione di y nella prima equazione, si trova che i valori di x, cui corrispondono soluzioni del sistema, sono definiti dall'equazione (*risultante* in x del sistema)

$$x^2 - \frac{k^2}{x^2} = h,$$

la quale, in quanto si è già escluso il valore $x=0$, è qui equivalente a quella, che se ne deduce liberandola dal denominatore, cioè alla

$$x^4 - hx^2 - k^2 = 0.$$

Questa biquadratica elementare, in quanto il termine noto è negativo, ammette in ogni caso due radici, fra loro opposte (n. 35). Sono questi i valori della x; e, in forza della seconda delle (69), risultano fra loro opposti anche i corrispondenti valori della y, cosicchè il sistema (69) ammette sempre due soluzioni, fra loro opposte.

Naturalmente questo metodo generale di sostituzione è applicabile anche al sistema (68) del n. prec.; ma in questo caso la biquadratica elementare, che si ottiene come risultante in x del sistema, può avere 4 radici o 2 o nessuna.

Del resto entrambi i sistemi (68), (69), si possono risolvere, osservando, che dalla seconda equazione, elevandone a quadrato ambo i membri, si deduce $x^2y^2=k^2$, cosicchè si conoscono la somma e il prodotto di x^2 e $\pm y^2$.

Perciò i valori eventuali di x^2 e $\pm y^2$ si trovano come radici di un'equazione di 2° grado (n. 40), e quelli di x e y se ne deducono con estrazioni di radice quadrata, purchè, naturalmente, i valori trovati per x^2, y^2 siano positivi.

Solo, in quanto si è sostituita alla seconda equazione del sistema quella, che ne deduce elevandone a quadrato ambo i membri, si possono essere introdotte soluzioni estranee (n. 16); e delle coppie di valori trovati per x e y bisogna conservare solo quelle, il cui prodotto risulta uguale a k (e non a $-k$).

Si noti che, se nell'equazione di 2° grado, cui si è così condotti, si mette x^2 al posto dell'incognita, si ritrova la biquadratica elementare, che si ottiene come risultante in x del sistema col metodo generale di sostituzione.

46. Più semplice ancora è la risoluzione del sistema di 4° grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

Dei quadrati delle incognite si conoscono la somma e la differenza, onde si ricava senz'altro, sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni (I, n. 56),

$$x^2 = \frac{1}{2}(h + k), \quad y^2 = \frac{1}{2}(h - k).$$

Il sistema è possibile, purchè nè l'uno nè l'altro dei due secondi membri sia negativo. Si hanno 4 soluzioni, se sono entrambi positivi; 2 soluzioni, se uno è positivo e l'altro nullo; una sola nel caso privo d'interesse, in cui siano entrambi nulli (cioè $x = y = 0$).

47. All'uno o all'altro dei sistemi considerati ai nn. 41-46 si può ricondurre ogni sistema costituito da due equazioni, che siano entrambe di 1° grado rispetto a due espressioni, prese comunque fra le

$$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2.$$

Sia, ad es., il sistema

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bxy = c, \\ a'(x^2 + y^2) + b'xy = c', \end{cases}$$

dove a, b, c, a', b', c' sono dati. Assumendo come incognite ausiliarie

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy,$$

si è condotti al sistema

$$\begin{cases} au + bv = c, \\ a'u + b'v = c'. \end{cases}$$

Se questo è possibile, cioè se è diverso da zero il determinante $ab' - a'b$ dei coefficienti (I, n. 52), ed è $u = u_1$, $v = v_1$ la sua soluzione, il sistema dato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u_1, \\ xy = v_1, \end{cases}$$

che è del tipo considerato al n. 44.

48. I sistemi di 4° grado dei nn. 44-46 si sono potuti risolvere, profittando della loro forma particolare. In generale, i sistemi in due incognite di 4° grado, cioè costituiti da due equazioni, che siano entrambe di 2° grado, non si possono risolvere coi mezzi elementari, di cui qui disponiamo (equazioni di 1° e 2° grado in una sola incognita); e si dimostra (¹) che quelli risolubili elementarmente si possono tutti ridurre, con opportune trasformazioni, alla forma seguente (che comprende come casi particolari tutti i sistemi dei nn. 44-46)

$$(70) \qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + h = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0. \end{cases}$$

Essi sono caratterizzati dal fatto, che vi mancano tutti i termini di 1° grado.

Per risolvere un sistema di questo tipo, cominciamo col far vedere che si può sempre ridursi al caso, in cui uno almeno dei due termini noti h ed h' sia nullo, talchè una delle due equazioni risulti *omogenea* (cioè ottenuta uguagliando a zero un trinomio di 2° grado, omogeneo in x ed y).

Infatti, se h ed h' sono entrambi diversi da zero, il sistema (70) è equivalente a quello, che da esso si ottiene, sostituendo ad una qualsiasi delle sue equazioni la loro combinazione lineare, che ha per moltiplicatori h' e $-h$ (I, n. 46), cioè la

$$(ah' - a'h)x^2 + (bh' - b'h)xy + (ch' - c'h)y^2 = 0,$$

la quale risulta appunto omogenea. Fa eccezione soltanto il caso, in cui questa equazione svanisca, cioè risultino nulli simultaneamente i suoi tre coefficienti. Ma in tal caso si ha

$$a'h = ah', \quad b'h = bh', \quad c'h = ch',$$

ossia

$$a' = \frac{h'}{h}a, \quad b' = \frac{h'}{h}b, \quad c' = \frac{h'}{h}c;$$

perciò la seconda delle equazioni (70) si può scrivere

$$\frac{h'}{h}(ax^2 + bxy + cy^2 + h) = 0,$$

(¹) Cfr., per es., V. Notari, *Le equazioni di quarto grado ed i sistemi di due equazioni di secondo grado in due incognite*, in F. Enriques, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Parte II; Bologna, Zanichelli, 1926.

e coincide, a meno del moltiplicatore $\frac{h'}{h}$, con la prima, cosicchè il sistema si riduce ad un'unica equazione.

Possiamo, dunque, considerare senz'altro un sistema della forma

$$(71)\qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases}$$

ed è lecito aggiungere l'ipotesi che i coefficienti a e c della prima equazione siano entrambi diversi da zero, perchè se, ad es., fosse $c = 0$, codesta equazione, si potrebbe scrivere

$$x(ax + by) = 0,$$

cosicchê si decomporrebbe nelle due equazioni

$$x = 0, \quad ax + by = 0;$$

e il sistema (71) ammetterebbe tutte (e sole) le soluzioni di ciascuno dei due sistemi

$$\begin{cases} x = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases}$$

che sono entrambi di 2° grado (n. 39).

Supposto perciò $a \gtrless 0$, $c \gtrless 0$, distinguiamo due casi, secondo che è $h' \gtrless 0$ o $h' = 0$.

I. $h' \gtrless 0$ (*sistema non omogeneo*).

Per risolvere il sistema (71) basta determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(72)\qquad ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

e poi fra esse cercare quelle, che eventualmente soddisfano anche l'equazione non omogenea.

Ora è in primo luogo manifesto che la (72) è soddisfatta da $x = 0$, $y = 0$ (*soluzione nulla*), ma questa soluzione non soddisfa la seconda equazione, perchè $h' \gtrless 0$. D'altra parte la (72) non ammette nessun'altra soluzione, per cui la x sia nulla, giacchè, ponendo in essa $x = 0$, si ottiene $cy^2 = 0$, e quindi, necessariamente, $y = 0$. Restano dunque da cercare quelle soluzioni della (72), per cui x è diversa da zero. A tal fine poniamo

$$y = ux,$$

dove u è un'incognita ausiliare. Sostituendo nella (72) e raccogliendo x^2, otteniamo

$$x^2(a + bu + cu^2) = 0,$$

e, poichè qui supponiamo $x \gtrless 0$, dobbiamo avere

$$a + bu + cu^2 = 0. \tag{73}$$

Vediamo così che tutte le soluzioni da noi volute della (72) si ottengono dando ad x un valore arbitrario e ad y il valore $u_1 x$, dove u_1 sia una radice dell'equazione di 2° grado (73). Sono dunque possibili tre casi: se $b^2 - 4ac > 0$, la (72) ammette, in corripondenza delle due radici distinte della (73), due infinità di soluzioni, ciascuna del tipo

$$x \text{ arbitraria}, \quad y = u_1 x;$$

se $b^2 - 4ac = 0$, la (72), in corrispondenza della radice doppia della (73), ha un'unica infinità di soluzioni di questo stesso tipo; infine se $b^2 - 4ac < 0$, la (73) è priva di radici e la (72) non ammette nessun'altra soluzione oltre quella nulla.

In quest'ultimo caso il sistema dato (71) è privo di soluzioni. Negli altri due, invece, bisogna cercare, in corrispondenza di ciascuna radice u_1 della (73), se esista qualche valore di x, che insieme con $y = u_1 x$, renda soddisfatta anche la seconda delle equazioni (71), cioè sia tale che si abbia

$$x^2(a' + b' u_1 + c' u_1^2) + h' = 0.$$

Questa è un'equazione di 2° grado pura in x, che, ove $a' + b'u_1 + c'u_1^2$ risulti di segno contrario ad h', dà per x due valori (fra loro opposti); cosicchè concludiamo che il sistema non omogeneo (71), quando non sia privo di soluzioni, ne ammette 4 oppure 2 (in ogni caso, a due a due, opposte fra loro).

II. $h' = 0$ (*sistema omogeneo*).

Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0. \end{cases} \tag{74}$$

Per risolverlo valgono le stesse considerazioni di pocanzi, ma il risultato è nettamente diverso.

Anzitutto la soluzione nulla $x = 0$, $y = 0$ soddisfa entrambe le equazioni. Quanto poi alle soluzioni, per cui è $x \gtrless 0$, si trova, ponendo $y = ux$ in tutte e due le equazioni,

$$x^2(a + bu + cu^2) = 0, \quad x^2(a' + b'u + c'u^2) = 0,$$

talchè deve essere simultaneamente

$$a + bu + cu^2 = 0, \quad a' + b'u + c'u^2 = 0. \tag{75}$$

Perciò il sistema ammette soluzioni, diverse da quella nulla, sempre e soltanto, quando queste due equazioni di 2° grado abbiano una radice comune; e se u_1 è questa radice, il sistema ammette addirittura le infinite soluzioni

$$x \text{ arbitraria,} \quad y = u_1 x,$$

fra cui, per $x = 0$, risulta compresa anche quella nulla.

Va notato, che se le (75) hanno comuni tutte e due le radici, si ha un caso privo d'interesse, perchè le due equazioni (74) si riducono ad una sola. Infatti, denotate con u_1, u_2 codeste due radici, si hanno le due identità (n. 10)

$$a + bu + cu^2 = c(u - u_1)(u - u_2), \quad a' + b'u + c'u^2 = c'(u - u_1)(u - u_2);$$

e quindi anche la

$$a' + b'u + c'u^2 = \frac{c'}{c}(a + bu + cu^2);$$

onde, per il principio d'identità (I, n. 15), risulta che a', b', c' sono proporzionali ad a, b, c; e le due equazioni (74) diversificano fra loro soltanto per il moltiplicatore numerico $\frac{c'}{c}$.

49. Esempi:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16. \end{cases}$

Calcolando di queste due equazioni la combinazione lineare di moltiplicatori -4 e 11, si ottiene l'equazione omogenea

$$18x^2 - 15xy + 3y^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad 6x^2 - 5xy + y^2 = 0;$$

e di qui, ponendo $y = ux$, si ricava, per $x \gtrless 0$,

$$u^2 - 5u + 6 = 0.$$

Quest'equazione di 2° grado ha le due radici $u_1 = 3$ e $u_2 = 2$. Sostituendo nella seconda delle equazioni date $y = 3x$ e $y = 2x$, si trova, rispettivamente,

$$x^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^2 = 4$$

e quindi $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = \pm 2$. Il sistema ammette dunque le quattro soluzioni:

$$x = \sqrt{2}, \quad y = 3\sqrt{2}; \quad x = -\sqrt{2}, \quad y = -3\sqrt{2};$$

$$x = 2, \quad y = 4; \quad x = -2, \quad y = -4.$$

2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70, \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50. \end{cases}$

L'equazione omogenea, che dalle date si deduce, come combinazione lineare (di moltiplicatori -5 e 7), è in questo caso

$$32x^2 - 8xy - 12y^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad 8x^2 - 2xy - 3y^2 = 0.$$

Col procedimento già applicato nell'esempio precedente si trova che questa equazione omogenea è soddisfatta da $y = \frac{4}{3}x$ e da $y = -2x$. Ma ponendo $y = -2x$ nella prima delle equazioni date si perviene ad un'equazione di 2^o grado impossibile; mentre ponendovi $y = \frac{4}{3}x$, si trova

$$x^2 = 9,$$

e quindi $x = \pm 3$; cosicchè il sistema ammette le due soluzioni

$$x = 3, \quad y = 4; \quad x = -3, \quad y = -4.$$

3) $$\begin{cases} 2x^2 - xy - 10y^2 = 0, \\ 6x^2 - 17xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$$

La prima di queste due equazioni omogenee è soddisfatta, per qualsiasi x, tanto da $y = \frac{2}{5}x$, quanto da $y = -\frac{1}{2}x$; e la prima di queste due infinità di soluzioni soddisfa anche l'altra equazione. Perciò il sistema ammette le infinite soluzioni:

$$x \text{ arbitraria}, \quad y = \frac{2}{5}x;$$

cioè risulta soddisfatto da tutte le coppie di numeri proporzionali ad 1 e $\frac{2}{5}$, o, ciò che è lo stesso, a 5 e 2.

CAPITOLO V

Funzioni e diagrammi

1. Nei Capitoli precedenti abbiamo esposto e illustrato quei procedimenti algebrici, che permettono di risolvere i problemi di 2° grado. In talune delle considerazioni svolte a tale scopo si trova, in qualche modo, implicito un concetto, che domina non soltanto tutta la Matematica, ma anche la Fisica e, più in generale, ogni scienza sperimentale e quantitativa: il concetto di *funzione.*

In questo Capitolo ci proponiamo di chiarire, nella forma più elementare possibile, questo concetto e di indicarne una rappresentazione geometrica, che torna utile ed espressiva in tutte le applicazioni della Matematica e, in particolare, nella discussione dei problemi.

Funzioni

2. Consideriamo una qualsiasi espressione, la quale, come

$$3x - 2 \quad \text{o} \quad ax + b \quad \text{o} \quad 2x^2 - 5x + 1 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c, \text{ ecc.},$$

contenga una indeterminata x ed, eventualmente, altre lettere, con cui si intendano indicati altrettanti numeri determinati e fissi. Queste ultime lettere, al pari dei coefficienti assegnati numericamente, si chiameranno *costanti*, mentre si dirà *variabile* la x, in quanto si penserà suscettibile di *variare,* cioè di assumere infiniti valori diversi.

Per ragionare in generale, rappresentiamo la espressione data con $A(x)$ e indichiamo con y il suo valore, cioè poniamo

(1) $$y = A(x).$$

Quando x si fa variare, varia corrispondentemente anche y, cosicchè questa y è una nuova *variabile;* ma, mentre la x è, per così dire, libera, la y è legata ad essa dalla equazione (1), in modo che ogni qual volta si assegna ad x un valore, risulta corrispondentemente determinato dalla (1) il valore della y. Ciò in Matematica si esprime dicendo che la y (variabile *dipendente*) è *funzione* della x (variabile *indipendente*).

Ogni possibile espressione $A(x)$ definisce una certa funzione; e i nomi già introdotti per distinguere i varî tipi di espressioni algebriche, a seconda della natura delle operazioni, che vi sono indicate sulla indeterminata o variabile x (III, n. 1) si estendono alle corrispondenti funzioni. Così le

$$y = 3x - 2, \quad y = ax + b, \quad y = 2x^2 - 5x + 1, \quad y = ax^2 + bx + c,$$

si dicono funzioni *razionali intere*, le prime due di 1° *grado*, le altre due di 2°. Le

$$y = \frac{4x - 5}{3x + 1}, \quad y = \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}$$

sono funzioni *razionali fratte*. Le

$$(2) \qquad y = \sqrt{4 - 7x}, \quad y = \sqrt{3x^2 - 2x + 4}$$

sono funzioni *irrazionali* (*quadratiche*), e così via.

Si è detto che la variabile indipendente x è libera di variare; ma nei singoli casi può accadere che, in forza della natura della funzione, questa libertà risulti limitata.

Mentre in una funzione razionale intera la x può assumere ogni possibile valore o, come si suol dire, variare da $-\infty$ a $+\infty$ (IV, n. 12), nel caso di una funzione razionale fratta vanno esclusi per la variabile indipendente quei valori eccezionali, che, annullando qualche denominatore, rendono priva di senso la funzione. Invece per una funzione irrazionale (quadratica) come le (2), la x può variare soltanto in quegli intervalli, in cui il radicando si mantiene positivo o, al minimo, nullo (I, n. 37; IV, nn. 12, 13).

In ogni caso l'insieme dei valori, che in una data funzione $A(x)$ si possono attribuire alla variabile indipendente x, si dice *campo di variabilità* della x.

3. Il concetto di funzione si presenta spontaneamente anche in Geometria. Si pensino, ad es., tutti i triangoli di data base; al variare dell'altezza, varia anche l'area, e ad ogni valore della prima corrisponde un valore ben determinato per la seconda; cioè *l'area di un triangolo di data base* è funzione *dell'altezza*. Similmente *l'area del cerchio* è funzione *del raggio*, *l'area della superficie totale di un cilindro di data altezza* è funzione *del raggio*, ecc.; e le regole di misura delle grandezze geometriche permettono di scrivere le espressioni algebriche di queste varie *funzioni*. Così, se si indicano con x e y l'altezza e l'area di un triangolo di base a, risulta

$$y = \frac{1}{2}ax;$$

se x e y sono il raggio e l'area di un cerchio,

$$y = \pi x^2;$$

se x e y sono il raggio e l'area della superficie totale di un cilindro di altezza h,

$$y = 2\pi x(h + x).$$

4. In tutti gli esempi dianzi considerati il legame tra la funzione y e la sua variabile indipendente x era esprimibile per mezzo di una formula, cioè si conosceva una successione di operazioni, che, eseguite l'una dopo l'altra a partire da un qualsiasi valore di x, davano, come risultato finale, il corrispondente valore della y.

Ma il concetto di funzione è, per se stesso, indipendente da questa possibilità di una tale espressione matematica. In ogni fenomeno fisico o anche economico o biologico, ecc., si presentano coppie di grandezze x e y, entrambe misurabili e variabili, ma legate fra loro in modo che ad ogni valore, di cui è suscettibile la x, corrisponda un certo valore ben determinato per la y. Ad es., in un dato luogo la temperatura varia col tempo in modo che ad ogni valore del tempo, misurato a partire da un determinato istante, corrisponde un valore per la temperatura; quando un corpo cade, lo spazio, che esso percorre cadendo, dipende dal tempo, impiegato a percorrerlo; l'attrazione, che due dati corpi celesti esercitano l'uno sull'altro, dipende dalla loro distanza; il prezzo di un dato prodotto industriale varia col costo delle materie prime; il peso di un neonato varia con l'età; ecc. In questi diversi casi si dice che la temperatura in quel dato luogo è *funzione* del tempo; lo spazio percorso dal corpo, cadendo, è *funzione* del tempo, impiegato a percorrerlo; l'attrazione reciproca dei due dati corpi celesti è *funzione* della loro distanza; il prezzo di quel prodotto industriale è *funzione* del costo delle materie prime; il peso di quel neonato è *funzione* dell'età, e così via.

Insomma, parlando oramai in generale, si dice che una variabile y è *funzione* di un'altra variabile x, se, in corrispondenza di ogni valore assunto dalla x (in un certo campo di variabilità), resta determinato, in forza di una legge di natura qualsiasi, un valore per la y.

Per esprimere che una variabile è una certa funzione di un'altra variabile x, si scrive

$$y = f(x).$$

Si può trattare di una funzione definita per mezzo della sua espressione algebrica, o matematica, come quelle considerate ai nn. 2, 3; ma può anche essere una funzione definita sperimentalmente, come quelle considerate or ora. Nel primo caso il simbolo $f(x)$ denota, come già l'analoga scrittura $A(x)$ da noi usata precedentemente, quella successione di operazioni, che bisogna eseguire, l'una dopo l'altra, a partire da qualsiasi valore di x per calcolare il corrispondente valore di y.

Naturalmente, in Matematica si considerano più specialmente queste ultime funzioni, per cui la legge di dipendenza fra x e y è esprimibile mediante una formula. Invece nello studio dei fenomeni naturali le funzioni si definiscono, di regola, sperimentalmente, e poi si cerca di trovarne una espressione matematica, la quale darà la *legge* del fenomeno considerato. È in questo senso che il Galilei ha scoperto la legge di caduta dei gravi e il Newton la legge di attrazione universale.

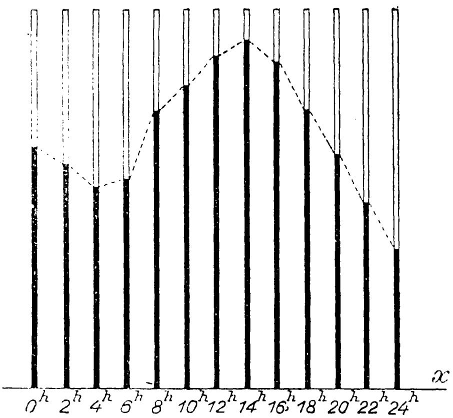
Diagrammi o grafiche

5. In generale, quando è data una funzione $y = f(x)$, interessa riconoscere come varii la y al variare della x. Se, per es., si immagina che la x percorra, crescendo, tutto l'insieme dei valori, di cui essa è suscettibile, si può chiedere, quando accada che la y risulti positiva e quando negativa; quando essa cresca e quando decresca; quando raggiunga i suoi valori massimi e quando i suoi valori minimi, ecc. Questo studio dell'andamento della funzione si rende intuitivo, ricorrendo ad una *rappresentazione geometrica*, che qui spiegheremo, e che, del resto, a qualche alunno, che abbia familiarità con riviste di divulgazione scientifica, non riuscirà nuova.

Per fissare le idee, consideriamo in un dato luogo e in un dato intervallo di tempo, la temperatura come funzione del tempo. Precisamente supponiamo di aver registrato, di 2 in 2 ore, da una mezzanotte all'altra, le temperature segnate da un certo termometro centigrado e di avere ottenuto i risultati indicati nella seguente tabelletta:

0^h .... $15^o,5$	14^h .... $22^o,5$
2^h .... $14^o,5$	16^h .... 21^o
4^h .... 13^o	18^h .... 18^o
6^h .... $13^o,5$	20^h .... 15^o
8^h .... 18^o	22^h .... 12^o
10^h .... $19^o,5$	24^h .... 9^o
12^h .... $21^o,5$	

L'andamento della temperatura, che si rileva con qualche fatica dall'esame e dal confronto di questi dati numerici, si rende intuitivo nel modo seguente. Tracciata su di un foglio una retta x, segnamo su di essa dei punti equidistanti, i quali rappresentino le ore, di due in due, da 0^h a 24^h, e in ciascuno di essi innalziamo una perpendicolare, che sia misurata, rispetto ad una certa unità di misura (che in figura si è presa uguale a 2 mm.) da quello stesso numero che dà la temperatura osservata nell'ora corrispondente. È come se avessimo innanzi simultaneamente, l'una accanto all'altra, le immagini della colonnina di mercurio del termometro, quale ci era apparsa successivamente di due in due ore, quando registrammo le nostre osservazioni; ed ormai possiamo a colpo d'occhio valutare come e, approssimatamente, in qual misura sia andata variando la temperatura in quelle 24 ore.



Per rendere poi ancora più visibili codeste variazioni, gli estremi superiori delle perpendicolari dianzi condotte si congiungono a due a due con segmenti rettilinei od anche con un tratto continuo, e si ottiene in tal modo il *diagramma* o la *grafica della temperatura* nelle 24 ore considerate.

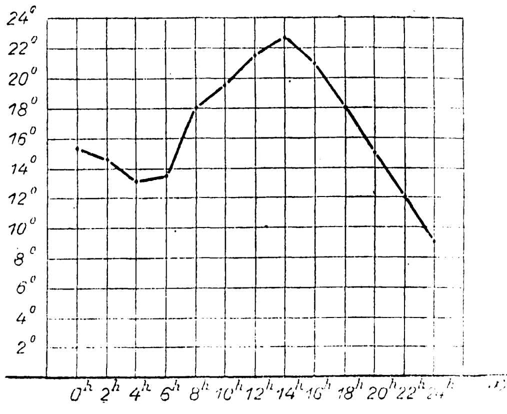
Si rileva così a colpo d'occhio che il *minimo* di temperatura ha avuto una tendenza discendente, in quanto al compiersi delle 24 ore si è registrata una temperatura minore di quella della mezzanotte precedente, come di solito accade, quando si passa da un periodo di sereno ad uno di pioggia.

Naturalmente si ottiene un diagramma più preciso se si osserva e si registra la temperatura ad ogni ora o ad ogni mezz'ora o ad ogni 15^m, ecc. E l'immagine dell'andamento effettivo del fenomeno si può avere, ricorrendo ad uno di quei *termometri registratori*, che segnano automaticamente la variazione continua della temperatura e forniscono così la *curva della temperatura* nell'intervallo di tempo considerato.

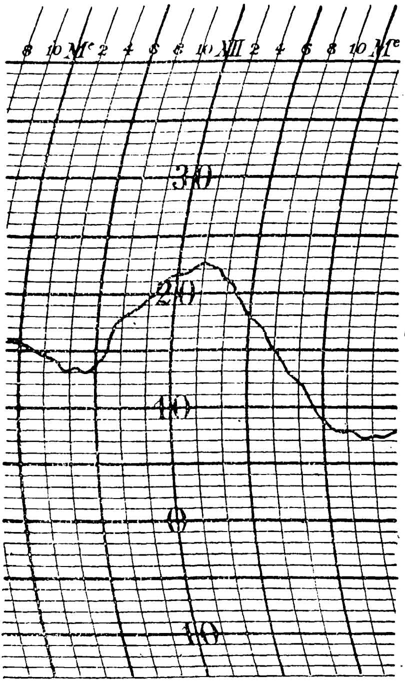
6. Nella pratica, per tracciare i diagrammi, torna comodo servirsi di *carta quadrettata* e, in particolare, di *carta millimetrica* (su cui il lato di ciascun quadrettino è di 1 mm. e le rette della quadrettatura sono segnate di 10 in 10 con un tratto un po' più marcato).

Il vantaggio di usare la carta quadrettata sta nel fatto che su ciascuna delle rette *orizzontali* e *verticali* del reticolo è già segnata dalla quadrettatura stessa una graduazione, che permette di valutare a colpo d'occhio le distanze di due punti presi sulla stessa verticale o sulla stessa orizzontale.

Così, riferendoci p. es. alla registrazione grafica delle temperature di cui ci occupammo dianzi, si assume come retta x o *asse dei tempi* una retta orizzontale della quadrettatura e si segna su di essa l'ora delle singole osservazioni nei punti di intersezione colle successive verticali (a partire da una determinata); dopo di che, preso come unità di misura il lato del quadretto o una sua determinata parte aliquota, si possono immediatamente segnare, sulle accennate verticali, i successivi punti del nostro diagramma. P. es. nell'unita figura, che riproduce su carta



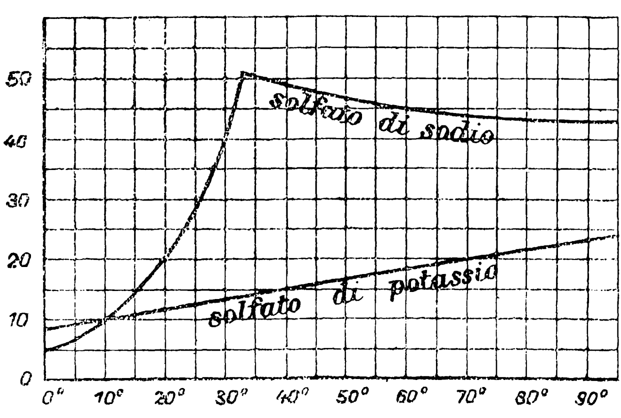
quadrettata il medesimo diagramma della pag. 168, si è



assunto come unità la metà del lato del quadretto, pari a mm. 2 (cioè la stessa unità della precedente figura).

Notiamo che solitamente anche per i *termometri registratori* (e per tutti gli altri strumenti congeneri) si usa *carta quadrettata.* Soltanto qui la punta scrivente, essendo saldata all'estremità di un ago mobile intorno ad un perno fisso, descrive, al variare della temperatura, degli archi di circonferenza (di raggio costante) e perciò si adopra della carta su cui è segnato un reticolo, costituito da rette parallele e da archi di circonferenza (di raggio uguale alla distanza fissa della punta scrivente dal rispettivo perno).

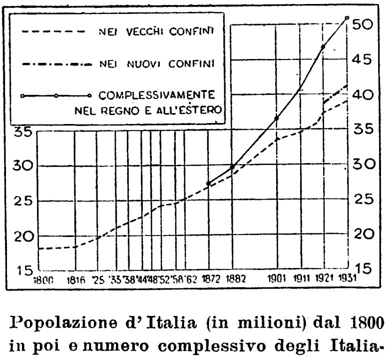
7. Per dare un altro esempio di rappresentazione grafica di una funzione definita sperimentalmente, ricordiamo che la *solubilità* di un certo sale, cioè la quantità massima (in peso) di esso, che si può disciogliere in una determinata quantità di un certo solvente, per es. in 100 parti di acqua, dipende, quando la pressione è costante, dalla temperatura.



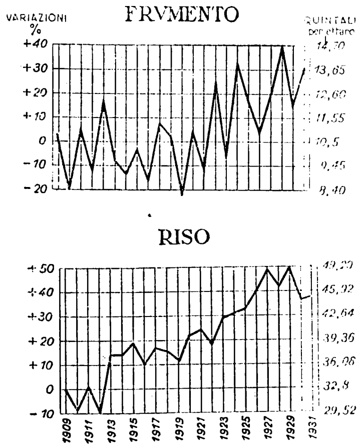
Per rappresentare questa funzione con un diagramma su di un foglio di carta quadrettata, si segnano su di una retta orizzontale della quadrettatura le successive temperature considerate e sulle corrispondenti rette verticali le varie solubilità del sale, quali risultano dalla determinazione sperimentale. Congiungendo i punti così determinati con un tratto continuo, si ottiene la *curva della solubilità* del sale considerato.

Nella figura della pag. prec. sono riprodotte due curve di solubilità di andamento molto diverso: quella del *solfato di sodio* e quella del *solfato di potassio*. Dalla prima si rileva che la solubilità del solfato di sodio, quando la temperatura cresce al di sopra di 0°, *cresce* con notevole rapidità e raggiunge un *massimo* (di 51 circa) corrispondente alla temperatura di 33° circa, superata la quale, torna a diminuire, ma assai lentamente. Invece la solubilità del solfato di potassio va crescendo costantemente in modo lento e uniforme; tra 0° e 10° è maggiore di quella del solfato di sodio, a 10° è identica ad essa e, per temperature superiori, se ne mantiene sempre minore.

8. Aggiungiamo qui infine, come esempî, altri diagrammi, il cui significato non richiede commenti [1].

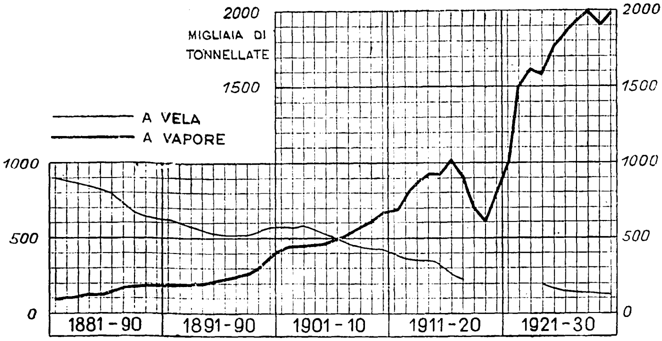


Popolazione d'Italia (in milioni) dal 1800 in poi e numero complessivo degli Italiani nel Regno e all'Estero dal 1872 in poi.

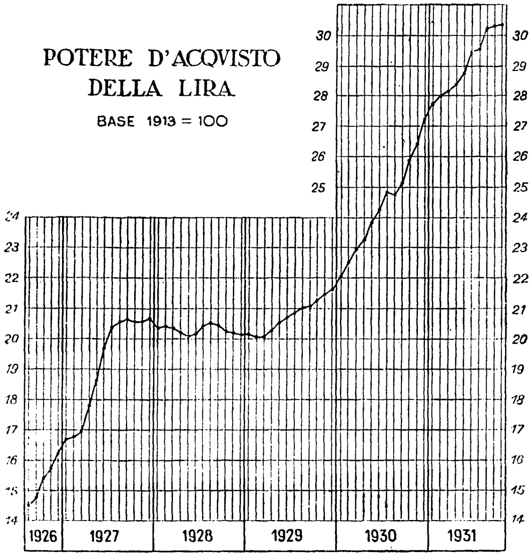


Rendimenti annuali per ettaro del frumento e del riso in Italia dal 1909 al 1931.
(Variazioni percentuali sulla media del quinquennio 1909-1913).

(1) Questi diagrammi sono desunti dal *Compendio Statistico* dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia, Anno V, 1931-X.



Evoluzione della Marina mercantile italiana dal 1880 al 1930.
(Stazza netta delle navi mercantili con bandiera nazionale).



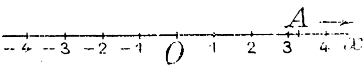
Potere di acquisto della Lira dall'Agosto 1926 al Dicembre 1931.
(Base 1913 = 100),

Coordinate cartesiane nel piano

9. Dai varî esempi dianzi indicati risulta che al diagramma di una funzione $y = f(x)$ si perviene, rappresentando ogni coppia di valori corrispondenti delle due variabili

x e y per mezzo di un punto del piano. Di questa rappresentazione delle coppie di numeri coi punti di un piano dobbiamo qui occuparci un po' minutamente. Ma prima conviene tornare per un momento sulla rappresentazione già nota dei numeri per mezzo dei punti di una retta graduata (II, n. 10).

Chiamiamo x la retta graduata, in quanto ci servirà poi a rappresentare i valori della variabile x. Come ben sappiamo, per determinarne la graduazione bisogna anzitutto fissare su di essa un *verso positivo* o, come anche si dice, *orientarla*, e poi scegliere un suo punto O come *origine* ed un'*unità di misura* per le lunghezze. Ad ogni punto A della retta si fa corrispondere quel numero che ha per valore assoluto la distanza di A da O e il segno + o —, secondo che il verso da O ad A è quello positivo o quello negativo.



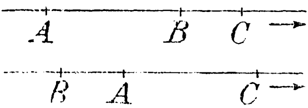
E, dopo la introduzione dei numeri irrazionali, si è visto, che viceversa, comunque si prefissi un numero (reale relativo), vi è sulla retta un punto, ed uno solo, cui corrisponde quel numero. Il numero, che così si fa corrispondere ad ogni singolo punto della retta, e che, viceversa, serve a individuare il punto, si dice *ascissa* del punto.

10. Su di una retta graduata, e perciò orientata, anche i segmenti si considerano, di solito, *orientati*; cioè, presi su di essa due punti A e B quali si vogliano, si indica con AB il segmento di estremi A e B, pensato nel verso, che va da A a B, cosicchè BA indica il segmento *opposto* di AB. Naturalmente, come misura di un segmento (orientato) AB si assume il numero relativo, che ha per valore assoluto la distanza di A e B, ed ha il segno + o —, secondo che il verso di AB è positivo o negativo. Perciò, se, come faremo nel seguito, indichiamo con AB anche la misura di questo segmento si ha

$$BA = -AB;$$

e si può dire che l'ascissa di un qualsiasi punto A della retta non è altro che la misura del segmento (orientato) OA, che va dall'origine al punto.

I segmenti orientati si sommano in modo analogo a quelli assoluti, ma bisogna tener conto del verso. Dati due segmenti orientati AB, BC, consecutivi (cioè tali che il secondo estremo del primo coincida col primo estremo del secondo) si dice loro *somma* il segmento AC; onde risulta che la misura del segmento somma è la somma algebrica delle misure dei segmenti addendi. Vedansi nell'unita figura due delle sei posizioni, in cui si possono trovare, l'uno rispetto all'altro, i tre punti A, B, C sulla retta.

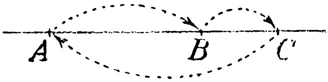


Si ha così in particolare

$$AB + BA = 0;$$

e, presi sulla retta tre punti A, B, C, si ha, qualunque sia la loro posizione reciproca,

$$AB + BC + CA = 0. \tag{3}$$



Di qui discende un'osservazione, che tornerà utile nel seguito: *La misura del segmento orientato AB, di cui gli estremi A, B abbiano rispettivamente le ascisse a, b, è data da*

$$AB = b - a$$

(cioè dall'ascissa del secondo estremo meno quella del primo). E ciò vale, qualunque sia la posizione dei due punti A, B, l'uno rispetto all'altro e rispetto all'origine.

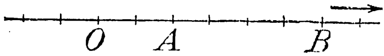
Infatti, considerata, oltre i punti A, B, l'origine O, si ha in ogni caso, per l'identità (3),

$$AB + BO + OA = 0;$$

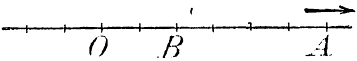
ma $BO = -b$, $OA = a$, e, quindi,

$$AB - b + a = 0 \quad \text{ossia} \quad AB = b - a.$$

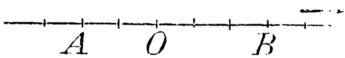
Si verifichi il risultato nei tre casi indicati nella seguente figura:



$a = 2$, $b = 6$: $AB = 6 - 2 = 4$



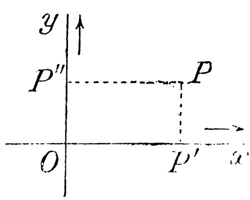
$a = 6$, $b = 2$; $AB = 2 - 6 = -4$



$a = -2$, $b = 3$; $AB = 3 - (-2) = 5$

11. Ciò premesso, passiamo alla rappresentazione delle coppie di numeri per mezzo dei punti di un piano. Precisamente ci proponiamo di mostrare, che a ciascun punto di un piano si possono far corrispondere due numeri, in modo che, viceversa, ad ogni coppia di numeri corrisponda sul piano un punto (ed uno solo). Si può dire che questo modo di individuare i punti del piano per mezzo di due numeri è familiare a tutti: nei teatri, nei cinematografi i singoli posti sono determinati da due numeri, quello della fila e quello del posto; così nelle grandi città moderne, che, come Buenos Aires, hanno una pianta a scacchiera, le singole case sono individuate dal numero della strada e dal numero della casa in quella strada.

Ma spieghiamoci in termini precisi e generali. Fissiamo nel piano due rette orientate, fra loro perpendicolari, che chiameremo *asse* x (o anche *delle* x) e *asse* y (o anche *delle* y), e diciamo *origine* il punto O, ad esse comune. Se adottiamo una certa unità di misura, risulta determinata su ciascuno dei due assi l'ascissa di ogni punto (n. 9).

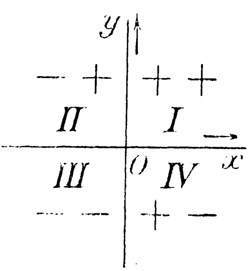


Preso, dopo ciò, un qualsiasi punto P del piano e condotte per esso le perpendicolari agli assi x e y, fino ad incontrarli in P', P'' rispettivamente, diremo *coordinate* di P i due numeri, che spettano come ascisse ai due punti P',

P'' sui rispettivi assi (n. 9), cioè le misure dei due segmenti orientati OP', OP''. Più precisamente, per distinguere queste due coordinate, si chiama *ascissa* la OP', *ordinata* la OP''.

Dal rettangolo $OP'PP''$ si rileva, che l'ascissa e l'ordinata del punto P sono uguali alle sue distanze dall'asse delle y e da quello delle x, con l'avvertenza che ciascuna di queste due distanze va orientata dall'asse verso il punto, e quindi le va attribuito il segno $+$ o $-$, secondo che essa, così orientata, risulta di verso concorde o discorde a quello assunto come positivo sull'asse, a cui risulta parallela.

Così il punto P della figura precedente ha entrambe le coordinate positive; e lo stesso vale per tutti i punti dell'angolo retto limitato dai due semiassi positivi, o, come noi diremo, del « primo angolo degli assi ». Nel secondo angolo retto, cioè in quello limitato dal semiasse y positivo e dal semiasse x negativo, l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva. Così nel terzo e quarto angolo degli assi abbiamo manifestamente per l'ascissa e l'ordinata le combinazioni di segno indicate nell'unita figura schematica.

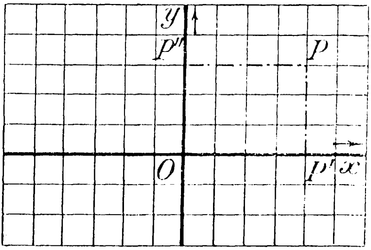


Si noti, infine, che per trovare le due coordinate di un punto P, non occorre condurre da esso entrambe le perpendicolari agli assi; ne basta una sola, per es. la PP', relativa all'asse delle x, giacchè l'ascissa è data da OP', l'ordinata da $P'P$.

12. Tutti i punti dell'asse delle x hanno nulla l'ordinata, tutti quelli dell'asse delle y hanno nulla l'ascissa; e l'origine ha uguali a zero entrambe le coordinate.

I punti di una stessa parallela all'asse delle x hanno tutti la medesima ordinata, e così i punti di una parallela all'asse delle y hanno tutti la medesima ascissa.

13. La determinazione delle coordinate dei singoli punti del piano risulta facilitata, se si usa carta quadrettata, e si adottano come assi una orizzontale e una verticale della quadrettatura. Se come unità delle lunghezze si prende il lato del quadretto, i vertici della quadrettatura danno tutti i punti, che hanno coordinate *intere* (per es. in fig. le coordinate di P sono 4 e 3);



e le coordinate degli altri punti si valutano anche ad occhio, con una approssimazione che spesso può bastare.

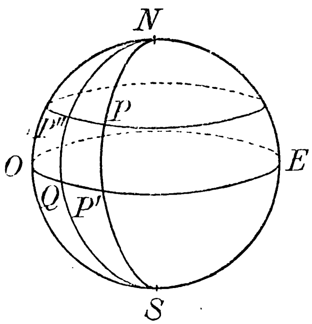
14. Invece di fissare nel piano un punto, prendiamo ad arbitrio due numeri (relativi) x_1 e y_1. Si vede subito che nel piano vi è sempre un punto (ed uno solo), che ha il primo numero per ascissa, il secondo per ordinata. Invero, preso sull'asse delle x il punto P', che ha per ascissa x_1 e sull'asse delle y il punto P'', che ha per ordinata y_1, è chiaro che il punto P in cui si segano le perpendicolari in P' e P'' ai due assi, ha per ascissa x_1 e per ordinata y_1, mentre ogni altro punto del piano ha diversa da x_1 e y_1 almeno una delle due coordinate.

Concludiamo, dunque, che, *quando si siano fissati nel piano due assi ortogonali* (orientati) *e l'unità delle lunghezze, ad ogni punto del piano corrispondono due numeri, come sue coordinate; e, viceversa, ad ogni coppia di numeri corrisponde un punto ben determinato, che ha il primo numero come ascissa, il secondo come ordinata.*

Siccome, quando un punto si vuole individuare per mezzo delle sue coordinate, importa sapere quale di esse sia l'ascissa e quale l'ordinata, l'uso è di nominare come prima l'ascissa e come seconda l'ordinata.

15. Le coordinate dianzi definite diconsi *cartesiane* dal nome di RENATO DESCARTES o CARTESIO, che nella sua *Géométrie* del 1637 pose per primo a base di un trattato geometrico l'uso di siffatte coordinate, il cui concetto si era venuto prima elaborando traverso le ricerche di molti Geometri anteriori.

Qui notiamo l'analogia, che corre tra le coordinate cartesiane nel piano e le *coordinate geografiche (longitudine e latitudine)* che si usano per determinare la posizione di un punto sul globo terrestre (riguardato, in una prima approssimazione, come sferico). Come linee di riferimento,



analoghe agli *assi*, si fissano l'*equatore* OE e il *meridiano geografico* NQS (semicircolo massimo limitato ai poli) che passa per un determinato osservatorio (Roma o Parigi o Greenwich, ecc.). Preso sul globo un punto P qualsiasi, se il meridiano NPS di P sega l'equatore in P' e il parallelo di P (circolo minore passante per P, parallelo all'equatore) sega il meridiano NQS in P'', la *longitudine* e la *latitudine* in P sono date dalle misure in gradi degli archi QP' e QP'' rispettivamente.

Rappresentazione grafica delle funzioni di 1° grado

16. Nelle applicazioni dell'Algebra elementare interessano particolarmente le funzioni (razionali intere) di 1° e 2° grado. Studiamone le grafiche, cominciando dalle prime.

La più generale *funzione (razionale intera) di primo grado* è della forma

$$y = ax + b, \tag{4}$$

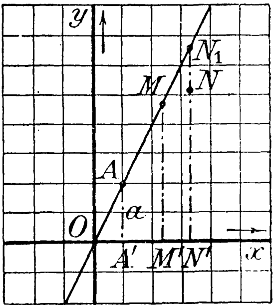
dove a e b designano due numeri noti quali si vogliano.

Per trovare la grafica di questa funzione, bisognerà fissare su di un foglio di carta (p. es. quadrettata) gli *assi* (col loro senso positivo e la unità di misura), e poi, calcolato per ciascun valore di cui è suscettibile la variabile x il corrispondente valore di y, cercare il luogo dei punti che hanno per ascissa e per ordinata rispettivamente le coppie di valori corrispondenti della x e della y dianzi considerati.

Cominciamo allora col considerare della funzione (4) il caso particolare, in cui manca il termine noto, cioè prendiamo la funzione

$$y = ax, \tag{5}$$

(legge della *proporzionalità diretta* fra le due variabili x e y) e, per fissare le idee, supponiamo dapprima che a sia positivo. Questa funzione per $x = 0$ si annulla, cosicchè la sua grafica passerà per l' origine; e poichè per $x = 1$ risulta $y = a$, essa passerà anche pel punto A di ascissa $OA' = 1$ e di ordinata $A'A = a$ (nella fig. si è preso $a = 2$), il quale per l' ipotesi $a > 0$, giace nel primo angolo degli assi.



Ora è facile dimostrare che la grafica della (5) è la *retta* passante per l' origine O e pel punto A.

Dobbiamo, precisamente, far vedere che ogni punto di questa retta OA ammette, come ordinata, il prodotto della sua ascissa per il numero fisso a, mentre ogni punto fuori di tale retta non gode di questa proprietà. Ed, invero, se M è un qualsiasi punto della OA, diverso da O e da A, e si abbassa da M sull' asse delle x la perpendicolare MM', il triangolo $OM'M$ risulta simile ad $OA'A$, onde si ha

$$\frac{M'M}{OM'} = \frac{A'A}{OA'},$$

ossia, essendo $OA' = 1$, $A'A = a$,

$$\frac{M'M}{OM'} = a, \quad M'M = a \cdot OM'; \tag{6}$$

e, poichè la retta OA giace tutta nel primo e nel terzo angolo degli assi, ogni suo punto ha le due coordinate entrambe positive o entrambe negative (n. 11), cosicchè la uguaglianza (6) vale non soltanto in valore assoluto, ma anche in segno; cioè veramente l' ordinata di ogni punto M della retta OA è a volte la corrispondente ascissa.

Se invece si prende un qualsiasi punto N, fuori della retta OA, e da esso si abbassa la perpendicolare NN' sull'asse delle x, la quale intersechi la OA in N_1, risulta certamente

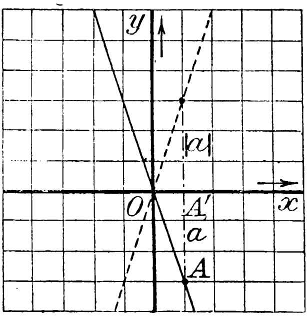
$$\frac{N'N}{ON'} \gtrless \frac{N'N_1}{ON'} \quad \text{cioè} \quad \frac{N'N}{ON} \gtrless a.$$

La retta OA è dunque effettivamente la grafica della (5).

Se poi nella (5) a è negativo, si consideri la funzione

$$(7) \qquad y = |a|\, x,$$

il cui diagramma è la retta passante per l'origine e per il punto di coordinate 1 e $|a|$. (Nell'unita figura si è preso $a = -3$). I valori, che le due funzioni (5) e (7) assumono in corrispondenza di un medesimo x qualsiasi, sono fra loro opposti, cosicchè per avere il diagramma della (5) basta tener fissa l'ascissa di ogni punto della retta, che rappresenta la (7) e cambiar segno alla sua ordinata. Ciò equivale a prendere la simmetrica, rispetto all'asse delle x, di codesta retta, cioè, anche in questo caso, la retta, che passa per l'origine e per il punto A di coordinate 1 ed a.



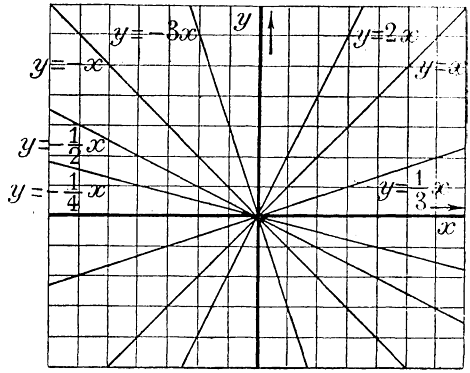
Concludiamo dunque che, qualunque sia a, *il diagramma della funzione*

$$(5) \qquad y = ax$$

è la retta passante per l'origine e per il punto di coordinate 1 *ed* a.

Essa giace nel primo e terzo angolo degli assi se $a > 0$, nel secondo e quarto se $a < 0$. Nel primo caso, al crescere dell'ascissa, cresce, lungo la retta anche l'ordinata, e la retta si può dire *saliente*; nel secondo caso, invece, la retta si può dire *discendente,* in quanto al crescere dell'ascissa, l'ordinata, lungo la retta, decresce.

In entrambi i casi, al crescere o al decrescere del valore assoluto di a, cresce o, rispettivamente, decresce l'angolo che la semiretta OA forma col semiasse positivo delle x. Si ha, dunque, che da a dipende l'inclinazione della retta OA rispetto all'asse delle x. Perciò il numero a si chiama *coefficiente angolare* o *rapporto direttivo* della retta OA.



Nella unita figura abbiamo disegnato, varie rette passanti per l'origine, indicando accanto a ciascuna la rispettiva funzione.

È ben chiaro che per tracciare la grafica di una funzione (5), basta segnarne, oltre l'origine O, un altro punto qualsiasi, anche diverso dal punto A di ascissa 1 e ordinata a; e ciò è senz'altro conveniente quando a sia una frazione. P. es. la grafica della funzione

$$y = \frac{3}{4}x,$$

che per $x = 4$ assume il valore $y = 3$, è data dalla retta che congiunge l'origine col punto di ascissa 4 e ordinata 3.

17. Dopo ciò, possiamo passare alle funzioni di 1° grado generali, cioè a quelle del tipo

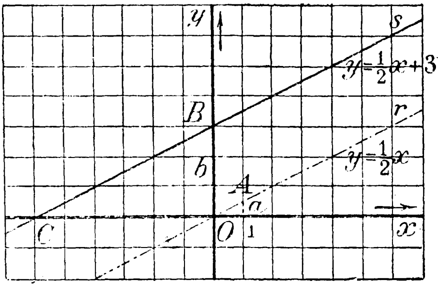
$$(4) \qquad y = ax + b,$$

con $b \gtrless 0$.

Considerata la retta r, passante per l'origine, che rappresenta la funzione monomia

$$(5) \qquad y = ax,$$

si rileva dalla espressione della funzione (4) che per ottenerne la grafica basta aggiungere (algebricamente) alla ordinata di ciascun punto della r la lunghezza fissa (positiva o negativa) b, il che equivale a far subire alla retta r la traslazione di ampiezza $|b|$, nel senso dell'asse y positivo o negativo a seconda del segno di b (nella fig. abbiamo $a=\frac{1}{2}$, $b=3$).



Otteniamo così la parallela s alla r, che passa per quel punto B dell'asse delle y, che ha l'ordinata b; e concludiamo che *ogni funzione di primo grado ammette come grafica una retta.*

Il termine noto b della (4), che, come si è visto, dà l'ordinata della intersezione B della rispettiva grafica con l'asse delle y, si dice *ordinata all'origine* di codesta retta; e il coefficiente a si chiama ancora *coefficiente angolare* o *rapporto direttivo*, perchè l'angolo, che la grafica s della (4) forma con l'asse delle x, è uguale a quello formato dalla sua parallela r per l'origine, e quindi dipende soltanto da codesto coefficiente (n. prec.).

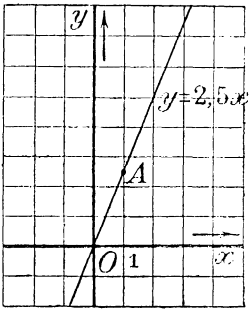
Notiamo infine che, come si è visto che l'intersezione della retta, che rappresenta la (4), con l'asse delle y ha l'ordinata b, si può, analogamente, chiedere quale sia l'ascissa del punto C, in cui codesta retta interseca l'asse x. Per trovare questa ascissa basta riflettere che per siffatto valore di x la corrispondente ordinata, cioè il valore corrispondente della funzione y, deve essere nullo, cosicchè si è condotti all'equazione di 1° grado

$$ax + b = 0,$$

risolvendo la quale si trova

$$OC = -\frac{b}{a}.$$

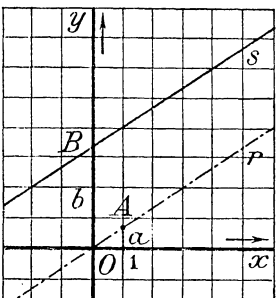
18. È pressochè evidente che il risultato fondamentale del n. prec. si può invertire; cioè *ogni retta del piano* (che non sia parallela ad un asse) *si può considerare come la grafica di una determinata funzione di 1° grado.*



Presa anzitutto una qualsiasi retta passante per l'origine (e diversa dagli assi) se ne consideri il punto A di ascissa 1; se a è la sua ordinata (nella fig. si trova $a = 2{,}5$), la retta data è la grafica della funzione

$$y = ax.$$

Se poi si ha una retta s non passante per l'origine (e non parallela nè all'uno nè all'altro asse), se ne consideri la parallela r per l'origine, e, determinato il coefficiente angolare a di questa r $\left(\text{nella fig. è } a = \frac{2}{3}\right)$, si misuri il segmento OB che la s taglia sull'asse y. Se è $OB = b$ $\left(\text{nella fig. abbiamo } b = \frac{10}{3}\right)$ la s è la grafica della funzione

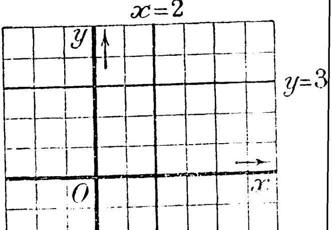


(4) $$y = ax + b.$$

Nell'enunciato, così dimostrato, abbiamo escluso le rette parallele all'uno o all'altro asse.

Se una retta è parallela all'asse delle x ed è b l'ordinata del punto, in cui essa interseca l'asse delle y, essa è il luogo dei punti, che hanno questa ordinata b, cioè dei punti caratterizzati dalla condizione

$$y = b.$$



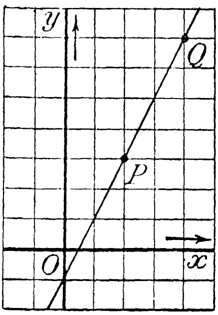
Una tal retta si può considerare come la grafica della *costante* b, cui si riduce la funzione di 1° grado $y = ax + b$ per $a = 0$ (retta a coefficiente angolare nullo).

Se poi si considera una retta parallela all' asse delle y ed è c l'ascissa della sua intersezione con l'asse delle x, essa è il luogo dei punti caratterizzati dalla condizione

$$x = c,$$

ma non si può interpretare come grafica di una funzione.

19. Per trovare la funzione di 1° grado che ammette come grafica una data retta si può procedere in un modo diverso da quello del n. prec. Presi sulla retta data due punti P e Q e misurate le rispettive coordinate, siamo condotti al problema di *determinare la funzione di* 1° *grado, la cui grafica passa per due punti di cui si conoscono le coordinate.*



Per vedere come si risolva il problema basta trattare un caso numerico. Supponiamo, ad es., che i punti P e Q abbiano per coordinate (vedi la fig.) 2 e 3 il primo, 4 e 7 il secondo. Si tratta di determinare i coefficienti a e b della funzione

$$y = ax + b \tag{4}$$

in modo che essa per $x = 2$ assuma il valore 3 e per $x = 4$ assuma il valore 7.

Otteniamo così per le incognite a e b il sistema di due equazioni di 1° grado

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 2 + b, \\ 7 = a \cdot 4 + b, \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 2a + b = 3, \\ 4a + b = 7, \end{cases}$$

dal quale risulta $a = 2$, $b = -1$, cosicchè la funzione cercata sarà

$$y = 2x - 1.$$

20. Aggiungiamo, infine, un'osservazione altrettanto facile quanto importante. Se due funzioni di 1° grado hanno uguali i coefficienti della variabile, cioè sono del tipo

$$y = ax + b, \quad y = ax + b',$$

le rispettive grafiche risultano fra loro parallele, in quanto sono entrambe parallele alla grafica, passante per l'origine, della funzione $y = ax$. Viceversa, se le grafiche di due funzioni di 1° grado sono parallele, i rispettivi coefficienti della variabile debbono essere entrambi uguali a quello della funzione (senza termine noto), che è rappresentata dalla parallela alle loro due grafiche, passante per l'origine.

Concludiamo dunque: *Affinchè due funzioni di* 1° *grado abbiano grafiche parallele, occorre e basta che siano in esse uguali i coefficienti della variabile* (coefficienti angolari delle rispettive grafiche).

21. La rappresentabilità di ogni funzione di 1° grado per mezzo di un diagramma rettilineo dà luogo a numerose applicazioni non soltanto nella Matematica, ma anche nella Fisica, come mostreremo con qualche esempio nei prossimi nn. Ed è facile capire quale sia il carattere comune a tutti i fenomeni, in cui compaiono due variabili x e y, tali che l'una sia funzione di 1° grado dell'altra, in guisa che il rispettivo diagramma sia rettilineo. Infatti, supposto

$$y = ax + b, \tag{4}$$

si attribuisca ad x un qualsiasi valore x_0 e si indichi con y_0 il valore corrispondente della y, cosicchè si abbia

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Sottraendo membro a membro queste due uguaglianze si trova

$$y - y_0 = a(x - x_0) \quad \text{ossia} \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = a, \tag{4'}$$

onde si conclude che *i fenomeni a diagramma rettilineo, cioè tali che vi compaiano due variabili, di cui l'una sia funzione di* 1° *grado dell'altra, sono quelli, in cui le due variabili, a partire da due loro valori corrispondenti quali si vogliano, variano proporzionalmente.*

Se nella seconda delle (4') si pone $x = x_0 + 1$, si ottiene

$$y - y_0 = a.$$

Si ha dunque, che il coefficiente a è l'*incremento algebrico* (cioè positivo o negativo), che la funzione (4) subisce, quando la variabile x, a partire da un suo qualsiasi valore x_0, si fa crescere di 1.

Applicazioni

22. Risoluzione grafica di un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite. - Si prenda ad es., il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 5x - 20y = -8. \end{cases}$$

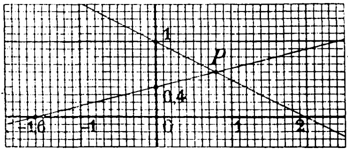
Le infinite soluzioni della prima equazione, presa da sola, si ottengono, dando ad x un valore arbitrario, e prendendo per la y il corrispondente valore della funzione di 1° grado

$$y = \frac{2 - x}{2} = -\frac{1}{2}x + 1,$$

che si deduce dall'equazione, risolvendola rispetto alla y. Similmente, le infinite soluzioni della seconda equazione sono date da

$$x \text{ arbitraria,} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}.$$

Le due funzioni di 1° grado così ottenute sono rappresentate su di un foglio di carta millimetrica (su cui si prenda come unità il cm.), da due rette: la prima dalla congiungente dei due punti di coordinate 0 e 1; 2 e 0; la seconda dalla congiungente dei due punti di coordinate $-1{,}6$ e 0; 0 e 0,4. I singoli punti di ciascuna delle due rette rappresentano, con le rispettive coordinate, tutte le soluzioni della corrispondente equazione. Perciò le coordinate del punto comune alle due rette dà la soluzione del sistema: e dalla figura si rileva che questa soluzione è data da $x = 0{,}8$; $y = 0{,}6$.



In questo esempio la rappresentazione grafica fornisce la soluzione esatta del sistema, perchè, data la *scala* del nostro disegno sono valutabili distintamente i *decimi*, i quali bastano alla espressione esatta della soluzione. In ogni caso, dalla rappresentazione grafica si desumerà una soluzione approssimata, e il grado di approssimazione dipenderà, volta per volta, dalla *scala* del disegno, nonchè, naturalmente, dalla precisione di questo.

23. La rappresentazione grafica conduce anche, nel modo più naturale, alla nota discussione di un qualsiasi sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite (I, nn. 50-53)

$$(8)\qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Per risolverlo graficamente, sotto l'ipotesi che b e b' siano entrambi diversi da zero, basta considerare le coordinate del punto di intersezione delle due rette che rappresentano le due funzioni di primo grado

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \quad y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'},$$

vale a dire delle due rette di coefficienti angolari $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ e di ordinate all'origine $\frac{c}{b}$, $\frac{c'}{b'}$, rispettivamente (n. 17). Perciò il sistema ammette una soluzione unica e determinata, quando le due rette suindicate non sono parallele, ossia quando hanno disuguali i coefficienti angolari (n. 20):

$$-\frac{a}{b} \gtrless -\frac{a'}{b'} \quad \text{ossia} \quad ab' - a'b \gtrless 0.$$

Se invece le due rette sono parallele, ma non coincidenti, il sistema non ammette soluzioni o, come si suol dire, è *impossibile*; e noi sappiamo che ciò si verifica quando le due rette hanno uguali i coefficienti angolari (n. 20) e disuguali le ordinate all'origine (n. 17), cioè

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} \gtrless \frac{c'}{b'},$$

ossia

$$ab' - a'b = 0, \quad bc' - b'c \gtrless 0.$$

Infine, se, come ulteriore caso particolare, si ha che le due rette coincidono, ogni punto dell'una è comune anche all'altra e le due equazioni del sistema sono fra loro equivalenti, talchè si può dire che il sistema ammette infinite soluzioni o, come si suol dire, è *indeterminato*. Perchè ciò accada è necessario e sufficiente che sia

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

ossia

$$ab' - a'b = 0, \quad bc' - b'c = 0.$$

Lasciamo all'alunno la facile discussione dei casi, esclusi dapprincipio, in cui b o b' o entrambi codesti coefficienti siano zero; e notiamo come i risultati, cui siamo giunti in questo n. coincidano esattamente con quelli, che abbiamo ottenuto, discutendo il sistema (8) algebricamente (I, nn. 50-53).

24. Moti uniformi. - A funzioni di 1° grado e, quindi, a grafiche rettilinee danno luogo i *moti uniformi*.

Si dice che un punto M si muove, sulla sua traiettoria (che può essere rettilinea, circolare, ecc.), di *moto uniforme*, se gli spazi che il punto percorre sono sempre proporzionali agli intervalli di tempo che esso impiega a percorrerli. Ciò vuol dire che se indichiamo con s lo spazio percorso da M (misurato, sulla traiettoria, p. es. in centimetri, a partire da un certo punto, *origine degli spazi*) e con t il tempo (misurato, p. es. in secondi, a partire da un certo determinato istante iniziale, *origine dei tempi*) e se sappiamo che all'istante t_0 il punto M si trovava alla distanza s_0 dall'origine degli spazi, lo spazio $s - s_0$ percorso nell'intervallo di tempo fra t_0 e t dovrà avere all'intervallo stesso $t - t_0$ un rapporto fisso, cioè dovrà essere

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = v,$$

dove v indica un certo determinato numero. Questo valore fisso del rapporto suindicato dicesi *velocità* del moto uniforme considerato.

La precedente relazione si può anche scrivere

$$s - s_0 = v(t - t_0)$$

od anche

(9) $$s = vt + s_0 - vt_0;$$

onde risulta che *nel moto uniforme lo spazio è una funzione di* 1° *grado del tempo.*

Perciò se rappresentiamo codesta funzione su di un foglio di carta quadrettata (o piano cartesiano), contando i tempi sull'asse delle ascisse e gli spazi su quello delle ordinate, otterremo come *grafica del moto uniforme* considerato, la retta avente come coefficiente angolare la velocità v e per ordinata all'origine il numero $s_0 - vt_0$. Inoltre, come già si sa per dato e del resto si verifica direttamente, la funzione (9) per $t = t_0$ assume il valore s_0, cosicchè la retta suindicata passerà pel punto di coordinate t_0, s_0.

Risulta poi dalle osservazioni del n. 17 che codesta retta sarà più o meno inclinata sul semiasse x positivo, secondo che sarà maggiore o minore la velocità v del moto uniforme corrispondente; e, in base al n. 21, ritroviamo il risultato ben noto che la velocità nel moto uniforme è data dallo stesso numero che misura lo spazio (costante) percorso dal mobile in ogni singola unità di tempo.

25. La retta dianzi ottenuta, al pari della stessa funzione (9), rappresenta il moto uniforme senza limiti di tempo, cioè come se esso continuasse da tempi oramai infinitamente lontani e non fosse per arrestarsi mai.

Naturalmente i ***tempi negativi*** sono quelli anteriori all'istante (origine dei tempi), da cui convenimmo di misurare i tempi, e gli ***spazi negativi*** corrispondono alle posizioni assunte dal mobile prima di raggiungere sulla sua traiettoria il punto che adottammo come origine degli spazi. Così l'ordinata all'origine $s_0 - vt_0$, che è il valore assunto dalla (9) per $t = 0$, indica la distanza (positiva o negativa) a cui si è trovato il mobile, sulla traiettoria, dall'origine degli spazi nell'istante che abbiamo preso come origine dei tempi.

Perciò se si convenisse di misurare gli spazi precisamente da quel punto, in cui si è trovato il mobile nell'istante $t = 0$, dovremmo supporre $s_0 = t_0 = 0$, talchè la (9) si ridurrebbe a

$$s = vt$$

e sarebbe rappresentata semplicemente dalla retta passante per l'origine di coefficiente angolare v (n. 16).

26. In generale, quando si considera il moto uniforme di un punto M, si assume sulla traiettoria come positivo il senso stesso in cui avviene il moto, per modo che al crescere (in senso algebrico) della variabile « tempo » t, cresce del pari la variabile « spazio » s e, di conseguenza, la velocità v risulta positiva. In tal caso la grafica sarà una retta salente, cioè tale che i suoi punti di ascissa crescente hanno pur crescente (in senso algebrico) l'ordinata.

Ma talvolta, specialmente se si considerano su di una stessa traiettoria o su traiettorie parallele (come su di una linea ferroviaria a doppio binario) più punti che non si muovono tutti nello stesso senso, si è condotti ad assumere per qualche moto come senso positivo sulla traiettoria quello opposto al senso del moto stesso; e allora la velocità risulta negativa e la grafica del moto è una retta discendente, cioè tale che i suoi punti di ascissa crescente hanno le ordinate decrescenti (in senso algebrico).

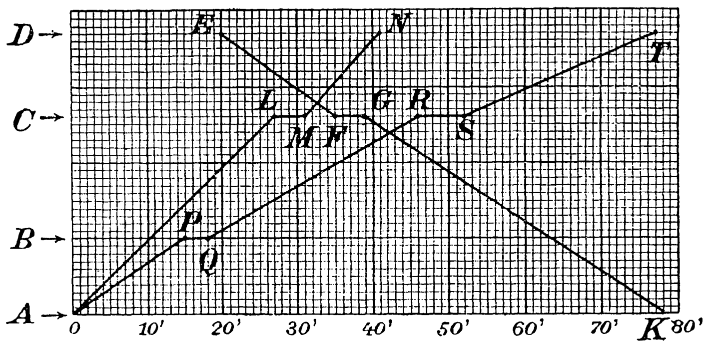
27. Orari grafici. - Una gran parte dei moti che si possono osservare in natura e di quelli che l'uomo produce meccanicamente si possono riguardare approssimatamente uniformi o, quanto meno, si possono immaginare decomposti in varie fasi, in ciascuna delle quali il moto appare sensibilmente uniforme. Così nella rappresentazione dei moti le grafiche rettilinee trovano numerose applicazioni.

Fra queste è notevole la costruzione dei cosiddetti *Orari grafici* delle Ferrovie, quali sono generalmente usati dal personale viaggiante e dagli Ingegneri.

Volendo rappresentare la corsa di un treno sopra una determinata linea ferroviaria, fissiamo al solito due assi e contiamo sull'asse delle ascisse i tempi, su quello delle ordinate le distanze. Poichè si considerano tempi positivi e le distanze si computano a partire da una stazione capo-linea, basta considerare l'angolo dei due semiassi positivi; e, per fissare le idee ci serviremo di *carta millimetrica*, prendendo come unità appunto il mm. e rappresentando con esso il minuto sull'asse dei tempi, il chilometro su quello delle distanze.

La linea ferroviaria, che noi consideriamo, congiunga una stazione A, che prenderemo come origine delle distanze, con una stazione D distante 37 km., e abbia due stazioni intermedie B e C, rispettivamente a 10 km. e a 26 km. da A.

Contiamo i tempi a partire dalla mezzanotte, e supponiamo che appunto alla mezzanotte precisa parta da A un treno diretto, il quale si fermi a C per 4^m, dai 27^m ai 31^m, e giunga in D ai 41^m.



Il moto di un treno fra due fermate consecutive, ove si prescinda dal breve tempo impiegato sul principio per raggiungere la velocità *di regime* e dal rallentamento all'arrivo, si può riguardare come sensibilmente uniforme, talchè si potrà rappresentare mediante un segmento di retta (saliente o discendente), e d'altra parte le fermate alle stazioni intermedie, durante le quali la distanza dalla stazione capo-linea non varia, mentre il tempo si accresce della durata della sosta, saranno rappresentate da tratti orizzontali di lunghezza corrispondente a codesta durata.

Perciò la corsa del diretto suaccennato avrà come grafica la spezzata a tre lati $ALMN$, di cui il lato AL congiungente, il punto $t=0$, $s=0$ col punto $t=27$, $s=26$, corrisponde al percorso tra le stazioni A e C.

il lato orizzontale *LM* (lungo mm. 4) rappresenta la fermata in *C*, e il lato *MN*, congiungente i punti $t=31$, $s=26$ e $t=41$, $s=37$, rappresenta il percorso tra *C* e *D*.

L'altra grafica *APQRST* rappresenterà la corsa di un altro treno, che si ferma a entrambe le stazioni intermedie *B* e *C* ed è più lento del primo, come è messo in evidenza dalla minore inclinazione dei tratti salienti della sua grafica rispetto all'asse dei tempi.

Infine la terza grafica, discendente, rappresenta la corsa di un treno, che corre in senso inverso ai due primi. Esso parte da *D* 20^{m} dopo la mezzanotte, arriva in *C* ai 35^{m} e ne riparte ai 39^{m} per giungere alle $1^{h}\ 18^{m}$ alla stazione *A*.

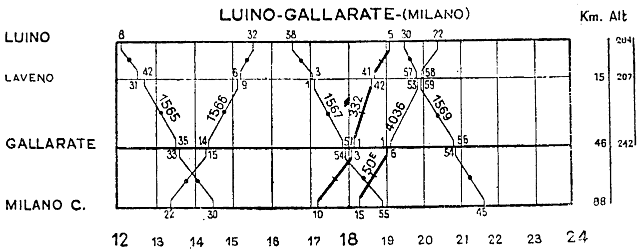
Il punto in cui la terza grafica interseca la prima sta ad indicare che i due treni corrispondenti si sono incrociati, e precisamente le due coordinate di codesto punto di intersezione ci dicono che codesto incrocio è avvenuto fra 32^{m} e 33^{m} dopo la mezzanotte e a quasi 28 km. da *A*.

Similmente risulta dalla grafica che il terzo treno, appena uscito dalla stazione *C* ha incrociato il secondo treno.

Siffatti orari grafici permettono di rendersi conto, a colpo d'occhio, di tutto il movimento di treni di una determinata linea; ed anzi gli Ingegneri quando debbono preparare o modificare un orario, prima ne tracciano graficamente i diagrammi e poi, a norma di questi, fissano in modo preciso le ore delle partenze e degli arrivi dei treni, quali sono registrati nei soliti « Indicatori » usati comunemente dal pubblico.

28. Nella pratica i diagrammi degli « Orari grafici » non sono tracciati precisamente secondo le norme da noi adottate nella nostra figura schematica del n. prec.; ma vi si introducono talune modificazioni, suggerite da evidenti ragioni di comodità e di economia di spazio.

Così, ad es., riproduciamo qui dall'*Orario grafico* delle Ferrovie dello Stato (1°-XI-1931-X) il diagramma del movimento viaggiatori sulla linea



Luino-Milano tra le 12^{h} e le 24^{h}[1]. I tratti più marcati corrispondono a diretti, quelli più lievi e con un punto ad accelerati. Le distanze chilometriche non sono rappresentate in scala, ma indicate numericamente a destra del diagramma, insieme con le altitudini sul livello del mare (in metri).

Rappresentazione grafica delle funzioni di 2° grado

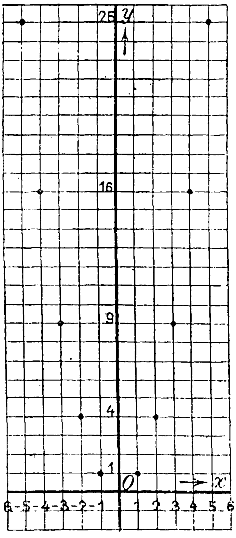
29. La più generale funzione (razionale intera) di 2° grado è data da

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{10}$$

dove a, b, c sono numeri noti quali si vogliano. Per trovarne la grafica, cominciamo anche qui dal considerare qualche caso particolare, e anzitutto la più semplice possibile delle funzioni di 2° grado:

$$y = x^2. \tag{11}$$

Per $x=0$, questa funzione si annulla, cosicchè intanto la rispettiva grafica passa per l'origine O. Per qualsiasi altro valore della x, sia esso positivo o negativo, il corrispondente valore della y è sempre positivo, il che vuol dire che la nostra grafica non ha nessun punto di ordinata negativa, cioè non scende mai al disotto dell'asse x.



Per avere qualche punto di essa, diamo ad x successivamente i valori interi crescenti 1, 2, 3, 4, 5....; corrispondentemente troviamo per y i valori

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots.$$

i quali crescono anche più rapidamente delle ascisse rispettive, cosicchè la grafica nel primo angolo degli assi si va allontanando indefinitamente tanto dall'asse x, quanto dall'asse y, ma, per così dire, devia dalla direzione dell'asse orizzontale x verso quella dell'asse verticale y.

Per avere qualche punto della grafica dall'altra parte dell'asse y, diamo ad x successivamente i valori

$$-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \ldots ;$$

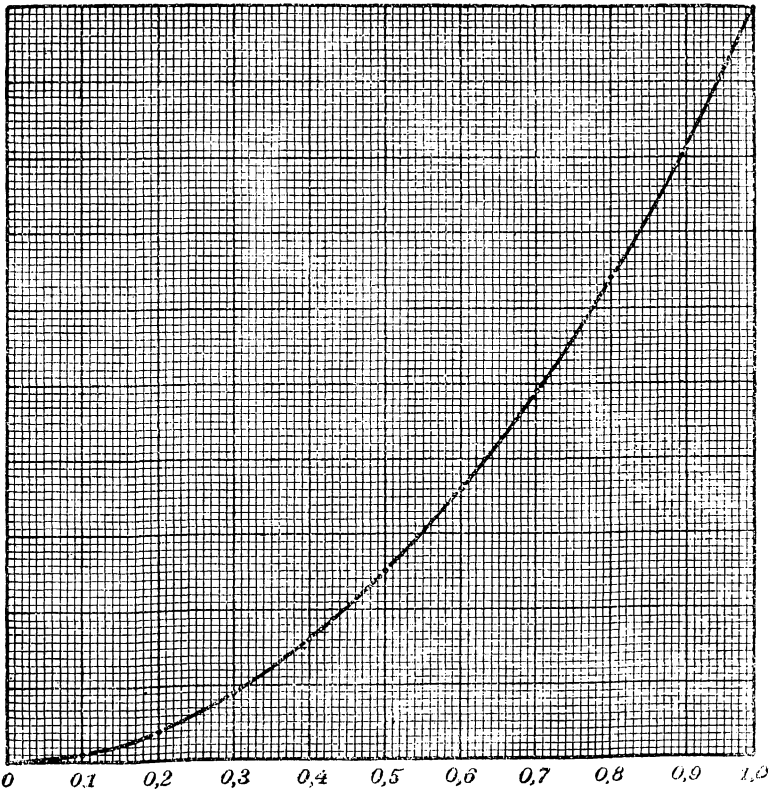
si ritrovano così per y ordinatamente gli stessi valori ottenuti dianzi

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \ldots ,$$

e poichè, qualunque sia x, risulta sempre

$$(-x)^2 = x^2,$$

abbiamo in ogni caso che due ascisse uguali in valore assoluto e di segno contrario danno luogo alla medesima ordinata, e perciò a due punti situati su di una stessa perpendicolare al-



l'asse y, e ad ugual distanza da parti opposte di esso, cioè a due punti *simmetrici* rispetto all'asse y. In altre parole *la grafica della funzione* (11) *ammette l'asse y come asse di simmetria.*

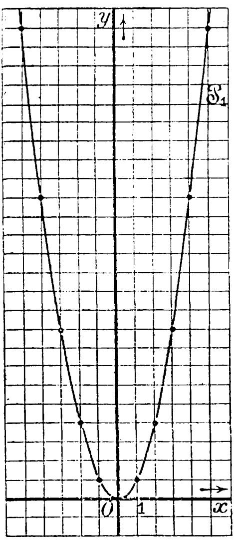
Per avere un'idea più precisa dell'andamento di codesta grafica bisogna segnare altri punti. Così, per esempio, volendo considerare l'intervallo tra $x = 0$ e $x = 1$, diamo ad x successivamente i valori

$$0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad .... \quad 0{,}9$$

ai quali corrispondono per y rispettivamente i valori

$$0{,}01 \quad 0{,}04 \quad 0{,}09 \quad .... \quad 0{,}81 .$$

Poichè rispetto alla nostra quadrettatura consueta sarebbe impossibile tener conto, anche solo approssimatamente, di centesimi dell'unità, converrà rappresentare il tratto di grafica tra $x = 0$ e $x = 1$ in una scala maggiore, p. es. su *carta millimetrica*, prendendo come *unità* il *decimetro*. Segnati, allora, come nella figura della pag. precedente, i dieci punti dianzi determinati, basterà congiungerli a due a due con un tratto continuo per avere un'idea sensibilmente precisa dell'andamento della curva nell'intervallo considerato.



Il quadrato, di 1 dm². di area, di codesta figura fornisce l'ingrandimento (nella scala lineare da 1 a 25) del quadretto della fig. della pag. 192 che ha per vertici opposti l'origine O e il punto di coordinate 1 ed 1. Immaginando di ridurre l'ultima fig. alla scala della precedente e di ripetere un artificio analogo per gli intervalli da $x = 1$ a $x = 2$, da $x = 2$ a $x = 3$, ecc., si trova che la grafica della funzione (11) ha tra $x = -5$ e $x = 5$ la forma indicata dall'unita figura. Essa, considerata nel piano intero, si prolunga, dall'una e dall'altra parte dell'asse y, indefinitamente, e, come già si notò, è simmetrica rispetto a quest'asse.

Siffatta curva dicesi *parabola.*

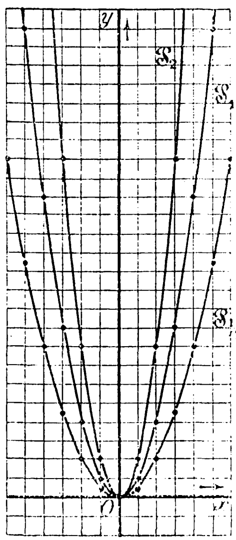
Essa è intersecata da ogni parallela all'asse x, situata al di sopra di questo asse, in due punti, la cui distanza diminuisce e diventa minore di ogni segmento assegnabile, se codesta parallela si avvicina indefinitamente all'asse x: finchè, quando la parallela giunge a coincidere con quest'asse, le due intersezioni si sovrappongono in O. Perciò si dice che l'asse x è *tangente* alla parabola nel punto O. Questo punto, che è la intersezione della parabola col suo *asse di simmetria,* dicesi *vertice* di essa.

30. Tracciata sul foglio la parabola, che rappresenta la funzione

$$y = x^2 \tag{11}$$

e che per intenderci designeremo con $\mathfrak{S}_1$, è facile dedurne la forma della grafica $\mathfrak{S}_a$ di un'altra qualsiasi funzione della forma

$$y = ax^2, \tag{12}$$



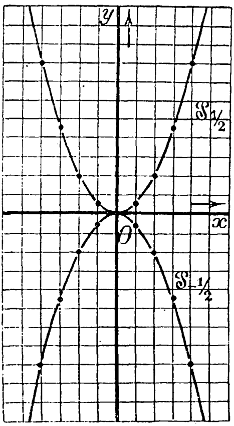
dove a designa un numero dato diverso da 1.

In ogni caso, poichè per $x = 0$ la (12) si annulla, la grafica rispettiva passerà, qualunque sia a, per l'origine O. Notiamo poi che per avere gli altri punti di codesta grafica, se fosse $a = 2$, basterebbe raddoppiare la ordinata di ogni singolo punto della $\mathfrak{S}_1$; come invece se fosse $a = \frac{1}{2}$, basterebbe ridurre a metà ciascuna di siffatte ordinate.

Così in generale, *supposto* a *positivo,* la grafica della (12) si otterrà facendo variare le ordinate dei singoli punti di $\mathfrak{S}_1$ nel rapporto $1 : a$, il che conduce manifestamente ad una curva in tutto simile alla $\mathfrak{S}_1$, simmetrica al pari di essa rispetto all'asse y e tangente in O all'asse x. Soltanto questa curva sarà interna alla $\mathfrak{S}_1$, e più schiacciata di essa verso l'asse y, se è $a > 1$; sarà invece esterna a $\mathfrak{S}_1$ se è $a < 1$, e tanto più allargata verso l'asse x quanto più piccolo sarà il coefficiente a.

In ogni caso, siffatta curva prende il nome di *parabola di vertice O e di asse di simmetria y.*

Dopo ciò è facile convincersi che anche quando il coefficiente a è negativo la funzione (12) ha per grafica una parabola. Se p. es. si prende la



$$y = -\frac{1}{2}x^2,$$

è manifesto che, per averne la grafica, basta considerare anzitutto la parabola $\mathfrak{S}_{1/2}$ che rappresenta la

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

e poi invertire il segno dell'ordinata di ciascun suo punto, il che equivale a costruire la curva simmetrica della $\mathfrak{S}_{1/2}$ rispetto all'asse x. Si ha così una parabola identica alla $\mathfrak{S}_{1/2}$, avente ancora l'asse di simmetria y e il vertice O, ma volgente la concavità verso il basso.

Analoghe osservazioni valgono per ogni altra funzione (12) in cui il coefficiente a sia negativo, cosicchè possiamo oramai concludere, in base alla precedente discussione, che *la funzione di 2° grado*

$$(12) \qquad y = ax^2$$

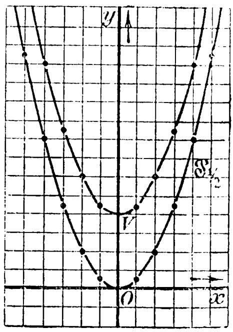
è sempre rappresentata da una parabola, simmetrica rispetto *all'asse y, avente il vertice nell'origine e volgente la concavità verso l'alto o verso il basso, secondo che il coefficiente a è positivo o negativo.*

31. Dal precedente risultato è facile dedurre che per ogni qualsiasi funzione di 2° grado, anche non monomia, la grafica è sempre una parabola.

A) Riferendoci dapprima a casi numerici, consideriamo, per esempio, la

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 4.$$

Da questa espressione stessa risulta che la grafica della nostra funzione si ottiene, aumentando di 4 l'ordinata di ciascun punto della parabola $\mathcal{S}_{1/2}$, che rappresenta la funzione priva di termine noto



$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

o, ciò che è lo stesso, facendo subire nel piano alla $\mathcal{S}_{1/3}$ la traslazione di ampiezza 4 nella direzione dell'asse y, per modo che il vertice della $\mathcal{S}_{1/2}$ si trasporti nel punto V di coordinate 0 e 4 (Vedi l'annessa figura).

Naturalmente si dovrebbe eseguire sulla $\mathcal{S}_{1/2}$ la medesima traslazione in senso inverso, se si volesse la grafica della

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4;$$

e nello stesso modo si vede in generale che, qualunque sia il numero y_0, *la grafica della funzione*

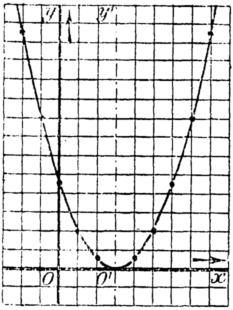
$$y = ax^2 + y_0$$

è una parabola identica a quella che rappresenta la

$$y = ax^2,$$

e se ne deduce, facendo subire a quest' ultima la traslazione parallela all' asse y che ne porta il vertice nel punto dell' asse y che ha l' ordinata y_0.

B) Consideriamo in secondo luogo la funzione



$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2,$$

e prendiamo per un momento come asse ausiliare y' delle ordinate la retta perpendicolare all' asse x e passante pel punto O' dell' asse x di ascissa 3.

Se in luogo degli assi x, y, prendiamo gli assi x, y', è manifesto che un qualsiasi punto del piano avrà rispetto ai nuovi assi la stessa ordinata di prima, mentre la sua nuova ascissa x' sarà uguale alla ascissa primitiva x diminuita di 3

$$x' = x - 3.$$

Allora per rappresentare graficamente la nostra funzione y, cominciamo coll' esprimerla per mezzo della variabile ausiliare x'. Avremo così la funzione

$$y = \frac{1}{2}x'^2,$$

la quale è rappresentata rispetto agli assi x e y' dalla solita parabola $\mathcal{P}_{1/2}$, collocata col vertice in O'.

Se allora torniamo agli assi primitivi x, y e riprendiamo la nostra funzione

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2,$$

possiamo dire senz' altro che la rispettiva grafica è identica alla parabola $\mathcal{P}_{1/2}$ che rappresenta la

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

e se ne deduce facendole subire la traslazione parallela all' asse x, che ne porta il vertice nel punto dell' asse x di ascissa 3.

Per le stesse ragioni è identica alla $\mathcal{S}_{1/2}$ anche la grafica della

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2,$$

ma ha per vertice il punto dell' asse x di ascissa -3.

Così in generale si ha che, qualunque sia il numero x_0, *la grafica della funzione*

$$y = a(x - x_0)^2$$

è la stessa parabola che rappresenta la

$$y = ax^2,$$

trasportata, con una traslazione parallela all' asse x, *ad avere il vertice nel punto di coordinate* x_0 *e* 0.

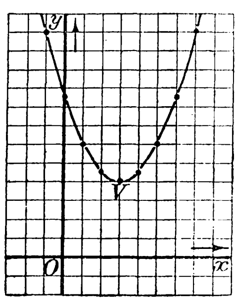
C) Combinando insieme i risultati ottenuti in A) e B), possiamo enunciare il seguente teorema: *La funzione di* 2° *grado*

(13) $$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

è rappresentata dalla parabola che si ottiene da quella che rappresenta la

$$y = ax^2,$$

facendole subire successivamente la traslazione parallela all' asse x, *data in valore e senso da* x_0, *e la traslazione parallela all' asse* y, *data da* y_0; *o, in altre parole, portandola ad avere come vertice il punto di coordinate* x_0 *e* y_0.



(In figura abbiamo la grafica della

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 4).$$

Si ottiene così la grafica della più

generale funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{14}$$

Invero questa funzione si può scrivere

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c,$$

e quindi ancora, completando il quadrato di cui abbiamo tra parentesi i primi due termini (IV, n. 12),

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right] - \frac{b^2}{4a} + c;$$

cosicchè otteniamo infine

$$y = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

e la funzione (14) è ridotta precisamente alla forma (13) ove si ponga

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Possiamo, quindi, riassumere la discussione precedente nel seguente enunciato: *La grafica della funzione*

$$y = ax^2 + bx + c \tag{10}$$

è in ogni caso una parabola, ad asse di simmetria parallelo all'asse delle y, avente per vertice il punto di coordinate

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \tag{15}$$

e volgente la concavità verso l'alto o verso il basso, secondo che è $a > 0$ o $a < 0$.

Le coordinate (15) del vertice vanno ricordate a memoria: l'ascissa x_0 non è altro che la metà del rapporto $-\frac{b}{a}$, cioè (IV, n. 7) la semisomma (o media aritmetica) delle due eventuali radici del trinomio di 2°

grado (10); e l'ordinata y_0 si ottiene, dividendo per il quadruplo del primo coefficiente il discriminante di codesto trinomio, cambiato di segno. Del resto y_0 è il valore, che il trinomio di 2° grado assume, quando alla variabile x si attribuisce il valore $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

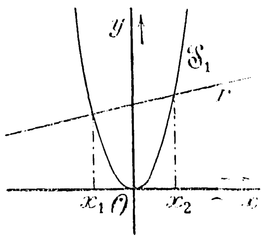
Applicazioni

32. Risoluzione grafica delle equazioni di 2° grado - Per risolvere graficamente l'equazione di 2° grado

$$x^2 + px + q = 0 \tag{16}$$

basta aver tracciata, una volta per tutte, con molta cura su di un foglio di carta millimetrica la parabola $\mathcal{S}_1$ che rappresenta la funzione di 2° grado (n. 29)

$$y = x^2.$$



Invero, scritta l'equazione data sotto la forma

$$x^2 = -px - q,$$

si vede che ogni soluzione di essa fa assumere il medesimo valore alle due funzioni

$$y = x^2, \quad y = -px - q;$$

ed è manifesto che, viceversa, ogni valore di x, che renda uguali queste due funzioni, soddisfa alla nostra equazione.

Ora codeste due funzioni sono rappresentate rispettivamente dalla parabola $\mathcal{S}_1$ e dalla retta r che ha il coefficiente angolare $-p$ e l'ordinata all'origine $-q$ (n. 17); e le soluzioni della (16) saranno fornite dalle ascisse delle eventuali intersezioni della retta r con la $\mathcal{S}_1$.

Si potrebbe benissimo dimostrare qui per via geometrica che la retta r interseca la parabola fissa $\mathcal{S}_1$ in due punti o ha con essa un solo punto comune (le è *tangente*) o le è esterna secondo che è (IV, n. 3)

$$\frac{p^2}{4} - q > 0 \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q = 0 \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q < 0;$$

ma non ci indugeremo su ciò.

33. Moto verticale dei gravi - Come già si è ricordato (IV, n. 34), un corpo pesante o *grave*, abbandonato a se stesso a partire dalla posizione di quiete, cade verticalmente, percorrendo spazi, che (ove si prescinda dalla resistenza dell'aria) si possono riguardare proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli; e precisamente si verifica sperimentalmente che al termine di 1^s dall'inizio della caduta il grave ha percorso m. 4,905. Perciò se misuriamo il tempo t in secondi, a partire dall'istante iniziale della caduta, e lo spazio s in metri a partire dalla posizione di partenza del grave, avremo che lo spazio percorso dopo t secondi dal corpo cadente sarà dato, in m., dalla proporzione

$$s:t^2 = 4{,}905:1;$$

onde risulta

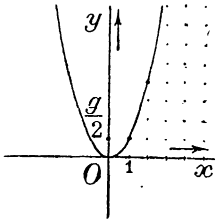
$$s = 4{,}905t^2$$

od anche, ove si indichi con g il numero 9,810 (cioè la cosiddetta *accelerazione della gravità*),

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{17}$$

Se rappresentiamo i tempi t sull'asse delle ascisse e gli spazi s su quello delle ordinate, otteniamo come grafica di questo moto di caduta dei gravi una parabola avente il vertice nell'origine, l'asse di simmetria degli spazi e la concavità volta verso l'alto (n. 30).

Se tracciassimo codesta grafica sul foglio, adottando, come si è fatto sin qui, la stessa unità per le ascisse e per le ordinate, otterremmo, in ragione del valore abbastanza grande del coefficiente $\frac{1}{2}g$, una parabola molto schiacciata verso l'asse y e uscente assai presto dai limiti del nostro foglio pel rapido accrescersi delle ordinate. Per ovviare a questo inconveniente, conviene, come spesso si fa nella pratica, ridurre la scala delle ordinate, scegliendo per queste una unità più piccola che per le ascisse; così nell'annessa figura si è rappresentato sull'asse y lo spazio $\frac{1}{2}g$ col medesimo segmento adottato come unità delle ascisse.



34. La libera caduta dei gravi fornisce un esempio di ***moto vario***, vale a dire di un moto in cui la velocità v varia da istante ad istante o, come noi possiamo dire, è funzione del tempo t. Precisamente, come si fa vedere in Fisica, essa è una funzione di 1° grado, data dalla equazione

$$v = gt,$$

cosicchè ad ogni unità di tempo subisce un accrescimento costante, uguale all'accelerazione g. Per questa costanza dell'accrescimento che la velocità subisce ad ogni secondo, il moto si dice *uniformemente vario*; e più precisamente si dice *uniformemente accelerato*, in quanto il valore assoluto della velocità è sempre crescente.

La grafica della velocità è la semiretta uscente dall'origine, col coefficiente angolare g e giacente nel primo angolo degli assi.

35. In Fisica si studia anche il moto di un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con un certo impulso iniziale.

Qui contrariamente a quanto, per ovvie ragioni, si è fatto nel caso precedente, si prendono come positivi gli spazi contati dalla posizione iniziale del grave verso l'alto, come negativi gli spazi contati verso il basso; e se con $v_0 > 0$ si indica la velocità iniziale e si adotta ancora come origine dei tempi l'istante in cui si inizia il moto, si trova

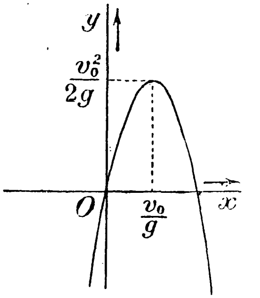
$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \tag{18}$$

mentre per la velocità v, che naturalmente è anche qui funzione del tempo, si ottiene la espressione

$$v = v_0 - gt. \tag{19}$$

Perciò la velocità ad ogni unità di tempo diminuisce (algebricamente (di g (n. 21).

La grafica di questo moto, vale a dire la curva che rappresenta la funzione s definita dalla espressione (18), è una parabola volgente la concavità verso il basso e passante per l'origine, in quanto per $t = 0$ la (18) assume il valore $s = 0$. Inoltre, ponendo nelle formule (15) del n. 31



$$y = s, \quad x = t; \quad a = -\frac{1}{2} g, \quad b = v_0, \quad c = 0,$$

troviamo che la nostra parabola ha per vertice il punto di coordinate

$$\frac{v_0}{g}; \quad \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Ciò vuol dire che la massima altezza, cui giunge il nostro grave, è data da $\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ e che essa è raggiunta $\frac{v_0}{g}$ secondi dopo l'istante iniziale.

Per $t > \frac{v_0}{g}$ la funzione (18) è decrescente, cioè il grave ricade; e la simmetria della parabola rispetto alla parallela all'asse y passante pel vertice ci permette di prevedere che il grave si ritroverà, cadendo, nella sua posizione di partenza dopo un numero di secondi doppio di quello, cui corrisponde la massima altezza, vale a dire dopo $\frac{2v_0}{g}$ secondi, il che del resto si può confermare direttamente cercando i valori di t pei quali si annulla la (18), cioè le soluzioni dell'equazione di 2° grado

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

la quale si risolve immediatamente, in quanto si può scrivere

$$t\left(v_0 - \frac{1}{2} g t\right) = 0.$$

Infine per $t > \frac{2v_0}{g}$ la (18) diventa negativa, o, in altre parole, il grave discende al disotto della posizione iniziale e prosegue la sua caduta fino a quando un ostacolo lo arresti.

La grafica della velocità, espressa in questo caso dalla (19), è la retta che ha l'ordinata all'origine v_0 e il coefficiente angolare negativo $-g$. Codesta velocità è costantemente decrescente (in senso algebrico), e si mantiene positiva da $t = 0$ fino al punto in cui la retta interseca l'asse dei tempi, cioè fino al valore di t soddisfacente alla equazione

$$v_0 - gt = 0.$$

È questo il valore

$$t = \frac{v_0}{g};$$

il che è ben naturale, in quanto la velocità non può annullarsi se non nell'istante in cui il grave raggiunge il punto culminante del suo cammino. E fino a questo istante la velocità decresce anche in valore assoluto, cosicchè il moto si dice *uniformemente ritardato.*

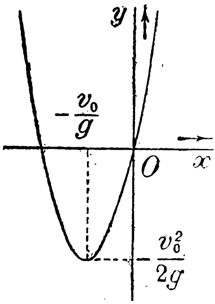
Per $t > \frac{v_0}{g}$ la velocità diventa negativa, ma, in valore assoluto, cresce con t indefinitamente. Perciò, in questa seconda fase, il moto è uniformemente accelerato.

36. Se si considera infine un grave lanciato verticalmente in basso, per esempio dall'alto di una torre, il suo moto avviene sempre in un senso, cosicchè si possono senz'altro prendere positivi gli spazi misurati verso il basso, come nel caso più semplice considerato al n. 33. Allora, se con $v_0 > 0$ si indica la velocità iniziale e al solito si adotta come origine dei tempi l'istante in cui si inizia il moto, come origine degli spazi il punto da cui il grave viene lanciato, si ha per lo spazio percorso l'espressione

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

e per la velocità la

$$v = v_0 + gt.$$



La grafica del moto è in tal caso l'arco, giacente nel primo angolo degli assi, della parabola, passante per l'origine, volgente la concavità verso l'alto e avente il vertice di coordinate

$$-\frac{v_0}{g}, \quad -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g},$$

cioè situato a sinistra dell'asse y e al disotto dell'asse x.

La velocità, rappresentata dalla semiretta uscente dal punto di coordinate 0 e v_0 col coefficiente angolare g e giacente nel primo angolo degli assi, è sempre crescente, anche in valore assoluto, cosicchè il moto è uniformemente accelerato.

Discussione dell'andamento di una funzione di 2° grado

37. Il modo in cui varia una funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{20}$$

quando alla variabile indipendente x si facciano successivamente assumere tutti i possibili valori da $-\infty$ a $+\infty$, si rileva immediatamente dalla posizione, che la rispettiva grafica parabolica ha rispetto agli assi; e per questa posizione della parabola sono possibili varî casi ben distinti, che si possono caratterizzare ciascuno con due disuguaglianze, cui debbono soddisfare i coefficienti a, b, c.

A tal fine si tenga presente che: A) la parabola, che rappresenta la (20) può segare in due punti distinti l'asse delle x o essergli tangente in un punto o non avere comune con esso alcun punto. Le ascisse dei punti comuni alla parabola e all'asse delle x (cioè i valori di x, per cui la funzione (20) si annulla) sono le eventuali radici dell'equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{21}$$

cosicchè si verifica il primo o il secondo o il terzo dei tre casi dianzi indicati, secondo che è

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{o} \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \text{o} \quad b^2 - 4ac < 0; \tag{22}$$

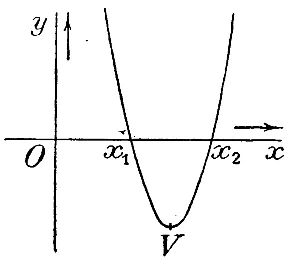
B) la parabola volge la concavità verso l'alto o verso il basso, secondo che è

$$a > 0 \quad \text{o} \quad a < 0. \tag{23}$$

Combinando ciascuna delle tre eventualità (22) con ciascuna delle (23), si hanno i seguenti sei casi:

I. $b^2 - 4ac > 0, \quad a > 0.$

La parabola sega l'asse delle x nei due punti, aventi per ascisse le due radici distinte x_1, x_2 della (21), e volge la concavità verso l'alto, talchè risulta divisa dall'asse delle x in tre archi, due infiniti e tutti al disopra dell'asse delle x, ed uno finito, compreso fra x_1 e x_2 e tutto al di sotto di codesto asse. Questo arco finito è diviso per metà dal vertice V della parabola, che, come sappiamo (n. 31), ha le coordinate



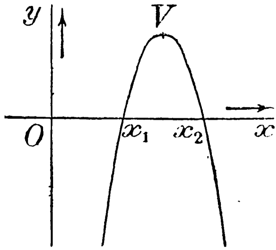
$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{24}$$

Perciò, supposto $x_1 < x_2$, la funzione (20) è sempre positiva per $x < x_1$ e per $x > x_2$, mentre è sempre negativa per $x_1 < x < x_2$; e per $x = x_0$ raggiunge il più piccolo dei suoi valori, cioè il suo *minimo*, che è dato dal valore (negativo)

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

I bis. $b^2 - 4ac > 0, \quad a < 0.$

È il caso simmetrico, rispetto all'asse delle x, del precedente. La parabola sega ancora l'asse delle x nei due punti distinti di ascisse x_1, x_2, ma volge la concavità verso il basso, cosicchè dei tre archi, in cui risulta così divisa dall'asse delle x, i due infiniti sono tutti al di sotto di codesto asse, e quello intermedio, cioè compreso fra x_1 e x_2, è tutto al di sopra. Perciò la funzione

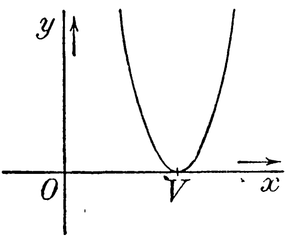


(20) è sempre negativa per $x < x_1$ e per $x > x_2$, sempre positiva per $x_1 < x < x_2$; e raggiunge per $x = x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ il suo *massimo*, che è dato dal valore (positivo)

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

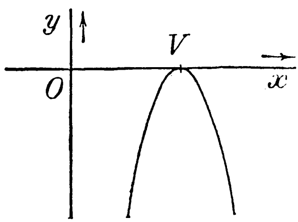
II. $b^2 - 4ac = 0, \quad a > 0.$

La parabola è tangente all'asse delle x nel suo vertice, cioè nel punto di ascissa $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (radice doppia della (21)) e volge la concavità in alto, cosicchè, all'infuori di questo punto di contatto, giace tutta al di sopra dell'asse delle x. Perciò la funzione (20) per $x = -\dfrac{b}{2a}$ si annulla, raggiungendo così il suo *minimo*, e per ogni altro valore della x è positiva.



II bis. $b^2 - 4ac = 0, \; a < 0.$

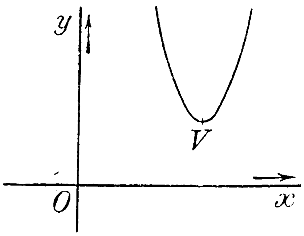
Caso simmetrico del precedente: parabola ancora tangente all'asse delle x nel punto di ascissa $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, ma volgente la concavità verso il basso e perciò tutta



al di sotto dell'asse delle x. La funzione (20) si annulla per $x = -\frac{b}{2a}$, raggiungendo così il suo *massimo*, ed è negativa per ogni altro valore della x.

III. $b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0$.

La parabola non ha punti comuni con l'asse delle x e volgendo la concavità verso l'alto, giace tutta al di sopra di codesto asse. La funzione (20) è positiva per qualsiasi valore della x, e raggiunge il suo *minimo* (positivo)

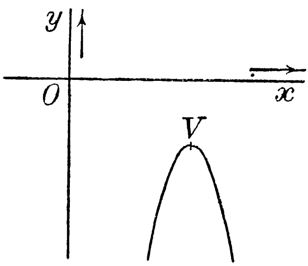


$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{per} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

III bis. $b^2 - 4ac < 0, \quad a < 0$.

Caso simmetrico del precedente: parabola tutta al di sotto dell'asse delle x. La funzione è negativa per qualsiasi valore della x e raggiunge il suo *massimo* (negativo)

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{per} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$



38. I risultati precedenti rendono immediata ed intuitiva la discussione delle *disuguaglianze di* 2° *grado*, che già abbiamo svolto per via puramente algebrica (IV, nn. 12, 13). Proponiamo all'alunno, come esercizio, di interpretare geometricamente i risultati, che su questo argomento abbiamo allora ottenuto; e ci limitiamo a considerare un esempio.

Si voglia riconoscere per quali valori della x abbia senso il radicale quadratico

$$\sqrt{1 + 2x - x^2}.$$

Dobbiamo discutere la limitazione

$$1 + 2x - x^2 \geq 0,$$

cioè riconoscere se vi siano valori della x, per i quali la funzione di 2° grado

$$y = -x^2 + 2x + 1$$

risulti positiva o, al minimo, nulla. Poichè si ha $b^2 - 4ac = 8$, $a = -1$. la parabola, che dà l'immagine di questa funzione, sega l'asse delle x in due punti e volge la concavità verso il basso (caso I bis del n. prec.). Perciò codesta funzione è positiva per tutti gli x compresi fra le due radici dell'equazione

$$x^2 - 2x - 1 = 0,$$

e, naturalmente, si annulla agli estremi di tale intervallo. Siccome le due radici sono $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, il radicale proposto ha senso per $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

Discussione dei problemi di 2° grado col sussidio della parabola

39. L'immagine geometrica della parabola torna particolarmente utile nella discussione dei problemi di 2° grado, dipendenti da un parametro h (IV, n. 25).

Nella corrispondente equazione

$$(21) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

i coefficienti a, b, c dipendono dal parametro h, o, come oramai possiamo dire, sono certe determinate funzioni di h: e, quando già si siano esauriti gli eventuali casi, in cui risulti $a = 0$ e si sia riconosciuto per quali valori del parametro h sia soddisfatta la condizione di possibilità dell'equazione (21), cioè la $b^2 - 4ac \geq 0$, resta da tener conto delle eventuali condizioni qualitative, che il problema impone alle radici della (21) (IV, n. 19). Queste condizioni sono in generale (soprattutto nei problemi geometrici) dell'uno o dell'altro dei due tipi seguenti: o è prefissato un certo valore x', e soddisfa effettivamente al problema proposto ogni radice della corrispondente equazione (21), che risulti minore (o maggiore) di x'; oppure sono prefissati due valori diversi x' e x'', e soddisfa al problema ogni radice della (21), che risulti compresa fra x' e x''. Nell'uno e nell'altro caso si è condotti a risolvere la seguente questione: *Decidere quale posto occupi un valore prefissato* (x' o x'') *rispetto alle radici* *della* (21), *supposta possibile*; cioè, più precisamente, se la (21) ha due radici distinte x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, riconoscere se il valore prefissato è minore di x_1 o maggiore di x_2 o compreso fra x_1 e x_2; se invece la (21) ha una radice doppia x_0, riconoscere se il valore prefissato è minore o maggiore di x_0.

In questo secondo caso ($b^2 - 4ac = 0$), la radice doppia della (21) è data senz'altro da $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e non vi è, in genere, difficoltà a riconoscere direttamente se il valore prefissato sia minore o maggiore (od, anche, uguale) di x_0.

Invece nel primo caso ($b^2 - 4ac > 0$), torna comodo possedere qualche criterio che permetta di risolvere la questione fondamentale dianzi enunciata, anche prima di calcolare effettivamente le due radici x_1, x_2 della (21).

Ora si perviene agevolmente a criterî siffatti, ricorrendo alla parabola, immagine geometrica della funzione di 2° grado

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{22}$$

che, per intenderci, diremo « associata » all'equazione (21), e, per semplicità di scrittura, denoteremo con $f(x)$.

Codesta parabola sega l'asse delle x nei due punti di ascisse x_1, x_2 (casi I e I bis del n. prec.); e dei tre archi, in cui essa è divisa da questi due punti, i due infiniti, corrispondenti ai valori dell'ascissa minori di x_1 o maggiori di x_2, giacciono da una stessa parte rispetto all'asse delle x (sopra o sotto, secondo che è $a > 0$ o $a < 0$), quello finito, corrispondente ai valori di x compresi fra x_1 e x_2, giace dalla parte opposta (sotto o sopra, secondo che è $a > 0$ o $a < 0$). Perciò, se è prefissato per la x un qualsiasi valore x' e questo valore cade fuori dell'intervallo da x_1 a x_2, cioè se è $x' < x_1$ o $x' > x_2$, il corrispondente valore $f(x')$, ordinata di un punto di uno degli archi infiniti, è positivo o negativo, secondo che è $a > 0$ o $a < 0$, cosicchè in ogni caso risulta $af(x') > 0$. Se invece è $x_1 < x' < x_2$, il valore $f(x')$, ordinata di un punto dell'arco finito, ha, tanto per $a > 0$ quanto per $a < 0$, segno contrario ad a, onde risulta $af(x') < 0$.

Di qui, viceversa, discende, che se si verifica che per un valore prefissato x' risulta $af(x') > 0$, deve essere necessariamente $x < x_1$ oppure $x > x_2$; e questi due casi si distinguono l'uno dall'altro, ricordando che l'ascissa $x_0 = -\frac{b}{2a}$ del vertice, come semisomma delle due radici x_1, x_2, è sempre compresa fra di esse, cosicchè sarà $x' < x_1$ o $x' > x_2$, secondo che è $x' < x_0$ o $x' > x_0$. Se invece risulta $af(x') < 0$, si ha necessariamente $x_1 < x' < x_2$. Se poi, infine, è $af(x') = 0$, il valore x' non può che coincidere con x_1 o con x_2, e si avrà il primo o il secondo caso, secondo che è $x' < x_0$ o $x' > x_0$.

Concludendo, abbiamo i seguenti criteri: *Se, nell'ipotesi che il discriminante della equazione di 2° grado*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{21}$$

sia positivo, si indicano con x_1, x_2 le due radici, supponendo $x_1 < x_2$, e si prefissa un qualsiasi valore x':

da	$af(x') > 0$ *e* $x' < x_0$	*consegue*	$x' < x_1$,
»	$af(x') = 0$ *e* $x' < x_0$	»	$x' = x_1$,
»	$af(x') < 0$	»	$x_1 < x' < x_2$,
»	$af(x') = 0$ *e* $x' > x_0$	»	$x' = x_2$,
»	$af(x') > 0$ *e* $x' > x_0$	»	$x' > x_2$.

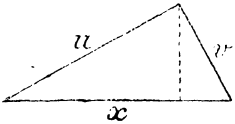
Si noti che l'ipotesi $af(x') < 0$, corrispondente al terzo caso, già da sola implica che deve essere $b^2 - 4ac > 0$, perchè dal fatto che $f(x')$ è di segno contrario ad a risulta che il punto della parabola, che ha l'ascissa x' e l'ordinata $f(x')$, è al disotto dell'asse delle x se la parabola volge la concavità verso l'alto, è al disopra di codesto asse se la parabola volge la concavità verso il basso; e in entrambi i casi la parabola, avendo punti da entrambe le parti dell'asse delle x, lo sega in due punti diversi (le cui ascisse danno due radici distinte per la equazione di 2° grado).

Sul modo migliore di utilizzare i criterî precedenti nei singoli problemi non si possono dare norme generali. D'altra parte può anche accadere che, per esaurire la discussione di tutte le possibili eventualità, tali criterî da soli non bastino, ma vadano completati con opportune considerazioni sussidiarie. In ogni caso la via da tenere è suggerita dalla immagine parabolica della funzione di 2° grado associata all'equazione del problema; e in tutto ciò, più di ogni regola astratta, valgono quella pratica e quell'intuito, che si acquistano soltanto con un lungo e paziente esercizio.

Nei prossimi numeri discuteremo, ad illustrazione di quanto precede, qualche problema geometrico.

40. *Di un triangolo rettangolo sono date la differenza $h \geq 0$ delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e la somma $s > 0$ della ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa. Determinare le lunghezze dei lati.*

Prendiamo come incognita principale x la lunghezza dell'ipotenusa, come incognite ausiliarie u e v quelle dei cateti.



Poichè si tratta di lunghezze assolute di segmenti, potremo accettare per queste tre incognite soltanto valori positivi. Ma per completare il sistema delle condizioni qualitative, cui deve soddisfare la x, occorre premettere alcune considerazioni, che ci serviranno poi anche per intavolare il problema.

Da evidenti similitudini di triangoli si deduce che la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa è

$$\frac{uv}{x},$$

mentre quelle delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono

$$\frac{u^2}{x}, \quad \frac{v^2}{x}.$$

Si ha quindi, per dato (e supposto $u > v$),

$$x + \frac{uv}{x} = s, \quad \frac{u^2 - v^2}{x} = h. \tag{25}$$

Dalla seconda di queste relazioni risulta

$$u^2 - v^2 = hx,$$

e, poichè per il teorema di Pitagora si ha

$$u^2 + v^2 = x^2,$$

si conclude (I, n. 56)

$$u^2 = \frac{1}{2}x(x+h), \quad v^2 = \frac{1}{2}x(x-h). \tag{26}$$

A questo punto, tenendo conto della seconda delle (26) e della prima delle (25), si riconosce che l'incognita principale x ove si vogliano contemplare anche gli eventuali casi estremi $x = h$ o $x = s$, va assoggettata alle condizioni

$$h \leq x \leq s, \tag{27}$$

da cui, in particolare, discende che i dati debbono soddisfare alla condizione $h \leq s$.

Ciò premesso, possiamo porre in equazione il problema. Moltiplicando membro a membro le (26) otteniamo

$$u^2v^2 = \frac{x^2(x^2-h^2)}{4}. \tag{28}$$

Ma dalla prima delle (25) risulta

$$uv = x(s-x),$$

cosicchè, sostituendo nella (28), si perviene all'equazione

$$x^2(s-x)^2 = \frac{x^2(x^2-h^2)}{4},$$

nella quale, in quanto va supposto $x > 0$, si possono dividere ambo i membri per x^2; e l'equazione, che così si ottiene, si può scrivere

$$3x^2 - 8sx + h^2 + 4s^2 = 0. \tag{29}$$

È questa l'equazione del problema. Il valore di ciascuna delle due lunghezze date s ed h dipende dall'unità di misura adottata. Possiamo quindi supporre fissata una di esse, per es. s, e, per considerare tutti i casi possibili, assumere come parametro l'altra, cioè h. Ora il discriminante della (29) è dato, a meno del fattore 4, da $4s^2 - 3h^2$, e, quindi, in forza delle ipotesi $h \leq s$, $s > 0$, è sempre positivo. Perciò la (29), per qualsiasi valore di $h \geq 0$, ammette due radici distinte, le quali, d'altra parte, come risulta dai segni dei coefficienti, sono entrambe positive (IV, n. 8).

Resta da tener conto delle condizioni (27), onde si è condotti ad applicare i criteri del n. prec. Considerando la funzione di 2° grado associata all'equazione (29)

$$y = 3x^2 - 8sx + h^2 + 4s^2,$$

e indicando con $f(x)$ questa funzione (con a il suo primo coefficiente) si trova

$$af(h) = 12(h-s)^2, \quad af(s) = 3(h^2 - s^2).$$

Distinguiamo allora due casi, secondo che è $h < s$ o $h = s$.

Nel primo caso si ha $af(h) > 0$, $af(s) < 0$, cosicchè (n. prec.) s risulta compreso fra le due radici, mentre h è esterno al loro intervallo e precisamente, per l'ipotesi $h < s$, minore della radice minore. Perciò la radice maggiore va rifiutata, come maggiore di s, mentre quella minore, che è data da

$$x_1 = \frac{1}{3}(4s - \sqrt{4s^2 - 3h^2}),$$

fornisce l'unica soluzione del problema. La x_1 è la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo cercato, e quelle dei due cateti sono definite, in base alle (26), da

$$u^2 = \frac{1}{18}(4s - \sqrt{4s^2 - 3h^2})(4s + 3h - \sqrt{4s^2 - 3h^2}),$$

$$v^2 = \frac{1}{18}(4s - \sqrt{4s^2 - 3h^2})(4s - 3h - \sqrt{4s^2 - 3h^2}).$$

Si può rilevare il caso particolare, in cui sia $h = 0$, cioè siano uguali le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa. Si tratta evidentemente di un triangolo rettangolo isoscele, ed infatti si trova

$$x_1 = \frac{2}{3}s, \quad u = v = \frac{\sqrt{2}}{3}s.$$

Rimane ancora da esaminare l'ipotesi $h = s$. Avendosi in tal caso $af(s) = 0$, s è una delle radici dell'equazione (29), la quale si riduce alla

$$3x^2 - 8sx + 5s^2 = 0;$$

e poichè la semisomma delle due radici è $\frac{4}{3}s$, si tratta della radice minore, talchè l'altra, come maggiore di s, va rifiutata. Ma in questo caso la radice minore s conduce ad un risultato illusorio, giacchè dalle (26) risulta

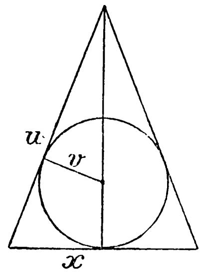
$$u = s, \quad v = 0,$$

cioè uno dei due cateti è uguale all'ipotenusa e l'altro è nullo.

Riassumendo, il problema ammette una soluzione (ed una sola) per $0 \leq h < s$, una soluzione illusoria per $h = s$, $s > 0$.

41. *Di un cono rotondo retto si conosce la somma s delle lunghezze dell'apotema e del raggio di base; e di più si sa che l'area della superficie totale del cono sta in un dato rapporto $h > 0$ a quella della sfera iscritta. Calcolare le lunghezze del raggio di base e dell'apotema del cono.*

Assumiamo come incognita principale la lunghezza x di codesto raggio di base e come incognite ausiliarie le lunghezze u e v dell'apotema del cono e del raggio della sfera iscritta, notando che per x, u, v non si possono accettare se non valori positivi, e che, inoltre, in quanto x e u sono rispettivamente cateto ed ipotenusa di un triangolo rettangolo, deve essere $x < u$. D'altra parte si ha per dato



(30) $$u + x = s \quad \text{e quindi} \quad u = s - x,$$

cosicchè deve essere $x < s - x$, ossia

(31) $$x < \frac{s}{2}.$$

E possiamo far vedere che il problema non impone alla x nessun'altra condizione qualitativa oltre la $x > 0$ e la (31), o, come si suol dire, queste due disuguaglianze costituiscono per la incognita principale il sistema completo delle condizioni qualitative imposte dal problema. Bisogna a tal fine assicurarsi che ogni valore di x, il quale, oltre a soddisfare, insieme a due valori per u e v, alle condizioni quantitative imposte dal problema, renda verificate codeste due disuguaglianze, dà un'effettiva soluzione del problema. Ed invero se è $0 < x < \frac{s}{2}$, risulta dalla (30), che il corrispondente valore di u è positivo e maggiore di x, cosicchè esiste un triangolo rettangolo avente u come ipotenusa e x come uno dei cateti, e quindi anche un cono rotondo retto, avente x come raggio di base e u come apotema.

Ciò premesso, per porre il problema in equazione, cominciamo col rilevare dalla figura, che, in forza di un'evidente similitudine di triangoli rettangoli,

$$\frac{v}{u - x} = \frac{x}{\sqrt{u^2 - x^2}} \quad \text{ossia} \quad v = \frac{x(u - x)}{\sqrt{u^2 - x^2}} = x\sqrt{\frac{u - x}{u + x}}$$

e quindi, tenendo conto della (30),

(32) $$v = x\sqrt{\frac{u - x}{s}}.$$

Ma le aree della superficie totale del cono e di quella della sfera sono date rispettivamente da $\pi x(u + x) = \pi s x$ e $4\pi v^2$, cosicchè la condizione quantitativa imposta dal problema si può scrivere

$$\frac{sx}{4v^2} = h,$$

ossia, tenendo conto della (32) e della $u - x = s - 2x$,

$$\frac{s^2}{4x(s-2x)} = h.$$

È questa l'equazione del problema; e, poichè per la x vanno esclusi i valori $x = 0$ e $x = \frac{s}{2}$, il primo perchè privo di senso in relazione al problema e il secondo in forza della (31), possiamo sostituire ad essa l'equazione intera, che se ne deduce liberandola dai denominatori, cioè la

$$8hx^2 - 4shx + s^2 = 0. \tag{33}$$

Dei due dati letterali s ed h, che qui compaiono, il primo è una lunghezza, cosicchè il suo valore dipende dall'unità di misura lineare adottata, e non ha influenza sulla natura del problema. Invece il rapporto h non dipende dalle unità prescelte, e quando esso varia, varia effettivamente il problema. Possiamo quindi assumerlo come parametro e riconoscere quali limitazioni esso debba soddisfare, affinchè il problema ammetta soluzioni.

Poichè il discriminante (ridotto) della (33) è dato da $4s^2h(h-2)$, essa è impossibile per $h < 2$, mentre per $h = 2$ ammette due radici coincidenti e per $h > 2$ due radici distinte.

Discutiamo queste radici. Per $h = 2$ l'equazione si riduce a

$$16x^2 - 8sx + s^2 = 0$$

e la sua radice (doppia) $x_0 = \frac{s}{4}$ non solo è positiva, ma soddisfa anche la disuguaglianza (31), cosicchè dà effettivamente una soluzione del problema. Il corrispondente valore della u è dato in forza della (30) da

$$u_0 = \frac{3s}{4}.$$

Se poi è $h > 2$, risulta dai segni della equazione (33) che le sue due radici x_1, x_2 sono entrambe positive (IV, n. 8); e, per verificare se almeno una di esse renda soddisfatta la condizione (31), basta considerare la funzione di 2° grado associata alla equazione (33), cioè la

$$y = 8hx^2 - 4shx + s^2$$

e applicare i criteri del n. 39. Indicando al solito con $f(x)$ codesta funzione (e con a il suo primo coefficiente) si trova

$$af\left(\frac{s}{2}\right) = 8hs^2;$$

e poichè questo valore risulta positivo, mentre $\frac{s}{2}$ è maggiore della semisomma $x_0 = \frac{s}{4}$ di x_1 e x_2, si conclude che entrambe queste radici sono minori di $\frac{s}{2}$ e perciò convengono al problema. Applicando la formula risolutiva e tenendo conto della (30), si trova che le due corrispondenti soluzioni sono date da

$$(34)\qquad \begin{cases} x_1 = \frac{s}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{h}}\right), & u_1 = \frac{s}{4}\left(3 + \sqrt{1 - \frac{2}{h}}\right); \\ x_2 = \frac{s}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{h}}\right), & u_2 = \frac{s}{4}\left(3 - \sqrt{1 - \frac{2}{h}}\right). \end{cases}$$

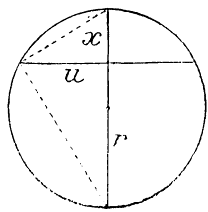
Riassumendo: per $h < 2$ il problema è impossibile; per $h = 2$ ammette la soluzione (doppia)

$$x_0 = \frac{s}{4}, \quad u_0 = \frac{3s}{4};$$

per $h > 2$ ammette le due soluzioni (34).

42. *Segare una sfera di dato raggio r con un piano tale, che il volume di uno dei due segmenti sferici, che così si ottengono, stia in un dato rapporto $h > 0$ al volume del cilindro circolare retto, che ha per base il cerchio sezione e per altezza quella dell'altro segmento sferico.*

Assumiamo come incognita principale x l'altezza del segmento sferico e come incognita ausiliaria u il raggio del cerchio sezione (base del segmento). Affinchè un valore x convenga al problema occorre e basta che sia



$$(35)\qquad 0 < x < 2r.$$

La condizione quantitativa imposta dal problema si traduce nell'equazione

$$\frac{\frac{1}{6}\pi x(3u^2 + x^2)}{\pi u^2(2r - x)} = h.$$

Ma per una nota proprietà dei triangoli rettangoli si ha

$$u^2 = x(2r - x),$$

cosicchè l'equazione precedente si può scrivere

$$\frac{x(3r - x)}{3(2r - x)^2} = h,$$

od anche, in quanto va supposto $x < 2r$, in forma intera (e normale)

$$(36)\qquad (1 + 3h)x^2 - 3(1 + 4h)rx + 12r^2h = 0.$$

Quest'equazione, per l'ipotesi $h > 0$, è sempre di 2º grado; e, poichè il discriminante è dato da $3(3+8h)r^2$, ammette in ogni caso due radici distinte x_1, x_2.

Dai segni dei coefficienti della (36) risulta (IV, n. 8) che queste radici sono entrambe positive; e per riconoscere se esse convengano al problema, cioè rendano soddisfatta l'ulteriore condizione (35), basta ricorrere alla funzione di 2° grado associata alla (36)

$$y=(1+3h)x^2-3(1+4h)rx+12r^2h,$$

che al solito indicheremo con $f(x)$. Poichè risulta

$$af(2r)=-2(1+3h)r^2,$$

e questo valore è negativo, le due radici sono l'una minore e l'altra maggiore di $2r$ (n. 39); quella maggiore, in forza della seconda condizione (35), va rifiutata, come estranea al problema, mentre quella minore, che è data da

$$x_1=r\frac{3(1+4h)-\sqrt{3(3+8h)}}{2(1+3h)}, \tag{37}$$

lo soddisfa.

Concludiamo, dunque, che per qualsiasi valore di $h>0$ il problema ammette *una sola soluzione*, e l'altezza del segmento sferico cercato ha il valore (37).

Come complemento alla precedente discussione, possiamo chiederci se sia questo il minore o il maggiore dei due segmenti sferici, in cui risulta divisa la sfera data, e se possa anche accadere, che per qualche valore di h risulti $x_1=r$, talchè il problema sia soddisfatto dall'emisfero.

Per rispondere a queste domande basta riconoscere quale posto occupi il valore r rispetto alle due radici x_1, x_2 della (36). Poichè si ha $af(r)=(1+3h)(3h-2)r^2$, risulta

$$af(r)<0 \quad \text{o} \quad af(r)=0 \quad \text{o} \quad af(r)>0,$$

secondo che è

$$h<\frac{2}{3} \quad \text{o} \quad h=\frac{2}{3} \quad \text{o} \quad h>\frac{2}{3}.$$

Nel primo caso r è compreso fra x_1 ed x_2, onde è certamente $x_1<r$, cioè il segmento che soddisfa il problema è quello minore. Invece, nel secondo caso, r è radice dell'equazione (36) e, in quanto $2r$ è, come si è visto dianzi, sempre compreso fra le due radici, si ha necessariamente $x_1=r$, cosicchè il problema è soddisfatto dall'emisfero (risultato del tutto ovvio, se si ricorda il teorema di Archimede, per cui il volume dell'emisfero è uguale ai $\frac{2}{3}$ di quello del cilindro che ha la stessa base e la stessa altezza). Infine, nel terzo caso, r è esterno all'intervallo compreso fra le due radici e, poichè $2r$ resta sempre interno, deve essere $x_1>r$, cioè il segmento sferico soddisfacente al problema è quello maggiore.

Capitolo VI

Radici d'indice qualsiasi e calcolo dei radicali

Radici d'indice qualsiasi dei numeri assoluti

1. Per la risoluzione algebrica dei problemi di 2° grado, geometricamente risolubili con la riga e il compasso, bastano, oltre le operazioni razionali (addizione algebrica, moltiplicazione e divisione), le estrazioni di radice quadrata. Ma per altri problemi, ad es. per la ricerca dello spigolo del cubo di dato volume, si è condotti ad estendere il concetto di radice quadrata o *di indice* 2 al caso dell'indice 3 e, più in generale, di indice (intero positivo) qualsiasi.

Questa estensione, già praticamente nota fin dalle Scuole medie inferiori, è del tutto ovvia. Preso un numero reale a e fissato un intero positivo n, si consideri l'equazione

$$x^n = a. \tag{1}$$

Se esiste un numero x soddisfacente a questa equazione, cioè tale che la sua potenza n^{ma} sia uguale ad a, questo numero si dice *radice* n^{ma} o *di indice* n del numero a; e si dice *estrazione di radice* n^{ma} l'operazione, che, quando sia possibile, conduce a determinare un tale numero x.

In particolare la radice di indice 3 si dice *cubica*, in quanto l'estrazione di radice di indice 3 è l'inversa dell'elevamento al cubo.

Dobbiamo dunque studiare l'equazione (1) per ogni possibile valore dell'intero positivo n; e, come già si è fatto per $n = 2$ (II, nn. 13–15), la considereremo qui dapprima nel campo dei numeri assoluti.

Vale anche per n qualsiasi lo stesso risultato, che per $n=2$ dimostrammo al n. 14 del Cap. II, cioè qualunque sia il numero assoluto a, esiste un numero assoluto, ed uno solo, la cui n^{ma} potenza sia uguale ad a, o, in altre parole, *ogni numero assoluto ammette, per qualsiasi valore dell'indice n, una radice n^{ma}, ed una sola.* Questa radice n^{ma} si denoterà col simbolo $\sqrt[n]{a}$, continuando, come nei Cap. prec., a tralasciare l'indice, quando esso sia uguale a 2, cioè si tratti di radici quadrate.

Ricordiamo che della esistenza della radice quadrata $\sqrt{a}$ di un qualsiasi numero assoluto a potemmo assicurarci subito per via geometrica in quanto $\sqrt{a}$ è precisamente la lunghezza del segmento medio proporzionale (effettivamente costruibile con la riga e il compasso) tra il segmento unità e quello di lunghezza a (II, n. 13). Ma per ogni altro indice $n>2$, l'esistenza della radice non si può più stabilire geometricamente.

Tutto al più, si può convincersi in modo intuitivo della esistenza della radice cubica, osservando che, se si fa variare con continuità la lunghezza dello spigolo di un cubo da 0 a $+\infty$, anche il volume del cubo deve variare con continuità e, quindi, assumere mano mano tutti i possibili valori da 0 a $+\infty$; per ognuno di questi valori la lunghezza dello spigolo del cubo corrispondente dà appunto la radice cubica.

Si è dunque costretti a procedere per via aritmetica; ma basta ripensare il ragionamento, che allo stesso fine si è fatto nel caso della radice quadrata (II, n. 14) per comprendere come esso si possa estendere al caso di qualsiasi altro indice.

2. Per chi non si accontenti di questa induzione, sviluppiamo qui un tale ragionamento.

Cominciamo con l'osservare che la radice n^{ma} del numero assoluto a risulta razionale (cioè intera o fratta) soltanto quando a sia la potenza n^{ma} di un numero intero (o, come si suol dire, una *potenza perfetta*), oppure una frazione (irreducibile) avente per termini due potenze perfette.

Esclusi questi casi del tutto particolari, la radice n^{ma} di a non può essere che irrazionale, cosicchè, per prendere una via che valga in tutti i casi possibili, conviene cercare di definire codesta radice per mezzo di una sezione. Precisamente, assegnamo ad una classe $\boldsymbol{H}$ tutti i numeri razionali assoluti, la cui potenza n^{ma} è minore di a, ad una classe $\boldsymbol{K}$ tutti quelli, la cui potenza n^{ma} è maggiore di a. Queste due classi definiscono, nel campo dei numeri razionali assoluti, una sezione (II, n. 3). Infatti:

1) *Dalle due classi può restare escluso, al più, un solo numero razionale,* cioè precisamente, quando pure esista, il numero razionale, la cui potenza n^{ma} sia proprio uguale ad a; mentre ogni altro numero razionale, avendo una potenza n^{ma} minore o maggiore di a, appartiene o ad $\boldsymbol{H}$ o a $\boldsymbol{K}$.

2) *La classe $\boldsymbol{H}$ contiene, con ogni suo numero h, tutti i numeri minori,* perchè essendo $h^n < a$, anche ogni numero minore di h ha una potenza n^{ma} minore di a (I, n. 5F; II, n. 12); e, similmente *la $\boldsymbol{K}$ contiene, con ogni suo numero k, ogni numero maggiore.*

3) *La classe $\boldsymbol{H}$ non contiene massimo.* Per semplicità dimostriamolo per $n = 3$. Si tratta di far vedere che se h è un numero della $\boldsymbol{H}$, cioè se $h^3 < a$, si può sempre trovare una frazione $\frac{1}{p}$ abbastanza piccola (cioè un intero p abbastanza grande), perchè si abbia ancora

$$\left(h + \frac{1}{p}\right)^3 < a, \tag{2}$$

cioè (I, n. 13)

$$h^3 + \frac{3h^2}{p} + \frac{3h}{p^2} + \frac{1}{p^3} < a.$$

Per trovare questo intero p, consideriamo la differenza $d = a - h^3$, talchè sia

$$a = h^3 + d, \tag{3}$$

e scegliamo p abbastanza grande, perchè risulti simultaneamente

$$\frac{3h^2}{p} < \frac{1}{3}\,d, \quad \frac{3h}{p^2} < \frac{1}{3}\,d, \quad \frac{1}{p^3} < \frac{1}{3}\,d.$$

Sarà allora (I, n. 51)

$$h^3 + \frac{3h^2}{p} + \frac{3h}{p^2} + \frac{1}{p^3} < h^3 + \frac{1}{3}\,d + \frac{1}{3}\,d + \frac{1}{3}\,d = h^3 + d;$$

cioè, in forza della (3), sussisterà appunto la (2).

Similmente si dimostra che *la classe $\boldsymbol{K}$ non contiene minimo.*

Stabilito così che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ costituiscono una sezione nel campo dei numeri razionali, avremo che questa sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$ definisce un certo numero (reale assoluto) b; e non è difficile riconoscere che questo b è precisamente la radice, da noi voluta, di a.

Anche qui, per semplicità, ragioniamo nel caso $n = 3$. Dobbiamo far vedere che

$$b^3 = a;$$

cioè, considerata la sezione $(H^3 \mid K^3)$, che definisce b^3 (II, n. 7), bisogna dimostrare che anche a è maggiore di tutti i numeri di H^3 e minore di tutti quelli di K^3 (II, n. 4). Ora, come sappiamo, la classe H^3 è costituita da tutti (e soli) i prodotti $h_1 h_2 h_3$ di tre numeri h_1, h_2, h_3 (uguali o no), presi comunque in H; e, poichè, per la definizione della H, si ha

$$h_1{}^3 < a, \quad h_2{}^3 < a, \quad h_3{}^3 < a,$$

sarà anche (I, n. 5*D;* II, n. 12)

$$h_1{}^3\, h_2{}^3\, h_3{}^3 < a^3,$$

e quindi (I, n. 5*F;* II, n. 12)

$$h_1 h_2 h_3 < a.$$

Si ha dunque veramente che a è maggiore di ogni numero di H^3; e, poichè similmente si riconosce che a è minore di ogni numero di K^3, si conclude che a è uguale a b^3.

Il ragionamento precedente vale in ogni caso, onde resta stabilito che, per qualsiasi valore dell'indice n, ogni numero reale assoluto ammette una radice n^{ma} assoluta.

E non ve ne può essere che una sola, giacchè, se è $b^n = a$, ogni altro numero assoluto diverso da b ha una potenza n^{ma}, che è necessariamente diversa da a (I, n. 5*F*; II, n. 12).

Radici d'indice qualsiasi dei numeri relativi

3. Torniamo nel campo dei numeri relativi, e consideriamo dapprima un numero a positivo. Qualunque sia l'indice n, il numero a ammette certamente una radice n^{ma} positiva, cioè precisamente quella, che ha per valore assoluto la radice n^{ma} assoluta del valore assoluto di a (nn. 1, 2); ed è a questa radice n^{ma} *positiva* od *aritmetica,* che, in questo caso di un numero a positivo, riserveremo sempre il simbolo $\sqrt[n]{a}$, come già si è convenuto nel caso di $n = 2$ (II, n. 16).

Ma se n è pari, ad es. uguale a 4, insieme con la radice quarta positiva $\sqrt[4]{a}$, anche il numero opposto $-\sqrt[4]{a}$ ammette come quarta potenza il numero a, perchè

$$\left(-\sqrt[4]{a}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a.$$

Questo numero $-\sqrt[4]{a}$ si dice radice quarta *negativa* di a. Ed è manifesto che, oltre $\sqrt[4]{a}$ e $-\sqrt[4]{a}$, il numero a non ammette altre radici quarte, perchè ogni altro numero relativo, diverso da codesti due, ha una quarta potenza diversa da a (I, n. 5F; II, n. 12). E tutto ciò si può ripetere per qualsiasi indice pari.

Se invece l'indice n è *dispari*, ad es. uguale a 3, un numero positivo a, oltre la radice positiva $\sqrt[3]{a}$, non ammette altra radice cubica, perchè la terza potenza di $-\sqrt[3]{a}$ è uguale a $-a$ e non ad a, e, d'altro canto, ogni numero diverso da $\sqrt[3]{a}$ e $-\sqrt[3]{a}$ ha una terza potenza, il cui valore assoluto è diverso da a.

4. Passiamo al caso di un numero a *negativo*, e anzitutto supponiamo che l'indice n sia *dispari*. Il numero a ammette certamente una radice n^{ma} negativa, cioè il numero negativo $-\sqrt[n]{|a|}$, che ha per valore assoluto la radice n^{ma} (assoluta) del valore assoluto $|a|$ di a, perchè, essendo n dispari ed a negativo, si ha

$$\left(-\sqrt[n]{|a|}\right)^n = -\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n = -|a| = a.$$

Nè a può ammettere altre radici n^{me}, perchè ogni numero diverso da $-\sqrt[n]{|a|}$ ha una potenza n^{ma} diversa da a. Perciò in questo caso ($a < 0$ ed n dispari) abbiamo

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}.$$

Resta infine da considerare il caso, in cui a sia *negativo* ed n *pari*. In tal caso il numero a non può ammettere, nel campo dei numeri reali relativi, alcuna radice n^{ma}, perchè ogni numero relativo, elevato all'esponente pari n, dà un numero positivo.

Per dare un senso anche alle radici di indice pari dei numeri negativi, bisogna, come già si è accennato nel caso di $n=2$ (II, n. 16), estendere il campo dei numeri, aggiungendo ai numeri reali i cosiddetti numeri *immaginari* o *complessi;* e nel campo di numeri, così ampliato, si dimostra che, qualunque sia l'indice n (pari o dispari), ogni numero (reale o anche complesso) ammette n radici n^{me} diverse.

5. Riassumendo abbiamo che, nel campo dei numeri reali relativi: *Per* n pari, *ogni numero positivo ammette due radici* n^{me}, *fra loro opposte, mentre ogni numero negativo non ne ammette alcuna. Per* n dispari, *ogni numero ammette una radice* n^{ma} *ed una sola, la quale è positiva o negativa, secondo che tale è il numero considerato.*

Tenendo conto della convenzione, fatta al n. 3, di denotare con $\sqrt[n]{a}$, se a è positivo ed n pari, la radice n^{ma} *positiva* di a, possiamo anche dire che il simbolo $\sqrt[n]{a}$, quando a è *positivo*, rappresenta sempre un numero *positivo*, mentre, quando a è negativo, rappresenta un numero *negativo* se n è *dispari* e *non ha alcun senso* se n è *pari.*

Calcolo dei radicali

6. Come già per i radicali quadratici (III, nn. 4, 5) anche per quelli di indice qualsiasi discendono dalla loro definizione e dalle proprietà delle potenze (I, n. 4, II, n. 12) alcune regole di calcolo, che stabiliremo nei prossimi nn. Ma affinchè le identità, che esprimono tali regole, valgano *senza eccezione* è necessario supporre che i radicandi siano tutti *positivi* e considerarne, in ogni caso, le radici *positive* od *aritmetiche.*

Quando nei calcoli si sia condotti a considerare anche radicali (d'indice dispari) a radicando negativo, è facile riconoscere, caso per caso, se e fino qual punto codeste regole si mantengano applicabili.

7. Per definizione sussiste la identità

$$(4) \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;$$

e dalla definizione stessa discende anche quest'altra, che, al pari della (4), va tenuta sempre presente,

$$(5) \qquad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

La (4) sussiste anche per $a < 0$, purchè il radicale abbia senso, cioè n sia dispari. Invece la (5), quando a sia negativo, può risultare *falsa*, pur avendo senso il radicale, che compare a primo membro. Precisamente, ciò accade quando a è negativo ed n è pari, giacchè in tal caso, dovendo $\sqrt[n]{a^n}$ denotare, come sempre, la radice positiva del suo radicando (positivo), si ha, in luogo della (5), la

$$\sqrt[n]{a^n} = -a.$$

8. A base del calcolo dei radicali di indice qualsiasi stanno le due seguenti identità, che estendono quelle stabilite per i radicali quadratici al n. 4 del Cap. III, e che l'alunno dedurrà in modo perfettamente analogo dalle corrispondenti proprietà delle potenze:

$$(6) \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b};$$

$$(7) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

e la prima sussiste anche nel caso di un prodotto di quanti si vogliano fattori.

Esse danno luogo ai due seguenti enunciati:

A) La radice n^{ma} di un prodotto è uguale al prodotto delle radici n^{me} dei fattori.

B) La radice n^{ma} di un quoziente è uguale al quoziente delle radici n^{me} del dividendo e del divisore.

Interpretate in senso inverso, le due identità (6) e (7) permettono di *ridurre ad un unico radicale sia il prodotto* *di più radicali dello stesso indice, sia il quoziente di due radicali dello stesso indice.*

9. Dalla identità (6) discendono immediatamente alcune conseguenze notevoli.

A) Nella (6) sostituiamo a^n ad a ed applichiamo la (5); otteniamo la identità

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b},$$

la quale ci dice che se fra i fattori del radicando vi è una potenza di esponente uguale all' indice della radice, si può portarne fuori del segno di radice la base (riducendone ad 1 l'esponente); e viceversa, un fattore esterno si può portare sotto il segno di radice, purchè si elevi all'esponente uguale all' indice di radice.

B) Considerando $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ come prodotto dei suoi fattori e riducendo questi m radicali ad uno solo, troviamo successivamente

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underset{1}{\sqrt[n]{a}}\,\underset{2}{\sqrt[n]{a}} \ldots \underset{m}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^m},$$

cioè

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{8}$$

Dunque *per elevare un radicale ad una certa potenza, basta elevare all' esponente prefissato il radicando.*

Ciò si può anche esprimere dicendo che *se si deve estrarre da un numero la radice di un certo indice e poi elevare il risultato ad un certo esponente, è indifferente l'ordine in cui si eseguiscono le due operazioni.*

10. Alle identità fondamentali (6), (7) va aggiunta questa altra

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \tag{9}$$

cioè: *La radice m^{ma} della radice n^{ma} di un numero* (o di un' espressione, l' uno o l' altra positivi) *è uguale alla radice di indice mn di quel numero* (o di quell' espressione).

Per dimostrare questa identità basta far vedere che, elevando $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ all' esponente mn, si ottiene a. Ora, in forza di una nota proprietà delle potenze (I, n. 4; II, n. 12), per elevare una qualsiasi base all' esponente mn, basta elevarla prima all' esponente m, e poi elevare il risultato all' esponente n; e in tal modo si ottiene successivamente, in virtù della (4),

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

11. Dalla (9) si deducono i seguenti importanti corollari:

A) *Ogni radice di indice non primo si può calcolare, estraendo successivamente più radici di indice primo.*

Così, per es.

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}, \quad \sqrt[30]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}, \text{ ecc.}$$

B) Se nella (9) sostituiamo a^n in luogo di a e applichiamo la (5), troviamo la nuova identità

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}; \qquad (10)$$

la quale esprime il seguente teorema assai notevole: *Un radicale non cambia valore, se si eleva il radicando ad un qualsiasi esponente n e, nel medesimo tempo, si moltiplica l' indice per quello stesso numero n.*

Questo teorema permette di *ridurre più radicali allo stesso indice,* senza alterarne il valore. Così, se si hanno i radicali

$$\sqrt[m]{a}, \quad \sqrt[n]{b},$$

essi sono rispettivamente uguali a

$$\sqrt[mn]{a^n}, \quad \sqrt[mn]{b^m}.$$

Come indice comune ai radicali dati si può prendere, manifestamente, un qualsiasi multiplo comune dei loro indici, in particolare il loro minimo multiplo comune.

C) L'identità (10), letta da destra a sinistra, ci dice che *se si considera una certa radice di una determinata potenza e l'indice e l'esponente hanno un fattore comune, si può sopprimere questo fattore comune, senza che resti alterato il valore del radicale considerato* (semplificazione del radicale).

Così per esempio

$$\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}.$$

Capitolo VII

Potenze ad esponente reale qualsiasi

1. Riprendiamo il concetto di *potenza di un numero*. Fin dai principî del calcolo letterale, dopo aver definito la potenza di un numero a ad un esponente intero positivo n, come prodotto di n fattori uguali ad a, siamo stati condotti ad estendere il concetto di potenza anche al caso, in cui l' esponente sia *nullo* o *intero negativo*: e, precisamente, si è posto per definizione, qualunque sia il numero a e qualunque sia l' intero relativo n (I, n. 4; II, n. 12),

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si è poi dimostrato che per il calcolo delle potenze così estese si conservano valide quelle stesse regole, che valevano nel caso degli esponenti interi positivi e che sono espresse dalle identità (dove a e b denotano due numeri quali si vogliano e gli esponenti interi m ed n possono essere, indifferentemente, positivi o negativi o anche nulli):

(I) $$(ab)^n = a^n b^n,$$

(II) $$(a^m)^n = a^{mn},$$

(III) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

(IV) $$a^m a^n = a^{m+n},$$

(V) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

In questo Capitolo ci proponiamo di estendere ulteriormente il concetto di potenza, per arrivare alle *potenze ad* *esponente reale relativo* qualsiasi; e vedremo che anche in questo caso più generale seguitano a valere le proprietà espresse dalle identità (I)–(V).

Dobbiamo per altro imporre una restrizione, che bisognerà tenere sempre presente: *i numeri, che si adotteranno come basi, si dovranno supporre sempre* positivi, *e tutte le volte che si parlerà di radici, d'indice qualsiasi, di tali numeri positivi, si dovranno intendere le radici* positive *od* aritmetiche.

Potenze ad esponente razionale

2. Cominciamo col definire le potenze (dei numeri positivi) ad esponente *razionale relativo* qualsiasi. Mostreremo così che il *calcolo dei radicali*, studiato nel Capitolo precedente, si può considerare come un *calcolo di potenze.*

Per riferirci ad un caso determinato proponiamoci di calcolare la radice cubica della sesta potenza a^6 di *un numero positivo a*, cioè

$$\sqrt[3]{a^6}.$$

Siccome a^6 si può scrivere (n. 1, II)

$$a^6 = (a^2)^3,$$

otterremo senz'altro (VI, n. 7)

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,$$

cioè

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}};$$

e nello stesso modo si avrà

$$\sqrt[3]{a^9} = a^{\frac{9}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}}, \ldots$$

Questa riduzione del radicale ad una potenza non è più possibile se, p. es., si vuole estrarre la radice cubica di a^7, perchè 7 non è divisibile per 3 e perciò non si possono raggruppare i 7 fattori a di a^7 in tre prodotti parziali di ugual numero di fattori ciascuno. Se proviamo tuttavia ad applicare formalmente la stessa riduzione usata dianzi nel caso in cui l'esponente di a era divisibile per 3, otteniamo il segno

$$a^{\frac{7}{3}},$$

che non ha per se stesso nessun significato.

Allora, per rendere formalmente possibile anche in questo caso la suaccennata trasformazione algebrica, converremo di rappresentare col segno

$$a^{\frac{7}{3}}$$

il radicale

$$\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{\overline{a}^7};$$

e diremo che $a^{\frac{7}{3}}$ è la « *potenza* della base a all'*esponente* $\frac{7}{3}$ ».

Parlando in generale, il radicale

$$\sqrt[q]{a^p}$$

o, ciò che è lo stesso (VI, n. 96),

$$\sqrt[q]{\overline{a}^p},$$

se p è divisibile per q, è riducibile alla potenza ad esponente intero

$$a^{\frac{p}{q}}.$$

Se poi p non è divisibile per q, noi *per convenzione* rappresenteremo ancora quel radicale col segno

$$a^{\frac{p}{q}}.$$

Sussisterà dunque in ogni caso la identità

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\overline{a}^p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \text{ossia} \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^q,$$

la quale, se p è divisibile per q, esprime una proprietà delle potenze ad esponente intero; e se invece p non è divisibile per q fornisce la definizione della « potenza di a all' esponente $\frac{p}{q}$ ».

Così, in particolare, sarà:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},\ 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8,\ 4^{2,1} = 4^{\frac{21}{10}} = \sqrt[10]{4^{21}},\ 5^{0,3} = \sqrt[10]{5^3},\ \text{ecc.}$$

3. La convenzione del n. prec. si estende anche al caso di esponenti fratti negativi; cioè si pone

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}},$$

con la sola avvertenza di attribuire il segno — al numeratore dell' esponente, in quanto il denominatore, che fornisce l' indice di una estrazione di radice, non può essere che positivo.

Ricaviamo poi dalle successive identità

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

che sussiste anche per le potenze ad esponenti frazionari la identità

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

La definizione di potenza ad esponente frazionario non si può estendere nello stesso modo al caso delle basi negative, perchè i numeri negativi non ammettono radici di indice pari (VI, n. 5).

4. Pei calcoli con potenze ad esponente frazionario sussistono le stesse regole fondamentali valide per le potenze ad esponente intero.

È invero facile mostrare come sussistano ancora le identità (I)-(V) del n. 1. La dimostrazione si fa per tutte nel medesimo modo: si sostituiscono nel primo membro alle potenze ad esponente frazionario i corrispondenti radicali, si eseguiscono le operazioni secondo le regole del calcolo dei radicali (VI, nn. 7-11) e infine si scrive il risultato sotto forma di potenza ad esponente frazionario.

Dimostriamo, p. es., la (I), riferendoci, per fissare le idee, ad un caso numerico:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{3}{5}}\, b^{\frac{3}{5}}.$$

Infatti si hanno le successive identità:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(ab)^3} = \sqrt[5]{a^3b^3} = \sqrt[5]{a^3}\,\sqrt[5]{b^3} = a^{\frac{3}{5}}\, b^{\frac{3}{5}}.$$

Lasciando poi all'alunno di dimostrare come esercizio le (II), (III) e (V) del n. 1, dimostriamo qui la (IV), riferendoci ancora ad un caso numerico:

$$a^{-\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{4}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}.$$

Infatti (si ricordi VI, nn. 8, 11*B*)

$$a^{-\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{a^{-2}}\,\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[12]{a^{-8}}\,\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[12]{a^{-8}\,a^{15}} =$$
$$= \sqrt[12]{a^{-8+15}} = a^{\frac{-8+15}{12}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}.$$

Andamento delle potenze ad esponente razionale al variare della base o dell'esponente

5. Sappiamo che, nel caso delle potenze ad esponente intero positivo dei numeri positivi, da $a < b$ consegue, qualunque sia l'intero positivo n, $a^n < b^n$, e che, se m ed n sono due numeri interi positivi, da $m > n$ consegue $a^m > a^n$ oppure $a^m < a^n$, secondo che il numero positivo a è maggiore o minore di 1 (I, n. 5 *F*, *G*; II, n. 12). Ci proponiamo qui di estendere anche alle potenze ad esponente razionale positivo questi due criteri, che permettono di *riconoscere come varia* *una potenza* (a base positiva), *quando, tenuto fisso l'esponente, si fa variare la base, oppure, tenuta fissa la base, si fa variare l'esponente.*

Come si è or ora accennato, ci limiteremo a considerare potenze (a base positiva) ad esponente razionale positivo; i criterî corrispondenti al caso degli esponenti razionali negativi si potranno dedurre, ogni qual volta occorra, da quelli, che qui stabiliremo, tenendo conto che ogni potenza ad esponente negativo non è altro che la reciproca di una potenza ad esponente positivo.

6. Premettiamo due osservazioni:

A) ogni potenza di 1, *ad esponente razionale, è uguale ad* 1. Sono invero uguali ad 1 tutte le potenze di 1 ad esponente intero, come pure tutte le radici (positive) di 1. Sarà quindi uguale ad 1 anche ogni potenza di 1 ad esponente razionale; p. es.

$$1^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{1^3} = \sqrt[5]{1} = 1 .$$

B) Dato un numero positivo a, diverso da 1, *secondo che esso è maggiore o minore di* 1, *anche ogni sua potenza ad esponente razionale positivo è rispettivamente maggiore o minore di* 1.

Se l'esponente è un intero n, sappiamo già, come si è ricordato al n. prec., che da $a > 1$ o $a < 1$ consegue, rispettivamente, $a^n > 1$ o $a^n < 1$. Prendiamo dunque come esponente una qualsiasi frazione positiva $\frac{p}{q}$ e indichiamo con b il valore (positivo) di $a^{\frac{p}{q}}$. Dalla

$$b = a^{\frac{p}{q}}$$

ricaviamo, elevando ambo i membri all'esponente q,

$$b^q = a^p .$$

Se $a > 1$, avremo anche $a^p > 1$ e quindi b non può essere nè uguale nè minore di 1, perchè in tal caso anche b^q

sarebbe rispettivamente uguale o minore di 1; cosicchè si conclude

$$b > 1 \quad \text{ossia} \quad a^{\frac{p}{q}} > 1.$$

Analogamente da $a < 1$ si deduce $b < 1$ ossia $a^{\frac{p}{q}} < 1$.

7. Ciò premesso, dimostriamo i due teoremi fondamentali, preannunciati al n. 5.

A) Se a e b sono due numeri positivi quali si vogliano ed r è un qualsiasi numero razionale positivo, da $a < b$ consegue $a^r < b^r$; cioè, quando in una potenza ad esponente razionale positivo di un numero positivo si tiene fisso l'esponente e si fa crescere la base, la potenza cresce.

Infatti dall'ipotesi $a < b$ segue $\frac{a}{b} < 1$ e quindi, per il n. prec.,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r < 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{a^r}{b^r} < 1$$

o infine

$$a^r < b^r.$$

B) Se r ed s sono due numeri razionali quali si vogliano ed a è un qualsiasi numero positivo diverso da 1, da $r < s$ consegue $a^r < a^s$ oppure $a^r > a^s$, secondo che è $a > 1$ oppure $a < 1$; cioè, *quando in una potenza ad esponente razionale positivo di un numero positivo si tiene fissa la base e si fa crescere l'esponente, la potenza cresce o decresce, secondo che la base è maggiore o minore di* 1.

Infatti, per confrontare le due potenze a^r ed a^s, se ne consideri il rapporto

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r},$$

dove per l'ipotesi $r < s$, si ha $s - r > 0$. Perciò, se è $a > 1$, si avrà (n. prec. *B*)

$$a^{s-r} > 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{a^s}{a^r} > 1 \quad \text{o infine } a^r < a^s.$$

E similmente, se è $a < 1$, sarà

$$a^{s-r} < 1, \quad \frac{a^s}{a^r} < 1, \quad a^r > a^s.$$

8. Questi due teoremi si possono precisare meglio, esaminando come varia una potenza a^r ad esponente razionale positivo di un numero positivo, quando tenuto fisso a, si fa crecere r, fino a farlo diventare grande quanto si vuole, oppure si fa decrescere, fino a farlo diventare piccolo quanto si vuole.

Si hanno risultati diversi secondo che a è maggiore o minore di 1, e li dimostreremo nei prossimi due nn.

9. *Se $a > 1$: A) si può sempre trovare un esponente razionale positivo r, abbastanza grande, perchè a^r risulti maggiore di un qualsiasi numero positivo prefissato H, per quanto grande;*

B) si può sempre trovare un esponente razionale positivo r abbastanza piccolo, perchè a^r, che è sempre maggiore di 1, ne differisca per meno di un qualsiasi numero positivo h, per quanto piccolo.

A) Basterà mostrare che si può trovare un *intero* positivo n, abbastanza grande, perchè sia

(1) $$a^n > H,$$

giacchè allora, per il n. 7*B*, la stessa disuguaglianza varrà per ogni esponente razionale $r > n$.

Per trovare un intero n soddisfacente alla (1), si consideri l'identità

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1),$$

che è stata dimostrata negli elementi del Calcolo letterale (I, n. 16) e che del resto, si verifica subito, eseguendo il prodotto indicato a secondo membro. Il secondo fattore del secondo membro comprende n termini, di cui l'ultimo è 1 e gli altri, per l'ipotesi $a > 1$, sono tutti maggiori di 1 (n. 6*B*), cosicchè, se si sostituisce a ciascuno di essi l'unità, il secondo membro rimpicciolirà e avremo

$$a^n - 1 > (a-1)n \quad \text{ossia} \quad a^n > 1 + (a-1)n.$$

Allora, perchè risulti soddisfatta la (1) basterà prendere l'intero n abbastanza grande, perchè sia

$$1 + (a - 1)n > H \quad \text{ossia} \quad n > \frac{H - 1}{a - 1}.$$

B) Qui basterà far vedere che si può trovare un *intero* positivo n, abbastanza grande, perchè risulti

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < h.$$

A tale scopo, si osservi che, per quanto piccolo sia il numero positivo h, si ha

$$1 + h > 1,$$

onde, per il teorema *A*), si può trovare un intero positivo n, abbastanza grande, perchè risulti

$$(1 + h)^n > a,$$

ossia, elevando ambo i membri all'esponente $\frac{1}{n}$, e tenendo conto del teorema *A*) del n. 7,

$$1 + h > a^{\frac{1}{n}} \quad \text{ossia} \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < h.$$

10. *Se $a < 1$: A) si può sempre trovare un esponente razionale positivo r, abbastanza grande, perchè a^r risulti minore di un qualsiasi numero positivo h, per quanto piccolo;*

B) si può sempre trovare un esponente razionale positivo r, abbastanza piccolo, perchè a^r, che è sempre minore di 1, ne differisca per meno di un qualsiasi numero positivo prefissato h, per quanto piccolo.

A) Si consideri il numero (positivo) $\frac{1}{a}$, che per l'ipotesi $a < 1$, è maggiore di 1. Si può allora trovare (n. prec., *A*) un numero razionale positivo r, abbastanza grande, perchè sia

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r > \frac{1}{h} \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{a^r} > \frac{1}{h},$$

o, infine (I, n. 5*G* e II, n. 12),

$$a^r < h.$$

B) Possiamo supporre che il numero prefissato h sia minore di 1, in guisa che $1 - h$ sia positivo, ma minore di 1.

Di qui, in forza del teorema *A*), consegue che si può trovare un esponente razionale positivo s, abbastanza grande perchè risulti

$$(1-h)^s < a,$$

e basta elevare ambo i membri di questa disuguaglianza all'esponente razionale $r = \frac{1}{s}$ e tener conto del teorema *A*) del n. 7, per concludere

$$1-h < a^r \quad \text{ossia} \quad 1-a^r < h.$$

Si ha dunque veramente che a^r differisce da 1 per meno di h.

11. Aggiungiamo, infine, un'osservazione, che ci tornerà utile in seguito: *Data una qualsiasi potenza ad esponente razionale a^s di una base positiva, diversa da* 1, *si può sempre aumentarne l'esponente di un numero razionale positivo r abbastanza piccolo, perchè la differenza di a^s ed a^{s+r} risulti minore di un qualsiasi numero positivo prefissato h, per quanto piccolo.*

Riferiamoci, per fissare le idee, al caso $a > 1$ (il caso $a < 1$ si tratterebbe analogamente). Sotto tale ipotesi, qualunque sia il numero positivo r, si ha $a^{s+r} > a^s$ (n. 7*B*). Ora la disuguaglianza

$$a^{s+r} - a^s < h$$

si può scrivere

$$a^s(a^r - 1) < h,$$

ossia, in quanto a^s è positivo,

$$a^r - 1 < \frac{h}{a^s};$$

e si può sempre prendere r abbastanza piccolo, perchè risulti soddisfatta (n. 9*B*).

Potenze ad esponente irrazionale

12. Nelle successive estensioni del concetto di potenza di un numero positivo non resta più che un passo, cioè definire le potenze di una base positiva a ad un qualsiasi esponente irrazionale relativo b.

Consideriamo qui dapprima il caso in cui sia $a > 1$ e $b > 0$, e indichiamo con $(H \mid K)$ la sezione, nel campo dei numeri razionali *positivi*, che definisce questo esponente b.

Ciò posto, assegnamo ad una classe H', in corrispondenza di ogni numero h di H, tutti i numeri razionali positivi, che non sono maggiori di a^h; e, similmente, assegnamo ad una classe K', in corrispondenza di ogni numero k di K, tutti i numeri razionali positivi, che non sono minori di a^k. *Le due classi H', K', così formate, costituiscono una sezione nel campo dei numeri razionali positivi.*

Infatti: 1) *Dalle due classi H', K' resta escluso, al più, un solo numero razionale.* Proviamo, invero, a supporre che ne restino esclusi due, r ed s (con $r < s$). Pel modo stesso, in cui si sono formate le due classi H' e K', questi due numeri debbono essere entrambi maggiori di ogni potenza a^h, dove h denota un qualsiasi numero di H, ed entrambi minori di ogni potenza a^k, dove k denota un qualsiasi numero della K: e cioè deve essere

$$a^h < r < s < a^k,$$

e, quindi, comunque si prenda h in H e k in K,

$$a^k - a^h > s - r. \tag{2}$$

Ma ciò è assurdo. Infatti, si fissi a piacere un numero della classe K e, indicatolo con k_1, si consideri il numero $\frac{s-r}{a^{k_1}}$. Si può sempre trovare una frazione positiva $\frac{1}{n}$ tanto piccola che $a^{\frac{1}{n}}$ (che, come sappiamo, è sempre maggiore di 1; n. 6 *B*) risulti vicino ad 1 quanto vogliamo (n. 9 *B*), per es. sia

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{s-r}{a^{k_1}}. \tag{3}$$

Se allora si considera la successione dei multipli di $\frac{1}{n}$, cioè

$$\frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{3}{n} \dots$$

si finisce necessariamente col trovarne due consecutivi $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, che comprendano fra loro il numero b, cioè tali che il primo appartenga ad H, il secondo a K. La differenza

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}}$$

si può scrivere

$$a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

onde, tenendo conto della (3), si ha

$$(4) \qquad a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}} \frac{s-r}{a^{k_1}}.$$

Ma, in quanto $\frac{m}{n}$ appartiene ad $\boldsymbol{H}$ e k_1 a $\boldsymbol{K}$ è necessariamente $\frac{m}{n} < k_1$, e quindi

$$a^{\frac{m}{n}} < a^{k_1} \quad \text{ossia} \quad \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{k_1}} < 1.$$

Perciò dalla (4) discende

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < s - r;$$

e, poichè $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n}$ appartengono rispettivamente ad $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, resta veramente dimostrato che la (2) non può sussistere per *ogni* possibile scelta di h e k.

2) *La classe* $\boldsymbol{H}'$, per il modo stesso in cui è stata formata, *contiene con* ogni *suo numero, anche* ogni *numero minore*, e così *la* $\boldsymbol{K}'$ *contiene, con* ogni *suo numero*, ogni *numero maggiore.*

3) *La classe* $\boldsymbol{H}'$ *non contiene* massimo. Infatti, ogni numero h' di $\boldsymbol{H}'$ è tale che esiste in $\boldsymbol{H}$ qualche numero h, per cui risulta

$$h' \leq a^h.$$

Ma in $\boldsymbol{H}$, che non contiene massimo, esistono con h anche altri numeri maggiori, e se h_1 è uno di questi, si ha $a^{h_1} > a^h$, e in $\boldsymbol{H}'$ si trovano tutti i numeri razionali compresi fra a^h e a^{h_1}, i quali sono tutti maggiori di h'.

Similmente *la* $\boldsymbol{K}$ *non contiene minimo.*

Il numero reale positivo definito dalla sezione $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$ si chiama *potenza della base a all'esponente b* e si denota con a^b.

13. Dianzi si è supposto $a > 1$, $b > 0$.

Se invece è $0 < a < 1$, pur restando $b > 0$, la potenza a^b si definisce in modo analogo. Solo, in quanto le potenze ad esponente razionale di a, al crescere dell'esponente, anzichè crescere, come accade per $a > 1$, decrescono (n. 7*B*), la sezione $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$, destinata a definire a^b, si costruisce, scambiando, rispetto a quanto si è fatto or ora, l'ufficio delle due classi H e K, cioè si assegnano ad H', in corrispondenza di ogni numero k di K, tutti i numeri non maggiori di a^k e a K' in corrispondenza di ogni numero h di H tutti i numeri razionali positivi non minori di a^h.

Infine se b è un numero irrazionale *negativo*, si pone per definizione, tanto per $a > 1$, quanto per $0 < a < 1$,

$$a^b = \frac{1}{a^{-b}}.$$

Del resto si può anche dimostrare, che questo medesimo valore (reale positivo) di a^b risulta definito dalla sezione $(H' \mid K')$ nel campo dei numeri razionali positivi, che si ottiene, applicando il procedimento dei due nn. prec. a partire dalla sezione $(H \mid K)$, che definisce b nel campo dei numeri razionali *negativi*.

14. Alle potenze ad esponente irrazionale relativo dei numeri positivi si estendono tutte le proprietà fondamentali (I)–(V) del n. 1, come pure i teoremi sul modo di variare delle potenze, quando si faccia variare la base o l' esponente (nn. 6–10).

Non ci indugeremo su queste estensioni, che richiederebbero ragionamenti laboriosi e sottili; e ci limitiamo ad osservare che la possibilità di tali estensioni risulta in qualche modo intuitiva, ove si rifletta che le proprietà suaccennate valgono, in ogni possibile ordine di approssimazione, per le potenze ad esponente razionale, con cui si possono approssimare le potenze ad esponente irrazionale. Si conserveranno, quindi valide, anche quando, coi procedimenti di approssimazione indefinita che risultano dalla definizione per mezzo delle corrispondenti sezioni (II, n. 5), si perviene a codeste potenze ad esponente irrazionale.

CAPITOLO VIII

Equazioni esponenziali e logaritmi

Funzioni ed equazioni esponenziali

1. Fissato un numero positivo a, diverso da 1, la potenza a^x, dove x denota un qualsiasi numero relativo (razionale o irrazionale, positivo o negativo) ha sempre un valore positivo ben determinato (Cap. prec.). Resta così definita, per ogni possibile valore della x, la funzione, *sempre positiva*,

(1) $$y = a^x,$$

la quale si chiama *funzione esponenziale* di *base a*.

Le proprietà delle potenze studiate nel Cap. prec. permettono di riconoscere senza difficoltà l'andamento di questa funzione e, quindi, la forma della rispettiva grafica, la quale prende il nome di *curva esponenziale* di *base a*.

Supponiamo per fissare le idee $a > 1$, e cominciamo con l'osservare che, se alla x si attribuiscono successivamente i valori

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots,$$

la funzione esponenziale (1) assume, corrispondentemente, i valori

(2) $$a^0 = 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4 \quad \ldots,$$

i quali finiscono col diventare grandi, quanto si vuole (VII, n. 9 *A*), ed anzi crescono più rapidamente dei corrispondenti valori della x. Abbiamo così, intanto, che, ove siansi fissati nel piano due assi cartesiani x, y, la curva esponenziale di base a passa per il punto dell'asse delle y, che ha l'ordinata 1, e poi. successivamente, per i punti di coordinate

(3) $1, a \quad 2, a^2 \quad 3, a^3 \quad 4, a^4 \quad \ldots.,$

i quali giacciono tutti nel primo angolo degli assi e si allontanano, via via, tanto dall'asse delle x, quanto da quello delle y, ma più rapidamente dal primo che dal secondo.

Ricordiamo poi che la potenza a^x, al crescere della x, risulta, sotto l'ipotesi $a > 1$, sempre crescente (VII, n. 7*B*), e che, d'altra parte, basta far crescere la x abbastanza poco, perchè corrispondentemente la y cresca di quanto poco si vuole (VII, n. 11). Perciò, quando la x cresce con continuità da 0 ad 1 o da 1 a 2 o da 2 a 3, ecc., la funzione esponenziale (1) varia, sempre crescendo anch'essa con continuità, da 1 ad a o, rispettivamente, da a ad a^2 o da a^2 ad a^3, ecc. Ciò vuol dire che la curva esponenziale anche nei tratti compresi fra i successivi punti (3) va costantemente allontanandosi dall'asse delle x.

Se invece diamo alla x i valori negativi

$$-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \ldots.,$$

la (1) assume, corrispondentemente i valori

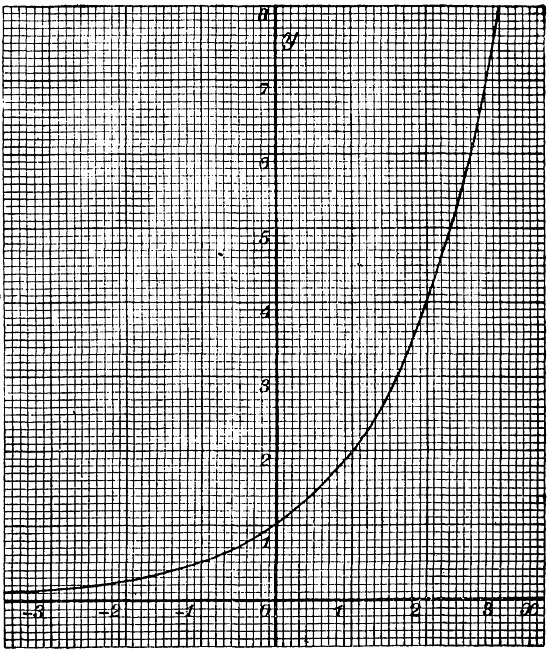
$$a^{-1}=\frac{1}{a} \quad a^{-2}=\frac{1}{a^2} \quad a^{-3}=\frac{1}{a^3} \quad a^{-4}=\frac{1}{a^4} \quad a^{-5}=\frac{1}{a^5} \ldots.,$$

i quali, sotto l'ipotesi $a > 1$, finiscono col diventare piccoli quanto si vuole. Più in generale, se alla x attribuiamo un qualsiasi valore negativo $-x_1$, la funzione esponenziale assume il valore

$$a^{-x_1}=\frac{1}{a^{x_1}},$$

cioè il reciproco di quello assunto da essa per il corrispondente valore positivo x_1 della variabile; onde risulta, che, quando la x decresce, per valori negativi, da 0 a $-\infty$, la funzione esponenziale, sempre mantenendosi positiva, decresce indefinitamente, a partire da 1, fino ad assumere valori piccoli quanto si vuole.

Di qui discende che, a sinistra dell' asse delle y, cioè nel semipiano delle ascisse negative, la curva esponenziale pur mantenendosi sempre al di sopra dell' asse delle x, gli



si avvicina indefinitamente, cosicchè a grande distanza dall' origine finisce quasi col confondersi con esso; e ciò si esprime, dicendo che verso sinistra la curva esponenziale, *tende asintoticamente* al semiasse negativo delle x.

Nella unita figura è tracciato su carta millimetrica (con l' unità di 1 cm.) l' arco da $x = -3,6$ ad $x = 3$ della curva esponenziale di base 2, cioè del diagramma della funzione

$$y = 2^x.$$

Ed è perfettamente analogo l'andamento di ogni altra curva esponenziale di base $a > 1$. Si ricordi che una tal curva interseca sempre l'asse delle x nel punto di ordinata 1. I due archi, in cui essa è divisa da codesto punto, vanno entrambi all'infinito; e, quanto maggiore è a, tanto maggiore è la rapidità, con cui l'arco destro si allontana dall'asse delle x e l'arco sinistro gli si avvicina.

In ogni caso, quando l'ascissa varia, crescendo, da $-\infty$ a $+\infty$, l'ordinata del corrispondente punto della curva esponenziale varia, sempre crescendo, da valori positivi prossimi a zero quanto si vuole a valori grandi quanto si vuole.

2. Per $0 < a < 1$ la funzione esponenziale (1) ha un andamento in qualche modo opposto. Infatti in tal caso i valori (2), che essa assume in corrispondenza dei valori 0, 1, 2, 3,.... della variabile x, risultano decrescenti e finiscono col diventare piccoli quanto si vuole (VII, n. 10*A*); e poichè, sotto l'ipotesi $a < 1$, la potenza a^x, al crescere dell'esponente, decresce (VII, n. 7*B*), abbiamo che, quando la x varia, crescendo da 0 a $+\infty$, la (1) varia sempre decrescendo, a partire da 1 fino a valori (positivi) piccoli quanto si vuole. Invece, quando la x varia, decrescendo, da 0 a $-\infty$, la (1), che mano mano assume i valori reciproci di quelli prima assunti per i corrispondenti valori positivi di x, varia, sempre crescendo, dal valore 1 a valori positivi, grandi quanto si vuole.

Ciò vuol dire che per $0 < a < 1$ la curva esponenziale di base a passa ancora per il punto dell'asse delle y di ordinata 1, ma dei due archi, in cui resta divisa da questo punto, quello verso destra tende asintoticamente al semiasse positivo delle x, mentre quello verso sinistra si allontana indefinitamente da entrambi gli assi.

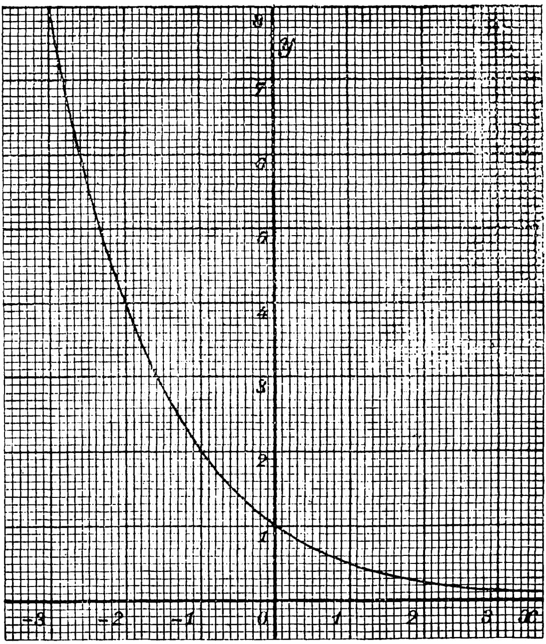
Nella fig. della pag. seg. è tracciato l'arco da $x = -3$ a $x = 3{,}6$ della curva esponenziale di base $\frac{1}{2}$, cioè del diagramma della funzione

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}.$$

Poichè questa funzione si può scrivere

$$y = 2^{-x}$$

e, quindi, si può considerare ottenuta dalla $y = 2^x$, cambiando segno alla x, si riconosce che codesto suo diagramma non



è altro che il simmetrico del diagramma della $y = 2^x$, che abbiamo dato al n. prec., rispetto all'asse delle y. E in questo stesso modo dal diagramma di una qualsiasi funzione esponenziale $y = a^x$ di base $a > 1$ si deduce quello della corrispondente funzione esponenziale

$$y = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \text{di base} \quad \frac{1}{a} < 1.$$

Si tenga presente che lungo ogni curva esponenziale di base minore di 1, quando l'ascissa cresce da $-\infty$ a $+\infty$, l'ordinata del punto corrispondente decresce da valori grandi quanto si vuole a valori positivi prossimi a zero quanto si vuole.

3. L'andamento della funzione esponenziale, quale è messo in luce nel modo più espressivo dalla rispettiva grafica, rende intuitivo un teorema, di cui vedremo poi la particolare importanza.

Prefissiamo ad arbitrio un numero positivo y_0 e proponiamoci di riconoscere se esista un valore della x, per il quale una data funzione esponenziale

(1) $$y = a^x$$

assuma il valore y_0. In altre parole proponiamoci di vedere se esista qualche soluzione per l'equazione in x

(4) $$a^x = y_0 .$$

È questa un'equazione di tipo nettamente diverso, da quelle di 1° o 2° o 3°.... grado, considerate sin qui, giacchè in queste la incognita x compariva solo come base di potenze ad esponente intero positivo determinato, mentre nella (3) l'incognita x figura come esponente. Perciò la (3) si chiama *equazione esponenziale, di base a*.

Ora è facile vedere che questa equazione ammette sempre una soluzione ed una sola. Infatti, se ci si riferisce alla curva esponenziale che rappresenta la (1), è manifesto, che per soddisfare l'equazione (4), basta trovare su questa curva un punto, che abbia l'ordinata y_0; giacchè in tal caso la corrispondente ascissa fornisce una soluzione della (4). Ma il luogo dei punti, che hanno l'ordinata y_0, per ipotesi positiva, è (V, nn. 12, 18) una retta parallela all'asse delle x, situata al di sopra di esso; e dall'andamento della curva esponenziale (si riguardino le figure dei due nn. prec.) risulta senz'altro che essa, in ogni caso, interseca in un punto (e in uno solo) una tal parallela.

Accertata così l'esistenza di una soluzione per la equazione esponenziale (4), possiamo precisare meglio il risultato.

Esclusa l'ipotesi $y_0 = 1$ (in cui, qualunque sia a, la (4) ammette la soluzione ovvia $x = 0$), convien distinguere i due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$. Nel primo caso (n. 1), dei due archi, in cui la curva esponenziale è divisa dalla sua intersezione con l'asse delle y, quello verso destra è costituito da punti di ordinata maggiore di 1, quello verso sinistra da punti di ordinata minore di 1. Perciò secondo che è $y_0 > 1$ o $y_0 < 1$, la soluzione della (4) risulta positiva o negativa.

E accade il contrario se è $0 < a < 1$ (n. 2): cioè la soluzione della (4) è positiva o negativa, secondo che è $y_0 < 1$ o $y_0 > 1$.

Abbiamo dunque, riassumendo, il seguente teorema: *Dati due numeri positivi quali si vogliano a ed y_0, di cui il primo sia diverso da 1, l'equazione esponenziale*

$$a^x = y_0 \tag{4}$$

ammette sempre una soluzione ed una sola. Se è $y_0 \gtrless 1$ e $a > 1$, questa soluzione è positiva o negativa, secondo che è $y_0 > 1$ o $y_0 < 1$, mentre, se è $y_0 \gtrless 1$ ed $a < 1$, essa è positiva o negativa, secondo che è $y_0 < 1$ o $y_0 > 1$. Se infine è $y_0 = 1$, la soluzione della (4) *è $x = 0$.*

4. Se questo teorema si vuol dimostrare senza far uso della immagine intuitiva, fornita per la funzione esponenziale dal corrispondente diagramma, bisogna procedere per via aritmetica.

Escluso il caso $y_0 = 1$, in cui l'equazione esponenziale (4) ammette la soluzione $x = 0$, cominciamo col supporre $a > 1$ e $y_0 > 1$. Per definire la corrispondente soluzione della (4), ripartiamo i numeri razionali positivi in due classi H e K, assegnando alla prima tutti i numeri razionali positivi h, per cui risulta $a^h < y_0$, alla seconda tutti i numeri razionali positivi k, per cui risulta $a^k > y_0$. Diciamo che così si determina, nel campo dei numeri razionali positivi, una sezione (H, K).

Infatti: 1) *Ogni numero razionale viene, in tal modo, attribuito ad H o a K, salvo, al più, quell'eventuale numero razionale r, per cui risulti proprio $a^r = y_0$*, ed in questo caso r è già la soluzione cercata della (4).

2) *La classe H contiene, con ogni suo numero h, tutti i numeri minori,* perchè, avendosi $a^h < y_0$, anche ogni numero razionale minore

di h, preso come esponente di a, dà una potenza minore di y_0 (VII, n. 7 B) e, quindi, appartiene ad H. E, similmente, ***la classe K contiene, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali maggiori.***

3) ***La classe H non ha massimo.*** Infatti, preso un qualsiasi numero h di H, cioè tale che sia $a^h < y_0$, e posto $y_0 - a^h = d$, talchè sia $y_0 = a^h + d$, si può sempre trovare (VII, n. 11) un numero razionale positivo r, abbastanza piccolo, perchè risulti

$$a^{h+r} - a^h < d \quad \text{ossia} \quad a^{h+r} < a^h + d,$$

cioè

$$a^{h+r} < y_0,$$

e alla classe H appartiene, insieme con h, anche il numero $h + r > h$.

Similmente si dimostra che ***la classe K non ha minimo.***

Riconosciuto, così, che le due classi H e K costituiscono una sezione $(H \mid K)$ nel campo dei numeri razionali positivi e indicato con x_0 il numero positivo definito da questa sezione, diciamo che x_0 è appunto la soluzione dell'equazione (4).

Per dimostrarlo, dobbiamo considerare la sezione $(H' \mid K')$, che, secondo il n. 11 del Cap. prec., definisce la potenza a^{x_0}, e far vedere che anche y_0 è maggiore di tutti i numeri h' di H', minore di tutti i numeri k' di K'.

A tal fine si ricordi che, per il modo stesso in cui è stata formata la classe H', ogni suo numero h' è minore o, al più, uguale ad una qualche potenza a^h, dove h è un numero di H. Poichè si ha $a^h < y_0$, risulta appunto $h' < y_0$. Similmente si dimostra che ogni numero k' di K' è maggiore di y_0, cosicchè resta veramente dimostrato che

$$a^{x_0} = y_0.$$

Stabilito, così, il teorema per $a > 1$ e $y_0 > 1$, passiamo al caso, in cui, essendo ancora $a > 1$, sia invece $y_0 < 1$.

Consideriamo qui, in luogo della (4), l'equazione esponenziale nella incognita u

$$a^u = \frac{1}{y_0}. \tag{5}$$

Poichè a secondo membro compare un numero maggiore di 1, questa equazione è soddisfatta, per quanto si è dianzi dimostrato, da un certo valore positivo u_0 di u; e basta scrivere la (5) sotto la forma

$$a^{-u} = y_0$$

per riconoscere che l'equazione primitiva (4) ammette, in questo caso, la soluzione negativa $-u_0$.

Rimane infine da considerare il caso, in cui sia $a < 1$ (e $y_0 \gtrless 1$). Qui, in luogo della (4), consideriamo l'equazione esponenziale, nell'incognita u,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^u = y_0,$$

la quale, avendo la base $\frac{1}{a} > 1$, ammette, in forza dei risultati già stabiliti, una soluzione u_0, che sarà positiva o negativa, secondo che è $y_0 > 1$ o $y_0 < 1$. Riscrivendo la (5) sotto la forma $a^{-u} = y_0$, riconosciamo che l'equazione (4), ammette, in questo caso, la soluzione $-u_0$, la quale è positiva o negativa secondo che è $y_0 < 1$ o $y_0 > 1$.

Il teorema è così dimostrato in tutti i casi.

Logaritmi e loro proprietà fondamentali

5. Si è trovato opportuno dare un nome speciale alla soluzione di una qualsiasi equazione esponenziale. Precisamente si è convenuto di chiamare *logaritmo in base* a di un qualsiasi numero positivo y l'esponente, cui si deve elevare la base a per ottenere il numero prefissato y (1). Questo logaritmo si indica con $\log_a y$, cosicchè si ha per definizione l'identità

$$a^{\log_a y} = y. \tag{6}$$

Importa tener presente che questa definizione di logaritmo ha senso, purchè siano soddisfatte le due seguenti condizioni: 1) *la base a deve essere positiva e diversa da* 1, perchè solo per $a > 0$ la funzione esponenziale $y = a^x$ ha senso, qualunque sia x; e, d'altra parte, se fosse $a = 1$, codesta funzione esponenziale avrebbe, per qualsiasi valore di x, il valore 1;

---

(1) Secondo EUCLIDE, se il numero a si considera come *ragione* (o rapporto) di due grandezze, i numeri a^2, a^3,.... diconsi *ragione duplicata, triplicata*,.... di a. Così per a^n, n si dirà il *numero della ragione* = λόγου ἀριθμός; e di qui venne il nome di «logaritmo» che risale allo scozzese GIOVANNI NAPIER (Neperus), al quale si deve l'invenzione dei logaritmi. Egli la rese nota nel 1614.

2) *il numero y deve essere positivo*, perchè la funzione esponenziale $y = a^x$ per qualsiasi valore di x (positivo o negativo), risulta sempre positiva, cosicchè non avrebbe senso parlare di logaritmo di un numero negativo.

Perciò d'or innanzi, anche senza più avvertirlo, supporremo sempre soddisfatte queste due condizioni.

6. In forza della stessa definizione, le proprietà dei logaritmi si deducono immediatamente da quelle della funzione esponenziale, cioè delle potenze ad esponente qualsiasi dei numeri positivi. Così, per cominciare, dalle più semplici, osserviamo che dalle identità

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a$$

risulta

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

cioè: *In una qualsiasi base a, il logaritmo di* 1 *è lo zero, e il logaritmo della base a è* 1.

Inoltre, tenendo conto del teorema fondamentale sull'equazione esponenziale (n. 3) e dell'andamento sempre crescente o sempre decrescente della funzione esponenziale, secondo che è $a > 1$ o $0 < a < 1$ (nn. 1, 2), si ha che: *Se la base a è maggiore di* 1, *ogni numero maggiore di* 1 *ha il logaritmo positivo, e ogni numero positivo minore di* 1 *ha il logaritmo negativo; e se due numeri sono disuguali, anche i loro logaritmi sono disuguali nello stesso senso.*

Se, invece, *la base, pur essendo positiva, è minore di* 1, *il logaritmo di un numero (positivo) è positivo o negativo, secondo che il numero considerato è minore o maggiore di* 1; *e di due numeri disuguali ha logaritmo maggiore il minore.*

7. Ancora dalla definizione del n. 5 risulta che la stessa relazione fra x e y, espressa dall'equazione

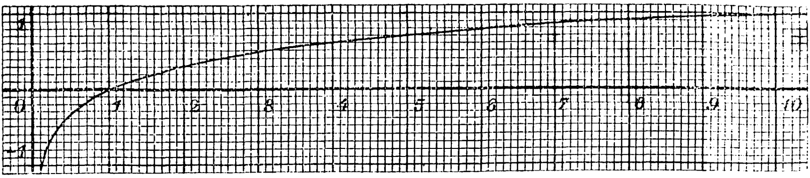
$$y = a^x, \tag{1}$$

si può anche scrivere

$$x = \log_a y. \tag{7}$$

In altre parole, ogni coppia di valori di x e y soddisfacenti la (1) rendono soddisfatta anche la (7), e viceversa; cioè le (1), (7) sono due equazioni equivalenti. Solo la prima esprime la variabile y come funzione della x, mentre la seconda esprime, inversamente, la x come funzione della y.

Questa funzione (7), *inversa* della esponenziale, si chiama *funzione logaritmica* di *base* a; e il suo diagramma si deduce immediatamente da quello della corrispondente funzione esponenziale (1). Infatti per tracciare il diagramma della (7) bisogna prendere come ascisse i valori della y e come ordinate i corrispondenti valori della x, onde si può anche dire che da ogni punto del diagramma della (1), cioè della curva esponenziale di base a, si ottiene il corrispondente punto della curva logaritmica, scambiando l'ascissa con l'ordinata: e ciò si fa, per così dire, di colpo per tutti i punti, facendo rotare la curva esponenziale di 180° intorno alla bisettrice del primo e terzo angolo degli assi. In tal modo risulta senz'altro evidente l'andamento della curva logaritmica.



Per es., nell'unita figura è tracciato, su carta millimetrica (e con l'unità di 1 cm.), l'arco di curva logaritmica di base 10, che è compreso fra il punto di ascissa 0,1 e quello di ascissa 10,4.

Come ogni curva esponenziale sega l'asse delle ordinate nel punto di ordinata 1 (nn. 1, 2), così ogni curva logaritmica sega l'asse delle ascisse nel punto di ascissa 1, e i due archi infiniti, in cui la curva logaritmica risulta divisa da questo punto, si comportano rispetto all'asse delle ascisse e a quello delle ordinate come i corrispondenti archi della curva esponenziale si comportano rispetto all'asse delle ordinate e a quello delle ascisse.

Perciò, se la base a è maggiore di 1, la curva logaritmica, a partire dalla sua intersezione con l'asse delle x e verso destra, cioè per $x > 1$, si allontana indefinitamente da entrambi gli assi, ma molto più lentamente da quello delle ascisse che da quello delle ordinate, per modo che, per ascisse grandissime, finisce con l'essere così poco incurvata, che ogni suo arco di estremi non troppo lontani si confonde sensibilmente con la corda corrispondente.

Invece, sempre a partire dalla intersezione con l'asse delle ascisse e verso sinistra, cioè quando l'ascissa, sempre mantenendosi positiva, decresce da 1 fino a valori prossimi a zero, la curva logaritmica, scendendo al di sotto dell'asse delle ascisse, si avvicina indefinitamente al semiasse negativo delle ordinate, cioè tende ad esso asintoticamente.

8. Le proprietà dei logaritmi, che ne hanno suggerito la introduzione e ne rendono vantaggioso l'uso nei calcoli numerici sono le seguenti:

A) In una base qualsiasi il logaritmo del prodotto di di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due fattori, cioè

$$\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2 .$$

Infatti dalla definizione del logaritmo (n. 6) abbiamo

$$y_1 = a^{\log_a y_1}, \quad y_2 = a^{\log_a y_2};$$

e di qui, moltiplicando membro a membro,

$$y_1 y_2 = a^{\log_a y_1 + \log_a y_2}.$$

Ora questa identità ci dice che per ottenere il numero $y_1 y_2$ bisogna elevare la base a all' esponente

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 ,$$

cioè appunto (n. 6)

$$\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2 .$$

Lo stesso teorema vale senz'altro per un prodotto di quanti si vogliano fattori; e si ha, per es.,

$$\log_a (y_1 y_2 y_3) = \log_a y_1 + \log_a y_2 + \log_a y_3 .$$

B) In una base qualsiasi, il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore, cioè

$$\log_a \left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a y_1 - \log_a y_2 . \tag{8}$$

Infatti dalla identità

$$\frac{y_1}{y_2} y_2 = y_1$$

si deduce, applicando il teorema *A*),

$$\log_a \left(\frac{y_1}{y_2}\right) + \log_a y_2 = \log_a y_1$$

e quindi la (8).

C) Risulta, in particolare, dal teor. prec. e dal n. 6.

$$\log_a \frac{1}{y} = \log_a 1 - \log_a y = - \log_a y,$$

cioè: *Due numeri che siano l'uno il reciproco dell'altro hanno, in una base qualsiasi, logaritmi uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

D) In una base qualsiasi il logaritmo di una potenza qualsivoglia di un numero si ottiene moltiplicando per l'esponente il logaritmo della base della potenza, cioè

$$\log_a y^b = b \log_a y .$$

Infatti dalla identità di definizione (n. 5)

$$y = a^{\log_a y}$$

si deduce, elevando ambo i membri all'esponente b,

$$y^b = a^{b \log_a y} ;$$

e questa identità ci dice appunto (n. 5) che

$$\log_a y^b = b \log_a y.$$

E) Dal teor. prec. discende, in particolare,

$$\log_a \sqrt[n]{y} = \log_a y^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a y.$$

cioè: *In una base qualsiasi il logaritmo di un radicale si ottiene dividendo per il relativo indice il logaritmo del radicando.*

9. I teoremi precedenti mostrano immediatamente quale sia l'utilità che pei calcoli numerici si trae da una *Tavola di logaritmi*. Una Tavola di logaritmi in data base a è costituita nella sua forma primitiva (che nella pratica, come vedremo poi, si modifica opportunamente per ragioni di comodità) da due colonne di numeri. Nella prima colonna sono segnati in ordine crescente i numeri positivi, che, entro un certo intervallo, si susseguono ad una data differenza costante, p. es. di millesimo in millesimo. Nella seconda colonna, di fronte a ciascun numero della prima, è segnato, con una data approssimazione, il rispettivo logaritmo in base a.

Se si vuol trovare il prodotto di due numeri y_1, y_2, contenuti nella Tavola, basta ricordare l'identità (n. prec.)

$$\log_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2.$$

In base ad essa, si cercheranno sulla Tavola $\log_a y_1$ e $\log_a y_2$ (che si troveranno nella seconda colonna di fronte ai numeri y_1, y_2 della prima), si sommeranno questi due logaritmi, e infine si cercherà sulla Tavola quale sia il numero che ha per logaritmo la somma ottenuta. Codesto numero sarà il prodotto cercato $y_1 y_2$.

Vediamo così che col sussidio della Tavola di logaritmi, la moltiplicazione si riduce ad una addizione; e analogamente, in base ai teoremi *B)* - *E)* del n. prec., ogni divisione si riduce ad una sottrazione, ogni elevamento a potenza alla moltiplicazione per l'esponente, e, in particolare, ogni estrazione di radice alla divisione per l'indice.

In tal modo i calcoli numerici vengono abbreviati e semplificati; e noi avremo modo di dare in proposito numerosi esempi (nn. 19-25), quando avremo trattato in modo più preciso delle proprietà e dell'uso dei logaritmi in base 10, che soli si adoprano nella pratica.

10. Prima per altro è opportuno aggiungere una osservazione *sul modo in cui si passa da un sistema di logaritmi ad un altro.*

Cerchiamo, cioè, quale relazione interceda tra i logaritmi di un medesimo numero y in due diverse basi a e b:

$$\log_a y, \quad \log_b y.$$

Abbiamo per definizione (n. 5)

$$y = b^{\log_b y}.$$

Se allora prendiamo il logaritmo in base a dei due membri di questa identità, avremo, pel n. 8*D*,

$$\log_a y = \log_b y \cdot \log_a b$$

ossia

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}.$$

Si ha dunque che *il logaritmo di un qualsivoglia numero in base b si ottiene dividendo il logaritmo dello stesso numero in base a per il* $\log_a b$, *ossia moltiplicandolo per*

$$\frac{1}{\log_a b}.$$

Quest'ultimo numero dicesi *modulo* pel passaggio dal sistema di logaritmi in base a al sistema in base b; e vediamo da quanto precede che, allorchè si cambia la base del sistema, i logaritmi di tutti i numeri variano proporzionalmente (nel rapporto dato dal *modulo*).

Ciò equivale a dire, che la curva logaritmica di base b si ottiene da quella di base a, facendone variare le ordinate di tutti i punti nel rapporto or ora detto. Così, ad es., se dalla curva logaritmica di base 10 (di cui si è dato un tratto al n. 7) si vuol dedurre quella di base 100, si osservi che $100 = 10^2$, talchè si ha $\log_{10} 100 = 2$; perciò basta ridurre le ordinate di tutti i punti della curva logaritmica di base 10 a metà. Si voglia, invece, la curva logaritmica di base 0,1: poichè $0{,}1 = 10^{-1}$

e, quindi, $\log_{10} 0{,}1 = -1$, basta cambiar segno alle ordinate di tutti i punti della curva logaritmica di base 10, cioè considerarne la simmetrica, rispetto all'asse delle ascisse.

Logaritmi volgari e uso delle corripondenti Tavole

11. Come già si è accennato (n. 9), nella pratica dei calcoli numerici si usano i logaritmi di base 10 o *logaritmi volgari* o anche del BRIGGS, dal nome del matematico inglese, che per primo ne intraprese il calcolo e ne pubblicò una tavola (*Arithmetica logarithmica*, Londini 1624).

Ci proponiamo qui di studiarne le proprietà e di illustrare, con regole ed esempi, l'uso delle corrispondenti Tavole.

Per semplicità di scrittura, denoteremo, per qualsiasi numero positivo y, il $\log_{10} y$ con $\operatorname{Log} y$, onde avremo anzitutto (n. 6)

$$\operatorname{Log} 1 = 0, \quad \operatorname{Log} 10 = 1 .$$

E, poichè la base 10 dei logaritmi volgari coincide con quella del sistema di numerazione decimale, è altrettanto facile trovare il Logaritmo di qualsiasi unità decimale, tanto maggiore che minore di 1. Le unità decimali maggiori di 1 sono, oltre il 10, di cui già conosciamo il Logaritmo,

$$100 = 10^2 \quad 1000 = 10^3 \quad 10000 = 10^4 \ldots\ldots$$

Si ha quindi, oltre $\operatorname{Log} 10 = 1$,

$$\operatorname{Log} 100 = 2 \quad \operatorname{Log} 1000 = 3 \quad \operatorname{Log} 10000 = 4 \ldots\ldots;$$

cioè *il Logaritmo di ogni unità decimale maggiore di* 1 *è dato dal numero degli zeri dell'unità considerata.*

Similmente le unità decimali minori di 1 sono

$$0{,}1 = 10^{-1} \quad 0{,}01 = 10^{-2} \quad 0{,}001 = 10^{-3} \ldots\ldots,$$

onde risulta

$$\operatorname{Log} 0{,}1 = -1 \quad \operatorname{Log} 0{,}01 = -2 \quad \operatorname{Log} 0{,}001 = -3 \ldots\ldots;$$

cioè *il Logaritmo di ogni unità decimale minore di* 1 *è dato* *dall'intero negativo, che ha tante unità quanti sono gli zeri dell'unità considerata* (compreso quello che precede la virgola).

Comunque si prefissi un numero positivo, le due osservazioni precedenti permettono di trovare il massimo intero, *positivo* o *negativo*, che non supera il Logaritmo del numero prefissato, e che si chiama la *caratteristica* di questo Logaritmo.

Si rifletta, invero, che, in quanto la base 10 qui adottata è maggiore di 1, al crescere del numero cresce anche il corrispondente Logaritmo (n. 7). Ne consegue che i numeri compresi fra $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$, cioè aventi la *parte intera di* 1 *sola cifra*, hanno Logaritmi compresi fra 0 ed 1, cioè di caratteristica 0; i numeri compresi fra $10 = 10^1$ e $100 = 10^2$, cioè aventi la *parte intera di* 2 *cifre*, hanno Logaritmi compresi fra 1 e 2, cioè di caratteristica 1; i numeri compresi fra $100 = 10^2$ e $1000 = 10^3$, cioè aventi la *parte intera di* 3 *cifre*, hanno Logaritmi compresi fra 2 e 3, cioè di caratteristica 2; e così via. Invece, passando ai numeri (positivi) minori di 1, abbiamo che quelli compresi fra $1 = 10^0$ e $0{,}1 = 10^{-1}$, cioè aventi 1 *zero davanti alla prima cifra significativa*, hanno Logaritmi compresi fra 0 e -1, cioè di caratteristica -1; i numeri compresi fra $0{,}1 = 10^{-1}$ e $0{,}01 = 10^{-2}$, cioè aventi 2 *zeri davanti alla cifra significativa*, hanno Logaritmi compresi fra -1 e -2, cioè di caratteristica -2; i numeri compresi fra $0{,}01 = 10^{-2}$ e $0{,}001 = 10^{-3}$, cioè aventi 3 *zeri davanti alla prima cifra significativa*, hanno Logaritmi compresi fra -2 e -3, cioè di caratteristica -3; e così via.

Possiamo dunque enunciare la seguente

Regola delle caratteristiche. — *La caratteristica del Logaritmo di un qualsiasi numero maggiore di* 1 *è l'intero* (positivo o nullo), *che si ottiene diminuendo di* 1 *il numero delle cifre della parte intera del numero considerato. La caratteristica del Logaritmo di un qualsiasi numero* (positivo) *minore di* 1 *è l'intero negativo, che ha tante unità, quanti sono gli zeri, che* (compreso quello a sinistra della virgola) *precedono nel numero considerato la prima cifra significativa.*

Così, ad es., la caratteristica di $\operatorname{Log} 3742{,}83$ è 3, quella di $\operatorname{Log} 0{,}004762$ è -3.

12. Prefissiamo un qualsiasi numero positivo y, e, per non ricadere su casi già esauriti, supponiamo che esso non sia nè 1, nè un'unità decimale. Il rispettivo Logaritmo, ove se ne indichi con c la caratteristica, che è sempre un intero (positivo o nullo se $y > 1$, negativo se $y < 1$), si può scrivere

$$\operatorname{Log} y = c + m,$$

dove m (eccesso del Logaritmo sulla rispettiva caratteristica) è un certo numero *sempre positivo* e *minore di* 1, cosicchè, scritto sotto forma decimale, ha nulla la parte intera. Poichè la caratteristica, in base alla regola del n. prec., si può in ogni caso assegnare immediatamente, nelle Tavole essa non è mai indicata; e vi sono, invece, registrate le cifre decimali della parte m, a partire dalla virgola e fino ad un determinato posto, che varia da Tavola a Tavola. Vi sono così *Tavole a* 4, *a* 5, *a* 6, *a* 7 *decimali* (¹); e solitamente l'ultima cifra vi si scrive arrotondata, se la prima cifra che si trascura è maggiore di 4, cosicchè ogni Tavola dà i Logaritmi con un errore (per difetto o per eccesso) minore di mezza unità dell'ultimo ordine (²).

In tal modo, è bene notarlo subito, *i calcoli con Loga-*

(¹) Subito dopo l'invenzione dei Logaritmi si calcolarono Tavole con un grande numero di decimali; p. es. l'*Arithmetica logarithmica* del BRIGGS contiene i Logaritmi dei numeri a 14 decimali. Ma più tardi si riconobbe che bastano per la pratica Tavole minori; così nei calcoli astronomici e geodetici di grande precisione si tien conto al più di 7 od 8 decimali, e per moltissime applicazioni (p. es. in Astronomia nautica, in Fisica, in Chimica) bastano Tavole a 5 decimali. Noi nel seguito per le nostre esercitazioni numeriche ci limiteremo ai primi 4 decimali.

(²) In molte Tavole si contraddistingue con un segno speciale (un asterisco, un punto, una lineetta) l'ultima cifra del Logaritmo, quando è arrotondata, cioè quando il Logaritmo è dato per eccesso.

ritmi sono tutti CALCOLI APPROSSIMATI e il grado dell'approssimazione, che si può raggiungere, dipende in ogni caso dal numero dei decimali della Tavola di Logaritmi, di cui si intende servirsi.

I gruppi delle prime 4 o 5 o 6 o 7 cifre decimali di m, che, come dicemmo, si trovano registrati nelle Tavole, diconsi *mantisse* dei rispettivi Logaritmi.

E qui va fatta un'osservazione fondamentale: *La mantissa del Logaritmo di un qualsiasi numero non varia, quando il numero si moltiplica o si divide per una qualsiasi potenza* (ad esponente intero positivo) *di* 10.

Infatti, indicato con n un qualsiasi intero positivo, si ha, qualunque sia il numero positivo y (n. 8 A),

$$\operatorname{Log}(10^n y) = \operatorname{Log} 10^n + \operatorname{Log} y = n + \operatorname{Log} y,$$
$$\operatorname{Log}(10^{-n} y) = \operatorname{Log} 10^{-n} + \operatorname{Log} y = -n + \operatorname{Log} y.$$

Si ha, dunque, che, secondo che y si moltiplica o si divide per 10^n, il Logaritmo aumenta o diminuisce di n, talchè varia bensì la caratteristica, ma non la mantissa.

L'osservazione precedente si può anche enunciare, dicendo che *la mantissa del Logaritmo di un qualsiasi numero dipende soltanto dalle cifre, che, in un dato ordine, costituiscono il numero considerato, ma non dal posto, che vi occupa la virgola.*

Di qui discende, che basta conoscere le mantisse dei Logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10, perchè risultino note quelle dei Logaritmi di tutti gli altri numeri. E, poichè naturalmente è impossibile calcolare le mantisse dei Logaritmi di *tutti* i numeri compresi fra 1 e 10, si registrano nelle Tavole quelle dei numeri, che, in codesto intervallo, si susseguono ad una differenza costante, tanto più piccola quanto maggiore è l'approssimazione, che si vuol raggiungere. Per es., nella *Tavola a 4 decimali*, che è allegata a questo volumetto e di cui oramai ci serviremo nel seguito, sono registrate le mantisse, con 4 decimali, dei numeri da

1 a 10, di centesimo in centesimo, cioè dei numeri

(9) $\qquad 1 \quad 1{,}01 \quad 1{,}02 \quad 1{,}03 \ldots\ldots \; 9{,}99\,;$

e notiamo subito, che in forza della osservazione fondamentale or ora enunciata, codeste mantisse son pur quelle di tutti i numeri che dai (9) si ottengono moltiplicandoli o dividendoli per una qualsiasi potenza di 10, cioè dei numeri costituiti, al più, da tre cifre significative consecutive, seguite o precedute da quanti zeri si vogliano.

Dobbiamo qui spiegare la disposizione di codesta Tavola e illustrarne l'uso. Le norme, che così daremo, valgono sostanzialmente per tutte le altre Tavole ad un numero maggiore di decimali; e, del resto, quelle, che si trovano in commercio, sono sempre accompagnate da speciali avvertenze, che ne spiegano l'uso.

13. Logaritmi dei numeri da 1 a 10 con tre cifre significative consecutive. I Logaritmi dei numeri da 1 a 9,99 di cui la nostra Tavola contiene le mantisse, hanno tutti la caratteristica 0, che, come già dicemmo, non è in alcun modo indicata nella Tavola. In questa la prima colonna, contrassegnata in alto con N, contiene le prime due cifre del numero, cioè la cifra degli interi e quella dei decimi; la terza cifra, o cifra dei centesimi, si trova in testa alle singole colonne delle mantisse, che sono appunto in numero di 10 e sono contrassegnate in alto con 0, 1, 2,...., 9.

Così, p. es., la mantissa del Logaritmo di 3,75 si trova all'incrocio della linea **37** e della colonna **5** ed è perciò data da 5740 [1]; avremo quindi

$$\operatorname{Log} 3{,}75 = 0{,}5740.$$

14. Logaritmi dei numeri da 1 a 10 con quattro o più cifre significative consecutive. Prendiamo un nu-

(1) L'alunno verifichi qui e nel seguito, valendosi della Tavola, i calcoli indicati nel testo.

numero compreso tra 1 e 10 e avente quattro cifre significative consecutive (di cui le due intermedie possono anche essere, l'una o l'altra o entrambe, nulle). Sia, per es. 5,033. Esso è compreso tra due numeri a tre sole cifre significative e fra loro consecutivi; precisamente, nel nostro caso, si ha

$$5{,}03 < 5{,}033 < 5{,}04,$$

onde risulta

$$\mathrm{Log}\,5{,}03 < \mathrm{Log}\,5{,}033 < \mathrm{Log}\,5{,}04,$$

ossia, calcolando, col sussidio della Tavola il primo e terzo Logaritmo (n. prec.)

$$0{,}7016 < \mathrm{Log}\,5{,}033 < 0{,}7024.$$

Il Logaritmo cercato avrà la caratterisca 0 e una mantissa compresa fra 7016 e 7024, cioè uguale a

$$7016 + d,$$

dove d indica un numero positivo certamente *non superiore alla differenza* 8 fra le due mantisse, consecutive nella nostra Tavola, 7016 e 7024, la quale dicesi *differenza tavolare* (delle due mantisse considerate).

Questa differenza tavolare 8 dà l'aumento (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 5,030 a 5,040, cioè cresce di 10 unità (del 3° ordine decimale), e noi dobbiamo determinare l'aumento d (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 5,030 a 5,033, cioè cresce di 3 unità (del 3° ordine decimale). Per trovare codesto numero d, si tien conto del fatto che sulla curva logaritmica archi abbastanza piccoli si confondono sensibilmente colle rispettive corde (n. 8) e perciò *si ammette* (il che è sufficientemente esatto nella pratica) *che l'aumento della mantissa sia proporzionale all'aumento dell'ultima cifra del numero* (REGOLA DELLE PARTI PROPORZIONALI). Così nel nostro caso porremo la proporzione

$$d : 3 = 8 : 10,$$

onde risulta

$$d = \frac{8 \cdot 3}{10} = 2{,}4$$

ossia approssimatamente

$$d = 2\,;$$

e anche in questa differenza si arrotonderebbe la cifra (o l'ultima cifra) che si conserva, se la prima che si trascura fosse maggiore di 4.

L'operazione suindicata dicesi *interpolazione* e si dispone nel modo seguente:

Log 5,033

	Numero	Mantissa
	Per 5,030	7016
$d : 3 = 8 : 10$		
	Per ... 3	2
	Log 5,033 = 0,7018	

Se poi è proposto un numero compreso fra 1 e 10, avente più di 4 cifre significative consecutive, il numero si accorcia, prendendone soltanto le prime quattro cifre e arrotondando la quarta se la quinta è maggiore di 4: per es. invece del numero

$$5{,}7836$$

si prenderà il numero

$$5{,}784$$

e si cercherà il Logaritmo di questo valore approssimato. E ciò è lecito, in quanto (cogliamo ancora una volta l'occasione di avvertirlo) i calcoli con Logaritmi sono sempre approssimati. Per il numero dianzi considerato si troverà:

Log 5,784

	Numero	Mantissa
	Per 5,780	7619
$d : 4 = 8 : 10$		
	Per ... 4	3
	Log 5,784 = 0,7622	

15. Logaritmo di un numero qualsiasi. Passiamo, infine, a considerare i numeri non compresi fra 1 e 10; e dapprima prendiamone uno maggiore di 10, per es. 327,47. Poichè la nostra Tavola consente di calcolare soltanto i Logaritmi dei numeri aventi 4 cifre significative consecutive, il numero proposto va accorciato, e, in quanto la 5ª cifra supera 4, la 4ª va arrotondata, cosicchè si è condotti a calcolare il Log 327,5. La caratterisca è 2 (n. 12) e la mantissa è quella stessa di Log 3,275 (n. 13) e si trova nel modo indicato al n. prec. Ecco come si dispone l'operazione:

Log 327,5

		Numero	Mantissa
	Per	327,0	5145
$d : 5 = 14 : 10$			
	Per	... 5	7
	Log	327,5 =	2,5152

Supponiamo, invece, che sia proposto un numero (positivo) minore di 1, per es. 0,285. Poichè le tre cifre sono precedute da 1 solo zero, la caratteristica di Log 0,285 è -1 (n. 12), mentre la mantissa è quella stessa di 2,85 (n. 13), cioè, come si rileva dalla Tavola, 4548. Si ha dunque

$$\text{Log}\, 0{,}285 = -1 + 0{,}4548.$$

Eseguendo la somma algebrica qui indicata si troverebbe

$$\text{Log}\, 0{,}285 = -0{,}5452\,;$$

ma *nei calcoli logaritmici siffatta somma algebrica non si eseguisce, e il Logaritmo (negativo) di un qualsiasi numero minore di* 1 *si scrive sempre sotto forma di somma algebrica della caratteristica negativa e della mantissa positiva.*

La caratteristica o parte intera si suole scrivere al suo posto prima della virgola, collocandole il segno $-$ al di sopra per ricordare che esso non riguarda la mantissa, la quale va presa positivamente. Così nel nostro caso si scriverà

$$\operatorname{Log} 0{,}285 = \bar{1}{,}4548 .$$

e si dovrà tener sempre presente che la scrittura al secondo membro sta a designare la somma algebrica [1]

$$-1 + 0{,}4548.$$

Se poi si vuole il Logaritmo di un numero (positivo) minore di 1, le cui cifre significative siano più di 3, come, ad es., 0,056317, si comincia col ridurre queste cifre a 4 arrotondando al solito la 4ª se la 5ª supera 4; e così nel caso or ora indicato si prende del numero proposto il valore approssimato 0,05632. La caratteristica è, in questo caso, -2 (n. 12), e la mantissa, che è quella stessa di 5,632 (n. 13), si calcola nel modo indicato al n. prec. Si trova così:

Log 0,05632

		Numero	Mantissa
	Per	0,05630	7505
$d : 2 = 8 : 10$			
	Per	 2	2
	Log	0,05632 =	$\bar{2}{,}7507$

16. Nelle Tavole di Logaritmi sono segnate solitamente, a margine delle colonne delle mantisse o in fondo alle pagine, certe tabellette (contrassegnate per lo più con « P. P. » = « *Partes Proportionales* ») che forniscono, per ciascuna delle varie differenze tavolari che si presentano nella pagina considerata della Tavola, gli aumenti da darsi alla mantissa, corrispondentemente ad un aumento, pel numero, di 1, 2, 3,..., 9 decimi dell'unità decimale cui corrisponde la differenza tavolare: così p. es. per una differenza tavolare di 8 la tabelletta sarà quella indicata qui accanto.

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

(1) Poichè qui la parte soprassegnata con — precede la virgola, non vi è luogo ad equivoco con la notazione, formalmente simile ma di tutt'altro significato, che si usa a indicare il periodo dei numeri decimali periodici, p. es.

$$7{,}\bar{3} = 7{,}3333 \ldots.$$

17. CALCOLO LOGARITMICO INVERSO. Nei nn. precedenti abbiamo visto come una Tavola di Logaritmi permetta di *calcolare il Logaritmo di un qualsiasi numero* (positivo). Ma pei calcoli numerici è necessario saper risolvere anche il PROBLEMA INVERSO: *Calcolare il numero che ha un dato Logaritmo.*

Vi sono delle cosidette *Tavole di antilogaritmi*, costruite in modo perfettamente simile a quelle di Logaritmi, che permettono appunto di trovare il numero che ha un dato Logaritmo. Ma il medesimo problema si può anche risolvere, usando una Tavola di Logaritmi, p es. la nostra Tavola a 4 decimali.

Per indicare il procedimento, riferiamoci ad un esempio concreto e proponiamoci di trovare il numero y che ha il Logaritmo

$$1{,}941463....$$

Anzitutto, volendo noi valerci della nostra Tavola a 4 decimali, accorceremo il dato Logaritmo a 4 cifre decimali (arrotondando la 4ª se, come nel caso or ora proposto, la successiva è maggiore di 4); così considereremo del dato Logaritmo il valore approssimato

$$1{,}9415.$$

La caratteristica 1 di questo Logaritmo ci dice che y ha una parte intera di 2 cifre (n. 12). D'altra parte scorrendo sulla nostra Tavola le colonne delle mantisse, rileviamo che la mantissa 9415 del nostro Logaritmo si trova all'incrocio della linea 87 e della colonna 4. Sarà quindi

$$y = 87{,}4 .$$

Ma in generale la mantissa del Logaritmo dato, pur comprendendo 4 sole cifre, non si troverà nella nostra Tavola. In tal caso essa risulterà compresa fra due mantisse consecutive. Si otterranno così due valori approssimati pel numero y e si potrà trovarne una cifra ulteriore, applicando, in modo inverso, la *Regola delle parti proporzionali* (n. 14).

Si voglia, p. es., trovare il numero y tale che sia

$$\operatorname{Log} y = 2{,}4128.$$

La catteristica 2 ci dice che y ha una parte intera di 3 cifre. Scorrendo poi la Tavola si trova che la mantissa 4128 di Log y è compresa fra le due mantisse

$$4116 \quad \text{e} \quad 4133,$$

che nella Tavola sono consecutive e corrispondono ai due numeri (a parte intera di 3 cifre)

$$258 \quad \text{e} \quad 259$$

Avremo dunque intanto

$$258 < y < 259.$$

Se poi vogliamo trovare un' altra cifra di y, cioè, in questo caso, la sua prima cifra decimale D, notiamo che la differenza tavolare relativa alle due mantisse 4116 e 4133 è 17, e che per avere la mantissa 4128 di Log y bisogna accrescere 4116 di 12. In base alla Regola delle parti proporzionali porremo la proporzione

$$12 : D = 17 : 10$$

onde risulta

$$D = \frac{12 \times 10}{17} = 7{,}0....$$

ossia per approssimazione

$$D = 7.$$

Sarà dunque

$$y = 258{,}7\,.$$

L' operazione si dispone nel modo seguente:

$$\operatorname{Log} y = 2{,}4128$$

		Mantissa	Numero
	Per	4116	258,0
$12 : D = 17 : 10$			
	Per	...12	...7
			$y = 258{,}7$

18. Supponiamo da ultimo che si voglia trovare il numero y, che ha un dato Logaritmo negativo, p. es.

$$\operatorname{Log} y = -2{,}3161.$$

Per poter trarre profitto dall'uso della Tavola, qui bisogna anzitutto *ridurre il dato Logaritmo alla solita forma dei Logaritmi negativi* (n. 15): bisogna, cioè, ridurre positiva la parte decimale.

Ora a ciò si perviene semplicemente aggiungendo 1 alla parte decimale e sottraendo 1 dalla parte intera:

$$-2{,}3161 = -2 - 0{,}3161 = (-2-1) + (1-0{,}3161) =$$
$$= -3 + 0{,}6839 = \overline{3}{,}6839$$

Onde risulta che, praticamente, *un Logaritmo negativo si riduce alla forma utile pei calcoli, diminuendo di* 1 *la parte intera e sostituendo alle prime* 3 *cifre decimali le rispettive differenze da* 9 *e alla quarta la sua differenza da* 10.

Ridotto così il nostro $\operatorname{Log} y$ alla forma voluta

$$\operatorname{Log} y = \overline{3}{,}6839,$$

rileviamo, cercando la mantissa 6839 nella Tavola, che il numero y ha le cifre significative 483; e. poichè la caratteristica è $\overline{3}$, la prima cifra significativa sarà al *terzo* posto dopo la virgola: onde si conclude:

$$y = 0{,}00483.$$

E quando la mantissa proposta non si trova nella Tavola, si procede per interpolazione, applicando la *Regola delle parti proporzionali* nel modo indicato al n. prec. Per es.,

$$\operatorname{Log} y = -1{,}3465 = \overline{2}{,}6535$$

	Mantissa	Numero
	Per 6532	0,04500
$3 : D = 11 : 10$		
	Per ...3	3
		$y = 0{,}04503$

Calcoli logaritmici

19. Come già si accennò al n. 9, l'uso dei Logaritmi permette di semplificare notevolmente i calcoli numerici. Illustreremo qui con alcuni esempi siffatte applicazioni dei Logaritmi, aggiungendo qualche avvertenza sul modo di eseguire e disporre i calcoli. Naturalmente si tratta sempre di calcoli approssimati e, come già avvertimmo, il grado dell'approssimazione dipende dal numero dei decimali della Tavola di cui si intende valersi. Noi continueremo a servirci della nostra Tavola a 4 decimali.

20. PRODOTTO. — Si voglia eseguire il prodotto

$$x = 375 \times 0{,}00827 \times 1{,}685 \times 48{,}36\,.$$

Abbiamo pel n. 8*A*

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} 375 + \operatorname{Log} 0{,}00827 + \operatorname{Log} 1{,}685 + \operatorname{Log} 48{,}36\,;$$

perciò, col sussidio della Tavola si troverà

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{Log} & 375 & = 2{,}5740 \\
\operatorname{Log} & 0{,}00827 & = \overline{3}{,}9175 \\
\operatorname{Log} & 1{,}685 & = 0{,}2266 \\
\operatorname{Log} & 48{,}36 & = 1{,}6844 \\
\hline
\operatorname{Log} x & & = 2{,}4025
\end{array}$$

e quindi (n. 17)

$$x = 252{,}6\,.$$

Nel sommare i Logaritmi dei vari fattori bisogna tener presente che, mentre le mantisse sono tutte positive, le caratteristiche sono in parte positive e in parte negative, cosicchè, dopo aver sommato le mantisse e scritta la parte decimale della somma ottenuta, si riporta la parte intera e questa si aggiunge alla somma *algebrica* delle caratteristiche.

21. Quoziente. — Per calcolare un quoziente si ricorre alla identità (n. 8*B*)

$$\operatorname{Log}\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{Log} y_1 - \operatorname{Log} y_2,$$

Si è così condotti a calcolare la differenza di due Logaritmi. Ma siccome il risultato di codesta sottrazione è un Logaritmo, del quale poi si cercherà il numero corrispondente, conviene fare in modo che

$$\operatorname{Log} y_1 - \operatorname{Log} y_2$$

risulti subito sotto la solita forma di Logaritmo, cioè abbia la parte decimale positiva. Ciò si ottiene senz'altro riducendo sin da principio a codesta forma $-\operatorname{Log} y_2$, secondo la regola pratica data al n. 18. Qui notiamo che $-\operatorname{Log} y_2$ non è altro che $\operatorname{Log}\frac{1}{y_2}$ (n. 8*C*), ed è da taluno chiamato il Cologaritmo di y_2 e designato con $\operatorname{Colog} y_2$.

Naturalmente, perchè la suaccennata trasformazione di $-\operatorname{Log} y_2$ sia vantaggiosa nella pratica, bisogna che si sappia eseguire a memoria, nell'atto stesso che si rileva dalla Tavola la mantissa di $\operatorname{Log} y_2$.

Ecco come si dispone il calcolo logaritmico di un quoziente:

$$x = \frac{4,76}{0,00853}$$

$$\begin{array}{rcr}
\operatorname{Log} 4,76 & = & 0,6776 \\
-\ \operatorname{Log} 0,00853 & = & 2,0691 \\
\hline
\operatorname{Log} x & = & 2,7467 \\
x & = & 558,1
\end{array}$$

22. Potenza ad esponente intero positivo. — In base alla identità (n. 8*D*)

$$\operatorname{Log} y^n = n \operatorname{Log} y,$$

per calcolare la potenza y^n, si cerca il $\operatorname{Log} y$, e, moltiplicando questo per n, si ottiene il Logaritmo del numero cercato; dopo di che questo numero si calcola nel solito modo, ricorrendo alla Tavola.

Per es.

$$x = (7{,}58)^5$$
$$\text{Log}\,7{,}58 = 0{,}8797$$
$$\text{Log}\,x = 5\,\text{Log}\,7{,}58 = 4{,}3985$$
$$x = 25030\,.$$

Qui si è condotti a moltiplicare un Logaritmo per un intero positivo. Se il Logaritmo da moltiplicare è a caratteristica negativa, bisogna tener presente che esso è la somma algebrica di una parte intera negativa e di una parte decimale positiva.

Sia p. es. da calcolare

$$x = (0{,}913)^7.$$

Avremo

$$\text{Log}\,x = 7\,\text{Log}\,0{,}913$$

dove

$$\text{Log}\,0{,}913 = \bar{1}{,}9605$$

ossia, precisamente,

$$\text{Log}\,0{,}913 = -1 + 0{,}9605\,.$$

Sarà dunque

$$\text{Log}\,x = 7\,\text{Log}\,0{,}913 = -7 + 0{,}9605 \times 7 =$$
$$= -7 + 6{,}7235 = \bar{1}{,}7235,$$

e quindi infine

$$x = 0{,}529\,.$$

23. Estrazione di radice. — Basta applicare l'identità (n. $8E$)

$$\text{Log}\,\sqrt[n]{y} = \frac{1}{n}\,\text{Log}\,y\,.$$

Così per calcolare

$$x = \sqrt[8]{350}$$

si pone

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{8} \operatorname{Log} 350 = \frac{1}{8} \times 2{,}5441 = 0{,}3180,$$

onde risulta

$$x = 2{,}08.$$

Il calcolo così indicato conduce a dividere un Logaritmo per un numero intero. Se il Logaritmo è a caratteristica negativa, occorre qualche artificio per far sì che il quoziente risulti sotto la forma consueta dei Logaritmi negativi, cioè abbia positiva la parte decimale.

Il modo, in cui si eseguisce la operazione, è sufficientemente chiarito dal seguente esempio numerico:

$$x = \sqrt[5]{0{,}0255}$$

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{5} \operatorname{Log} 0{,}0255 = \frac{1}{5} \times \overline{2},4065 = \frac{1}{5}(-2 + 0{,}4065) =$$

$$= \frac{1}{5}(-5 + 3{,}4065) = -1 + \frac{1}{5} \times 3{,}4065 = \overline{1},6813$$

$$x = 0{,}4801.$$

24 Applicando insieme i varii procedimenti indicati nei nn. prec., si può calcolare rapidamente, col sussidio dei Logaritmi, ogni espressione numerica *monomia* (anche fratta) cioè comprendente quante si vogliano moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici (escluse cioè le addizioni). Sia p. es. da calcolare un valore approssimato di

$$x = \frac{5a^2b^3}{c\sqrt[4]{d}},$$

dove sia

$$a = 3{,}85 \qquad b = 0{,}728 \qquad c = 291 \qquad d = 0{,}0463.$$

Avremo

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} 5 + 2 \operatorname{Log} a + 3 \operatorname{Log} b - \operatorname{Log} c - \frac{1}{4} \operatorname{Log} d;$$

e, poichè la Tavola dà

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} 5 &= 0{,}6990 \\ \operatorname{Log} a &= 0{,}5855 \\ \operatorname{Log} b &= \bar{1}{,}8621 \\ \operatorname{Log} c &= 2{,}4639 \\ \operatorname{Log} d &= \bar{2}{,}6656\,, \end{aligned}$$

l'operazione si eseguirà nel modo seguente (si ricordino le avvertenze dei nn. 20-23):

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} 5 &= 0{,}6990 \\ 2 \operatorname{Log} a &= 1{,}1710 \\ 3 \operatorname{Log} b &= \bar{1}{,}5863 \\ -\operatorname{Log} c &= \bar{3}{,}5361 \\ -\frac{1}{4} \operatorname{Log} d &= 0{,}3336 \\ \hline \operatorname{Log} x &= \bar{1}{,}3260 \\ x &= 0{,}2119\,. \end{aligned}$$

25. Per dare un altro esempio di calcolo logaritmico di una espressione numerica monomia, proponiamoci di ***trovare un valore approssimato del raggio x di una sfera di dm.³ 693 di volume.***

Sarà

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = 693$$

ossia

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \times 693}{4\pi}}$$

e quindi

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{3} \cdot (\operatorname{Log} 3 + \operatorname{Log} 693 - \operatorname{Log} 4 - \operatorname{Log} \pi).$$

Prendendo per π il valore approssimato 3,141, ricaviamo dalla Tavola

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \quad 3 &= 0{,}4771 \\ \operatorname{Log} 693 &= 2{,}8407 \\ \operatorname{Log} \quad 4 &= 0{,}6021 \\ \operatorname{Log} \quad \pi &= 0{,}4970; \end{aligned}$$

onde l'operazione si eseguirà nel modo seguente:

$$
\begin{array}{rr}
\text{Log } 3 = & 0,4771 \\
\text{Log } 693 = & 2,8407 \\
-\text{Log } 4 = & \bar{1},3979 \\
-\text{Log } \pi = & \bar{1},5030 \\
\hline
3 \text{ Log } x = & 2,2187 \\
\text{Log } x = & 0,7396 \\
x = & 5,49;
\end{array}
$$

cioè il raggio della sfera è di dm. 5,49.

CAPITOLO IX

Progressioni

Progressioni aritmetiche

1. Più numeri, in un dato ordine, si dicono costituire una *progressione aritmetica*, se le differenze, che si ottengono sottraendo ciascuno di questi numeri dal successivo, sono uguali fra loro. Il valore comune di queste differenze si dice *differenza* o anche *ragione* della progressione e i singoli numeri, che costituiscono la progressione, si chiamano *termini*. Per indicare che più numeri costituiscono una progressione aritmetica, si premette ad essi il segno $\div$.

Esempi di progressioni aritmetiche sono

$$\div \quad 8 \quad 11 \quad 14 \quad 17 \quad 20$$

$$\div \quad 5 \quad \frac{9}{2} \quad 4 \quad \frac{7}{2} \quad 3 \quad \frac{5}{2} \quad 2.$$

e la differenza è nel primo caso 3, nel secondo $-\frac{1}{2}$.

Queste due progressioni hanno un numero finito di termini o, come si suol dire, sono finite.

Un esempio di progressione aritmetica *infinita*, cioè avente infiniti termini, è dato dalla serie dei numeri interi positivi

$$\div \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots ;$$

e se si considerano tutti i numeri interi, positivi e negativi, con lo zero intercalato fra gli uni e gli altri,

$$\div \quad \ldots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots ,$$

si ha una progressione aritmetica infinita in entrambi i sensi.

In ogni caso, se i termini di una progressione si interpretano, su di una retta graduata, come ascisse di altrettanti punti, questi punti risultano a distanza costante, ciascuno dal successivo.

2. Se a è un qualsiasi termine di una progressione aritica, di cui sia d la differenza, il termine successivo è $a+d$, quello precedente $a-d$, cosicchè i termini della progressione, a partire dal termine a, verso destra e verso sinistra, sono dati ordinatamente da

$$\ldots \quad a-3d \quad a-2d \quad a-d \quad a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad \ldots$$

Vediamo così che, se i termini della progressione si contano a partire da a, come primo, l' n^{mo} termine verso destra è dato da

$$a+(n-1)d,$$

l' n^{mo} termine verso sinistra è dato da

$$a-(n-1)d.$$

È pur evidente che, se è data una progressione aritmetica finita, possiamo sempre prolungarla di quanti termini vogliamo, sia nell' uno che nell' altro senso, e considerarla come facente parte di una progressione aritmetica infinita; basta aggiungere a destra successivamente i termini, che dall' ultimo della progressione data si ottengono, aumentandolo di d, $2d$, $3d$, $4d$, ..., e, similmente, aggiungere a sinistra i termini, che dal primo della progressione data si ottengono, diminuendolo di d, $2d$, $3d$, $4d$, ...

3. Se a, b, c sono tre termini consecutivi di una progressione aritmetica, si deve avere, per definizione (n. 1),

$$b-a=c-b,$$

onde risulta

$$2b=a+c \quad \text{ossia} \quad b=\frac{a+c}{2};$$

cioè: *Ogni termine di una progressione aritmetica è uguale alla media aritmetica fra il precedente e il successivo.*

Ora in varie questioni si è condotti al seguente problema. *Fra due numeri dati a e b inserire un dato numero n di medie aritmetiche,* cioè trovare n numeri, che, intercalati in un ordine opportuno fra a e b, costituiscano con essi una progressione aritmetica (di $n+2$ termini).

Tutto si riduce a trovare la differenza d di questa progressione, di cui il dato numero a deve essere il primo termine e b l'$(n+2)^{mo}$. Perciò si è condotti (num. prec.) alla equazione

$$b = a + (n+1)\,d,$$

da cui risulta

(1)
$$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

Così per inserire 3 medie aritmetiche fra 5 e 12 basta prendere la differenza

$$d = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4},$$

e si trova

$$\div \quad 5 \quad \frac{27}{4} \quad \frac{34}{4} \quad \frac{41}{4} \quad 12.$$

Quando fra a e b si inseriscono n medie aritmetiche, l'intervallo fra i due numeri a e b, la cui misura (relativa) è $b-a$ (V, n. 10), risulta diviso in $n+1$ parti uguali, la cui misura è data appunto dalla (1).

Va anche notato che, se è data una progressione aritmetica, e fra le singole coppie di termini consecutivi si inserisce un medesimo numero n di medie aritmetiche, si ottiene una nuova progressione aritmetica, di cui fanno parte tutti i termini della data. Se d è la differenza di questa, la differenza della nuova progressione è $\dfrac{d}{n+1}$.

4. In una progressione aritmetica consideriamo un certo numero n di termini consecutivi, di cui il primo sia a. Se d è la differenza, essi sono dati (n. 2) da

$$a \qquad a+d \qquad a+2d \qquad a+3d \ldots$$
$$a+(n-2)d \qquad a+(n-1)d.$$

La somma del primo e dell' n^{mo} termine è data da

$$a + a + (n - 1)d = 2a + (n - 1)d\,;$$

ed è evidente che allo stesso risultato si perviene, sommando il secondo termine e il penultimo, perchè il secondo si ottiene dal primo, aumentandolo di d, mentre il penultimo si ottiene dall' ultimo, diminuendolo di d. E nello stesso modo si riconosce che sono uguali alle due somme così considerate la somma del terzo termine e dell' antipenultimo, e così via. Abbiamo dunque che: *In una progressione aritmetica finita le coppie di termini equidistanti dagli estremi hanno tutte la medesima somma.*

Se il numero dei termini è dispari, cioè 3 o 5 o 7..., uno di essi risulta equidistante dagli estremi, cioè il 2° o il 3° o il 4°...; e la somma (2) del primo e dell' ultimo termine risulta uguale al doppio di codesto termine centrale.

5. Il teorema del num. prec. conduce ad una regola per calcolare la somma di un qualsiasi numero di termini consecutivi di una progressione aritmetica.

Sia n il loro numero, e, per mettere in evidenza il numero d' ordine di ciascun termine, indichiamoli con

$$\div\quad a_1\quad a_2\quad a_3\ \dots\ a_{n-2}\quad a_{n-1}\quad a_n.$$

Per calcolare la loro somma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

riscriviamola coi termini in ordine inverso

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1,$$

e poi sommiamo membro a membro queste due uguaglianze, raccogliendo a secondo membro i primi addendi delle due somme, e poi i due secondi, i due terzi, e così via. Otteniamo in tal modo

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Poichè gli n binomî a secondo membro sono uguali fra loro (num. prec.), si conclude

$$2S = n(a_1 + a_n),$$

e quindi

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Perveniamo così al seguente teorema: *La somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica è uguale ad n volte la media aritmetica del primo e dell'ultimo.*

Così, ad es., per la somma dei primi n interi positivi troviamo

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

per la somma dei primi n interi positivi dispari

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(n-1) + 1] = n^2;$$

onde si vede che la somma di quanti si vogliano interi positivi dispari, a partire da 1, è sempre un quadrato perfetto.

Progressioni geometriche

6. Più numeri in un dato ordine (o *termini*) si dicono costituire una *progressione geometrica*, se i quozienti che si ottengono, dividendo ciascuno di codesti termini per il precedente sono tutti uguali fra loro. Il valore comune di codesti quozienti si dice *ragione o quoziente* della progressione geometrica. Per indicare che più numeri sono in progressione geometrica, si premette ad essi il segno $\div\div$.

Esempi di progressioni geometriche *finite*, cioè aventi un numero finito di termini, sono

$$\div\div \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48$$

$$\div\div \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{1}{27} \quad \frac{1}{81};$$

e la ragione è rispettivamente 2 e $-\frac{1}{3}$.

Sono invece *infinite* le progressioni geometriche, di ragione $\frac{1}{2}$ e -3 rispettivamente,

$$\div\div\quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}\dots,$$

$$\div\div\quad \dots \frac{2}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad 2 \quad -6 \quad 18\dots$$

Ed è una progressione geometrica la successione di tutte le potenze ad esponente intero (positivo e negativo) di un qualsiasi numero a:

$$\div\div\quad \dots \quad a^{-3} \quad a^{-2} \quad a^{-1} \quad \cdot 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \dots.$$

Si avverta che in una progressione geometrica, perchè conservi un senso la definizione, è necessario che nessun termine sia nullo, talchè anche la ragione, quoziente di un qualsiasi termine per il precedente, deve essere diversa da zero.

Invero ogni termine, che non sia l'ultimo di una progressione finita, deve essere diverso da zero, perchè abbia senso il quoziente della divisione per esso del termine successivo. Se poi fosse nullo l'ultimo termine di una progressione geometrica finita, risulterebbe uguale a zero la ragione (quoziente dell'ultimo termine per il precedente) e quindi anche il penultimo termine, come avente nullo il rapporto all'antipenultimo; e ciò, come si è visto or ora, non può succedere.

7. Se a è un qualsiasi termine di una progressione geometrica di ragione q, il termine successivo è aq, quello precedente $\frac{a}{q}$, cosicchè i termini della progressione a partire da a, verso destra e verso sinistra sono dati ordinatamente

$$(3)\qquad \div\div\quad \dots \frac{a}{q^3} \quad \frac{a}{q^2} \quad \frac{a}{q} \quad a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3\dots$$

Perciò, se i termini della progressione si contano a partire da a, come primo, l'n^{mo} verso destra è dato da

$$aq^{n-1},$$

l' n^{mo} verso sinistra da

$$\frac{a}{q^{n-1}}.$$

Dalla forma (3) dei termini di una progressione geometrica si rileva che, se la ragione q è, in valore assoluto, maggiore di 1, essi, purchè si vada abbastanza avanti verso destra, finiscono col diventare, in valore assoluto, grandi quanto si vuole (VII, n. 9*A*), mentre invece verso sinistra finiscono col ridursi, in valore assoluto, minori di qualsiasi numero positivo prefissato (VII, n. 10*A*). E accade l'opposto se è $|q| < 1$.

Quanto al segno, se la ragione q è positiva, tutti i termini (3) della progressione hanno lo stesso segno; se, invece, è $q < 0$, essi sono di segni alternati.

Non hanno interesse i due casi, in cui sia $q = 1$ o $q = -1$; nel primo, i termini della progressione sono tutti uguali, nel secondo hanno valori assoluti uguali e segni alternati.

Notiamo, infine, che ogni progressione geometrica finita, come risulta dalla forma (3) dei suoi termini, si può prolungare in entrambi i sensi e considerarla come facente parte di una progressione infinitita: basta aggiungerle a destra successivamente i termini che dall'ultimo si ottengono, moltiplicandolo per q, q^2, $q^3 \ldots$, e a sinistra quelli, che dall'ultimo si ottengono, dividendolo per q, q^2, q^3, ...

8. Siano a, b, c tre termini consecutivi di una progressione geometrica. Essi sono necessariamente diversi da zero tutti e tre, e in ogni caso a e c hanno lo stesso segno (n. prec.) Inoltre si ha, per definizione,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

e quindi

$$b^2 = ac$$

con $ac > 0$. Perciò

$$b = \pm \sqrt{ac}.$$

Abbiamo dunque che: *In una progressione geometrica ogni termine è uguale, in valore assoluto, alla media geometrica fra il termine precedente e quello successivo.*

Come nel caso delle progressioni aritmetiche, si è talvolta condotti al problema seguente: *Inserire fra due numeri dati a, b un dato numero n di medie geometriche,* cioè trovare n numeri, che, intercalati in un certo ordine fra a e b, costituiscano con questi due numeri una progressione geometrica (di $n+2$ termini).

Per considerare il caso, che ha effettivamente interesse, supponiamo a e b entrambi positivi. Indicata con q la ragione incognita della progressione voluta, notiamo che in questa progressione il numero b deve essere il termine $(n+2)^{mo}$, quando come primo termine si prenda il numero a. Deve dunque essere (n. prec.)

$$b = aq^{n+1}, \tag{4}$$

cosicchè, se si resta nel campo dei numeri positivi, si trova (tanto per n pari, quanto per n dispari)

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}. \tag{5}$$

Nel campo dei numeri relativi, se n è dispari, si può prendere per la ragione q indifferentemente l'uno o l'altro dei due valori opposti

$$= \pm \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}};$$

mentre, invece, se n è pari, q non può avere che il valore positivo (5).

Se poi si considera anche il caso, dianzi escluso, in cui a e b siano di segno contrario, deve pur sempre sussistere la (4), cosicchè, essendo $\frac{a}{b} < 0$, si riconosce, che per n dispari il problema non ha soluzioni; cioè non è possibile inserire un numero dispari di medie geometriche fra due numeri di segno contrario (in accordo con le osservazioni del n. prec. sui segni dei termini di una progressione geometrica). Se, invece, n è pari, il problema ammette un'unica soluzione, data, anche in questo caso, dalla (5), che qui fornisce per la ragione un valore negativo.

In ogni caso, se è data una progressione geometrica e fra le coppie di termini consecutivi si inserisce un medesimo numero n di medie geometriche, si ottiene una nuova progressione geometrica, in cui compaiono come termini tutti quelli della data. Se q è la ragione di questa, la ragione della nuova progressione è $\sqrt[n+1]{q}$.

9. Proponiamoci si calcolare la somma di un qualsiasi numero n di termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q, diversa da 1, cioè, indicato con a il primo dei termini considerati, la somma

$$\begin{aligned}(6)\qquad S &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \\ &= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per q, otteniamo

$$qS = a(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n),$$

cosicchè, sottraendo membro a membro da questa uguaglianza la precedente, troviamo

$$(q - 1)\ S = a(q^n - 1)$$

e quindi, essendo $q \gtrless 1$,

$$(7)\qquad S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Notiamo che questo stesso risultato si può dedurre immediatamente dalla (6), ricordando l'identità (I, n. 16):

$$(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})(q - 1) = q^n - 1.$$

Scrivendo la (7) sotto la forma

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

siamo condotti alla seguente regola: *La somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica* (di ragione diversa di 1) *si ottiene, dividendo la differenza fra il primo termine e quello, che segue l'n^{mo}, per la differenza fra l'unità e la ragione.*

La formula (7) dà luogo a notevoli applicazioni, di cui daremo un cenno negli Esercizî.

Progressioni e logaritmi

10. Dalla considerazione di due progressioni, l'una aritmetica e l'altra geometrica, si può trarre una nuova definizione dei logaritmi, che qui rapidamente accenneremo. L'accordo con quella del n. 5 del Cap. VIII si riconoscerà immediatamente.

Preso ad arbitrio un numero a positivo e diverso da 1, consideriamo le due progressioni infinite

$$(8) \qquad \div\!\div \;\ldots\; a^{-3} \quad a^{-2} \quad a^{-1} \quad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \;\ldots\;,$$

$$(9) \qquad \div \;\ldots\; -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \;\ldots\;.$$

di cui la prima è la progressione geometrica delle potenze ad esponente intero (positivo o negativo) di a, mentre la seconda è la progressione aritmetica dei rispettivi esponenti, cioè dei numeri interi (positivi e negativi): e ad ogni termine della (8) facciamo corrispondere il termine della (9), che gli sta sotto: cioè facciamo corrispondere al termine 1 della (8) il termine 0 della (9), e ad ogni altro termine della (8) quel termine della (9), che, rispetto al termine 0, occupa il medesimo posto, che il termine considerato della (8) occupa rispetto al termine 1.

Dopo ciò, immaginiamo di inserire fra ciascuna coppia di termini consecutivi della progressione geometrica (8) un qualsiasi numero n di medie geometriche e, similmente, di inserire fra ciascuna coppia di termini consecutivi della progressione aritmetica (9) il medesimo numero n di medie aritmetiche. Con questa intercalazione otteniamo due nuove progressioni, la prima geometrica, la seconda aritmetica, di cui fanno parte rispettivamente tutti i termini della (8) e della (9).

Orbene, di ogni numero y, così ottenuto come termine della nuova progressione geometrica, si chiama *logaritmo* in *base* a quel termine della nuova progressione aritmetica, che, rispetto al termine 0, occupa il medesimo posto, che y occupa nella progressione geometrica, rispetto al termine 1.

Si può a tutta prima pensare che il logaritmo così definito per un numero y dipenda dal numero n di medie geometriche, che si son dovute inserire fra i termini consecutivi della (8) per trovare fra i termini della nuova progressione geometrica il numero y. Invece è facile dimostrare che, anche se al medesimo y si perviene inserendo fra i termini consecutivi della (8) un diverso numero n' di medie geometriche, il termine di ugual posto della progressione aritmetica, che dalla (9) si deduce, inserendovi fra termine e termine n' medie aritmetiche, è sempre quello stesso di prima. Ma noi qui tralascieremo questa dimostrazione (vedansi gli Esercizi); e perverremo indirettamente al medesimo risultato, mostrando che la nuova definizione di logaritmo si accorda con quella del n. 5 del Cap. VIII, la quale, come si è visto, definisce il logaritmo in modo unico.

A tal fine, osserviamo che la ragione della progressione geometrica, che dalla (8) si ottiene, inserendovi fra termine e termine n medie geometriche, è data (n. 8) da

$$\sqrt[n+1]{a}, \tag{10}$$

cosicchè un numero y, il quale compaia fra i termini di questa nuova progressione geometrica, avente la ragione (10) e contenente il termine 1, sarà dato da

$$y = \left(\sqrt[n+1]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n+1}} \tag{11}$$

dove m denota un certo intero, positivo o negativo. D'altra parte, la differenza della corrispondente progressione aritmetica, che dalla (9) si deduce inserendovi fra le coppie di termini consecutivi n medie aritmetiche, è (n. 3)

$$\frac{1}{n+1},$$

e il numero che, secondo la nuova definizione, si è chiamato logaritmo di y, cioè il termine, che in questa nuova progressione aritmetica occupa, rispetto al termine 0, lo stesso posto che nella progressione geometrica è occupato dal numero (11) rispetto al termine 1, è dato da

$$\frac{m}{n+1},$$

cioè precisamente dall'esponente, che bisogna dare alla base a per avere il numero y.

Vi è dunque perfetto accordo fra le due definizioni.

11. Sarebbe facile dimostrare, anche partendo dalla nuova definizione, la proprietà fondamentale dei logaritmi, da cui discendono tutte le altre, cioè il teorema sul logaritmo del prodotto di quanti si vogliano fattori positivi (VIII, n. 8).

Ma non ci indugeremo a dare questa dimostrazione, e chiuderemo on un'altra osservazione.

La definizione per mezzo delle progressioui dà un senso soltanto ai logaritmi di quei numeri, che si possono inserire come medie geometriche fra i termini della progressione (8) delle potenze della base a, cioè, più precisamente, ai logaritmi delle potenze di a ad *esponente razionale.* Ma questa limitazione non costituisce una difficoltà per i fini pratici, cui sono destinati i logaritmi. Poichè, come si è ben chiarito nel Cap. VIII, i calcoli logaritmici sono tutti approssimati, ad ogni numero, che non sia una potenza di a ad esponente razionale, si sostituirà un valore approssimato, che sia di tal natura. E in ogni caso il logaritmo di un numero qualsiasi si potrà anche definire, approssimandolo indefinitamente con logaritmi di potenze di a ad esponente razionale.

CAPITOLO X

Interesse composto. Annualità. Ammortamento.

Interesse

1. È notorio che chi riceve una somma di danaro o *capitale* a *prestito*, cioè in uso temporaneo, con impegno di restituzione dopo un determinato tempo, dà a chi presta la somma un certo compenso, che si chiama *interesse*, e che, naturalmente, va commisurato alla entità del capitale prestato e alla durata del prestito.

Nella valutazione dell'interesse si può procedere in varî modi. Il modo più semplice è di pattuire che l'interesse sia proporzionale al capitale C, espresso in Lire, e alla durata del prestito, che supporremo computata in anni e incheremo con n. Se allora, si indica con i il *tasso d'interesse* o *interesse unitario*, vale a dire l'interesse pattuito per *una* Lira, prestata per *un* anno, l'interesse I del capitale C dopo n anni è dato senz'altro da

$$I = Cin, \tag{1}$$

e si chiama *interesse semplice*.

Qualunque sia il modo adottato per la valutazione dell'interesse, la somma di un capitale e dell'interesse prodotto da esso in un certo tempo e ad un certo tasso si dice *montante* di quel capitale per quel dato tempo e a quel dato tasso.

Perciò il *montante semplice* M del capitale C, per n anni al tasso i, è dato da

$$M = C + Cin = C(1 + in), \tag{2}$$

cioè si ottiene moltiplicando il capitale per il binomio $1 + in$.

Nell' uso corrente, in luogo del tasso unitario i, si considera il *tasso percentuale*, cioè l' interesse semplice prodotto in un anno da 100 lire. Indicatolo con r, si ha, ponendo nella (1) $C = 100$, $n = 1$, $I = r$,

$$r = 100i\,;$$

e si suol dire che l' interesse è dell' $r\ {}^0/_0$ (da leggersi « r per cento »). Così quando si parla d' interesse del $4\ {}^0/_0$, s'intende dire che il tasso unitario è $i = \frac{4}{100} = 0{,}04.$

Le (1), (2), ove al posto di i si sostituisca la sua espressione $\frac{r}{100}$ per mezzo di r, diventano

$$I = C\frac{rn}{100}, \tag{1'}$$

$$M = C\left(1 + \frac{rn}{100}\right). \tag{2'}$$

2. Ma si può, invece, far quest'altro patto. La durata del prestito si immagina divisa in un certo numero di periodi uguali (detti *periodi di capitalizzazione*), ciascuno dei quali può essere di un anno o di un semestre o di un trimestre, ecc., e si pattuisce che l' interesse semplice, prodotto dal capitale durante il primo periodo, venga alla fine di quel periodo *capitalizzato*, cioè aggiunto al capitale, e che nel secondo periodo l' intero montante così accumulatosi concorra a produrre l' interesse. Alla fine del secondo periodo, anche l' interesse così prodotto si capitalizza, ed è il nuovo montante, che frutta nel terzo periodo, e così via. In questo caso si dice che il prestito è ad *interesse composto*.

Supponiamo, ad es., che il periodo di capitalizzazione sia di un anno e, come dianzi, siano C il capitale, i il tasso, n gli anni di durata del prestito. Alla fine del primo anno (primo periodo di capitalizzazione), il montante è (n. prec.)

$$C(1 + i), \tag{3}$$

cioè si ottiene, moltiplicando il capitale iniziale per il binomio $1 + i$ (binomio di capitalizzazione annua). Nel secondo periodo di capitalizzazione è l'intera somma (3), che produce interesse, cosicchè il montante alla fine di questo secondo periodo si otterrà, moltiplicando ancora per $1 + i$ il montante (3), raggiunto alla fine del primo periodo, cioè risulterà dato da

$$C(1 + i)^2.$$

E, così continuando, si conclude che dopo n anni il *montante composto* sarà

$$M = C(1 + i)^n. \tag{4}$$

Si dice *interesse composto* del capitale C, al tasso i, per n anni, la differenza fra il montante (4) e il capitale iniziale C, cioè

$$I = C(1 + i)^n - C = C[(1 + i)^n - 1] \tag{5}$$

3. La (4) è la formula generale, che permette di risolvere tutti i problemi di interesse composto. Per la forma del suo secondo membro essa si presta al calcolo logaritmico e dà precisamente

$$\operatorname{Log} M = \operatorname{Log} C + n \operatorname{Log}(1 + i). \tag{6}$$

È questa la *formula pratica*, che si usa nei calcoli numerici.

Sotto la forma precedente, essa dà il *montante* quando sono prefissati il capitale C, la durata n in anni del prestito, e il tasso i. Notiamo che qui $\operatorname{Log}(1 + i)$ va moltiplicato pel numero intero n, che può anche essere piuttosto grande. Se allora si calcolasse il Logaritmo coi soli 4 decimali forniti dalla nostra Tavola, si darebbe luogo a errori troppo grandi; onde bisogna valersi di valori di $\operatorname{Log}(1 + i)$ ad un numero maggiore di decimali. Daremo negli Esercizi, insieme con varî problemi numerici, una tabelletta di valori approssimati di codesto Logaritmo con 10 decimali, pei valori usuali del saggio i. Calcolato $n \operatorname{Log}(1 + i)$ in base alla tabelletta, se ne potranno conservare soltanto 4 decimali, se si vuol completare il calcolo del montante col sussidio della solita nostra Tavola.

La formula pratica (6), scritta sotto la forma

$$\operatorname{Log} C = \operatorname{Log} M - n \operatorname{Log}(1+i),$$

permette di calcolare quale capitale C debba collocarsi a interesse composto di tasso i per n anni, al fine di ottenere alla scadenza un dato montante M.

Così in base alla

$$\operatorname{Log}(1+i) = \frac{\operatorname{Log} M - \operatorname{Log} C}{n}$$

si potrà trovare a quale tasso si debba collocare a prestito, ad interesse composto, un dato capitale C per avere in un dato numero n di anni un dato montante M.

Infine scrivendo la formula pratica sotto la formula

$$n = \frac{\operatorname{Log} M - \operatorname{Log} C}{\operatorname{Log}(1+i)},$$

si potrà calcolare per quanti anni debbasi collocare a prestito, ad interesse composto di dato tasso i, un dato capitale C per avere, alla fine, un dato montante M.

Qui in generale si otterrà per n un valore frazionario, mentre la formula generale (4), da cui siamo partiti, si è stabilita sotto l'ipotesi che n fosse intero. Ma *si conviene* di applicare in ogni caso la stessa formula, anche se la durata del prestito non corrisponde ad un numero esatto di anni.

Si può invero dimostrare che questa convenzione conduce, nei casi comuni, ad errori trascurabili.

Annualità

4. Talvolta, per costituire alla fine di un certo intervallo di tempo una certa somma di danaro, si versano, presso una Banca o un Istituto cooperativo o mutuo, a periodi fissi, che possono essere di un anno o di un semestre, ecc., certe determinate somme, che possono essere tutte uguali fra loro, o anche variabili da periodo a periodo. Queste somme, a seconda della durata dei periodi, si chiamano *annualità* o *semestralità*, ecc., e si dicono *costanti* o *variabili* secondo che sono tutte uguali o no, *anticipate* o *posticipate* secondo che vengono versate, ciascuna, al principio o alla fine del corrispondente periodo.

Vediamo quale somma S si costituisca, versando n annualità costanti a anticipate, all'interesse composto di tasso unitario i. Basta sommare i montanti corrispondenti alle singole annualità. Ora la prima resta fruttifera per n anni, cosicchè il montante corrispondente (n. 2) è

$$a(1+i)^n.$$

Similmente il montante corrispondente alla seconda annualità, che resta fruttifera per $n-1$ anni, è

$$a(1+i)^{n-1}.$$

Quello corrispondente all'ultima annualità, versata al principio dell'ultimo anno, è

$$a(1+i).$$

Perciò si ha

$$S = a(1+i)^n + a(1+i)^{n-1} + \ldots + a(1+i) =$$
$$= a(1+i)\,[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1],$$

ossia, in quanto a secondo membro compare in parentesi quadra la somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica (IX, n. 9),

$$S = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{7}$$

Se si tratta, invece, di n annualità *posticipate*, ciascuna di esse resta fruttifera un anno di meno, cosicchè i singoli montanti ottenuti nel caso precedente vanno divisi per $1+i$, e si trova

$$S' = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{8}$$

5. Le (7), (8) legano le quattro grandezze a, n, i, ed S od S', e permettono, almeno teoricamente, di calcolare una qualsiasi di queste quattro grandezze, quando siano date le altre tre.

Praticamente è abbastanza facile il calcolo di a in base alle formule, che dalle (7), (8) si deducono, risolvendole rispetto ad a, cioè alle

$$a = \frac{iS}{(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]} \quad \text{o} \quad a = \frac{iS'}{(1+i)^n - 1},$$

tanto più che nei trattati di Matematica Finanziaria si trovano Tavole numeriche dei valori della funzione $(1+i)^n - 1$ per i valori usuali di i e di n.

Quanto ad n, si deducono dalle (7), (8) le

$$(1+i)^n = \frac{iS}{a(1+i)} + 1, \quad (1+i)^n = \frac{iS'}{a} + 1$$

e, quindi, passando ai Logaritmi,

$$n = \frac{\operatorname{Log}\left(\dfrac{iS}{a(1+i)} + 1\right)}{\operatorname{Log}(1+i)}, \quad n = \frac{\operatorname{Log}\left(\dfrac{iS'}{a} + 1\right)}{\operatorname{Log}(1+i)}.$$

Queste formule forniranno, in generale, per n un valore non intero, e la parte intera del valore così ottenuto darà un numero di annualità (anticipate o posticipate), le quali non basteranno a costituire per intero la somma S o S', bensì soltanto una somma inferiore. Caso per caso bisognerà fissare opportune modalità per il versamento della differenza; e su ciò rimandiamo ai trattati speciali di Matematica Finanziaria.

Quanto, infine, al tasso i, le (7), (8) sono, rispetto ad esso, equazioni algebriche di grado troppo elevato, perchè si possano risolvere direttamente. Perciò i si determina per approssimazione, in base a tavole numeriche, calcolate una volta per tutte, che si trovano nei trattati speciali.

Ammortamento

6. Un debito si può estinguere o *ammortizzare* con un certo numero di versamenti periodici (annuali o semestrali, ecc.), generalmente costanti e posticipati (*quote di ammortamento*).

Siano C il capitale preso a prestito, a la quota di ammortamento, che supporremo costante e posticipata, n il numero dei versamenti, che supporremo annuali, ed i il tasso. Perchè il debito risulti estinto, occorre e basta che gli n versamenti annuali posticipati costituiscano alla fine dell'n^{mo} anno, una somma uguale al montante del capitale C dopo n anni, all'interesse composto di tasso i. La somma costituita dai versamenti è data dalla formula (8), il montante di C dalla (4), cosicchè si deve avere

$$a\,\frac{(1+i)^n-1}{i}=C(1+i)^n.$$

Questa relazione fra C, a, n, i è senz'altro risolubile rispetto alle prime tre di queste quattro grandezze; e si ottiene rispettivamente

$$C=\frac{a[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}=\frac{a}{i}\,[1-(1+i)^{-n}),$$

$$a=\frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=\frac{Ci}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$n=\frac{\operatorname{Log} a-\operatorname{Log}(a-Ci)}{\operatorname{Log}(1+i)}.$$

I valori di C e di a si calcolano, caso per caso, facilmente, in quanto si posseggono Tavole numeriche dei valori della funzione $1-(1+i)^{-n}$ per i valori usuali di n e di i; e per quel che riguarda il calcolo di n si possono ripetere avvertenze analoghe a quelle date nel caso delle annualità (n. prec.).

Infine anche qui il tasso i non si può calcolare che per approssimazione, ricorrendo a Tavole numeriche già calcolate a tale scopo.

ESERCIZI

Capitolo I

1. Eseguire le seguenti operazioni:

1. $5a[3a-(2a+3)]$;
2. $4a-5+(3a-4)+[2a-3-(2a-7a+5)]$;
3. $3a-\{b-[a+(b-3a)]\}$;
4. $5a-7(b-c)-[6a-(3b+2c)+4c-(2a-b-2c)-a]$.

2. Eseguire le seguenti moltiplicazioni di monomi:

1. $3a^2b$ per $-\frac{1}{2}ab^2c$ per b^3c^2;
2. $-2ab^2c$ per $5a^2bc^3$ per $-\frac{1}{15}a^3b^2c^2$.

3. Dividere:

1. $28a^4b^2c^3d$ per $4a^2bc^3$;
2. $-75a^8bc^6d^4$ per $5a^3c^5d$;
3. $-36a^mb^nc^{p-1}d$ per $-9a^2b^3c$;
4. $21a^{m+2}b^{n-1}c^n$ per $-a^mb^{n-2}c^{n-3}$.

4. Trovare il M. C. D. e il m. c. m. dei seguenti monomi:

1. $\frac{1}{3}a^2b^4c^2$, $-3a^3b^2c^3$, $2ab^3c^4$;
2. $-6a^4b^2c$, $3a^3b^5c^3$, $5a^2b^4c^5$.

5. Eseguire le operazioni seguenti;

1. $\frac{abc}{pqr}\left(\frac{3}{4}\frac{pc}{ac}+\frac{3}{7}bq-\frac{5qr}{6bc}\right)$; 2. $\frac{2}{7c}-\frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{7c}-a-b\right)$;

3. $1-\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}+\frac{a-b}{a+b}\right)$;

4. $a-1+\frac{a^2-1}{a+1}$; 5. $a-b+\frac{b^2}{a+b}$;

6. $\frac{(a+b)^2}{4ab}-1$; 7. $\frac{(a-b)^2}{4ab}+1$;

8. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}-(a-b)$; 9. $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}+\dfrac{2ab}{(a-b)^2}$;

10. $a+\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a^2}{a+1}$; 11. $\left(1+a+\dfrac{3+a^2}{1-a}\right)(1-a^2)$;

12. $\dfrac{2b-a}{a-b}+\dfrac{3a(a-b)}{a^2-b^2}+\dfrac{b-2a}{a+b}$;

13. $\dfrac{a^2-(m+n)a+mn}{a^2-(m+p)a+mp}\cdot\dfrac{p^2-a^2}{n^2-a^2}$;

14. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}-1\right)$; 15. $\dfrac{15a^3}{a^3-b^3}:\dfrac{3a^2}{a^2+ab+b^2}$;

16. $\dfrac{[(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]}{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$.

6. Verificare le identità:

1. $(a^2-2a-1)^2+(a^2+2a-1)^2=2(a^2+1)^2$;
2. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$;
3. $[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2\,[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$.

7. Eseguire le seguenti operazioni:

1. $(2x^3-3x^2+x-1)+(-3x^3-5x+2)$;
2. $\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{5}x^3+2x-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{2}{3}\right)$;
3. $(6x^3-2x^2+x-3)\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)$;
4. $(0{,}5x^4-2x^3+0{,}3x^2+1{,}4x+0{,}1)(2x^2-0{,}3x+10)$;
5. $(2x^5-7x^4+x^3+9x^2-7x-6):(2x^3-3x^2+x+2)$;
6. $(2x^6-7x^4+8x^2-3):(x^4-2x^2+1)$;
7. $(4x^6-4x^4+8x^3+x^2-4x+4):(2x^3-x+2)$;
8. $(2x^5-7x^4+9x^3-8x^2+1):(x^2-2x+1)$;
9. $(6x^6-3x^4+13x^3+x+2):(3x^3+2x-1)$;
10. $(2x^4-x^3+3x^2-4x+5):(3x^2-2x-2)$.

8. Eseguire le seguenti divisioni:

1. $(2x^3-9x^2+11x-6):(x-3)$;
2. $(3x^4+15x^3-x^2-x+20):(x+5)$;
3. $(4x^4+8x^3+x^2+7x-20):(2x+5)$;
4. $(4x^3+14x^2-5x+3):(x+4)$;
5. $(5x^4-31x^3+8x^2-15x+9):(x-6)$.

9. In ciascuno dei seguenti casi determinare il valore del parametro h in modo che la divisione risulti esatta:

1. $(2x^2 - 3x + h) : (x + 1)$;
2. $(x^3 - 2x^2 + hx - 6) : (x + 3)$;
3. $(2x^3 + hx^2 - 4x + 8) : (x + 2)$;
4. $(hx^3 + 9x^2 + 6x + 8) : (3x + 2)$.

10. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

1. $7x + 3 > 3x - 7$;
2. $5 - 2x > \frac{1}{x} x + 4$;
3. $\frac{x}{2} + 1 > \frac{7x}{3} - 8$;
4. $(x + 1)(x + 3) > (x - 1)(x - 2)$;
5. $(x-1)(x-2)(x-3) > x^2(x-6)$;
6. $ax + 6 > 3 - 2x$;
7. $\frac{x + 3}{2 - x} > 0$;
8. $\frac{7 - 4x}{2 - 3x} > 2$;
9. $\frac{9x - 21}{2x + 4} > -3$;
10. $\frac{x + a}{a + b} > \frac{a - x}{a - b} + 2 \qquad (a > 0,\ b > 0,\ a \lesseqgtr b)$.

11. Trovare i valori interi (positivi e negativi) soddisfacenti alle due disuguaglianze:

$$7x + 3 > 9x + 8, \quad 6 - 2x > 10 - 5x.$$

12. Trovare i valori di x soddisfacenti alle due disuguaglianze:

$$\frac{37 - 24x}{6 - 7x} > 4, \quad \frac{17x - 3}{7 - 6x} > -2.$$

13. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni di 1° grado (o riducibili a sistemi di questo tipo):

1. $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 2x + 4y = 28. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6x - 7y = 0, \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - \frac{y}{2} = 11, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x}{3} + 3y = 7, \\ \frac{4x - 2}{5} = 3y - 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + \frac{y - 2}{5} = 21, \\ 4y + \frac{x - 4}{6} = 29. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{14}{y} = 10\frac{1}{2}, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{x + y}{5} + \frac{y - x}{2} = 9, \\ \frac{x}{2} + \frac{x + y}{9} = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + x = 15, \\ \frac{x - y}{5} + y = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{7x}{6} + \frac{5y}{3} = 34, \\ \frac{7x}{8} + \frac{3y}{4} = \frac{5y}{8} + 12. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{x + y}{8} + \frac{x - y}{6} = 5, \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{3} = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{x - 1}{8} + \frac{y - 2}{5} = 2, \\ 2x + \frac{2y - 5}{3} = 21. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5} = 10 - \dfrac{y}{3}, \\ \dfrac{4y-3x}{6} = \dfrac{3x}{4} + 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-y) + 10, \\ 4x - 3y = 4(6y-2x) + 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 0{,}08x - 0{,}21y = 0{,}33, \\ 0{,}12x + 0{,}75y = 3{,}54. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y = x - 6, \\ 3x - 0{,}5y = 28 - 0{,}25y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 4y = 7, \\ \dfrac{x}{3y} + \dfrac{11}{10} = \dfrac{4x-5y}{5y}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{x-5} + 14 = 0, \\ \dfrac{3y-10(x-1)}{6} + \dfrac{x-y}{4} + 1 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{4x-y-2} = -1, \\ \dfrac{2y-x-3}{3x+3y-2} = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y = 1, \\ \dfrac{x+1}{y-1} - \dfrac{x-1}{y} = \dfrac{6}{y}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 1, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y} = 28. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+4y+2} + \dfrac{1}{2x-3y-2} = 1, \\ \dfrac{8}{3x+4y+2} - \dfrac{2}{2x-3y-2} = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + y = a + b, \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + ay = b, \\ y - ax = c. \end{cases}$

25. $\begin{cases} (a+c)x - by = bc, \\ x + y = a + b. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y = c, \\ ax - by = c(a-b). \end{cases}$

27. $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2, \\ bx + ay = 2ab. \end{cases}$

28. $\begin{cases} a(x+y) + b(x-y) = 1, \\ a(x-y) + b(x+y) = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} ax + by = c, \\ a^2x + b^2y = c^2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab, \\ (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} (a+h)x + (b-h)y = c, \\ (b+k)x + (a-k)y = c. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2, \\ bx - ay = 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b} + \dfrac{y-b}{a} = 0, \\ \dfrac{x+y-b}{a} + \dfrac{x-y-a}{b} = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a, \\ \dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2}. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{x}{a^2-1} - \dfrac{y}{b^2-1} = b^2 - a^2, \\ \dfrac{x}{b^2+1} + \dfrac{y}{a^2+1} + 2 = a^2 + b^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} (a+2)x + ay = 1, \\ 3x + (2-a)y = 1. \text{ Discussione.} \end{cases}$

38. $\begin{cases} (a-1)^2x + (a^2-1)y = (a+1)^2, \\ (2a-1)x + (a+1)y = a^2 - 1. \text{ Discussione.} \end{cases}$

39. $\begin{cases} (a+x)(a+y) + (b+x)(b+y) = 2(a+y)(b+x), \\ (a+b)(x-y) = ab. \end{cases}$

40. $\begin{cases} (4a^2 + a + 1)x + (2a^2 + 4a + 1)y = 2a^2, \\ (2a+1)x + (a+2)y = a. \text{ Discussione.} \end{cases}$

14. Discutere i sistemi seguenti:

1. $\begin{cases} 12x - 9y = 2, \\ 3y - 4x = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 12x - 16y + 3 = 0, \\ 4y - 3x = 0{,}75. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+2y}{17} = y - x. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (a+b)x = (a-b)y, \\ b(x+y) = 1 + a(y-x). \end{cases}$

15. Determinare a in modo che il sistema seguente risulti impossibile:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 1, \\ (3-a)x - 2y = 2. \end{cases}$$

16. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2y + (3-a)y = b, \end{cases}$$

e prima si determini a in modo che esso risulti impossibile, poi si determinino a e b in modo che il sistema risulti indeterminato.

17. In un triangolo un angolo è di $57°30'$, mentre la differenza degli altri due è di $11°50'$. Trovare le ampiezze di questi due angoli.

18. Un tale paga L. 370 in monete d'argento da L. 5 e da L. 10. Se in tutto le monete sono 49, quante sono quelle da 5 e quante quelle da 10?

19. Trovare due numeri, di cui tanto la somma quanto il quoziente siano uguali ad un dato numero a. Discussione.

20. Se in un triangolo si aumentano un lato di 5 cm. e la corrispondente altezza di 8 cm. l'area cresce di 165 cm^2; se invece si aumenta lo stesso lato di 2 cm., e si diminuisce la corrispondente altezza di 6 cm., l'area diminuisce di 63 cm^2. Trovare l'area del triangolo.

21. Alcuni amici, dovendo pagare il conto di un pranzo collettivo in una trattoria, osservano che se fossero 2 di più pagherebbero ciascuno, per lo stesso importo complessivo, 2 lire di meno, mentre pagherebbero ciascuno 3 lire di più se fossero 2 di meno. Quanti sono quegli amici e quanto paga ciascuno?

22. Se A desse a B 75 lire, essi avrebbero la stessa somma di denaro. Se invece B desse 25 lire ad A, questi avrebbe il triplo di B. Quante lire ha ciascuno?

23. Un agricoltore vende 10 q. di frumento e 6 q. di grano turco e percepisce L. 1410. Vende poi, agli stessi prezzi, 8 q. di frumento e 15 q. di grano turco e percepisce L. 1689. A qual prezzo per quintale ha venduto il frumento e a quale il grano turco?

24. In una cantina vi sono due qualità di vino. Se si mescolasse la prima qualità colla seconda nel rapporto di 2 a 3 il vino così tagliato verrebbe a costare L. 1,68 al litro; se invece si mescolasse la prima qualità alla seconda nel rapporto di 3 a 2, il vino tagliato verrebbe a costare L. 1,62. Quali sono i costi per hl. delle due qualità di vino?

25. Un numero (intero assoluto) di due cifre è uguale al quadruplo della somma delle sue cifre; e d'altra parte, se ad esso si aggiunge 18, si ottiene il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso. Trovare questo numero.

26. Un numero (intero assoluto) di due cifre, diminuito di 45, dà il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso, ed è, d'altra parte, uguale agli $\frac{8}{3}$ di questo secondo numero. Trovare quel numero.

27. Due operai, lavorando insieme, possono compiere un certo lavoro in 30 giorni; ma dopo 18 giorni uno di essi abbandona il lavoro, e l'altro lo completa, impiegando 20 giorni di più. In quanti giorni avrebbe condotto a termine quello stesso lavoro ciascuno dei due operai, lavorando da solo?

28. Un agricoltore vuol preparare per l'inverno 100 q. di foraggio, mescolando fieno maggengo e paglia. Il maggengo costa L. 17,5 al quintale, la paglia L. 5,5. Se quell'agricoltore vuole che il foraggio di mistura gli venga a costare L. 10 al quintale, quanti quintali di maggengo e quanti di paglia deve mescolare?

29. Tre botti hanno complessivamente la capacità di l. 2250. Le prime due sono piene e la terza è vuota; e per riempire quest'ultima, bisogna versarvi il contenuto della prima e $\frac{1}{4}$ di quello della seconda oppure il contenuto della seconda e $\frac{2}{5}$ di quello della prima. Quali sono le capacità in hl. delle tre botti?

30. Se in una frazione si aumenta il numeratore di 1 e si diminuisce il denominatore di 1, la nuova frazione risulta uguale ad 1. Se invece il numeratore si aumenta del denominatore e il denominatore si diminuisce del numeratore, la nuova frazione risulta uguale a 4. Quali sono i termini della frazione primitiva?

31. A e B hanno ciascuno un certo numero di gettoni. A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e subito dopo B dà ad A tanti gettoni quanti ad A ne sono rimasti. Poi ricominciano daccapo: cioè A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e B dà ad A tanti gettoni, quanti ad A ne sono rimasti. Dopo ciò A e B si trovano ad avere ciascuno 16 gettoni. Quanti ne avevano ciascuno dapprincipio? [Si osservi che il problema si può anche trattare come in una sola incognita, perchè dallo stesso enunciato risulta che A e B hanno complessivamente 32 gettoni].

32. Due autocorriere A e B partono da due paesi distanti fra loro km. 112 e si vanno incontro. Se A parte $1^h\,10^m$ prima di B, le due autocorriere si incontrano 2^h dopo la partenza di B; se B parte $1^h\,10^m$ prima di A, si incontrano $2^h\,10^m$ dopo la partenza di A. Quali sono, in chilometri all'ora, le velocità delle due autocorriere?

NOTA: — Vedansi inoltre gli Eserc. 172-183 del Cap. V.

33. Risolvere i sistemi:

1. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y+z=3, \\ x+y-z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=-1, \\ x+4y+9z=-11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=15, \\ y+z=25, \\ x+z=20. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y=10, \\ 5x-7z=1, \\ 4x+9z=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{6y-4x}{3z-7}=1, \\ \dfrac{5z-x}{2y-3z}=1, \\ \dfrac{y-2z}{3y-2x}=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-1, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{z}=1, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x+y+z=a, \\ x-y+z=b, \\ x+y-z=c. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ x+a=y+b=z+c. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3, \\ x+by+b^2z=b^3, \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=h, \\ a^2x+b^2y+c^2z=h^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} a(-yz+zx+xy)=xyz, \\ b(yz-zx+xy)=xyz, \\ c(yz+zx-xy)=xyz. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0, \\ bcx+cay+abz=1. \end{cases}$

34. Riconoscere che dei seguenti sistemi il primo è impossibile, il secondo è indeterminato:

$$\begin{cases} x - 4y + 6z = 0, \\ 2x + 3y - 4z = 1, \\ 3x - y + 2z = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 10y - 2z = 5, \\ 3x - 5y + 7z = 10. \end{cases}$$

35. Dividere il numero 147 in tre parti tali che si ottenga il medesimo risultato sia aggiungendo alla prima $\frac{1}{3}$ della somma delle altre due, sia aggiungendo alla seconda $\frac{1}{4}$ della somma delle altre due, sia aggiungendo alla terza $\frac{1}{5}$ della somma delle altre due.

36. Un negoziante nella primavera dell'anno scorso ha acquistato 250 hl. di vino di tre qualità diverse, pagandole rispettivamente L. 1,75, L. 2, L. 2,50 al litro spendendo, complessivamente, L. 53250. Quest'anno compera ancora le medesime quantità di codeste stesse qualità di vino, pagandole per altro L. 1,50, L. 1,80, L. 2,20 al litro e spendendo in tutto L. 46900. Quanti ettolitri di vino ha acquistato, entrambe le volte, di ciascuna delle tre qualità?

37. Un numero di tre cifre è 61 volte la somma delle sue cifre, e diminuisce di 495, se le sue cifre si scrivono in ordine inverso. Inoltre la somma delle cifre estreme è tripla della cifra di mezzo. Qual'è questo numero?

38. A e B, lavorando insieme per 9 giorni, guadagnano L. 405; A e C, lavorando insieme per 12 giorni, guadagnano L. 564; B e C, lavorando insieme per 7 giorni, guadagnano L. 294. Quanto guadagna al giorno ciascuno di essi?

39. Un ciclista va in 6 ore ed $\frac{1}{4}$ da un paese A ad un paese B, che dista 112 km. La strada da A a B è in parte piana, e, per il resto, parte in salita, parte in discesa; e la pendenza della salita è uguale a quella della discesa. Il ciclista in piano va a 18 km./h., in salita a 12 km./h., e in discesa a 24 km./h.; e se con queste stesse velocità andasse da B ad A impiegherebbe 6 ore e 55 minuti. Quanti chilometri di strada piana, quanti di salita, quanti di discesa vi sono fra A e B? (Borel-Stäckel).

[Il problema si può risolvere come in due sole incognite].

40. Trovare un numero (intero assoluto) di tre cifre, che aumenta di 360 quando si scambiano le prime due cifre, e di 99 quando si scambiano la prima e la terza, mentre diminuisce di 27 quando si scambiano le due ultime cifre. [Si osservi che il sistema di equazioni, cui si è così condotti, è indeterminato; ma, in forza della condizione implicita nell'enunciato che i valori delle tre incognite (cifre del numero voluto) risultino numeri interi assoluti compresi tra 1 e 9, il problema ammette soltanto un numero finito di soluzioni (precisamente 5)].

Capitolo II

41. Su di una retta graduata (I, n. 1) in ogni segmento AB, per quanto piccolo, cadono infiniti punti, cui corrispondono, come distanze dall' origine, numeri razionali. [Se A, B corrispondono a due numeri razionali, anche al loro punto medio corrisponde un numero razionale, ecc. In caso contrario si può sempre determinare un segmento $A'B'$ interno ad AB e tale che ad A' e B' corrispondano numeri razionali. Basta prendere un sottomultiplo dell' unità che sia minore di AB e poi considerare, a partire dall' origine, i successivi multipli di codesto sottomultiplo dell' unità, ecc.].

42. Ogni sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ nel campo dei numeri razionali assoluti, costituita da due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, le quali, nel loro insieme, comprendano tutti i numeri razionali assoluti, *nessuno eccettuato*, definisce un numero irrazionale (cfr. il n. 3 del Cap. II). [Basta far vedere che, prefissato un segmento U come unità, esiste un segmento, ed uno solo, il cui rapporto ad U è maggiore di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$ ed è minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}$. A tal fine si portino su di una semiretta, a partire dalla sua origine O, tutti i segmenti hU e tutti i segmenti kU, dove con h e k si denotano due numeri quali si vogliano, presi il il primo in $\boldsymbol{H}$, il secondo in $\boldsymbol{K}$, e si chiamino « punti H » gli estremi dei primi segmenti, « punti K » gli estremi dei secondi. Ogni punto H, sulla semiretta, precede, per le proprietà della sezione, ogni punto K, talchè, per il postulato della continuità (¹), esiste almeno un punto L, che lascia dalla parte di O tutti i punti H, dalla parte opposta tutti i punti K, ed è facile riconoscere che non vi può essere che un solo punto, il quale goda di siffatte proprietà. Si ammetta invero che ne esista un altro e, chiamatolo L', si supponga $OL' > OL$. Preso un sottomultiplo $\frac{1}{n}U$, il quale sia minore di LL', consideriamone i successivi multipli. Questi multipli, per il postulato di Archimede (²), finiscono col superare ogni possibile segmento, cosicchè esiste fra essi certamente un multiplo $\frac{m}{n}U$, compreso fra OL ed OL'. Ma ciò è assurdo, perchè questo segmento $\frac{m}{n}U$ dovrebbe risultare maggiore di tutti i segmenti hU, mi-

(¹) F. Enriques - U. Amaldi, *Geometria elementare*, Geometria piana, Parte II; Cap. VII, n. 1.

(²) Ibidem; Cap. V, n. 3.

nore di tutti i segmenti kU, cioè il numero razionale $\frac{m}{n}$, come maggiore di tutti gli h e minore di tutti i k, dovrebbe restar fuori delle due classi $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$, contrariamente all'ipotesi. Stabilita così l'esistenza e l'unicità del punto L, compreso fra i punti H da una parte e i punti K dall'altra, è manifesto che la classe $\boldsymbol{H}$ è costituita da tutti i numeri razionali assoluti minori del rapporto di OL ad U, la classe $\boldsymbol{K}$ da tutti quelli maggiori di codesto rapporto. È dunque questo rapporto il numero reale definito dalla sezione considerata, e, poichè da $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ non resta escluso nessun numero razionale, si tratta di un numero irrazionale, cioè il segmento OL è incommensurabile con U].

43. Dato un qualsiasi decimale illimitato (periodico o no), per es. 2,71828..., la classe $\boldsymbol{H}$, contenente i numeri

(*) 2 2,7 2,71 2,718 2,7182 2,71828...

e con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali assoluti minori, e la classe $\boldsymbol{K}$, contenente i numeri

(**) 3 2,8 2,72 2,719 2,7183 2,71829...

e con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali maggiori, costituiscono una sezione (cfr. il n. 5 del Cap. II). [Per definizione la $\boldsymbol{H}$ contiene, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali assoluti minori, e la $\boldsymbol{K}$ contiene, similmente, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali maggiori. Nè la $\boldsymbol{H}$ può contenere un massimo, perchè ogni suo numero è uguale o minore di uno dei (*) e ciascuno di questi è minore di tutti quelli che lo seguono. Analogamente la $\boldsymbol{K}$ non può contenere un minimo. Infine dalle due classi non possono restar fuori due numeri razionali assoluti r ed s diversi. Se, invero, così accadesse, questi due numeri, in forza delle proprietà già stabilite per le classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, dovrebbero essere entrambi maggiori di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$ e, in particolare dei numeri (*), e minori di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}$ e, in particolare, dei numeri (**), cosicchè la differenza fra uno qualsiasi dei numeri (**) e uno qualsiasi dei (*) dovrebbe risultare maggiore della differenza di r ed s, mentre le differenze fra i numeri di ugual posto delle due successioni sono date rispettivamente da $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$, e perciò finiscono col diventare minori di ogni numero assegnabile].

44. Se $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{H}')$ sono due sezioni nel campo dei numeri razionali assoluti, anche le due classi $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$ (II, n. 6) costituiscono una sezione. [Basta dimostrare che queste due classi godono delle proprietà 1), 2), 3) del n. 3 del Cap. II. Quanto alla 2), la $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$, insieme con ogni suo numero $h+h'$ (dove h, h' sono due numeri quali si vogliano di $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}'$ rispettivamente), contiene anche ogni numero razionale $b < h + h'$, perchè, se si pensa divisa la differenza (razionale) $h + h' - b$ in due parti (razionali) c, c', dalla $c + c' = h + h' - b$ risulta $b = (h - c) + (h' - c')$, dove $h - c$, $h' - c'$ sono due numeri di H, H' rispettivamente. E in modo analogo si dimostra che la classe $K + K'$ contiene, con ogni suo numero, anche ogni numero razionale minore. In secondo luogo la $H + H'$ non può contenere un massimo, perchè ciò non avviene nè per la H, nè per la H'; e per analoga ragione la $K + K'$ non contiene un minimo. Resta da far vedere che le due classi non possono lasciar fuori più di un numero razionale. A tal fine si osservi anzitutto che ogni eventuale numero razionale escluso da H ed H' non può, per le proprietà già stabilite, che essere simultaneamente maggiore di tutti i numeri di $H + H'$ e minore di tutti i numeri di $K + K'$. Proviamo allora a supporre che esistano due numeri razionali siffatti r ed r' e sia $r > r'$. Presa una frazione

$$(*) \qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{4}(r - r'),$$

e indicati con a, a' i numeri reali corrispondenti alle due date sezioni, si possono considerare fra i successivi multipli di $\frac{1}{n}$ due coppie di multipli consecutivi, tali che risulti

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'}{n} \leq a' < \frac{m'+1}{n}$$

(il segno $=$ potendo valere nella prima o seconda limitazione, solo se a o, rispettivamente, a' è razionale). In ogni caso sarà

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n} < a' < \frac{m'+1}{n},$$

cioè i numeri $\frac{m-1}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'-1}{n}$, $\frac{m'+1}{n}$ apparterranno rispettivamente alle classi H, K, H', K', cosicchè i due numeri

$$\frac{m-1}{n} + \frac{m'-1}{n} = \frac{m + m' - 2}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + \frac{m'+1}{n} = \frac{m + m' + 2}{n}$$

saranno contenuti rispettivamente in $H + H'$, $K + K'$ e dovranno perciò comprendere fra loro tanto r, quanto r'. Ma ciò è assurdo perchè la loro differenza

$$\frac{m + m' + 2}{n} - \frac{m + m' - 2}{n} = \frac{4}{n}$$

è, in forza della (*), minore di $r - r'$].

45. Se $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$ sono due sezioni, anche le due classi $\boldsymbol{HH}'$, $\boldsymbol{KK}'$ (II, n. 6) costituiscono una sezione. [Le proprietà 2), 3) si stabiliscono immediatamente (cfr. Eserc. prec.). Per dimostrare l'assurdità dell'ipotesi che le classi $\boldsymbol{HH}'$, $\boldsymbol{KK}'$ lascino fuori due numeri razionali r, r', con $r > r'$, i quali in ogni caso non possono che essere compresi fra le due classi, si scelgano ad arbitrio due numeri k, k' in $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$ rispettivamente e si prenda una frazione

(*) $$\frac{1}{n} < \frac{1}{2} \frac{r - r'}{k + k'}.$$

Considerate due coppie di multipli di $\frac{1}{n}$ tali che sia (Eserc. prec.)

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'}{n} \leq a' < \frac{m'+1}{n}$$

e quindi

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n} < a' < \frac{m'+1}{n'},$$

si ha anzitutto

$$\frac{m}{n} < k, \quad \frac{m'}{n} < k'.$$

Inoltre la differenza dei due numeri $\frac{(m-1)(m'-1)}{n^2}$, $\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$, appartenenti rispettivamente ad $\boldsymbol{HH}'$ e $\boldsymbol{KK}'$, è data da

$$\frac{2(m+m')}{n^2} = \frac{2}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n}\right) < \frac{r - r'}{k + k'}(k + k') = r - r';$$

e ciò contraddice all'ipotesi che r, r' siano entrambi compresi fra le due classi $\boldsymbol{HH}'$ $\boldsymbol{KK}'$].

46. Se $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$ sono due sezioni e il numero reale a corrispondente alla prima è maggiore del numero a' corrispondente alla seconda, le due classi $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$ (II, n. 8) costituiscono una sezione. [Anche qui le proprietà 2), 3) si stabiliscono agevolmente. Quanto alla 1), proviamo al solito a supporre che dalle due classi restino esclusi due numeri razionali r, r', con $r > r'$, i quali non possono in ogni caso che essere entrambi maggiori di tutti i numeri di $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, minori di tutti i numeri di $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$; e, considerati due numeri razionali c, c', compresi fra a ed a', con $c > c'$, prendiamo una frazione $\frac{1}{n}$, soddisfacente alle due disuguaglianze

(*) $$\frac{1}{n} < \frac{1}{4}(r - r'), \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{4}(c - c'),$$

sicchè si abbia anche

$$c - \frac{2}{n} > c' + \frac{2}{n}.$$

Se fra i successivi multipli di $\frac{1}{n}$ si prendono due coppie tali che risulti (Eserc. 44)

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n} < a' < \frac{m'+1}{n},$$

si ha anzitutto, essendo $a > a'$,

$$\frac{m+1}{n} > \frac{m'-1}{n},$$

mentre d'altra parte, essendo $\frac{m+1}{n} > c, \quad c' > \frac{m'-1}{n}$,

$$\frac{m-1}{n} > c - \frac{2}{n} > c' + \frac{2}{n} > \frac{m'+1}{n}.$$

Perciò i due numeri

$$\frac{m-1}{n} - \frac{m'+1}{n} = \frac{m-m'-2}{n}, \quad \frac{m+1}{n} - \frac{m'-1}{n} = \frac{m-m'+2}{n}$$

appartengono rispettivamente alle due classi $H - K'$, $K - H'$, e poichè la loro differenza, uguale a $\frac{4}{n}$, è, in forza della prima delle (*), minore di $r - r'$, non è possibile che r, r' siano entrambi compresi fra le due classi].

47. Dati due numeri reali assoluti quali si vogliano

$$a = (H \mid K), \quad a' = (H' \mid K'),$$

e indicato, nell'ipotesi $a > a'$, con d il numero reale definito dalla sezione $(H - K' \mid K - H')$, si ha

$$a' + d = a.$$

[Bisogna far vedere che a è maggiore di tutti i numeri della classe $H' + (H - K')$, minore di tutti quelli della $K' + (K - H')$. Per dimostrare la prima parte basta osservare che ogni numero di $H - K'$ è la differenza $h - k'$ di un numero h di H e di un numero k' di K', minore di h, cosicchè ogni numero di $H' + (H - K')$ è dato, ove si indichi con h' un numero di H', da $h' + h - k'$, e, in quanto è sempre $h' < k'$, risulta

$$h' + h - k' < h \quad \text{e quindi} \quad h' + h - k' < a.$$

Analogamente per la seconda parte].

48. Se $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$ è una sezione, anche le due classi $\frac{1}{\boldsymbol{K}}, \frac{1}{\boldsymbol{H}}$ dei reciproci dei numeri di $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{H}$ rispettivamente costituiscono una sezione. [Anche in questo caso ci limitiamo a dar la traccia della dimostrazione che le due classi possono lasciar fuori, al più, un solo numero razionale. Supposto che ne restino esclusi due, r ed r' con $r > r'$, si prenda ad arbitrio in $\boldsymbol{H}$ un numero h e indicato con a il numero definito dalla sezione $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, si scelga una frazione $\frac{1}{n}$ abbastanza piccola perchè sia simultaneamente

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(a - h), \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{2} h^2 (r - r').$$

Considerata una coppia di multipli di $\frac{1}{n}$ tale [Eserc. 44] che

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n},$$

si ha, sottraendo membro a membro le due disuguaglianze

$$\frac{m+1}{n} > a, \quad \frac{2}{n} < a - h,$$

la disuguaglianza

$$\frac{m-1}{n} < h.$$

D'altra parte la differenza dei due numeri $\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m-1}$, appartenenti rispettivamente ad $\frac{1}{\boldsymbol{K}}, \frac{1}{\boldsymbol{H}}$, è data da

$$\frac{2n}{(m+1)(m-1)} = \frac{2}{n} \frac{1}{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{\frac{m-1}{n}} < h^2(r - r') \frac{1}{h^2} = r - r'$$

e ciò contraddice all'ipotesi].

49. Dato un numero reale assoluto $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$ e posto $b = \left(\frac{1}{\boldsymbol{K}} \middle| \frac{1}{\boldsymbol{H}}\right)$, si ha $ab = 1$, cioè la sezione $\left(\frac{1}{\boldsymbol{K}} \middle| \frac{1}{\boldsymbol{H}}\right)$ definisce il reciproco di $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$. [Basta far vedere che la sezione $\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}} \middle| \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{H}}\right)$ definisce il numero 1 (II, n. 6); e ciò è evidente, perchè, essendo ogni numero di $\boldsymbol{H}$ minore di ogni numero di $\boldsymbol{K}$, ogni numero di $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}}$ è minore di 1, ecc.].

50. Date due sezioni $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' | \boldsymbol{K}')$, anche le due classi $\frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}'}, \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{H}'}$ (II, n. 8) costituiscono una sezione. [Eserc. 48, 45].

51. Dati due numeri reali assoluti $a=(H|K)$, $a'=(H'|K')$, e posto $b=\left(\frac{H}{K'}, \frac{K}{H'}\right)$, si ha $a'b=a$, cioè la sezione $\left(\frac{H}{K'}\middle|\frac{K}{H'}\right)$ definisce il quoziente di a per a'. [Eserc. 49, 45].

Grado di approssimazione. — Di un numero reale a dicesi *valore approssimato a meno di* $10^{-n}=\frac{1}{10^n}$ ogni numero a', tale che sia

$$|a-a'|<\frac{1}{10^n};$$

e precisamente si dice approssimato *per difetto* o *per eccesso*, secondo che è $a'<a$ o $a'>a$. Il numero $10^{-n}=\frac{1}{10^n}$ si dice *grado dell'approssimazione* e talvolta anche *errore*, in quanto fornisce un limite dell'errore, in più o in meno, che si commetterebbe, sostituendo al numero a il numero a'.

Quando un numero reale a si scrive in forma decimale (II, n. 5) e ci si ferma alla n^{ma} cifra decimale dopo la virgola, si ottiene di a un valore approssimato per difetto, a meno di 10^{-n}, in cui tutte le cifre decimali sono *esatte*; cioè il grado di approssimazione è dato dall'unità decimale corrispondente all'ultima cifra considerata. Ma di un qualsiasi numero reale esistono valori decimali (limitati) approssimati per difetto, il cui grado di approssimazione è maggiore dell'unità decimale dell'ultima cifra decimale. Per es. tanto 3,1415 quanto 3.141499 sono valori approssimati per difetto di π, a meno di 10^{-4}; ma il primo ha 4 cifre decimali esatte, mentre il secondo ne ha solo 3.

52. Per avere della somma di due numeri (assoluti) un valore approssimato (per difetto) con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in ciascuno dei due addendi $n+1$ cifre decimali esatte.

53. Per avere del prodotto di due numeri (assoluti) un valore approssimato (per difetto) con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in ciascuno dei due fattori un numero di cifre esatte uguale ad $n+1$, aumentato del numero delle cifre della parte intera dell'altro fattore, se questo non è minore di 1, oppure diminuito del numero degli zeri che quest'altro fattore ha tra la virgola e la prima cifra significativa, se esso è minore di 1.

54. Se dato un numero reale (assoluto) a, maggiore di 1 e avente r cifre decimali prima della virgola, si vuole di $\frac{1}{a}$ un valore approssimato con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in a le prime $n-2r+2$ cifre decimali; se invece è $a<1$, ed ha la prima cifra significativa all's^{mo} posto dopo la virgola, basta prendere in a $n+2s$ cifre decimali [1].

Errore relativo. — Dicesi *errore relativo* di un valore approssimato di un dato numero il rapporto del grado di approssimazione al valore approssimato; e precisamente si dice errore relativo *per eccesso*, se il valore approssimato è per difetto.

Il reciproco dell'errore relativo si chiama talvolta *grado di precisione*. Di due valori approssimati di uno stesso numero dicesi più preciso quello, che ha grado di precisione maggiore.

Radice quadrata approssimata. — Di un intero (assoluto) N conveniamo di indicare con codesto nome il valore intero approssimato per difetto a meno di 1 di $\sqrt{N}$, cioè il massimo intero r, il cui quadrato non supera N. Per semplicità lo indicheremo, nei prossimi Esercizi, con «r. a. di N».

55. La radice quadrata approssimata di un intero (assoluto) avente $2n-1$ o $2n$ cifre ha n cifre, cosicchè per trovare della r. a. di un dato numero intero N, il numero delle cifre, basta decomporre le cifre di N, a partire da destra, in gruppi di 2 cifre ciascuno, salvo l'ultimo a sinistra che potrà risultare di 2 cifre o anche di 1 sola. Il numero delle cifre della radice approssimata di N è il numero di codesti gruppi. [Infatti il minimo intero di n cifre è 10^{n-1}, cosicchè se un numero x ha n cifre si ha $10^{n-1} \leq x < 10^n$ e quindi $10^{2n-2} < x^2 < 10^{2n}$, ecc.].

56. Se r è la radice approssimata di un intero (assoluto) N, la radice approssimata dell'intero N', che da N si ottiene, aggiungendogli a destra due nuove cifre c, c', si ottiene aggiungendo a destra di r una sola cifra h. Indicato con R il resto del massimo quadrato contenuto in N, cioè posto $R = N - r^2$, codesta cifra h deve soddisfare la disuguaglianza

$$(*) \qquad h \leqq \frac{10R+c}{2r},$$

cioè non deve superare il quoziente intero, che si ottiene, dividendo per il doppio di r il numero, che da R si trae, aggiungendogli a destra la cifra c (vale a dire la prima delle due cifre, che vanno aggiunte ad N per avere N'). Precisamente h è il massimo numero, da 0 a 9, che soddisfa la limitazione

$$(**) \qquad (2 \cdot 10r + h)\, h \leq 100R + 10c + c',$$

cioè la massima cifra, per cui accade, che, scrivendola a destra del doppio della radice approssimata di N e moltiplicando il risultato per

[1] Per più ampi e precisi sviluppi su questo importante argomento, vedasi, per es., E. Maccaferri, *Calcolo numerico approssimato*, Milano, Hoepli, 1919.

la cifra stessa, si ottenga un intero, che non superi quello, che si ottiene, scrivendo a destra del resto R le due cifre c, c'. [Per dimostrare la prima parte si osservi che, essendo $N' = 100\,N + 10c + c'$ e $10c + c' < 100$, si ha $100N \leq N' < 100\,N + 100$ cioè $100N \leq N' < 100\,(N + 1)$.

Ma, per ipotesi, $r^2 < N < (r+1)^2$ e quindi $N + 1 \leq (r+1)^2$ o infine

$$100r^2 \leq N' < 100(r+1)^2 = (10r + 10)^2,$$

cosicchè la r. a. di N' dovendo essere compresa fra $10r$ e $10r + 10$, si otterrà, aggiungendo un'opportuna cifra h a destra di r. — Per dimostrare le (*), (**), si noti che h è il massimo numero fra 0 e 9, per cui sia $(10r + h)^2 \leq N'$, ossia $100r^2 + 2 \cdot 10r \cdot h + h^2 \leq 100\,N + 10c + c'$, o ancora appunto la

(**) $$2 \cdot 10rh + h^2 \leq 100R + 10c + c'.$$

D'altra parte di qui si deduce, sopprimendo nel primo membro h^2 e sostituendo nel secondo a c' il numero maggiore 10,

$$2 \cdot 10 \cdot rh \leq 100R + 10\,(c + 1)$$

ossia $2rh \leq 10R + c + 1$, e quindi appunto la (*)].

Nota. — Si osservi che il calcolo necessario per verificare la (**) conduce a determinare facilmente il resto R del massimo quadrato contenuto in R'. Esso si ottiene, sottraendo dal numero, che si trova a secondo membro della (**), quello che si trova al primo. Infatti:

$$100R + 10c + c' - (2 \cdot 10 \cdot r + h)h = 100(N - r^2) + 10c + c' -$$
$$- (2 \cdot 10 \cdot r + h)\ h = N' - (10r + h)^2 = R'.$$

Si noti, inoltre, che, indicata con r' la r. a. di N', cioè posto $10r + h = r'$, si ha $(2 \cdot 10 \cdot r + h) + h = 2(10r + h) = 2r'$.

57. Trovare la radice quadrata approssimata di un qualsiasi intero assoluto. [Si ragioni su di un caso concreto, prendendo ad es. il numero $N = 328712$. Si scomponga questo numero in gruppi di due cifre a partire da destra: 32'87'12. La r. a. del numero 32, formato dalle cifre del primo gruppo è, come si rileva immediatamente, 5, e il resto è 7, dunque 5 è la prima cifra della r. a. di 3287. Passiamo a cercare la r. a. di 3287. La prima cifra è 5 (Eserc. prec.) e la seconda non deve superare la parte intera di

$$\frac{10 \cdot 7 + 8}{2 \cdot 5} = \frac{78}{10},$$

cioè 7. Proviamo se il 7 renda soddisfatta la condizione (**) dell'Eserc. prec. Il primo membro di questa limitazione è qui $(2 \cdot 10 \cdot 5 + 7)7 = 749$, il secondo $100 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 7 = 787$, cosicchè la (**) è soddisfatta. Se così non fosse accaduto, si sarebbe dovuto provare, anzichè il 7, successivamente il 6, il 5, fino a trovar soddisfatta la (**). Qui intanto si è riconosciuto che la r. a. di 3287 è 57, onde il resto è $787 - 749 = 38$

Si può allora allora passare a cercare la r. a. di 328712. Le prime due cifre sono 57 e la terza non deve superare la parte intera di

$$\frac{10 \cdot 38 + 1}{2 \cdot 57} = \frac{387}{114},$$

cioè 3. Proviamo se questa cifra renda soddisfatta la (**). Il primo membro è $(2 \cdot 10 \cdot 57 + 3)3 = 1143 \cdot 3 = 3429$, mentre il secondo è 3812. La (**) è soddisfatta, cosicchè la r. a. cercata è 573 e il resto è $3812 - 3429 = 383$. L'operazione, come si è imparato per pratica nelle Scuole medie inferiori, si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|c|c|}
32{\cdot}87{\cdot}12 & \multicolumn{2}{l}{573} \\ \hline
25 & 107 & 1143 \\
78{\cdot}7 & 7 & 3 \\ \cline{2-3}
74\,9 & 749 & 3429 \\ \cline{1-1}
3\,81{\cdot}2 & \multicolumn{2}{l}{} \\
3\,42\,9 & \multicolumn{2}{l}{} \\ \cline{1-1}
38\,3 & \multicolumn{2}{l}{}
\end{array}$$

o più semplicemente, registrando nella colonna a sinistra soltanto i successivi resti:

$$\begin{array}{r|c|c|}
32{\cdot}87{\cdot}12 & \multicolumn{2}{l}{573} \\ \hline
78{\cdot}7 & 107 & 1143 \\
3\,81{\cdot}2 & 7 & 3 \\ \cline{2-3}
38\,3 & 749 & 3429
\end{array}\,.$$

58. Se, dato un intero assoluto N, si son trovati, in un modo qualsiasi, due altri interi r ed R, tali che sia $N = r^2 + R$, [condizione necessaria e sufficiente affinchè r sia la radice quadrata approssimata di N, si è che R non superi il doppio di r.

59. Chiamata *radice quadrata approssimata per difetto, a meno di* 10^{-n}, di un qualsiasi numero reale assoluto a un numero r, per cui sia

$$r^2 \leq a < \left(r + \frac{1}{10^n}\right)^2,$$

si dimostri che una tale radice si ottiene, calcolando (Eserc. 57) la radice quadrata approssimata a meno di 1 del numero $100^n \cdot a$ e dividendo il risultato per 10^n. [Infatti, moltiplicando i tre membri della limitazione precedente per 100^n, ecc.].

60. Si trovi la radice quadrata approssimata per difetto, a meno di 10^{-2} del numero 27. [Tenendo conto dell'Eserc. prec. e dell'Eserc. 55], si trova:

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
27{,}00{\cdot}0\,0 & \multicolumn{3}{l}{5{,}19} \\ \hline
20{\cdot}0 & 102 & 101 & 1029 \\
99\,0{\cdot}0 & 2 & 1 & 9 \\ \cline{2-4}
0{,}06\,3\,9 & 204 & 101 & 9261
\end{array}\,.$$

61. Si trovi la radice quadrata approssimata per difetto, a meno di 10^{-3} del numero 3,14159. Tenendo conto degli Eserc. 59, 57 si trova:

3,1 4·15·90	1,772				
2 1·4	29	28	27	347	3542
2 51·5	9	8	7	7	2
8 69·0	261	224	189	2429	7084
0,001 60 6					

62. Se la parte intera di un numero a contiene $2r$ o $2r-1$ cifre, si ottiene $\sqrt{a}$ con l'approssimazione di 10^{-n}, conservando nel numero dato $n-r+1$ cifre decimali esatte e calcolando la radice con $n+1$ cifre decimali.

63. L'errore relativo della radice quadrata di un numero approssimato è minore dell'errore relativo (per eccesso) di codesto numero (cfr. la def. dopo l'eserc. 54).

64. Un agrimensore ha trovato come lati di un triangolo rettangolo dam. 3, dam. 4,50, dam. 5,40. Quale è, in media, il grado di precisione di siffatte misure?

65. Diversi autori hanno in vari tempi proposto pel numero π i seguenti valori approssimati: $3+\frac{17}{120}$ (Tolomeo); $\sqrt{10}$ (Bramagupta); $\sqrt{9,8694}$ (Ganeça); $\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$ (Nicolò da Cusa); $\frac{1}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}$ (Kochanski); $\frac{13}{50}\sqrt{146}$ (Specht); $\frac{501+80\sqrt{10}}{240}$ (Gergonne).

Si ordinino codesti valori secondo il loro grado di precisione.

66. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area di siffatto triangolo il numero

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)a^2 ?$$

67. La lunghezza della semicirconferenza è data approssimativamente dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero iscritti nel cerchio. Di che ordine è l'approssimazione?

68. Dato un cerchio, se ne divida il diametro AB in cinque parti uguali, si prolunghi AB di un segmento BC uguale ad una di queste quinte parti, e sulla tangente in A si prenda il segmento AD uguale a tre di codeste parti. Il perimetro del triangolo ACD è approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza. Qual'è il valore approssimato di π che si ricava dalla precedente costruzione?

69. NICOLÒ DA CUSA (1464) per costruire un triangolo equilatero che ha perimetro uguale ad un dato cerchio, iscrive un quadrato nel cerchio e considera il triangolo equilatero iscritto nel cerchio che ha per diametro la somma del lato del quadrato or ora indicato e del raggio del cerchio dato. Che valore approssimato di π si ricava di qui?

70. Per trasformare un dato quadrato in un cerchio di ugual superficie, i matematici indiani prendevano a partire dal centro del quadrato, sulla parallela a un lato, un segmento uguale alla metà della diagonale, dividevano la parte di questo segmento esterna al quadrato in tre parti uguali e consideravano il cerchio di centro nel centro del quadrato e passante per il primo dei due punti di divisione or ora accennati. Quale valore approssimato di π si ricava di qui?

71. Secondo il celebre pittore e geometra ALBRECHT DURER (1525) il problema precedente si risolve prendendo come diametro gli $\frac{8}{10}$ della diagonale del quadrato. Si ha così per π il valore approssimato $3+\frac{1}{8}$, che compare già in Vitruvio.

72. GERBERTO (più tardi Papa Silvestro II, intorno al 1000) lasciò scritto che un triangolo equilatero che abbia il lato di 30 piedi ha l'altezza di 26 piedi: più tardi egli prese l'altezza inferiore di $\frac{1}{7}$ all'altezza. Quali valori approssimati di $\sqrt{3}$ usava in tal modo GERBERTO? I valori usati di quanto $^0/_0$ si scostavano dai valori esatti?

CAPITOLO III

73. Calcolare (II, n. 4):

$$\sqrt{2}\ \sqrt{8};\quad \sqrt{27}\ \sqrt{3};\quad \sqrt{5}\ \sqrt{125};\quad \sqrt{3a}\ \sqrt{13a};$$
$$\sqrt{6}\ \sqrt{8};\quad \sqrt{3}\ \sqrt{15};\quad \sqrt{48}\ \sqrt{128};\quad \sqrt{3a}\ \sqrt{6a}.$$

74. Trasformare e semplificare:

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{288}+\sqrt{338};$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{234}+\sqrt{75}+\sqrt{192}+\sqrt{507};$$
$$\sqrt{28}-\sqrt{68}+\sqrt{2268}-\sqrt{1792}.$$

75. Raccogliere fuori parentesi un fattore comune nelle seguenti espressioni:

$$2-\sqrt{2};\quad 3-\sqrt{6};\quad \sqrt{2}+\sqrt{6};\quad 2\sqrt{3}+3\sqrt{2};$$
$$5\sqrt{3}-3\sqrt{5};\quad 3+\sqrt{3}+\sqrt{15};\quad 5-2\sqrt{5}-3\sqrt{125}.$$

76. Trasportare sotto il segno di radice il fattore esterno nelle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{3},\quad 3\sqrt{5},\quad 8\sqrt{6},\quad 2\sqrt{\frac{1}{2}},\quad 12\sqrt{\frac{5}{24}},$$
$$(a+b)\sqrt{a-b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}},\quad a\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

77. Trasformare le seguenti espressioni in frazioni a denominatore razionale:

$$\sqrt{\frac{1}{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{ab},$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}},\quad \frac{a+b}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a-1}{\sqrt{a-1}},\quad \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}},$$
$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a^2+ab}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{ab-b^2}{\sqrt{a+b}}.$$

78. Eseguire le seguenti operazioni e semplificare:

1. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$;

2. $7\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{32}$;

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{2\sqrt{8}}{8}$;

4. $\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)^2$;

5. $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$;

6. $\sqrt{3a^2-6ab+3b^2}$;

7. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

8. $(p+\sqrt{pq})(p-\sqrt{pq})$;

9. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$;

10. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

11. $(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab)(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}-ab)$.

12. $\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{2}}\right)^2$;

13. $\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$;

14. $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$;

15. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

16. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$;

17. $\frac{\sqrt{1-a}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}$;

18. $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{ab}}{a-b}$.

79. Trovare il valore della espressione

$$\frac{x^3 - 4x}{x^4 - 4x^2 + 16}$$

per $x = 1 + \sqrt{5}$.

80. Verificare le seguenti uguaglianze numeriche:

$$1. \quad \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 1} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2});$$

$$2. \quad \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 3} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{7}; \qquad 3. \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^3\right] = 3.$$

81. Verificare le seguenti identità:

$$1. \quad \sqrt{(a + b)^4 - 2(a + b)^2 (a - b)^2 + (a - b)^4} = 4ab;$$

$$2. \quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab}; \qquad 3. \quad \frac{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

$$4. \quad \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2};$$

$$5. \quad \frac{2(1 - ab)}{(1 + a)\sqrt{1 + b^2} + (1 + b)\sqrt{1 + a^2}} = \frac{(1 + a)\sqrt{1 + b^2} - (1 + b)\sqrt{1 + a^2}}{a - b}.$$

82. Dimostrare che

$$1. \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad (a > b);$$

$$2. \quad \frac{a + b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a + b}.$$

83. Dimostrare che da

$$a : b : c = x : y : z$$

segue

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a : x.$$

84. Dato un triangolo ABC, se ne indichino con a, b, c le lunghezze dei lati rispettivamente opposti ad A, B, C, con p il semiperimetro e con h_a, h_b, h_c le altezze. Si dimostri che è

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

85. L'area S del triangolo ABC è data (es. prec.) dalla seguente *formula di Erone:*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

86. Se in un triangolo, di cui sia a la lunghezza di un lato e p il semiperimetro, l'area è data da

$$S=p(p-a),$$

il triangolo è rettangolo ed ha il lato a come ipotenusa [Eserc. prec.].

87. Le bisettrici del triangolo ABC (Eserc. 84) sono date da

$$s_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$s_b=\frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$s_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}\,.$$

88. Se nel triangolo ABC (Eserc. 84) l'angolo in A è di 60°, si ha $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}$. In base a questa formula e a quella di Erone (Eserc. 85), si calcoli l'area di un triangolo avente un angolo di 60°, compreso fra due lati di cm. 20 e cm. 30 rispettivamente.

89. Verificare le seguenti uguaglianze numeriche:

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

3. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$; 4. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$;

4. $\sqrt{12+8\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}+1)$; 5. $\sqrt{9+\sqrt{45}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{30}+\sqrt{6})$.

90. Trasformare in un unico radicale quadratico:

1. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$; 2. $\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$;

3. $\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7}}+\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$; 4. $\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7}}-\sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$;

5. $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}+\sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$;

6. $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}}+\sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$;

7. $\sqrt{x+\sqrt{ax-\dfrac{a^2}{4}}}\pm\sqrt{x-\sqrt{ax-\dfrac{a^2}{4}}}$;

8. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\pm\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

Capitolo IV

91. Risolvere le equazioni di 2° grado:

1. $x^2 + 6x = 40$; 2. $x^2 - 6x = 135$; 3. $x^2 - 4x = 21$;
4. $x^2 - 28x = 60$; 5. $x^2 - 11x = -28$; 6. $x^2 + 11x = 42$;
7. $x^2 - \frac{x}{2} = 14$; 8. $x^2 + \frac{2x}{5} = 27$; 9. $x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$;
10. $x^2 - \frac{1}{20}x = \frac{1}{10}$; 11. $x(x-5) + 4(x-3) = 30$;
12. $3(5-2x) = 10 + 2x(6x-1)$; 13. $(2x+3)(x-4) + 9 = 0$;
14. $3x - (x-3)(2x-5) = 5$;
15. $(5x+6)(3x-1) - (2x-3)(x-4) = 82$; 16. $(x+2)^2 = x + 22$;
17. $(3x-5)^2 = 12x + 1$; 18. $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x-8)^2$;
19. $2 - \frac{x^2-9}{7} = \frac{3x-7}{5}$; 20. $2x - \frac{x^2-7}{4} = \frac{4x-1}{2}$;
21. $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-x^2}{3} = x + \frac{1}{3}$; 22. $\frac{x+1}{2} - \frac{x^2-3x}{5} = 5 - \frac{2x-3}{3}$;
23. $\frac{3x-2}{x-2} = 3x - 14$; 24. $\frac{4x-3}{x-4} = x + 12$; 25. $2x + 3 = \frac{1}{3x+4}$;
26. $\frac{1}{5x} - \frac{1}{7x+3} = \frac{1}{10}$; 27. $\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x-3} + \frac{1}{30} = 0$;
28. $\frac{6}{x} - \frac{5x+3}{3x-4} = 14$; 29. $2x - \frac{x-3}{2x-5} = 7\frac{2}{3}$;
30. $\frac{1}{5x+2} + \frac{5}{3(x+2)} = \frac{1}{x}$; 31. $\frac{7}{x+18} - \frac{5}{x+2} + \frac{2}{x} = 0$;
32. $\frac{x-2}{2x+2} + \frac{2x-3}{3x-1} = \frac{1}{2}$; 33. $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x-6}{2x-8} = \frac{2}{3}$;
34. $(2x - 3 + \sqrt{5})^2 + 5(2x - 3 + \sqrt{5}) = 14$;
35. $(3x - 4\sqrt{5} + 6)^2 - 7(3x - 4\sqrt{5} + 6) + 12 = 0$;
36. $x^2 - bx = ax - ab$; 37. $x^2 - b^2 = 2ax - a^2$; 38. $abx^2 - b^2x = a^2x - ab$;
39. $(a^2 + b^2)x = ab(x^2 + 1)$; 40. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$;
41. $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$; 42. $x^2 + a^2 + b^2 = 2(a+b)x + 2ab$;
43. $ax^2 - (3a-1)x + 2a - 1 = 0$;
44. $x + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{b}$; 45. $\frac{a}{x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x-a}$;
46. $\frac{1}{x+a} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{x}$; 47. $\frac{1}{a+2x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a} = 0$;

48. $\dfrac{1}{x+a+b}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$; 49. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}=2$;

50. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}=3$.

92. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni di 2° grado

$$ax^2+bx+c=0; \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

abbiano una radice comune. [Una tale radice deve soddisfare alla combinazione lineare delle due date equazioni, che ha per moltiplicatori a' e $-a$ ecc.].

93. Scrivere un'equazione di 2° grado, le cui radici x_1, x_2 siano date da:

1. $x_1=3,\ x_2=5$; 2. $x_1=4,\ x_2=-10$; 3. $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{2}{3}$;

4. $x_1=\dfrac{3}{4},\ x_2=\dfrac{7}{6}$; 5. $x_1=x_2=-\dfrac{3}{5}$; 6. $x_1=\dfrac{5}{8},\ x_2=-\dfrac{7}{12}$;

7. $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{3}$; 8. $x_1=2+\sqrt{3},\ x_2=2-\sqrt{3}$;

9. $x_1+\sqrt{5},\ x_2=-2+\sqrt{7}$; 10. $x_1=1,\ x_2=2a$; 11. $x_1=1,\ x_2=\dfrac{1}{a}$;

12. $x_1=a,\ x_2=2b$; 13. $x_1=a+b,\ x_2=a-b$; 14. $x_1=\dfrac{1}{a},\ x_2=\dfrac{1}{b}$;

15. $x_1=\dfrac{a}{b},\ x_2=\dfrac{b}{a}$; 16. $x_1=\dfrac{a+b}{a-b},\ x_2=\dfrac{a-b}{a+b}$;

17. $x_1=a^2+b^2,\ x_2=2ab$; 18. $x_1=a+\sqrt{a^2+b^2},\ x_2=a-\sqrt{a^2+b^2}$.

94. Trovare due numeri, di cui la somma s e il prodotto p siano dati da:

1. $s=7,\ p=12$; 2. $s=1,\ p=-\dfrac{3}{4}$; 3. $s=-2,\ p=\dfrac{21}{25}$;

4. $s=0{,}1,\ p=-0{,}6$; 5. $s=\dfrac{10}{3},\ p=\dfrac{16}{9}$; 6. $s=5a,\ p=6a^2$;

7. $s=2a,\ p=a^2-1$; 8. $s=\dfrac{a+b}{a},\ p=\dfrac{b}{a}$; 9. $s=\dfrac{b-a}{b},\ p=-\dfrac{a}{b}$;

10. $s=\dfrac{2b}{a^2-b^2},\ p=-\dfrac{1}{a^2-b^2}$; 11. $s=\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2},\ p=1$;

12. $s=\dfrac{2a}{a-b},\ p=\dfrac{a}{a-b}$.

95. Senza risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$, trovare:
1. la somma dei valori reciproci delle due radici;
2. la somma dei quadrati delle due radici;

3. la somma dei valori reciproci dei quadrati delle due radici;
4. la somma dei cubi delle due radici;
5. la somma dei cubi dei valori reciproci delle due radici.

96. Senza risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, scrivere l'equazione di 2^o grado, che ha per radici:

1. gli opposti dei valori delle radici dell'equazione data;
2. i reciproci dei valori delle radici dell'equazione data;
3. la somma e il prodotto delle radici dell'equazione data;
4. i quadrati delle radici dell'equazione data;
5. i valori reciproci dei quadrati delle radici dell'equazione data;
6. i cubi delle radici dell'equazione data;
7. i valori reciproci dei cubi delle radici dell'equazione data;
8. le radici dell'equazione data, aumentate, ciascuna, di un dato numero h;
9. le radici dell'equazione data, moltiplicate ciascuna per un dato numero h.

97. Decomporre in fattori di 1^o grado i seguenti trinomî di 2^o grado:

$$1.\ x^2 + x + 6;\quad 2.\ 8x^2 + 10x - 3;\quad 3.\ 2x^2 + \frac{5}{3}x - 2;$$

$$4.\ 6x^2 - 5x - 56;\quad 5.\ x^2 - 3x + 2;\quad 6.\ x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1;$$

$$7.\ x^2 - 2ax + a^2 - b^2;\quad 8.\ a(x^2 + 1) - (a^2 + 1)x;$$

$$9.\ x^2 - 2ax + (a + b - c)(a - b + c);\quad 10.\ x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2;$$

$$11.\ abx^2 - (a + b)x + 1;\quad 12.\ bcx^2 - (ac + b^2)x + ab.$$

98. Discutere le seguenti disuguaglianze:

$$1.\ x^2 + 2x - 8 > 0;\qquad 2.\ x^2 + 2x - 1 > 0;\qquad 3.\ 8 + 2x - 15x^2 > 0;$$

$$4.\ 1 - 8x - 4x^2 > 0;\quad 5.\ \frac{2x^2 - 3x - 20}{6x^2 + 5x - 4} > 0;\quad 6.\ \frac{10 - 13x - 15x^2}{3 + 11x + 8x^2} > 0;$$

$$7.\ \frac{2x^2 - 9x + 7}{15x^2 - 44x + 95} > 0;\quad \frac{8x^2 + 22x - 21}{6x^2 + 7x - 10} > 0.$$

[Per discutere le disuguaglianze fratte di questo tipo conviene servirsi della rappresentazione della indeterminata x su di una retta graduata. Segnati su di essa i punti, in cui si annullano il denominatore e il numeratore della frazione algebrica a primo membro della disuguaglianza, si scrivono, in corrispondenza degli intervalli così determinati, i segni che vi assumono rispettivamente codesti due trinomî; dopo di che si riconosce immediatamente quali siano gli intervalli, in cui i due trinomî assumono lo stesso stesso segno, ecc.].

99. In ciascuno dei casi seguenti si determini per quali valori del parametro h il trinomio di 2^o grado risulti positivo per qualsiasi valore della x:

1. $(h-7)x^2+2(h-3)x+2h$; 2. $(h+1)x^2+2(3h-4)x+8h$;
3. $hx^2+2(2h+a)+5h$; 4. $(2h-1)x^2+2(3h-1)x+5h$;
5. $(3h-1)x^2+2(4h-1)x+5h$; 6. $hx^2+(2h+1)x+5h+1$.

100. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $\sqrt{3x+4}=\sqrt{4x-3}$; 2. $2\sqrt{2x+13}=5\sqrt{3x-14}$;
3. $\sqrt{1+\sqrt{2+x}}=3$; 4. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)=x-6$;
5. $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-7)=(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-6)$.
6. $\sqrt{x}+2=6$; 7. $\sqrt{x+2}=6$;
8. $5(\sqrt{x}-4)-4(\sqrt{x}-5)=9$; 9. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{2}+\dfrac{8-\sqrt{x}}{3}=2$;
10. $\dfrac{9\sqrt{x}-2}{6}=\dfrac{15\sqrt{x}+1}{18}-\dfrac{15\sqrt{x}-3}{12}$;
11. $x-6\sqrt{x}+5=0$; 12. $x+10=7\sqrt{x}$;
13. $x+\sqrt{x}=30$; 14. $x-3\sqrt{x}=28$;
15. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7)=3$; 16. $(5-\sqrt{x})^2=2(7+\sqrt{x})$;
17. $x+3\sqrt{23-x}=19$; 18. $\dfrac{x}{2}-4=\sqrt{\dfrac{x}{4}+1}$;
19. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$; 20. $\sqrt{x-7}-\sqrt{x}=1$;
21. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5}=9$; 22. $\sqrt{5x-4}-\sqrt{x+11}=\sqrt{x}$;
23. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{2x+9}$;
24. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x}=\sqrt{3x^2+2x+1}$;
25. $2x-1+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x^2-x+2}$;
26. $\sqrt{1+\sqrt{x+2}}=3$: 27. $\sqrt{x+7+\sqrt{x+3}}=4$;
28. $\sqrt{2x+3+2\sqrt{x(x+3)}}=3$; 29. $\sqrt{3x+1-\sqrt{6x+1}}=2\sqrt{x-2}$;
30. $a\sqrt{b-x}=b\sqrt{a-x}$; 31. $\sqrt{b(b+x)}-\sqrt{a(a+x)}=a+b$;
32. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$; 33. $\dfrac{5+6\sqrt{x}}{7-\sqrt{x}}=3+\dfrac{2}{5}$;
34. $\dfrac{\sqrt{2x}+3}{\sqrt{2x}-2}=3$; 35. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=2x$;
36. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=4$;

37. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=\dfrac{10}{\sqrt{x+4}}$; 38. $\dfrac{b\sqrt{ax}-1}{\sqrt{ax}+1}=\dfrac{\sqrt{ax}-1}{b}+b$;

39. $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5x-x}=\dfrac{12a}{\sqrt{5a+x}}$; 40. $\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=\dfrac{1+ax}{1-ax}$;

41. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=x-1$;

42. $\dfrac{1}{x+\sqrt{2a^2-x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{2a^2-x^2}}=x$.

101. Trovare un numero tale, che la somma delle radici quadrate positive dei due numeri che da esso si ottengono, aumentandolo e diminuendolo di 1, sia uguale ad un prefissato numero a.

102. Si decomponga 2160 in due fattori che stiano fra loro nel rapporto 5 : 3.

103. Si decomponga 156 in due fattori la cui somma sia 25.

104. Quale numero differisce, in meno, di 210 dal suo quadrato?

105. Se un un numero si aumenta e si diminuisce di 64, il prodotto dei numeri così ottenuti è uguale a 1680. Qual'è codesto numero?

106. Quale numero, aggiunto al suo reciproco, dà $3+\dfrac{11}{14}$?

107. Intorno ad un giardino quadrato si è tracciato un sentiero largo m. 2; e la superficie di mezzo, destinata alle piantagioni, supera quella occupata dalla strada di m.² 1732. Qual'è il lato del giardino?

108. In un cerchio di cm. 13 di raggio si vuol condurre per un punto A, che dista dal centro cm. 5, una corda lunga cm. 25. Quanto sono lunghi i due seguenti in cui la corda è divisa da A?

109. In un cerchio di cm. 20 di raggio si è condotta una corda lunga cm. 24. Quanto dista dal centro il punto d'intersezione delle tangenti al cerchio negli estremi della corda?

110. Dati due cerchi concentrici di raggi di cm. 17 e cm. 25, si conduca una retta su cui la corda determinata dalla circonferenza minore sia uguale ai $\dfrac{2}{5}$ di quella della maggiore. Qual'è la lunghezza della corda e quale la sua distanza dal centro?

111. Da un punto esterno ad un cerchio di cm. 21 di raggio e distante dal centro di cm. 29 si conduca una secante la cui parte interna sia di cm. 9.

112. Se il denominatore di una frazione di numeratore 5 si aumenta di 4, la frazione diminuisce di $\dfrac{5}{24}$. Qual'è la frazione?

113. Un uccello, che volando orizzontalmente fa 15 m. al secondo, passa a 30 m. di altezza, verticalmente, sulla testa di un cacciatore. A quale punto deve mirare il cacciatore, se si suppone che i pallini percorrano in media 180 m. al secondo?

114. Due treni vanno da Chiusi a Roma. Il primo di essi, che impiega 18^m meno dell'altro a percorrere codesta distanza di km. 165, fa 5 km. di più all'ora. Quali sono le durate dei due tragitti?

115. Un mugnaio sale col mulo carico di farina ad un paesetto di montagna in $5^h 24^m$, mantenendo nella seconda metà del cammino una velocità che è ad ogni ora inferiore di $^1/_2$ km. a quella mantenuta nella prima metà. Il giorno dopo ridiscende al suo punto di partenza in 3 ore, mantenendo una velocità che supera di 1 km. per ogni ora la velocità, con cui aveva camminato nella prima parte della salita. Qual'è il cammino percorso?

116. Su di un fiume un vaporetto parte, contro corrente, da A verso B e tre ore dopo ne parte un altro da B verso A. Questo incontra il primo dopo 30^m di viaggio e giunge alla meta 45^m dopo che il primo è giunto in B. Quanto è durato il viaggio di ciascun vaporetto?

117. Una tavoletta assira contiene, in caratteri cuneiformi, un elenco dei cubi dei numeri naturali e come 32^{mo} cubo dà il numero 968, dove, ben inteso, codeste tre cifre sono rappresentate da gruppi di 9, 6, 8 cunei. Qual'è la base del sistema di numerazione qui usato?

118. Due escursionisti hanno compiuto ciascuno una escursione a piedi, restando entrambi in viaggio il medesimo tempo. Ma il primo si è preso per via un giorno di riposo ed ha fatto 120 km. e il secondo, che si è riposato tre giorni, ne ha fatto solo 112. Se camminando ciascuno colla stessa velocità effettivamente mantenuta, il primo si fosse preso tre giorni di riposo e il secondo uno solo, questo ultimo avrebbe fatto 44 km. più del primo. Quanti giorni stettero essi in viaggio?

119. L'area di un triangolo è di cm.^{2} 13,5 e la base supera l'altezza di cm. 1,5. Quali sono le dimensioni del triangolo?

120. In un rettangolo l'altezza supera di cm. 7 la larghezza e la diagonale è di cm. 17. Determinare le dimensioni.

121. Di un rettangolo si conoscono il perimetro $2p$ e la diagonale d; determinare le dimensioni. Caso particolare: $2p =$ dm. 8,2 e $d =$ dm. 2,9.

122. Dato un rettangolo di m. $5 \times$ m. 12, se ne aumentino le due dimensioni di una stessa lunghezza in modo che aumenti la diagonale di m. 4; oppure aumenti l'area di cm.^{2} 110. Determinare nell'uno e nell'altro caso di quanto si debbano aumentare le dimensioni.

123. Una strada parte da un punto A e dopo 2 km. volta ad angolo retto. A quale distanza da A su codesta strada, deve trovarsi un punto B, perchè il cammino da A a B sia uguale ad h volte la distanza in linea retta da A a B?

124. Dati più segmenti, le cui misure siano designate con a, b, c, d, e, f.... costruire i segmenti [la cui misura sia]:

$$1.\ \frac{cde}{ab};\qquad 2.\ \frac{b\sqrt{cd}}{a};\qquad 3.\ \frac{c\sqrt{defg}}{ab};$$

$$4.\ \frac{a^3+b^3}{c^2+d^2}\left(=\frac{a^2}{\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{a}}+\frac{b^2}{\frac{c^2}{b}+\frac{d^2}{b}}\right);\qquad 5.\ \sqrt{\frac{abc}{d}};\qquad 6.\ \sqrt{5\frac{abcd}{ef}};$$

$$7.\ \sqrt{5a^2+2b^2};\qquad 8.\ \sqrt{a^2+b^2+c^2};\qquad 9.\ \sqrt{a^2b+c^3}$$

$$10.\ \sqrt{5\frac{abc}{d}+e^2};\qquad 11.\ \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{d};\qquad 12.\ \sqrt{ab-b^2}\quad (ab>c^2);$$

$$13.\ \sqrt{\frac{a^3+b^2c}{d}}+\sqrt{\frac{e^3-f^3}{g}}\ (e>f);\qquad 14.\ \sqrt{g\sqrt{a^2+b^2}+h\sqrt{e^2+f^2}}.$$

$$15.\ \sqrt[4]{a^4+b^4}\left(=\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}\right);\qquad 16.\ \sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{e+3f^2}};$$

125. Dati più segmenti le cui misure siano a, b, c, d.... e dato il segmento unità di misura ($u=1$), costruire i segmenti:

$$1.\ abc\left(=\frac{abc}{u^2}\right);\qquad 2.\ ab+\frac{3}{7}-c^2;\qquad 3.\ \sqrt{a^2-b}\ \left(=\sqrt{a^2-bu}\right);$$

$$4.\ \sqrt{a+b^2+c^2};\qquad 5.\ \sqrt{5a^2+b};\qquad 6.\ \frac{a+\sqrt{b^2+4cd}}{2e};$$

$$7.\ \frac{3d+\sqrt{a^2-bc}}{5e}\qquad (a^2>bc);$$

$$8.\ \sqrt{3d+\sqrt{a-b^2-c}}\quad (a>b^2+c);\qquad 9.\ \sqrt{2a+\sqrt{3b+\sqrt{c+d^2}}};$$

$$10.\ \sqrt{\sqrt{a^3-\frac{b^2}{cd}}\sqrt{a^3+5b}}\qquad \left(a^3>\frac{b^2}{dc}\right).$$

In tutti questi casi le formule debbono essere rese omogenee di 1° grado con un artifizio conveniente (IV, n. 31).

126. Costruire un triangolo isoscele, iscritto in una circonferenza di dato raggio r, conoscendo:

1. la lunghezza a del lato. [Se AB è la base del triangolo cercato, D il punto medio di questa, C il vertice del triangolo, O il centro della circonferenza, si applichi il teorema di Pitagora ai triangoli ADC, ADO, ecc.];
2. la somma s della base e dell'altezza.

127. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo le lunghezze m, n dei segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede della corrispondente altezza.

128. Determinare il lato del triangolo equilatero di data area l^2, iscritto in un triangolo equilatero di dato lato a.

129. In un triangolo, conoscendo le lunghezze a, b di due lati e quella della mediana m_c relativa al terzo, calcolare quest' ultimo lato.

130. Essendo a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo scaleno (con $a > b > c$), si determini x in modo che $a - x$, $b - x$, $c - x$ siano i lati di un triangolo rettangolo.

131. Dati un triangolo di base a e di altezza h e un quadrato di lato l, aventi le basi su di una stessa retta, condurre una parallela a questa, che tagli dal triangolo e dal quadrato un triangolo ed un rettangolo, la cui somma sia equivalente al triangolo primitivo.

132. Una sfera di dato raggio r si seghi con un piano tale, che la superficie laterale del cono, avente per vertice il centro della sfera e per base il cerchio sezione, abbia area uguale alla superficie della sfera, che ha per diametro la distanza del piano segante dal centro della sfera data. Si calcoli il raggio del cerchio sezione.

133. Conoscendo di un tronco di cono il volume l^3 e il raggio r di una delle basi, calcolare l'altra.

NOTA. Vedansi inoltre gli Esercizi 214-221 del Cap. V.

134. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; 2. $x^4 - 21x^2 = 100$;
3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; 4. $x^4 + 9 = 10x^2$;
5. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 73$; 6. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$;
7. $10x^2 - 21 = x^4$; 8. $6x^4 - 35 = 11x^2$;
9. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$; 10. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$;
11. $x^4 - 4(a + b)x^2 + 16(a - b)^2 = 0$; 12. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$.

135. Se in un'equazione di 4° grado

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

i coefficienti rendono soddisfatta la condizione $(4a_2 - a_1^2)a_1 = 8a_3$, l'equazione si può scrivere sotto la forma

$$(x^2 + hx)^2 + p(x^2 + hx) + q = 0,$$

cosicchè la sua risoluzione si può far dipendere da quella di equazioni di 2° grado.

136. Risolvere le equazioni (Eserc. prec.):

1. $x^4 + 16x^3 + 62x^2 - 16x - 63 = 0$; 2. $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 4x - 30 = 0$.

137. In un triangolo ABC, conoscendo i lati $AB = c$, $AC = b$ e il prodotto l^2 delle lunghezze dei due segmenti BH, HC determinati sul terzo lato BC dalla corrispondente altezza, calcolare questo lato.

138. In una circonferenza di dato raggio r, una corda è tale che la differenza fra le aree dei due triangoli, aventi per base comune la corda e per vertici gli estremi del diametro ad essa perpendicolare, risulta uguale ad h volte il quadrato del raggio r. Si determini la distanza di codesta corda dal centro.

139. Risolvere le equazioni seguenti:

1. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$;
2. $3x^3 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$;
3. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;
4. $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$;
5. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$;
6. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$;
7. $4x^3 + 21x^2 + 21x + 4 = 0$;
8. $x^3 + 9{,}1x^2 - 9{,}1x - 1 = 0$;
9. $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$;
10. $15x^3 - 19x^2 - 19x + 15 = 0$;
11. $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$;
12. $3x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = 0$.

140. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$;
2. $4x^4 + 17x^3 - 17x - 4 = 0$;
3. $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$;
4. $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$;
5. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;
6. $3x^4 + 4x^3 - 4x - 3 = 0$;
7. $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$;
8. $15x^4 - 34x^3 + 34x - 15 = 0$;
9. $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$;
10. $x^4 + 10{,}1x^3 - 10{,}1x - 1 = 0$;
11. $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$;
12. $6x^4 - 10x^3 + 10x - 6 = 0$.

Radici razionali delle equazioni a coefficienti razionali. — **141.** La risoluzione di un'equazione a coefficienti razionali si può ridurre a quella di un'equazione a coefficienti interi, di cui il primo sia uguale ad 1. [Anzitutto, moltiplicando ambo i membri per un multiplo comune (e converrà prendere il minimo) dei denominatori dei coefficienti, l'equazione si riduce a coefficienti interi. Se essa assume con ciò la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$, dove a_0, a_1, $a_2, \dots, a_n$ denotano numeri interi (positivi o negativi) e si prende come nuova incognita la $u = a_0x$, si trova, sostituendo nell'equazione data $\frac{u}{a_0}$ al posto di x e moltiplicando ambo i membri per a_0^{n-1}, l'equazione

$$u^n + a_0a_1u^{n-1} + a_0^2a_1u^{n-2} + \dots + a_0^na_n = 0,$$

che appunto, ecc.].

142. Ogni eventuale radice razionale di un'equazione a coefficienti interi, di cui il primo sia uguale ad 1, è necessariamente intera (positiva o negativa) ed è uguale ad uno dei divisori del termine noto (compresi i divisori ± 1). [Un'equazione $x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n = 0$, dove b_1, $b_2, \dots, b_n$ sono numeri interi, sia soddisfatta dalla frazione $\frac{p}{q}$, dove p e q denotano due interi primi fra loro, di cui q si suppone positivo, mentre p può essere positivo o negativo. Sostituendo questa frazione nell'equazione al posto di x e moltiplicando ambo i membri per q^n, si ottiene l'uguaglianza numerica

$$p^n + b_1 q p^{n-1} + b_2 q^2 p^{n-2} + \dots + b_n q^n = 0,$$

dove tutti i termini del primo membro a partire dal secondo sono divisibili per q; deve esser tale anche p^n ecc., onde è necessariamente $q = 1$, e la precedente uguaglianza numerica si riduce a

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n = 0,$$

dove tutti i termini del primo membro, eccettuato l'ultimo, hanno in evidenza il divisore p. Quindi anche l'ultimo termine b_n ecc.].

143. Cercare le eventuali radici razionali delle seguenti equazioni:

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;
2. $6x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$;
3. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$;
4. $5x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 45x - 18 = 0$;
5. $6x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 3x - 4 = 0$;
6. $2x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 3x^4 + 4$.

Nota. Quando nell'equazione proposta, ove occorra, si sia ridotto ad 1 il primo coefficiente (Eserc. 141) e si siano trovati tutti i divisori del termine noto (compresi in ogni caso ± 1), bisogna verificare per ognuno di essi se renda soddisfatta l'equazione. Se c è il divisore che si considera, la verifica si può fare, sostituendo direttamente c ad x nel polinomio a primo membro. Ma di regola conviene invece applicare a questo polinomio, rispetto al divisore $x - c$, la Regola del Ruffini, la quale fornisce anche il quoziente del polinomio per $x - c$; se accade che c annulli il polinomio, cioè sia radice, la verifica per gli altri divisori del termine noto si può eseguire su codesto quoziente, anzichè sul polinomio primitivo, il che semplifica il calcolo.

144. Risolvere i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 19 \\ xy = 90 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - xy + 2y = 4 \\ 2x + xy + 2y = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = a^2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 250 \\ x - y = 4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 \\ x + y = 2h \end{cases}$
10. $\begin{cases} x(x + 2) + y(y + 2) = 183 \\ x + y = 17 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x(x + 4) + y(y - 4) = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 6 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x - y = a \end{cases}$
15. $\begin{cases} (x + 2)^2 - y^2 = 56 \\ x + y = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x-1)^2 - (y+3)^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1} - \dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{7}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{y+3} - \dfrac{y+3}{x} = -\dfrac{24}{35} \\ x - y = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = a \\ x - y = b \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2y + \dfrac{1}{4} = xy^2 \\ y - x = xy \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 35 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 189 \\ x + y = 9 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 27x^3 - 8y^3 = 104xy \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} a^3x^3 + b^3y^3 = a^2b^2x^2y^2 \\ ax + by = c \end{cases}$

25. $\begin{cases} (x-4)^3 + (7-y)^3 = 72 \\ x - y = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - y = 72 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x : y = 3 : 2 \\ \sqrt{x-2} = \sqrt{y-3} + 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{y-1} = 0 \\ x + y = 12. \end{cases}$

145. Il perimetro di un rettangolo è di m. 82 e la diagonale di m. 29. Quali sono le due dimensioni?

146. Se in un rettangolo, avente la diagonale di m. 85, si aumenta di m. 2 ciascuna delle due dimensioni, l'area si accresce di m.^{2} 230. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

147. L'area di un rettangolo è di m.^{2} 168 e il perimetro di m. 62. Quali sono le dimensioni?

148. Si trasformi un rettangolo di cm. 5 $\times$ cm. 7 in un altro che abbia il perimetro triplo.

149. Se i lati di un rettangolo avente la diagonale di m. 89 fossero ciascuno più corto di 3 m., la diagonale sarebbe più corta di m. 4. Quali sono le sue dimensioni?

150. Se in un rettangolo avente la diagonale di m. 65, il lato minore fosse più corto di m. 17 e il maggiore più lungo di m. 7, la diagonale resterebbe ancora lunga m. 65. Quali sono le due dimensioni?

151. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo:

1. il perimetro $2p$ e l'area l^2;
2. l'ipotenusa a e la somma s dei due cateti;
3. l'ipotenusa a e il rapporto h dei due cateti;

4. le differenze m, n fra l'ipotenusa e i cateti;

5. la somma s dei cateti e l'altezza h relativa all'ipotenusa.

152. In un triangolo, conoscendo la lunghezza di due lati e quella della bisettrice dell'angolo compreso, calcolare la lunghezza del terzo lato.

153. Calcolare la base e il lato di un triangolo isoscele, conoscendo il perimetro $2p$ e l'altezza h relativa alla base.

154. In un trapezio isoscele il lato obliquo è uguale alla semisomma delle basi. Determinare le lunghezze dei lati, sapendo che la somma del lato obliquo e della base minore è a e la somma dei quadrati dei quattro lati è $2b^2$. Fissato a, come deve scegliersi b, affinchè il problema sia possibile?

155. Ad una circonferenza di dato raggio r da un punto A che abbia dal centro la distanza $d > r$, si conduca una segante tale che la somma dei quadrati dei due segmenti compresi fra A e le sue intersezioni con la circonferenza risulti equivalente al doppio del quadrato di dato lato l.

156. Un rettangolo di perimetro $2p$, rotando intorno alla base o all'altezza, genera due cilindri rotondi, i cui volumi hanno somma uguale al volume della sfera di dato raggio r. Determinare la base e l'altezza del rettangolo.

157. Conosciuto il rapporto h fra il volume di un tronco di cono circoscritto ad una sfera di raggio r e il volume della sfera, trovare i raggi delle due basi del tronco e il rapporto fra le superficie totali dei due solidi.

158. Risolvere i sistemi seguenti:

1. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=4; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=52, \\ xy=24; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2+y^2=1{,}16, \\ 5xy=2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=2h^2, \\ xy=h^2; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2+xy=78, \\ y^2-xy=7; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=a, \\ xy=b; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4}{3}, \\ 2x(y+1)+y(x+2)=12; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2+3xy=16, \\ y^2-ay=0; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3(x^2+y^2)=5(x^2-y^2), \\ x(y-1)+x(y+1)=0; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2-3xy+2=0, \\ xy+y^2=6; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+y^2=a(x-y), \\ xy=b(x-y); \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ xy+y^2=b; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=57, \\ x^2-xy+y^2=43; \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=2a, \\ x^2-xy+y^2=2b; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 49, \\ 2x^2 = 3xy = 2y^2 = 45; \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 79, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 59; \end{cases}$

17. $a : x = x : y = y : b:$ 18. $x^2 + y^2 = xy = x + y;$

19. $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y = 4, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y + 9 = 0, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

159. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo:

1. l'ipotenusa a e l'area l^2;
2. la differenza d^2 dei quadrati dei cateti e l'area l^2;
3. il perimetro $2p$ e la lunghezza b della bisettrice dell'angolo retto.

160. Costruire un triangolo isoscele di data area l^2, iscritto nella circonferenza di dato raggio r.

161. Da un punto, avente dal centro di una circonferenza di dato raggio r una data distanza $d > r$, condurre una segante, che dalla circonferenza sia divisa in sezione aurea (sia nel caso, in cui la sezione aurea è la parte esterna della circonferenza, sia in quello, in cui la sezione aurea è la corda).

Capitolo V

162. Presi comunque su di una retta orientata quattro punti A, B, C, D, dimostrare che fra le misure dei segmenti orientati, determinati da codesti punti a due a due, sussistono le identità:

1. $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0;$
2. $AB \cdot BC \cdot CA + AB \cdot CD^2 + BC \cdot AD^2 + CA \cdot BD^2 = 0.$

[Si esprima ciascun segmento, che già non abbia un estremo in A, come somma (algebrica) di due segmenti siffatti].

163. Qual'è il campo di variabilità della x per le funzioni seguenti?

1. $y = \sqrt{3x + 2};$ 2. $y = \sqrt{5 - 2x};$

3. $y = \sqrt{\dfrac{x + 3}{1 - x}};$ 4. $y = \sqrt{\dfrac{2x - 7}{5 - 3x}};$

5. $y = \sqrt{\dfrac{4x + 1}{9x - 2}};$ 6. $y = \sqrt{\dfrac{3 - 7x}{3 - 2x}};$

7. $y = \sqrt{5 + 4x - x^2};$ 8. $y = \sqrt{9 - 4x^2};$

9. $y = \sqrt{3x^2 - 2} - 10;$ 10. $y = \sqrt{1 - 2x - x^2};$

11. $y = \sqrt{3x^2 - x + 4};$ 12. $y = \sqrt{2x(1 - x) - 5};$

13. $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 7x - 30}{4x^2 + 7x - 2}}$; 14. $y = \sqrt{\dfrac{4x^2 + 11x - 3}{-3x^2 + 4x + 4}}$;

15. $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{-3x^2 - 11x + 10}}$; 16. $y = \sqrt{\dfrac{4x(1-x)+1}{x^2 + x + 1}}$;

17. $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - x + 3}{9 - 7x - 2x^2}}$; 18. $y = \sqrt{\dfrac{x(1-x)-1}{x(1+x)+1}}$.

164. Un kg. di acqua a 4° C. ha il volume di 1000 cm³. e al variare della temperatura t subisce le dilatazioni d indicate in cm² dalla unita tabelletta:

$t = 0°$	4°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$d = 0{,}1$	0	0,3	0,9	1,7	2,9	4,3	5,9	7,7	9,7.

Tracciare su carta millimetrica la grafica delle dilatazioni, rappresentando con 1 cm. sull'asse x 10° e sull'asse y 1 cm³.

165. Si sa che il tempo impiegato dalla luce per venire dal Sole alla Terra è dato, al 1° di ciascun mese, dalla tabella seguente:

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
$8^m 10^s$	$8^m 11^s$	$8^m 14^s$	$8^m 18^s$	$8^m 22^s$	$8^m 25^s$
Luglio	**Agosto**	**Settembre**	**Ottobre**	**Novembre**	**Dicembre**
$8^m 27^s$	$8^m 26^s$	$8^m 22^s$	$8^m 19^s$	$8^m 15^s$	$8^m 11^s$.

Rappresentare questi tempi con una grafica e ricavarne approssimativamente i tempi corrispondenti al 15 di ciascun mese (*interpolazione*).

166. Le tassa per l'emissione dei vaglia postali nel Regno è stabilita come segue:

fino a L. 25	L. 0,40;
da L. 25,01 a L. 50	» 0,80;
da L. 50,01 a L. 100	» 1,20;
da L. 100,01 a L. 200	» 2,00;

e poi L. 0,50 in più per ogni aumento di L. 100 o frazione di L. 100. Rappresentare codesta tariffa con una grafica (notando che la tassa aumenta qui per salti bruschi e non con continuità).

167. Rappresentare graficamente la dilatazione $y = 10\alpha t$ al variare della temperatura t di una sbarra lunga m. 10; *a*) di ferro ($\alpha = 0{,}000012$); *b*) di ottone ($\alpha = 0{,}000019$); *c*) di zinco ($\alpha = 0{,}000029$).

168. Tracciare su carta millimetrica (prendendo come unità il cm.) le grafiche delle seguenti funzioni di 1° grado:

1. $y = x + 5$; 2. $y = x - 5$; 3. $y = -x + 5$;
4. $y = -x - 5$; 5. $y = 3x$; 6. $y = -3x$;

7. $y = 3x + 4$; 8. $y = 3x - 4$; 9. $y = -3x + 4$;

10. $y = -3x - 4$; 11. $y = \frac{3}{5}x$; 12. $y = \frac{3}{5}x + 2$;

13. $y = -\frac{3}{5}x - 3$; 14. $y = 0{,}1x$; 15. $y = -0{,}2x + 0{,}9$.

169. Si misuri una stessa temperatura con un termometro Celsius e con un termometro Fahrenheit ed espressa la seconda misura per mezze della prima, si tracci su carta quadrettata la grafica della funzione così ottenuta. Notoriamente a 0° C. corrispondono 32° F. e ad ogni aumento di 5° C. corrisponde ud aumento di 9° F.

Si deduca dalla grafica quali temperature F. corrispondano a 10° C., 27° C., — 15° C., e quali temperature C corrispondono a 0° F., 50° F., 117° F.

170. Tracciata sul foglio del diagramma precedente la grafica della temperatura Reaumur, espressa per mezzo della temperatura Celsius, si determini graficamente (e poi si assodi algebricamente) a quale temperatura C. i due termometri F. e R. segnino la medesima temperatura.

171. Si determinino graficamente le soluzioni *intere* delle *equazioni ndeterminate di* 1° *grado.*

$$3y - 2x - 6 = 0, \qquad 5y - 4x + 15 = 0$$
$$7y + 3x - 14 = 0, \qquad 9y + 4x + 9 = 6.$$

[Si risolva ciascuna di codeste equazioni rispetto ad y e si rappresenti graficamente su carta quadrettata la funzione così ottenuta].

172. Tracciare la grafica del cammino di un pedone che in $3^h 50^m$ percorre una distanza di km. 15, camminando, ad ogni ora, 50^m e sostando gli altri 10^m

173. Un ciclista, mantenendo una velocità costante, alle 2 e $^3/_4$ si trova a km. 18 dal punto di partenza e alle 3 e $^1/_4$ a km. 27. A quale ora è partito? Risolvere il problema graficamente e algebricamente.

174. Rappresentare graficamente il moto delle due lancette di un orologio. Determinare in tal modo gli istanti in cui esse si sovrappongono.

175. Un automobilista vuol percorrere 230 km. in 3 ore. Dopo un'ora di viaggio, per un guasto al motore, è costretto a star fermo un quarto d'ora. Quale velocità dovrà tenere nella seconda parte del viaggio? Rappresentare l'intero viaggio con un diagramma.

176. In una manovra un reggimento marcia, con la velocità di 5 km. all'ora, contro il nemico: un volontario-ciclista, che va 5 volte più veloce, si stacca dal reggimento e, dopo aver incontrato il nemico, torna indietro e si riunisce al reggimento due ore e mezzo dopo le partenza. Si domanda a quale distanza dal reggimento si trova, in codesto istante, il nemico, se si avvicina, marciando anch'esso a 5 km. all'ora? Risolvere il problema graficamente e poi algebricamente.

177. Due viandanti o due ciclisti percorrono una stessa strada nello stesso senso (oppure in senso inverso). La velocità del primo è di v km/h., quella del secondo di v' km./h. Quando e dove essi passeranno pel medesimo punto del loro cammino, se inizialmente si trovavano a k km., di distanza l'uno dall'altro

$v = 4$	3	3,6	3,9	14,1	13,5
$v' = 5$	4	4,2	4,7	16,5	17,8
$k = 2,7$	4,2	3,9	3,87	3,4	3.

Risolvere graficamente e poi algebricamente.

178. Due viandanti o ciclisti si sono messi in cammino su di una via rettilinea, partendo da uno stesso punto, il primo con la velocità di v m./sec. e l'altro con la velocità di v' m./sec., e tutti e due nella stessa direzione (oppure in direzioni opposte). Quando accadrà che la loro distanza sia di h m.?

$v = 8$	1,6	1,3	3	4,8	1
$v' = 5$	1,4	0,8	1,5	1,2	4
$h = 78$	1000	700	3000	18000	150.

Graficamente e algebricamente.

179. Due viandanti camminano su di una stessa strada con la velocità di 3,8 km./h. il primo e di 4,2 km./h. il secondo, l'uno incontro all'altro (oppure nello stesso senso). A quale distanza erano essi inizialmente, se si incontrano (o l'uno raggiunge l'altro) dopo 3^h oppure dopo $1^h 20^m$ oppure dopo 36^m? Graficamente e algebricamente.

180. Su di una pista chiusa di m. 1440 di circuito partono insieme due cavalieri dallo stesso punto, colle velocità di v e v' m./sec. e nello stesso senso (oppure in senso opposto). Quando e dove l'uno vien raggiunto dall'altro (oppure si incontrano)?

$v = 6,5$	6	6	5,8	4,5	2,4
$v' = 5,5$	4	4,8	6,2	6,3	4,8.

Graficamente e algebricamente.

181. Due viandanti partono, con la velocità di v e v' m./sec. rispettivamente da due luoghi distanti di km. k e si vanno incontro. Quando e dove si incontrano se il secondo parte un'ora dopo dell'altro (oppure 20 minuti prima)?

$v = 1,4$	1,5	1,45	1,55
$v' = 1,5$	1,2	1,25	1,35
$k = 25,74$	13,5	12,51	22,5.

Graficamente e algebricamente.

182. Un pedone parte da un punto A e s'incammina alla velocità di v km./h.; m minuti dopo gli vien mandato dietro un ciclista che fa v km./h. Quando e dove lo raggiungerà?

$v =$	4	3	4	3	3,5	3,6
$v' =$	14	15	16	17	14,7	18
$m =$	29	10	15	28	40	96.

Graficamente e algebricamente.

183. Su di una circonferenza si muovono, a partire da uno stesso punto, due punti con le velocità (angolari) di a e a' gradi/sec., in senso opposto (oppure nello stesso senso). Quando e dove si incontreranno (o l'uno raggiungerà l'altro)?

$a =$	5	15	5,4	16,8	192	111
$a' =$	7	9	12,5	12,0	48	39.

Graficamente e algebricamente.

184. Quando e dove, sotto le ipotesi dell'eserc. prec., accadrà che i due punti siano alla distanza angolare di 90^0?

185. Su di una circonferenza si muovono due punti, la cui distanza iniziale è di $60'$, con le velocità (angolari) di a e a' gradi/sec.. nello stesso senso. Quando l'uno raggiungerà l'altro, se precede il punto più lento? E quando, se precede il più rapido?

$a =$	15	37,5	1,75	1,85	120	180
$a' =$	3	22,5	0,25	0,65	90	39.

Graficamente e algebricamente.

186. Su di una pista circolare due ciclisti, partendo dallo stesso punto corrono in senso opposto (oppure nello stesso senso): il primo compie l'intero giro in t secondi, l'altro in t' secondi. Dopo quanti secondi si incontreranno (o l'uno raggiungerà l'altro)?

$t =$	60	90	56	36	60	112
$t' =$	30	60	42	45	84	144.

Graficamente e algebricamente.

187. Costruire per punti le grafiche delle funzioni:

$$y = \frac{1}{4}x^2, \qquad y = -0{,}2y^2, \qquad y = x^2 + 3, \qquad y = -x^2 + 4, \qquad y = 2x^2 - 5,$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2, \qquad y = x^2 + 3x, \qquad y = x^2 - 3x, \qquad y = -x^2 + 3x,$$

$$y = x^2 + x - 12, \qquad y = x^2 - x - 6, \qquad y = 10 - 3x - x^2,$$

$$y = x^2 - 7x + 10, \qquad y = x^2 - 7x + 6, \qquad y = x^2 - 5x - 6,$$

$$y = (x-1)(x-4), \qquad y = (x+1)(x-4), \qquad y = (1-x)(x+4).$$

In ciascun caso si dica se ed in quali punti la parabola intersechi l'asse delle x e l'asse delle y.

188. Determinare i punti di intersezione delle due parabole

$$1.\ y = x^2 - x - 4, \qquad y = -3x^2 - 3x + 20;$$
$$2.\ y = 2x^2 - 5x + 7, \qquad y = 2x^2 + 8x - 20.$$

189. Le due parabole

$$y = -3x^2 - 2x - 4, \quad y = 2x^2 + 7x + 1$$

si intersecano?

190. Discutere i vari casi possibili per le intersezioni delle due parabole

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = a'x^2 + b'x + c'.$$

191. Rappresentare con una grafica l'area della superficie totale di un cubo, considerata come funzione dello spigolo.

192. Similmente per l'area laterale e l'area totale della superficie cilindrica di data altezza come funzione del raggio; pel volume del cilindro di data altezza come funzione del raggio; per l'area totale della superficie conica di dato apotema come funzione del raggio; pel volume del cono di data altezza come funzione del raggio; per l'area della superficie sferica come funzione del raggio.

193. Si determini quali traslazioni parallele all'asse x e all'asse y si debbano far subire alla parabola $y = x^2$ per ottenere le parabole seguenti:

$$1.\ y = (x-2)^2 + 4; \qquad 2.\ y = (x+3)^2 - 5;$$
$$3.\ y = x^2 - 8x + 6; \qquad 4.\ y = x^2 + 7x + 4;$$
$$5.\ y = x^2 + 6x - 10; \qquad 6.\ y = x^2 - 3x - 2.$$

194. Una parabola uguale e ugualmente posta alla grafica di $y = x^2$ deve toccare l'asse x nel punto di ascissa 5 (oppure -7): quale sarà la funzione di 2° grado corrispondente?

195. Una parabola uguale e ugualmente posta alla grafica di $y = -3x^2$ deve intersecare l'asse x nei punti di ascisse -1 e 2 oppure 3 e 7 oppure $-2{,}5$ e $4{,}8$. Quale sarà rispettivamente la funzione di 2° grado da essa rappresentata? Quale sarà il vertice della parabola ottenuta?

196. Risolvere graficamente, con l'approssimazione di 0,1, le seguenti equazioni di 2° grado:

$$1.\ x^2 - 6x + 4 = 0; \qquad 2.\ x^2 + 3x - 1 = 0;$$
$$3.\ 4x^2 - 3x - 4 = 0; \qquad 4.\ x^2 - 3x - 4 = 0;$$
$$5.\ 4x^2 + 4x - 3 = 0; \qquad 6.\ 10x^2 + 15x - 324 = 0.$$

197. Con quale velocità cade al suolo (fatta astrazione dalla resistenza dell'aria) un corpo pesante, abbandonato a se stesso da 100 m. di altezza?

198. Un proiettile è lanciato verticalmente, dal basso in alto, con una velocità di 117,72 m./sec. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della sua traiettoria e qual'è l'altezza di questo punto? Diagramma della legge oraria del moto.

199. Da un punto A si lascia cadere un corpo, e, quando esso ha percorso a m., se ne lascia cadere un secondo. Dopo quanto tempo i due corpi si troveranno ad una data distanza di b m. l'uno dall'altro? Si consideri il caso di $a = 1$ m., $b = 10$ m., e si prenda $g = 9{,}80$ m./sec^2.

200. Due corpi, situati sulla stessa verticale, l'uno a terra, l'altro ad una data altezza di h m., vengono lanciati verticalmente, l'uno contro l'altro, con le velocità iniziali v_0, v_0' rispettivamente. Dopo quanto tempo s'incontrano? Discussione grafica ed algebrica.

201. Due corpi vengono lanciati successivamente da uno stesso punto verticalmente dal basso verso l'alto, con una stessa velocità iniziale v_0. A quanti secondi l'uno dall'altro vanno lanciati, se si vuole che s'incontrino ad un'altezza, che sia la metà della altezza massima, raggiunta dal primo?

202. Si dice *uniformemente vario* ogni moto di un punto, in cui lo spazio s, descritto dal punto, risulti espresso per mezzo del tempo t da una funzione (razionale intera) di 2° grado (legge oraria)

$$s = \frac{1}{2} at^2 + bt + c.$$

La costante c dà la distanza dall'origine degli spazi, cui si trova il punto nell'istante $t = 0$. La velocità del punto è espressa, istante per istante, da

$$v = at + b,$$

cosicchè la costante b dà la velocità del punto nell'istante $t = 0$. La costante a (incremento della velocità ad ogni unità di tempo; V. n. 21) si chiama *accelerazione* del moto uniformemente vario. Qual'è il diagramma orario di un moto uniformemente vario? Quale il diagramma della corrispondente velocità?

Un moto qualsiasi si dice, in un dato istante, *progressivo* o *retrogrado*, secondo che in quell'istante lo spazio s, al crescere del tempo, cresce o decresce (algebricamente); si dice *accelerato* o *ritardato*, secondo che, in quell'istante, al crescere del tempo, cresce o decresce il valore assoluto della velocità.

Riconoscere, con l'aiuto dei diagrammi, quando un moto uniformemente vario sia progressivo, quando retrogrado; quando sia accelerato, quando ritardato.

203. Un treno, parte da una stazione A per una stazione B, che dista dalla prima 20 km., percorrendo i primi 500 m. di moto uniformemente accelerato, e raggiunge così la sua velocità di regime di 70 km./h. Conserva questa velocità fino a 200 m. da B e percorre quest'ultimo tratto di moto uniformemente ritardato. Trovare, prendendo come origine dei tempi l'istante della partenza, come origine degli spazi la stazione A e adottando come unità l'ora e il chilometro:

1. il tempo impiegato dal treno per andare da A a B;
2. le leggi orarie delle tre fasi di moto.

Tracciare il diagramma orario del moto del treno.

204. Su di una stessa retta due punti si muovono, il primo di moto uniforme, il secondo di moto uniformemente vario. Discutere, con l'aiuto dei corrispondenti diagrammi orarî, i diversi casi, che si possono presentare per gli incontri dei due punti.

205. Determinare il massimo o il minimo delle seguenti funzioni di 2° grado:

1. $y = x^2 + 2$;	2. $y = -2x^2 - 5$;
3. $y = 3x^2 - 4x$;	4. $y = -5x^2 + 7x$;
5. $y = x^2 + 3x + 4$;	6. $y = x^2 - 4x + 2$;
7. $y = 2x^2 - \frac{x}{2} + 4$;	8. $y = 2x^2 - 8x + 1$;
9. $y = (a - x)(b - x)$;	10. $y = (a + x)(b + x)$;
11. $y = (a - x)(b + x)$;	12. $y = (a - x)^2 + (b + x)^2$;
13. $y = 2x^2 - 8x + 11$;	14. $y = -3x^2 + 6x - 1$;
15. $y = -2x^2 + 20x - 50$;	16. $y = 3x^2 + 12x + 12$;
17. $y = x^2 + 4x$;	18. $y = -x^2 - 6x - 2$.

206. Di tutti i rettangoli aventi un dato perimetro qual'è quello di massima area?

207. Dividere un segmento lungo cm. 24 in due parti, la cui somma dei quadrati sia minima.

208. Dei triangoli, in cui la base e l'altezza hanno una data somma s, qual'è quello di massima area?

209. Iscrivere ad un dato triangolo il rettangolo di massima area. [Il rettangolo deve avere la base sulla base del triangolo e gli altri due vertici sui due lati rimanenti del triangolo].

210. Iscrivere in un cerchio dato il rettangolo di massima area.

211. Iscrivere in un cerchio dato il rettangolo di massimo perimetro.

212. Da un dato cerchio ritagliare un settore, che fornisca la superficie laterale del cono di massimo volume. [Si prenda come variabile l'angolo al centro del settore e come funzione il quadrato del volume].

213. Un tronco di cono ha una data altezza h e i raggi delle basi hanno una data somma s. Quali dovranno essere questi raggi perchè il volume del tronco riesca massimo?

214. Dati su di una retta due segmenti consecutivi $AB = a$, $BC = b$, trovare un punto, che disti di h dalla retta AB e sia tale, che da esso i due segmenti siano visti sotto angoli uguali.

215. Dato un triangolo di base a e di altezza h, determinare un segmento x tale che, se la base a si aumenta di x e l'altezza h si diminuisce di x, il nuovo triangolo risulti doppio del dato.

216. Determinare l'altezza di un triangolo isoscele, del quale si conoscano i raggi r ed R delle due circonferenze rispettivamente iscritta e circoscritta al triangolo.

217. Iscrivere in una semicirconferenza di dato diametro $2r$ un trapezio di dato perimetro $2p$.

218. Un cilindro e un cono rotondi hanno la stessa altezza h e lo stesso volume l^3. Sapendo che k è il rapporto della superficie totale del cilindro alla superficie laterale del cono, determinare i raggi delle basi dei due solidi.

219. In un cilindro retto, di raggio r ed altezza h, è descritta, col centro O sull'asse del cilindro, e col medesimo raggio r, una sfera, che non ha punti esterni al cilindro. Si vuole che il volume della sfera risulti medio proporzionale tra i volumi dei due solidi rotondi, che, sommati alla sfera, danno il cilindro.

1. Si determini a quale distanza da una delle basi del cilindro va preso il centro O della sfera.

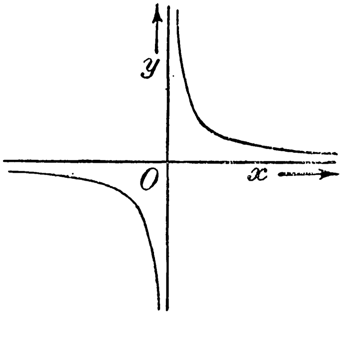
2. Si esaminino i casi particolari $h = 4r$ e $h = 7r$, calcolando in ciascuno di essi i volumi dei due solidi rotondi suindicati.

3. Tenendo conto della condizione di possibilità del problema e della condizione esplicitamente stabilita che la sfera non abbia punti esterni al cilindro, si dimostri che, per ogni r prefissato, h si deve supporre assegnato in modo da soddisfare le limitazioni $4r \leq h \leq 7r$.

220. Circoscrivere ad una sfera di dato raggio r un cono rotondo, il cui volume stia a quello della sfera in un dato rapporto h.

221. Un cono rotondo è tangente lungo il suo circolo di base ad una sfera di dato raggio r; e il suo volume ha un dato rapporto h al volume di quello dei due segmenti sferici, aventi per base il circolo minore di contatto, che è interno al cono. Si calcoli l'altezza del segmento sferico.

222. Descrivere per punti la grafica della funzione $y = \frac{a}{x}$ (legge della proporzionalità inversa). La curva, che così si ottiene, si chiama *iperbole equilatera*, avente per *asintoti* i due assi coordinati.



223. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni:

1. $y = \frac{1}{4x}$; 2. $y = -\frac{1}{3x}$;

$$3.\ y = \frac{1}{x} + 3; \qquad 4.\ y = -\frac{2}{x} - 4.$$

Quali sono i rispettivi asintoti?

224. Dimostrare che la funzione

$$y = \frac{ax + b}{x}$$

è rappresentata da un'iperbole uguale a quella che rappresenta la $y = \frac{b}{x}$ e ottenuta da questa con la traslazione parallela all'asse y, data in ampiezza e senso dal valore assoluto e dal segno di a.

225. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni

$$1.\ y = \frac{1}{x - 1}; \quad 2.\ y = \frac{2}{x + 2}; \quad 3.\ y = \frac{3}{2 - x}.$$

226. Dimostrare che la funzione

$$y = \frac{b}{x + d}$$

è rappresentata da un iperbole uguale a quella che rappresenta la $y = \frac{b}{x}$ è deducibile da questa con la traslazione parallela all'asse x di ampiezza e senso dati dal valore assoluto e dal segno di $-d$.

227. Descrivere per punti le grafiche delle funzioni

$$1.\ y = \frac{1}{x - 2} + 3; \quad 2.\ y = \frac{2x + 3}{x - 4}; \quad 3.\ y = \frac{3x - 1}{x + 5}; \quad 4.\ y = \frac{4x - 5}{7 - x}.$$

228. Dedurre dagli eserc. 224, 226, quale sia la grafica della funzione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

[Si osservi che essa può scriversi

$$y = \frac{bc - ad}{c[cx + d]} + \frac{a}{c}\Big].$$

229. Si risolva graficamente il sistema $x + y = h$, $xy = k$ (IV, n. 41). Caso numerico: $h = 1$, $k = -6$. [Risolte le due equazioni rispetto ad y, si traccino su carta millimetrica le grafiche delle due funzioni così ottenute (*retta* e *iperbole equilatera*) e si noti che le soluzioni del sistema sono le coppie di coordinate delle intersezioni delle due grafiche].

Analogamente si può interpretare geometricamente la risoluzione di ogni sistema del tipo (62) del n. 41 del Cap. IV.

230. Dimostrare che, fissati gli assi: 1) pei punti della circonferenza di centro nell'origine e di raggio r la somma dei quadrati dell'ascissa e dell'ordinata è r^2; cioè le coordinate x, y di ogni punto della detta circonferenza soddisfano all'equazione $x^2+y^2=r^2$; 2) viceversa, ogni punto le cui coordinate soddisfano all'equazione precedente ha dall'origine la distanza r, cioè giace sulla circonferenza considerata.

231. Per quali valori di x resta definita la funzione $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$? Si noti che si tratta di una *funzione a due valori* (cioè tale che, in quell'intervallo di valori di x dove è definita, ha per ogni valore di x due valori). Si dimostri che la rispettiva grafica è la circonferenza di centro nell'origine e di raggio r [Basta rendere razionale l'equazione e ricordare l'eserc. prec.].

232. Risolvere graficamente il sistema $x+y=h$, $x^2+y^2=k$ (IV, n. 42), discutendo, in base alla interpretazione geometrica, i vari casi che si possono presentare per le soluzioni. Caso numerico: $h=7$, $k=25$. [Eserc. 230, 231].

233. Analogo problema per il sistema $x-y=h$, $x^2+y^2=k$ (IV, n. 42). Caso numerico: $h=5$, $k=16$.

234. Risolvere graficamente il sistema $x^2+y^2=h$, $xy=k$ (IV, n. 44), discutendo, col sussidio della interpretazione geometrica, i vari casi possibili per le soluzioni. Caso numerico $h=9$, $k=4$. [Eserc. 222, 230].

235. Dimostrare che, se nel piano, dopo aver fissato due assi cartesiani x, y quali si vogliano, si cambiano gli assi, adottando come nuovo asse delle ascisse la bisettrice x' del primo e terzo angolo degli assi primitivi, orientata dall'origine O verso il primo angolo degli assi, e come nuovo asse delle ordinate la bisettrice y' del secondo e quarto angolo degli assi primitivi, orientata verso il secondo angolo, fra le coordinate x, y di un qualsiasi punto P rispetto ai vecchi assi e le coordinate x', y' del medesimo punto rispetto ai nuovi assi intercedono le relazioni

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\qquad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

[Indicati con P_1, P_1' i piedi delle perpendicolari abbassate da P sugli assi x, x' rispettivamente e con Q, Q' i punti di intersezione della retta PP_1' con l'asse x e della retta PP_1 con l'asse x', si fissi l'attenzione sui triangoli, rettangoli isosceli, OP_1Q', PP_1Q. Da essi si rileva che sussistono, in valore e segno, le relazioni, $x'=x\sqrt{2}+y'$, $y=x+y'\sqrt{2}$, ecc.]

236. Se nel piano, riferito a due assi cartesiani quali si vogliano x, y si considera l'equazione $xy=a$, e si adottano come nuovi assi x', y' le bisettrici del primo (e terzo) e del secondo (e quarto) angolo degli assi primitivi orientate, rispettivamente, verso il primo e verso il terzo angolo, l'equazione considerata si trasforma nella $x'^2-y'^2=2a$. Qual'è la funzione y' della variabile x', che risulta definita da quest'equazione? Qual'è la corrispondente grafica? [Eserc. 222].

237. Risolvere graficamente i sistemi (IV, nn. 43-46):

1. $x+y=h,\ x^2-y^2=k$; 2. $x-y=h,\ x^2-y^2=k$;
3. $x^2-y^2=h,\ xy=k$; 4. $x^2-y^2=h,\ x^2+y^2=k$;

e discutere, in base alla interpretazione geometrica, i vari casi possibili per le soluzioni di ciascuno di essi.

Capitolo VI

238. Calcolare o semplificare le espressioni seguenti:

1. $3a\sqrt[3]{2b^3}-2b\sqrt[3]{2a^3}$; 2. $\sqrt[3]{5a^2b\cdot 25ab^5}$; 3. $\sqrt[m]{a^{m+n}\ b^{2m+p}}$;

4. $\sqrt[3]{12a^2b^2}\cdot\sqrt[3]{18ab^2c}$; 5. $\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[9]{3^3}\cdot\sqrt[6]{5^2}$; 6. $\sqrt[m]{a^{2m}}\cdot\sqrt[n]{a^{3n}}:\sqrt[r]{a^{5r}}$;

7. $\sqrt[3]{2^6}+\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{5^4}$; 8. $\sqrt[2n]{a^n}-\sqrt[n]{a^{2n}}$; 9. $3\sqrt[6]{x^3}-2\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[10]{x^5}$;

10. $\left(\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{4}\right)\sqrt[3]{2}$; 11. $\left(x+\sqrt[3]{x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{xy^2}-y\right)$;

12. $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)^3$; 13. $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$;

14. $\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

239. Raccogliere le espressioni seguenti sotto un unico segno di radicale:

1. $\dfrac{a\sqrt{bc}\,\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[5]{2a}\,\sqrt[6]{c^5}}$; 2. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[4]{2bc^2}}{c\sqrt{abc}\,\sqrt[5]{a}}$;

3. $\dfrac{\sqrt{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt[4]{cz}}{\sqrt[6]{a^2xz}\,\sqrt[5]{bcy}}$; 4. $\dfrac{\sqrt[4]{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt{cz}}{\sqrt[8]{a^2bxy}\,\sqrt[6]{c^3z^2}}$.

240. Rendere razionale il denominatore nelle espressioni seguenti:

1. $\dfrac{\sqrt[4]{8a}}{\sqrt{2\sqrt{2a}}}$; 2. $\dfrac{1}{2\sqrt{2a}\,\sqrt[3]{2b}}$; 3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}$; 4. $\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}-1}$;

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 6. $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$; 7. $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 8. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$.

241. Verificare le seguenti identità:

1. $$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)=3a\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)+$$
$$+3b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{c}{b}}\right)+3c\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}-\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right);$$

2. $$\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)+\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}\right)+$$
$$+\left(\sqrt[3]{c^2}\mp\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt[3]{c}\pm\sqrt[3]{a}\right)=\pm\sqrt[3]{abc}\left\{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{c}}-\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)\right\};$$

3. $$\sqrt[4]{(a-b)^5(a^3+a^2b-ab^2-b^3)}-\sqrt{(a^2+ab)(a^2-ab)}+$$
$$+2b\sqrt{a^2-b^2}=b\sqrt{a^2-b^2}\,.$$

242. L'errore relativo della radice cubica di un numero approssimato è minore di $^1/_3$ dell'errore relativo per eccesso di codesto numero.

243. Il numero $\sqrt[3]{31}$ si può assumere come valore approssimato di π. Qual'è il grado della approssimazione?

244. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^6-9x^3+8=0$; 2. $8x^6-215x^3+27=0$;
3. $x^6+2x^3+2=0$; 4. $x^6-2x^3+5=0$;
5. $16x^8-257x^4+16=0$; 6. $(x+2)^8-4(x+2)^4+13=0$;
7. $x^{10}-33x^5+32=0$; 8. $x^{10}-244x^5+243=0$.

Nota. Si dice *trinomia* ogni equazione della forma $ax^m+bx^n+c=0$. Le equazioni trinomie proposte nell'eserc. prec. sono di tipo particolare, in quanto in ciascuna di esse il grado del primo termine è doppio di quello del secondo ($m=2n$), cosicchè la loro risoluzione è in ogni caso riducibile a quella di un'equazione di 2° grado (e ad una estrazione di radice n^{ma}): basta prendere come incognita ausiliare la $u=x^n$. L'equazione biquadratica elementare (IV, n. 35) è la più semplice di questo tipo di equazioni ($n=2$).

245. Discutere i casi possibili per le radici della equazione trinomia (elementare) $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

246. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $a\sqrt[3]{b+x}=b\sqrt[3]{a-x}$;
2. $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$;
3. $\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{7a-8x}$;
4. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-6}+\sqrt[3]{x-29}=0$;
5. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=\sqrt[3]{2a}$;
6. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}=a$;
7. $(2\sqrt[3]{x}-1)^3=27$;
8. $\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}=3$;
9. $2x\sqrt[3]{x}-20=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}}$;
10. $9\sqrt[3]{x^2}-2x\sqrt[3]{x}=10$;
11. $\sqrt[3]{x^2-5x+1}+\sqrt[6]{x^2-5x+1}=2$;
12. $\sqrt[4]{(1+x)^2}-\sqrt[4]{(1-x)^2}=\sqrt[4]{1-x^2}$;
13. $\sqrt{x-1}-3\sqrt[4]{x-1}+2=0$;
14. $\sqrt[4]{97-x^4}-x=1$;
15. $\sqrt[4]{15+x}+\sqrt[4]{82-x}=5$. [Per risolvere le 14, 15, si rendano razionali e poi si tenga conto dell' Eserc. 135. Per rendere razionale la 15 si cominci col porre $u=\sqrt[4]{15+x}$].

247. Risolvere i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases}(2x+3y)^3+(2x-3y)^3=244,\\(2x+3y)^3-5(2x-3y)^3=14;\end{cases}$
2. $\begin{cases}x+y=444,\\\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}=12;\end{cases}$
3. $\begin{cases}y-x=32,\\\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{y+1}=5;\end{cases}$
4. $\begin{cases}x+y=17,\\\sqrt[4]{90-x}-\sqrt[4]{9-x}=2;\end{cases}$
5. $\begin{cases}x-y=50,\\\sqrt[5]{143+x}-\sqrt[5]{y-18}=1;\end{cases}$
6. $\begin{cases}x^2+y\sqrt{xy}=a^2,\\y^2+x\sqrt{xy}=b^2.\end{cases}$

[Nel sistema 6 si ponga $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt{y}$, si dividano membro a membro le due equazioni, ecc.].

Capitolo VII

248. Calcolare:

1. $5^0+4^{-3}-3^{-2}$; 2. $3^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$;

3. $10^{-1}+6\cdot10^2+5\cdot10^0+4\cdot10^{-2}+2\cdot10^3$; 4. $3a^2-10a^{-3}+5a^{-4}$;

5. $(a-b)(a^{-4}+a^{-3}b^{-1}+a^{-2}b^{-2}+a^{-1}b^{-3}+b^{-4})$.

249. Calcolare:

1. $13^7\cdot13^{-4}$; $7^{-8}\cdot7^3$; $12\cdot12^{-5}$;
2. $2a^{-2}\cdot5a^{-3}$; $4b^6\cdot6b^{-5}$; $0{,}3c^5\cdot4c^{-2}$; $a^{x-3}\cdot0{,}1a^{2-x}$;
3. $4^{-3}:4^{-5}$; $8^{-6}:8^{-9}$; $6^4:6^{-2}$; $5^{-3}:5^{-2}$; $12a^{x+1}:4a^{x-1}$; $35a^{x+3}:7a^{3-x}$; $2a^{2x+2}:a^{x-1}$; $(3ab)^{-3}:(12bc)^{-3}$; $(10ax)^{-1}:(25x)^{-1}$;
4. $(3^{-2})^3$; $(3^2)^3$; $(3^2)^{-3}$; $(3^{-2})^{-3}$; $(\sqrt{25})^{-2}$; $\sqrt{25^{-2}}$; $\sqrt[3]{-25^{-3}}$.

250. Calcolare:

1. $49^{\frac12}$; $1{,}44^{\frac12}$; $64^{-\frac16}$; $8^{\frac13}$; $27^{-\frac13}$; $25^{\frac32}$; $81^{\frac34}$; $512^{-\frac23}$; $1{,}728^{-\frac13}$;
2. $\left(\frac{169}{196}\right)^{\frac12}$; $\left(\frac{125}{1728}\right)^{\frac23}$; $\left(\frac49\right)^{-\frac32}$; $\left(\frac{1331}{512}\right)^{-\frac18}$.

251. Scrivere sotto forma di potenze le espressioni seguenti:

1. $\sqrt2$, $\sqrt[3]5$, $\frac{1}{\sqrt[4]7}$, $\sqrt[5]5:\sqrt2$, $\frac{\sqrt3}{2}$, $\frac{\sqrt[3]5}{\sqrt2}$;
2. $\sqrt[7]{a^3}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$, $\sqrt{a^3}\,\sqrt[3]b$, $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\frac{\sqrt[3]a}{\sqrt b}$.

252. Calcolare e semplificare:

1. $81^{\frac12}\cdot81^{\frac14}$; $125^{\frac12}\cdot125^{\frac16}$; $0{,}0016^{\frac14}\cdot0{,}0016^{\frac12}$; $a^{\frac12}\sqrt a$; $\sqrt a\cdot a^{\frac13}$; $\sqrt a\cdot a^{-\frac12}$; $a^{\frac34}\cdot a^{\frac56}$;
2. $3^{\frac12}\cdot6^{\frac12}$; $4^{\frac13}\cdot16^{\frac13}$; $\left(\frac{6ab}{25cd}\right)^{\frac12}\cdot\left(\frac{5ac}{3bd}\right)^{\frac12}$;
3. $2^{\frac13}:2^{\frac14}$; $a^{\frac45}:a^{\frac34}$; $a^{-\frac12}:\sqrt{a^3}$; $a^{\frac12}:\sqrt{a^3}$; $\sqrt{a^{-3}}:\sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac23}:a^{\frac14}$;
4. $\sqrt[3]{125^2}$; $(64^2)^{\frac13}$; $(144^3)^{-\frac12}$; $\left(49^{\frac56}\right)^3$; $\sqrt{125^{\frac23}}$; $\sqrt[3]{81^{\frac34}}$; $(\sqrt{a^3})^4$; $\left(\left(a^{\frac34}\right)^2\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}\right)^{\frac32}$.

253. Dimostrare che per

$$x=\left(1+\frac1n\right)^n,\qquad y=\left(1+\frac1n\right)^{n+1}$$

si ha, qualunque sia il numero n,

$$x^y = y^x.$$

Capitolo VIII

254. Descrivere, su carta millimetrica, fra $x = -2$ e $x = +2$, la curva esponenziale di base 3, cioè la grafica della funzione

$$y = 3^x.$$

255. Decomporre i seguenti logaritmi in espressioni, in cui compaiano i logaritmi più semplici possibili:

1. $\log_a (3bc)$; 2. $\log_a \left(\frac{4b}{5c}\right)$; 3. $\log_a \left(\frac{1}{b}\right)$;

4. $\log_a \left(\frac{ab}{c}\right)$; 5. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right)^2$; 6. $\log_a \sqrt{bc}$;

7. $\log_a \sqrt[3]{\frac{b^2}{cd}}$; 8. $\log_a \left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right)$; 9. $\log_a \frac{b^2 - c^2}{2c}$;

10. $\log_a \sqrt{b^2 + c^2}$; 11. $\log_a \sqrt{b^2 - c^2}$; 12. $\log_a \left(\frac{b^2 \sqrt{c^3}}{d^3 \sqrt[4]{e^3}}\right)$.

256. Ridurre ciascuna delle espressioni seguenti ad un unico logaritmo:

1. $\log_a b + 2 \log_a c$; 2. $2 \log_a b - 5 \log_a c$; 3. $- \log_a b - \log_a c$;

4. $\log_a (b^2 - c^2) - \log_a (b + c)$; 5. $3 \log_a b + 2 \log_a c - \frac{1}{3} \log_a d$;

6. $\log_a (b^2 - bc + c^2) + \log_a (b^2 - c^2) - \log_a (b - c)$;

7. $\log_a b - \log_a c + \log_a (b + c) - 3 \log_a \sqrt{bc} - \log_a \sqrt{\frac{b}{c}}$;

8. $2 \log_a (b^2 - c^2) - \log_a \left(b^3 \sqrt{c}\right) + \log b - 3 \log \sqrt{c} - 2 \log (b + c)$.

257. Sapendo che $\mathrm{Log}\, 2 = 0{,}3010$, calcolare: Log 200, Log 2 000 000, Log 0,002, Log 0,5, Log 5, Log 0,64, Log 1,28, Log 6,25.

258. Di quanti numeri interi occorre conoscere il Logaritmo per poter calcolare i Logaritmi di tutti i numeri interi da 1 a 50 inclusivo?

259. Dimostrare che $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. [Si parta dall'uguaglianza di definizione di $\log_a b$ e dei due membri si prendano i logaritmi in base b].

260. Se è $\mathrm{Log}\, a = b$, quali sono i valori di $\log_{100} a$, $\log_{1000} a$, ecc.?

261. Quante cifre ha ciascuno dei seguenti numeri: 9^9, $(9^9)^9$, 9^{99}, 9^{9^9}?

262. Risolvere, senza l'uso delle Tavole, le equazioni:

1. $\operatorname{Log}(20x+12)+\operatorname{Log}(32x-8)=\operatorname{Log}15$;
2. $\operatorname{Log}(3x-5)-\operatorname{Log}(6x+1)=\operatorname{Log}3$;
3. $4\operatorname{Log}\frac{x}{2}+3\operatorname{Log}\frac{x}{3}=5\operatorname{Log}x-\operatorname{Log}27$;
4. $\operatorname{Log}\sqrt{7x-2}-\operatorname{Log}\sqrt{3-x}=1+\operatorname{Log}3{,}2$;
5. $\operatorname{Log}(2x-5)+\operatorname{Log}(3x+1)=1$;
6. $\operatorname{Log}x=\frac{1}{4}[3\operatorname{Log}a+\operatorname{Log}b]-\frac{1}{6}\operatorname{Log}(3a+b)$;
7. $\log_c x=\frac{1}{\log_a c}+\frac{1}{\log_b c}$.

263. Trovare un numero x tale che il doppio del suo Logaritmo superi di 2 il logaritmo di $x-9$.

264. Per quali valori di a l'equazione

$$x^2-\sqrt{2}x+\operatorname{Log}a=0$$

ammette due radici distinte?

265. Risolvere le seguenti equazioni (esponenziali):

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ [Risoluzione immediata]; 2. $5^x=64$; 3. $7^x=80^{x-1}$;

4. $2^x=3^{x+5}$; 5. $6^{-2x}=7^{3-x}$; 6. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$; 7. $4^{x+1}\cdot 7^{3x-2}=8$;

8. $3^{2x-1}\cdot 4^{2x-1}=1$; 9. $12^x\cdot 7^{4x-1}=5^{3-x}$; 10. $\sqrt{6^{x+1}}\sqrt{3^{x-1}}=\sqrt{7}$;

11. $8^x+8^{x+2}=13^x$; 12. $2^{2x+1}+4^{x+1}=1$; 13. $7^x+3\cdot 7^x=33$;

14. $8^x+5\cdot 8^{x-1}=27$; 15. $3^x+8\cdot 3^{x-3}=7\cdot 5^x+2\cdot 5^{x+1}$;

16. $9^x+5\cdot 3^{2x}=7\cdot 3^{2x-1}$; 17. $13^{\frac{x+1}{x-1}}=31^{\frac{x-1}{x+1}}$; 18. $4\cdot 5^{x+2}=5\cdot 4^{\frac{2x+1}{x}}$;

19. $\dfrac{3\cdot\sqrt[x]{10}}{50+\sqrt[2x]{10}}=5$; 20. $\dfrac{\sqrt[x]{12}}{60+\sqrt[2x]{12}}=2$.

266. Risolvere le equazioni:

1. $x^x=x$; 2. $x^x-x^{-x}=3(x^{-x}-1)$.

267. Quale valore ha x se è

$$e^x+e^{-x}=5{,}2$$

dove $e=2{,}7183$?

268. In un sistema di logaritmi, il logaritmo di 13,52 supera di 3 quello di 3,67. Qual'è la base? Quali sono i due logaritmi?

269. Risolvere le equazioni:

$$1.\ \frac{\operatorname{Log}(5-x)}{\operatorname{Log}(35-x^3)}=\frac{1}{3};\quad 2.\ x^{\operatorname{Log} x}=10;$$

$$3.\ x^{8+\operatorname{Log} x}=10^9;\quad 4.\ x^{\operatorname{Log} x}-96x^{\operatorname{Log}\sqrt{x}}=400.$$

270. Risolvere i sistemi:

$$1.\ \begin{cases} y^x=10^4, \\ y^{\frac{1}{x}}=10; \end{cases}\quad 2.\ \begin{cases} xy=0{,}2, \\ x^{\operatorname{Log} y}=0{,}5; \end{cases}\quad 3.\ \begin{cases} 2^{x+y}=4, \\ 2^{x+3}+2^{y+3}=40; \end{cases}$$

$$4.\ \begin{cases} y=10^{2x-1}, \\ y^{2x}=9y^x+10; \end{cases}\quad 5.\ \begin{cases} 3^{x+1}+2\cdot 3^{2-x}=29, \\ y^x=9; \end{cases}\quad 4.\ \begin{cases} 12y^{\frac{1}{x}}-y^{\frac{2}{x}}=20, \\ y^x=10^4; \end{cases}$$

$$7.\ \begin{cases} x+y=h, \\ \operatorname{Log} x+\operatorname{Log} y=k; \end{cases}\quad 8.\ \begin{cases} x^2+y^2=h \\ \operatorname{Log} x+\operatorname{Log} y=k. \end{cases}$$

271. Ridurre in misure decimali 4572000 Yards (1 Yard = m. 0,9144), 3457 Miglia inglesi (1 Miglio inglese = m. 1609), 273300000 Tese (1 Tesa = m. 1,949), 27300 Miglia marine (1 Miglio marino = m. 1851,85), 49500 Miglia geografiche (1 Miglio geografico = m. 7420,44).

272. Qual'è lo spigolo di un cubo d'argento, che pesa 1 kg.? Peso specifico dell'argento 10,51.

273. Quanto costa una palla d'oro di 5 cm. di diametro se l'oro costa L. 11,25 al grammo? Peso specifico dell'oro 19,26.

274. La superficie del Regno d'Italia è, ora, di circa km. 310300, di di cui 260470 di terraferma e 49830 di isole. Se si rappresenta la terraferma con un quadrato di cm. 5 di lato, come si deve prendere il lato di un altro quadrato, perchè rappresenti la superficie insulare?

275. Rappresentata la superficie attuale del Regno d'Italia (comprese le colonie, la cui superficie è all'incirca di km.^{2} 2512500) con un cerchio di 5 cm. di diametro, dividere questo cerchio in tre settori che rappresentino rispettivamente la superficie della terraferma, la superficie insulare (cfr. eserc. prec.), e le terre coloniali. Quali sono i rispettivi angoli al centro?

276. Presa come unità la distanza della Terra dal Sole, calcolare, le distanze degli altri pianeti dal Sole, sapendo che, in forza della terza legge di Keplero, i cubi di codeste distanze sono proporzionali ai quadrati delle rispettive durate delle rivoluzioni e che queste durate sono date, in giorni siderali, dai numeri seguenti: Mercurio 87,969; Venere 224,701; Terra 365,256; Marte 686,980; Giove 4332,588; Saturno 10759,201; Urano 30586,29; Nettuno 60188,71.

277. Preso come unità il diametro (medio) della Terra, il diametro del Sole è dato da 108,6 e quelli degli altri pianeti hanno i valori seguenti: Mercurio 0,373; Venere 0,999; Marte 0,528; Giove 11,06; Saturno 9,299; Urano 4,234; Nettuno 3,798. In quali rapporti stanno i volumi dei vari pianeti a quello del Sole?

Calcolo di una Tavola di Logaritmi a tre decimali (¹). — **278.** Si calcolino, secondo la nota regola, con successive estrazioni di radici quadrate, e con tre cifre decimali,

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt[4]{10}, \quad \sqrt[8]{10}, \ldots$$

cioè

$$10^{\frac{1}{2}}, \quad 10^{\frac{1}{4}}, \quad 10^{\frac{1}{8}}, \ldots$$

Riducendo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ a forma decimale, con quattro cifre dopo la virgola, otteniamo la Tavoletta

Num.	Log.	Num.	Log.
10,000	1,0000	1,037	0,0156
3,162	0,5000	1,018	0,0078
1,778	0,2500	1,009	0,0039
1,334	0,1250	1,005	0,0020
1,155	0,0625	1,002	0,0010
1,075	0,0313	1,001	0,0005

Osserviamo che nella colonna dei numeri ciascun termine è il quadrato del successivo.

279. Preso un qualsiasi numero compreso fra 1 e 10 (e a tre decimali) p. es. 1,694, si considerino i due termini consecutivi che nella colonna dei numeri della Tavoletta prec. comprendono il numero dato. Nel nostro caso avremo

$$1{,}778 > 1{,}694 > 1{,}334.$$

Dimostrare che, dividendo il numero dato per il minore dei due numeri che sulla Tavola lo comprendono, si ottiene un quoziente minore di codesto divisore. [Si ricordi l'osservazione dell'eserc. prec.].

(¹) R. Suppantschitsch: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.* Wien, 1912.

280. Ogni numero compreso tra 1 e 10 (e avente al più 3 cifre decimali) si può esprimere come prodotto di fattori appartenenti alla colonna dei numeri della Tavoletta dell'eserc. 278. Per es., fissato il numero 2,7 abbiamo successivamente

$$
\begin{array}{lr}
3{,}162 > 2{,}7 > 1{,}778 & 2{,}7 : 1{,}778 = 1{,}519 \\
1{,}778 > 1{,}519 > 1{,}334 & 1{,}519 : 1{,}334 = 1{,}139 \\
1{,}155 > 1{,}139 > 1{,}075 & 1{,}139 : 1{,}075 = 1{,}060 \\
1{,}075 > 1{,}060 > 1{,}037 & 1{,}060 : 1{,}037 = 1{,}022 \\
1{,}037 > 1{,}022 > 1{,}018 & 1{,}022 : 1{,}018 = 1{,}004 \\
1{,}005 > 1{,}004 > 1{,}002 & 1{,}004 : 1{,}002 = 1{,}002
\end{array}
$$

e quindi

$$2{,}7 = 1{,}778 \cdot 1{,}334 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}002.$$

I fattori in cui così si decompone il numero dato sono decrescenti.

281. Come si calcola, in base agli eserc. 279, 280, il Logaritmo di ogni numero compreso tra 1 e 10, e avente, al più, tre cifre decimali? Si accorci il risultato a tre cifre decimali.

Capitolo IX.

282. In un triangolo rettangolo di cm. 24 di area i tre lati sono in progressione aritmetica. Quali sono le lunghezze dei tre lati?

283. In un triangolo i lati sono in progressione aritmetica. Se ogni lato si aumenta di 50 o di 60 cm., il raggio del cerchio iscritto cresce, rispettivamente, di 17 cm. o di 20 cm. Calcolare le lunghezze dei tre lati. (Dal Suppantschitsch). [I tre lati si denotino con $2x - d$, $2x$, $2x + d$, e si esprima il raggio del cerchio iscritto, tenendo conto della formula di Erone: Eserc. 85].

284. Fra 42 e 102 si è inserito un numero pari di medie aritmetiche. La somma della prima metà dei termini della progressione così ottenuta sta alla somma dei termini rimanenti nel rapporto $3 : 5$. Quante medie aritmetiche si sono inserite? [Si denoti questo numero incognito con $2x$],

285. Fra -7 e 49 si inserisce un tal numero di medie aritmetiche, che la somma di tutti i termini della progressione così ottenuta risulti uguale alla somma degli ultimi tre termini. Scrivere la progressione.

286. In una progressione aritmetica il 2° e il 7° termine hanno per somma 35, per prodotto 250. Trovare il primo termine e la differenza.

287. In una progressione aritmetica il 4° termine è 5 e il primo e l'ultimo termine hanno per somma 10, per prodotto -200. Scrivere la progressione.

288. In una progressione aritmetica di 8 termini la somma del 3° e del 6° è 87, il prodotto dei due centrali è 1862. Trovare il primo termine e la differenza. [Ricordare il n. 4 del Cap. IX].

289. In una progressione aritmetica di 4 termini la somma dei due medi è $2s$ e il prodotto dei 4 termini è h. Scrivere la progressione. Caso numerico: $s = 6$, $h = 945$. [Se si prende come incognita x la metà della differenza della progressione, i due termini medi sono $s - x$, $s + x$, ecc.].

290. Scrivere una progressione aritmetica, in cui la somma dei primi 6 termini è 75 e il prodotto del 6° termine per la somma dei primi 5 è 1100.

291. Scrivere una progressione aritmetica di differenza $\frac{3}{2}$, in cui la somma di tutti i termini è 10 e il prodotto del primo termine per il numero doi termini è -32.

292. In una progressione aritmetica il 2° e il 14° termine hanno per prodotto 544, il 7° e il 9° hanno per prodotto 1419. Trovare il 1° termine e la differenza.

293. In una progressione aritmetica di 10 termini il prodotto dei due termini centrali è 2805, quello del primo e dell'ultimo termine è 2485. Trovare il primo termine e la differenza.

294. Quattro numeri in progressione aritmetica hanno per prodotto h, mentre la somma dei quadrati dei due termini medi è $2k$. Trovare i 4 numeri. Caso numerico: $h = 384$, $k = 26$. [Si prendano come incognite la media aritmetica dei due termini di mezzo e la metà della differenza].

295. Quattro numeri in progressione aritmetica sono tali, che la somma dei quadrati degli estremi è $2h$, mentre la somma dei quadrati dei due medì è $2k$. Trovare i 4 numeri. Caso numerico: $h = 13$, $k = 5$. [Si adottino le stesse incognite dall' Eserc. prec.].

296. Si calcoli, col sussidio dei Logaritmi, il 5° termine della progressione geometrica di 23 termini che ha per primo termine 18 e per ultimo 77.

297. Un carrettiere deve portare della ghiaia su di una strada, versandone un carro ad ogni 5 metri. Sapendo che egli va a prendere la ghiaia dal greto di un torrente a 500 metri dal punto dove deve versare il primo mucchio, quale cammino complessivo avrà percorso, quando avrà portato la ghiaia su di un tratto di strada di 400 m. a partire dal primo mucchio?

298. Un giardiniere deve inaffiare 60 rosai, piantati lungo un sentiero rettilineo, alla distanza di 1 m. l'uno dall'altro. Egli prende l'acqua ad una fontana situata lungo lo stesso sentiero, a 15 m. di distanza dal primo rosaio, e ad ogni viaggio inaffia 3 rosai. Qual'è in metri il cammino totale, che egli deve compiere per inaffiare tutti i suoi rosai?

299. Qual'è la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una progressione geometrica infinita contenga come suo termine il prodotto di due suoi termini quali si vogliono?

300. Se a, b, c sono in progressione geometrica, sussiste l'identità:

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

301. Se a, b, c, d sono in progressione geometrica, sussistono le identità:

1. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$;
2. $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$.

302. Se a_1, a_2, a_3, a_4, ... è una progressione geometrica, tale è anche

$$\frac{1}{a_2^2-a_1^2} \qquad \frac{1}{a_3^2-a_2^2} \qquad \frac{1}{a_4^2-a_3^2}\cdots$$

303. Dato di una progressione geometrica il termine $(m+n)^{mo}$ e quello $(m-n)^{mo}$, trovare l'm^{mo} e l'n^{mo}.

304. Calcolare le somme seguenti:

1. $1+q+q^2+\dots+q^n$;
2. $q+q^2+q^3+\dots+q^n$;
3. $q^2+q^4+q^6+\dots+q^{2n}$;
4. $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\dots+\frac{1}{q^{2n}}$;
5. $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\dots+\frac{1}{q^n}$:
6. $\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^6}+\dots+\frac{1}{q^{2n}}$.

305. In una qualsiasi progressione geometrica di n termini il prodotto di tutti i termini è uguale alla radice quadrata della potenza n^{ma} del prodotto del primo termine per l'ultimo.

306. Fra il prodotto P di n termini consecutivi di una progressione geometrica, la loro somma S e la somma S' dei loro reciproci passa la relazione:

$$S'^nP^2=S^n.$$

307. In una progressione geometrica di $2n$ termini la somma dei termini di posto dispari è h, quella dei termini di posto pari è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $n=4$, $h=-\frac{1261}{9}$, $k=\frac{2522}{27}$.

308. In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è h, quella del terzo e del quarto è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $h = 8$, $k = \frac{200}{9}$.

309. In una progressione geometrica di $2n$ termini la somma dei primi n è h, quella dei rimanenti è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $n = 3$, $h = -9$, $k = 72$.

310. La somma di tre numeri in progressione geometrica è h, mentre il prodotto del primo e del terzo è k. Trovare i tre numeri. Caso numerico: $h = \frac{95}{6}$, $k = 25$. [Si prendano come incognite il termine medio e e la ragione].

311. Un pendolo oscilla: nella prima mezza oscillazione descrive un angolo di 20° e ad ogni mezza oscillazione successiva l'ampiezza diminuisce del 5 %. Quanti gradi, quanti primi, quanti secondi descrive complessivamente il pendolo in 15 oscillazioni intere?

312. Una palla di gomma rimbalza, ogni volta che batte sul terreno, ad un'altezza uguale ai $\frac{2}{3}$ di quella da cui è caduta. Se la prima volta è caduta dall'altezza di 5 m., quale cammino complessivo ha percorso quando batte sul terreno per la decima volta?

313. Secondo un'antica favoletta indiana, Sissa-Nassir, inventore del giuoco degli scacchi, chiese ad un principe come prezzo della sua invenzione tanti chicchi di grano, quanti se ne ottengono contando 1 chicco pel primo quadrato della scacchiera, 2 pel secondo, 4 pel terzo e così via, cioè raddoppiando per ogni nuovo quadrato il numero dei chicchi ottenuto pel quadrato precedente. Computare in cifra tonda, col sussidio della tavola dei logaritmi, il numero dei chicchi che così si raggiunge e valutare, sempre per approssimazione, l'equivalente numero di ettolitri di grano, ammettendo che, in media, 1 cm.³ contenga 16 chicchi.

314. Un'altra favoletta indiana. Nureddin, poverissimo cultore di calcoli matematici e cabalistici, al Mahrajah di Bassora, che, desiderando tenerlo presso di sè, gli chiedeva quale stipendio pretendesse, rispose che si sarebbe accontentato per il primo giorno di una moneta di piccolissimo valore, pari all'incirca ad 1 centesimo di Lira, purchè in ciascuno dei giorni successivi lo stipendio venisse raddoppiato, fino al compiersi del primo mese, e poi col mese nuovo si ricominciasse daccapo. Quale somma avrebbe dovuto corrispondere a Nureddin il Mahrajah alla fine del primo mese, supposto di 31 giorni? Si valuti il risultato in cifra tonda, ricorrendo ai Logaritmi.

315. Quando fra due numeri dati a e b si inseriscono due diversi numeri n ed n' di medie geometriche, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la m^{ma} delle prime medie coincida con la m'^{ma} delle seconde, è data da $mn' - m'n = m' - m$. Si giustifichi, in base a questo teorema, l'affermazione del n. 10 del Cap. IX.

316. Se $|q| < 1$ e si prefissa un numero positivo h, per quanto piccolo, si può sempre prendere un intero positivo n abbastanza grande, perchè la somma

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \tag{*}$$

dei primi n termini della progressione geometrica $1, q, q^2, q^3, \dots$ differisca in valore assoluto da $\dfrac{1}{1-q}$ per meno di h.

In altre parole, la somma (*), quando si faccia crescere infinitamente il numero n dei suoi addendi, si approssima indefinitamente al valore $\dfrac{1}{1-q}$ o, come si suol dire, *tende* a questo valore.

Ciò si esprime dicendo che *la somma degli infiniti termini della progressione geometrica, di ragione* q, *minore in valore assoluto di* 1,

$$1\,q\ \ q^2\ \ q^3 \dots$$

è uguale a $\dfrac{1}{1-q}$; e si scrive

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Similmente, qualunque sia a, e sotto la condizione $|q| < 1$,

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

317. Scrivere sotto forma di somma degli infiniti termini (positivi) di una progressione geometrica di ragione minore di 1 un qualsiasi decimale periodico, per es.:

$$0{,}\overline{36}\,; \quad 0{,}\overline{17}\,; \quad 3{,}\overline{45}\,; \quad 17{,}\overline{27}\,; \quad 0{,}\overline{781}\,; \quad 54{,}\overline{918}\,;$$

e, in base all'Eserc. prec., si dia la giustificazione delle regole per la determinazione delle frazioni ordinarie generatrici dei numeri decimali periodici. (Nota a piè delle pp. 70, 71).

318. In un angolo di 60°, preso su di un lato il punto che ha dal vertice una data distanza a, si abbassi da esso la perpendicolare sul-l'altro lato, poi dal piede di questa si abbassi la perpendicolare sul primo lato, e così si immagini di continuare indefinitamente. Qual' è la somma delle lunghezze delle infinite perpendicolari, che così si ottengono?

319. In un quadrato di dato lato a si iscriva il quadrato, che ha per vertici i punti medî dei lati del primo; nel secondo quadrato se ne iscriva nello stesso modo un terzo, e poi nel terzo un quarto, e così via. Calcolare la somma dei perimetri e quella delle aree degli infiniti quadrati così ottenuti.

320. Nel cerchio iscritto nel triangolo equilatero di dato lato a si iscriva un nuovo triangolo equilatero e si immagini ripetuta la costruzione. Calcolare la somma delle aree degli infiniti cerchi così ottenuti.

321. Nel cerchio iscritto nel quadrato di dato lato a si iscriva un nuovo quadrato e si immagini ripetuta indefinitamente la costruzione. Calcolare la somma dalle aree degli infiniti cerchi, così ottenuti.

322. In un semicerchio di dato raggio r si iscriva il cerchio massimo (cioè tangente al diametro base del semicerchio nel suo centro) e si ripeta la stessa costruzione in un semicerchio del nuovo cerchio, immaginando di continuare così indefinitamente. Calcolare la somma delle lunghezze delle infinite semicirconferenze e quella delle aree degli infiniti semicerchi, così ottenuti.

323. L'« ACHILLE » DI ZENONE D'ELEA. — Si deve a Zenone di Elea il seguente paradosso: Il piè-veloce Achille non potrà mai raggiungere una tartaruga, quando le conceda un qualsiasi vantaggio. Infatti suppongasi che il vantaggio sia di 100 unità lineari, per es. di 100 m. e che la velocità di Achille sia 10 volte quella della tartaruga. Quando Achille avrà percorso questi 100 m., la tartaruga ne avrà percorsi 10; quando Achille avrà percorso 10 m., la tartaruga avrà progredito di un altro metro, e così di seguito, talchè Achille, arrivando sempre al punto prima raggiunto dalla tartaruga, quando questa ne è già partita, potrà bensì avvicinarsi ad essa, ma non la raggiungerà mai.

Sembra che questo paradosso di Zenone facesse parte di una polemica antipitagorica, valendo come riduzione all'assurdo della concezione atomistica (o monadica) dello spazio (e del tempo) assunta dai Pitagorici. Poichè questi matematici assumevano un punto esteso (o monade) come parte elementare irriducibile delle linee, delle superficie, dei solidi, ogni somma di infiniti segmenti avrebbe dovuto risultare, in ogni caso, infinita, mentre, come si è visto (Eserc. 315), una somma di infiniti segmenti (i quali, con legge opportuna, vadano indefinitamente rimpicciolendo) può benissimo avere un valore finito.

Che Achille raggiunga effettivamente la tartaruga, come è confermato dalla comune esperienza, e dopo quanto cammino ciò accada, si trova, risolvendo un'equazione di 1° grado. Invero, se si indica con v la velocità di Achille e, quindi, con $\frac{1}{10}v$ quella della tartaruga, le equazioni dei moti uniformi di Achille e della tartaruga sono date (V, numeri 24-26), rispettivamente, da

$$s = vt, \qquad s = 100 + \frac{1}{10}vt,$$

onde l'istante t, in cui Achille raggiunge la tartaruga, è definito dal-

l'equazione di 1° grado $vt = 100 + \frac{1}{10}vt$, e quindi è dato da $t = \frac{1000}{9v}$.
Il cammino percorso da Achille è conseguentemente uguale a $\frac{1000}{9}$ m.

Se, invece, si vuol ragionare secondo l'impostazione, che del problema dà Zenone, basta osservare che la somma degli infiniti tratti di strada, che Achille successivamente percorre, per raggiungere la tartaruga, è data da

$$100 + \frac{100}{10} + \frac{100}{10^2} + \frac{100}{10^3} + \ldots,$$

ossia

$$100\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right),$$

o infine, in quanto fra parentesi compare la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{10} < 1$ (Eserc. 315),

$$100 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}.$$

La somma degli infiniti tratti percorsi corrispondentemente dalla tartaruga è

$$\frac{100}{10} + \frac{100}{10^2} + \frac{100}{10^3} + \ldots$$

e vale appunto $\frac{1000}{9} - 100$.

324. Un altro problema curioso. Da due paesi, collegati da una strada rettilinea di 10 km. di lunghezza, partono simultaneamente, l'uno verso l'altro, due carri, trainati ciascuno da un cavallo, e procedono con la stessa velocità di 5 km./h. All'istante della partenza una mosca, che si era posata sulla fronte del primo cavallo, parte volando in linea retta, con la velocità di 15 km./h, e va a posarsi sulla fronte del secondo cavallo; poi riparte subito e torna, con la medesima velocità di prima, a posarsi sulla fronte del primo cavallo; e così di seguito, fino a quando i due cavalli si incontrano e la mosca resta schiacciata fra le loro fronti. Quanti km. ha percorso quella mosca?

Per rispondere non occorre nessun calcolo: i due cavalli s'incontrano a metà strada, cioè dopo un'ora di cammino, e la mosca, che ha sempre volato a 15 km/h., ha percorso precisamente 15 km.

Se, invece, si segue letteralmente l'impostazione suggerita dall'enunciato del problema, si ritrova il medesimo risultato come somma degli infiniti termini di una progressione geometrica (di ragione minore di 1). Calcoliamo, infatti, le lunghezze dei successivi voli della mosca. Nel primo volo la mosca, in quanto ha una velocità tripla di quella del cavallo, cui va incontro, dovrà percorrere i 3/4 della distanza iniziale di 10 km. Ma nell'istante, in cui la mosca si posa sulla fronte del secondo cavallo, la distanza del primo, che ha percorso anch'esso 1/4 della distanza iniziale, è ridotta a 1/2 di 10 km., e di questa nuova distanza la mosca, nel secondo volo, non deve percorrere che i 3/4; e così di seguito. La somma delle lunghezze degli infiniti voli è data da

$$\frac{3}{4}10 + \frac{3}{4}\frac{1}{2}10 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 10 + \ldots = \frac{15}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right),$$

ossia, in quanto fra parentesi compare la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2} < 1$ (Eserc. 315),

$$\frac{15}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 15.$$

Capitolo X

r	$1+i$	Log $(1+i)$
$3\,^1/_2$	1,035	0,0149 403498
$3\,^3/_4$	1,0375	0,0159 881054
4	1,04	0,0170 333393
$4\,^1/_4$	1,0425	0,0180 760637
$4\,^1/_2$	1,0450	0,0191 162905
$4\,^3/_4$	1,0475	0,0201 540317
5	1,05	0,0211 892991
$5\,^1/_4$	1,0525	0,0222 221045
$5\,^1/_2$	1,055	0,0232 524596

325. Trovare il montante composto di L. 3 500 al $4\,^1/_2\,^0/_0$ dopo 5 anni; di L. 27 000 al $3\,^3/_4\,^0/_0$ dopo 15 anni; di L. 8 000 al $4\,^0/_0$ dopo 10 anni; di L. 100 000 al $5\,^0/_0$ dopo 20 anni. Confrontare ciascuno di questi montanti col corrispondente montante semplice.

326. Quale somma devesi collocare all'interesse composto del $5\,^0/_0$ per avere dopo 20 anni 25 000?

327. Dopo quanto tempo un capitale di L. 12 000, collocato all'interesse composto del $4\,^3/_4\,^0/_0$, dà luogo ad un montante di L. 20 000?

328. A quale saggio devesi collocare una somma di 15 000 lire perchè, coi suoi interessi composti, dia luogo in 12 anni ad un montante di L. 25 000?

329. In quanti anni si raddoppia un capitale collocato ad interesse composto al 5 %?

330. Qual'è il montante di un capitale C, prestato per n anni all'interesse composto dell'r %, se gli interessi si capitalizzano semestralmente?

331. Si collocano 12 000 Lire al $4\,{}^1/_2$ %, convenendo che gli interessi vengano capitalizzati semestralmente: quale montante si raggiunge alla fine di 20 anni? Quale montante si raggiungerebbe capitalizzando gli interessi annualmente?

332. Due fratelli 10 anni fa possedevano insieme L. 30 000 ed oggi possiedono L. 43 105. Qual'era 10 anni fa la parte di ciascuno, se il primo ha impiegato la sua all'interesse composto del 4 % con capitalizzazione annuale e il secondo ha invece impiegato la sua parte all'interesse composto del $3\,{}^1/_2$ % con capitalizzazione semestrale?

333. Quale capitale si costituisce versando all'interesse composto del 5 %, per 25 anni, al principio di ciascun anno, un'annualità di L. 450?

334. Quale annualità bisogna versare al principio di ogni anno per costituire alla fine di 20 anni, all'interesse composto del 4,5 %, un capitale di L. 50 000? [Valersi di una Tavola di Logaritmi a 6 o 7 decimali].

335. Una compagnia industriale vuol contrarre un prestito, pel quale dispone di versare per 40 anni, al principio di ogni anno, una annualità di L. 50 000. Quale somma potrà procurarsi al saggio del 5 %?

336. Un impiegato inizia la sua carriera con uno stipendio di L. 11 000 annue, il quale aumenta alla fine di ogni quinquennio di L. 800. Egli lascia alla fine di ogni anno una ritenuta pensione del 5 % sul suo stipendio. Si domanda il capitale costituito da codesta ritenuta, all'interesse composto del $4\,{}^1/_4$ %, quando l'impiegato, alla fine del 35° anno di servizio, prende il riposo.

337. Si contrae un prestito di L. 800 000 all'interesse del $3\,{}^1/_2$ %. Quale annualità si dovrà versare alla fine di ogni anno, per ammortizzare il prestito in 25 anni?

338. Un tale conviene di estinguere un suo debito pagando tre rate di L. 1000 ciascuna, la prima fra un anno, la seconda fra due anni, la terza fra tre. Qual'è l'ammontare attuale del debito, se il saggio convenuto è del 4,5 %?

339. Un commerciante ha contratto con una Banca un prestito di L. 15 000 da ammortizzare per annualità posticipate in 15 anni al 5 %: dopo 12 anni egli vuole liberarsi con un solo versamento dal debito residuo; quanto deve versare?

Tavola dei Logaritmi a quattro decimali.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Tavola dei Logaritmi a quattro decimali *(seguito)*

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

INDICE

Cap. I. — **Richiami e complementi.**

Cap. II. — **Estrazione di radice quadrata e numeri reali.**

Cap. III. — **Calcolo dei radicali quadratici.**

Cap. IV. — **Equazioni e problemi di secondo grado.**

Cap. V. — **Funzioni e diagrammi.**

Cap. VI. — **Radici d'indice qualsiasi e calcolo dei radicali.**

Cap. VII. — **Potenze ad esponente reale qualsiasi.**

Cap. VIII. — **Equazioni esponenziali e logaritmi.**

Cap. IX. — **Progressioni.**

Cap. X. — **Interesse composto. Annualità. Ammortamento.**

ESERCIZI