Comitato per la Edizione Nazionale delle Opere di

Federigo Enriques

Enriques, Federigo and Amaldi, U.

Algebra elementare [vol. II, ad uso del primo biennio dei Licei scientifici]

Zanichelli, Bologna, 1933. (Edizioni successive varie)

Il presente testo è stato digitalizzato nell'ambito del progetto "Edizione nazionale delle opere di Federigo Enriques"
promosso dal
Ministero per i Beni e le attività Culturali
Area 4 – Area Archivi e Biblioteche
Direzione Generale per i Beni Librari e gli Istituti Culturali

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

ALGEBRA ELEMENTARE

VOLUME SECONDO

AD USO

DEL I° BIENNIO DEI LICEI SCIENTIFICI

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1933 - XI

N° 261

F. Enriques
U. Amaldi

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi - V-1933-XI

INTRODUZIONE

RICHIAMI E COMPLEMENTI

Prima di proseguire lo studio dell'Algebra oltre i limiti del programma svolto negli anni precedenti, gioverà riassumere quelle nozioni già acquisite, che occorre aver ben presenti per comprendere in modo preciso e sicuro gli ulteriori sviluppi della materia. Non intendiamo, naturalmente, rifare tutto il cammino; e ci limiteremo a richiamare per sommi capi i concetti e i risultati essenziali, tralasciando generalmente le dimostrazioni e le dilucidazioni particolari, che ogni alunno potrà rivedere nel testo usato precedentemente ([1]). Solo, in vista di future applicazioni, aggiungeremo qua e là qualche osservazione complementare, soprattutto sulle disequazioni e sui principî generali relativi alle equazioni.

Numeri relativi e notazione letterale

1. L'Algebra, in confronto dell'Aritmetica, presenta, come si è rilevato fin dalle prime considerazioni su di essa, due caratteristiche essenziali:

1) In luogo dei numeri interi e fratti *assoluti* dell'Aritmetica, si considerano generalmente nell'Algebra i numeri interi e fratti *relativi*, cioè contrassegnati col $+$ o col $-$: numeri *positivi* o *negativi*, o, se si vuole, « da aggiungere » o « da togliere » (I_1, nn. 1-2).

2) Per studiare le proprietà dei numeri relativi, e delle rispettive operazioni, *in generale*, cioè indipendentemente dai valori speciali, che ad essi, caso per caso, si intendono attribuiti, codesti numeri si denotano (ciascuno col suo segno) per mezzo di lettere, e i risultati delle operazioni da eseguirsi su di essi si indicano con formule od *espressioni letterali* od *algebriche* (II_1, nn. 1-2).

Ad ogni numero (intero o fratto), diverso da zero, corrispondono due numeri relativi, che si ottengono dal dato, premettendogli il segno $+$ oppure il segno $-$; e, viceversa, ad ogni numero relativo corrisponde

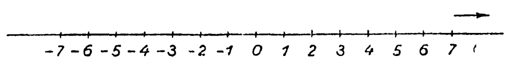
---

([1]) Cfr. U. Amaldi-F. Enriques, *Algebra Elementare*, vol. I, ad uso dei Ginnasi superiori e del corso inferiore degli Istituti Tecnici, Bologna, Zanichelli.

I Capitoli di questo Vol. I si citeranno nel seguito con I_1, II_1, III_1, IV_1, ecc.

un numero assoluto, che da esso si ottiene sopprimendo il segno e che si chiama il suo *valore assoluto.* Il valore assoluto di un numero relativo a si denota con $|a|$.

È noto come spesso torni utile la rappresentazione geometrica dei numeri relativi per mezzo dei punti di una *retta graduata.* Scelti ad arbitrio su di una retta un *verso* o *senso positivo* e un punto O (*origine*) e adottata una unità di misura, si rappresenta ogni numero relativo a per mezzo del punto A, che ha da O la distanza $|a|$ e cade, rispetto ad O, dalla parte positiva o negativa, secondo il segno di a.



Ricordiamo che, davanti ai numeri positivi aritmeticamente dati, il segno $+$, per semplicità, non si scrive, ma « si sottintende »; così ad es., invece di $+3$, $+\frac{2}{5}$,... si scrive 3, $\frac{2}{5}$,...

2. Ai numeri relativi si estendono le operazioni fondamentali dell'Aritmetica; e, data la loro importanza, ne richiamiamo qui le regole, per quanto a questo punto esse debbano oramai essere possedute nel modo più preciso e sicuro:

1) *La somma di due numeri relativi di ugual segno è quel numero, che ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti dei due addendi e lo stesso loro segno. La somma di due numeri relativi di segno contrario è il numero, che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti dei due addendi e il segno di quello di essi, che ha il valore assoluto maggiore.*

2) *La differenza di due numeri relativi è uguale alla somma del minuendo e dell'opposto del sottraendo.*

3) *Il prodotto di due numeri relativi è quel numero, che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due fattori ed è positivo o negativo, secondo che i due fattori hanno segni uguali o contrarî.*

4) *Il quoziente di due numeri relativi è quel numero, che ha come valore assoluto il quoziente del valore assoluto del dividendo per quello del divisore, ed è positivo o negativo, secondo che dividendo e divisore hanno segni uguali o contrarî.*

Poichè per sottrarre un numero relativo da un altro basta sommargli l'opposto, la sottrazione e l'addizione, nel campo dei numeri relativi, costituiscono, in sostanza, una medesima operazione, che si chiama *addizione algebrica.*

Va poi rilevato che, anche per i numeri relativi come già per quelli assoluti, la divisione per 0 è un'operazione priva di senso, cosicchè nel calcolo letterale, mentre una lettera può di solito rappresentare un numero relativo qualsiasi (e quindi anche nullo), *si deve sempre escludere per una lettera il valore* 0, *quando essa si voglia usare come divisore.* E così, ogni qual volta si sia condotti ad adottare come divisore una espressione letterale qualsiasi, bisogna escludere per le lettere, che vi compaiono, tutti quei sistemi di valori, per cui l'espressione si annulla.

Con questa avvertenza si estendono senz'altro alle frazioni aventi termini letterali o *frazioni algebriche* tutte le regole di calcolo. che nell'Aritmetica valgono per le frazioni ordinarie.

3. L'addizione e la moltiplicazione dei numeri relativi godono di tutte le *proprietà formali*, che alle stesse operazioni spettano nel campo dei numeri assoluti. Per l'addizione valgono:

1) la *proprietà commutativa*

$$a+b=b+a;$$

2) la *proprietà associativa*

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

3) la *proprietà additiva dello zero*

$$a+0=a.$$

Per la moltiplicazione:

1) la *proprietà commutativa*

$$ab=ba;$$

2) la *proprietà associativa*

$$(ab)c=a(bc).$$

3) la *proprietà distributiva rispetto alla somma*

$$(a+b)c=ac+bc;$$

4) la *proprietà moltiplicativa dello zero*

$$a\cdot 0=0.$$

Vale, inoltre, la *legge di annullamento del prodotto*: affinchè un prodotto sia nullo è necessario e sufficiente che sia nullo uno, almeno, dei fattori.

Le varie uguaglianze, che abbiamo dianzi scritto per esprimere le proprietà formali della addizione e della moltiplicazione, sono altrettante *identità*, cioè sono uguaglianze, che si mantengono vere, comunque si scelgano i valori da attribuire alle singole lettere, che vi compaiono.

Da queste identità fondamentali discendono, direttamente o indirettamente, anche tutte quelle altre identità, che, insieme con esse, costituiscono le *regole del calcolo letterale.*

4. Fra queste regole sono particolarmente importanti quelle relative al *calcolo delle potenze.*

Com'è ben noto, dato un numero relativo a (*base*) e un numero intero positivo (od assoluto) n (*esponente*), si dice potenza n^{ma} di a e si designa con a^n il prodotto di n fattori uguali ad a, cioè si pone

$$a^n = \underset{1}{a}\,\underset{2}{a}\,\underset{3}{a}\dots\underset{n}{a};$$

cosicchè *ogni potenza ad esponente* pari *di un qualsiasi numero relativo* (sia esso positivo o negativo) *risulta* positiva; *mentre ogni potenza ad esponente* dispari *è* positiva *o* negativa, *secondo che tale è la base.*

Orbene, le regole or ora accennate sono espresse dalle identità, la cui dimostrazione è pressochè immediata:

$$\text{(I)} \qquad (ab)^n = a^n b^n;$$

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\text{(III)} \qquad a^m a^n = a^{m+n};$$

$$\text{(IV)} \qquad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

In queste identità a e b denotano due numeri relativi quali si vogliono, mentre m ed n indicano due interi positivi (od assoluti) pur essi arbitrarî; solo nell'ultima di esse deve essere $m > n$.

Ma fin dagli elementi del calcolo letterale si è visto che è possibile dare un senso alla (V) anche per $m \leq n$ (cioè per m minore od uguale ad n), purchè si estenda opportunamente il concetto di potenza.

Precisamente, si dà un senso alla (V) per $m = n$, facendo la *convenzione* di attribuire al segno a^0 (cui la primitiva definizione di potenza non dà alcun significato) il valore 1, cioè ponendo, qualunque sia il numero relativo a (diverso da zero),

$$a^0 = 1.$$

Similmente alla (V) si dà un senso anche per $m < n$, *convenendo* che il simbolo a^{-p}, quando p sia un qualsiasi numero intero positivo (ed a un qualsiasi numero relativo diverso da zero), significhi il reciproco di a^p, cioè ponendo

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Introdotte così, accanto alle potenze ad esponente intero positivo, anche quelle ad esponente nullo o intero negativo, si riconosce agevolmente che per tutte queste potenze si mantengono valide, senza alcuna eccezione, le identità (I)-(V).

5. Prima di procedere oltre in questo rapido riassunto aggiungiamo alcune ovvie *proprietà delle disuguaglianze fra numeri relativi*, che nel seguito dovremo, in varie occasioni, richiamare.

È ben noto che di due numeri relativi disuguali a e b il primo è maggiore o minore del secondo, secondo che la differenza $a-b$ risulta positiva o negativa; cioè si ha

$$a > b \quad \text{o} \quad a < b,$$

secondo che è

$$a-b > 0 \quad \text{o} \quad a-b < 0.$$

Tenendo conto di questo criterio, si giustificano immediatamente le seguenti osservazioni:

A) Da $a > b$ consegue $-a < -b$.

Infatti se la differenza $a-b$ è positiva, la differenza $-a-(-b) = -a+b = b-a$, come sua opposta, risulta negativa.

Quando si applica la precedente proprietà si dice che « si cambia senso alla disuguaglianza ».

B) Da $a > b$ consegue, qualunque sia il numero relativo c,

$$a+c > b+c.$$

In parole: *Se ad ambo i membri di una disuguaglianza si aggiunge uno stesso numero relativo, si ottiene una disuguaglianza nello stesso senso.*

Infatti

$$a+c-(b+c) = a+c-b-c = a-b > 0.$$

C) Da $a > b$, $c > d$ consegue

$$a+c > b+d,$$

cioè: *Sommando membro a membro due disuguaglianze di ugual senso si ottiene ancora una disuguaglianza nel medesimo senso.*

Infatti

$$a+c-(b+d) = a+c-b-d = (a-b)+(c-d) > 0.$$

Naturalmente il teorema vale anche se le disuguaglianze sono più di due.

D) Da $a > b$ consegue $ac > bc$ se c è positivo, *$ac < bc$ se c è* negativo.

Cioè: *Moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza nello stesso senso o nel senso opposto, secondo che codesto numero è positivo o negativo.*

Infatti, essendo $a-b > 0$, la differenza $ac-bc = (a-b)c$ è positiva o negativa secondo che tale è c.

E) Le proprietà sinora rilevate sono generali, cioè valgono per numeri indifferentemente positivi o negativi. Nel campo dei numeri positivi vale quest'altra: *Se* a, b, c, d *sono numeri positivi, da* $a > b$, $c > d$ consegue $ac > bd$.

Cioè: *Moltiplicando membro a membro due* (o più) *disuguaglianze di ugual senso fra numeri positivi, si ottiene ancora una disuguaglianza nel medesimo senso.*

Infatti moltiplicando ambo i membri della disuguaglianza $a > b$ per $c > 0$ e quelli della $c > d$ per $b > 0$, si ottiene

$$ac > bc, \quad bc > bd,$$

onde risulta appunto

$$ac > bd.$$

Si tenga presente che la validità del precedente teorema dipende in modo essenziale dalla condizione che i numeri, di cui si tratta, siano tutti positivi. Se a, b, c, d non sono tutti positivi, può verificarsi, pur essendo $a > b$, $c > d$, uno qualsiasi dei tre casi

$$ac > bd, \quad ac = bd, \quad ac < bd.$$

Ad es., si ha:

$$-2 > -3, \quad 5 > 4 \quad \text{e} \quad (-2)\,5 > (-3)\,4;$$
$$-2 > -3, \quad 6 > 4 \quad \text{e} \quad (-2)\,6 = (-3)\,4;$$
$$-2 > -3, \quad -4 > -5 \quad \text{e} \quad (-2)(-4) < (-3)(-5).$$

F) Dal precedente teorema discende il seguente corollario, particolarmente importante: *Se* a *e* b *sono entrambi positivi, secondo che è*

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b,$$

si ha, per qualsiasi intero positivo n, *rispettivamente*

$$a^n > b^n \quad \text{o} \quad a^n = b^n \quad \text{o} \quad a^n < b^n;$$

e, viceversa, secondo che è

$$a^n > b^n \quad \text{o} \quad a^n = b^n \quad \text{o} \quad a^n < b^n,$$

si ha rispettivamente

$$a > b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b.$$

La prima parte è una immediata conseguenza della proprietà *E*) e della analoga proprietà delle uguaglianze; la seconda parte si dimostra subito per esclusione. Se ad esempio, si suppone $a^n > b^n$, non può essere nè $a = b$, nè $a < b$, perchè, in forza della prima parte, ne risulterebbe rispettivamente $a^n = b^n$ o $a^n < b^n$.

G) *Se* m *ed* n *sono due interi positivi ed* a *è un qualsiasi numero positivo diverso da* 1, *da* $m > n$ *consegue* $a^m > a^n$ o $a^m < a^n$, *secondo che è* $a > 1$ o $a < 1$.

Infatti, essendo $m-n>0$, da $a>1$ consegue, per il teor. prec., $a^{m-n}>1$ e quindi, moltiplicando ambo i numeri per $a^n>0$, $a^m>a^n$. Similmente nel caso $a<1$.

H) *Se* a, b *hanno lo stesso segno, da* $a>b$ *consegue*

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

Infatti si ha

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab},$$

e questa frazione algebrica, in quanto il numeratore $b-a$ è per ipotesi negativo, mentre il denominatore, come prodotto di due fattori di ugual segno, è positivo, è certamente negativa.

Monomî, polinomî, frazioni algebriche

6. Una espressione letterale si dice *intera*, rispetto alle lettere che vi compaiono, se le operazioni, che vi sono indicate sono soltanto addizioni algebriche e moltiplicazioni. Si dice, invece, *fratta* se fra le operazioni, che vi sono indicate, vi è anche qualche divisione, il cui divisore sia letterale.

Fra le espressioni intere si è chiamato *monomio* ogni prodotto di fattori quali si vogliano (cioè numerici o letterali, uguali o disuguali). Ogni monomio si può scrivere (sotto *forma ridotta*) come prodotto di un fattore numerico o *coefficiente* (che può ridursi ad 1 o a -1) e di un certo numero di potenze ad esponente intero positivo di lettere diverse (*parte letterale*). Per es. nel monomio $-3a^2bc^3$ il coefficiente è -3, la parte letterale è a^2bc^3.

Grado di un monomio *rispetto ad una sua lettera* è l'esponente (intero positivo), con cui questa lettera vi compare (quando esso sia scritto in forma ridotta): *grado totale* o, semplicemente, *grado* del monomio è la somma dei suoi gradi rispetto alle varie lettere in esso contenute. Così il monomio or ora scritto è di grado 2 (o 2°) rispetto ad a, di grado 1 (o 1°) rispetto a b, di grado 3 (o 3°) rispetto a c; ed è di grado totale $2+1+3=6$ (o 6°).

Talvolta, in accordo con la definizione di potenza ad esponente nullo (n. 4), torna comodo dire che un monomio è di *grado nullo* (o *zero*) rispetto ad una qualsiasi lettera, che non vi sia contenuta.

Così pure si estende talvolta il nome di « monomio » ai prodotti, in cui compaiono come fattori anche potenze ad esponente negativo, come ad es.

$$3a^2b^{-3}c^{-1}d^4.$$

Tenendo conto del significato degli esponenti negativi (n. 4), si vede subito che i prodotti di questo genere non sono altro che frazioni algebriche (a termini monomiali). Così

$$3a^2b^{-3}c^{-1}d^4 = \frac{3a^2d^4}{b^3c}.$$

Perciò questi monomî in senso esteso si possono dire monomi ***fratti***, chiamando ***interi*** quelli, che contengono soltanto potenze ad esponente positivo. Ma noi nel seguito, quando parleremo di « monomî », senza nulla avvertire in contrario, intenderemo di riferirci a quelli interi.

7. Due monomî si dicono ***simili***, se contengono le medesime lettere, ciascuna al medesimo esponente, cioè se hanno la medesima parte letterale (e, quindi, differiscono, al più, per il coefficiente): tali sono, ad es., $-3a^3b^2$ e $4a^3b^2$ oppure a^2b^3 e $-\frac{2}{3}a^2b^3$.

8. Le operazioni sui monomî, come, in genere, su ogni specie di espressioni letterali, non si possono che indicare. Ma per lo più le espressioni, cui si è così condotti, si possono ***semplificare***.

Così, quando in una somma algebrica di monomî compaiono monomî simili, questi *si riducono;* cioè alla somma parziale di questi monomî, simili fra loro, si sostituisce il monomio simile ad essi, che ha come coefficiente la somma algebrica dei loro coefficienti. Così, ad es.,

$$a^2b^3 - 3a^3b^2 - \frac{2}{3}a^2b^3 + 4a^3b^2 = \frac{1}{3}a^2b^3 + a^3b^2.$$

Il prodotto di due (o più) monomî si scrive senz'altro, sotto forma ridotta, prendendo come coefficiente il prodotto dei coefficienti dei monomî fattori e come parte letterale il prodotto delle lettere, che in essi compaiono, elevata ciascuna alla somma degli esponenti, che essa ha nei singoli fattori. Per esempio:

$$\left(\frac{1}{2}a^3bc^2\right)\left(-\frac{3}{5}ab^2\right) = -\frac{3}{10}a^4b^3c^2.$$

Perciò il grado del monomio prodotto, rispetto ad ogni sua lettera, è uguale alla somma dei gradi dei diversi monomî fattori rispetto a quella lettera. Similmente il grado (totale) del prodotto è uguale alla somma dei gradi dei fattori.

9. Quando si vuol dividere un monomio per un altro, bisogna escludere il valore 0 per ciascuna delle lettere, che compaiono nel monomio divisore.

Il quoziente di due monomî non è, in generale, un monomio, bensì una frazione algebrica. Affinchè si riduca ad un monomio o, come si suol dire, il primo monomio sia *divisibile* per il secondo, occorre e basta che il monomio dividendo contenga tutte le lettere del divisore, elevate ciascuna ad un esponente, che non sia minore di quello che essa ha nel divisore. E, sotto questa ipotesi, il monomio quoziente ha come coefficiente il quoziente dei coefficienti dei due monomî dati; e la sua parte letterale si ottiene da quella del monomio dividendo, sottraendovi dall'esponente di ciascuna sua lettera l'esponente, che essa ha nel divisore. Così, ad esempio,

$$\frac{-3a^4b^2c^3}{5a^2b} = -\frac{3}{5}a^2bc^3.$$

In ogni altro caso, purchè i due monomî dati abbiano qualche lettera comune, è facile scrivere un monomio, per cui essi risultino entrambi divisibili: basta prendere nei due monomî dati *tutte (e sole) le lettere comuni, elevata ciascuna al minore dei due esponenti, con cui essa compare nei due monomî.* Il coefficiente si può prendere a piacere: se i coefficienti dei due monomî sono entrambi interi, converrà assumerlo uguale al loro massimo comun divisore. Un tale monomio (determinato a meno del coefficiente) è quello di *massimo* grado rispetto a ciascuna sua lettera, per il quale i due monomî dati risultino entrambi divisibili, e perciò si chiama il loro *massimo comun divisore* (M. C. D.). Per es. il M. C. D. di $4a^5b^2c^3d$ e $-3a^3b^2c^7e^3$ è $a^3b^2c^3$ (od ogni altro monomio simile a questo).

La frazione algebrica, che ha per termini due dati monomî, si semplifica, dividendo numeratore e denominatore per il loro M. C. D. Così

$$\frac{4a^5b^2c^3d}{-3a^3b^2c^7e^3} = \frac{4a^2d}{-3c^4e^3}.$$

10. Per sommare più frazioni algebriche, i cui termini siano tutti monomî, bisogna ridurle allo stesso denominatore, e come tale si può prendere il prodotto dei loro denominatori. Ma si rende più semplice il risultato, prendendo come denominatore comune il *minimo comune multiplo* (m. c. m.) dei denominatori delle date frazioni, cioè quel monomio (determinato a meno del coefficiente), che sia divisibile per tutti codesti denominatori e risulti di grado *minimo* rispetto a ciascuna lettera. Esso si ottiene prendendo come sua parte letterale il prodotto di *tutte le lettere comuni e non comuni ai varî denominatori, elevata ciascuna al maggiore degli esponenti, con cui essa vi compare.* Il coefficiente si potrà prendere ad arbitrio; e se i coefficienti dei monomî dati sono interi, converrà assumerlo uguale al minimo comune multiplo di codesti coefficienti. Così, il m. c. m. di $3a^4bc^2$ e $2ab^3$ è $6a^4b^3c^2$; e si ha ad es.

$$\frac{1}{3a^4bc^2} - \frac{1}{2ab^3} = \frac{2b^2 - 3a^3c^2}{6a^4b^3c^2}.$$

11. É noto che si chiama *polinomio* ogni somma di due o più monomi, non tutti simili fra loro (*termini*). I polinomi si scrivono di regola sotto *forma ridotta*; cioè prima se ne scrivono in forma ridotta tutti i termini e poi si riducono gli eventuali termini simili. Se dopo ciò il polinomio comprende due o tre o quattro termini ecc., esso si chiama rispettivamente, *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, ecc.

Di un polinomio, scritto in forma ridotta, si dice « *grado rispetto ad una delle sue lettere* », il massimo dei gradi dei suoi termini rispetto a codesta lettera. E, analogamente, si dice « *grado totale* » o, semplicemente, « *grado* » del polinomio il massimo dei gradi totali dei suoi termini. Così, ad es., il polinomio

$$a^2 - 4ab^3 + 3a^2b + 5b + 1$$

è di 2° grado rispetto ad a, di 3° rispetto a b; ed è di grado (totale) 4.

Un polinomio, di cui tutti i termini siano di ugual grado, si dice *omogeneo*; per es., il trinomio

$$a^2 + 3ab - 5b^2$$

è omogeneo (di 2° grado).

12. La somma di due (o più) polinomi è data dal polinomio, che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi; e il prodotto di due polinomi è dato dalla somma dei prodotti parziali, che si ottengono moltiplicando successivamente ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo. Nell'uno e nell'altro caso la sola semplificazione possibile è quella proveniente dalla riduzione degli eventuali termini simili.

Il quoziente di due polinomi non si può, in generale, che indicare con la frazione algebrica, che ha per termini i due polinomi (escludendo per le lettere, che compaiono nel divisore, quei valori, per cui esso si annulla). Ma in ogni caso conviene cercare se questa frazione algebrica si possa semplificare. Una facile semplificazione si ha, quando tutti i termini del numeratore e del denominatore risultino divisibili per uno stesso monomio (o polinomio).

Per le frazioni algebriche a termini polinomiali valgono le solite regole di calcolo. Così esse non cambiano valore, se si moltiplicano i due termini per uno stesso monomio o polinomio (purchè per le lettere che compaiono in questo moltiplicatore si escludano quei valori per cui esso si annulla). Profittando di questa proprietà, si possono ridurre due (o più) frazioni algebriche allo stesso denominatore, e, quindi, sommarle algebricamente.

13. Bisogna tener presenti le seguenti identità, che, come si è visto negli elementi, si ottengono, come immediata applicazione della regola per la moltiplicazione dei polinomi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ed è utile ricordare anche queste altre:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Polinomî ordinati secondo le potenze di una indeterminata

14. Un polinomio di grado n in una indeterminata x, quando si scriva in forma ridotta e si ordinino i suoi termini secondo le potenze decrescenti della indeterminata, assume l'aspetto

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0\,,$$

dove a_0, a_1, $a_2, \dots, a_{n-1}$, a_n denotano $n+1$ numeri dati o $n+1$ espressioni letterali date, le quali non debbono contenere la x, ma rispetto alle lettere, che vi figurano, possono essere di natura qualsiasi (monomiali o polinomiali, intere o fratte).

Spesso torna utile denotare un tale polinomio con una lettera A o B, ecc.; e quando si vuol mettere in evidenza la indeterminata, da cui esso dipende, si scrive $A(x)$ o $B(x)$, ecc. Se poi in un polinomio $A(x)$ si vuole attribuire alla x un certo valore c, il valore corrispondentemente assunto da $A(x)$ si denota con $A(c)$.

15. Nella teoria dei polinomî in una indeterminata è fondamentale il cosiddetto ***principio di identità*** (per la dimostrazione cfr. V_1, nn. 4-6):

Due polinomî in una stessa indeterminata x, i quali assumano valori uguali per qualsiasi valore attribuito alla x, sono necessariamente dello stesso grado e hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei termini di ugual grado nella x.

In altre parole, se A e B sono due polinomî in una stessa indeterminata, l'identità $A = B$ implica necessariamente che A e B si riducano allo stesso polinomio.

16. Per ricordare come si dispongano e si eseguiscano le operazioni fondamentali sui polinomî ordinati in una stessa indeterminata, giova tener presente l'analogia fra la scrittura di codesti polinomî e quella dei numeri interi (assoluti) nel consueto sistema di numerazione decimale. Tutti ben sappiamo che, ad es., con la scrittura 7235 si indica la somma

$$7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5.$$

Si può, dunque, dire che ogni numero intero viene così rappresentato come il valore, che un certo polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di una indeterminata x (e a coefficienti interi compresi tra 0 e 9), assume, quando alla x si attribuisce il valore 10.

Orbene, le operazioni sui polinomî ordinati si dispongono e si eseguiscono in modo perfettamente analogo a quello, che tutti abbiamo imparato, fin dall'Aritmetica pratica, per le operazioni sui numeri interi.

Per il caso della addizione e della moltiplicazione basterà qui indicare due esempi:

1) Addizione:

$$\begin{array}{rrrrr}
3x^4 & -\,2x^3 & +\,x^2 & +\,5x & -\,6 \\
 & 4x^3 & -\,7x^2 & -\,x & +\,9 \\
\hline
3x^4 & +\,2x^3 & -\,6x^2 & +\,4x & +\,3
\end{array}$$

2) Moltiplicazione:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -\,5x^2 & & +\,3 \\
 & & & 3x^2 & -\,x & +\,2 \\
\hline
6x^5 & -\,15x^4 & & +\,9x^2 & & \\
 & -\,2x^4 & +\,5x^3 & & -\,3x & \\
 & & 4x^3 & -\,10x^2 & & +\,6 \\
\hline
6x^5 & -\,17x^4 & +\,9x^3 & -\,x^2 & -\,3x & +\,6
\end{array}$$

Conviene ricordare che nel prodotto di due polinomî si hanno sempre due termini, che non possono mai ridursi coi rimanenti, cioè il prodotto dei due termini di grado *massimo* dei due fattori e quello dei due termini di grado *minimo*. Perciò, in particolare, il grado del prodotto è sempre uguale alla somma dei gradi dei fattori.

Sono notevoli le seguenti identità, che si giustificano eseguendo le moltiplicazioni indicate nei primi membri:

$$\begin{aligned}
(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})(x - a) &= x^n - a^n, \\
(x^{2n-1} - ax^{2n-2} + a^2x^{2n-3} - \dots + a^{2n-2}x - a^{2n-1})(x + a) &= x^{2n} - a^{2n}, \\
(x^{2n} - ax^{2n-1} + a^2x^{2n-2} - \dots - a^{2n-1}x + a^{2n})(x + a) &= x^{2n+1} + a^{2n+1}.
\end{aligned}$$

17. È opportuno fermarsi un po' più a lungo sulla divisione.

La frazione algebrica $\frac{A}{B}$, che indica il quoziente di due polinomî in una stessa indeterminata x (con la esclusione di quei valori della x, per cui B si annulla), si può, in generale, semplificare.

Nel caso di due numeri interi assoluti a e b, è notorio che il quoziente può essere in casi speciali un numero intero (a divisibile per b). In ogni altro caso si ha

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad \text{o, in forma intera,} \quad a = bq + r,$$

dove q ed r sono certi due ben determinati numeri interi assoluti, di cui il secondo è minore di b (q « quoziente intero di a per b » ed r « resto della divisione di a per b »).

Analogamente, nel caso di due polinomi $A(x)$, $B(x)$, di cui il primo abbia un grado n maggiore od uguale al grado m di B, la frazione algebrica $\frac{A}{B}$ si può, in casi speciali, ridurre ad un certo nuovo polinomio Q di grado $n - m$ in x (*quoziente* di A per B); e in tal caso A si dice ***divisibile*** per B. In ogni altro caso si possono determinare due certi polimonî Q ed R, tali che il primo sia di grado $n - m$, il secondo di grado minore del grado m di B, e sussista la identità

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

o, in forma intera,

(1) $$A = BQ + R.$$

Il polinomio Q si chiama ***quoziente intero*** (e, talvolta, se non vi è pericolo di equivoco, semplicemente *quoziente*) di A per B, mentre R si chiama *resto*; e l'operazione, con cui si trovano i due polinomî Q ed R, si designa col nome di « divisione dei polinomî in una stessa indeterminata ».

Tenuto conto dell'uso, che se ne dovrà fare in avvenire, richiamiamo qui la corrispondente regola:

Dati due polinomî A, B in una stessa indeterminata, di cui il primo sia di grado non minore del secondo, si divide A per B con le operazioni seguenti:

1°) *Si ordinano entrambi i polinomî secondo le potenze decrescenti della indeterminata.*

2°) *Si divide il primo termine di A per il primo termine di B e si sottrae da A il prodotto di B per il « quoziente parziale » così ottenuto. La differenza è il « primo resto parziale ».*

3°) *Si divide il primo termine di questo resto parziale per il primo termine di B e si sottrae dal primo resto parziale il prodotto di B per questo « secondo quoziente parziale » e si ottiene il « secondo resto parziale ».*

4°) *Si ripete il procedimento fino a quando si perviene ad una divisione esatta oppure ad un resto parziale di grado minore del divisore.*

Nel primo caso A è divisibile per B ed il quoziente è la somma Q dei quozienti parziali successivamente ottenuti, talchè si ha

$$A = BQ.$$

Nel secondo caso i polinomî A e B sono legati alla somma Q dei quozienti parziali (quoziente intero) *e all'ultimo resto parziale R* (resto della divisione) *dalla identità*

$$A = BQ + R, \tag{1}$$

dove (giova ripeterlo) *il resto R è di grado minore del divisore B.*

Se, ad es., si prende

$$A = 6x^5 + x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1, \quad B = 3x^3 - x^2 + 2x - 1,$$

si trova:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & + x^4 & - 6x^3 & + 3x^2 & & -1 & 3x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
\cline{7-7}
-6x^5 & + 2x^4 & - 4x^3 & + 2x^2 & & & 2x^2 + x - 3 \\
\cline{1-6}
 & 3x^4 & - 10x^3 & + 5x^2 & & -1 & \\
 & -3x^4 & + x^3 & - 2x^2 & + x & & \\
\cline{2-6}
 & & -9x^3 & + 3x^2 & + x & -1 & \\
 & & 9x^3 & - 3x^2 & + 6x & -3 & \\
\cline{3-6}
 & & & & 7x & -4 &
\end{array}$$

cioè

$$Q = 2x^2 + x - 3, \quad R = 7x - 4.$$

Importa tener presente che la identità

$$A = BQ + R, \tag{1}$$

sotto la condizione che R sia di grado minore di B, ***caratterizza*** il quoziente Q e il resto R della divisione di A per B; cioè, ***se, dati due polinomî A e B in una stessa indeterminata, di cui il secondo sia di grado minore del primo, si trovano in un modo qualsiasi*** (senza ricorrere alla divisione di A per B) ***due polinomî Q ed R, soddisfacenti alla identità*** (1) ***ed R è di grado minore di B, questi due polinomî Q ed R sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione di A per B.***

18. Una frazione algebrica $\frac{A}{B}$, i cui termini siano polinomî in una stessa indeterminata, si dice *propria* od *impropria*, secondo che il grado n del numeratore A è minore o no del grado m del denominatore B. Si è visto or ora che una frazione impropria ($n \geq m$) si può sempre decomporre nella somma di un polinomio Q di grado $n - m$ e di una frazione propria $\frac{R}{B}$.

Supponiamo ora che una frazione $\frac{A}{B}$ sia già propria, cioè sia $n < m$. Una tale frazione non si può semplificare, o, come si suol dire, è *irriducibile*, se i due polinomî A e B non hanno alcun divisore comune, il che si esprime dicendo che essi sono *primi* fra loro.

Se invece A e B hanno qualche divisore comune, fra i polinomî, che li dividono esattamente entrambi, ne esiste sempre uno (determinato a meno di un moltiplicatore numerico), che è di grado *massimo*. È il cosiddetto *massimo comun divisore* (M. C. D.) di A e B.

Esso si trova con un procedimento di successive divisioni, perfettamente analogo a quello, con cui in Aritmetica si calcola il massimo comun divisore di due numeri interi (assoluti); supposto, come si è detto, che il grado n di A sia minore del grado m di B, si divide B per A; se B non è divisibile per A ed è R_1 il resto, si divide A per R_1: se neppur questa volta la divisione risulta esatta ed è R_2 il nuovo resto, si divide R_1 per R_2, e così si continua. Il procedimento ha certamente termine, perchè R_1 è, al massimo, di grado $n-1$, R_2 è, al massimo, di grado $n-2$, e così via. Ma possono darsi due casi: o si finisce col trovare un resto di grado 0, cioè un numero, e allora i due polinomî sono primi fra loro (cioè privi di divisori comuni); oppure dopo un certo numero di divisioni si trova un ultimo resto di grado ≥ 1, il quale divide esattamente il resto precedente; e allora quell'ultimo resto è il M. C. D. di A e B.

Indicatolo con M, si avrà

$$A = A_1 M, \quad B = B_1 M,$$

dove A_1, B_1 sono due polinomî primi fra loro, e risulterà

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1 M}{B_1 M} = \frac{A_1}{B_1},$$

cioè la frazione algebrica sarà resa irriducibile.

19. In varie questioni, soprattutto relative alle equazioni, si è condotti a dividere un polinomio $A(x)$ per un binomio di 1^o grado della forma $x - c$, dove c denota un numero dato. Se n è il grado di $A(x)$, il quoziente Q sarà di grado $n-1$, mentre il resto dovrà risultare di grado zero, cioè ridursi ad un numero r, che sarà nullo se A è divisibile per $x - c$. In ogni caso sussisterà l'identità caratteristica (n. 17)

$$(1') \qquad A(x) = (x - c)\, Q(x) + r.$$

Attribuendo in essa ad x il valore c si deduce

$$A(c) = r,$$

cioè *il resto della divisione di un polinomio per $x - c$ è il valore, che il polinomio assume, quando ad x si attribuisce il valore c.*

E di qui risulta che *affinchè un polinomio in x sia divisibile per $x - c$, è necessario e sufficiente che esso assuma il valore zero, quando vi si attribuisce ad x il valore c.*

20. Il quoziente intero di un polinomio $A(x)$ per un binomio $x - c$ si può trovare applicando la regola generale del n. 17; ma si può calcolare più rapidamente con la cosiddetta REGOLA DEL RUFFINI:

Quando un polinomio, ordinato secondo le potenze decrescenti di una indeterminata x, si divide per un binomio $x - c$, il quoziente, ordinato anch'esso nel medesimo modo, ha lo stesso primo coefficiente del dividendo, e ciascuno degli altri suoi coefficienti si ottiene, moltiplicando quello immediatamente precedente per c e aggiungendo il coefficiente di ugual posto del dividendo. Il termine noto si ottiene quando si arriva ad utilizzare il penultimo coefficiente del dividendo; e se si applica ancora una volta la stessa regola, si ottiene il resto della divisione.

Dimostriamo questa regola, e, per non complicare inutilmente i calcoli, supponiamo A di 3^o grado:

$$A(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Il quoziente sarà un certo polinomio di 2^o grado

$$Q(x) = q_0x^2 + q_1x + q_2\,;$$

e poichè l'identità (1'), sotto la condizione che r sia un numero, caratterizza il quoziente intero ed il resto (n. 17), si tratta di determinare i coefficienti q_0, q_1, q_2 di Q e il numero r, in modo che sussista l'identità (1'), cioè, più precisamente, in modo che, quando tenendo conto dell'espressione di Q, si eseguiscano i calcoli indicati a secondo membro, e nel risultato si riducano i termini simili, si pervenga ad un polinomio di 3^o grado, i cui coefficienti siano ordinatamente uguali a quelli dei termini di ugual grado di $A(x)$ (n. 15). Eseguiamo dunque anzitutto il prodotto di $Q(x)$ per $x - c$:

$$\begin{array}{r}
q_0x^2 + q_1x + q_2 \\
x - c \\
\hline
q_0x^3 + q_1x^2 + q_2x \qquad\quad \\
- q_0cx_2 - q_1cx - q_2c \\
\hline
q_0x^3 + (q_1 - q_0c)x^2 + (q_2 - q_1c)x - q_2c
\end{array}$$

Abbiamo, dunque,

$$(x - c)Q(x) + r = q_0x^3 + (q_1 - q_0c)x^2 + (q_2 - q_1c)x + r - q_2c\,;$$

ed uguagliando i coefficienti di questo polinomio ordinatamente a quelli dei termini di ugual grado di $A(x)$, perveniamo alle uguaglianze

$$\begin{cases} q_0 = a_0 , \\ q_1 - q_0 c = a_1 , \\ q_2 - q_1 c = a_2 , \\ r - q_2 c = a_3 ; \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} q_0 = a_0 , \\ q_1 = q_0 c + a_1 , \\ q_2 = q_1 c + a_2 , \\ r = q_2 c + a_3 ; \end{cases}$$

e queste ultime uguaglianze danno appunto la regola dianzi enunciata.

Se, per es., si vuol dividere $2x^4 - 3x^3 - 15x - 6$ per $x - 3$, l'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 2 & -3 & 0 & -15 & -6 \\ & & 6 & 9 & 27 & 36 \\ \hline & 2 & 3 & 9 & 12 & 30 \end{array}$$

Il quoziente è dunque $2x^3 + 3x^2 + 9x + 12$ e il resto 30.

Eseguendo con la regola del Ruffini le divisioni

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad \frac{x^{2n} - a^{2n}}{x + a}, \quad \frac{x^{2n+1} + a^{2n+1}}{x + a}$$

si ritrovano le identità del n. 16.

21. Anche i polinomî in due indeterminate x, y si scrivono, di regola, ordinati in modo opportuno: dato un tale polinomio, si comincia col distinguere in esso le varie parti omogenee (n. 11), cioè si decompone il polinomio nella somma dei varî gruppi di termini di ugual grado (totale) rispetto ad x e y; questi polinomî parziali si considerano l'uno dopo l'altro nell'ordine, per es., decrescente dei loro gradi; e, infine, in ciascuno di essi i termini si ordinano secondo le potenze decrescenti di una delle indeterminate, per es. della x (onde, in quanto la somma degli esponenti delle due indeterminate è in ognuno di essi costante, i termini di ogni polinomio parziale risultano ordinati secondo le potenze crescenti della y). Così un polinomio di 2° grado in x, y si scriverà

$$ax^2 + bxy + cy^2 + hx + ky + l.$$

Equazioni

22. Già nel caso dei problemi di 1° grado si è visto che, quando si applica l'Algebra alla risoluzione di un problema, per es. ad una sola incognita x, si è condotti a tradurlo in una *equazione*

$$A(x) = B(x), \tag{2}$$

dove $A(x)$ e $B(x)$, *primo* e *secondo membro*, denotano certe due espressioni contenenti l'incognita. Se i dati del problema non sono assegnati numericamente, compaiono nei due membri dell'equazione anche le lettere, con cui si è convenuto di indicare codesti dati.

In ogni caso importa aver ben chiara la differenza essenziale, che intercede fra un'equazione (2) e le identità fra espressioni letterali, di cui abbiamo avuto occasione di richiamare numerosi esempi nei nn. prec. (esempio tipico la identità caratteristica (1), che lega dividendo, divisore, quoziente e resto di una qualsiasi divisione di polinomî in una stessa indeterminata). Ogni identità è, per definizione, un'uguaglianza che *vale comunque si fissino i valori delle lettere che vi compaiono* (con l'avvertenza di escludere, quando intervenga qualche frazione algebrica, quei valori, per i quali eventualmente si annulli il denominatore e quindi la frazione risulti priva di senso).

Invece un'*equazione* (2), una volta fissati, come si suppone, i valori dei dati letterali del problema, *non è verificata da qualsiasi valore dell'incognita, bensì soltanto da valori particolari*, che sono appunto quelli richiesti dal corrispondente problema. Insomma ogni equazione è una *uguaglianza di condizione*, che si impone alla incognita, allo scopo di determinarne il valore.

È noto che si dice *soluzione* o anche *radice* di un'equazione ogni valore (numerico o letterale) dell'incognita, che faccia assumere lo stesso valore ai due membri dell'equazione. E *risolvere* un'equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni.

Se $A(x)$, $B(x)$ sono, rispetto alla incognita x, due polinomî, l'equazione (2) si dice *intera*. Si dice invece *fratta*, se fra i termini di $A(x)$ e $B(x)$ (*termini dell'equazione*) compare qualche frazione algebrica, contenente l'incognita al denominatore.

In quest'ultimo caso si presentano come *eccezionali* quei valori dell'incognita, per i quali si annulla il denominatore di qualche termine fratto dell'equazione. Ciascuno di essi, sostituito al posto della incognita, rende *privo di senso* almeno un termine dell'equazione, e perciò, in accordo con le convenzioni del calcolo letterale, non può dirsi soluzione dell'equazione.

Giova, infine, ricordare che talvolta si incontrano equazioni che non ammettono nessuna soluzione, e che perciò si dicono *impossibili* od *assurde*: tale è, ad es., la $x^2 = -4$.

Per contrario può accadere che, dopo avere scritta l'equazione, in cui si traduce un problema a dati letterali, ci si accorga che, per valori speciali di codesti dati, l'equazione risulti soddisfatta da *qualsiasi* valore della incognita, cioè cessi di essere un'equazione vera e propria per ridursi ad una identità. Ciò si suole esprimere anche dicendo che, per quei certi valori dei dati, l'equazione diventa *indeterminata*.

23. Per lo studio delle equazioni è essenziale aver ben compreso il concetto di *equivalenza* fra equazioni.

Due equazioni

(3) $$A(x) = B(x), \quad A'(x) = B'(x)$$

si dicono *equivalenti*, se hanno le medesime soluzioni. Perciò, per poter concludere che due equazioni sono equivalenti bisogna accertarsi che *ogni* soluzione della prima renda soddisfatta la seconda e, viceversa, *ogni* soluzione della seconda renda soddisfatta la prima.

Ma talvolta accade che si riesca soltanto ad assicurarsi che di due equazioni (3) la seconda è soddisfatta da *tutte* le soluzioni della prima, senza poter escludere che ammetta anche qualche altra soluzione. In tal caso si dice che la seconda equazione *è una conseguenza* della prima o *consegue* dalla prima.

Si può perciò dire che due equazioni sono equivalenti, quando ciascuna di esse consegue dall'altra.

In ogni caso *due equazioni, che siano entrambe equivalenti ad una stessa equazione, sono equivalenti fra loro.*

24. Per dedurre da un'equazione data altre equazioni equivalenti, o quanto meno conseguenti, servono, come già si è visto nel caso delle equazioni di 1° grado, alcuni teoremi generali o *principî*, che qui, in vista della loro importanza anche per il seguito, riprenderemo e chiariremo. Li stabiliremo considerando esclusivamente equazioni *intere*; e vedremo poi come gli stessi principî si possano, con opportune avvertenze, utilizzare anche nel caso delle equazioni *fratte*.

25. Sussiste anzitutto il PRINCIPIO DI ADDIZIONE: *Da un'equazione si ottiene un'equazione equivalente, aggiungendo ad ambo i membri una stessa espressione intera rispetto all'incognita*, che può, in particolare, ridursi ad una espressione nei soli dati letterali od anche ad un semplice numero.

Indicata con M questa espressione, dobbiamo dimostrare che una qualsiasi equazione

(4) $$A = B,$$

dove A e B rappresentano due polinomî in una stessa incognita x, è equivalente alla

(5) $$A + M = B + M;$$

cioè che ogni soluzione della (4) soddisfa anche la (5), e, viceversa, ogni soluzione della (5) soddisfa la (4).

A tale fine osserviamo che se c è una soluzione della (4), vuol dire che i due polinomî A e B, quando vi si attribuisca ad x il valore c, assumono valori uguali. Ma è allora manifesto che assumono valori uguali anche i due polinomî $A + M$ e $B + M$, cioè ogni soluzione della (4) soddisfa la (5). Similmente, se per un certo valore della x, assumono valori uguali i due polinomî $A + M$ e $B + M$, altrettanto accade di A e B, cosicchè ogni soluzione della (5) soddisfa anche la (4). Perciò le due equazioni sono equivalenti.

26. Pensando data la

(5) $$A + M = B + M$$

e tenendo conto che essa, come si è visto or ora, è equivalente alla

(4) $$A = B,$$

abbiamo che: *Se nei due membri di un' equazione si sopprimono due termini fra loro uguali, si ottiene un' equazione equivalente alla data.*

27. Un altro corollario immediato del principio di addizione è il PRINCIPIO DI TRASPORTO: *Da un' equazione si ottiene un' equazione equivalente, trasportando un qualsiasi termine da un membro all' altro, purchè gli si cambi il segno.*

Infatti, in un' equazione intera, in cui sia A il polinomio a primo membro, indichiamo con M un termine del secondo membro e con B la somma di tutti gli altri, cosicchè l' equazione si possa scrivere

(6) $$A = B + M.$$

Basta aggiungere ad ambo i membri il termine M, cambiato di segno, e tener conto del principio di addizione, per concludere che la (6) è equivalente alla

$$A - M = B + M - M \quad \text{ossia} \quad A - M = B,$$

la quale si può dire appunto ottenuta dalla (6), trasportando dal secondo membro al primo il termine M e cambiandogli segno.

Perciò ogni equazione, trasportandone tutti i termini del secondo membro al primo, si può sempre ridurre alla forma

$$A = 0.$$

28. Consideriamo infine una qualsiasi equazione (intera), che per semplicità supporremo ridotta alla forma

$$(7) \qquad A = 0,$$

e, indicando con M, come al n. 25, una espressione intera rispetto alla incognita x, confrontiamo la (7) con l'equazione

$$(7') \qquad MA = 0,$$

che dalla data si ottiene, moltiplicandone ambo i membri per M.

Perchè risulti uguale a zero un prodotto, occorre e basta che si annulli uno dei fattori. Perciò la (7') è soddisfatta non soltanto dalle soluzioni della (7), bensì anche dalle eventuali soluzioni della nuova equazione

$$(8) \qquad M = 0,$$

le quali saranno, in generale, diverse da quelle della (7).

Vediamo così che, in generale, la (7') non risulta equivalente alla equazione data (7), ma si può dire soltanto una sua conseguenza.

Può darsi tuttavia che la (8) non abbia soluzioni; e ciò si verifica certamente, se M si riduce ad un semplice numero diverso da zero, o ad una espressione anche contenente la incognita, ma non mai nulla. In tal caso le due equazioni (7), (7') sono equivalenti.

Dianzi, per semplicità, abbiamo supposto di partire da un'equazione della forma (7), cioè abbiamo immaginato di aver prima trasportato tutti i termini in un membro. Ma tutto ciò, che in codesto caso si è detto della (7) in confronto con la (7'), si può ripetere di una qualsiasi equazione della forma

$$(4) \qquad A = B$$

in confronto con la

$$(4') \qquad MA = MB,$$

che dalla (4) si ottiene, moltiplicandone ambo i membri per M. Infatti le (4), (4') sono equivalenti rispettivamente alle

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad MA - MB = 0 \quad \text{ossia} \quad M(A - B) = 0,$$

che sono appunto della forma delle (7), (7').

Vale, dunque, in ogni caso il seguente PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE: *Da un'equazione si ottiene un'equazione equivalente, moltiplicandone ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero o per una espressione letterale* (anche contenente l'incognita) *la quale non sia mai nulla.*

Se invece si moltiplicano ambo i membri di un'equazione per una espressione intera rispetto all'incognita, la quale per qualche valore di questa si annulli, la nuova equazione è una conseguenza della data, ed ammetto, come soluzioni in più di questa, tutti quei valori della incognita, per cui si annulla l'espressione considerata, e che già non soddisfano la equazione data.

Queste soluzioni, che la (7′) o la (4′) ha in più della (7) o della (4), si dicono soluzioni della (7′) o della (4′), *estranee* alla (7) o alla (4).

29. Le considerazioni precedenti si possono invertire. Immaginiamo data un'equazione della forma

$$MA = 0, \tag{7'}$$

cioè un'equazione, in cui il secondo membro è nullo, mentre il primo è divisibile per una certa espressione M, intera rispetto all'incognita; e confrontiamola con la equazione

$$A = 0, \tag{7}$$

che dalla data si ottiene, dividendone il primo membro per M, o come anche si dice, sopprimendovi il fattore comune M.

Se M è un semplice numero diverso da zero, o un'espressione contenente soltanto dati letterali e non nulla, o infine anche un'espressione contenente l'incognita, ma tale che non si annulli per alcun valore di questa, le (7′), (7) sono, come pocanzi, equivalenti.

Se invece la M contiene l'incognita e per qualche valore di questa si annulla, cioè se l'equazione

$$M = 0 \tag{8}$$

ammette qualche soluzione, la (7) ha, in meno della (7′), tutte quelle soluzioni della (8) che sono ad essa estranee. Ciò si esprime, dicendo che la (7) « ha perduto », rispetto alla (7′), codeste radici della (8).

E anche qui tutto ciò, che dianzi si è detto della (7′) in confronto con la (7), si può ripetere di un'equazione della forma

$$MA = MB \tag{4'}$$

in confronto con la

$$A = B, \tag{4}$$

che dalla (4′) si ottiene dividendone ambo i membri per M.

Possiamo, dopo ciò, enunciare il seguente PRINCIPIO DI DIVISIONE: *Da un'equazione si ottiene un'equazione equivalente, dividendone ambo i membri per un loro fattore comune, che sia un numero diverso da zero od anche un'espressione intera rispetto all'incognita, la quale non si annulli mai per alcun valore dell'incognita.*

Se, invece, questo fattore comune è un'espressione intera rispetto all'incognita, che per qualche valore di questa si annulli, l'equazione ottenuta dalla data, dividendone ambo i membri per codesto fattore, può aver perduto, rispetto all'equazione data, qualche soluzione; e precisamente avrà perduto quelle soluzioni dell'equazione ottenuta uguagliando a zero la espressione considerata, che sieno ad essa estranee.

In ogni caso, il fatto che la equazione

(7′) $$MA = 0$$

ammette tanto le soluzioni della

(4) $$A = 0,$$

quanto quelle eventuali della

(8) $$M = 0$$

si esprime dicendo che « la (7′) si decompone nelle due equazioni (7) e (8) »; e così si dice che la (4′) si decompone nelle due equazioni (4) e (8).

30. Sinora abbiamo parlato di equazioni *intere*. Quando si passa a considerare equazioni *fratte*, bisogna tener conto di quei valori eccezionali della incognita, che annullano il denominatore di qualche termine fratto e che, come già si è rilevato (n. 22), non si possono dire soluzioni dell'equazione, in quanto rendono privo di senso qualche suo termine.

Se questi valori eccezionali mancano, cioè se tutti i denominatori dei termini fratti dell' equazione, pur contenendo l'incognita, si conservano, per qualsiasi valore di essa, diversi da zero, i principî dianzi enunciati restano ancora applicabili, come nel caso di un'equazione intera.

Ma, quando non si verifica questa circostanza del tutto particolare, codesti principî si possono applicare alle equazioni fratte soltanto a patto che *si escludano per l'incognita*, sia nell'equazione da cui si parte, sia in quelle che mano mano se ne deducono, *gli accennati valori eccezionali.*

Stabilita questa esclusione, i termini dell'equazione fratta considerata si possono trasportare tutti a primo membro. Con ciò può darsi che i termini fratti si elidano, a due a due tutti quanti, cosicchè si pervenga ad un'equazione intera

(9) $$A(x) = 0.$$

Se nessuno dei valori esclusi per l'incognita soddisfa questa equazione, essa è senz'altro equivalente all'equazione fratta, da cui si è partiti. Se invece anche uno solo di codesti valori eccezionali è soluzione della (9), quest'equazione intera non si può dire equivalente alla data equazione fratta, bensì soltanto una sua conseguenza.

Ma in generale non accadrà che, col trasporto dei termini dell'equazione a primo membro, tutti i termini fratti si elidano a vicenda; ed allora i varî termini si ridurranno allo stesso denominatore e dopo ciò si sommeranno. In tal modo si perverrà ad un'equazione della forma

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0, \tag{10}$$

dove A e B rappresentano due polinomî in x.

In ogni caso i valori, che vanno esclusi per l'incognita, sono quelli che annullano il denominatore B, cioè le soluzioni dell'equazione intera

$$B(x)=0; \tag{11}$$

e saranno soluzioni della (10) tutte le soluzioni dell'equazione intera

$$A(x)=0, \tag{12}$$

che non sono soluzioni della (11). E qui si presentano due casi, analoghi a quelli incontrati poc'anzi, quando abbiamo supposto che l'equazione fratta, col trasporto dei termini a primo membro, si riducesse intera. Se nessuno dei valori eccezionali per l'incognita, cioè delle soluzioni della (11), soddisfa l'equazione intera (12), questa è equivalente all'equazione fratta (10). In caso contrario, l'equazione intera (12) ha, in più della equazione fratta (10), quelle sue soluzioni che soddisfano anche la (11), e che perciò rendono la (10) priva di senso.

Vediamo così che, con opportune cautele, la risoluzione di una qualsiasi equazione fratta si può sempre far dipendere da quella di un'equazione intera, la quale si dice dedotta dalla data « liberandola dai denominatori ».

31. Delle varie eventualità dianzi accennate, parlando in generale, daremo esempi concreti più avanti, quando avremo imparato a risolvere le equazioni di 2° grado (Cap. III).

Ma fin d'ora conviene riflettere sul modo, in cui praticamente una equazione fratta si può liberare dai denominatori. Per fissare le idee, immaginiamo che l'equazione fratta proposta sia della forma

$$\frac{M}{N}=\frac{M'}{N'}, \tag{13}$$

dove M, N, M', N' denotano altrettante espressioni intere rispetto all'incognita x. Per liberarla dai denominatori, dobbiamo, secondo quanto si è detto al n. prec., cominciare con l'escludere per la x gli eventuali valori per cui si annulla N o N'. Dopo ciò, trasportati tutti i termini a primo membro, cioè scritta la (13) sotto la forma

$$\frac{M}{N}-\frac{M'}{N'}=0, \tag{14}$$

dobbiamo ridurre i varî termini allo stesso denominatore. Se non riusciamo a trovare fattori comuni ad N ed N', non possiamo prendere come denominatore comune, che il prodotto NN' e perveniamo all'equazione

$$\frac{MN' - M'N}{NN'} = 0,$$

talchè l'equazione intera voluta è la

$$MN' - M'N = 0 \quad \text{ossia} \quad MN' = M'N;$$

e quest'equazione intera si ottiene direttamente dalla (13), *moltiplicando ambo i membri per il prodotto NN' dei denominatori dei varî termini fratti.*

Se poi si riesce a trovare un divisore Q comune ad N ed N' talchè sia $N = PQ$, $N' = P'Q$, dove Q, P, P' designano altrettante espressioni intere rispetto alla x, la (14) si può scrivere

$$\frac{M}{PQ} - \frac{M'}{P'Q} = 0,$$

e si può assumere come denominatore comune dei suoi termini il prodotto $PP'Q$. Si perviene così alla

$$\frac{MP' - M'P}{PP'Q} = 0$$

e l'equazione intera

$$MP' - M'P = 0 \quad \text{ossia} \quad MP' = M'P$$

si ottiene direttamente dalla data, moltiplicandone ambo i membri per il prodotto $PP'Q$, or ora trovato come multiplo comune dei denominatori dei suoi varî termini fratti.

Analogamente si procede in ogni altro caso.

32. Un'ultima avvertenza. Quando nella risoluzione algebrica di un problema si è condotti ad un'equazione fratta e si è, perciò, costretti ad escludere per l'incognita qualche valore, come eccezionale per codesta equazione, bisogna poi cercare direttamente se i valori così esclusi per l'incognita abbiano qualche significato in relazione al problema proposto.

33. È ben noto che si dice *grado* di un'equazione intera il grado, rispetto all'incognita, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini e si eseguiscano fra di essi tutte le possibili riduzioni.

Nei corsi precedenti già si sono studiate le *equazioni di* 1° *grado.*

Qui basterà ricordare che ogni equazione di 1° grado, ove si trasportino al primo membro tutti i termini contenenti l'incognita e al secondo tutti quelli noti, assume la forma (*normale*)

$$ax = b, \tag{15}$$

dove a e b denotano ciascuno un numero o una data espressiene letterale non contenente l'incognita.

Se $a \gtrless 0$ (*caso generale*), si trova, dividendo ambo i membri per a, che la (15) ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{b}{a}.$$

Se è $a = 0$ mentre $b \gtrless 0$, la (15) non ammette nessuna soluzione (*caso d'impossibilità*).

Infine se è simultaneamente $a = 0$, $b = 0$, ogni numero, come ogni possibile espressione letterale, soddisfa la (15) (*caso d'indeterminazione*).

Delle equazioni di 2° grado ci occuperemo nei prossimi Cap. I-III.

Disequazioni

34. Come vedremo in seguito, soprattutto nella discussione delle equazioni e dei problemi di 2° grado, si è talvolta condotti a considerare due espressioni $A(x)$, $B(x)$ in una stessa indeterminata e a cercare per quali valori della x la prima assuma valori maggiori oppure minori della seconda, cioè a studiare la disuguaglianza

$$A(x) > B(x) \quad \text{oppure} \quad A(x) < B(x).$$

Queste si possono dire *disuguaglianze di condizione* per la x, e perciò a distinguerle dalle disuguaglianze verificate per qualsiasi scelta delle lettere che vi compaiono (come, ad es., $a^2 + 1 > a^2$) si chiamano *disequazioni* o *inequazioni* o, anche, *disuguaglianze nella indeterminata x*.

Avvertiamo che qualche volta interessa conoscere per quali valori della x la $A(x)$ risulti *maggiore od anche uguale* alla $B(x)$ (oppure *minore od anche uguale*). Si scrive allora

$$A(x) \geq B(x) \quad \text{oppure} \quad A(x) \leq B(x);$$

e queste relazioni di condizione, che contemplano anche il caso dell'uguaglianza, si chiamano comunemente ancora disequazioni. Volendo essere più precisi, si possono indicare col nome speciale di *limitazioni*.

35. Alle disequazioni (e quindi anche alle limitazioni) si estendono in modo ovvio concetti e risultati già stabiliti per le equazioni.

Come queste, le disequazioni si dicono *intere* se tali sono, rispetto alla indeterminata, le espressioni che vi compaiono nei due membri.

Se anche una sola di queste due espressioni è fratta rispetto all'indeterminata, la disequazione si dice *fratta*.

Di una qualsiasi disequazione

$$A(x) > B(x)$$

si dice ***soluzione*** ogni valore (numerico o letterale) della x, che la renda soddisfatta, cioè, precisamente, faccia assumere alla espressione $A(x)$ un valore maggiore di quello corrispondentemente assunto dalla $B(x)$.

E due disequazioni si dicono ***equivalenti***, se ogni soluzione della prima soddisfa anche la seconda e viceversa.

Ragionando in modo perfettamente analogo a quello dei nn. 25-27 e tenendo conto di una nota proprietà delle disuguaglianze fra numeri (n. 5*B*), si estendono alle disequazioni ***intere*** in una indeterminata il ***principio di addizione*** e quello di ***trasporto***, talchè ad ogni disequazione, trasportandone tutti i termini nel membro che deve risultare maggiore, si può dare la forma

$$A(x) > 0.$$

Qualche nuova avvertenza occorre, quando da una disequazione si vuol dedurre una disequazione equivalente, moltiplicando ambo i membri della data per uno stesso numero o per una stessa espressione. Si ricordi, infatti, che nel caso dei numeri relativi la disuguaglianza $a > 0$ equivale alla $ab > 0$ se b è un numero ***positivo***, alla $ab < 0$ se b è un numero ***negativo*** (n. 5*D*). Si riconosce allora, ragionando in modo analogo a quello del n. 28, che una disequazione

$$A(x) > 0,$$

è equivalente alla

$$MA(x) > 0,$$

se M è un numero ***positivo*** o un'espressione letterale ***sempre positiva*** (per qualsiasi scelta dei valori delle lettere che vi compaiono); è invece equivalente alla

$$MA(x) < 0,$$

se M è un numero ***negativo*** o un'espressione letterale ***sempre negativa***.

E se si parte da una disequazione, in cui non siansi trasportati tutti i termini in un membro, cioè abbia la forma

$$A > B,$$

si riconosce in modo analogo che questa disequazione sotto le ipotesi ammesse per M poc'anzi, equivale, rispettivamente, alla $MA > MB$ o alla $MA < MB$.

Ma importa osservare che, mentre nei casi considerati dianzi vale per le disequazioni lo stesso principio di moltiplicazione che per le equazioni (n. 28), le disequazioni si comportano in modo diverso dalle equazioni, quando se ne moltiplicano ambo i membri per una espressione M, che contenga l'indeterminata x e che per certi valori di questa risulti ***positiva***, mentre per altri risulti ***negativa***. Confrontiamo, infatti, sotto questa ipotesi la disequazione

$$A > 0 \tag{16}$$

con la

$$MA > 0. \tag{17}$$

È facile convincersi che la (17) non soltanto (come accade per le equazioni) non è in generale equivalente alla (16), ma (a differenza di quello che succede per le equazioni) non si può nemmeno più dire una conseguenza della (16), nel senso che sia soddisfatta da tutte le soluzioni della (16). Invero, osservando che il prodotto di due numeri è positivo solo quando i due fattori sono entrambi positivi o entrambi negativi, si riconosce che le soluzioni della (17) sono date dall'insieme delle soluzioni comuni alle due disequazioni

$$A > 0, \quad M > 0 \tag{18}$$

e di quelle comuni alle due disequazioni contrarie

$$A < 0, \quad M < 0. \tag{19}$$

Perciò la (17), in confronto della (16), ***perde*** quelle eventuali soluzioni della (16), che soddisfano la limitazione $M \leq 0$, mentre ***guadagna*** quelle eventuali soluzioni della $A < 0$, che soddisfano anche la $M < 0$.

In ogni caso bisogna tener presente, che, come si è osservato or ora, le soluzioni di una disequazione della forma (17) si ottengono prendendo tutte le soluzioni comuni alle due disequazioni (18) e tutte quelle comuni alle due disequazioni (19).

36. Sulle disequazioni *fratte* ci limitiamo a qualche osservazione. Anche per esse, come per le equazioni fratte (n. 30), vanno esclusi quei valori della indeterminata, che rendono privo di senso qualche termine fratto, annullandone il denominatore.

Con questa esclusione, anche in una disequazione fratta si possono trasportare tutti i termini in un membro. Eseguendo, dopo ciò, le operazioni indicate, si può darle sempre la forma

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \tag{20}$$

dove A e B rappresentano due polinomî in x. Affinchè questa disequazione sia soddisfatta, occorre e basta che codesti due polinomî assumano valori di ugual segno. Vediamo così che le soluzioni della (20) sono date da tutti (e soli) i valori di x, che rendono soddisfatte simultaneamente o le due disequazioni intere

$$A(x) > 0, \quad B(x) > 0,$$

oppure le due disequazioni intere contrarie

$$A(x) < 0, \quad B(x) < 0.$$

37. Le disequazioni intere si classificano, come le analoghe equazioni, a seconda del grado; cioè, si chiama *grado* di una disequazione intera il grado, rispetto alla indeterminata, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini e si eseguiscano fra di essi le possibili riduzioni.

Consideriamo, come applicazione delle generalità precedenti, le *disequazioni* (intere) *di* 1° *grado*, che si trattano in modo perfettamente analogo alle corrispondenti equazioni.

Se, data una disequazione di 1° grado, si trasportano in quel membro, che deve risultare maggiore, tutti i termini, che contengono l'indeterminata, nell'altro tutti i termini noti, e si riducono gli eventuali termini simili, si ottiene una disequazione equivalente, che ha la forma

(21) $$ax > b.$$

Supposto $a \gtrless 0$ (*caso generale*), si dividano ambo i membri per a. Se $a > 0$, la (21) è equivalente (n. prec.) alla

$$x > \frac{b}{a},$$

cioè risulta soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x maggiori di $\frac{b}{a}$. Se invece $a < 0$, la (21) è equivalente alla

$$x < \frac{b}{a},$$

ed è quindi soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x minori di $\frac{b}{a}$.

Si vede così che in questo caso generale ($a \gtrless 0$) i valori della x, per cui risulta soddisfatta la disequazione, sono tutti (e soli) quelli maggiori o, secondo i casi, minori della soluzione $\frac{b}{a}$ della corrispondente equazione $ax = b$.

Se poi è $a = 0$ la disequazione (21), analogamente a quanto accade per l'equazione, risulta o *impossibile* oppure *soddisfatta da qualsiasi valore della* x. Infatti se $a = 0$, la (21) si riduce a $0 > b$, cosicchè risulta impossibile se è $b > 0$, soddisfatta da ogni possibile valore di x se è $b < 0$. Se infine è simultaneamente $a = 0$, $b = 0$, la (21) è senz'altro impossibile.

A) Per avere qualche esempio di disequazione di 1° grado, nel caso generale, consideriamo la

$$10 - 7x > 15 - 10x.$$

Se ne deducono successivamente le seguenti disequazioni ad essa equivalenti:

$$-7x + 10x > 15 - 10,$$
$$3x > 5,$$
$$x > \frac{5}{3}.$$

Similmente dalla

$$x - 3 > \frac{7x - 11}{5}$$

si deduce successivamente:

$$5x - 15 > 7x - 11,$$
$$5x - 7x > 15 - 11,$$
$$-2x > 4,$$
$$x < 2.$$

B) Consideriamo, in secondo luogo, qualche esempio di disequazioni fratte riducibili a disequazioni intere di 1° grado. Per trovare le soluzioni della disequazione

$$\frac{3x + 2}{4x - 5} > 0$$

basta (n. prec.) trovare tutte le soluzioni comuni alle due disequazioni intere

$$3x + 2 > 0, \quad 4x - 5 > 0 \qquad \text{ossia} \qquad x > -\frac{2}{3}, \quad x > \frac{5}{4}$$

tutte quelle comuni alle

$$3x + 2 < 0, \quad 4x - 5 < 0 \qquad \text{ossia} \qquad x < -\frac{2}{3}, \quad x < \frac{5}{4};$$

sicchè la disequazione proposta risulta soddisfatta da tutti gli $x > \frac{5}{4}$ e da tutti gli $x < -\frac{2}{3}$.

Se invece si considera la

$$\frac{2x + 3}{1 - 5x} > 0,$$

si è condotti a soddisfare insieme le

$$2x + 3 > 0, \quad 1 - 5x > 0 \qquad \text{ossia} \qquad x > -\frac{3}{2}, \quad x < \frac{1}{5},$$

e le

$$2x+3<0, \quad 1-5x<0 \qquad \text{ossia} \qquad x<-\frac{3}{2}, \quad x>\frac{1}{5};$$

e, poichè queste due ultime si contraddicono, le soluzioni della disequazione proposta sono date da tutti (e soli) i valori di x soddisfacenti la doppia disuguaglianza $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{5}$.

Sistemi di equazioni di 1° grado

38. Torniamo alle equazioni. Già nel primo studio dell'Algebra si è visto che vi sono problemi, in cui si chiede di determinare due o più grandezze non conosciute, e che, perciò, quando si trattano con l'Algebra, conducono ad equazioni in altrettante *incognite*.

Noi qui ci limiteremo a considerare equazioni in due sole incognite, ma le generalità, che esporremo in questo n. e nei seguenti, valgono in ogni caso.

Dicesi *equazione nelle due incognite x e y* ogni *uguaglianza di condizione* della forma

(22)
$$A(x, y) = B(x, y),$$

dove $A(x, y)$ e $B(x, y)$ rappresentano due date espressioni contenenti x e y. E si dice *intera* se entrambe le espressioni $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono intere rispetto ad x e y, cioè se esse sono due polinomi in queste due incognite. Si dice invece *fratta*, se in $A(x, y)$ o in $B(x, y)$, o in entrambe, compare, come termine, qualche frazione algebrica, contenente a denominatore almeno una delle incognite.

Di un'equazione (22) si dice *soluzione* ogni coppia di valori (numerici od anche letterali), che, sostituiti rispettivamente ad x ed y, fanno assumere alle due espressioni $A(x, y)$, $B(x, y)$ un medesimo valore.

Naturalmente, se l'equazione è fratta, vanno qui escluse quelle coppie *eccezionali* di valori, che rendono privo di senso qualche suo termine, annullandone il denominatore.

39. Alle equazioni in due incognite si estende la definizione di equivalenza (n. 23), dicendosi *equivalenti* due equazioni nelle stesse incognite x e y, quando ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda, e viceversa.

Si estendono altresì i principî nn. 25-29; in particolare, si può anche in queste equazioni trasportare un termine da un membro all'altro, purchè gli si cambi segno (e, ove l'equazione sia fratta, si escludano per le incognite le coppie di valori eccezionali).

Infine, anche qui, di un'equazione intera si dice *grado* il grado, *rispetto al complesso delle incognite*, del polinomio, che si ottiene a primo membro, quando vi si trasportino tutti i termini dell'equazione (e si riducano gli eventuali termini simili).

Nel seguito di questa Introduzione ci limiteremo a considerare equazioni (intere) di 1° grado. Una tale equazione si dice ridotta a *forma normale*, quando si sono trasportati a primo membro tutti i termini contenenti le incognite, a secondo tutti i termini noti. Perciò un'equazione di 1° grado in due incognite x e y, quando sia ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$ax + by = c,$$

dove a, b, c denotano tre numeri dati (od anche tre date espressioni letterali, non contenenti le incognite).

40. Prendiamo, ad es., l'equazione (di 1° grado, normale)

$$3x + 2y = 12. \tag{23}$$

Si vede subito che una tale equazione ammette infinite soluzioni. Se, per es., si dà ad x il valore 0, si ottiene per la y l'equazione (in una sola incognita)

$$2y = 12,$$

la cui soluzione è $y = 6$, cosicchè una soluzione della (23) è data da $x = 0$, $y = 6$. Se invece si dà ad x il valore 1, si ha per y l'equazione

$$3 + 2y = 12,$$

che è soddisfatta da $y = \frac{9}{2}$; ed $x = 1$, $y = \frac{9}{2}$ è una nuova soluzione della (23).

Insomma, dato ad arbitrio, un valore alla x, risulta determinato un valore per la y, che si ottiene risolvendo la data equazione, come se fosse un'equazione nella sola incognita y. Così tutte le soluzioni della (23) sono date dalle coppie di valori, che vengono assunti da

$$x \text{ e } y = \frac{12 - 3x}{2},$$

quando ad x si attribuiscano tutti i possibili valori o, come si suol dire, si lasci « arbitraria ».

Consideriamo, allora, un'altra equazione di 1° grado nelle stesse incognite x e y, per es., la

$$4x - y = 5.$$

Anche questa ammette infinite equazioni; ma possiamo chiederci se le due equazioni considerate ammettano qualche soluzione comune, cioè se esista qualche coppia di valori, che sostituiti rispettivamente ad x e y nelle due equazioni, le rendano soddisfatte entrambe.

Quando ci si propone di trovare le soluzioni comuni a due equazioni nelle stesse incognite, si dice che « si fa sistema delle due equazioni » od anche che « si fanno coesistere le due equazioni »; e le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni si dicono senz'altro *soluzioni del sistema.*

Risolvere il sistema vuol dire trovarne tutte le possibili soluzioni.

Un sistema si rappresenta, di solito, scrivendone le equazioni l'una sotto l'altra e unendole con una graffa. Così, nel caso delle due equazioni dianzi considerate, si scrive

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - \ \ y = \ \ 5. \end{cases}$$

41. Come nel caso delle equazioni (n. 23), due sistemi si dicono *equivalenti,* quando tutte le soluzioni del primo soddisfano anche il secondo e, viceversa, ogni soluzione del secondo soddisfa anche il primo.

E per risolvere i sistemi si procede in modo analogo a quello che si tiene per le equazioni in una sola incognita, cioè si cerca di passare dal sistema dato ad altri sistemi equivalenti, mano mano più semplici, fino ad ottenerne uno, che permetta di riconoscerne agevolmente la soluzione (o le soluzioni).

Nel caso dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite si possono seguire tre metodi, che sostanzialmente si equivalgono, e che ci condurranno a concludere che ogni sistema siffatto *in generale* (cioè all'infuori di qualche caso particolare di eccezione) ammette una soluzione ed una sola.

42. *Metodo di sostituzione.* Riprendiamo il sistema del n. 40

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 4x - \ \ y = \ \ 5. \end{cases} \tag{24}$$

Si tratta di trovare per x e y due valori, che rendano soddisfatte entrambe queste equazioni. Se si tien conto soltanto della prima, le sue soluzioni, come si è visto al n. 40, sono date dalle coppie di valori, che si ottengono da

$$x \text{ e } y = \frac{12 - 3x}{2}, \tag{25}$$

attribuendo ad x tutti i possibili valori. Di queste coppie di valori dobbiamo considerare soltanto quelle, che soddisfano anche la seconda equazione. Ora esprimendo che la coppia di valori (21) soddisfa questa seconda equazione, cioè sostituendo in essa al posto della y l'espressione

$$\frac{12-3x}{2},$$

si trova l'equazione

$$4x-\frac{12-3x}{2}=5, \tag{26}$$

la quale contiene la sola incognita x ed è di 1° grado. Essa definisce quel valore di x, per cui le (25) danno una soluzione comune delle due equazioni, cioè una soluzione del sistema. Risolvendo la (26), si trova $x=2$ e, sostituendo questo valore di x nella seconda delle (26), si ottiene $y=3$. Il sistema dato ammette dunque la soluzione $x=2$, $y=3$; e, in forza dello stesso ragionamento, non ne può ammettere altra.

Il metodo così spiegato si può enunciare con la seguente

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite x ed y col metodo di sostituzione, si risolve una delle due equazioni rispetto ad una delle incognite, per es. la y, come se la x fosse conosciuta, e l'espressione così ottenuta si sostituisce al posto di y nell'altra equazione. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, che, risolta, dà il valore di questa incognita. Quello della y si ottiene, sostituendo codesto valore di x nella rispettiva espressione dianzi trovata.*

43. *Metodo di confronto.* Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x+6y=15, \\ 5x-4y=13. \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, si trova che tutte le soluzioni della prima sono date dalle coppie di valori

$$x, \quad y=\frac{15-4x}{6}, \tag{27}$$

dove ad x si diano tutti i valori possibili. Similmente tutte le soluzioni della seconda equazione sono date dalle coppie di valori

$$x, \quad y=\frac{5x-13}{4} \tag{28}$$

dove ancora si attribuiscano ad x tutti i possibili valori. Per avere una soluzione del sistema (cioè comune alle due equazioni) bisogna trovare un valore di x tale, che faccia assumere lo stesso valore alle due espressioni fornite per la y dalle (27) e (28). Si è così condotti all'equazione

$$\frac{15-4x}{6}=\frac{5x-13}{4}, \tag{29}$$

che contiene la sola x ed è di 1° grado. Risolvendola si trova $x=3$; dopo di che il valore di y si trova ponendo $x=3$ nell'una o nell'altra delle espressioni di y date dalle (27) e (28). Risulta $y=\frac{1}{2}$, onde il sistema ammette la soluzione $x=3$, $y=\frac{1}{2}$, e nessun'altra.

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite col metodo di confronto si risolvono entrambe le equazioni rispetto ad una stessa incognita, per es. rispetto alla y, come se la x fosse conosciuta, e si uguagliano le due espressioni così ottenute per la y. Si perviene in tal modo ad un'equazione nella sola x, la quale, risolta, fornisce il valore di questa incognita. Quello di y si ottiene, sostituendo questo valore di x in una qualsiasi delle due espressioni di y dianzi trovate.*

44. In ognuno dei due metodi precedenti si perviene alla risoluzione del sistema, deducendo da esso una nuova equazione (la (26) nel primo metodo, la (29) nel secondo), che contiene soltanto una delle incognite (la x): questa equazione si dice ottenuta dal sistema *eliminando* l'altra incognita (cioè la y). Il terzo metodo, che ci resta da spiegare, conduce direttamente a questa eliminazione. Ma è necessario premettere qualche considerazione generale, che interessa non soltanto per i sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, di cui qui ci occupiamo, bensì anche per sistemi quali si vogliano.

45. Se, dato un sistema, si riesce a scrivere un'equazione, la quale sia soddisfatta da *tutte* le soluzioni di esso, si dice che la nuova equazione è *una conseguenza* del sistema o *consegue* da esso.

Consideriamo, allora, per fissare le idee, un sistema di due equazioni in due incognite

$$A=0, \quad A'=0. \tag{30}$$

Se q, q' sono due numeri quali si vogliano, l'equazione

$$qA+q'A'=0 \tag{31}$$

si dice *combinazione lineare* delle (30) di *moltiplicatori* q, q'. Per es., prendendo $q=1$, $q'=1$, oppure $q=1$, $q'=-1$, si hanno le due combinazioni lineari

$$A+A'=0 \quad \text{o} \quad A-A'=0,$$

che si dicono ottenute dalle (30) « sommandole » o, rispettivamente, « sottraendole membro a membro ».

Ciò premesso, sussiste il seguente teorema:

Un qualsiasi sistema ammette come sue conseguenze tutte le combinazioni lineari delle sue equazioni.

Riferendoci per semplicità al sistema in due incognite (30), dobbiamo far vedere che ogni sua soluzione soddisfa anche l'equazione (31), comunque siansi presi i moltiplicatori q e q'. Ora ciò è evidente, perchè se certi due valori delle incognite soddisfano le (30), vuol dire che essi annullano simultaneamente le due espressioni A ed A', ed allora essi annullano necessariamente (comunque siansi presi q e q') anche l'espressione $qA + q'A'$, cioè rendono soddisfatta anche la (31).

Nello stesso modo il teorema si dimostra per un sistema di quante si vogliano equazioni.

Dal teor. prec. risulta che se delle equazioni di un sistema, del quale si ignori se abbia o no soluzioni, si riesce a formare una combinazione lineare, che sia impossibile, è certamente impossibile anche il dato sistema. Se, invero, esso avesse una soluzione, questa dovrebbe soddisfare anche la combinazione lineare considerata.

46. Al teorema precedente si può dare una forma più precisa: *Da un sistema di quante si vogliano equazioni si ottiene un sistema equivalente, sostituendo ad una di esse una loro combinazione lineare, purchè questa dipenda effettivamente dall'equazione, che si vuol sostituire, cioè sia tale che il corrispondente moltiplicatore sia diverso da zero.*

Nel caso di due equazioni (30) dobbiamo far vedere che un tale sistema è equivalente al sistema

(32) $$A = 0, \quad qA + q'A' = 0,$$

purchè sia $q' \gtrless 0$.

Infatti sappiamo già che ogni soluzione di (30) soddisfa anche il sistema (32), perchè (n. prec.) l'equazione

$$qA + q'A' = 0$$

è una conseguenza del sistema (30). Viceversa, ogni soluzione del sistema (32), annullando insieme le due espressioni A e $qA + q'A'$, fa assumere il valore 0 anche alla $q'A'$ e quindi, essendo per ipotesi $q' \gtrless 0$, alla stessa A'; cioè soddisfa il sistema dato $A = 0$, $A' = 0$.

47. Giova aggiungere una osservazione. Al n. prec. abbiamo considerato un sistema della forma $A = 0$, $A' = 0$, cioè abbiamo supposto che in ciascuna delle equazioni tutti i termini fossero stati portati a primo membro, mentre spesso si è condotti a considerare equazioni che hanno termini in entrambi i membri (come accade per le equazioni di 1^o grado, ridotte a forma normale). Ora è facile riconoscere che per formare una combinazione lineare di due (o più) equazioni quali si vogliano non occorre portarne tutti i termini a primo membro. Invero, supponiamo di avere due equazioni della forma

$$A = B, \quad A' = B'.$$

Per formarne una combinazione lineare di moltiplicatori q e q', dovremmo, secondo la definizione del n. prec., cominciar col trasportare tutti i termini a primo membro e poi considerare l'equazione

$$q(A - B) + q'(A' - B') = 0.$$

Ma sciogliendo le parentesi e ritrasportando i termini qB, $q'B'$ a secondo membro, quest'ultima equazione si scrive

$$qA + q'A' = qB + q'B',$$

e, come si vede, si può ottenere direttamente, come combinazione lineare delle due equazioni date, sotto la loro forma primitiva.

48. *Metodo dei coefficienti uguali* o *della combinazione lineare.* Consideriamo il sistema

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} 5x + 3y &= -3, \\ -2x + 4y &= 22. \end{aligned} \right.$$

Si è visto or ora che si ottiene un sistema equivalente sostituendo ad una delle due equazioni, per es., alla seconda, una qualsiasi combinazione lineare delle (33), (purchè sia diverso da 0 il moltiplicatore della seconda). Ora si possono sempre scegliere i moltiplicatori in modo che nella nuova equazione risulti eliminata (cioè venga a mancare) una delle due incognite. Per es., se si vuole eliminare dalle (33) la y, basta moltiplicare ambo i membri della prima equazione per il coefficiente 4 della y nella seconda ed ambo i membri della seconda per il coefficiente 3 della stessa y nella prima, e poi sottrarre membro a membro le equazioni ottenute. Invero, le due date equazioni, quando se ne moltiplicano ambo i membri, rispettivamente, per i due moltiplicatori indicati, diventano

$$\left\{ \begin{aligned} 4 \cdot 5x + 4 \cdot 3y &= -12, \\ -3 \cdot 2x + 3 \cdot 4y &= 66, \end{aligned} \right.$$

e, sottratte membro a membro, danno l'equazione nella sola x

$$26x = -78,$$

che, risolta, dà $x = -3$. Dopo di ciò, attribuendo ad x questo valore in una delle due equazioni (33), per es. nella prima, si trova la

$$-15 + 3y = -3 \quad \text{ossia} \quad 3y = 12,$$

la quale dà $y = 4$.

Del resto a questo valore della y si può giungere anche direttamente, eliminando, in modo analogo, fra le (33) la x: basta moltiplicare ambo i membri della prima di codeste equazioni per 2 e quelli della seconda, per 5 (con che i coefficienti della x nelle due equazioni risultano opposti) e poi sommarle membro a membro. Si trova così la

$$26y = 104,$$

da cui risulta appunto $y = 4$.

In pratica, per eseguire comodamente il calcolo, conviene scrivere accanto a ciascuna equazione il rispettivo moltiplicatore, disponendo ad es., l'operazione nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} \begin{matrix}4\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}5x + 3y = -3\\ -2x + 4y = 22\end{array}\right. \\ \hline - & \left\{\begin{array}{r}20x + 12y = -12\\ -6x + 12y = 66\end{array}\right. \\ \hline & 26x \qquad = -78 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \begin{matrix}2\\5\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}5x + 3y = -3\\ -2x + 4y = 22\end{array}\right. \\ \hline + & \left\{\begin{array}{r}10x + 6y = -6\\ -10x + 20y = 110\end{array}\right. \\ \hline & 26y = 104 \end{array}$$

o, più semplicemente,

$$\begin{array}{r|l} \begin{matrix}4\\-3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}5x + 3y = 3\\ -2x + 4y = 22\end{array}\right. \\ \hline & 26x \qquad = -78 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \begin{matrix}2\\5\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}5x + 3y = 3\\ -2x + 4y = 22\end{array}\right. \\ \hline & 26y = 104 \end{array}$$

Se nelle date equazioni i due coefficienti della incognita, che si vuole eliminare, sono interi e hanno qualche fattore comune, giova scegliere i due moltiplicatori in modo che il valore assoluto comune dei nuovi coefficienti di codesta incognita risulti uguale al minimo multiplo comune dei valori assoluti dei coefficienti primitivi. Per es.

$$\begin{array}{r|l} \begin{matrix}4\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}9x - 6y = 4\\ 15x + 8y = 6\end{array}\right. \\ \hline & 81x \qquad = 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \begin{matrix}-5\\3\end{matrix} & \left\{\begin{array}{r}9x - 6y = 4\\ 15x + 8y = 6\end{array}\right. \\ \hline & 54y = -2 \end{array}$$

Regola. *Per risolvere un sistema di due equazioni di* 1° *grado in due incognite col metodo dei cofficienti uguali si moltiplicano ambo i membri delle due equazioni per moltiplicatori* (*diversi da* 0) *tali, che i coefficienti di una delle incognite, per es., della y, risultino fra loro uguali od opposti. Dopo di ciò, sottraendo o, rispettivamente, sommando membro a membro le due equazioni così ottenute, si perviene ad una equazione, che contiene soltanto la x e, risolta, dà il valore di questa incognita. La y si determina sia sostituendo il valore trovato per la x in una delle date equazioni, sia eliminando da queste, in modo analogo, la x.*

49. Per ciascuno dei sistemi considerati sin qui (nn. 42-48) abbiamo trovato una soluzione (ed una sola); ma si possono anche presentare *casi di impossibilità* e *casi di indeterminazione*.

Prendiamo, ad es., il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ -6x + 8y = 5; \end{cases}$$

e proviamo a risolverlo con uno qualsiasi dei due metodi dianzi indicati, per es. col metodo di confronto (n. 43). Risolvendo entrambe le equazioni rispetto alla y e uguagliando le due espressioni così ottenute, troviamo l'equazione

$$\frac{3x-2}{4} = \frac{6x+5}{8},$$

che liberata dai divisori, diventa

$$6x - 4 = 6x + 5,$$

ed è un'equazione impossibile, in quanto, ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$6x - 6x = 9 \quad \text{ossia} \quad 0 \cdot x = 9.$$

Non esiste, dunque, nessun valore di x, che insieme con un conveniente valore di y, renda soddisfatte le due date equazioni: il sistema è *impossibile*.

E il fatto si spiega facilmente osservando, che se si dividono ambo i membri della seconda equazione per -2, si ottiene l'equazione equivalente

$$3x - 4y = -\frac{5}{2},$$

che contraddice la prima delle date, in quanto richiede che l'espressione $3x - 4y$, la quale per la prima deve assumere il valore 2, risulti, invece, uguale a $-\frac{5}{2}$.

Consideriamo in secondo luogo il sistema

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5, \\ 8x - 12y = -20. \end{cases}$$

Applicando ancora il metodo di confronto, si è condotti all'equazione nella sola x

$$\frac{2x+5}{3} = \frac{8x+20}{12},$$

che, liberata dai divisori, diventa

$$8x + 20 = 8x + 20$$

e si riduce ad una identità. Ciò vuol dire che l'incognita x non risulta soggetta ad alcuna condizione; o, in altre parole, ad ogni possibile valore di x si può associare un valore per y, che insieme con esso renda soddisfatto il sistema: il sistema è *indeterminato*. E la ragione del fatto risulta evidente, se si osserva che le due equazioni date sono fra loro equivalenti, in quanto la seconda si deduce dalla prima, moltiplicandone ambo i membri per -4.

Discussione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite

50. Gli esempi dei nn. prec. ci hanno mostrato che per un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite sono possibili varî casi: in generale esso ammette una soluzione (ed una sola); ma può anche non ammetterne nessuna, oppure ammetterne infinite. Qui, discutendo in generale un tale sistema, faremo vedere che questi sono i soli casi possibili, e assegneremo dei criterî, che permettono di decidere, anche senza risolvere il sistema, a quale di questi casi esso corrisponda.

Il sistema, ove si immagini ridotto a forma normale e si denotino i coefficienti con lettere, si può scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = c, \\ a'x + b'x = c', \end{array} \right. \tag{34}$$

dove a, b, c, a', b', c' rappresentano sei numeri dati (od anche sei espressioni letterali non contenenti le incognite).

Per risolvere questo sistema, cominciamo con l'eliminare la y, formando la combinazione lineare delle (34), che ha per moltiplicatori b' e $-b$:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} b' \\ -b \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{array} \right. \\ \hline (ab' - a'b)x = cb' - c'b. \end{array} \tag{35}$$

Otteniamo così, come conseguenza del sistema, un'equazione, che contiene la sola x. Affinchè essa sia possibile (e determinata), occorre e basta (n. 33) che sia diverso da zero il coefficiente dell'incognita, cioè si abbia

$$ab' - a'b \gtrless 0, \tag{36}$$

il che intanto implica che non possono essere simultaneamente nulli b e b'.

Esamineremo poi i casi di eccezione, che si presentano quando sia $ab' - a'b = 0$, e qui supporremo senz'altro soddisfatta la condizione (36). Sotto questa ipotesi troviamo, come soluzione della (35),

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}. \tag{37}$$

Similmente, possiamo eliminare fra le (43) la x, formando la loro combinazione lineare di moltiplicatori $-a'$ e a (i quali, sotto l'ipotesi (36), non possono essere entrambi nulli). Troviamo così

$$(38) \qquad \begin{array}{r} -a' \\ a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{array} \right. \atop \overline{(ab' - a'b)y = ac' - a'c,}$$

cioè un'equazione nella sola y, la quale, sotto la stessa ipotesi (36), è anch'essa possibile ed ha la soluzione

$$(39) \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Ora osserviamo che ciascuna delle due equazioni (36), (39) è una conseguenza del sistema dato (n. 45), cosicchè deve risultare soddisfatta da ogni possibile soluzione del sistema. Di qui discende che questo non può essere soddisfatto che dai due valori di x o y, che soddisfano le (36), (38), cioè da quelli forniti dalle formule (37), (39).

Viceversa sostituendo questi valori di x ed y nelle equazioni del sistema dato (34), si verifica che veramente esse risultano entrambe soddisfatte. Perciò si conclude, che, *sotto l'ipotesi*

$$(36) \qquad ab' - a'b \gtrless 0,$$

il sistema (34) *ammette un'unica soluzione, data da*

$$(40) \qquad x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Ciò vale, comunque siano stati prefissati i cofficienti delle equazioni del sistema (anche in parte nulli), purchè beninteso, resti valida la condizione essenziale (36).

51. Passiamo ad esaminare i casi di eccezione, che si presentano quando sia

$$(41) \qquad ab' - a'b = 0,$$

cioè, si annulli l'espressione, che in entrambe le formule risolutive (40) del caso generale compare come denominatore.

Faremo vedere che *sotto l'ipotesi* (41) *il sistema è impossibile* o *indeterminato.*

A tal fine conviene distinguere e discutere successivamente varî casi.

1) Sempre sotto l'ipotesi (41), supponiamo dapprima che sia diversa da zero almeno una delle due espressioni $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, che compaiono nelle formule risolutive (40) come numeratori. Sia, per es.,

$$(42) \qquad cb' - c'b \gtrless 0,$$

il che implica che i coefficienti b e b' non possono essere entrambi nulli. Sotto queste ipotesi (41), (42), l'equazione (35), che al n. prec. abbiamo dedotto dalle equazioni del dato sistema (34), come loro combinazione lineare di moltiplicatori b' e $-b$, si riduce a

$$0 \cdot x = cb' - c'b,$$

e poichè il secondo membro è diverso da zero, risulta impossibile (n. 33). É quindi impossibile anche il sistema (34), di cui essa è una conseguenza (n. 45).

Allo stesso risultato si perviene, supponendo diverso da zero l'altro numeratore $ac' - a'c$ delle (40). Abbiamo, dunque, che *quando è nullo il denominatore $ab' - a'b$ delle formule risolutive, mentre è diverso da zero almeno uno dei due numeratori $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, il sistema* (34) *è impossibile.*

2) Esaminiamo dopo ciò il caso, in cui, essendo sempre verificata l'ipotesi

(41) $$ab' - a'b = 0,$$

si annullano simultaneamente entrambi i numeratori delle (40), cioè si ha

(43) $$cb' - c'b = 0, \qquad ac' - a'c = 0;$$

e supponiamo che sia diverso da zero uno almeno dei quattro coefficienti a, b, a', b' delle incognite.

Sotto quest'ultima ipotesi faremo vedere che basta tener conto, oltre che della (41), di una delle (43) per riconoscere che anche l'altra di queste è necessariamente soddisfatta, e, in ogni caso, il sistema (34) è indeterminato.

Invero, supposto, per fissare le idee, $b \gtrless 0$, si deduce dalla (41) e da quella delle (43), che contiene b, cioè, in questo caso, dalla prima,

(44) $$a' = \frac{b'}{b} a, \qquad c' = \frac{b'}{b} c,$$

cosicchè intanto, moltiplicando ambo i membri di queste due uguaglianze numeriche rispettivamente per c e per a e sottraendo membro a membro, si vede che è verificata necessariamente anche la seconda delle (43). Inoltre, tenendo conto delle (44), la seconda delle equazioni del dato sistema (34) si può scrivere

$$\frac{b'}{b} ax + b'y = \frac{b'}{b} c \quad \text{ossia} \quad \frac{b'}{b}(ax + by) = \frac{b'}{b} c;$$

onde si vede che, se è $b' \lesseqgtr 0$, questa seconda equazione delle (34) si ottiene dalla prima, moltiplicandone ambo i membri per $\frac{b'}{b}$ ed è quindi ad essa equivalente; mentre, se è invece $b' = 0$, si riduce alla identità $0 = 0$. Nell'uno e nell'altro caso, il sistema (34), ammette tutte (e sole) le soluzioni della sua prima equazione (che contiene il coefficiente b supposto diverso da zero)

$$ax + by = c,$$

cioè tutte le coppie di valori, che si ottengono da

$$x, \quad y = \frac{c - ax}{b},$$

dando alla x ogni possibile valore.

Ad analoghi risultati si perviene, supponendo diverso da zero, anzichè b, uno qualsiasi degli altri tre cofficienti a o a' o b' delle incognite. Abbiamo dunque che: *Se, sotto l'ipotesi*

$$(41) \qquad ab' - a'b = 0,$$

è diverso da zero uno almeno dei quattro coefficienti delle incognite ed è nullo quello dei numeratori $cb' - c'b$, $ac' - a'c$ *delle formule risolutive* (40), *che contiene codesto coefficiente diverso da zero, è nullo anche l'altro numeratore, e il sistema ammette tutte* (e sole) *le soluzioni di quella delle sue due equazioni, che contiene il coefficiente supposto diverso da zero.*

In questo caso, in quanto si può attribuire un valore arbitrario ad *una* delle incognite, mentre il valore dell'altra risulta, volta per volta, corrispondentemente determinato, si dice che il sistema presenta una *indeterminazione semplice.*

3) Alle varie ipotesi esaminate sin qui sfugge soltanto il caso, in cui siano simultaneamente nulli tutti e quattro i coefficienti delle incognite, cioè sia

$$a = 0, \quad b = 0, \quad a' = 0, \quad b' = 0;$$

ed in tal caso risultano nulli nelle formule risolutive (40), come nel caso 2), tanto il denominatore, quanto i due numeratori, cioè sono verificate sia la (41), sia le (44). Ma qui le due equazioni del dato sistema (34) si riducono alle due uguaglianze numeriche

$$0 = c, \quad 0 = c',$$

onde si vede direttamente che, se anche uno solo dei termini noti c, c' è diverso da zero, il sistema è *impossibile,* mentre, se è $c = 0$, $c' = 0$, svanisce completamente.

In quest'ultimo caso, in quanto il sistema si può ritener soddisfatto da ogni possibile coppia di valori di x e y, si dice che si ha una *indeterminazione doppia* o *completa.*

52. I risultati della precedente discussione si possono raccogliere nella seguente tabella:

IPOTESI		Natura del sistema	Soluzioni
$ab' - a'b \lessgtr 0$		possibile e determinato	$x = \dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$ $y = \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$
$ab' - a'b = 0$	$ac' - a'c$ e $cb' - c'b$ non entrambi nulli	impossibile	
	$ac' - a'c = 0 \begin{cases} a \gtrless 0 \\ a' \gtrless 0 \end{cases}$ e quindi $cb' - c'b = 0$	indeterminato semplicemente	$x = \dfrac{c - by}{a}$, y arb.ia $x = \dfrac{c' - b'y}{a'}$, y arb.ia
	$cb' - c'b = 0 \begin{cases} b \gtrless 0 \\ b' \gtrless 0 \end{cases}$ e quindi $ac' - a'c = 0$		x arb.ia, $y = \dfrac{c - ax}{b}$ x arb.ia, $y = \dfrac{c' - a'x}{b'}$
$a = 0,\ b = 0,\ a' = 0,\ b' = 0$	c, c' non entrambi nulli	impossibile	
	$c = 0,\ c' = 0$	indeterminato doppiamente	x arb.ia, y arb.ia

53. Per ricordare ed enunciare più rapidamente le formule risolutive (40) e i risultati della precedente discussione, tornano utili una definizione e una notazione (che si possono estendere al caso di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite e che, a dir vero, acquistano il loro pieno interesse soltanto in questo caso più generale).

I binomi $ab' - a'b$, $cb' - c'b$, $ac' - a'c$, che compaiono nelle formule risolutive (40) e che hanno tanta parte nella discussione, si chiamano ciascuno (al pari di ogni binomio analogo) il *determinante* dei quattro numeri che vi compaiono, e si denotano, rispettivamente, con

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Insomma, dati quattro numeri, disposti in quadrato, si dice loro *determinante* il numero, che si ottiene sottraendo dal prodotto dei due numeri, posti diagonalmente a sinistra in alto e a destra in basso, il prodotto degli altri due.

Possiamo perciò dire che *un sistema di due equazioni di 1° grado in due incognite è possibile e determinato sempre e soltanto quando è diverso da zero il determinante dei coefficienti delle incognite.*

Le formule risolutive (40) si possono scrivere

$$(40') \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Il denominatore comune di queste espressioni dei valori delle due incognite è appunto il determinante dei coefficienti, mentre il numeratore è, per ciascuna incognita, quel determinante, che dal denominatore si ottiene, sostituendo ai coefficienti della incognita considerata i rispettivi termini noti (portati a secondo membro). È questa la cosiddetta REGOLA DEL CRAMER, dal nome del matematico svizzero GABRIELE CRAMER (1704-1752), cui si deve questo risultato (nel caso generale di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite).

Cenni sui sistemi di equazioni di 1° grado in più di due incognite

54. I metodi appresi ai n. 42, 43, 48 per la risoluzione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, servono anche a risolvere i sistemi analoghi di quante si vogliano equazioni di 1° grado in altrettante incognite.

Ci limiteremo qui a qualche considerazione sui sistemi di tre equazioni di 1° grado in tre incognite x, y, z. Per risolvere un tale sistema, si può procedere nel modo seguente. Da due delle equazioni date, per es. dalle prime due, si deduce, con uno qualsiasi dei metodi dei nn. 42, 43, 48, un'equazione che contenga soltanto due delle incognite, per es. x e y (cioè si elimina la z); e, similmente, si deduce un'altra equazione che contenga solo x e y, partendo, anzichè dalle due prime equazioni del sistema, dalla terza e da una delle altre due. Risolvendo il sistema delle due equazioni in x e y, così ottenute, si trovano i valori di queste due incognite; e basta sostituire codesti valori in una qualsiasi delle equazioni del sistema, per avere un'equazione nella sola z, la quale permette di trovare il valore di questa terza incognita.

In generale un tale sistema ammette *una soluzione* (ed una sola); ma naturalmente possono anche qui presentarsi *casi di impossibilità* o *di indeterminazione.* La impossibilità si verifica, quando una delle equazioni contraddice ad una delle altre (o ad entrambe). La indeterminazione può essere di diverse specie. Può darsi anzitutto che il sistema contenga due equazioni distinte, mentre la terza sia una combinazione lineare delle prime due o si riduca addirittura ad una identità; ed allora il sistema ammette infinite soluzioni, in quanto una delle incognite resta libera di assumere ogni possibile valore, e a ciascuno di questi valori corrispondono per le altre due incognite valori determinati (caso d'indeterminazione *semplice*). In secondo luogo può accadere che il sistema sia equivalente ad una sola delle sue equazioni, mentre ciascuna delle altre due sia equivalente alla prima o si riduca ad una identità; ed allora il sistema ammette tutte le soluzioni di quell'unica equazione, talchè si possono dare valori arbitrarî a due incognite, restando, volta per volta, determinato il valore della terza (caso d'indeterminazione *doppia*). Può infine succedere che tutte e tre le equazioni del sistema si riducano ad identità, ed allora le incognite restano libere di assumere ciascuna, indipendentemente dalle altre, ogni possibile valore (caso d'indeterminazione *completa* o *tripla*).

Di tali eventualità eccezionali ci riserviamo di indicare qualche esempio negli Esercizî, e qui ci accontenteremo di applicare il procedimento di risoluzione dianzi accennato a due sistemi aventi effettivamente una soluzione (ed una sola).

55. 1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x - 2y - 2z = 3, \\ 3x + 4y + 2z = 13. \end{cases}$$

Se eliminiamo la z dalle due prime equazioni, prendendone la combinazione lineare di moltiplicatori, 2 e -1, e così dalla seconda e dalla terza, e sommiamo le due nuove equazioni membro a membro (e dividiamo poi ambo i membri per 2), otteniamo il sistema in x e y

$$\begin{cases} 3x + 8y = -1, \\ 2x + y = 8, \end{cases}$$

che ammette la soluzione $x = 5$, $y = -2$. Sostituendo questi valori nella prima equazione del sistema si trova $z = 3$, onde il sistema ammette la soluzione $x = 5$, $y = -2$, $z = 3$.

2) Similmente risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ ax + by + cz = 0, \\ a^2x + b^2y + c^2z = (a-b)(b-c)(c-a), \end{cases}$$

dove a, b, c si suppongono disuguali a due a due.

Le due combinazioni lineari di moltiplicatori $-c$ ed 1 delle due prime equazioni e della seconda e della terza danno il sistema in x e y

$$\begin{cases} (a-c)x+(b-c)y=0, \\ a(a-c)x+b(b-c)y=(a-b)(b-c)(c-a), \end{cases}$$

la cui soluzione è $x=c-b$, $y=a-c$. Sostituendo nella prima equazione del sistema, si ottiene per z il valore $b-a$, onde la soluzione del sistema è data da

$$x=c-b, \quad y=a-c, \quad z=b-a.$$

Capitolo I

Estrazione di radice quadrata e numeri reali

Preliminari

1. Abbiamo visto che per risolvere le equazioni e i sistemi di 1° grado occorrono soltanto *addizioni algebriche*, *moltiplicazioni* e *divisioni*, cosicchè, comunque si prefissino i valori interi o fratti dei coefficienti delle equazioni considerate, si trovano sempre (salvi i casi di impossibilità) certi valori, pur essi interi o fratti, che soddisfano la data equazione o il dato sistema.

Ci proponiamo qui di far vedere che quando, invece, si passa alla risoluzione delle equazioni di 2° grado, si è condotti ad applicare, oltre le operazioni fondamentali suaccennate, un altro tipo di operazione, già noto per pratica dalle Scuole inferiori, cioè la *estrazione di radice quadrata*, onde poi risulterà, che, quando si fissino a caso i valori interi o fratti dei coefficienti di un' equazione di 2° grado, in generale accade, che non esiste nessun numero intero o fratto, che la renda soddisfatta.

Per fissare l' attenzione su problemi semplici e ben noti, ricorriamo alla teoria delle proporzioni fra grandezze geometriche, che abbiamo studiato di recente. In questa teoria si presentano due problemi fondamentali:

1) *costruzione della quarta proporzionale* dopo tre grandezze date, per es. dopo tre segmenti;

2) *costruzione della media proporzionale* fra due grandezze date, per es. fra due segmenti.

Il primo, come già sappiamo (V_1, n. 2) è un problema di 1° grado. Se invero sono a, b, c le lunghezze (assolute e diverse da zero) dei tre segmenti dati, la lunghezza x del quarto proporzionale è definita dall' equazione

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x},$$

che, liberata dai denominatori, dà luogo all' equazione di 1° grado (normale)

$$ax=bc,$$

la quale, comunque siano stati prefissati i numeri interi o fratti a, b, c (per natura loro diversi da zero), ammette, come sua unica soluzione, il numero, pur esso intero o fratto,

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Consideriamo, invece, il secondo problema. La lunghezza x del medio proporzionale fra due segmenti a e b è definita dall' equazione

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b},$$

che, liberata dai denominatori, si trasforma nell' equazione di 2° grado, di tipo particolarmente semplice,

$$x^2=ab;$$

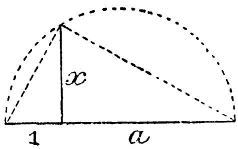
e possiamo anzi semplificarla ulteriormente, supponendo di voler trovare il medio proporzionale fra il segmento unità e quello di lunghezza (assoluta) a, talchè si sia condotti all' equazione

(1) $$x^2=a.$$

Ora si vede facilmente che, quando si fissi per a un valore intero o fratto, non esiste, per lo più, nessun valore intero o fratto, che renda soddisfatta l' equazione (1). Invero, si rifletta che, se una frazione numerica $\frac{p}{q}$ è irriducibile (cioè a termini primi fra loro), anche il suo quadrato $\frac{p^2}{q^2}$ è irriducibile (perchè i fattori primi di p^2 e q^2 sono quelli stessi di p e, rispettivamente, q, presi ciascuno due volte). Perciò la equazione (1) non può essere soddisfatta da un x intero, se non quando a sia il quadrato di un numero intero, cioè uno dei cosiddetti *quadrati perfetti* 1, 4, 9, 16,...; e non può essere soddisfatta da una frazione $\frac{p}{q}$, se non quando a sia una frazione, i cui due termini siano entrambi quadrati perfetti.

Esclusi questi due casi speciali, la (1) non ammette, nel campo dei numeri interi e fratti, nessuna soluzione.

Questo risultato sembra, a tutta prima, in contraddizione col fatto geometrico ben noto, che il problema, che ci ha condotti alla (1), ammette sempre una soluzione. Sappiamo infatti che il medio proporzionale fra due dati segmenti si può sempre costruire (con riga e compasso), per es. applicando la costruzione ricordata dall'annessa figura (1).



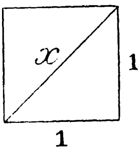
Ma, riflettendo meglio, si riconosce, che non vi è contraddizione alcuna. Infatti, nella misurazione delle grandezze geometriche si è visto che i numeri interi e fratti permettono di misurare soltanto le grandezze *commensurabili* con l'unità, e che per misurare anche quelle *incommensurabili,* bisogna estendere il campo dei numeri, introducendo, accanto ai numeri interi e fratti, che nel loro insieme si sono detti *razionali*, un nuovo tipo di numeri, che si sono chiamati *irrazionali.*

Ricordiamo anzi che l'esistenza di coppie di grandezze incommensurabili si è stabilita, indicando, come esempio tipico, il *lato* e la *diagonale*

---

(1) F. ENRIQUES - U. AMALDI, *Geometria elementare*, Geom. piana, Parte II; Bologna, Zanichelli; Cap. VI, n. 24.

di un quadrato; e la incommensurabilità di questi due segmenti si è dimostrata, osservando che la lunghezza della diagonale rispetto al lato non può essere un numero intero o fratto, in quanto deve, in forza del teorema di Pitagora, soddisfare appunto un'equazione del tipo (1), cioè la



$$x^2 = 2.$$

Orbene, faremo qui vedere che *ogni qual volta un'equazione del tipo* (1) *non ammette soluzioni nel campo dei numeri razionali* (cioè, come si è detto, interi o fratti), *è soddisfatta da un numero irrazionale* (il che geometricamente vuol dire che il medio proporzionale fra l'unità e il segmento di lunghezza a è, in tal caso, incommensurabile con l'unità).

Ma per ben chiarire questo risultato fondamentale e, al tempo stesso, per fissare in modo preciso le nozioni aritmetiche, che ci occorreranno nel seguito, è necessario che prima, in una digressione, richiamiamo per sommi capi in qual modo, nella misurazione delle grandezze geometriche, si sia condotti alla definizione dei numeri irrazionali e delle operazioni su di essi [1].

Numeri reali assoluti

2. Torniamo dunque alla misurazione delle grandezze geometriche, e, per semplicità, riferiamoci al caso dei segmenti. Avvertiamo una volta per tutte che qui, per la natura stessa della questione, intenderemo per il momento di parlare esclusivamente di numeri *assoluti.*

Fissato un segmento U come unità, ricordiamo che un segmento A si dice *commensurabile* con U, se esiste un qualche sottomultiplo $\frac{1}{q}U$ dell'unità U, il quale sia conte-

[1] F. Enriques - U. Amaldi, Ibidem, Cap. VIII.

nuto un numero esatto di volte p in A, talchè sia

$$A = p\left(\frac{1}{q}U\right),$$

o, come si suole scrivere,

$$A = \frac{p}{q}U. \tag{2}$$

In tal caso è appunto il numero razionale $\frac{p}{q}$, che si assume come *rapporto* $A:U$ di A ad U o *misura* di A rispetto all' unità U. Questo rapporto o misura $\frac{p}{q}$ individua esattamente il segmento A rispetto alla unità U, in forza della relazione (2); e va notato che ogni altro numero razionale $\frac{m}{n}$ risulta minore o maggiore di $\frac{p}{q}$, secondo che si ha

$$\frac{m}{n}U < A \quad \text{o, rispettivamente,} \quad \frac{m}{n}U > A.$$

Passiamo dopo ciò al caso, in cui A sia *incommensurabile* con U, cioè non contenga un numero esatto di volte nessun sottomultiplo di U. In questo caso non è più possibile individuare il rapporto $A:U$ per mezzo di un numero razionale, ma si arriva al medesimo risultato, ricorrendo ad un procedimento di *indefinita approssimazione*.

Preso un qualsiasi numero razionale $\frac{m}{n}$, il corrispondente segmento, commensurabile con l' unità, $\frac{m}{n}U$ è, in questo caso, necessariamente minore o maggiore di A; e si continua a dire che $\frac{m}{n}$ è minore o maggiore del rapporto $A:U$, secondo che è

$$\frac{m}{n}U < A \quad \text{oppure} \quad \frac{m}{n}U > A.$$

Più precisamente, se $\frac{m}{n}$ è tale, che risulti simultaneamente

$$\frac{m}{n} U < A < \frac{m+1}{n} U,$$

si dice che $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$ sono, per il rapporto $A:U$, i due *valori approssimati, a meno di* $\frac{1}{n}$, il primo *per difetto*, il secondo *per eccesso.*

E, incidentalmente, conviene osservare, che nulla di più occorre per la pratica. Infatti, in ogni applicazione concreta è perfettamente inutile considerare per le grandezze, di cui si tratta, i sottomultipli al disotto di un certo grado di piccolezza, perchè già i nostri sensi e gli stessi strumenti di misura, di cui ci serviamo, non ci permettono di valutarli; e, caso per caso, si può senza danno fermarsi ad una conveniente approssimazione.

Volendo, anche in questo caso della incommensurabilità, determinare esattamente il rapporto $A:U$, bisogna profittare della possibilità di spingere la valutazione approssimata di tale rapporto quanto avanti si vuole, e tenere conto insieme di tutti gli infiniti suoi lavori approssimati (per difetto e per eccesso). Precisamente si pensi ripartito il campo di *tutti* i numeri razionali assoluti (*escluso lo* 0) in due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, assegnando alla classe $\boldsymbol{H}$ tutti i numeri razionali minori di $A:U$ (valori approssimati per difetto), alla classe $\boldsymbol{K}$ tutti i numeri razionali maggiori (valori approssimati per eccesso). Si viene così a determinare nel campo dei numeri razionali la cosiddetta *sezione* $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, corrispondente al rapporto $A:U$, la quale è perfettamente analoga a quella, che, nel caso di due grandezze commensurabili di rapporto $\frac{p}{q}$, si otterrebbe, assegnando ad una classe $\boldsymbol{H}$ tutti i numeri razionali minori di $\frac{p}{q}$, alla classe $\boldsymbol{K}$ tutti i numeri maggiori. La sola differenza sta nel fatto, che, mentre nel caso di A incommensurabile con U le due classi contengono *tutti*, senza eccezione, i numeri razionali, nel caso di A commensurabile con U ne resta escluso *uno* (ed uno solo), precisamente il numero $\frac{p}{q}$, che dà il rapporto delle due grandezze. Se i numeri razionali si pensano ordinati nel loro ordine crescente, si può dire che in entrambi i casi le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, andando, per così dire, l'una verso l'altra, individuano il posto occupato, in codesto insieme ordinato di numeri, dal rapporto $A:U$. Se A ed U sono commensurabili, un tale posto è precisamente quello del valore razionale del rispettivo rapporto; se, invece, A ed U sono incommensurabili, al loro rapporto $A:U$ corrisponde, nell'insieme ordinato dei numeri razionali, una lacuna; ed è a questa lacuna, che si fa corrispondere, per definizione, uno di quei numeri di nuova specie che si chiamano *irrazionali* (assoluti).

Così, ricorrendo alle corrispondenti sezioni, si definiscono nello stesso modo tanto i numeri razionali, quanto quelli irrazionali, i primi come rapporti di grandezze commensurabili, i secondi come rapporti di grandezze incommensurabili.

Gli uni e gli altri, nel loro insieme, costituiscono il campo dei *numeri reali* (assoluti).

3. Questa definizione dei numeri irrazionali, per mezzo delle corrispondenti sezioni, è suggerita dalla considerazione *geometrica* dei rapporti delle grandezze. Ma importa rilevare che ad essa si può dare anche una forma puramente *aritmetica* e, perciò, più adatta allo studio dell'Algebra.

A tal fine si osservi anzitutto che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, costituenti la sezione $(\boldsymbol{H}|\boldsymbol{K})$, che definisce un numero reale (cioè, come or ora si è detto, razionale o irrazionale), godono delle seguenti tre proprietà:

1) *Ogni numero razionale* (assoluto e diverso da 0), ***eccettuato al più uno***, *appartiene ad una (e ad una sola) delle due classi.*

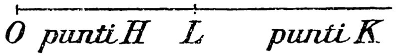
2) *La classe* ***H*** *contiene, con ogni suo numero, anche tutti i numeri razionali minori; e la classe* ***K*** *contiene, con ogni suo numero, anche tutti i numeri razionali maggiori.*

3) *La classe* ***H*** *non contiene un* massimo *(cioè un numero maggiore di tutti gli altri), nè la classe* ***K*** *contiene un* minimo *(cioè un numero minore di tutti gli altri).*

Orbene, si dimostra che, viceversa, comunque si riesca a ripartire il campo dei numeri razionali assoluti (escluso lo 0) in due classi ***H*** e ***K***, le quali godano delle proprietà 1), 2), 3), queste due classi costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, corrispondente ad un determinato numero reale; cioè esiste sempre un numero reale (ed uno solo), che è maggiore di tutti i numeri della classe ***H*** e minore di tutti i numeri della classe ***K***.

Infatti, si distinguano due casi, secondo che le due classi lasciano fuori un numero razionale (e per la prima proprietà non può essere che uno solo), oppure li comprendono tutti. Nel primo caso l'unico numero razionale escluso deve essere, in forza della proprietà 2), necessariamente maggiore di tutti i numeri di ***H***, minore di tutti i numeri di ***K***, cosicchè le due classi costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, corrispondente a codesto numero razionale. Se poi le due classi ***H*** e ***K*** comprendono tutti i numeri razionali, basta tener conto della *continuità* delle grandezze per dedurne che esiste sempre un segmento A (ed uno solo), necessariamente incommensurabile con l'unità U, il quale ammette, rispetto ad U, un rapporto $A:U$, maggiore di tutti i numeri di ***H***, minore di tutti i numeri di ***K***; cioè le due classi date costituiscono la sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, corrispondente al rapporto irrazionale $A:U$.

Invero, su di una semiretta, a partire dalla sua origine O, immaginiamo portati tutti i segmenti, commensurabili con l'unità, che hanno per misure i numeri (razionali) della classe ***H***, e chiamiamo « punti H » gli estremi dei segmenti così ottenuti; similmente, immaginando portati sulla semiretta, tutti a partire da O, i segmenti, pur essi commensurabili con l'unità, che hanno per misure i numeri (razionali) della classe ***K***, chiamiamo « punti K » i loro estremi. Poichè ogni numero di ***H*** è minore di ogni numero di K, ogni punto H precede sulla semiretta (nel verso a partire da O) ogni punto K, talchè, per il postulato della continuità della retta (1), esiste certamente un punto L di separazione fra i punti H e i punti K. E questo punto di separazione è necessariamente *unico*.



Si provi, infatti, ad ammettere che esista un altro punto L', pur esso compreso fra i punti H da una parte e i punti K dall'altra e, per fissare le idee, si supponga $OL' > OL$. Preso del segmento unità U un sottomultiplo $\frac{1}{n}U$ minore di LL', si consideri fra i successivi suoi multipli

$$\frac{1}{n}U \quad \frac{2}{n}U \quad \frac{3}{n}U \quad \frac{4}{n}U \ldots.$$

il *primo*, che risulti maggiore di OL e sia $\frac{m}{n}U$. Non può essere allora $\frac{m}{n}U > OL'$, perchè, essendosi preso $\frac{1}{n}U < LL'$, se ne dedurrebbe, sottraendo membro a membro, $\frac{m-1}{n}U > OL$, contro l'ipotesi che $\frac{m}{n}U$ sia il primo multiplo di $\frac{1}{n}U$ maggiore di OL. Sarà dunque $OL < \frac{m}{n}U < OL'$, sicchè il numero razionale $\frac{m}{n}$ risulterà maggiore di tutti i numeri di H, minore di tutti i numeri di K; ma ciò è assurdo, perchè, per ipotesi, nessun numero razionale resta escluso dalle due classi.

Accertata così l'unicità del punto L di separazione dei punti H dai punti K, si riconosce subito che il segmento OL è il segmento A cercato, in quanto, essendo OL maggiore di tutti i segmenti OH, minore di tutti i segmenti OK, il rapporto $OL : U$ è maggiore di tutti i numeri di H, minore di tutti i numeri di K; e questo segmento OL è necessariamente incommensurabile con U, perchè in caso contrario la sua misura darebbe un numero razionale maggiore di tutti i numeri di H e minore di tutti i numeri di K, contro l'ipotesi.

Concludiamo, dunque, che *non solo ogni numero reale definisce nell' insieme dei numeri razionali una sezione* (le cui due classi sono costituite da tutti i numeri razionali rispettivamente minori e maggiori del numero considerato),

(1) F. Enriques-U. Amaldi, *Geometria elementare*, Geom. piana, Parte II: Bologna, Zanichelli: Cap. VII, n. 1.

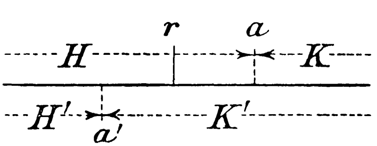
ma, viceversa, ogni sezione, comunque ottenuta, nell' insieme dei numeri razionali definisce un numero reale, come unico numero compreso fra i numeri razionali della classe minore e quelli della classe maggiore.

Per indicare che un numero reale a è definito dalla sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ si scrive

$$a = (\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K}).$$

4. Ogni numero irrazionale, per la sua stessa definizione (come elemento di separazione fra le due classi della corrispondente sezione) occupa un posto ben determinato nell' ordine crescente dei numeri razionali, cosicchè resta senz' altro stabilito un *ordine crescente di tutti i numeri reali assoluti.*

Di qui e dalle note proprietà della disuguaglianza fra numeri razionali seguono immediatamente i criterî di disuguaglianza fra numeri reali, in particolare fra numeri irrazionali. Dati due numeri reali a ed a', il primo è *maggiore* del secondo $(a > a')$, e quindi il secondo è *minore* del primo $(a' < a)$, quando esiste qualche numero razionale r, che sia al tempo stesso minore di a e maggiore di a'; cioè, ove si considerino le sezioni $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$, che definiscono, rispettivamente, a ed a', è $a > a'$, quando la classe $\boldsymbol{H}$ contiene qualche numero r, che appartiene anche a $\boldsymbol{K}'$; ed in tal caso esistono infiniti numeri razionali compresi tra a' ed a, cioè tutti i numeri di $\boldsymbol{K}'$ minori di r e tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$ maggiori di r.



Due numeri reali non possono essere *uguali,* se non quando nessuno dei due sia maggiore dell' altro; cioè, più precisamente, quando tutti i numeri razionali minori o maggiori dell' uno sono pur minori o, rispettivamente, maggiori dell' altro. In altre parole le sezioni corrispondenti ai due numeri debbono coincidere.

E da queste definizioni dell'uguaglianza e della disuguaglianza nel campo dei numeri reali discende senz'altro che si conservano valide per codeste relazioni le stesse proprietà formali, che valevano nel campo dei numeri razionali.

5. La definizione di un numero irrazionale a per mezzo della corrispondente sezione fa intervenire la totalità dei numeri razionali. Ma è manifesto che, per individuare il numero considerato, sono, per così dire, inutili i numeri troppo lontani, e bastano quelli prossimi ad esso.

Si può limitarsi a considerare, nella classe minore $\boldsymbol{H}$ della corrispondente sezione $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, soltanto i numeri maggiori di uno di essi preso ad arbitrio, per es. del valore approssimato (per difetto) di a a meno di 1 o di $\frac{1}{10}$ o di $\frac{1}{100}$, ecc.; e così, nella classe maggiore $\boldsymbol{K}$, si possono prendere soltanto i numeri minori di un analogo valore approssimato per eccesso. E non occorre nemmeno tener conto di tutti i numeri razionali, che così rimangono: basta estrarre dalla classe $\boldsymbol{H}$ o dalla $\boldsymbol{K}$, o da tutte e due, una successione di infiniti valori *progressivamente approssimati* ad a, o, come si suol dire, *tendenti* ad a.

Chiariremo queste osservazioni, mostrando che si può in tal modo ottenere per il numero irrazionale a una rappresentazione sotto *forma decimale*, analoga a quella consueta per i numeri razionali.

6. Cominciamo col ricordare dall'Aritmetica che una frazione $\frac{p}{q}$ si riduce in forma decimale, dividendo il numeratore per il denominatore con la regola ben nota per la divisione dei numeri interi, e che, se la frazione è stata ridotta ai minimi termini e, dopo ciò, il denominatore non ammette fattori primi diversi dal 2 e dal 5, l'operazione conduce ad un numero finito di cifre decimali, cioè la frazione è rappresentabile per mezzo di un *decimale limitato*: così

$$\frac{1}{2}=0,5 \qquad \frac{7}{5}=1,4 \qquad \frac{9}{4}=2,25 \qquad \frac{13}{20}=0,65 \text{ ecc.}$$

In ogni altro caso, cioè ogni qual volta nella frazione irriducibile $\frac{p}{q}$ il denominatore ammetta qualche fattore primo diverso dal 2 e dal 5, l'operazione non ha mai termine e si perviene successivamente ad infinite cifre decimali, le quali per altro si ripresentano, almeno da un certo posto in poi, *periodicamente*; cioè si è condotti ad un *decimale illimitato periodico* (con un eventuale *antiperiodo*): così

$$\frac{2}{3}=0,6666... \quad \frac{1}{7}=0,142857142857... \quad \frac{49}{15}=3,2666...$$

Si sa ancora dall'Aritmetica che, viceversa, ogni possibile decimale illimitato periodico si può ottenere scrivendo in forma decimale una determinata frazione (*generatrice* del decimale periodico): così [1]

$$0,6363...=\frac{63}{99}=\frac{7}{11}, \quad 0,8333...=\frac{83-8}{90}=\frac{5}{6},$$

$$3,7333...=\frac{373-37}{90}=\frac{56}{15}, \text{ ecc.}$$

---

[1] Le regole per trovare le *frazioni generatrici* dei decimali illimitati periodici sono le seguenti:

1) La generatrice di un decimale periodico *semplice* (cioè privo di antiperiodo) ha per denominatore l'intero formato da tante cifre 9, quante sono le cifre del periodo; e il numeratore si ottiene, sottraendo la eventuale parte intera dall'intero formato da questa eventuale parte intera, seguita dal periodo.

2) La generatrice di un decimale periodico *misto* (cioè dotato di antiperiodo) ha per denominatore l'intero formato da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo, seguite da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo; il numeratore si ottiene, sottraendo la eventuale parte

Orbene, prima di proceder oltre, importa aver ben chiaro il significato di questa rappresentazione dei numeri razionali sotto forma di decimali illimitati. Ad es., per la frazione $\frac{2}{3}$ la scrittura

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$$

significa precisamente che $\frac{2}{3}$ ammette come *valori approssimati per difetto*, rispettivamente a meno di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{10^2}$, di $\frac{1}{10^3}$, ecc., i numeri della successione

(3) $\qquad 0{,}6 \qquad 0{,}66 \qquad 0{,}666\ \ldots$

e come *valori approssimati per eccesso* corrispondenti i numeri della successione

(4) $\qquad 0{,}7 \qquad 0{,}67 \qquad 0{,}667\ldots$

Si ha dunque, che i numeri di ciascuna di queste due successioni si *approssimano indefinitamente* a $\frac{2}{3}$ fino a differirne di quanto poco si vuole, e ciò si suole esprimere anche dicendo che le due successioni *tendono* (la prima crescendo, la seconda descrescendo) *al limite* $\frac{2}{3}$. Va rilevato che una qualsiasi di codeste due successioni, per es. la (3), basta da sola per individuare il numero $\frac{2}{3}$, giacchè da essa si può subito dedurre la (4) (aumentando di 1 in ciascun suo nu-

---

intera, seguita dall'antiperiodo, dall'intero formato da codesta eventuale parte intera, seguita dall'antiperiodo e dal periodo.

Dai decimali illimitati periodici si possono escludere quelli di periodo 9, perchè ciascuno di essi è sostituibile con un decimale limitato. Per es.,

$$0{,}999\ldots = 1; \quad 0{,}35999\ldots = 0{,}36; \quad 7{,}15999\ldots = 7{,}16; \text{ ecc.}$$

mero l'ultima cifra) e $\frac{2}{3}$ è l'*unico* numero reale, che sia maggiore di tutti i numeri della (3), minore di tutti quelli della (4).

Se infatti esistesse un altro numero reale a, avente questa stessa proprietà, e non fosse già razionale, esisterebbe anche (n. 4) qualche numero razionale r, compreso fra $\frac{2}{3}$ ed a e quindi anch'esso maggiore di tutti i numeri (3), minore di tutti i (4), sicchè la differenza fra un qualsiasi numero (3) e un qualsiasi numero (4) dovrebbe risultare maggiore di quella fra $\frac{2}{3}$ ed r, mentre le differenze fra i numeri (3) e (4) di ugual posto sono successivamente

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{10^2} \quad \frac{1}{10^3} \quad \frac{1}{10^4} \cdots,$$

cioè finiscono col diventare piccole quanto si vuole e, in particolare, minori della supposta differenza fra $\frac{2}{3}$ ed r.

7. Dopo questi richiami, si perviene agevolmente alla rappresentazione in forma decimale di un qualsiasi numero irrazionale

$$a = (\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K}).$$

A tal fine si cominci col prendere il massimo intero contenuto in $\boldsymbol{H}$ (o lo zero, se questa classe non contiene nessun numero intero). Se così si trova, ad es., il 2, vuol dire che il 3 è in $\boldsymbol{K}$, cioè a è compreso fra 2 e 3; e 2 è la *parte intera* (o valore approssimato per difetto, a meno di 1) di a. Poi dei numeri

$$2, \qquad 2{,}1 \qquad 2{,}2 \qquad 2{,}3 \; . \; . \; . \; 2{,}9$$

si prenda l'ultimo, che appartiene ad $\boldsymbol{H}$. Se esso è 2,7, il consecutivo, cioè 2,8 si trova in $\boldsymbol{K}$, e 2,7 è il valore approssimato per difetto di a a meno di 0,1, mentre 2,8 è il corrispondente valore approssimato per eccesso.

Similmente si troveranno due analoghi valori approssimati a meno di 0,01, per es. 2,71 e 2,72; due valori approssimati a meno di 0,001, per es. 2,718 e 2,719; e così via.

Il procedimento non avrà mai termine, perchè ogni numero razionale è necessariamente minore o maggiore di a, per ipotesi irrazionale; cosicchè si sarà condotti a due successioni di infiniti decimali ciascuna

$$(5)\qquad 2 \quad 2{,}7 \quad 2{,}71 \quad 2{,}718 \;.\;.\;.\;,$$

$$(6)\qquad 3 \quad 2{,}8 \quad 2{,}72 \quad 2{,}719 \;.\;.\;.\;,$$

nella prima delle quali si hanno i valori approssimati di a per difetto, a meno di 1, di 0,1, di 0,01, di 0,001,... e nella seconda i corrispondenti valori approssimati per eccesso. Come nel caso dei numeri razionali (n. prec.), queste due successioni tendono entrambe al numero irrazionale a; e basta una di esse, per es. la prima, per individuarlo, in quanto (come si riconosce con lo stesso ragionamento di pocanzi) a è l'unico numero reale maggiore di tutti i numeri della (5), minore di tutti i numeri della (6). Perciò, come nel caso dei numeri razionali, si scrive

$$a = 2{,}718\ldots,$$

dove a secondo membro i puntini stanno ad indicare le infinite cifre decimali, che si otterrebbero, continuando indefinitamente il procedimento dianzi indicato.

Ma in questo caso si presenta una osservazione essenziale. *Le infinite cifre decimali, che successivamente si ottengono per un qualsiasi numero irrazionale* a, *non possono mai presentarsi periodicamente.* Se, invero, così accadesse. e si avesse, ad es.,

$$a = 2{,}718718718\ldots,$$

cioè si presentasse il periodo 718, l'unico numero maggiore di tutti i numeri della successione (5), minore di tutti quelli della (6) sarebbe, non già il numero irrazionale a, bensì il numero razionale (*frazione generatrice* del decimale periodico)

$$\frac{2718-2}{999} = \frac{2716}{999}.$$

Abbiamo dunque, che ogni numero irrazionale si può rappresentare sotto forma di un *decimale illimitato non periodico.*

Viceversa, se si prefissa ad arbitrio un decimale illimitato non periodico, quale ad es.

(7) $$3{,}121122111222...,$$

si riconosce agevolmente che esso rappresenta, nel senso or ora chiarito, un ben determinato numero irrazionale. Infatti, si assegnino ad una classe H tutti i numeri razionali

(8) $$3 \qquad 3{,}1 \qquad 3{,}12 \qquad 3{,}121 \qquad 3{,}1211 \; . \; . \; .$$

(ottenuti da (5), prendendo successivamente la parte intera o una, o due, o tre,... cifre decimali) e, con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali minori; si assegnino invece ad una classe K i numeri razionali

(9) $$4 \qquad 3{,}2 \qquad 3{,}13 \qquad 3{,}122 \qquad 3{,}1212 \; . \; . \; .$$

(ottenuti dai (6), aumentandone di 1 l'ultima cifra) e, con ciascuno di essi, tutti i numeri razionali maggiori. È facile convincersi che queste due classi costituiscono una sezione $(H \mid K)$, dalle cui classi non resta escluso nessun numero razionale.

Infatti la H, per la sua stessa definizione, contiene, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali minori, e così la K contiene, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali maggiori. In secondo luogo H non contiene un massimo, perchè ogni suo numero è minore o uguale ad uno dei numeri (8), i quali fanno tutti parte di essa e non ammettono massimo; e per analoga ragione la K non ammette minimo.

Infine dalle sue classi H e K non può restare escluso alcun numero razionale, giacchè un tale numero, in forza delle proprietà or ora riconosciute alle due classi, non potrebbe essere che maggiore di tutti i numeri di H e, simultaneamente, minore di tutti quelli di K, e quindi, scritto in forma decimale, dovrebbe dar luogo al decimale illimitato (7); e ciò è assurdo, in quanto si tratta di un decimale non periodico.

Questa sezione $(H \mid K)$ definisce dunque un numero irrazionale, al quale tendono entrambe le successioni (8), (9); e ciò vuol dire appunto che questo numero è rappresentato dal decimale illimitato (7).

Così, tenendo conto delle osservazioni precedenti e delle proprietà dei decimali periodici richiamate al n. prec., si conclude che: *Ogni numero reale è rappresentabile sotto forma di numero decimale* (limitato o illimitato e, in questo secondo caso, periodico o no); *e, viceversa, ogni numero decimale rappresenta un numero reale. Si tratta di un numero razionale, se il decimale è limitato oppure illimitato ma periodico; di un numero irrazionale se il decimale è illimitato e non periodico.*

Operazioni sui numeri reali assoluti

8. In Geometria si dimostra che la interpretazione dei numeri irrazionali assoluti come rapporti di grandezze incommensurabili conduce a definire *geometricamente* per codesti numeri le operazioni fondamentali di *addizione*, *moltiplicazione*, *sottrazione* e *divisione* [1], in pieno accordo col caso dei numeri razionali (rapporti di grandezze commensurabili). Ma queste stesse operazioni si possono definire anche *in modo puramente aritmetico*, partendo dalle sezioni corrispondenti ai numeri, su cui si vuole operare. Basta farsi guidare dalla analogia col caso dei numeri razionali, quando anche per questi si pensino le corrispondenti sezioni.

Per l'addizione, si osserva che se a ed a' sono due numeri razionali, la somma $a + a'$ è maggiore di tutte le somme che hanno per addendi due valori approssimati per difetto di a ed a', mentre è minore di tutte le analoghe somme di due valori approssimati per eccesso. Così, per definire la somma $a + a'$ di due numeri *reali* assoluti quali si vogliano, definiti alle sezioni $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $(\boldsymbol{H'} \mid \boldsymbol{K'})$ rispettivamente, si indichi con $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H'}$ la classe formata da tutti i

---

[1] F. Enriques-U. Amaldi, *Geometria elementare*, Geom. piana. Parte II; Bologna, Zanichelli: Cap. VIII, nn. 1-5.

numeri, che si ottengono sommando a ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ ciascun numero di $\boldsymbol{H}'$, e con $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$ la classe formata analogamente coi numeri di $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}'$. Queste due classi definiscono in ogni caso una sezione.

Basta dimostrare che queste due classi godono delle proprietà 1), 2), 3) del n. 3. Quanto alla 2), la $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$, insieme con ogni suo numero $h+h'$ (dove h, h' sono due numeri quali si vogliano di $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}'$ rispettivamente), contiene anche ogni numero razionale $b<h+h'$, perchè, se si pensa divisa la differenza (razionale) $h+h'-b$ in due parti (razionali) c, c', minori rispettivamente di h, h', dalla $c+c'=h+h'-b$ risulta $b=(h-c)+(h'-c')$, dove $h-c, h'-c'$ sono due numeri di $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}'$ rispettivamente. E in modo analogo si dimostra che la classe $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$ contiene, con ogni suo numero, anche ogni numero razionale minore. In secondo luogo la $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$ non può contenere un massimo, perchè ciò non avviene nè per la $\boldsymbol{H}$, nè per la $\boldsymbol{H}'$; e per analoga ragione la $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$ non contiene un minimo. Resta da far vedere che le due classi non possono lasciar fuori più di un numero razionale. A tal fine si osservi anzitutto che ogni eventuale numero razionale escluso da $\boldsymbol{H}$ ed $\boldsymbol{H}'$ non può, per le proprietà già stabilite, che essere simultaneamente maggiore di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$ e minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$. Proviamo allora a supporre che esistano due numeri razionali siffatti r ed r' e sia $r>r'$. Presa una frazione

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{4}(r-r'), \tag{10}$$

si possono considerare fra i successivi multipli di $\frac{1}{n}$ due coppie di multipli consecutivi, tali che risulti

$$\frac{m}{n}\leq a<\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'}{n}\leq a'<\frac{m'+1}{n}$$

(il segno $=$ potendo valere nella prima o seconda limitazione, solo se a o, rispettivamente, a' è razionale). In ogni caso sarà

$$\frac{m-1}{n}<a<\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n}<a'<\frac{m'+1}{n},$$

cioè i numeri $\frac{m-1}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'-1}{n}$, $\frac{m'+1}{n}$ apparterranno rispettivamente alle classi $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{K}'$, cosicchè i due numeri

$$\frac{m-1}{n}+\frac{m'-1}{n}=\frac{m+m'-2}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+\frac{m'+1}{n}=\frac{m+m'+2}{n}$$

saranno contenuti rispettivamente in $\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}'$ e dovranno perciò comprendere fra loro tanto r, quanto r'. Ma ciò è assurdo perchè la loro differenza

$$\frac{m+m'+2}{n} - \frac{m+m'-2}{n} = \frac{4}{n}$$

è, in forza della (10), minore di $r-r'$.

Dopo ciò, si definisce come *somma* $a+a'$ dei due numeri reali a ed a' il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}')$.

9. Similmente, per definire il prodotto aa' di due numeri reali assoluti quali si vogliano $a=(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $a'=(\boldsymbol{H}' \mid \boldsymbol{K}')$, si dimostra che in ogni caso risulta definita una sezione dalle due classi $\boldsymbol{HH}'$ e $\boldsymbol{KK}'$, di cui la prima è costituita da tutti i numeri, che si ottengono, moltiplicando ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascun numero di $\boldsymbol{H}'$, e la seconda è formata analogamente coi numeri di $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}'$. La dimostrazione è analoga a quella or ora data per il caso della somma e per essa rimandiamo al n. 46 degli Esercizî. Ora se a ed a' sono entrambi razionali, è manifesto che il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{HH}' \mid \boldsymbol{KK}')$ è il prodotto aa' di a per a'. In ogni altro caso, si assume, per definizione, come *prodotto* aa' dei due numeri reali assoluti a, a' il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{HH}' \mid \boldsymbol{KK}')$.

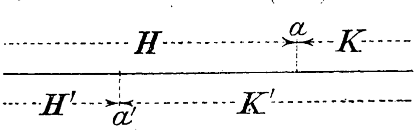
E questa definizione si completa, assumendo uguale a zero sia il prodotto di un qualsiasi numero reale per lo zero, sia il prodotto dello zero per un qualsiasi numero reale.

Dalle stesse definizioni dianzi stabilite risulta senz'altro che per l'addizione e la moltiplicazione, così estese al campo di tutti i numeri reali, assoluti, si mantengono valide tutte le proprietà formali, che per tali operazioni valgono nel campo dei numeri razionali (Introd., n. 3).

10. Dalla precedente definizione di prodotto segue, in particolare, la definizione delle successive *potenze* (ad esponente intero positivo od assoluto) di un qualsiasi numero reale $a=(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$. Per es. il quadrato a^2 corrisponde alla sezione $(\boldsymbol{H}^2 | \boldsymbol{K}^2)$, dove $\boldsymbol{H}^2$ denota quella classe, che contiene non soltanto i quadrati di tutti i numeri di $\boldsymbol{H}$, bensì anche tutti i prodotti, che si ottengono moltiplicando ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascuno degli altri numeri della stessa classe; e $\boldsymbol{K}^2$ ha un significato analogo.

11. Passiamo alle operazioni inverse sui numeri reali assoluti.

Qualche speciale avvertenza occorre per la *sottrazione*. Dati due numeri reali $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$, $a' = (\boldsymbol{H}' | \boldsymbol{K}')$, supponiamo $a > a'$. Ciò vuol dire (n. 4) che vi sono infiniti numeri razionali minori di a, cioè appartenenti alla classe $\boldsymbol{H}$, che sono maggiori di a', cioè appartengono alla classe $\boldsymbol{K}'$.



Si formi allora la classe $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, costituita da tutte le differenze, che si ottengono, sottraendo da ciascuno di quei numeri di $\boldsymbol{H}$, che appartengono anche a $\boldsymbol{K}'$, ciascuno dei numeri di $\boldsymbol{K}'$ minori di esso; e, d'altra parte, si formi la classe $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$, costituita da tutte le differenze, che si ottengono, sottraendo da ciascun numero di $\boldsymbol{K}$ ciascuno dei numeri di $\boldsymbol{H}'$ (i quali sono tutti minori). Le due classi $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}'$, così costruite, costituiscono (vedasi il n. 47 degli Esercizî) una sezione; e se il numero corrispondente a questa sezione $(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}' | \boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}')$ si somma, secondo il n. 6, al numero $a' = (\boldsymbol{H}' | \boldsymbol{K}')$, si ottiene precisamente (vedasi il n. 48 degli Esercizî) il numero $a = (\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$. Perciò, in ogni caso, il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{K}' | \boldsymbol{K} - \boldsymbol{H}')$ è la *differenza* $a - a'$ dei due numeri reali assoluti dati.

Infine, si dimostra (vedansi i nn. 49, 51 degli Esercizî) che, in ogni caso, risulta definita una sezione dalle due classi $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}'}$, $\dfrac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{H}'}$, dove $\dfrac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{K}'}$ denota la classe di tutti i quozienti, che si ottengono dividendo ciascun numero di $\boldsymbol{H}$ per ciascun numero di K', e la $\frac{K}{H'}$ è formata in modo analogo coi numeri delle classi K e H'. Di più si riconosce, che se il numero corrispondente alla sezione $\left(\frac{H}{K'}\middle|\frac{K}{H'}\right)$ si moltiplica, secondo il n. 6, per il numero $a' = (H' | K')$, si ottiene come prodotto (vedansi i nn. 50, 52 degli Esercizî) il numero $a' = (H | K)$.

Perciò, in ogni caso, la sezione $\left(\frac{H}{K'}\middle|\frac{K}{H'}\right)$ definisce il *quoziente* $\frac{a}{a'}$ dei due numeri reali dati.

12. Nella pratica i numeri reali non si individuano per mezzo delle corrispondenti sezioni, ma se ne considerano valori approssimati (con un grado di approssimazione conveniente alla natura della questione che si vuol trattare); e i calcoli si fanno su questi valori approssimati.

Le norme fondamentali, che si debbono osservare in questi calcoli sono suggerite dalle stesse definizioni, che ai nn. prec. si sono indicate per le operazioni sui numeri reali, quando si pensino individuati per mezzo delle corrispondenti sezioni.

Così dai nn. 8, 9 risulta che, per avere un *valore per difetto* (o *per eccesso*) della *somma* o del *prodotto* di due (o più) numeri, basta sommare o moltiplicare fra loro altrettanti valori *per difetto* (o, rispettivamente, *per eccesso*) degli addendi o dei fattori.

Invece dal n. prec. discende che per avere un valore *per difetto* della differenza $a - a'$ di due numeri, basta prendere un valore *per difetto* h del minuendo, il quale sia maggiore del sottraendo a', e poi sottrarre da esso un valore *per eccesso* k' del sottraendo, il quale sia minore di h; e per avere un valore *per eccesso* basta sottrarre da un valore *per eccesso* k del minuendo un valore *per difetto* h' del sottraendo.

Infine per avere un valore *per difetto* di un quoziente, basta dividere un valore *per difetto* del dividendo per un valore *per eccesso* del divisore, mentre per avere del quoziente un valore *per eccesso*, basta dividere un valore *per eccesso* del dividendo per un valore *per difetto* del divisore.

Naturalmente il grado di approssimazione del risultato di ciascuna di queste operazioni dipende dal grado di approssimazione, con cui si son presi i dati; e vi sono regole, che permettono di prevedere quale grado di approssimazione abbia il risultato, quando i dati hanno un certo numero di cifre decimali esatte, o, viceversa, quante cifre esatte occorra avere nei dati, perchè il risultato presenti un prefissato grado di approssimazione. Vedansi in proposito gli Esercizi.

Numeri reali relativi

13. Sinora si è parlato esclusivamente di numeri reali *assoluti*. Ma, per le medesime ragioni che, fin dall'inizio dello studio dell'Algebra, ci hanno condotti ad introdurre i numeri razionali relativi, si considerano, accanto a questi, i numeri *irrazionali relativi*, cioè contrassegnati col + o col —, o, come anche qui si suol dire, *positivi* e *negativi*. I numeri relativi razionali ed irrazionali costituiscono, insieme con lo 0, il cosiddetto *campo dei numeri reali relativi*.

Ogni numero reale *positivo* si può pensare definito per mezzo di una sezione nel campo dei soli numeri razionali *positivi* (si ricordi l'osservazione fatta, per i numeri reali assoluti, al principio del n. 5); e, così, ogni numero reale *negativo* per mezzo di una sezione nel campo dei numeri reali *negativi*.

A questa definizione per mezzo di sezioni nel campo dei soli numeri positivi o dei soli numeri negativi fa eccezione soltanto lo 0, che corrisponde alla sezione costituita dalla classe di tutti i numeri razionali negativi e da quella di tutti i razionali positivi.

Vale, naturalmente, per tutti i numeri reali relativi (cioè indifferentemente razionali o irrazionali) la rappresentazione geometrica per mezzo dei punti di una retta graduata, di cui sinora ci siamo sempre serviti limitatamente al caso di quelli razionali (Introd., n. 1). Ma qui va fatta una osservazione altrettanto ovvia, quanto importante. Ora che disponiamo di tutti i numeri razionali ed irrazionali, non solo ad ogni numero corrisponde sulla retta graduata un punto (ed uno solo), ma, viceversa, ad ogni punto, comunque preso sulla retta, corrisponde un numero (ed uno solo), mentre, quando si consideravano soltanto i numeri razionali, restavano esclusi quei punti, che dall'origine hanno una distanza incommensurabile con l'unità.

Questo fatto si esprime, dicendo che fra i numeri reali relativi e i punti di una retta graduata vi è una corrispondenza *biunivoca*, cioè univoca in entrambi i sensi (tanto fra numeri e punti, quanto fra punti e numeri).

14. Ai numeri reali relativi si estendono le note regole (Introd., n. 2) per le operazioni fondamentali (addizione algebrica, moltiplicazione, divisione), le quali, come ben sappiamo, all'infuori delle norme per i segni, si riducono ad operazioni sui valori assoluti dei numeri relativi, su cui si vuole operare.

E per queste operazioni sui numeri reali relativi si conservano valide tutte le *proprietà formali*, che sussistono nel campo dei numeri razionali relativi (Introd., n. 3) e che già estendemmo ai numeri reali assoluti (n. 9).

15. D'or innanzi, tutte le volte che parleremo di « numeri », senza aggiungere alcuna avvertenza in contrario, intenderemo di riferirci a numeri reali relativi. E potremo senz'altro applicare tutti i teoremi e i procedimenti di calcolo letterale, sinora appresi, in quanto essi discendono tutti, direttamente o indirettamente, dalle proprietà formali delle operazioni fondamentali, che, come si è notato or ora, si mantengono valide nel campo di tutti i numeri reali relativi.

Così, ad es., varranno nel campo dei numeri reali relativi le regole per il calcolo delle potenze ad esponente intero (positivo o negativo) e le proprietà fondamentali delle disuguaglianze (Introd., nn. 4, 5).

E seguiteranno a valere, senza eccezione, i principî generali sulle equazioni (Introd., nn. 25-32) e le regole per la risoluzione delle equazioni di 1° grado (Introd., n. 33) e dei corrispondenti sistemi (Introd., nn. 38-55), anche quando i coefficienti di queste equazioni e di questi sistemi siano numeri relativi quali si vogliano, anzichè soltanto razionali, come accadeva nel primo nostro studio di tali argomenti.

Estrazione di radice quadrata dei numeri reali assoluti

16. Torniamo, dopo la precedente digressione, alla equazione di 2° grado (n. 1)

$$x^2 = a, \tag{1}$$

e studiamola dapprima nel campo dei numeri reali assoluti, supponendo, naturalmente, che tale sia il numero a.

Ricordiamo che la (1) traduce in equazione il problema geometrico della costruzione del medio proporzionale fra l'unità e il segmento di lunghezza a (ed a sarà razionale o irrazionale, secondo che si tratta di un segmento commensurabile o incommensurabile con l'unità). Poichè sappiamo dalla Geometria che questo medio proporzionale si può sempre costruire, e risulta, in ogni caso, ben determinato, abbiamo senz'altro che la sua lunghezza fornisce una soluzione della (1) ed è anzi l'unica soluzione, che questa equazione possa ammettere nel campo dei numeri reali assoluti. Qui possiamo oramai aggiungere che, se a non è quadrato perfetto o quoziente di due quadrati perfetti (n. 1), quest'unica soluzione della (1) sarà un numero irrazionale.

In ogni caso, questo numero, che elevato a quadrato dà il numero a, si chiama (come già si è visto, per i numeri razionali, in Aritmetica) la *radice quadrata* (o *di indice* 2) di a, e si indica col simbolo $\sqrt{a}$, dove il segno $\sqrt{\ }$ non è che una deformazione tradizionale della iniziale della parola « radice ».

L'operazione, con cui si determina la radice di un numero, si dice « estrazione di radice », e codesto numero si chiama il « radicando ».

17. Dianzi ci siamo assicurati che un qualsiasi numero reale assoluto a ammette sempre una radice quadrata (ed una sola), servendoci della *interpretazione geometrica* della equazione (1). Ma, anche in vista di altre future estensioni, conviene far vedere come si possa prescindere da tale interpretazione geometrica, e dimostrare anche direttamente, in base alla sola *teoria aritmetica* dei numeri reali assoluti, l'*esistenza* (e la *unicità*) della radice quadrata (assoluta) di ogni numero reale (assoluto).

A tal fine ripartiamo il campo dei numeri razionali assoluti (escluso lo 0) in due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, assegnando alla prima tutti quei numeri, il cui quadrato sia minore di a, alla seconda tutti quelli, il cui quadrato sia, invece, maggiore di a.

Queste due classi definiscono una sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$.

Per dimostrarlo basta far vedere che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ godono delle proprietà 1), 2), 3) del n. 3.

1) Ogni numero razionale assoluto appartiene o ad $\boldsymbol{H}$ o a $\boldsymbol{K}$, salvo il caso che il suo quadrato, anzichè minore o maggiore di a, sia proprio uguale ad esso; ed in tal caso codesto numero razionale assoluto è il *solo*, che resti escluso dalle due classi.

2) Se h è un numero di $\boldsymbol{H}$, cioè se è $h^2 < a$, anche ogni altro numero razionale assoluto minore di h ha un quadrato minore di a (Introd., n. 5, F) e quindi appartiene ad $\boldsymbol{H}$. E, similmente, ogni numero maggiore di un numero di $\boldsymbol{K}$ appartiene anch'esso a $\boldsymbol{K}$.

3) La classe $\boldsymbol{H}$ non può contenere un massimo. Infatti, preso in $\boldsymbol{H}$ un qualsiasi numero h, è facile determinare un intero assoluto p abbastanza grande, perchè il numero razionale assoluto $h + \frac{1}{p}$, manifestamente maggiore di h, appartenga ancora ad $\boldsymbol{H}$. Basta che risulti

$$\left(h + \frac{1}{p}\right)^2 < a,$$

cioè

$$h^2 + \frac{2h}{p} + \frac{1}{p^2} < a \quad \text{ossia} \quad \frac{2h}{p} + \frac{1}{p^2} < a - h^2;$$

e, questa disuguaglianza è certamente verificata, (Introd., n. 5 C) se si sceglie l'intero assoluto p abbastanza grande, perchè si abbia simultaneamente

$$\frac{2h}{p} < \frac{1}{2}(a - h^2), \qquad \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}(a - h^2).$$

Dopo ciò, si riconosce facilmente che il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ è precisamente la radice quadrata di a, cioè ammette, come suo quadrato, il numero a.

Invero, se esso è un numero razionale $\frac{p}{q}$, questo numero $\frac{p}{q}$

è l'unico escluso dalle due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ (e, perciò, compreso fra l'una e l'altra), e il suo quadrato, per la definizione stessa delle due classi, non può essere che uguale ad a.

Se invece il numero corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H}|\boldsymbol{K})$ è irrazionale, il suo quadrato corrisponde (n. 10) alla sezione $(\boldsymbol{H}^2|\boldsymbol{K}^2)$, ed è facile convincersi che a questa sezione corrisponde precisamente a, cioè a è maggiore di tutti i numeri della $\boldsymbol{H}^2$, minore di tutti quelli della $\boldsymbol{K}^2$. Infatti ogni numero di $\boldsymbol{H}^2$ o è il quadrato di un numero h di $\boldsymbol{H}$, e allora, per la definizione stessa della $\boldsymbol{H}$, si ha $h^2 < a$; oppure è il prodotto di due numeri diversi h_1, h_2 di $\boldsymbol{H}$, e dalle disuguaglianze $h_1^2 < a$, $h_2^2 < a$ discende (Introd., n. 5 E; I, n. 15) $h_1^2 h_2^2 < a^2$ e, quindi (Introd., n. 5 F; I, n. 15) $h_1 h_2 < a$. E analogamente si dimostra che a è minore di tutti i numeri di $\boldsymbol{K}^2$.

Per concludere, non resta più che da osservare che ogni numero reale assoluto che sia minore o maggiore della $\sqrt{a}$, così trovata come corrispondente alla sezione $(\boldsymbol{H}|\boldsymbol{K})$, ha un quadrato rispettivamente maggiore o minore di a (Introd., n. 5, F; I, n. 15); cosicchè risulta effettivamente stabilito, per via puramente aritmetica, che *nel campo dei numeri reali assoluti ogni numero ha una radice quadrata ed una sola.*

A questo risultato non fa eccezione nemmeno lo zero, giacchè il solo numero a quadrato nullo è lo zero stesso, e si ha

$$\sqrt{0} = 0.$$

18. Se della radice quadrata di un numero reale assoluto a si vogliono la parte intera e le successive cifre decimali (n. 7), basta cercare, per tentativi, prima fra i numeri interi, poi fra i decimali con una sola cifra dopo la virgola, poi fra quelli con due cifre, ecc. due numeri consecutivi, i cui quadrati comprendano fra loro il numero a. Così nel caso di $\sqrt{2}$ si trova successivamente

$$1^2 < 2 < 2^2,\quad (1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2,\quad (1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2,\quad (1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2,$$
$$(1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2, \ldots$$

onde si conclude

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Similmente, nel caso di $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$0^2 < \frac{1}{2} < 1^2, \quad (0{,}7)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}8)^2, \quad (0{,}70)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}71)^2,$$

$$(0{,}707)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}708)^2, \quad (0{,}7071)^2 < \frac{1}{2} < (0{,}7072)^2, \ldots,$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 \ldots.$$

Questo procedimento si può applicare al calcolo di $\sqrt{a}$ anche quando di a si conosca soltanto un certo valore approssimato (e non si sappia nemmeno se a sia razionale o no). Ma in questo caso le cifre decimali di $\sqrt{a}$ si possono calcolare soltanto fino ad un certo posto dopo la virgola, il quale dipende dal numero delle cifre decimali che si conoscono per a. Per es. si consideri il rapporto π della lunghezza della circonferenza al diametro e si supponga di conoscerne soltanto le prime tre cifre decimali, cioè si prenda per π il valore approssimato per difetto (a meno di 0,001)

$$\pi = 3{,}141.$$

Si trova in tal caso

$$1^2 < 3{,}141 < 2^2, \quad (1{,}7)^2 < 3{,}141 < (1{,}8)^2, \quad (1{,}77)^2 < 3{,}141 < (1{,}78)^2,$$
$$(1{,}772)^2 < 3{,}141 < (1{,}773)^2;$$

ma a questo punto bisogna fermarsi, perchè aggiungendo una nuova cifra decimale si trova

$$(1{,}7723)^2 = 3{,}1410\ldots, \quad (1{,}7724)^2 = 3{,}1414\ldots,$$
$$(1{,}7725)^2 = 3{,}1419\ldots, \quad (1{,}7726)^2 = 3{,}1421\ldots;$$

e, finchè non si conosca una nuova cifra decimale di π, non si può decidere se la quarta cifra decimale di $\sqrt{\pi}$ sia 3 o 4 o 5. Se invece si tien conto anche della quarta cifra decimale, che, come si sa, è 5, si trova $\sqrt{\pi} = 1{,}7724\ldots$; e così in ogni altro caso analogo.

Ricordiamo che già nelle Scuole medie inferiori si sono imparate regole pratiche, che permettono di trovare più rapidamente i valori decimali approssimati di una qualsiasi radice quadrata (per la giustificazione di tali regole vedansi gli Esercizî); e ancora più spediti riusciranno questi calcoli, quando avremo appreso l'uso delle cosiddette *Tavole dei logaritmi* (Cap. VIII).

Qui aggiungiamo che si posseggono anche regole, che permettono di prevedere con quale grado di approssimazione si possa trovare la radice quadrata di un numero, di cui sia dato un certo numero di cifre decimali, e, viceversa, quante cifre decimali occorra conoscere del numero per trovare con un prefissato grado di approssimazione la sua radice quadrata (vedansi gli Esercizî).

Estrazione di radice quadrata dei numeri reali relativi

19. Consideriamo oramai l'equazione

$$x^2 = a \tag{1}$$

nel campo dei numeri reali *relativi*, cioè cerchiamo le radici quadrate di un qualsiasi numero reale relativo, e distinguiamo due casi, secondo che a è positivo o negativo.

A) Se a è positivo, è anzitutto manifesto che esso ammette come radice quadrata il numero positivo, che ha per valore assoluto la radice quadrata del valore assoluto di a (n. 17). Si dirà questa la radice quadrata *positiva* (od *aritmetica*) del numero positivo a, e si riserverà ad essa il simbolo $\sqrt{a}$. Ma è pur evidente che anche l'opposto $-\sqrt{a}$ del numero $\sqrt{a}$ dà una seconda radice di a, perchè

$$(-\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 = a.$$

Il numero $-\sqrt{a}$ si chiamerà la radice quadrata *negativa* di a; e, quando si vorranno indicare insieme queste due radici quadrate di a, si scriverà

$$\pm\sqrt{a}.$$

È facile assicurarsi, che il numero positivo a non ammette altre radici all'infuori di queste due. Infatti il quadrato di ogni numero diverso da $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$ ha un valore assoluto diverso da a (Introd., n. 5 *F*; I, n. 15).

B) Supponiamo invece che a sia negativo. In tal caso è chiaro che esso non ammette nessuna radice quadrata, perchè ogni numero reale relativo (sia esso positivo o negativo) ha sempre un quadrato positivo.

A questa impossibilità di trovare, nel campo dei numeri reali relativi, la radice quadrata di un numero negativo fa riscontro la impossibilità di risolvere ogni problema geometrico o fisico, che conduca alla ricerca di una tale radice, cioè si traduca in un' equazione del tipo (1) con $a < 0$. Ciò risulterà chiarito meglio in seguito; qui basterà, come esempio, considerare il problema di costruire un triangolo rettangolo, di cui a sia la lunghezza dell' ipotenusa, b quella di uno dei due cateti. La lunghezza dell' altro cateto è data, in forza del teorema di PITAGORA, da $\sqrt{a^2 - b^2}$. Ora questa estrazione di radice quadrata diventa impossibile quando sia $b > a$, corrispondentemente al fatto geometrico che non esiste nessun triangolo rettangolo, in cui un cateto sia maggiore dell' ipotenusa.

Bisogna per altro osservare che in ulteriori sviluppi dell'Algebra (equazioni di 3° grado) si è condotti ad espressioni implicanti estrazioni di radice quadrata di radicandi negativi, le quali tuttavia forniscono soluzioni effettive di problemi geometrici o fisici. Di qui ha avuto origine una ulteriore estensione del campo dei numeri, per cui i numeri reali relativi vengono a far parte del più ampio campo dei cosiddetti numeri *immaginarî* o *complessi*; e in questo nuovo campo ampliato di numeri l'operazione di estrazione di radice (di indice qualsiasi) diventa possibile senza eccezione. In particolare ogni numero negativo ammette sempre due radici quadrate immaginarie.

Questa ulteriore estensione del concetto di numero esce dal nostro programma. Tuttavia talvolta nel seguito, per semplice comodità di linguaggio, invece di dire che un numero negativo non ammette radici quadrate reali, diremo che « le sue radici quadrate sono immaginarie ».

20. Riassumendo la precedente discussione (e tenendo conto che anche nel campo dei numeri reali relativi lo zero non ammette nessun'altra radice quadrata oltre se stesso) abbiamo che: *Nel campo dei numeri reali relativi ogni numero positivo ammette due radici quadrate, fra loro opposte; lo zero ammette come radice quadrata soltanto se stesso; ed ogni numero negativo è privo di radice quadrata* (o, come anche diremo, ha soltanto radici quadrate immaginarie).

CAPITOLO II

Calcolo dei radicali quadratici

1. Alle operazioni di addizione algebrica, moltiplicazione e divisione, le quali, nel loro complesso, si sogliono chiamare operazioni *razionali*, perchè applicate a numeri razionali danno sempre, come risultati, numeri razionali, abbiamo aggiunto l'operazione di *estrazione di radice quadrata*.

Nella risoluzione dei problemi ci varremo oramai di tutte queste operazioni; e sarà comodo distinguere con nomi speciali le espressioni, in cui sulle lettere, che vi compaiono, sono indicate soltanto operazioni razionali, da quelle, in cui entra anche qualche *radicale quadratico*, cioè l'indicazione di qualche estrazione di radice quadrata, da eseguirsi su di una espressione letterale. Le prime si chiamano espressioni *razionali*, le seconde espressioni *irrazionali* (quadratiche). Le une e le altre si chiamano *intere*, se non vi è indicata nessuna divisione a divisore letterale; si chiamano invece *fratte* in caso contrario. Così, in particolare, espressione « razionale intera » sarà sinonimo di « polinomio »; espressione « razionale fratta » sarà sinonimo di « frazione algebrica » (o « somma di frazioni algebriche », sempre riducibile, come sappiamo, ad un'unica frazione algebrica).

Va notato che talvolta in un'espressione si è condotti a distinguere alcune delle lettere, che vi compaiono, dalle rimanenti; così nelle equazioni si distinguono le incognite x, y, ... dai dati a, b,... Un'espressione contenente le x, y,... si dice razionale o irrazionale, intera o fratta *rispetto alle* x, y, ..., secondo la natura delle operazioni che vi sono indicate *su queste lettere*, qualunque sia il modo, in cui vi compaiono le rimanenti a, b, ... Per es. l'espressione

$$\sqrt{a}\,x - \frac{a}{\sqrt{b}}$$

è razionale intera (di 1° grado) rispetto ad x (irrazionale intera rispetto ad a, irrazionale fratta rispetto a b).

2. Non bisogna dimenticare che nel campo dei numeri reali l'estrazione di radice quadrata ha senso soltanto quando il radicando *non è negativo*. Perciò, come in ogni espressione razionale fratta vanno esclusi per le lettere, che vi compaiono, quei valori, per cui si annulla qualche divisore, così una espressione contenente qualche radicale quadratico, avrà senso soltanto a patto, che si escludano per le lettere quei valori, per cui i corrispondenti radicandi risultano negativi.

Per es. l'espressione $\sqrt{3x-5}$ ha senso, purchè sia

$$3x - 5 \geq 0 \quad \text{ossia} \quad x \geq \frac{5}{3};$$

la $\sqrt{(x-1)(3-x)}$, purchè sia

$$1 \leq x \leq 3;$$

la $\sqrt{x^2 - a^2}$, purchè sia

$$|x| \geq |a| \quad \text{cioè} \quad -|a| \leq x \leq |a|,$$

dove, come già altra volta si è detto (Introd., n. 1), $|a|$ denota il valore assoluto di a.

Si noti che può anche accadere, che un radicale quadratico abbia senso per ogni possibile scelta delle lettere, che vi compaiono, in quanto il radicando non possa mai risultare negativo. Così accade, ad es., per $\sqrt{x^2 + a^2}$.

3. Come già nel caso delle radici quadrate dei numeri positivi, anche in quello dei radicali quadratici quali si vogliano, intenderemo che il segno $\sqrt{\ }$ sia riservato ad indicare, di una qualsiasi espressione letterale (supposta po-

sitiva), la radice quadrata *positiva*, e metteremo in evidenza, davanti al simbolo $\sqrt{}$, il segno $-$, quando vorremo indicare la radice quadrata *negativa*.

Inoltre, per semplicità di locuzione, quando nel seguito parleremo di « radice quadrata », senza nulla aggiungere in contrario, intenderemo riferirci alla radice quadrata positiva.

4. Per la trasformazione e la semplificazione delle espressioni irrazionali (quadratiche) conviene tener presente l'identità, valida per definizione (sotto la ipotesi $a \geq 0$),

$$(\pm \sqrt{a})^2 = a. \tag{1}$$

Inoltre tornano spesso utili queste altre due identità:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}, \tag{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \tag{3}$$

valide la prima sotto le condizioni $a \geq 0$, $b \geq 0$, la seconda sotto le condizioni $a \geq 0$, $b > 0$; e la prima si mantiene vera anche nel caso di un prodotto di quanti si vogliano fattori.

In parole: *A*) *La radice quadrata del prodotto di due o più fattori* (non negativi) *è uguale al prodotto delle radici quadrate dei fattori.*

B) *La radice quadrata di una frazione algebrica* (a denominatore positivo e numeratore non negativo) *è uguale al quoziente delle radici quadrate dei due termini.*

La dimostrazione è immediata. Per giustificare la (2) basta far vedere che il quadrato del secondo membro è uguale ad ab; ed invero, applicando una nota proprietà delle potenze (identità I del n. 3 dell'Introd.) e tenendo conto della (1), si trova

$$(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2\,(\sqrt{b})^2 = ab.$$

Analogamente si dimostra la (3).

5. Prima di indicare le più importanti applicazioni, che nel calcolo letterale trovano i due teoremi così stabiliti, conviene aggiungere una osservazione.

Talvolta si è condotti ad estrarre la radice quadrata del prodotto o del quoziente di due numeri (o di due espressioni) a, b, entrambi negativi. In tal caso le (2), (3) non valgono più, perchè $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ non hanno senso. Ma basta osservare che

$$ab = (-a)(-b), \quad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b},$$

per riconoscere che per $a < 0$, $b < 0$ sussistono, in luogo delle (2), (3), le identità

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\,\sqrt{-b}, \tag{2'}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}. \tag{3'}$$

Le (2) e (2′), come pure le (3) e (3′), si possono raccogliere in un'unica formula, scrivendo

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}, \tag{2''}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}. \tag{3''}$$

Ma di regola nel calcolo letterale si evita, per quanto è possibile, di introdurre il segno di valore assoluto, che complica le scritture e talvolta anche le ulteriori trasformazioni delle formule.

6. Torniamo ai teoremi del n. 4. La (2) trova un'immediata applicazione, quando un radicale quadratico ha come radicando il prodotto di un'espressione letterale per un coefficiente numerico, che sia un quadrato perfetto o il quoziente di due quadrati perfetti. Ad es.,

$$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}, \quad \sqrt{\frac{9}{25}a} = \frac{3}{5}\sqrt{a}.$$

E in questi casi si dice che « si porta fuori del radicale il coefficiente numerico ».

Se il coefficiente numerico del radicando non è nè quadrato perfetto, nè quoziente di due quadrati perfetti, si può portare fuori ogni suo divisore che sia tale. Così

$$\sqrt{12a} = 2\sqrt{3a}, \quad \sqrt{\frac{18}{5}a} = 3\sqrt{\frac{2}{5}a}.$$

E altre volte può tornar comodo eseguire l'operazione inversa, cioè «portare sotto il segno di radice» un coefficiente numerico esterno, naturalmente elevandolo al quadrato. Per es.,

$$3\sqrt{a} = \sqrt{9a}, \quad \frac{2}{3}\sqrt{a} = \sqrt{\frac{4}{9}a}.$$

7. Applicando la (2) ad una potenza (ad esponente intero positivo qualsiasi) a^n, si ha, purchè sia $a > 0$,

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n; \tag{4}$$

cioè, quando su di un numero o su di una espressione letterale qualsiasi (≥ 0) si devono successivamente eseguire un elevamento a potenza e la estrazione di radice quadrata, è indifferente l'ordine, in cui si eseguiscono le due operazioni.

L'espressione $(\sqrt{a})^n$ si può sempre semplificare.

Distinguiamo due casi, secondo che n è pari o dispari. cioè della forma $2m$ oppure della forma $2m+1$ (dove m denota un altro numero intero positivo).

Se è $n = 2m$ si ha (Introd., n. 4; I, n. 15)

$$(\sqrt{a})^{2m} = ((\sqrt{a})^2)^m = a^m.$$

Perciò, in forza della (4), si ha (qualunque sia m, purchè sia $a \geq 0$)

$$\sqrt{a^{2m}} = a^m. \tag{4'}$$

Se invece è $n = 2m + 1$, si ha

$$(\sqrt{a})^{2m+1} = (\sqrt{a})^{2m}\sqrt{a} = a^m\sqrt{a};$$

e, quindi, in forza della (4), (qualunque sia m, purchè sia $a > 0$)

$$(4'') \qquad \sqrt{a^{2m+1}} = a^m \sqrt{a}.$$

Notiamo che la (4') si mantiene valida anche per $a < 0$ purchè m sia pari, mentre se m è dispari va sostituita con la

$$\sqrt{a^{2m}} = -a^m.$$

La (4'') per $a < 0$ non ha mai senso.

8. Le osservazioni precedenti permettono di semplificare ogni radicale, che abbia come radicando un monomio. In ogni caso si può portar fuori del radicale ogni fattore (numerico o letterale), che compaia nel radicando al quadrato o ad una qualsiasi potenza di esponente pari. Solo bisogna badare, caso per caso, di portar fuori soltanto fattori, che non siano negativi e di lasciare, in ogni caso, sotto il segno di radice un radicando non negativo. Così, ad es., si ha

$$\sqrt{3a^4b^3c^5} = a^2bc^2\sqrt{3bc},$$

purchè sia $b \geq 0$, $c \geq 0$.

E la massima semplificazione si ha, quando il monomio radicando sia un « quadrato perfetto », cioè il quadrato di un altro monomio. Ricordando la regola per la moltiplicazione dei monomî (Introd., n. 6), si riconosce che, affinchè ciò accada, occorre e basta che il monomio dato abbia positivo il coefficiente numerico e sia di grado pari rispetto a ciascuna delle lettere, che vi compaiono. Così è quadrato perfetto $2a^4b^2c^6$, non invece $9a^2bc^4$, e nemmeno $-4a^4b^2c^6$. Per il primo di questi monomî si ha (purchè sia $bc \geq 0$)

$$\sqrt{2a^4b^2c^6} = \sqrt{2}a^2bc^3.$$

Notiamo, incidentalmente, che il criterio or ora dato per riconoscere i monomî quadrati perfetti torna talvolta utile per vedere se la differenza di due monomi si possa decomporre nel prodotto della somma per la differenza di due monomî, in base alla nota identità (Introd., n. 13)

$$(5) \qquad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Per es., si ha

$$3a^2b^6 - 4c^4d^2 = (\sqrt{3}ab^3 + 2c^2d)(\sqrt{3}ab^3 - 2c^2d).$$

9. Quando il radicando è un polinomio, il radicale quadratico non si può, in generale, semplificare.

Si può guardare, se, per caso, i varî termini del polinomio abbiano a fattor comune un monomio; e, se così accade, si raccoglie codesto monomio a fattor comune; e poi al prodotto così ottenuto si applica il teorema *A*) del n. 4. Per es.:

$$\sqrt{3a^2bc^3 - 2ab^3c^2 + a^3b^2c^4} = \sqrt{abc^2(3ac - 2b^2 + a^2bc^2)} =$$
$$= c\sqrt{ab}\,\sqrt{3ac - 2b^2 + a^2bc^2},$$

purchè sia $c \geq 0$, $ab \geq 0$.

Se una tale riduzione non è possibile (o se, essendo possibile, si è già eseguita), è sempre opportuno guardare, se il polinomio radicando sia un « quadrato perfetto », cioè il quadrato di un altro polinomio; e, naturalmente, a tale scopo giova tener presenti le formule (Introd., n. 13), che danno il quadrato di un binomio o trinomio, ecc.

10. Quando si incontra un'espressione fratta, il cui denominatore contenga qualche radicale quadratico, si cerca per lo più di rendere razionale codesto denominatore, cioè di far scomparire da esso i radicali.

Nel caso, che è il più semplice possibile, di un'espressione della forma

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$. Si ottiene così

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Per indicare un altro artificio che, in taluni casi, permette di rendere razionale il denominatore di un'espressione irrazionale fratta premettiamo l'osservazione che ogni differenza $a - b$, quando a e b si suppongano entrambi *positivi*, si può sempre decomporre nel prodotto di due fattori, in quanto, essendo $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$, si ha in forza della (5),

(6) $$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

Ciò premesso, si consideri un'espressione irrazionale fratta del tipo

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

dove A denota un'espressione letterale qualsiasi (e si suppone $a > 0$, $b > 0$, $a \gtrless b$). Moltiplicando ambo i termini di questa frazione per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ e tenendo conto della (6), si trova

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

Similmente

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Applicando successivamente due volte questo stesso artificio, si può trasformare in una frazione a denominatore razionale ogni espressione fratta della forma

$$\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.$$

11. Si dice *radicale quadratico doppio* ogni espressione della forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, dove A e B denotano due numeri o due espressioni razionali.

Sotto le condizioni $A>0$, $B>0$, $A^2>B$, valgono le due identità:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{7}$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \tag{8}$$

Esse si giustificano, verificando, per ciascuna, che i due membri (entrambi positivi per il loro stesso significato in forza della convenzione del n. 3) hanno quadrati uguali (Introd., n. 5 F; I, n. 15).

Queste identità, quando A^2-B sia un quadrato perfetto, permettono di trasformare un radicale quadratico doppio nella somma o nella differenza di due radicali quadratici semplici.

Per cominciare da un caso numerico, si consideri $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$. Qui si ha $A=3$, $B=5$, $A^2-B=4$, onde in forza delle (7), (8), risulta

$$\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{\sqrt{2}}.$$

Così in $\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}$ si ha $A=a$, $B=a^2-b^2$, $A^2-B=b^2$; e quindi

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Capitolo III

Equazioni di secondo grado

Formula risolutiva generale

1. Nel Cap. I abbiamo studiato e risolto, nel campo dei numeri reali relativi, le equazioni di 2° grado del tipo particolare

$$x^2 = a,$$

le quali, fra le equazioni di 2° grado in una incognita, si sogliono distinguere col nome di *pure*.

Ci proponiamo ora di far vedere che anche la risoluzione di ogni altra equazione di 2° grado in una sola incognita, quando sia possibile, si riduce a quella di un'equazione pura, cioè si effettua eseguendo, oltre alcune operazioni razionali (II, n. 1), una *estrazione di radice quadrata*. È questa la ragione, per cui nell'uso ogni soluzione di un'equazione di 2° grado si dice una sua *radice*; onde poi, per uniformità di linguaggio, lo stesso nome si estende a designare anche le soluzioni di ogni equazione algebrica di grado superiore.

Consideriamo, dunque, una qualsiasi equazione intera, in cui l'incognita x compaia al 2° grado. Quando tutti i termini si trasportino a primo membro e si eseguiscano tutte le possibili riduzioni di termini simili, restano, a primo membro, nel caso più generale, tre termini, fra loro irriducibili: uno in x^2, uno in x ed un termine indipendente dall'incognita; cioè l'equazione si può in ogni caso supporre ridotta alla forma, che diremo *normale*,

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

dove a, b, c rappresentano tre numeri (reali relativi) dati od anche tre date espressioni letterali quali si vogliano. Nel seguito, riferendoci a questa forma dell'equazione di 2° grado, diremo, per brevità, che a, b, c sono, rispettivamente il « primo », « secondo », « terzo coefficiente » dell'equazione, e, più particolarmente, designeremo c col nome di « termine noto ».

Possiamo senz'altro supporre che a non sia nullo, giacchè se fosse $a = 0$, l'equazione si ridurrebbe di 1° grado. Sotto l'ipotesi $a \gtrless 0$, l'equazione (1) è equivalente a quella che se ne deduce, dividendone ambo i membri per a (Introd., n. 29), cioè ad

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se, per semplicità, i due nuovi coefficienti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ si indicano con p, q rispettivamente, l'equazione generale di 2° grado diventa

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

2. I coefficienti p e q possono benissimo annullarsi, e si hanno così due casi particolari, in cui l'equazione si risolve immediatamente.

Se è $p = 0$, l'equazione si riduce alla equazione pura

$$x^2 + q = 0.$$

Trasportando il termine noto al secondo membro

$$x^2 = -q,$$

vediamo che se q è negativo (e quindi $-q$ positivo) l'equazione è soddisfatta dai due numeri, fra loro opposti,

$$\sqrt{-q} \quad \text{e} \quad -\sqrt{-q},$$

(e da nessun altro all'infuori di questi); e se q è anch'esso nullo, queste due soluzioni o radici si riducono entrambe a zero. Se poi q è positivo (e quindi $-q$ negativo), l'equazione

(I, n. 20) non ammette alcuna soluzione reale (ma, come si è detto, ha due radici immaginarie).

Quando, invece, sia nullo q senza che sia tale p, l'equazione (2) si riduce a

$$x^2 + px = 0,$$

e si può scrivere

$$x(x + p) = 0,$$

cosicchè si decompone (Introd., n. 29) nelle due equazioni di 1° grado

$$x = 0, \quad x + p = 0,$$

ed ammette perciò le due soluzioni, diverse o *distinte*, 0 e $-p$.

3. Esaminati questi casi particolari, torniamo all'equazione generale

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2}$$

Essa si risolve con un artificio, detto del *completamento del quadrato*, suggerito dalla formula che dà lo sviluppo del quadrato del binomio (Introd., n. 13).

Scritta la (2) sotto la forma

$$x^2 + px = -q,$$

osserviamo che il primo membro, in quanto si può scrivere

$$x^2 + 2x\frac{p}{2},$$

dà due termini dello sviluppo del quadrato del binomio $x + \frac{p}{2}$; cosicchè, aggiungendo ad ambo i membri il termine mancante $\frac{p^2}{4}$, otteniamo l'equazione, equivalente alla (2) (Introd., n. 25),

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

la quale si può addirittura scrivere

$$(3) \qquad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Ora il primo membro di quest' equazione, essendo un quadrato perfetto, risulterà, per qualsiasi valore di x, o positivo o nullo. Perciò l'equazione ammetterà soluzioni o radici reali soltanto quando sia positivo o nullo anche il secondo membro.

Se è

$$\frac{p^2}{4}-q>0,$$

risulta dalla (3) che $x+\frac{p}{2}$ deve essere uguale all'una o all'altra delle radici quadrate di codesto numero positivo, cioè deve essere o

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

oppure

$$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Otteniamo così per la nostra equazione le due soluzioni o radici *distinte*

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

che di solito si designano simultaneamente coll'unica formula

$$(4) \qquad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Se invece è

$$(5) \qquad \frac{p^2}{4}-q=0,$$

l'equazione (3) si riduce ad

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0,$$

cosicchè ammette come radice l'unica soluzione dell'equazione di 1° grado

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

cioè

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Ma poichè in quest'unico valore vengono a coincidere, quando si riduce a zero il binomio $\frac{p^2}{4} - q$, i due valori (4), da cui, quando codesto binomio è positivo, l'equazione (3) è soddisfatta, si suole dire che nel caso (5) qui considerato, l'equazione (3) ha *due* radici *coincidenti* nel valore $-\frac{p}{2}$, od anche la *radice doppia* $-\frac{p}{2}$.

Se infine è

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

l'equazione (3), come si è notato dapprincipio, è priva di radici reali (e ha, invece, due radici immaginarie).

Il binomio

$$\frac{p^2}{4} - q,$$

che col suo segno caratterizza i tre casi possibili per le radici ammesse dall'equazione di 2° grado (due radici reali distinte oppure due radici reali coincidenti oppure nessuna radice reale), dicesi *discriminante* dell'equazione (e talvolta anche del trinomio di 2° grado che ne costituisce il primo membro).

Possiamo quindi riassumere la precedente discussione nel seguente enunciato:

L'equazione di 2° grado

(2) $$x^2 + px + q = 0,$$

quando il discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q$$

è positivo, ammette le due radici (*reali*) *distinte*

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

quando il discriminante è nullo, ammette due radici (*reali*) *coincidenti* (o una *radice doppia*) *di valore*

$$-\frac{p}{2};$$

e quando il discriminante è negativo, non ammette alcuna radice reale.

La formula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{4}$$

che fornisce, quando esistono, le radici reali della (2), siano esse distinte o coincidenti, e che, come si verifica agevolmente, conduce anche nei casi particolari del n. prec. alle soluzioni là ottenute, si chiama la *formula risolutiva generale* della equazione (2).

La limitazione

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0,$$

che caratterizza i casi, in cui la (2) ammette radici reali, si chiama *condizione di realtà*, relativa alla equazione considerata.

La risoluzione della equazione di 2° grado per via geometrica (di cui daremo un cenno al n. 14 del prossimo Cap.) si fa risalire ai Pitagorici e si trova nel Libro VI (prop. 28, 29) degli *Elementi* di EUCLIDE (III sec. a. C.). Quanto al procedimento algebrico, con cui pocanzi siamo pervenuti alla formula risolutiva (4), sembra si debba ritenere che esso fosse già noto a Erone (fra il I e il III sec. d. C.) e a Diofanto (III sec.) e si trova esplicitamente sviluppato nelle opere dei matematici indiani Brahmagupta (VII sec.) e Bhascara (XII sec.).

4. Torna comodo possedere anche la formula risolutiva per l'equazione di 2° grado considerata nella sua forma primitiva

(1) $$ax^2 + bx + c = 0.$$

Una tal formula si potrebbe ottenere direttamente, con un artificio analogo a quello usato nel n. prec. per la (2) (completamento del quadrato); ma, più semplicemente, noi sostituiremo nella (4) a p, q i rispettivi valori $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$. Otteniamo così

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

ossia, riducendo allo stesso denominatore il radicando,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

o, infine (II, n. 5),

(5) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

È questa la formula risolutiva della (1).

Sotto la radice quadrata compare in essa il binomio

$$b^2 - 4ac,$$

cosicchè la (1) ammette due radici distinte o due radici coincidenti o nessuna radice (reale), secondo che codesto binomio è positivo o nullo o negativo; è se esso è nullo, il valore comune delle due radici è dato, come risulta dalla (5), da $\frac{-b}{2a}$.

Risulta dall'osservazione precedente che il segno del binomio $b^2 - 4ac$ deve, in ogni caso, coincidere con quello del discriminante

$$\frac{p^2}{4} - q;$$

ed invero, sostituendo a p, q rispettivamente $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ si trova

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

cioè il binomio $b^2 - 4ac$ differisce dal discriminante soltanto per il divisore positivo $4a^2$. Siccome, per distinguere i tre casi che si possono presentare per le radici di un'equazione di 2° grado, basta il segno del discriminante (e non interessa il valore assoluto), così quando l'equazione è della forma (1), si usa chiamare *discriminante* il binomio $b^2 - 4ac$, per quanto esso, come si è or ora verificato, coincida solo in segno, e non in valore assoluto, con l'espressione, cui al n. prec. si era attribuito un tal nome. E la condizione di realtà relativa alla (1) si può scrivere

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

La formula risolutiva (5) si semplifica, quando nell'equazione (1) il coefficiente della x ha in evidenza il fattore 2, come accade se i tre coefficienti sono interi e il secondo è pari. In tal caso l'equazione si può scrivere

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

e la formula risolutiva, come si verifica sostituendo nella (5) $2b$ a b, diventa

(6) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Qui, come discriminante, si suol prendere il binomio $b^2 - ac$, che si può chiamare « discriminante ridotto »; e la condizione di realtà si può scrivere

$$b^2 - ac \geq 0.$$

5. Quando è proposta un'equazione di 2° grado, conviene anzitutto riconoscere se essa ammetta radici reali guardando se sia soddisfatta la rispettiva condizione di realtà, per la quale si adotterà la forma

(7) $$b^2 - 4ac \geq 0 \quad \text{o} \quad \frac{p^2}{4} - q \geq 0,$$

secondo che nell'equazione il coefficiente del termine di 2° grado si è lasciato diverso da 1 o si è ridotto all'unità. E qui giova notare che si è senz'altro sicuri che codesta condizione è soddisfatta come disuguaglianza, e quindi l'equazione ammette radici reali distinte, se, nel primo caso, a e c sono di segno contrario, sicchè il prodotto ac risulti negativo, o se, nel secondo caso, q è negativo.

6. Consideriamo qualche esempio di equazioni di 2° grado a coefficienti numerici.

A) $x^2 + x - 6 = 0$.

Qui abbiamo $p = 1$, $q = -6$, e poichè quest'ultimo è negativo, l'equazione ammette certamente due radici reali distinte. Applicando la formula risolutiva (4), troviamo:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

cioè, distinguendo le due radici e indicandole con x_1, x_2 rispettivamente, $x_1 = 2$. $x_2 = -3$.

B) $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

In questo caso $a = 4$, $b = -6$, $c = 1$, cosicchè il discriminante $b^2 - 4ac$ ha il valore positivo 20, cosicchè anche qui si hanno due radici reali distinte. Applicando la formula risolutiva (5), si trova

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4};$$

cioè

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

Applicando la (6) si trova più rapidamente:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

C) $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0.$

In questo caso $a = 3$, $b = -4$, $c = \frac{4}{3}$, e, quindi,

$$b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

L'equazione ammette dunque due radici coincidenti, il cui valore comune (n. 4) è $\frac{2}{3}$.

D) $x^2 + x + 1 = 0.$

Essendo $p = 1$, $q = 1$, il discriminante è dato da

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4};$$

cosicchè l'equazione non ammette radici reali.

Somma e prodotto delle radici di un'equazione di 2° grado

7. Per lo studio delle equazioni di 2° grado sono particolarmente importanti due relazioni semplicissime, che intercedono fra i coefficienti e le radici.

Consideriamo l'equazione generale

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

e, supposto positivo o nullo il discriminante $b^2 - 4ac$, indichiamo con x_1, x_2 le due radici (distinte o coincidenti) dell'equazione, ponendo, per fissare le idee,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sommando membro a membro, otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

mentre, calcolando il prodotto delle due radici, e applicando la nota identità relativa al prodotto della somma per la differenza di due date espressioni (Introd., n. 13), troviamo

$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Abbiamo dunque:

(8) $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

ossia: *In un' equazione di 2° grado, a discriminante non negativo, la somma delle due radici è uguale al quoziente del secondo coefficiente per il primo, cambiato di segno; e il prodotto delle due radici è uguale al quoziente del termine noto per il primo coefficiente.*

Naturalmente, se si prende l' equazione sotto la forma

(2) $$x^2 + px + q = 0,$$

si ha

(8') $$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Se il discriminante è nullo, $-\frac{b}{a}$ o, rispettivamente, $-p$ dà il doppio del valore comune delle due radici coincidenti.

8. Le relazioni (8) o (8') fra le radici e i coefficienti della equazione di 2° grado permettono di prevedere dai segni dei coefficienti quelli delle radici.

Riferendoci alla equazione (2), supposta a discriminante positivo, avremo anzitutto che, essendo

$$x_1 x_2 = q,$$

le due radici (distinte) risulteranno di segno uguale o contrario, secondo che q è positivo o negativo.

Se è $q > 0$, le due radici, in quanto è

$$x_1 + x_2 = -p,$$

saranno entrambe positive o entrambe negative, secondo che p è negativo o positivo.

Quando invece è $q < 0$, e quindi le radici sono di segno contrario, la

$$x_1 + x_2 = -p$$

ci dice che avrà valore assoluto maggiore quella delle due radici, che ha segno contrario a p.

Abbiamo così la seguente tabelletta, in cui si è supposto di rappresentare con x_1 la radice *di valore assoluto maggiore:*

$$\frac{p^2}{4} - q > 0$$

p	q	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
—	—	+	—
+	—	—	+

Notiamo che in questi due ultimi casi, cioè quando è $q < 0$, la *radice positiva* è data, tanto per $p > 0$ quanto per $p < 0$, da

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

9. I risultati precedenti si enunciano rapidamente, introducendo due convenienti modi di dire. Dati, in un certo ordine, più numeri relativi, quali sono, ad es., i tre coefficienti di un' equazione di 2° grado in forma normale, si dice che essi presentano una *permanenza* (di segno) ogni volta che due numeri consecutivi hanno segni uguali, una *variazione* ogni volta che due numeri consecutivi sono invece di segno contrario. È manifesto che, se a tutti i numeri considerati si cambia segno, restano invariati sia il numero delle permanenze, sia quello delle variazioni, sia, infine l'ordine in cui si susseguono permanenze e variazioni.

Ciò premesso, consideriamo il numero delle permanenze e quello delle variazioni, presentate dai tre coefficienti di un'equazione di 2° grado in forma normale. Per l'osservazione fatta or ora, possiamo sempre supporre di avere ridotto il primo ad essere positivo o, addirittura, uguale ad 1, e di considerare l'equazione sotto la forma (2). Sotto questa ipotesi, le combinazioni di segno dei coefficienti, nei quattro casi elencati nella tabella del n. prec. sono ordinatamente

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & - & - \\ + & + & - \end{matrix}$$

Nel primo caso (due radici, entrambe negative) abbiamo due permanenze e nessuna variazione; nel secondo (due radici positive) abbiamo due variazioni e nessuna permanenza; nel terzo (due radici di segno contrario, delle quali è maggiore in valore assoluto quella positiva) abbiamo prima una variazione e poi una permanenza; infine nel quarto (due radici di segno contrario, delle quali è maggiore in valore assoluto quella negativa) abbiamo prima una permanenza e poi una variazione. Possiamo quindi enunciare la seguente REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO: *Un'equazione di 2° grado (normale), a discriminante positivo, ha tante radici positive quante sono le variazioni presentate dai suoi coefficienti; e, se le due radici sono di segno contrario, è maggiore in valore assoluto quella positiva quando la variazione precede la permanenza, quella negativa in caso contrario.*

10. Tenendo conto delle relazioni (8) od (8') fra le radici e i coefficienti, si può immediatamente *scrivere l'equazione di 2° grado, che ha per radici due numeri dati.* Basta prendere come primo coefficiente l'unità, come secondo la somma dei due numeri dati, cambiata di segno, e come termine noto il loro prodotto. Per es. l'equazione, che ha le radici $\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{3}$ è data da

$$x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{od anche} \quad 6x^2 + x - 2 = 0.$$

Nè è sostanzialmente diverso quest'altro problema: *Trovare due numeri, di cui si conoscano la somma e il prodotto.* Essi sono le radici dell'equazione di 2° grado, che ha come primo coefficiente l'unità, come secondo la somma data, cambiata di segno, e come termine noto il prodotto. Il problema ammette soluzione a patto che non risulti negativo il discriminante dell'equazione così ottenuta.

Decomposizione di un trinomio di 2° grado in fattori di 1° grado

11. Dalle relazioni fra coefficienti e radici (n. 7) discende un'altra notevole conseguenza. Tenendo conto delle (8), il trinomio di 2° grado $ax^2 + bx + c$, supposto a discriminante non negativo, si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - [x_1 + x_2]x + x_1x_2),$$

ossia

$$(10) \qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Cioè chiamando, per brevità, « radici di un trinomio di 2° grado » quelle dell'equazione, che si ottiene uguagliandolo a zero: *Un trinomio di 2° grado a discriminante non negativo è identico al prodotto*

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

del primo coefficiente per i due binomi di 1° grado, che si ottengono sottraendo dall'indeterminata rispettivamente le due radici.

In particolare, se il discriminante è nullo, si ha più precisamente, indicando con $x_{1,2}$ il valore comune delle due radici coincidenti,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_{1,2})^2. \tag{11}$$

Vediamo dunque che, come nel caso delle radici distinte, ciascuna di queste dà luogo, per il trinomio di 2° grado, ad un fattore di 1° grado, così, quando vi è un' unica radice $x_{1,2}$, il trinomio risulta divisibile per il quadrato del corrispondente binomio di 1° grado, onde resta giustificato il nome di *doppia*, che in tal caso abbiamo dato all' unica radice $x_{1,2}$ (n. 3).

Se poi il discriminante è negativo, il trinomio non è certamente decomponibile in fattori di 1° grado. Infatti, se così accadesse, ognuno di tali fattori, uguagliato a zero, darebbe un' equazione di 1° grado, la cui soluzione renderebbe soddisfatta anche l' equazione di 2° grado, ottenuta uguagliando a zero il trinomio, la quale, invece, non ha, in questo caso, nessuna radice.

Risulta così confermato, per i trinomî di 2° grado, il teorema generale, già noto (Introd., n. 19), che, affinchè un polinomio in una indeterminata x, sia divisibile per un binomio $x - c$, è necessario e sufficiente che esso si annulli per $x = c$.

Naturalmente, se il trinomio si prende sotto la forma $x^2 + px + q$, si ha

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \quad \text{o} \quad x^2 + px + q = (x - x_{1,2})^2$$

secondo che è $\frac{p^2}{4} - q > 0$ o $\frac{p^2}{4} - q = 0$; mentre nel caso $\frac{p^2}{4} - q < 0$ il trinomio non è decomponibile in fattori di 1° grado.

12. La possibilità di decomporre un trinomio di 2° grado in fattori di 1° grado conduce talvolta a semplificare le frazioni algebriche. Consideriamo, ad es., la frazione

$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Poichè uguagliando a zero il numeratore e il denominatore, si ottengono le due equazioni

$$5x^2 - 13x + 6 = 0, \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

di cui la prima ammette le radici 2 e $\frac{3}{5}$ e la seconda le radici 2 e $-\frac{1}{3}$, si hanno le due identità

$$5x^2 - 13x + 6 = 5(x-2)\left(x - \frac{3}{5}\right) = (x-2)(5x-3),$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x+1);$$

e quindi

$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{(x-2)(5x-3)}{(x-2)(3x+1)}.$$

Esclusi per la x i valori eccezionali 2 e $-\frac{1}{3}$, che annullano il denominatore, si ottiene, semplificando, la identità

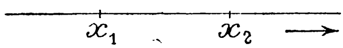
$$\frac{5x^2 - 13x + 6}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{5x-3}{3x+1}.$$

Disequazioni di 2° grado

13. I risultati ottenuti al n. 11 sulla decomponibilità di un trinomio di 2° grado in fattori di 1° permettono anche di studiare le *disequazioni* (intere) *di* 2° *grado* (Introd., n. 37).

A tale scopo supponiamo dato un qualsiasi trinomio $ax^2 + bx + c$ e immaginiamo che la indeterminata x assuma successivamente, in ordine crescente, tutti i possibili valori o, come si suol dire, *varî* da $-\infty$ a $+\infty$ (leggasi «da meno infinito a più infinito»). Corrispondentemente varia anche il valore del trinomio, e sappiamo che esso si annulla, al più, per due valori della indeterminata o *variabile* x (radici dell'equazione di 2° grado, che si ottiene uguagliandolo a zero). Ci proponiamo di riconoscere se per gli altri valori della x esso assuma valori positivi o negativi o di entrambi i segni.

Qui sarà utile ricorrere alla rappresentazione geometrica dei valori della indeterminata x per mezzo dei punti di una retta graduata (I, n. 13). Nella ipotesi che il trinomio abbia due radici reali x_1, x_2, e supposto, per fissare le idee, $x_1 < x_2$, segnamo sulla retta graduata i due punti x_1, x_2, cioè



i due punti, che corrispondono ai due valori x_1, x_2 della x. La retta graduata risulta così divisa in *tre* parti, di cui quella di mezzo (segmento) è *finita*, le altre due (semirette) sono invece *infinite*. Ciascuna di queste parti della retta graduata, come pure l'insieme dei valori della x che vi sono rappresentati, si chiamerà un *intervallo*. Quello di mezzo o finito si dirà « intervallo da x_1 a x_2 » o « intervallo di *estremi* x_1, x_2 »; e nel seguito gioverà spesso distinguere il caso, in cui nell'intervallo si includano i due estremi x_1, x_2, da quello, in cui, invece, questi due estremi si intendano esclusi dall'intervallo. Nel primo caso l'intervallo si denoterà con $x_1 \,|\!\overline{\quad}\!|\, x_2$, nel secondo con $x_1 \overline{\quad} x_2$: sicchè, in altre parole, con $x_1 \,|\!\overline{\quad}\!|\, x_2$ si indicherà l'insieme dei valori di x soddisfacenti la doppia limitazione $x_1 \leq x \leq x_2$, con $x_1 \overline{\quad} x_2$ l'insieme dei valori di x soddisfacenti la doppia disuguaglianza $x_1 < x < x_2$. Talvolta si sarà condotti anche ad includere nell'intervallo uno solo dei due estremi, e in questi casi l'intervallo si denoterà con $x_1 \,|\!\overline{\quad}\, x_2$ o con $x_1 \overline{\quad}\!|\, x_2$, secondo che l'unico estremo, che vi si intende incluso, è x_1 o x_2.

Similmente i due intervalli infiniti si diranno, rispettivamente « intervallo da $-\infty$ a x_1 » e « intervallo da x_2 a $+\infty$ ». Il primo si denoterà con $-\infty \overline{\quad}\!|\, x_1$ o con $-\infty \overline{\quad} x_1$, secondo che vi si intenderà incluso o no l'estremo x_1; e con analogo significato si useranno per l'altro intervallo infinito le designazioni $x_2 \,|\!\overline{\quad} +\infty$ e $x_2 \overline{\quad} +\infty$.

Dopo queste premesse, torniamo al trimonio $ax^2 + bx + c$ e distinguiamo tre casi, secondo che il rispettivo discriminante è positivo, nullo o negativo.

I. $b^2 - 4ac > 0$.

Il trinomio ha due radici distinte x_1, x_2 e sussiste l'identità

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{10}$$

Supposto come pocanzi $x_1 < x_2$, abbiamo che per ogni x dell'intervallo $x_2 \overline{\quad} + \infty$, cioè per ogni $x > x_2$, le differenze $x - x_1$, $x - x_2$, sono tutte e due positive, mentre per ogni x dell'intervallo $- \infty \overline{\quad} x_1$, cioè per ogni $x < x_1$, le stesse differenze sono tutte e due negative. In entrambi i casi il loro prodotto è positivo, e perciò il trinomio (10) assume un valore, il cui segno è quello stesso del suo primo coefficiente a. Se invece si prende per x un valore dell'intervallo $x_1 \overline{\quad} x_2$, la differenza $x - x_1$ risulta positiva e la $x - x_2$ negativa, cosicchè il valore corrispondentemente assunto dal trinomio (10) è di segno contrario ad a.

II. $b^2 - 4ac = 0$.

Indicato con $x_{1,2}$ il valore comune delle due radici coincidenti del trinomio, si ha l'identità

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_{1,2})^2; \tag{11}$$

e, poichè $(x - x_{1,2})^2$, per qualsiasi valore di $x \gtrless x_{1,2}$ risulta positivo, il corrispondente valore del trinomio ha sempre lo stesso segno di a.

III. $b^2 - 4ac < 0$.

In questo caso il trinomio non è decomponibile in fattori di 1° grado, ma, per ogni valore della x, il segno si può riconoscere direttamente. Si scriva invero

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right];$$

e al trinomio in parentesi quadra si applichi l'artificio del *completamento del quadrato* (n. 3); cioè, osservando che i primi due termini coincidono coi primi due termini del quadrato di $x + \frac{b}{2a}$, si aggiunga e si tolga in parentesi il termine mancante di codesto quadrato, cioè $\frac{b^2}{4a^2}$. Si ottiene così l'identità

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right],$$

ossia

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Dei due termini in parentesi quadra il primo, come quadrato di un binomio di 1° grado, non è mai negativo e si annulla soltanto per $x = -\frac{b}{2a}$, mentre il secondo non dipende da x ed, in forza dell'ipotesi $b^2 - 4ac < 0$, è sempre positivo. Perciò l'espressione in parentesi quadra è sempre positiva e il trinomio, per ogni possibile valore di x, ha costantemente il segno del suo primo coefficiente a.

Concludendo, possiamo enunciare il seguente teorema: *Un trinomio di 2° grado a discriminante positivo, per ogni valore della variabile esterno all'intervallo compreso fra le due radici, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente, mentre ha il segno contrario per ogni valore della variabile interno a codesto intervallo.*

Se il discriminante è nullo, il trinomio, per qualsiasi valore della variabile, diverso da quell'unico, per cui si annulla, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente.

Se, infine, il discriminante è negativo, il trinomio, per ogni possibile valore della variabile, senza eccezione, ha lo stesso segno del suo primo coefficiente.

14. Questo teorema permette di risolvere, in ogni caso, le disequazioni di 2° grado. Basterà considerare qualche esempio.

Sia data la disequazione

$$-10x^2 - x + 3 > 0.$$

Il trinomio a primo membro ha discriminante positivo e, poichè le sue radici sono $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{5}$, mentre il primo coefficiente è negativo, la disequazione è soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x, appartenenti all'intervallo $-\frac{3}{5} \vdash\!\dashv \frac{1}{2}$, cioè per $-\frac{3}{5} < x < \frac{1}{2}$.

Invece la disequazione opposta

$$-10x^2 - x + 3 < 0 \quad \text{ossia} \quad 10^2 + x - 3 > 0$$

è verificata da tutti gli x esterni all'intervallo $-\frac{3}{5} \vdash\!\dashv \frac{1}{2}$, cioè negli intervalli $-\infty \vdash\!\dashv -\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2} \vdash\!\dashv +\infty$.

Consideriamo, in secondo luogo, la disequazione

$$3x^2 + 4x + \frac{4}{3} > 0.$$

Qui il discriminante è nullo e il valore comune delle due radici coincidenti è $-\frac{2}{3}$, cosicchè, essendo positivo il primo coefficiente, la disequazione è soddisfatta da ogni possibile valore di x, diverso da $-\frac{2}{3}$; mentre la disequazione opposta

$$3x^2 + 4x + \frac{4}{3} < 0 \quad \text{ossia} \quad -3x^2 - 4x - \frac{4}{3} > 0$$

non è soddisfatta da alcun valore di x.

Prendiamo, infine, la disequazione

$$4x^2 - x + 10 > 0.$$

Poichè il discriminante è negativo e il primo coefficiente del trinomio a primo membro è positivo, essa è soddisfatta da ogni possibile valore di x, senza eccezione; e la disequazione opposta

$$4x^2 - x + 10 < 0 \quad \text{ossia} \quad -4x^2 + x - 10 > 0$$

non ammette soluzione alcuna.

15. Da quanto precede risulta che per ogni disequazione di 2° grado gli estremi degli intervalli (finiti o infiniti), in cui essa risulta soddisfatta, non sono altro che le radici della corrispondente equazione di 2° grado (cioè dell'equazione che dalla data disequazione si ottiene, sostituendo al segno $>$ o $<$ l'$=$).

E convien rilevare che un'osservazione analoga vale nel caso di una qualsiasi disequazione di 1° grado $ax > b$ con $a \gtrless 0$ (Introd., n. 37). Secondo che a è positivo o negativo, essa è soddisfatta da tutti, e soli, i valori di x appartenenti all'intervallo $\frac{b}{a} \text{—} +\infty$ o, rispettivamente, $-\infty \text{—} \frac{b}{a}$, dove $\frac{b}{a}$ è precisamente l'unica soluzione della corrispondente equazione $ax = b$.

Discussione delle equazioni di 2° grado dipendenti da un parametro

16. Torniamo alle equazioni di 2° grado. Quando si applica l'Algebra alla risoluzione dei problemi, si è spesso condotti, come vedremo nel prossimo Cap., ad equazioni di 2° grado, i cui coefficienti non sono numeri assegnati, ma *espressioni letterali*. Si può dire che in tal caso non si ha un'unica equazione, bensì tutta un'infinità di equazioni, cioè tante quante sono le equazioni distinte, che dalla data si ottengono, attribuendo alle singole lettere, che vi compaiono nei coefficienti, tutti i valori, di cui esse sono suscettibili, e che, beninteso, non rendano privo di senso alcun termine dell'equazione. Queste lettere, pensate come *inde-*

terminate, si chiamano i *parametri* dell'equazione proposta. Naturalmente questi parametri non vanno confusi con l'incognita: essi rappresentano sempre numeri, che si suppongono *dati*, e, caso per caso, si tratta di trovare quelle espressioni dell'incognita per mezzo dei parametri, che rendono soddisfatta l'equazione.

Consideriamo il caso, che più interessa per le future applicazioni, di un'equazione di 2° grado, dipendente da un solo parametro k, cioè di un'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{12}$$

dove i tre coefficienti a, b, c denotino tre date espressioni, contenenti la sola indeterminata k. Vogliamo renderci conto delle varie circostanze, che si presentano per le radici della equazione (12), a seconda dei valori che si attribuiscono al parametro k.

Supposto dapprima che la (12) sia effettivamente di 2° grado, cioè esclusi gli eventuali valori di k, che annullino il primo coefficiente a, dobbiamo studiare la corrispondente condizione di realtà

$$b^2 - 4ac \geq 0, \tag{13}$$

la quale, in quanto a, b, c sono espressioni contenenti il parametro k, è una certa limitazione nella indeterminata k. Se essa è di 1° o di 2° grado, sappiamo risolverla (Introd., n. 37; III, nn. 13-15); cioè, pensando rappresentati tutti i possibili valori di k su di una retta graduata e immaginando segnati su di essa i punti, che rappresentano le soluzioni o radici dell'equazione (di 1° o 2° grado) in k

$$b^2 - 4ac = 0, \tag{14}$$

sappiamo riconoscere entro quali intervalli debba restare il parametro k, affinchè la data equazione (12) abbia radici reali. Per i valori di k *interni* a codesti singoli intervalli la condizione di realtà è soddisfatta come disuguaglianza (n. 15), sicchè la (12) ammette *due radici reali distinte*; e basta guardare, caso per caso, quali siano i segni assunti, per tali valori di k, dalle espressioni a, b, c, per decidere, in base ai nn. 8, 9, quale sia il segno delle due radici della (12) (e quale delle due, nel caso dei segni contrari, abbia valore assoluto maggiore). Invece agli *estremi* degli intervalli suindicati è soddisfatta (n. prec.) la (14), talchè la (12) ha corrispondentemente *due radici reali coincidenti*, date dal valore che ivi assume l'espressione $-\frac{b}{2a}$ (n. 4).

Determinati gli intervalli, in cui deve restare il parametro k perchè sia soddisfatta la condizione di realtà (13), e quindi l'equazione abbia radici reali, conviene generalmente guardare se in codesti intervalli esista qualche valore particolare di k, per cui si annulli o il secondo coefficiente b o il termine noto c (n. 2). Per ogni k della prima specie la (12) si riduce ad un'equazione pura ed ha perciò due radici opposte; per ogni k della seconda specie essa ha, oltre una radice nulla, una radice uguale al valore, che l'espressione $-\frac{b}{a}$ assume per il k considerato.

Sin qui si è sempre supposto $a \gtrless 0$: restano quindi, infine, da considerare quegli eventuali valori di k, per cui, annullandosi a, l'equazione (12) si riduce di 1° grado.

L'esame ordinato e completo di queste varie circostanze costituisce la *discussione* della (12).

Risulta da quanto si è detto dianzi che a base di questa discussione sta la considerazione di quei *valori notevoli* del parametro k, che soddisfano le singole equazioni

$$b^2 - 4ac = 0, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

e che perciò taluno chiama i *caposaldi* della discussione.

Generalmente conviene calcolarli tutti sin dapprincipio e poi disporli in ordine crescente (in senso algebrico). Si divide così l'insieme di tutti i possibili valori di k da $-\infty$ a $+\infty$ (o, se si vuole, la retta graduata, su cui si rappresentano questi valori) in un certo numero d'intervalli, di cui il primo va da $-\infty$ al valore notevole di k più piccolo, l'ultimo dal valore notevole più grande a $+\infty$, mentre tutti gli altri sono finiti. E basta esaminare ordinatamente come si comportino, quanto al segno o al rispettivo annullarsi, le quattro espressioni b^2-4ac, a, b, c entro ciascuno di codesti intervalli e negli estremi, per poter rilevare tutte le particolarità volute.

17. Illustriamo le norme precedenti con due esempi.

A) Consideriamo l'equazione

$$(k-2)x^2-(2k+1)x+k+1=0. \tag{15}$$

Si ha in questo caso

$$a=k-2,\quad b=-(2k+1),\quad c=k+1,$$
$$b^2-4ac=(2k+1)^2-4(k-2)(k+1)=8k+9.$$

Di qui segue che:

secondo che è $k<,=,>-\frac{9}{8}$, risulta $b^2-4ac<,=,>0$,
» $k<,=,>2$ » $a<,=,>0$,
» $k<,=,>-\frac{1}{2}$, » $b>,=,<0$,
» $k<,=,>-1$ » $c<,=,>0$;

e i valori notevoli di k in ordine crescente sono: $-\frac{9}{8}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 2.

Perciò ragioniamo nei termini seguenti: per $k<-\frac{9}{8}$, essendo $b^2-4ac<0$, la (15) (che è sempre di 2° grado, in quanto k si mantiene costantemente diverso da zero) *non ha radici reali.*

Per $k=-\frac{9}{8}$, essendo $b^2-4ac=0$, si hanno *due radici reali coincidenti,* il cui valore comune, in quanto a e b si riducono rispettivamente a $-\frac{25}{8}$ e $\frac{5}{4}$, è dato da $-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}:\left(-\frac{25}{8}\right)=\frac{1}{5}$.

Per $k>-\frac{9}{8}$ il discriminante b^2-4ac si mantiene costantemente positivo, sicchè la (15) ha sempre *due radici reali distinte,* salvo che per $k=2$, dove, annullandosi a, essa si riduce di 1° grado. Più precisamente:

per $-\frac{9}{8}<k<-1$, in quanto a, b, c presentano la combinazione di segni $-+-$ (due variazioni), le due radici sono entrambe positive (n. 9);

per $k = -1$, annullandosi c, una delle due radici è nulla, mentre l'altra, in quanto a e b assumono, rispettivamente, i valori -3 e 1, vale $\frac{1}{3}$;

per $-1 < k < -\frac{1}{2}$, i segni di a, b, c sono $-++$ (una variazione, seguita da una permanenza), cosicchè le due radici presentano segni contrarî, essendo maggiore, in valore assoluto, quella positiva;

per $k = -\frac{1}{2}$ si annulla b, onde la (15) diventa un'equazione pura, e, poichè a e c assumono rispettivamente i valori $-\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}$, le due radici sono $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$;

per $-\frac{1}{2} < k < 2$ i coefficienti a, b, c presentano la combinazione di segni $--+$ (una permanenza seguita da una variazione) e quindi le due radici sono di segno contrario, essendo maggiore, in valore assoluto, quella negativa;

per $k = 2$, annullandosi a, la (15) si riduce di 1° grado; e, poichè b e c assumono rispettivamente i valori -5 e 3, è soddisfatta soltanto da $\frac{3}{5}$;

infine per $k > 2$, i segni di a, b, c sono $+-+$ (due variazioni), sicchè si torna ad avere due radici positive.

L'espressione generale delle due radici reali, valida per ogni $k \geq -\frac{9}{8}$, escluso $k = 2$, è data da

$$x = \frac{2k + 1 \pm \sqrt{8k + 9}}{2(k - 2)}.$$

In questo come in ogni altro caso, la discussione di un'equazione di 2° grado, dipendente da un parametro, si effettua più speditamente e ci si assicura meglio di non commettere omissioni, costruendo una tabella a sei colonne, nella prima delle quali si segnano, nel loro ordine da $-\infty$ a $+\infty$, gli intervalli determinati per il parametro dai diversi suoi valori notevoli (o caposaldi) e, fra ciascuno di questi intervalli e il successivo, il valore notevole che li separa. In ognuna delle quattro colonne seguenti, intestate rispettivamente alle espressioni $b^2 - 4ac$, a, b, c, si registrano, in corrispondenza di ogni intervallo e di ogni valore notevole di k, le particolarità di segno e di annullamento della rispettiva espressione. Infine nella sesta colonna si notano le diverse circostanze, che, corrispondentemente, si presentano per le radici reali (*r. r.*) della equazione.

Così, nel caso della equazione (15), si ha la seguente tabella:

k	$b^2 - 4ac$	a	b	c	*r. r.* dell'equaz.
$-\infty$ — $-\frac{9}{8}$	$-$				nessuna *r. r.*:
$-\frac{9}{8}$	0			$-$	1 *r. r.* doppia $=\frac{1}{5}$;
$-\frac{9}{8}$ — -1			$+$		2 *r. r.* dist. posit.;
-1		$-$		0	1 *r. r.* $= 0$, 1 *r. r.* $=\frac{1}{3}$;
-1 — $-\frac{1}{2}$					2 *r. r.* di segno cont., ed è $>$, in val. ass., la pos.;
$-\frac{1}{2}$	$+$		0		2 *r. r.* $= \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$
$-\frac{1}{2}$ — 2				$+$	2 *r. r.* di segno cont., ed è $>$, in val. ass., la neg.;
2		0	$-$		1 *r. r.* semplice $=\frac{3}{5}$;
2 — $+\infty$		$+$			2 *r. r.* dist. posit.

B) Prendiamo in secondo luogo l'equazione

$$(k-1)x^2 - 4kx + 3k + 10 = 0 .$$

Il discriminante (ridotto) è dato da

$$4k^2 - (k-1)(3k+10) = k^2 - 7k + 10,$$

cosicchè si annulla per $k=2$ e per $k=5$, e si mantiene negativo in ogni punto interno all'intervallo 2 — 5, positivo in ogni punto esterno (n. 13).

D'altra parte i coefficienti a, b, c si annullano, rispettivamente, per k

uguale a 1, 0, $-\frac{10}{3}$, onde i valori notevoli di k, considerati in ordine crescente, sono

$$-\frac{10}{3} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 5.$$

La discussione è riassunta nella tabella seguente:

k	b^2-ac	a	b	c	r. r. dell'equaz.
$-\infty$ — $-\frac{10}{3}$				$-$	2 r. r. dist. pos.;
$-\frac{10}{3}$			$+$	0	1 r. r. $=0$, 1 r. r. $=-\frac{40}{13}$;
$-\frac{10}{3}$ — 0		$-$			2 r. r. di segno cont.; ed è $>$, in val. ass., la pos.;
0	$+$		0		2 r. r. $=\pm\sqrt{10}$;
0 — 1					2 r. r. di segno cont.; ed è $>$, in val. ass., la neg.;
1		0			1 r. r. semplice $=\frac{13}{4}$;
1 — 2				$+$	2 r. r. dist. posit.;
2	0		$+$		2 r. r. coincid. $=4$;
2 — 5	$-$	$+$			nessuna r. r.;
5	0				2 r. r. coinc. $=\frac{5}{2}$;
5 — $+\infty$	$+$				2 r. r. dist. posit.

La espressione generale delle due radici reali, valida tanto per $k \leq 2$, escluso il valore $k=1$, quanto per $k \geq 5$, è data da

$$x=\frac{2k \pm \sqrt{k^2-7k+10}}{k-1}.$$

Equazioni fratte riconducibili ad equazioni di 2° grado

18. Sappiamo che la risoluzione di un'equazione fratta si può ricondurre a quella di un'equazione intera, liberando l'equazione data dai denominatori (Introd., nn. 30–31); ma si deve tener sempre ben presente, che nell'applicare questo procedimento bisogna escludere per l'incognita quei valori *eccezionali*, che, annullando il denominatore di qualche termine fratto dell'equazione data, rendono un tal termine privo di senso e non possono, quindi, essere considerati fra le possibili radici dell'equazione. Questi valori eccezionali si determinano, cercando le soluzioni delle equazioni intere, che si ottengono, uguagliando a zero i denominatori dei varî termini fratti dell'equazione data.

Dopo ciò, esclusi per l'incognita i valori così trovati, si passa a liberare l'equazione dai denominatori. A tal fine si debbono ridurre allo stesso denominatore tutti i termini (anche quelli, che siano eventualmente interi); e l'equazione intera, cui è riconducibile la data, si ottiene, moltiplicando ambo i membri dell'equazione così trasformata per il denominatore comune dei suoi termini.

Come denominatore comune si prende di regola il prodotto dei denominatori dei varî termini fratti dell'equazione data; ma si prende, invece, un loro multiplo comune di grado minore, se in codesti denominatori dei singoli termini si riesce a trovare qualche fattore comune. Ciò accade certamente, se nella ricerca dei valori eccezionali si è constatato che un medesimo valore eccezionale annulla più denominatori, giacchè in questo caso, indicato con c questo speciale valore eccezionale, i denominatori, che per esso si annullano, sono tutti divisibili per $x - c$ (Introd., n. 19).

Queste avvertenze, che, così esposte in forma generale, possono riuscire alquanto difficili, risulteranno chiarite da qualche esempio di equazioni fratte riconducibili ad equazioni di 2° grado, che qui studieremo.

$$A) \quad \frac{x+2}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{13}{6}.$$

Si rileva subito che i valori eccezionali per cui il primo membro risulta privo di senso, sono $x=-1$ e $x=-2$. Esclusi per l'incognita questi valori, si libera l'equazione dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri per il loro prodotto $6(x+1)(x+2)$. Si ottiene così l'equazione intera

$$6(x+2)^2+6(x+1)^2=13(x+1)(x+2),$$

che, ridotta a forma normale, assume l'aspetto

$$x^2+3x-4=0,$$

e ammette le due radici distinte $x_1=1$, $x_2=-4$. Poichè sono entrambe diverse dai valori eccezionali, esse sono anche le radici dell'equazione data. Si faccia la verifica.

$$B) \quad \frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}.$$

Il primo denominatore $2(x^2-1)$ si può anche scrivere (Introd. n. 13) sotto la forma $2(x+1)(x-1)$, onde risulta che esso è divisibile per il secondo denominatore $4(x+1)$.

Perciò i valori eccezionali per l'incognita sono qui $x=1$, $x=-1$. Esclusi questi valori, l'equazione si libera dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri semplicemente per $8(x^2-1)$. Si perviene in tal modo all'equazione intera

$$12-2(x-1)=x^2-1,$$

ossia, in forma normale,

$$x^2+2x-15=0.$$

Le sue radici $x_1=3$, $x_2=-5$, entrambe diverse dai valori eccezionali, sono anche le radici dell'equazione data. Verificare.

$$C) \quad \frac{6x^2+13x+11}{x^2+x+1}=\frac{2(3x-1)}{x-1}.$$

Il trinomio di 2° grado x^2+x+1, che compare a primo membro come denominatore, è a discriminante negativo, cosicchè non si annulla per alcun valore di x; e l'unico valore eccezionale è, per questa equazione, il valore 1, che annulla il secondo denominatore. Di qui risulta altresì che i due denominatori non hanno alcun fattore comune. Perciò, per liberare l'equazione dai denominatori, bisogna moltiplicarne ambo i membri per il loro prodotto. Si ottiene in tal modo l'equazione intera

$$(6x^2+13x+11)(x-1)=2(3x-1)(x^2+x+1).$$

che si riduce agevolmente alla forma normale

$$x^2-2x-3=0.$$

Essa ammette le due radici $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$, entrambe diverse dal valore eccezionale 1; esse danno perciò anche le radici della *C*). Si faccia anche qui la verifica.

D) $$\frac{3(x^2+x+1)}{6x^2+11x-10} = \frac{3x-1}{3x-2} - \frac{5}{2x+5}.$$

In questo caso si presentano senz'altro come eccezionali i due valori $\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{2}$, che annullano, rispettivamente, i due denominatori di 1° grado. Ma bisogna cercare se per qualche altro valore si annulli anche il denominatore di 2° grado.

Ora, uguagliandolo a zero, si ha l'equazione

$$6x^2+11x-10=0,$$

che ammette precisamente, come radici, i due valori $\frac{2}{3}$ e $-\frac{5}{2}$ già riconosciuti come eccezionali. Basta dunque escludere questi due valori; e poichè sussiste l'identità (n. 10)

$$6x^2+11x-10 = 6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right) = (3x-2)(2x+5),$$

l'equazione si libera dai denominatori, moltiplicandone ambo i membri semplicemente per $6x^2+11x-10$. Si ottiene così l'equazione intera

$$3(x^2+x+1) = (3x-1)(2x+5) - 5(3x-2),$$

ossia

$$3x^2-5x+2=0,$$

che ammette le due radici $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{2}{3}$.

Poichè quest'ultimo valore si è dovuto escludere, come eccezionale per la data equazione *D*), resta per questa equazione soltanto la radice $x_1 = 1$.

Al solito si verifichi il risultato.

E) $$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+5} + \frac{35}{x^2+3x-10} = 0.$$

Come nell'esempio prec., il denominatore di 2° grado si annulla per gli due stessi valori 2 e -5, per cui si annullano rispettivamente i due denominatori di 1° grado. Perciò i soli valori eccezionali per l'incognita sono appunto 2 e -5; e per liberare l'equazione dai denominatori basta moltiplicarne ambo i membri per $x^2+3x-10$. Perveniamo così all'equazione

$$x(x+5)+5(x-2)+35=0$$

ossia

$$x^2+10x+25=0. \tag{16}$$

Il discriminante di quest'equazione di 2° grado risulta nullo, cosicchè essa ammette due radici coincidenti. Ma il loro valore comune è -5, cioè precisamente uno dei due valori eccezionali, che abbiamo dovuto escludere per l'incognita. Poichè ogni eventuale soluzione della equazione data deve pur soddisfare l'equazione intera (16) e quest'ultima è soddisfatta dall'unico valore -5, che per la data va escluso, concludiamo che l'equazione E), sotto la forma in cui è qui data, *non ammette soluzione alcuna.*

È per altro opportuno aggiungere un'osservazione. Prima di liberare la E) dai denominatori, eseguiamo le operazioni indicate a primo membro. Perveniamo in tal modo all'equazione

$$\frac{x^2+10x+25}{x^2+3x-10}=0,$$

la quale, ove si tenga conto delle due identità

$$x^2+10x+25=(x+5)^2, \quad x^2+3x-10=(x-2)(x+5),$$

si può scrivere

$$\frac{(x+5)^2}{(x-2)(x+5)}=0.$$

Se la frazione algebrica a primo membro si semplifica sopprimendo nei due termini il fattore comune $x+5$, si ottiene l'equazione

$$\frac{x+5}{x-2}=0 \tag{17}$$

che ammette come unico valore eccezionale $x=2$, ed, escluso questo valore, è equivalente all'equazione di 1° grado, $x+5=0$, la cui soluzione è $x=-5$.

Perciò quel valore -5, che per l'equazione data andava escluso come eccezionale, è una vera e propria soluzione dell'equazione (17), che dalla data si è dedotta, eseguendo le operazioni indicate e *semplificando la frazione algebrica*, che con ciò si era ottenuta a primo membro.

Si vede da questo esempio, che, quando, nel cercar di risolvere un'equazione fratta, si portano tutti i termini in un membro ed, eseguite le operazioni indicate, si semplifica la frazione algebrica così ottenuta, dividendone ambo i termini per un loro fattore comune, può darsi che la nuova equazione ammetta come soluzione qualche valore, che per l'equazione, quale era stata considerata dapprincipio, era eccezionale.

Equazioni irrazionali riconducibili ad equazioni di 2° grado

19. Ad equazioni di 2° grado si possono ricondurre, in casi speciali, anche equazioni, contenenti nei loro termini qualche radicale quadratico, il cui radicando dipenda dalla incognita. Le equazioni di questo tipo costituiscono un caso particolare delle cosiddette equazioni *irrazionali*, designandosi con questo nome tutte le equazioni, in cui figurano non soltanto operazioni razionali (cioè di addizione algebrica, moltiplicazione e divisione), bensì anche di *estrazione di radice*, di indice qualsiasi, da eseguirsi su espressioni, *contenenti l'incognita*; mentre, per contrapposto, si dicono *razionali* le equazioni, intere e fratte, considerate sin qui, in cui *sulla incognita* non sono indicate che operazioni razionali.

Per ricondurre la risoluzione di un'equazione irrazionale, contenente radicali quadratici, a quella di un'equazione razionale, occorrono opportuni artifici; e, in ogni caso, sono necessarie particolari avvertenze, in quanto l'equazione, cui si è condotti, non è sempre equivalente alla data. Ci proponiamo di illustrare brevemente questi artifici e queste avvertenze; e, per ragionare sul concreto, cominciamo da un esempio.

Consideriamo l'equazione

$$\sqrt{8-7x}=4x-3. \tag{18}$$

Le soluzioni di questa equazione vanno cercate soltanto fra i valori di x, che non rendono priva di significato l'estrazione di radice quadrata indicata a primo membro; d'altra parte, poichè, per le convenzioni stabilite nel calcolo dei radicali, il simbolo a primo membro denota la radice *positiva* del radicando, vanno considerati per la x esclusivamente quei valori, che rendono positiva o, al minimo, nulla l'espressione a secondo membro.

Si è così condotti ad imporre alla incognita x le due limitazioni

$$8 - 7x \geq 0, \quad 4x - 3 \geq 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{8}{7}.$$

Ma in questo caso, come in ogni altro, in cui si tratti di equazioni irrazionali a coefficienti esclusivamente numerici, si può benissimo prescindere da questa ricerca preliminare dei valori, che si possono accettare per l'incognita, in quanto il procedimento di risoluzione che adotteremo, ci costringerà poi a verificare direttamente se i valori, cui saremo condotti, rendano effettivamente soddisfatta l'equazione proposta.

Il procedimento è molto semplice. Poichè, se sono uguali due numeri, sono pure uguali i loro quadrati, ogni eventuale radice della (18) soddisfa necessariamente anche l'equazione, che da essa si ottiene, elevandone a quadrato ambo i membri, cioè la

$$(19) \qquad 8 - 7x = (4x - 3)^2 \quad \text{ossia} \quad 16x^2 - 17x + 1 = 0.$$

Quest'equazione di 2° grado ammette le due radici $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{16}$ ed è fra queste che vanno cercate le radici della (18).

Ora si verifica direttamente che a quest'ultima equazione soddisfa la $x_1 = 1$, non la $x_2 = \frac{1}{16}$, cosicchè la $x_1 = 1$ è l'unica soluzione.

Ed è facile capire come, nel passaggio dalla (18) alla (19), si sia introdotta la soluzione estranea $x_2 = \frac{1}{16}$. Alla stessa equazione (19), cui siamo pervenuti, elevando a quadrato ambo i membri della (18), si perviene anche eseguendo la stessa operazione sull'equazione

$$(18') \qquad -\sqrt{8 - 7x} = 4x - 3$$

e si verifica, che la soluzione $x_2 = \frac{1}{16}$, ottenuta dianzi come estranea, soddisfa appunto a questa equazione.

20. L'esempio precedente suggerisce una osservazione generale, che occorre tener presente tutte le volte che, per risolvere un'equazione, si è condotti ad elevarne a quadrato ambo i membri.

Data un'equazione qualsiasi

$$A = B, \tag{20}$$

confrontiamola con la

$$A^2 = B^2. \tag{21}$$

È manifesto, che ogni soluzione della (20), soddisfa necessariamente anche la (21), la quale è, dunque, in ogni caso una conseguenza della (20). Ma non si può dire che sia ad essa equivalente; anzi, in generale, la (21) ammette, oltre le radici della (20), qualche altra radice, perchè, trasportando tutti i termini a primo membro, si può scrivere

$$A^2 - B^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad (A - B)(A + B) = 0;$$

cosicchè si decompone nelle due equazioni

$$A - B = 0 \quad \text{e} \quad A + B = 0,$$

cioè nella (20) e nella

$$-A = B. \tag{20'}$$

Concludiamo dunque che: *Elevando a quadrato ambo i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione, che è in ogni caso una conseguenza della data, ma ammette, oltre le radici di questa, tutte le eventuali radici dell'equazione, che dalla data si ottiene, cambiando segno ad uno dei suoi membri.*

Di qui risulta, in particolare, che se la (20') è impossibile, cioè priva di radici, l'equazione $A = B$ è senz'altro equivalente alla $A^2 = B^2$.

Vale, inoltre, la seguente osservazione, che torna talvolta utile: *Se le due espressioni A e B sono tali che, per ogni valore della indeterminata x, da cui esse dipendono, risulti sempre $A \geq 0$ e $B \geq 0$, oppure sempre $A \leq 0$ e $B \leq 0$, le due equazioni $A = B$ e $A^2 - B^2 = 0$ sono equivalenti.*

Infatti, nelle condizioni ammesse, le sole radici possibili per l'equazione $-A = B$ sono quei valori della x, per cui risulti simultaneamente $A = 0$ e $B = 0$; e questi valori di x rendono in ogni caso soddisfatta anche la $A = B$, cosicchè nel passaggio da questa equazione alla $A^2 = B^2$ non si può guadagnare nessuna radice.

21. Torniamo alle equazioni irrazionali. Se in un'equazione compare come termine un radicale $\sqrt{A}$, dove A denota una certa espressione contenente l'incognita, e si vuol liberare l'equazione da questo radicale, bisogna anzitutto *isolarlo*, cioè si debbono trasportare tutti gli altri termini, che compaiono nello stesso membro di $\sqrt{A}$, nell'altro membro, così da ridurre l'equazione alla forma

$$\sqrt{A} = B, \tag{22}$$

dove B rappresenta una certa espressione. Dopo ciò si elevano a quadrato ambo i membri e si cerca di risolvere l'equazione

$$A = B^2 \tag{23}$$

così ottenuta, la quale, come si è visto al n. prec., è in ogni caso una conseguenza della (22), ma può benissimo non essere ad essa equivalente. Quando si siano trovate tutte le radici di questa equazione (23), bisogna riconoscere, sostituendole, una dopo l'altra, nella equazione data (22), quali di esse la rendano effettivamente soddisfatta e quali, invece, vadano rifiutate come ad essa estranee (e soddisfacenti alla $-\sqrt{A} = B$).

Si noti che si può senz'altro concludere che una radice della (23) soddisfa la (22), se fa assumere all'espressione B un valore positivo, giacchè in tal caso essa non può certo soddisfare la $-\sqrt{A} = B$.

Si ha inoltre che la $\sqrt{A} = B$ è certamente equivalente alla $A = B^2$, se l'espressione B è tale, che non diventi mai negativa per nessun valore della x (n. prec.).

22. Illustriamo le considerazioni precedenti con qualche altro esempio di equazioni irrazionali (a coefficienti numerici). Qui si tratterà di equazioni riconducibili al 2° grado; ma può anche darsi che un'equazione irrazionale, ridotta razionale, risulti di 1° grado (vedasi qualche esempio negli Esercizi).

A) $\sqrt{x^2 - 3x - 3} + 6x + 15 = 8x + 6$.

Isolando il radicale si ottiene l'equazione

$$\sqrt{x^2 - 3x - 3} = 2x - 9,$$

da cui, elevando a quadrato i due membri, si deduce la

$$x^2 - 3x - 3 = (2x - 9)^2 \quad \text{ossia} \quad x^2 - 11x + 28 = 0.$$

Quest' equazione, conseguenza della data, ammette le due soluzioni $x_1 = 7$, $x_2 = 4$; e, sostituendole nella equazione data, si verifica che l'unica radice di questa è la $x_1 = 7$. La $x_2 = 4$ soddisfa invece l'equazione

$$-\sqrt{x^2 - 3x - 3} + 6x + 15 = 8x + 6,$$

ottenuta dalla data, cambiando segno al radicale.

B) $3\sqrt{6 + x - x^2} + 7x - 3 = 6x + 5$.

Operando come nell'esempio precedente, si è ricondotti all'equazione di 2° grado

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

le cui due radici $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, come si verifica direttamente, soddisfano entrambe l'equazione irrazionale data.

C) $\sqrt{25x^2 - 80x + 160} = 3x - 16$.

Col procedimento solito si perviene all'equazione di 2° grado

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Si verifica direttamente che nessuna delle sue due radici $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ soddisfa l'equazione data, che è perciò impossibile. Esse sono invece entrambe radici dell'equazione

$$-\sqrt{25x^2 - 80x + 160} = 3x - 16.$$

D) $\sqrt{8x + 9} = \sqrt{2x + 6} + \sqrt{x + 4}$.

Questa equazione si libererà dai suoi tre radicali, applicando due volte successivamente l'artificio dell'elevamento a quadrato. La prima volta si ottiene l'equazione

$$8x + 9 = 2x + 6 + x + 4 + 2\sqrt{(2x + 6)(x + 4)},$$

da cui, isolando l'unico radicale rimasto, si deduce

$$2\sqrt{(2x+6)(x+4)} = 5x - 1.$$

Con un nuovo elevamento a quadrato si perviene alla

$$4(2x+6)(x+4) = (5x-1)^2 \quad \text{ossia} \quad 17x^2 - 66x - 95 = 0.$$

Questa equazione, conseguenza della data, ammette le due radici $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{19}{17}$, di cui solo la prima soddisfa la D), mentre l'altra è la radice dell'equazione

$$\sqrt{8x+9} = \sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4}.$$

E) $\sqrt{x + \sqrt{x-2}} = \sqrt{3x-5}$.

Qui a primo membro abbiamo un radicale doppio. Con un primo elevamento a quadrato otteniamo l'equazione

$$x + \sqrt{x-2} = 3x - 5,$$

da cui, isolando il radicale ed elevando ancora a quadrato i due membri, deduciamo, con facili riduzioni,

$$4x^2 - 21x + 27 = 0.$$

Delle due radici $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{9}{4}$ di questa equazione di 2^0 grado, si verifica che solo la prima soddisfa l'equazione data. L'altra soddisfa la

$$\sqrt{x - \sqrt{x-2}} = \sqrt{3x-5}.$$

23. Talvolta un'equazione irrazionale si può liberare dai radicali anche senza elevarne a quadrato ambo i membri. Si consideri, ad es., l'equazione irrazionale fratta

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} = x. \tag{24}$$

Qui dovremmo cercare se esistano per l'incognita valori eccezionali (cioè tali, che annullando l'uno o l'altro dei denominatori, rendano privo di senso il corrispondente termine); ma possiamo tralasciare questa ricerca, riserbandoci al solito di verificare alla fine direttamente se i valori, che troveremo per la x, siano effettivamente radici dell'equazione proposta.

Cominciamo, dunque, col liberare i denominatori dai radicali (II, n. 11), moltiplicando ambo i termini della prima frazione algebrica per $x - \sqrt{2-x^2}$ e ambo i termini della seconda per $x + \sqrt{2-x^2}$. Otteniamo così l'equazione

$$\frac{x-\sqrt{2-x^2}}{2(x^2-1)}+\frac{x+\sqrt{2-x^2}}{2(x^2-1)}=x \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{x^2-1}=x$$

e questa equazione razionale fratta, liberata dal denominatore, dà l'equazione intera

$$x(x^2-2)=0,$$

che si decompone nelle due equazioni

$$x=0, \quad x^2-2=0.$$

Troviamo così per x i tre valori 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, di cui nessuno è eccezionale nè per l'equazione fratta ausiliaria, nè per la data; e si verifica direttamente che essi soddisfano tutti e tre la (24).

Disequazioni fratte e irrazionali

24. Aggiungiamo qui da ultimo alcune osservazioni sulle disequazioni fratte e irrazionali, che torneranno utili specialmente nella discussione dei problemi.

Cominciando dalle *disequazioni fratte*, sappiamo (Introd., n. 36) che ogni disequazione di questa specie si può ridurre alla forma

(25) $$\frac{A(x)}{B(x)}>0,$$

dove $A(x)$, $B(x)$ denotano due espressioni intere in una stessa indeterminata x; e le soluzioni di questa disequazione sono date dall'insieme di tutti quei valori di x, che rendono soddisfatto il sistema delle due disequazioni intere

$$A(x)>0, \quad B(x)>0$$

e di tutti quelli, che rendono soddisfatto il sistema delle due disequazioni

$$A(x)<0, \quad B(x)<0.$$

Perciò, come già prima sapevamo risolvere la (25) quando A e B erano entrambe di 1° grado (Introd., n. 37), potremo ora, in base ai nn. 13, 14, risolverla anche quando queste due espressioni siano entrambe di 2° grado o l'una di 1° e l'altra di 2°.

25. Diamo qualche esempio.

A) $\dfrac{11}{2x+3} > \dfrac{5}{2-x}$.

Trasportando tutto a primo membro ed eseguendo le operazioni indicate, troviamo

$$\frac{-21x+7}{(2x+3)(2-x)} > 0.$$

Dobbiamo dunque determinare le soluzioni del sistema

(26) $$-21x+7 > 0, \quad (2x+3)(2-x) > 0$$

e quelle del sistema

(27) $$-21x+7 < 0, \quad (2x+3)(2-x) < 0.$$

Ora la prima delle (26) equivale ad $x < \frac{1}{3}$, mentre la seconda è soddisfatta sia quando risulti

(26′) $$2x+3 > 0, \quad 2-x > 0,$$

sia quando risulti

(26″) $$2x+3 < 0, \quad 2-x < 0;$$

e, mentre le (26′) equivalgono alle due condizioni $x > -\frac{3}{2}$, $x < 2$ cioè sono soddisfatte entrambe nell'intervallo $-\frac{3}{2}\,\overline{}\,2$, le (26″) conducono alle due condizioni $x < -\frac{3}{2}$, $x > 2$, manifestamente contraddittorie fra loro. Perciò le (26) risultano soddisfatte tutte e due da quei valori di x, che appartengono all'intervallo $-\frac{3}{2}\,\overline{}\,2$ e sono minori di $\frac{1}{3}$, cioè da tutti (e soli) i valori di x appartenenti all'intervallo $-\frac{3}{2}\,\overline{}\,\frac{1}{3}$.

Passando al sistema (27), si ha che la prima equivale ad $x > \frac{1}{3}$, mentre la seconda ammette tanto le soluzioni del sistema

(27′) $$2x+3 > 0, \quad 2-x < 0,$$

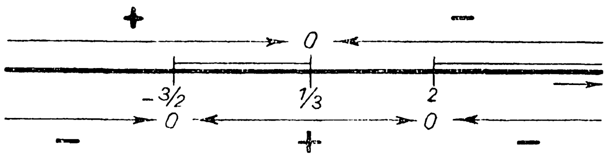
quanto quelle del sistema

(27″) $$2x+3 < 0, \quad 2-x > 0.$$

Ora le (27′) equivalgono alle $x > -\frac{3}{2}$, $x > 2$, cioè sussistono insieme nell'intervallo $2\,\overline{}+\infty$, e, così, le (27″) equivalgono alle $x < -\frac{3}{2}$, $x < 2$ e sussistono entrambe nell'intervallo $-\infty\,\overline{}-\frac{3}{2}$. Ma poichè, come già si è notato, la prima delle (27) richiede $x > \frac{1}{3}$, quest' ultimo intervallo $\overline{-\infty \quad -\frac{3}{2}}$ va senz'altro rifiutato, mentre nell'intervallo $\overline{2 \quad +\infty}$, in cui valgono insieme le (27′) e quindi la seconda delle (27), è verificata anche la prima di queste due ultime disequazioni.

Concludiamo dunque che la disequazione proposta *A*) è soddisfatta nei due intervalli $\overline{-\frac{3}{2} \quad \frac{1}{3}}$, $\overline{2 \quad +\infty}$.

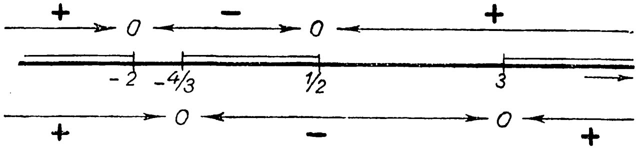
Qui, come per ogni altra disequazione, la risoluzione si rende più spedita e sicura, ricorrendo alla rappresentazione dei valori della x per mezzo dei punti di una retta graduata. Anzitutto si segnano su questa retta i punti, in cui si annullano il numeratore e il denominatore della frazione algebrica, che si vuol rendere maggiore di zero, e in corrispondenza di ciascuno di questi punti si segna uno 0, al di



sopra o al di sotto della retta, secondo che nel punto considerato si annulla il numeratore o il denominatore. Infine in corrispondenza dei singoli intervalli, determinati sulla retta graduata da questi 0 (al di sopra della retta per il numeratore, al di sotto per il denominatore) si indica il segno che vi compete, rispettivamente, al numeratore e al denominatore. Dopo ciò si rileva a colpo d'occhio quali siano quegli intervalli, in cui i due termini della frazione algebrica hanno lo stesso segno e, quindi, la disequazione è soddisfatta; e, per rendere più visibili questi intervalli, si possono segnare con un doppio tratto.

B) $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 - 5x - 12} > 0.$

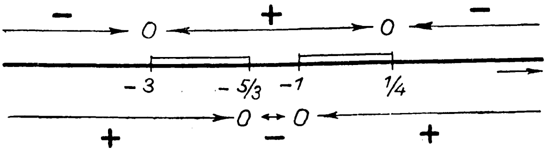
Il trinomio a numeratore ha le due radici -2, $\frac{1}{2}$, quello a denominatore le due radici $-\frac{4}{3}$, 3; e ciascuno di essi si mantiene negativo entro l'intervallo compreso fra le corrispondenti radici, positivo fuori (n. 13). Si riconosce agevolmente (soprattutto ricorrendo alla rappresen-



tazione geometrica) che i due trinomî hanno lo stesso segno e, quindi, la disequazione proposta è soddisfatta nei tre intervalli $-\infty \overline{\quad} -2$, $-\frac{4}{3} \overline{\quad} \frac{1}{2}$, $3 \overline{\quad} +\infty$.

$$C) \qquad \frac{3 - 11x - 4x^2}{5 + 8x + 3x^2} > 0.$$

Ciascuno dei due termini della frazione a primo membro ha due radici; ma mentre il numeratore è positivo nell'intervallo $-3 \overline{\quad} \frac{1}{4}$,



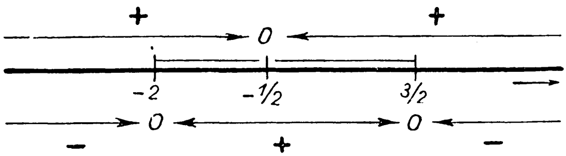
compreso fra le due radici, e negativo fuori, il denominatore è invece negativo nell'intervallo $-\frac{5}{3} \overline{\quad} -1$ compreso fra le due radici, e positivo fuori. Perciò la disequazione proposta è soddisfatta nei due intervalli $-3 \overline{\quad} -\frac{5}{3}$, $-1 \overline{\quad} \frac{1}{4}$.

$$D) \qquad \frac{2x + 13}{6 - x - 2x^2} > 2.$$

Trasportando il 2 a primo membro e riducendo, si trova per la disequazione proposta la forma equivalente

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{6 - x - 2x^2} > 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{(2x + 1)^2}{6 - x - 2x^2} > 0.$$

A primo membro il numeratore si annulla soltanto per $x = -\frac{1}{2}$, e si mantiene positivo per ogni altro valore di x; invece il denominatore,



che ammette le due radici -2, $\frac{3}{2}$, si conserva positivo nel loro intervallo, negativo fuori, cosicchè la disequazione è soddisfatta nei due intervalli $\overline{-2 \quad -\frac{1}{2}}$, $\overline{-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}}$ o, come anche si può dire, nell'intervallo $\overline{-2 \quad \frac{3}{2}}$, *escluso il valore* $-\frac{1}{2}$.

$E)$ $\dfrac{5x + 10}{6 + 7x - 3x^2} > 1.$

Questa disequazione è equivalente alla

$$\frac{3x^2 - 2x + 4}{6 + 7x - 3x^2} > 0;$$

e poichè qui a primo membro il numeratore, privo di radici reali, è sempre positivo, mentre il denominatore si conserva positivo nell'intervallo $\overline{-\frac{2}{3} \quad 3}$, compreso fra le radici, negativo fuori, la disequazione proposta è soddisfatta in codesto intervallo.

26. Alla risoluzione di disequazioni di 2° (o 1°) grado si riconduce anche quella di ***disequazioni irrazionali*** (quadratiche), cioè contenenti nei loro termini qualche radicale (quadratico), il cui radicando sia, ad es., di 1° o 2° grado. Per lo più a questa risoluzione si perviene, come nel caso delle equazioni irrazionali, « liberando » la disequazione dai radicali, per mezzo di opportuni elevamenti a quadrato. Ma prima ancora di ricorrere a questo procedimento bisogna assicurarsi che i radicali, su cui si dovrà poi operare, abbiano senso; onde si è intanto condotti a risolvere opportune limitazioni ausiliari, che permettono di determinare quegli speciali intervalli, in cui deve restare la x, perchè la disequazione proposta abbia senso.

Dopo ciò si « isola » in uno dei due membri della disequazione quel radicale, da cui essa si vuol liberare, e si elevano a quadrato i due membri. Ma, come nel caso delle equazioni (nn. 20–21), bisogna qui tener conto di speciali avvertenze; ed anzi le circostanze, cui può dar luogo codesto elevamento a quadrato per le disequazioni, non sono del tutto analoghe a quelle, che si presentano per le equazioni.

Per chiarire la cosa, consideriamo una disequazione

(28) $$A > B,$$

dove A e B denotano due espressioni quali si vogliano in una stessa indeterminata x, e confrontiamola con la disequazione

$$A^2 > B^2. \tag{29}$$

Scrivendo queste due disequazioni sotto la forma

$$A - B > 0, \tag{28'}$$

$$A^2 - B^2 > 0 \quad \text{ossia} \quad (A - B)(A + B) > 0, \tag{29'}$$

si riconosce agevolmente che in generale, non soltanto, come nel caso delle equazioni (n. 20), esse *non* sono equivalenti fra di loro, ma *non* si può nemmeno più dire che la seconda sia sempre una *conseguenza* della prima (cioè ne ammetta tutte le soluzioni). Infatti le soluzioni della (29') sono date dall'insieme di tutte quelle del sistema

$$A - B > 0, \quad A + B > 0, \tag{30}$$

e di tutte quelle del sistema

$$A - B < 0, \quad A + B < 0, \tag{31}$$

cosicchè, nel passaggio della disequazione (28) alla (29), *si guadagnano* tutte le eventuali soluzioni della disequazione contraria $A - B < 0$, per cui sia $A + B < 0$, ma *si perdono* tutte quelle della primitiva $A - B > 0$, per cui risulti $A + B \leq 0$.

Questo vale in generale, cioè se non si fa nessuna ipotesi particolare. Ma limitiamoci a considerare per la indeterminata x, da cui dipendono A e B, quegli intervalli, in cui queste due espressioni non diventano *mai negative*. Si vede subito, che, *entro questi intervalli*, le (28), (29), o, ciò che è lo stesso, le (28'), (29'), sono fra loro *equivalenti*. Infatti ogni valore di x, che appartenga ad uno di codesti intervalli e renda soddisfatta la $A - B > 0$, fa assumere a B un valore positivo o, quanto meno, nullo, e quindi ad A un valore necessariamente positivo, cosicchè un tale x soddisfa non soltanto alla prima delle (30), bensì anche alla seconda e quindi alla (29'). Viceversa, un qualsiasi valore di x, che appartenga agli intervalli dianzi indicati, non può mai soddisfare alla seconda delle (31), perchè, per ipotesi, a nessuna delle due espressioni A e B fa assumere valori negativi. Perciò ogni soluzione della (29′), che appartenga ai detti intervalli, soddisfa necessariamente il sistema (30), cioè la (28′), di cui la seconda delle (30) in codesti intervalli è, come si è visto or ora, una conseguenza.

Poichè la precedente osservazione torna talvolta utile, giova enunciarla esplicitamente: *Se per la indeterminata x, da cui dipendono due espressioni A e B quali si vogliano, si considerano soltanto quegli intervalli, in cui codeste due espressioni non diventano mai negative, la disequazione* $A > B$, entro codesti intervalli, *è equivalente alla disequazione $A^2 > B^2$, che da essa si ottiene, elevandone a quadrato ambo i membri.*

Naturalmente questo teorema vale addirittura *per tutti i valori della x,* se le due espressioni A e B non assumono mai valori negativi.

Siccome poi il teor. prec. vale anche per le equazioni (n. 20), esso si estende senz'altro al caso delle limitazioni $A \geq B$.

27. Applichiamo i risultati precedenti ad una disequazione irrazionale della forma

$$\sqrt{A} > B, \tag{32}$$

dove A e B denotano due espressioni intere in una stessa indeterminata x. Possiamo, ad es., supporre che la A sia di 1° o 2° grado e che la B sia di 1° grado.

Secondo la convenzione fissata una volta per tutte (II, n. 3), $\sqrt{A}$ rappresenta la radice positiva del suo radicando; e, come ben sappiamo, la indeterminata x va fatta variare soltanto in quegli intervalli, in cui codesto radicale ha senso, cioè risulta $A \geq 0$.

Ora in questi intervalli possono benissimo esistere valori della x, per cui risulti $B < 0$, e tutti questi valori, in quanto fanno assumere a $\sqrt{A}$ valori positivi o, quanto meno, nulli, soddisfano senz'altro la disequazione (32). Esclusi per la x questi valori, cioè considerati, negli intervalli in cui ha senso $\sqrt{A}$, soltanto quei valori di x, per cui è $B \geq 0$, sappiamo (n. prec.) che, per codesti valori della indeterminata, la disequazione (32) è equivalente a quella, che se ne deduce, elevandone a quadrato ambo i membri, cioè alla $A > B^2$, la quale implica, come sua conseguenza, la $A > 0$. Abbiamo dunque che: *Le soluzioni della disequazione irrazionale*

$$\sqrt{A} > B \tag{32}$$

sono date dall'insieme di quelle del sistema

$$A \geq 0, \quad B < 0$$

e di quelle del sistema

$$B \geq 0, \quad A > B^2.$$

In modo analogo si dimostra che: *Le soluzioni della disequazione*

$$\sqrt{A} < B$$

sono tutte (e sole) *quelle del sistema*

$$A \geq 0, \quad B > 0, \quad A < B^2.$$

28. Illustriamo le considerazioni precedenti con qualche esempio.

A) $\sqrt{4x^2 - 3x - 1} > 2x + 1$.

È questa una disequazione della forma (32), con $A = 4x^2 - 3x - 1$, $B = 2x + 1$. Il trinomio A ammette le due radici $-\frac{1}{4}$, 1, sicchè risulta $A \geq 0$ nei due intervalli $-\infty \;\overline{\quad}\; -\frac{1}{4}$, $1 \;\overline{\quad}\; +\infty$; B, che si annulla per $x = -\frac{1}{2}$, si mantiene negativo in tutto l'intervallo $-\infty \;\overline{\quad}\; -\frac{1}{2}$, che è interno al primo dei due intervalli or ora determinati. Perciò intanto soddisfano la disequazione proposta (n. prec.) i valori di x appartenenti all'intervallo $-\infty \;\overline{\quad}\; -\frac{1}{2}$. Restano da considerare, secondo il teorema del n. prec., i valori di x, per cui sia simultaneamente

$$2x + 1 \geq 0, \quad 4x^2 - 3x - 1 > (2x + 1)^2.$$

La prima di queste due condizioni equivale a $x \geq -\frac{1}{2}$, mentre la seconda si riduce a $-7x > 2$, cioè a $x < -\frac{2}{7}$. Si è così condotti all'intervallo $-\frac{1}{2} \overline{\qquad} -\frac{2}{7}$, che, aggiunto a quello trovato dianzi, dà come intervallo dei valori di x, che soddisfano la disequazione proposta, l'intervallo $-\infty \overline{\qquad} \frac{2}{7}$.

Anche qui, come negli altri casi analoghi, può tornare utile la rappresentazione geometrica dei valori della x per mezzo dei punti di una retta graduata (cfr. n. 25 A).

B) $\sqrt{10 + 3x - x^2} > x + 2$.

Qui $A = 10 + 3x - x^2$ si mantiene non negativo nell' intervallo $-2 \vdash\!\!\dashv 5$, compreso fra le sue due radici, il quale esclude tutto l'intervallo $-\infty \overline{\qquad} -2$, in cui $B = x + 2$ risulta negativo. Perciò la disequazione proposta è, in questo caso, equivalente (n. prec.) al sistema $B \geq 0$, $A > B^2$, cioè

$$x + 2 \geq 0, \quad 10 + 3x - x^2 > (x + 2)^2 .$$

La seconda di queste disequazioni si riduce a

$$6 - x - 2x^2 > 0,$$

ed è soddisfatta nell'intervallo $-2 \overline{\qquad} \frac{3}{2}$, compreso fra le due radici del suo primo membro. Poichè in questo intervallo risulta verificata anche la $x + 2 \geq 0$, esso fornisce tutte le soluzioni della disequazione proposta.

C) $\sqrt{x(20 - 3x) - 12} > 5 - 12x$.

Qui non occorre nessun elevamento a quadrato. Infatti si osservi che il radicale ha senso soltanto nell'intervallo $\frac{2}{3} \vdash\!\!\dashv 6$, compreso fra le due radici del radicando ed è positivo all'interno di esso; mentre il secondo membro si annulla per $x = \frac{5}{12}$ e si mantiene negativo in tutto l'intervallo $\frac{5}{12} \overline{\qquad} + \infty$, il quale comprende quello or ora trovato. Perciò le soluzioni della disequazione proposta sono date da tutti (e soli) i valori di x appartenenti all'intervallo $\frac{2}{3} \vdash\!\!\dashv 6$.

D) $6\sqrt{x^2 + x - 6} < 5x + 6$.

Applichiamo il secondo teorema del n. prec. Il radicale ha senso fuori dell'intervallo compreso fra le due radici del radicando, cioè negli intervalli $-\infty \dashv -3$ e $2 \vdash +\infty$. Il secondo membro si mantiene positivo soltanto nell'intervallo $-\frac{6}{5} \text{---} +\infty$, cosicchè va escluso l'intervallo $-\infty \dashv -3$ e conservato solo l'intervallo $2 \vdash +\infty$. Infine, elevando a quadrato ambo i membri della disequazione proposta e riducendo, si trova la

$$11x^2 - 24x - 252 < 0,$$

che è soddisfatta nell'intervallo $-\frac{42}{11} \text{---} 6$, compreso fra le due radici del suo primo membro. La disequazione proposta è dunque soddisfatta da tutti (e soli) i valori di x comuni ai due intervalli $2 \vdash +\infty$, $-\frac{42}{11} \text{---} 6$, cioè appartenenti all'intervallo $2 \vdash 6$.

E) $2\sqrt{x-1} + \sqrt{2(27-2x)} > 8$.

Perchè i due radicali abbiano senso simultaneamente, occorre e basta che la x appartenga all'intervallo $1 \vdash\!\dashv \frac{27}{2}$. In questo intervallo il primo membro della disequazione proposta non diventa mai negativo, e, poichè il secondo membro è un numero fisso, essa, in $1 \vdash\!\dashv \frac{27}{2}$, è equivalente (n. prec.) a quella che se ne deduce, elevando a quadrato i due membri, e che con immediate riduzioni si può scrivere

$$2\sqrt{2(x-1)(27-2x)} > 7.$$

Anche per questa nuova disequazione il secondo membro è un numero fisso positivo, mentre il primo, nell'intervallo $1 \vdash\!\dashv \frac{27}{2}$ in cui ha senso, non diventa mai negativo. Perciò essa, in codesto intervallo, è equivalente alla disequazione, che se ne deduce, elevando ambo i membri a quadrato: e questa nuova disequazione si riduce a

$$-16x^2 + 232x - 265 > 0.$$

Essa è soddisfatta nell'intervallo $\frac{5}{4} \text{---} \frac{53}{4}$, compreso fra le due radici del trinomio a primo membro. Poichè questo intervallo è tutto interno all'intervallo $1 \text{---} \frac{27}{2}$, in cui ha senso la disequazione proposta *E*) e vale la sua equivalenza a quelle successivamente dedotte, si conclude che le soluzioni della disequazione *E*) sono tutti (e soli) i valori di x appartenenti all'intervallo $\frac{5}{4} \text{---} \frac{53}{4}$.

Capitolo IV

Problemi di secondo grado

Preliminari

1. Un problema in una sola incognita si dice di 2° *grado*, se, ricorrendo all'Algebra, la sua risoluzione si può far dipendere da quella di un'equazione di 2° grado rispetto all'incognita.

In questa risoluzione bisogna seguire norme perfettamente analoghe a quelle, che sono state date per il caso dei problemi di 1° grado (VI_1, n. 15).

In primo luogo si deve *scegliere l'incognita*, la quale sarà un semplice numero se si tratta di un problema aritmetico, la misura di una grandezza se il problema è geometrico o fisico; e in questo secondo caso bisogna stabilire quale *unità di misura* si intenda adottare per codesta incognita, in relazione con quelle eventualmente prefissate dall'enunciato del problema per i *dati*.

Il problema, qualunque esso sia, stabilisce fra i *dati* e l'*incognita* una qualche relazione, che è destinata a determinare il valore di questa incognita. Ma per lo più esso, accanto a siffatta relazione, che si può dire *quantitativa*, impone al valore dell'incognita qualche condizione puramente *qualitativa*, di natura aritmetica o di disuguaglianza. Ad es., un numero incognito di oggetti non può assumere che valori interi e positivi (o meglio assoluti); una lunghezza, un'area, un volume non può assumere che valori positivi; la distanza dei centri di due circonferenze, segantisi a vicenda, deve essere maggiore della differenza dei raggi e minore della loro somma, ecc. E quando si vuol risolvere algebricamente un problema, conviene fissare fin dapprincipio l'attenzione sia sulle condizioni quantitative, sia su quelle qualitative, che esso impone all'incognita.

Dopo ciò il problema si *mette in equazione* o, come anche si dice, *si intavola*; cioè si traduce la relazione quantitativa, stabilita dal problema fra i dati e l'incognita, in un'equazione; e qui supporremo che si pervenga ad un'equazione di 2° grado rispetto all'incognita x.

Se i dati sono assegnati numericamente, tali risultano anche i coefficienti dell'equazione, e si passa senz'altro a risolverla, applicando la formula risolutiva generale.

Ove accada che l'equazione sia impossibile (cioè che il rispettivo discriminante sia negativo) vuol dire che anche il problema è impossibile. Se invece l'equazione ammette radici, queste non si possono senz'altro accettare come soluzioni del problema; bisogna esaminare se rendano soddisfatte anche le condizioni qualitative imposte dal problema; e se taluna di queste radici non obbedisce a siffatte condizioni, essa, per quanto verifichi l'equazione, va rifiutata, come *estranea* o *non conveniente* al problema.

Talvolta, modificando opportunamente l'enunciato proposto, si riesce a formulare un nuovo problema, che ammetta precisamente come soluzione quella radice dell'equazione del problema dato, che si è riconosciuta estranea ad esso.

Si avverta altresì che se l'equazione del problema si presenta sotto forma fratta e perciò, nel risolverla, si è costretti ad escludere per l'incognita qualche valore, come eccezionale per l'equazione, bisogna verificare direttamente se questi valori eccezionali forniscano soluzioni pel problema proposto (Introd., n. 32).

Meno semplice risulta, in generale, la discussione del problema, se i dati, anzichè assegnati numericamente, sono rappresentati da lettere; ma su ciò torneremo al n. 7. Qui intanto illustreremo le considerazioni precedenti con alcuni esempi, particolarmente semplici, di problemi di 2° grado a dati numerici.

Problemi di 2° grado a dati numerici

2. *La differenza di due numeri è* 8 *e il loro prodotto è* 65. *Trovare i due numeri.*

Assunto, come incognita x, il minore dei due numeri, potremo rappresentare l'altro con $x+8$, onde si dovrà avere

$$x(x+8)=65 \quad \text{ossia} \quad x^2+8x-65=0.$$

Il discriminante (ridotto) di quest'equazione è $4^2+65=81$, cosicchè essa ammette due radici reali distinte. Calcolandole, si trova $-4\pm\sqrt{81}$, cioè 5 e -13. Sono questi i valori, che può avere il numero minore; i corrispondenti valori del numero maggiore si troveranno, aggiungendo 8. Il problema ammette, dunque, due soluzioni: 5 e 13, -13 e -5.

3. *Dividere il numero* 10 *in due parti, tali che il loro prodotto, aumentato della somma dei loro quadrati, dia* 79.

Assunta come incognita x una delle due parti, l'altra sarà $10-x$, cosicchè dovrà essere

$$x(10-x)+x^2+(10-x)^2=79,$$

ossia, riducendo l'equazione a forma normale,

$$x^2-10x+21=0.$$

Il discriminante (ridotto) è $5^2-21=4$, talchè l'equazione ammette due radici reali distinte. Esse sono date da $5\pm\sqrt{4}$, cioè da 7 e 3. Poichè $10-7=3$, $10-3=7$, le due radici diverse della equazione conducono, per il problema, ad un'unica soluzione; cioè alla soluzione 7 e 3. Ciò dipende dal fatto, che le condizioni imposte dal problema ai due numeri richiesti sono *simmetriche*, cioè tali che, qualunque dei due numeri si prenda come incognita, si è sempre condotti alla medesima equazione.

4. *Alcuni operai dividono in parti uguali una gratificazione di L.* 360. *Se fossero stati* 2 *di meno, avrebbero ricevuto, ciascuno, L.* 6 *di più. Quanti sono quegli operai?*

Indichiamone il numero incognito con x. Per questa incognita non si potranno accettare che valori interi positivi (o, meglio, assoluti).

Ciascun operaio, nella ripartizione della gratificazione, riceve Lire $\frac{360}{x}$. Se fossero stati $x - 2$, ciascuno avrebbe ricevuto Lire $\frac{360}{x-2}$. Deve dunque essere

$$\frac{360}{x} + 6 = \frac{360}{x-2}. \tag{1}$$

Per il significato stesso della incognita, non sono ammissibili per essa i valori 0 e 2, che vanno esclusi, come eccezionali, per questa equazione fratta. Perciò, per la risoluzione del nostro problema, possiamo sostituire alla (1) l'equazione intera, che se ne deduce, liberandola dai denominatori, cioè moltiplicandone ambo i membri per $x(x-2)$. Perveniamo così all'equazione

$$360(x-2) + 6x(x-2) = 360x,$$

ossia

$$x^2 - 2x - 120 = 0.$$

Il discriminante (ridotto) è 121, cosicchè l'equazione ammette due radici reali distinte. Esse sono 12 e -10. La seconda va rifiutata, come estranea al problema, il quale perciò ammette l'unica soluzione $x = 12$.

5. *Un serbatoio d'acqua è munito di due condutture di afflusso, e, quando queste due condutture siano entrambe aperte, si riempie in* 24 *ore. Una delle due condutture, da sola, impiega, a riempire il serbatoio,* 20 *ore più dell'altra. Quante ore impiega, da sola, ciascuna delle due condutture?*

Indichiamo con x il numero d'ore impiegato, da sola, dalla seconda conduttura, con che dovrà essere $x > 0$. Il numero d'ore impiegato dall'altra è $x + 20$, cosicchè in 1 ora le due condutture riempiono, rispettivamente, le frazioni

$\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x+20}$ del serbatoio. Poichè insieme riempiono $\frac{1}{24}$ del serbatoio, si deve avere

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+20}=\frac{1}{24}.$$

I valori $x=0$, $x=-20$, che risultano eccezionali per questa equazione fratta, non convengono certo al problema. Possiamo quindi, senz' altro, sostituire a codesta equazione quella, che se ne deduce liberandola dai denominatori, cioè la

$$x^2-28x-480=0.$$

Quest' equazione ammette le due radici $14\pm\sqrt{676}$, cioè 40 e -12, di cui solo la prima conviene al problema proposto. Concludiamo dunque che le due condutture per riempire il serbatoio impiegano, ciascuna da sola, rispettivamente 40 e 60 ore.

6. *Trovare un numero che, aumentato della sua radice quadrata positiva, dia* 90.

Indicato con x questo numero che, in quanto, per l' enunciato del problema, deve ammettere radici quadrate, non può essere che positivo, si è senz' altro condotti all' equazione irrazionale

(2) $$x+\sqrt{x}=90.$$

Liberiamola dal radicale; cioè scriviamo successivamente

$$\sqrt{x}=90-x, \quad x=(90-x)^2,$$

e, infine,

$$x^2-181x+8100=0.$$

Il discriminante di quest' equazione è $\frac{361}{4}$, e le sue radici sono

$$\frac{181}{2}\pm\sqrt{\frac{361}{4}}$$

cioè 81 e 100.

Ma non bisogna dimenticare che, nel liberare la (2) dal radicale, si può essere introdotta qualche radice ad essa estranea (III, nn. 20-21). Ed in realtà si verifica direttamente che dei due valori 81 e 100 solo il primo soddisfa la (2), e perciò fornisce l'unica soluzione del problema proposto.

L'altro valore 100 soddisfa invece l'equazione

$$x - \sqrt{x} = 90,$$

e dà, quindi, l'unica soluzione di quest'altro problema:

Trovare un numero che, diminuito della sua radice quadrata positiva, dia 90.

Problemi di 2° grado a dati letterali

7. Nei problemi dei nn. prec. i dati erano assegnati numericamente. Supponiamo invece che sia proposto un problema di 2° grado, in cui i dati siano rappresentati (tutti o in parte) da *lettere*. Per conseguenza anche l'equazione del problema contiene nei coefficienti codesti *dati letterali*; e, analogamente a quanto si osservò per le equazioni di questa specie (III, n. 16), si può dire che in tal caso non si ha veramente un problema unico, bensì tutta una classe di problemi del medesimo tipo, cioè tanti quanti sono i problemi distinti, che si ottengono da quello proposto, attribuendo ai singoli dati letterali tutti i valori diversi, di cui ciascuno di essi è suscettibile. In generale fra questi problemi alcuni sono possibili, altri no; e, fra quelli possibili, alcuni hanno due soluzioni, altri una sola. È oggetto della *discussione* del problema proposto l'esaminare, ordinatamente e senza omissioni tutti questi diversi casi e il determinare, per ciascuno di essi, le condizioni cui debbono soddisfare i dati letterali, affinchè il caso considerato si verifichi.

Poichè il problema, oltre le relazioni quantitative, che si traducono nell'equazione, può imporre all'incognita qualche condizione qualitativa (n. 1), nella discussione del problema si possono distinguere, almeno teoricamente, due parti:

1) la discussione dell'equazione in se stessa, cioè senza tener conto delle speciali condizioni qualitative imposte dal problema alle soluzioni. Qui i dati letterali del problema si considerano come altrettanti *parametri* (III, n. 16), suscettibili ciascuno di tutti i possibili valori (esclusi soltanto quelli, che, eventualmente, rendono privo di significato qualche termine dell'equazione); e bisogna determinare per questi parametri le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione ammetta radici reali, distinguendo i casi, in cui si hanno due radici distinte da quelli, in cui esse coincidono o, abbassandosi il grado dell'equazione dal 2° al 1°, si riducono ad una sola.

Se questa discussione è resa difficile dalla presenza di più parametri, conviene, in genere, immaginare di tenerli tutti fissi ad eccezione di uno, che si chiama *parametro di discussione* (e che si fa variare in quegli intervalli, che sono consentiti dal suo significato) applicando, per la determinazione dei varî casi offerti dalle radici, le norme indicate ai nn. 16, 17 del Cap. prec.. Per la scelta più opportuna di questo parametro di discussione non è qui possibile dare regole generali; ma per lo più essa è suggerita o dal significato stesso del problema proposto o da considerazioni ausiliarie, che si presentano spontanee a chi, con un conveniente esercizio, abbia acquistato una certa pratica nella risoluzione dei problemi.

2) la discussione dei risultati così ottenuti, in relazione alle condizioni qualitative imposte dal problema all'incognita: si dovrà riconoscere, in ciascuno dei casi di possibilità caratterizzati nella prima parte, quali ulteriori condizioni per i parametri siano necessarie e sufficienti, affinchè almeno una delle radici corrispondenti dell'equazione convenga effettivamente al problema; e spesso accadrà che si debbano rifiutare, come *estranei* al problema, valori dell'incognita, che pur soddisfano l'equazione.

Si deve per altro avvertire che nella pratica non conviene, in genere, discutere completamente l'equazione, prima di passare a tener conto delle condizioni qualitative; se da queste restano esclusi per i parametri certi valori, è inutile preoccuparsi di verificare se per codesti valori l'equazione sia o no possibile, giacchè in ogni caso le eventuali sue radici, cui così si perverrebbe, andrebbero poi rifiutate, come estranee al problema.

8. Nei prossimi nn. daremo alcuni esempi di problemi particolarmente semplici, talchè per la loro discussione basteranno le osservazioni generali del n. prec.

In altri casi occorrono, oltre i particolari avvedimenti accennati pocanzi in relazione ai nn. 16, 17 del Cap. prec., altre considerazioni sussidiarie, di cui ci potremo occupare soltanto nel II biennio.

Qui ci limitiamo ad aggiungere, che, come si vedrà in qualcuno dei prossimi esempi (n. 16), talvolta per giungere all'equazione del problema, conviene scrivere dapprima l'equazione, che lega l'incognita prescelta a qualche altra *incognita ausiliare*, e poi, trovate le espressioni di queste incognite ausiliari per mezzo dei dati, sostituire queste espressioni nell'equazione scritta dianzi.

9. *Dato un segmento di lunghezza* a, *determinarne la sezione aurea.* Per il suo stesso significato il numero a va supposto positivo; e bisogna determinare quella parte x di a, il cui quadrato risulti equivalente al rettangolo della parte residua e dell'intero segmento. Naturalmente deve essere $0 < x < a$.

Ponendo il problema in equazione si è immediatamente condotti alla

$$x^2 = a(a - x), \tag{3}$$

ossia

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Poichè il discriminante $\frac{5}{4}a^2$ è sempre positivo, quest'equazione ammette in ogni caso due radici distinte, le quali, come risulta dai segni dei coefficienti (III, n. 8), sono di segno contrario.

Mentre la radice negativa

$$(4) \qquad -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)a,$$

va rifiutata, come estranea al problema, quella positiva, cioè

$$(5) \qquad -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a,$$

è evidentemente minore di a, cosicchè conviene al problema, di cui dà l'unica soluzione. È questa dunque la *sezione aurea* del segmento a (lato del decagono regolare di raggio a).

È facile interpretare la radice negativa (4) dell'equazione del problema. Il suo valore opposto (o, se si vuole, il suo valore assoluto)

$$(6) \qquad \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)a$$

è la radice positiva dell'equazione, che dalla (3) si ottiene, cambiando segno alla x, cioè della

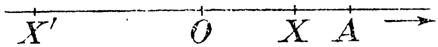
$$x^2=a(a+x),$$

la quale ha naturalmente come radice negativa l'opposta della sezione aurea (6). Ora la precedente equazione si può anche scrivere

$$a^2=x(x-a),$$

onde, confrontandola con la (3), si riconosce che la (6) dà la *lunghezza di quel segmento, la cui sezione aurea è il segmento dato* a (cioè la lunghezza del raggio del decagono regolare di lato a).

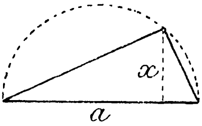
Del resto la radice negativa (4) si può anche interpretare direttamente, considerando il problema su di una retta graduata; ed è questa la considerazione, di cui conviene, di regola, valersi nei casi analoghi. Se sulla retta graduata, a partire dall'origine O, si prende il segmento $OA=a$ (il quale, per l'ipotesi $a>0$, cadrà, rispetto a O, dalla parte



positiva) e si interpreta la x come distanza (relativa) di un incognito punto X da O (il quale cadrà, rispetto ad O, dalla parte positiva o negativa, secondo che è $x>0$ o $x<0$), l'equazione (3), in quanto $a-x$ misura in ogni caso la distanza (relativa) XA, traduce il seguente problema: *Sulla retta OA trovare un punto X tale, che OX risulti media* *proporzionale fra OA ed XA.* Il problema ammette le due soluzioni (4), (5). La seconda, cioè quella positiva, conduce ad un punto X compreso fra O ed A (e dà luogo alla sezione aurea di OA); la soluzione negativa (4) dà invece un punto X' esterno al segmento OA e, precisamente, situato rispetto ad O dalla parte opposta di A.

10. *Su di un segmento di data lunghezza* a, *preso come ipotenusa, costruire un triangolo rettangolo, il quale sia equivalente alla somma del quadrato della sua altezza, relativa all'ipotenusa, e del quadrato di dato lato* b.

Qui va senz'altro supposto $a > 0$ e $b > 0$. Prendiamo, come incognita x l'altezza del triangolo rispetto all'ipotenusa. Per il suo stesso significato, x dovrà risultare positiva e non maggiore di $\frac{a}{2}$, che è la massima altezza dei triangoli rettangoli di ipotenusa a (in quanto il luogo dei loro vertici è la circonferenza di diametro a).



Per porre il problema in equazione basta osservare che l'area del triangolo è $\frac{1}{2}ax$, cosicchè deve risultare

$$\frac{1}{2}ax = x^2 + b^2 \quad \text{ossia} \quad 2x^2 - ax + 2b^2 = 0. \tag{7}$$

Poichè il discriminante è dato da $a^2 - 16b^2$, questa equazione ammette due radici distinte o due radici coincidenti o nessuna radice, secondo che è

$$a^2 > 16b^2 \quad \text{o} \quad a^2 = 16b^2 \quad \text{o} \quad a^2 < 16b^2,$$

od anche, in quanto a e b sono, per dato, entrambi positivi, secondo che è

$$b < \frac{a}{4} \quad \text{o} \quad b = \frac{a}{4} \quad \text{o} \quad b > \frac{a}{4}.$$

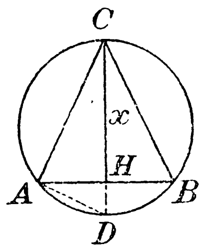
In quest'ultimo caso il problema è senz'altro impossibile. Negli altri due bisogna tener conto delle condizioni qualitative, cui è soggetta la x. Se è $b < \frac{a}{4}$, le due radici, come risulta dai segni dei coefficienti della (7), sono entrambe positive e, poichè la loro somma è data da $\frac{a}{2}$, sono anche tutte e due minori di $\frac{a}{2}$. Perciò queste due radici

(8) $$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16b^2}}{4}$$

forniscono due soluzioni del problema. Se, infine, è $b = \frac{a}{4}$, le due radici coincidono in $\frac{a}{2}$, e si ha per il problema una sola soluzione (doppia).

11. *Iscrivere in un cerchio di dato raggio* r *un triangolo isoscele, di cui la somma della base e dell'altezza abbia una data lunghezza* a.

Supposto risoluto il problema, sia ABC il triangolo cercato, isoscele sulla base AB. Abbassata da C l'altezza CH e prolungatala fino ad intersecare in D la circonferenza, talchè sia $CD = 2r$, assumiamo come incognita x l'altezza CH, cioè poniamo $CH = x$. Per dato è certamente $a > 0$, $r > 0$; e, d'altra parte, l'incognita x, per il suo stesso significato e per le condizioni imposte dal problema, deve soddisfare alle tre disuguaglianze $x > 0$, $x < 2r$, $x < a$. Se poi vogliamo tener conto anche degli eventuali *casi estremi* (privi, a dir vero, di un effettivo senso geometrico), in cui si annulli l'altezza o la base del triangolo isoscele, la x risulta soggetta alle tre limitazioni



(9) $$x \geq 0, \quad x \leq 2r, \quad x \leq a.$$

La condizione quantitativa imposta dal problema è espressa da $x + AB = a$, ossia $AB = a - x$. Ma è $AB = 2AH$; e AH, come altezza del triangolo ADC, che ha l'angolo in A iscritto in una semicirconferenza e quindi retto, è media proporzionale fra $CH = x$ e $HD = 2r - x$. Si deve dunque avere

$$x : AH = AH : 2r - x \quad \text{cioè} \quad AH = \sqrt{x(2r - x)};$$

e il problema si traduce nell'equazione irrazionale

$$2\sqrt{x(2r - x)} = a - x.$$

Liberiamola dal radicale (III, n. 21), non dimenticando che con ciò si possono introdurre soluzioni estranee, che andranno poi rifiutate nella discussione. Perveniamo così all'equazione di 2° grado

$$4x(2r - x) = (a - x)^2,$$

che ridotta a forma normale assume l'aspetto

$$(10) \qquad 5x^2 - 2(a + 4r)x + a^2 = 0.$$

Poichè il discriminante (ridotto) vale $(a + 4r)^2 - 5a^2$, la condizione di realtà delle radici della (10) è data da

$$(a + 4r)^2 \geq 5a^2,$$

ossia, in quanto $a + 4r$ e a sono entrambi positivi,

$$a + 4r \geq \sqrt{5}a,$$

onde risulta

$$a \leq \frac{4r}{\sqrt{5} - 1},$$

ossia, moltiplicando, a secondo membro, numeratore e denominatore per $\sqrt{5} + 1$,

$$a \leq (\sqrt{5} + 1)r.$$

(Si noti che qui a secondo membro compare il doppio del raggio del decagono regolare di lato r: n. 9).

Per $a = (\sqrt{5} + 1)r$ l'equazione (10) ammette la radice doppia (III, n. 4)

$$\frac{a + 4r}{5} = \frac{1}{5}(\sqrt{5} + 5)r = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)r,$$

che evidentemente soddisfa le tre limitazioni (9) e perciò fornisce una soluzione del problema. Resta dunque da esaminare l'ipotesi

$$(11) \qquad a < (\sqrt{5} + 1)r,$$

sotto la quale la (10) ammette due radici reali distinte; ed anzi, poichè i coefficienti della (10), essendo $a > 0$, $r > 0$, presentano sempre la combinazione di segni $+ - +$ (due variazioni), si tratta in ogni caso di due radici positive (III, n. 9). Secondo la formula risolutiva generale, esse sono date da

$$(12) \qquad x = \frac{a + 4r \pm \sqrt{(a + 4r)^2 - 5a^2}}{5},$$

e bisogna vedere se l'una o l'altra o tutte e due verifichino le due ultime limitazioni (9), cioè la $x \leq 2r$ e la $x \leq a$. Cominciando dalla radice maggiore, cioè dalla

$$x = \frac{a + 4r + \sqrt{(a + 4r)^2 - 5a^2}}{5},$$

abbiamo che per un tale valore di x le due indicate limitazioni si possono scrivere, rispettivamente

$$\sqrt{(a + 4r)^2 - 5a^2} \leq 6r - a, \tag{13}$$

$$\sqrt{(a + 4r)^2 - 5a^2} \leq 4(a - r). \tag{14}$$

Ora si riconosce subito che la (13), in forza dell'ipotesi (11), è senz'altro soddisfatta. Infatti, in quanto vale la (11) (cioè il discriminante è > 0) e $\sqrt{5} + 1$ è minore di 6, sono positivi sia il radicando a primo membro, sia il secondo membro, sicchè la limitazione è equivalente a quella, che se ne deduce elevandone ambo i membri a quadrato (III, n. 26); e, con facili riduzioni, si verifica che questa nuova limitazione si riduce a

$$(a - 2r)^2 \geq 0$$

ed è perciò sempre valida.

Passando alla (14), abbiamo anzitutto che, in quanto il primo membro è positivo, non può essere soddisfatta se non per $a \geq r$. D'altra parte, quando sia verificata questa ipotesi, non sono mai negativi nella (14), sotto la condizione (11), nè il radicando a primo membro, nè il secondo membro, cosicchè anche questa limitazione è equivalente a quella, che se ne deduce, elevando i due membri a quadrato; e con ovvie riduzioni si trova che quest'ultima limitazione si riduce alla

$$a \geq 2r. \tag{15}$$

Abbiamo dunque che sotto questa condizione (15), la quale implica la $a \geq r$ che avevamo dovuto imporre pocanzi, la maggiore delle due radici della (10) soddisfa a tutte e tre le limitazioni (9); e, poichè ad esse soddisfa a maggior ragione la radice minore, pur essa positiva, concludiamo che le due radici danno, in questo caso, *due soluzioni* del problema. In particolare per $a = 2r$ le due radici si riducono rispettivamente a $2r$ e $\frac{2}{5}r$; e la prima fornisce per il problema la soluzione, geometricamente illusoria o *degenere*, in cui, annullandosi la base del triangolo isoscele, questo si riduce al diametro CD (contato due volte).

Per $a < 2r$, la radice maggiore della (10) va rifiutata, perchè non soddisfa la limitazione (14), ma rimane da considerare la radice minore, cioè la

$$x = \frac{a + 4r - \sqrt{(a + 4r)^2 - 5a^2}}{5}.$$

Bisogna esaminare se essa renda soddisfatte le due limitazioni $x \leq 2r$, $x \leq a$, che per un tale valore di x diventano

$$-\sqrt{(a+4r)^2-5a^2} \leq 6r-a,$$
$$-\sqrt{(a+4r)^2-5a^2} \leq 4(a-r).$$

La prima è certamente soddisfatta, perchè il secondo membro è positivo, mentre il primo è negativo. Quanto alla seconda, è pur essa soddisfatta per la stessa ragione se è $a \geq r$. Se poi è $a < r$, basta scriverla

$$\sqrt{(a+4r)^2-5a^2} \geq 4(r-a)$$

per riconoscere che, essendo positivi tanto il radicando a primo membro, quanto il secondo membro, è, al solito, equivalente a quella, che se ne deduce, elevando a quadrato i due membri, cioè, con facili riduzioni, alla $a(2r-a) \geq 0$, che, essendo $a < r$, risulta valida. Perciò per $a < 2r$ il problema ha in ogni caso un'unica soluzione, data dalla minore delle radici della (10).

Riassumendo, per $0 < a < 2r$ il problema ammette una sola soluzione; per $a = 2r$ ha due soluzioni, di cui una è degenere; per $2r < a < (\sqrt{5}+1)r$ ammette due soluzioni distinte; infine per $a = (\sqrt{5}+1)r$ ha una soluzione (doppia), mentre per $a > (\sqrt{5}+1)r$ non ha più alcuna soluzione.

12. Abbiamo così dato (nn. 9-11) qualche esempio di applicazione dell'Algebra alla Geometria. Sarà utile aggiungere in proposito alcune osservazioni d'ordine generale.

Notiamo anzitutto che ciascuna delle equazioni di 2° grado (3), (7), (10), in cui abbiamo rispettivamente tradotti i tre problemi geometrici considerati, è *omogenea* rispetto al complesso delle lettere (*incognita* e *dati*), che vi compaiono. È questa una proprietà generale di tutte le equazioni, che si ottengono esprimendo in forma algebrica le relazioni fra grandezze geometriche, quando si rappresentino con lettere le lunghezze dei segmenti, che individuano codeste grandezze. Essa discende dall'ovvia circostanza, che non può sussistere una relazione di uguaglianza se non tra segmenti, o tra superficie, o tra solidi; e l'area di ogni superficie è data (a meno di eventuali coefficienti numerici, indipendenti dall'unità di misura) dal prodotto delle lunghezze di due segmenti, e similmente, il volume di ogni solido è dato dal prodotto delle lunghezze di tre segmenti.

E se talvolta l'equazione, in cui si traduce un problema geometrico, sembra presentarsi in forma non omogenea, ciò dipende dal fatto che in quei suoi termini, che non obbediscono alla omogeneità, si sottintende come fattore, un conveniente numero di volte, il segmento di lunghezza 1 (che dal punto di vista algebrico sarebbe inutile scrivere). Così, quando, per giungere al problema aritmetico della estrazione di radice quadrata, abbiamo considerato il problema geometrico della costruzione del medio proporzionale x fra due dati segmenti a e b (I, n. 1), siamo stati condotti all'equazione omogenea, rispetto alle tre lettere a, b, x,

$$x^2 = ab.$$

Poi, per semplificare quest' equazione, abbiamo supposto che il segmento b si riducesse all' unità, con che l' equazione ha assunto la forma algebricamente non omogenea

$$x^2 = a.$$

Ma nella interpretazione geometrica il secondo membro non va considerato come la lunghezza di un segmento, bensì come l' area del rettangolo di dimensioni a ed 1.

In ogni caso questa *legge di omogeneità* può tornare utile, sia come regola per controllare la esattezza della equazione, in cui siasi tradotto un dato problema geometrico, sia, viceversa, come guida nell' interpretare geometricamente una data equazione.

Ed è per questa ragione di omogeneità, che, quando fra i dati di un problema figurano simultaneamente segmenti e superficie o solidi, l' area di queste superficie si suppone di solito assegnata sotto la forma l^2 (area del quadrato di dato lato l) o πr^2 (area del cerchio di dato raggio r), ecc.; e così il volume di ciascun solido dato si suppone assegnato sotto la forma l^3 (volume del cubo di dato spigolo l) o $\frac{4}{3}\pi r^3$ (volume della sfera di dato raggio r), ecc..

13. In secondo luogo, riprendiamo le considerazioni del n. 7 sulla discussione dei problemi di 2° grado a dati letterali per fare un passo ulteriore.

Quando si tratta con l'Algebra un problema geometrico e, dopo avere caratterizzati i casi di possibilità, si sono ottenute, in base alle formule risolutive, le espressioni delle corrispondenti soluzioni, si cerca di dedurne la *costruzione* delle soluzioni trovate.

Le espressioni letterali di queste soluzioni danno una serie ben definita di operazioni, che eseguite sulle misure delle grandezze date, conducono a trovare le misure delle grandezze incognite. Orbene si cerca di *interpretare geometricamente* codeste operazioni algebriche, in guisa da trarne una serie di costruzioni, eseguibili con gli strumenti del disegno (riga, compasso, e, se fa comodo, anche squadra), le quali permettano di dedurre direttamente dalle grandezze date le grandezze incognite.

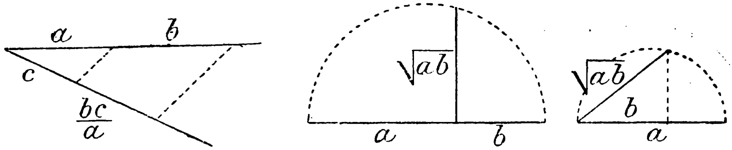
Le formule risolutive delle equazioni di 2° grado implicano soltanto operazioni razionali (cioè di somma algebrica, moltiplicazione, divisione) e di estrazione di radice quadrata. Perciò alla interpretazione geometrica di tali formule si arriverà in ogni caso, quando si sappiano interpretare i risultati delle operazioni elementari or ora indicate (subordinatamente alla condizione, che sia sempre rispettata la condizione di omogeneità).

Non occorre spendere parole sulla costruzione della somma $a + b$ e della differenza $a - b$, dove con a e b, come con ogni altra lettera che useremo in queste considerazioni, intendiamo rappresentare numeri positivi (o assoluti), in quanto vanno interpretati come lunghezze di segmenti.

Le espressioni, che restano da interpretare e costruire sono semplicemente

$$\frac{bc}{a} \quad \text{e} \quad \sqrt{ab},$$

di cui la prima si può interpretare come il segmento quarto proporzionale dopo i tre segmenti a, b e c (I, n. 1) ed è perciò costruibile col noto procedimento, suggerito dal cosid-

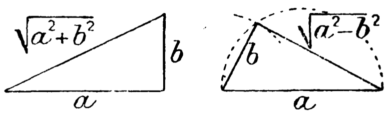


detto teorema di Talete. La seconda si può interpretare, come il medio proporzionale fra i due segmenti a e b (I, n. 1), e si può costruire con procedimenti altrettanto noti.

A queste espressioni elementari vanno aggiunte, come particolarmente importanti, queste altre due

$$\sqrt{a^2+b^2}, \quad \sqrt{a^2-b^2},$$

che si interpretano e si costruiscono immediatamente, ricordando il teorema di Pitagora. La prima è l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti a e b; l'altra è il secondo cateto del triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa a e per primo cateto b.



E le interpretazioni e le costruzioni così date per le varie espressioni elementari dianzi considerate permettono di interpretare e costruire anche ogni altra espressione, in cui figurino soltanto operazioni razionali (addizioni algebriche, moltiplicazioni, divisioni) ed estrazioni di radici quadrate [1].

14. Come illustrazione delle considerazioni precedenti, diamo la costruzione delle radici delle equazioni di 2° grado, considerate sotto le loro forme omogenee tipiche. Queste varie forme, quando il primo coefficiente sia ridotto all'unità, differiscono fra loro per i segni del secondo

(1) Cfr. ENRIQUES-AMALDI, *Geometria elementare*, Geometria piana, Parte II; Bologna, Zanichelli. Cap. IX, nn. 34-37.

coefficiente e del termine noto e sono date da

$$x^2 \pm ax \pm b^2 = 0.$$

Ma siccome costrurremo, in valore assoluto, anche le radici negative, potremo limitarci a considerare i due tipi

$$x^2 - ax + b^2 = 0 \tag{16}$$

e

$$x^2 + ax - b^2 = 0, \tag{17}$$

giacchè gli altri due si riducono a questi, cambiando segno a x, e con ciò cambia il segno, ma non il valore assoluto, delle radici.

Cominciando dalla (16), notiamo che quest'equazione, in quanto si può scrivere

$$ax - x^2 = b^2 \quad \text{ossia} \quad x(a-x) = b^2,$$

traduce il problema geometrico di *determinare le dimensioni* (x e $a - x$) *del rettangolo di perimetro* 2a, *equivalente al quadrato di lato* b.

La condizione di possibilità della (16) è data da

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b^2,$$

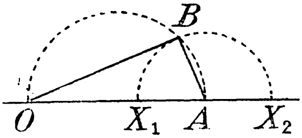
cioè, in quanto a e b sono positivi,

$$\frac{a}{2} \geq b.$$

Se $\frac{a}{2} > b$, le due radici della (16), fra loro distinte ed entrambe positive, sono date da

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2},$$

e si costruiscono sommando e sottraendo al segmento $\frac{a}{2}$ il segmento $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$, cioè il secondo cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa $\frac{a}{2}$ e di primo cateto b. La costruzione è effettuata nella unita figura dove $OA = \frac{1}{2}a$, $OB = b$ e le due radici (dimensioni del rettangolo voluto) sono rappresentate da OX_1, OX_2.



Se poi è $\frac{a}{2} = b$, le due radici coincidono nel valore $\frac{a}{2}$, cioè b, e il rettangolo voluto è lo stesso quadrato dato.

Passiamo alla (17), che in quanto si può scrivere

$$x(x+a)=b^2,$$

traduce il problema geometrico di *determinare le dimensioni del rettangolo* (x e $x+a$), *che abbia come differenza dei lati* a *e sia equivalente al quadrato di lato* b.

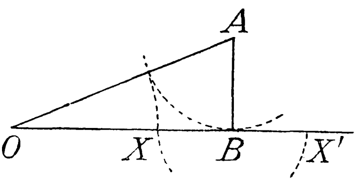
Qui, essendo negativo il termine noto, l'equazione è sempre possibile ed ammette in ogni caso due radici distinte e di segno contrario, che sono date da

$$-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}.$$

Quella positiva, cioè la

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}-\frac{a}{2}, \tag{18}$$

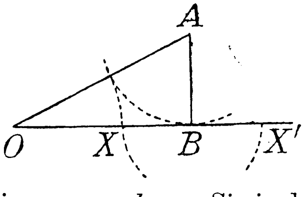
si costruisce sottraendo il segmento $\frac{a}{2}$ dall'ipotenusa $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$ del triangolo rettangolo di cateti $\frac{a}{2}$ e b. Nell'unita figura, dove $OB=b$, $AB=\frac{1}{2}a$, essa è rappresentata da OX. Il valore assoluto della radice negativa, cioè



$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}+\frac{a}{2}, \tag{19}$$

è rappresentato da OX', dove X' è il simmetrico di X rispetto a B.

Altrettanto facile è la costruzione delle soluzioni (5), (8), (12) dei problemi considerati ai nn. 9 - 11. L'alunno le costruisca per esercizio.



In particolare le costruzioni della sezione aurea (5) del segmento a e del segmento (6), che ammette a come sezione aurea, rientrano in quelle date or ora per la (18) e la (19), quando si supponga $b=a$. Si ricade così sulle ben note costruzioni, che sono suggerite dalla teoria dei triangoli simili [1].

15. Torniamo alla risoluzione di problemi di 2° grado, per indicare, in questo n. e nel seguente, due esempi non più geometrici, ma fisici.

A quale distanza fra la Terra e la Luna (e sulla loro congiungente) dovrebbe trovarsi un terzo corpo celeste perchè potesse restare, rispetto

---

[1] Enriques-Amaldi, *Geometria elementare*, Geom. piana. Parte II, Cap. VII, n. 37.

ad esse, in quiete, sotto l'azione delle loro due attrazioni? Si prenda la distanza dalla Terra alla Luna uguale a km. 385000 e la massa della Terra uguale ad 81 volte quella della Luna. Inoltre si tenga presente che le attrazioni esercitate su di uno stesso corpo celeste dagli altri corpi sono direttamente proporzionali alle masse di questi e inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal corpo attratto.

Trattiamo il problema in generale, anche per non introdurre subito nei calcoli un numero così grande come la distanza fra la Terra e la Luna. Pensiamo dunque, due corpi celesti T ed L quali si vogliano, e indichiamo con $h > 0$ la loro distanza (misurata in km.), con k il rapporto tra la massa di T e quella di L, supponendo, per fissare le idee, $k \geq 1$.

Chiamato C il corpo celeste, che vogliamo possa restare in quiete sotto le attrazioni simultanee di T ed L, abbiamo, per lo stesso enunciato del problema, che C deve trovarsi sulla retta TL e compreso fra T ed L. Perciò, se come incognita x assumiamo la distanza TC, deve essere

$$0 < x < h. \tag{20}$$

Per porre il problema in equazione, osserviamo che le attrazioni esercitate da T e da L sullo stesso corpo C debbono stare fra loro nel rapporto k delle loro masse e, nello stesso tempo, nel rapporto degli inversi dei quadrati delle rispettive distanze x e $h - x$ da C. Insomma codeste due attrazioni debbono stare fra loro come $\frac{k}{x^2}$ sta a $\frac{1}{(h-x)^2}$. Ma perchè C resti in quiete, occorre e basta che le due attrazioni, le quali agiscono in senso opposto, si elidano a vicenda, cioè che il loro rapporto sia uguale ad 1. Si deve dunque avere

$$\frac{k}{x^2} = \frac{1}{(h-x)^2}. \tag{21}$$

È questa l'equazione del problema. Si tratta di un'equazione fratta, i cui valori eccezionali $x = 0$ e $x = h$ vanno senz'altro esclusi, in forza delle condizioni (20). Con questa esclusione, possiamo sostituire alla (21), l'equazione, che se ne deduce, moltiplicandone ambo i membri per $x^2(h - x)^2$, cioè, in forma normale, la

$$(k - 1)x^2 - 2hkx + h^2k = 0. \tag{22}$$

Per $k = 1$ quest'equazione si riduce all'equazione di 1° grado

$$-2hx + h^2 = 0,$$

che ammette l'unica soluzione $\frac{h}{2}$; e il risultato era prevedibile. Infatti in questo caso, essendo $k = 1$, T ed L hanno masse uguali, ed è quindi evidente, che il corpo C, per poter restare in quiete rispetto a T ed L, deve trovarsi nel punto medio della loro distanza TL.

Escluso questo caso, cioè supposto $k > 1$, abbiamo che il discriminante dell'equazione di 2° grado (22) è dato, a meno del fattore 4, da h^2k, cosicchè risulta sempre positivo; e la (22) ammette due radici, le quali, come si rileva dai segni dei cofficienti, sono entrambe positive. Esse sono date da

$$\frac{hk \pm \sqrt{h^2k}}{k-1} = \frac{k \pm \sqrt{k}}{k-1} h.$$

Ma, essendo

$$k + \sqrt{k} > k - 1 > 0,$$

la maggiore di queste due radici risulta maggiore di h e quindi estranea al problema. Quanto, invece, alla radice minore

$$\frac{k - \sqrt{k}}{k - 1} h, \tag{23}$$

si osservi, che essendosi supposto $k > 1$ e quindi $k^2 > k$, risulta $\sqrt{k} > 1$ e $k > \sqrt{k}$, perchè in caso contrario si avrebbe, elevando a quadrato ambo i membri, rispettivamente (Introd., n. 5F) $k \leq 1$, $k^2 \leq k$. Perciò

$$0 < k - \sqrt{k} < k - 1,$$

e la radice (23), come minore di h, soddisfa effettivamente il problema, di cui costituisce l'unica soluzione.

Nel caso proposto dall'enunciato, cioè per $h = 385000$, $k = 81$, il valore della (23) è

$$\frac{81 - \sqrt{81}}{80} 385000 = \frac{9}{10} 385000 = 346500.$$

È questa, in km., la distanza dalla Terra, a cui, sulla congiungente della Terra con la Luna, dovrebbe trovarsi un corpo, perchè potesse restare, rispetto ad esse, in quiete.

16. *Dalla bocca di un pozzo di miniera si lascia cadere sul fondo una pietra, e fra l'istante, in cui si abbandona a se stessa la pietra, e quello, in cui si avverte il suo tonfo sul fondo, passano* t *secondi. Quanto è profondo il pozzo? Si tenga presente che, quando si lascia cadere un corpo (e si prescinde dalla resistenza dell'aria), gli spazi, che esso percorre nella sua caduta, sono proporzionali ai quadrati delle durate della caduta, misurate a partire dall'istante, in cui il corpo si è abbandonato a se stesso, e che nel primo secondo di tempo esso percorre m.* 4,905. *D'altra parte si ricordi che il suono si propaga (di moto uniforme), percorrendo ad ogni secondo m.* 333.

Assumiamo come incognita x la profondità del pozzo, misurata in metri (e necessariamente positiva); e, per semplicità di scrittura poniamo

$$4{,}905 = \frac{1}{2} g\,, \quad 333 = v,$$

cioè indichiamo con g la cosiddetta *accelerazione della gravità* (in metri al secondo), e con v l'analoga misura della *velocità di propagazione del suono.*

Inoltre denotiamo per un momento con t_1 il numero di secondi, che la pietra impiega a cadere dalla bocca del pozzo al fondo, e con t_2 il numero di secondi, che il suono prodotto dalla pietra, battendo sul fondo, impiega per giungere alla bocca del pozzo. Si avrà

$$t_1 + t_2 = t, \tag{24}$$

con $t_1 < t$, $t_2 < t$.

Ora i numeri di metri, percorsi dalla pietra, cadendo per 1 o 2 o 3... o t_1 secondi, sono proporzionali rispettivamente a $1^2, 2^2, 3^2, \dots, t_1^2$; e, siccome nel primo minuto secondo la pietra percorre precisamente $\frac{1}{2}\,g$ metri, i numeri di metri percorsi cadendo per 2 o 3... o t_1 secondi, si otterranno moltiplicando rispettivamente $2^2, 3^3, \dots, t_1^2$ per $\frac{1}{2}\,g$. Ma in t_1 secondi la pietra tocca il fondo del pozzo, cioè ne percorre tutta la profondità x; si avrà perciò

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2.$$

D'altra parte, poichè il suono ad ogni secondo percorre v metri e a salire dal fondo del pozzo alla bocca impiega t_2 secondi, sarà

$$x = v t_2. \tag{25}$$

Da queste due ultime equazioni si deduce

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad t_2 = \frac{x}{v},$$

e quindi, sostituendo nella (24),

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t. \tag{26}$$

Abbiamo dunque che il nostro problema conduce ad un'equazione irrazionale. Liberandola dal radicale, perveniamo all'equazione di 2° grado

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(\frac{1}{g} + \frac{t}{v}\right)x + t^2 = 0, \tag{27}$$

il cui discriminante

$$\frac{1}{g}\left(\frac{2t}{v}+\frac{1}{g}\right),$$

in quanto per dato è $t > 0$, $g > 0$, $v > 0$, risulta sempre positivo. Essa ammette perciò due radici distinte; e dai segni dei coefficienti si rileva che queste due radici sono entrambe positive. Poichè la (27) è una conseguenza dell' equazione (26) del problema, la soluzione di questo va cercata fra codeste due radici, che sono date da

$$v\left\{t+\frac{v}{g}\pm\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}\right\}.$$

Ma la maggiore di queste due radici (cioè quella corrispondente al segno $+$) va rifiutata, perchè è manifestamente maggiore di vt, mentre la profondità del pozzo, in forza della (25), deve risultare uguale a vt_2, con $t_2 < t$. Non resta dunque che la radice minore; e, senza fare alcuna ulteriore verifica, siamo sicuri che essa soddisfa il problema, perchè questo, come risulta dall' esperienza, ammette indubbiamente una soluzione, e questa sua soluzione deve per necessità soddisfare l' equazione (26), in cui esso si traduce, e quindi anche la (27), che è una conseguenza della (26).

Concludiamo così che la profondità del pozzo è data, in metri da

$$v\left\{t+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}\right\}.$$

Ad es., prendendo $t = 5^s{,}5$ (e naturalmente $g = 9{,}81$, $v = 333$) si trova che la profondità del pozzo è, a meno di 1 cm., di m. 111,71.

Capitolo V

Tipi elementari di equazioni di grado superiore al secondo e di sistemi di grado superiore al primo

Equazione biquadratica elementare ed equazioni reciproche di 3° e 4° grado

1. Anche nel campo elementare si incontrano problemi. che, trattati con l'Algebra, conducono ad equazioni di grado superiore al 2°. È gloria degli algebristi italiani del Cinquecento la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, le cui formule risolutive generali sono state scoperte per quelle di 3° da Scipione Dal Ferro (1456–1526) e per quelle di 4° da Ludovico Ferrari (1522–1565). Ma queste formule risolutive implicano, insieme con operazioni razionali (II, n. 1) e di estrazione di radice quadrata, altre operazioni di carattere più elevato (precisamente estrazioni di radice cubica) [1].

Tuttavia vi sono equazioni speciali di grado superiore al 2°, la cui risoluzione, appunto in forza della loro forma particolare, si può ridurre a quella di una o più equazioni di 2° grado ed è, quindi, effettuabile con sole operazioni razionali e di estrazione di radice quadrata. Studieremo nei prossimi nn. 2–5, per il caso del 3° e 4° grado, i tipi più semplici e notevoli di tali equazioni *risolubili elementarmente*.

---

(1) Quasi tre secoli dopo fu dimostrato da un altro algebrista italiano, Paolo Ruffini (1765–1822), che per la risoluzione delle equazioni generali di grado superiore al 4° non bastano più nemmeno le estrazioni di radice di indice qualsiasi.

In base a quanto dicemmo al n. 13 del Cap. prec., le formule risolutive di siffatte equazioni, ove si interpretino geometricamente, conducono a costruzioni eseguibili con la riga e il compasso.

2. Consideriamo in primo luogo un' equazione di 4° grado, la quale non contenga potenze ad esponente dispari dell' incognita (*equazione biquadratica elementare* o, semplicemente, *biquadratica*). Ove si trasportino tutti i termini in un membro, essa assumerà la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

dove a, b, c sono coefficienti, che si suppongono noti; e, poichè è lecito supporre a diverso da zero, si potrà ridurre a

$$x^4 + px^2 + q = 0, \tag{1}$$

dove con p e q si designano i rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$.

Ora codesta equazione si può anche scrivere

$$(x^2)^2 + px^2 + q = 0,$$

cosicchè, se x soddisfa l' equazione (1), il suo quadrato $u = x^2$ (che qui si prende come *incognita ausiliare*) dovrà soddisfare l' equazione (detta *risolvente* della data)

$$u^2 + pu + q = 0. \tag{2}$$

Se quest' equazione ammette una soluzione positiva u_1, le due radici quadrate

$$\pm \sqrt{u_1}$$

soddisfaranno la (1); perciò, secondo che l' equazione ausiliare (2) ammette due radici positive, una (doppia) o nessuna, l' equazione biquadratica ammetterà *quattro* radici reali (a due a due uguali in valore assoluto e di segno contrario) o *due* (fra loro uguali in valore assoluto e di segno contrario) o *nessuna*.

Il primo caso si verifica (III, n. 8) per

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \quad p < 0, \quad q > 0,$$

e le quattro radici sono date dall'unica formula

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

ove si scelgano nei quattro modi possibili i segni; il secondo caso si verifica sia per

$$q < 0,$$

e sotto questa ipotesi le due radici reali sono (III, n. 8)

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

sia per

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \quad p < 0,$$

e allora le radici reali si riducono a

$$\pm\sqrt{-\frac{p}{2}},$$

e ciascuna va considerata come *doppia*.

Ad es., l'equazione

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$$

ammette le quattro radici ± 2, $\pm \frac{3}{2}$; le

$$3x^4 - 25x^2 - 18 = 0, \quad 81x^4 - 72x^2 + 16 = 0$$

hanno le due radici ± 3 e, rispettivamente, le due radici doppie $\pm \frac{2}{3}$; le

$$x^4 + x^2 + 1 = 0, \quad 2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$$

sono entrambe prive di radici reali.

3. Un'altra classe di equazioni riconducibili ad equazioni di 2° grado è costituita dalle cosiddette equazioni di 3° e 4° grado *a radici reciproche* o, più semplicemente, *reciproche.* Per qualsiasi grado si dice reciproca di *prima* *specie* ogni equazione (intera), in cui, quando tutti i termini siano portati in un membro e ordinati, come di solito, secondo le potenze decrescenti dell'incognita, sono uguali i coefficienti del primo e dell'ultimo termine, e così pure quelli del secondo e del penultimo, del terzo e dell'antipenultimo, ecc., cioè i coefficienti di tutte le coppie di termini equidistanti dagli estremi. Si dice, invece, *reciproca* di *seconda specie* ogni equazione, in cui ciascuna di codeste coppie di termini equidistanti dagli estremi ha come coefficienti due numeri opposti. La ragione di tali denominazioni si vedrà, nel caso del 3° e del 4° grado, fra un momento.

Cominciando dal 3° grado, abbiamo che le equazioni di prima o seconda specie sono rispettivamente del tipo:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \tag{3}$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0. \tag{4}$$

Ora i primi membri di queste due equazioni si possono scrivere

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + b(x + 1)x,$$
$$ax^3 + bx^2 - bx - a = a(x^3 - 1) + b(x - 1)x;$$

ed, ove si ricordi (Introd., n. 16) che

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1), \quad x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

si perviene alle due identità

$$\left\{\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= (x + 1)(ax^2 + [b - a]x + a), \\ ax^3 + bx^2 - bx - a &= (x - 1)(ax^2 + [b + a]x + a), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

le quali, del resto, si ottengono anche direttamente, dividendo, con la regola del RUFFINI (Introd., n. 20), i due polinomi a primo membro per $x + 1$ ed $x - 1$ rispettivamente.

Risulta di qui che la equazione di prima specie (3) si decompone nelle due equazioni

$$x + 1 = 0, \quad ax^2 + [b - a]x + a = 0,$$

e, quindi, ammette, oltre la radice -1, le eventuali radici di quest'ultima equazione (reciproca) di 2° grado.

Similmente, la equazione di seconda specie (4), in forza della seconda delle identità (5), si decompone nelle due equazioni

$$x-1=0, \quad ax^2+[b+a]x+a=0,$$

e perciò ammette, oltre la radice 1, le eventuali radici di quest'altra equazione (pur essa reciproca) di 2° grado.

Per ciascuna delle due equazioni di 2° grado dianzi ottenute, quando sia soddisfatta la condizione di realtà, le due radici hanno per prodotto 1 (III, n. 7), cioè sono fra loro reciproche, e, poichè tanto -1 quanto 1 è reciproco di se stesso, risulta giustificato il nome dato alle equazioni (3), (4).

P. es. le equazioni

$$3x^3-5x^2-5x+3=0, \quad x^3+3x^2-3x-1=0$$

ammettono le radici (si ricordi il n. 10 del Cap. II)

$$-1, \quad \frac{4+\sqrt{7}}{3}, \quad \frac{4-\sqrt{7}}{3}=\frac{3}{4+\sqrt{7}},$$

e, rispettivamente,

$$1, \quad -2+\sqrt{3}, \quad -2-\sqrt{3}=\frac{1}{-2+\sqrt{3}}.$$

4. Le equazioni reciproche di 4° grado di prima o seconda specie sono, rispettivamente, del tipo:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \tag{6}$$

$$ax^4+bx^3 \qquad -bx-a=0. \tag{7}$$

Si noti, che nell'equazione di seconda specie manca il termine in x^2, perchè il rispettivo coefficiente, come corrispondente al termine equidistante dagli estremi, deve essere uguale al suo opposto, e quindi nullo.

Il metodo di risoluzione è, per questi due tipi di equazioni, diverso. Nel caso della (6), osserviamo che essa (come, del resto, ogni altra equazione reciproca) non ammette certamente la radice $x = 0$, perchè il termine noto a non può annullarsi, senza che l'equazione si riduca di grado. Perciò la (6) è equivalente (Introd., nn. 29, 30) all'equazione, che da essa si deduce, dividendone ambo i membri per x^2,

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0,$$

ossia

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \tag{8}$$

Se allora si prende come incognita ausiliare la

$$u = x + \frac{1}{x},$$

si ha, elevando a quadrato ambo i membri,

$$u^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

ossia

$$u^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

cosicchè, sostituendo nella (8) si è condotti alla equazione ausiliare di 2° grado (*risolvente* della data)

$$a(u^2 - 2) + bu + c = 0. \tag{9}$$

Se u_1 è una sua soluzione, le eventuali soluzioni della equazione

$$x + \frac{1}{x} = u_1,$$

che si può scrivere

$$x^2 - u_1 x + 1 = 0 \tag{10}$$

ed è perciò anch'essa di 2° grado (e reciproca), soddisfaranno anche la (6).

In tal modo si ottengono tutte le soluzioni della (6), e poichè la (9) può avere al massimo due soluzioni reali e per ciascuna di esse la (10) può pur essa averne al massimo due, concludiamo che la (6) ammetterà al massimo quattro soluzioni; e, precisamente può averne 4 o 2 o nessuna.

Si noti che le radici della (10), quando esistono, hanno per prodotto 1 (III, n. 8), cosicchè anche per la equazione (6) le eventuali radici sono a due a due reciproche.

Per es. le equazioni

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

hanno le radici

$$2 + \sqrt{3}, \quad 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}},$$

e, rispettivamente,

$$\frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \quad \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{2}{5 + \sqrt{21}}.$$

Per risolvere la equazione di seconda specie (7) si procede in modo analogo a quello tenuto per le equazioni reciproche di 3° grado (n. prec.). Essa si può scrivere

$$a(x^4 - 1) + b(x^2 - 1)x = 0,$$

ossia, in forza dell'identità $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$,

$$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0,$$

cosicchè si decompone nelle due equazioni

$$x^2 - 1 = 0, \quad ax^2 + bx + a = 0.$$

Perciò la (7) ammette sempre le due radici 1 e -1, e, in più di queste, le eventuali radici dell'equazione (reciproca) di 2° grado, or ora scritta.

Si vede così che anche per la (7) le radici sono a due a due reciproche.

Ad es., l'equazione

$$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

ammette le radici

$$1, \quad -1, \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-3 + \sqrt{5}};$$

mentre per la

$$3x^4 - x^3 + x - 3 = 0$$

si hanno soltanto le radici (reali) $+1$ e -1.

5. Avvertiamo che sono analogamente riconducibili ad equazioni di 2° grado anche tutte le equazioni reciproche di 5° grado e quelle di 6° grado di seconda specie. Infatti, come si può dimostrare per esercizio, ciascuna di esse ammette *almeno* una delle due radici $+1$, -1; e ciò basta perchè se ne possa ridurre la risoluzione a quella di un'equazione reciproca di grado minore.

Sistemi di 2° grado

6. Quanto ai sistemi di due (o più) equazioni in altrettante incognite, noi sinora sappiamo risolvere soltanto quelli di 1° grado, cioè costituiti da sole equazioni di 1° grado (Introd., nn. 40-55). Dopo questi, i sistemi più semplici sono quelli costituiti da *una* equazione di 2° grado e da una (o più) equazioni di 1° grado. Essi si chiamano *sistemi di* 2° *grado*; e faremo vedere nei prossimi nn. che *la risoluzione di tali sistemi si può sempre ridurre a quella di una equazione di* 2° *grado in una sola incognita*, ed è quindi effettuabile con sole operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate.

7. Riferiamoci ad un esempio, e consideriamo il sistema di 2° grado nelle due incognite x e y

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3x - 2y - 2 &= 0, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 10y + 8 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Per risolverlo ci varremo di quello stesso *metodo di sostituzione*, che abbiamo imparato ad applicare nel caso dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite (Introd., n. 42).

Si debbono trovare tutte le coppie di valori, che sostituiti nelle due equazioni, rispettivamente ad x ed y, le rendono soddisfatte entrambe. Se delle due equazioni date (11) si considera soltanto quella di 1° grado, e si vogliono tutte le sue soluzioni, si comincia col risolverla rispetto ad una delle incognite, per es. alla y, come se l'altra fosse conosciuta. Si trova in tal modo

$$(12) \qquad y = \frac{3x - 2}{2};$$

e le soluzioni della prima delle (11) sono date da tutte (e sole) le coppie di valori, che si ottengono da

$$(13) \qquad x, \quad y = \frac{3x - 2}{2}$$

attribuendo ad x tutti i possibili valori.

Fra queste infinite coppie di valori dobbiamo considerare quelle che, eventualmente, soddisfano anche la seconda equazione (11). Ora, esprimendo che la coppia di valori (13) soddisfa anche questa seconda equazione, cioè sostituendo in essa, al posto di y, l'espressione (12), otteniamo l'equazione di 2° grado nella sola incognita x

$$x^2 - (3x - 2)x + \frac{(3x - 2)^2}{2} + 4x - 5(3x - 2) + 8 = 0,$$

ossia, eseguendo le operazioni indicate e semplificando,

$$(14) \qquad x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Essa definisce quegli eventuali valori di x, per cui le (13) danno le soluzioni comuni alle due equazioni, cioè le soluzioni del sistema. Poichè la (14) ammette le due radici $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ e, in corrispondenza di questi due valori di x, la (12) dà rispettivamente $y_1 = 5$, $y_2 = 2$, il sistema (11) ammette le due soluzioni $x_1 = 4$, $y_1 = 5$ e $x_2 = 2$, $y_2 = 2$.

L'equazione nella sola x (14), che abbiamo dedotto come conseguenza del dato sistema, si può dire ottenuta da esso, *eliminando* l'incognita y, e si chiama la sua *risultante* in x.

Anzichè la y, si può similmente eliminare dal sistema la x, e si perviene alla *risultante* in y, naturalmente diversa dalla (14), ma pur essa di 2° grado. È chiaro che anche in questo secondo modo si debbono ottenere per il sistema (11) le medesime soluzioni; e sarà un buon esercizio il verificarlo.

Il sistema (11), come ogni altro dello stesso tipo, si dice di 2° grado appunto perchè tali sono le sue risultanti (in ciascuna delle due incognite).

8. Il *metodo di sostituzione* dianzi spiegato è evidentemente applicabile ad ogni possibile sistema di 2° grado in due incognite, cioè costituito da un' equazione di 1° grado e da una di 2°. Nel caso del sistema (11) abbiamo ottenuto due soluzioni, in quanto la risultante (14) aveva due radici reali; ma come ben si comprende, può anche succedere, secondo i casi, che la risultante abbia due radici coincidenti o sia priva di radici reali. Corrispondentemente il sistema avrà un' unica soluzione (da considerare come doppia) oppure non ne ammetterà alcuna.

Così, ad es. si verifica, applicando il metodo di sostituzione, che per il sistema

$$\begin{cases} 6x + y + 4 = 0, \\ x^2 - 2xy - y^2 + y - 3 = 0, \end{cases}$$

la risultante in x è data dall' equazione

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

la quale ammette due radici coincidenti nel valore $x = -1$, cui corrisponde per il sistema l' unica soluzione (doppia) $x = -1$, $y = 2$.

Invece per il sistema

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 - 10x + 2y + 25 = 0, \end{cases}$$

la risultante in x è

$$x^2 - 4x + 5 = 0;$$

e poichè quest' equazione è priva di radici reali, il sistema è impossibile.

9. Fra i sistemi di 2° grado in due incognite ve ne sono taluni particolarmente notevoli per le *interpretazioni geo-*

metriche, di cui sono suscettibili. Naturalmente resta applicabile ad essi il metodo di sostituzione del n. 7; ma, caso per caso, la loro forma suggerisce particolari artificî. che conducono alla risoluzione più rapidamente.

Diamone qualche esempio, e cominciamo dal più semplice:

$$\left\{\begin{aligned} x+y&=h,\\ xy&=k,\end{aligned}\right. \tag{15}$$

dove h e k si suppongono dati (numeri od espressioni letterali). Si è qui condotti ad un problema già trattato: *Trovare due numeri, di cui si conoscono la somma e il prodotto* (III, n. 10). Questi due numeri sono le radici dell'equazione di 2° grado

$$u^2 - hu + k = 0; \tag{16}$$

e la condizione di possibilità di quest'equazione, e quindi del sistema (15), è data da $\frac{h^2}{4} - k \geq 0$.

Se è precisamente $\frac{h^2}{4} - k > 0$, e sono u_1, u_2 le due radici reali distinte della (16), cioè si pone

$$u_1 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - k},\quad u_2 = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - k},$$

il sistema ammette le due soluzioni $x = u_1$, $y = u_2$ e $x = u_2$, $y = u_1$; cioè, scambiando in una soluzione i valori di x e y, si ottiene l'altra. Ciò deriva dal fatto che il sistema non varia, se nelle sue equazioni si scambiano fra loro le due incognite x ed y, o, come si suol dire, il sistema è *simmetrico*.

Ad un sistema del tipo (15) conduce il problema geometrico: *Determinare le dimensioni di un rettangolo di dato perimetro, che sia equivalente ad un dato quadrato.*

Se $2p$ è il perimetro prefissato ed l è il lato del quadrato dato (dove p ed l denotano due numeri positivi o, meglio, assoluti), le dimensioni di un tale rettangolo debbono essere due numeri x ed y, pur essi entrambi positivi, soddisfacenti alle due equazioni

$$x + y = p, \quad xy = l^2.$$

L'equazione di 2° grado, di cui essi sono le radici, è la

$$u^2 - pu + l^2 = 0; \tag{17}$$

onde il problema è possibile a patto che sia

$$\frac{p^2}{4} \geq l^2,$$

o, ciò che è lo stesso, in quanto p ed l sono positivi (Introd., n. $5F$),

$$\frac{p}{2} \geq l, \quad \text{ossia} \quad 2p \geq 4l;$$

e, sotto questa ipotesi, le due radici della (17), come risulta dai segni dei coefficienti (III, nn. 8, 9), sono entrambe positive e perciò rispondono effettivamente al problema. Abbiamo dunque che questo è possibile, purchè il perimetro prefissato non sia minore di quello del quadrato dato. Se è uguale, cioè se $2p = 4l$, le due radici della (17) coincidono ed hanno il valore $\frac{p}{2} = l$, cosicchè si ricade sul quadrato dato.

Risulta di qui che *tutti i rettangoli equivalenti ad un dato quadrato hanno perimetro maggiore di esso* (od anche, *tutti i rettangoli di perimetro uguale ad un dato quadrato hanno area minore*).

Al sistema (15) si riconduce anche il sistema

$$\begin{cases} x - y = h, \\ \quad xy = k, \end{cases} \tag{18}$$

scrivendolo:

$$\begin{cases} x + (-y) = h, \\ \quad x(-y) = k. \end{cases}$$

In un sistema di questo tipo (18) si traduce il problema del n. 2 del Cap. IV, come pure il problema geometrico: *Determinare le dimensioni di un rettangolo, conoscendo la differenza di queste dimensioni e l'area del rettangolo.*

10. Consideriamo, in secondo luogo, il sistema (anch'esso simmetrico)

$$(19)\qquad \begin{cases} x + y = h, \\ x^2 + y^2 = k. \end{cases}$$

Aggiungendo $2xy$ ad ambo i membri della seconda delle equazioni (19), si ottiene l'equazione equivalente (Introd., n. 25)

$$x^2 + y^2 + 2xy = k + 2xy \quad \text{ossia} \quad (x + y)^2 = k + 2xy,$$

che, tenendo conto della prima delle (19), si può scrivere

$$h^2 = k + 2xy \quad \text{ossia} \quad xy = \frac{h^2 - k}{2}.$$

Si è quindi condotti ad un sistema del tipo studiato al n. prec.

In modo analogo si risolve il sistema

$$(20)\qquad \begin{cases} x - y = h \\ x^2 + y^2 = k. \end{cases}$$

Basta sottrarre $2xy$ da ambo i membri della seconda equazione e poi proseguire come pocanzi.

Ad un sistema (19) o (20) si è condotti, quando si pone in equazione il problema geometrico: *Date l'ipotenusa e la somma o la differenza dei cateti di un triangolo rettangolo, determinare questi cateti.*

11. Prendiamo, infine, il sistema

$$(21)\qquad \begin{cases} x + y = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

La seconda equazione si può scrivere

$$(x + y)(x - y) = k$$

ossia, in forza della prima,

$$h(x - y) = k \quad \text{cioè} \quad x - y = \frac{k}{h}.$$

Poichè la prima delle (21) e quest'ultima equazione danno rispettivamente la somma e la differenza di x e y, basta sommarle e sottrarle membro a membro, e dividere per 2 ambo i membri delle due equazioni così ottenute, per dedurne

$$x = \frac{1}{2}\left(h + \frac{k}{h}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(h - \frac{k}{h}\right).$$

In modo del tutto simile si risolve il sistema

$$(22) \qquad \begin{cases} x - y = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

Ed è del tipo (21) o (22) il sistema, in cui si traduce il problema: *Determinare l'ipotenusa ed un cateto di un triangolo rettangolo, conoscendo la loro somma o la loro differenza e l'altro cateto.*

12. Abbiamo visto che ciascuno dei sistemi di 2° grado (15), (18)-(22), considerati ai nn. 9-11, traduce in equazioni, come già si era preannunziato fin dapprincipio (n. 9), un certo problema geometrico *in due incognite.* Qui giova aggiungere che codesti medesimi sistemi tornano talvolta utili anche quando l'Algebra si applica alla risoluzione dei problemi geometrici *in una sola incognita.* Si ricordi, invero, che per la intavolazione algebrica di un tale problema conviene spesso introdurre, accanto all'incognita principale, qualche incognita ausiliare (IV, n. 8). Orbene, non è infrequente il caso, che una incognita ausiliare risulti legata a quella principale precisamente da uno dei sistemi di 2° grado dianzi considerati; e per lo più accade che le condizioni qualitative di possibilità del sistema rendano più agevole la determinazione delle analoghe condizioni di possibilità del problema geometrico proposto.

13. Torniamo alle considerazioni generali sui sistemi di 2° grado. Il *metodo di sostituzione*, che al n. 7 abbiamo applicato al caso di un sistema di 2° grado in due incognite, permette di risolvere anche ogni sistema di 2° grado in più di due incognite, *purchè sia soddisfatta* (dai coefficienti del sistema) *una certa condizione qualitativa*. Chiariremo questa condizione nel caso di un sistema di 2° grado in tre incognite x, y, z.

Un tale sistema è costituito da due equazioni di 1° grado in x, y, z, e da una terza equazione di 2° grado nelle medesime incognite. Volendo applicare in questo caso il metodo di sostituzione analogo a quello del n. 7, bisogna cominciare col considerare le due equazioni di 1° grado e risolverne il sistema rispetto a due delle incognite, per es. rispetto ad y e z, come se la terza, cioè la x, fosse conosciuta. Dopo di che, sostituendo nella equazione di 2° grado ad y e z le loro espressioni per mezzo della x, così ottenute, si perviene ad un'equazione di 2° grado nella sola x (*risultante* in x del sistema), le cui eventuali radici danno quei valori di x, che, associati a convenienti valori di y e z, costituiscono le soluzioni del sistema; e questi valori di y e z si trovano, sostituendo codesti valori della x nelle espressioni di y e z, ottenute dapprincipio. Ora è evidente che tutto ciò sta bene, *purchè sia possibile risolvere rispetto ad y e z il sistema delle due equazioni di 1° grado*, quando vi si consideri la x come conosciuta; e noi sappiamo che a tal fine occorre e basta che sia diverso da zero il determinante dei quattro coefficienti di y e z nelle due equazioni, cioè l'espressione $bc' - b'c$, se b, c e b', c' sono i coefficienti di y e z nella prima e, rispettivamente, nella seconda equazione (Introd., nn. 50-53).

Tenendo conto anche degli altri risultati ottenuti nella discussione dei sistemi di due equazioni di 1° grado in due incognite, si può dimostrare (e ciò può costituire un buon esercizio), che, quando non sia soddisfatta la condizione or ora indicata, il sistema di 2° grado proposto risulta o *impossibile* o *indeterminato* (cioè, rispettivamente, privo di soluzioni o dotato di infinite soluzioni, in guisa che almeno ad una delle incognite si può sempre attribuire un valore arbitrario).

Tipi elementari di sistemi di 4° grado

14. Dopo i sistemi di 2° grado, i sistemi più semplici, se restiamo nel caso di due sole incognite x e y, sono quelli costituiti da due equazioni, entrambe di 2° grado in x e y; e, naturalmente, possiamo supporre che non esista nessuna combinazione lineare di queste due equazioni, la quale risulti di 1° grado, giacchè in tal caso il sistema dato sarebbe equivalente ad un sistema di 2° grado (Introd., n. 46). Sotto questa condizione essenziale, il sistema dato si chiama *di 4° grado*.

Per comprendere la ragione di questa denominazione, si immagini di applicare al sistema il solito *metodo di sostituzione*; cioè si pensi di risolvere una delle equazioni date rispetto ad una delle incognite, per es. rispetto alla y (rispetto alla quale l'equazione considerata sarà in generale di 2° grado) e poi di sostituire l'espressione così ottenuta per la y (implicante necessariamente sotto un segno di radice quadrata una espressione contenente la x) nell'altra equazione. Si otterrebbe così una equazione nella sola x (*risultante* in x del sistema), la quale, liberata dai radicali (III, n. 21), risulterebbe precisamente *di* 4° *grado* (vedansi gli Esercizi).

Questo fatto non solo giustifica il nome dato ai sistemi. che qui consideriamo, ma fa altresì comprendere come *la loro risoluzione*, in quanto dipende da quella di un'equazione di 4° grado, *non sia* in generale *effettuabile con sole operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate* (n. 1).

Tuttavia, poichè sappiamo che per tipi speciali di equazioni di 4° grado la risoluzione è riconducibile a quella di equazioni di 2° grado (nn. 2–4), comprendiamo ancora come debbano esistere particolari sistemi di 4° grado *risolubili elementarmente*, cioè con operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate. Ne daremo nei prossimi nn. gli esempi più semplici. Si tratterà anche qui, come ai nn. 9–11, di sistemi suscettibili ciascuno di una immediata interpretazione geometrica; e si potrà ripetere per essi l'osservazione fatta al n. 12 per i sistemi di 2° grado dei nn. or ora citati.

15. Ad un particolare sistema di 4° grado si è condotti dal problema seguente: *Determinare le dimensioni di un rettangolo, che abbia una data diagonale* d *e sia equivalente al quadrato di dato lato* l.

Il sistema, che in tal caso si ottiene, è

$$x^2+y^2=d^2,\quad xy=l^2.$$

Consideriamo, più in generale, il sistema (ancora simmetrico)

$$(23) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = h, \\ xy = k, \end{cases}$$

dove h e k denotano due numeri (o due espressioni letterali) quali si vogliano, che per altro possiamo supporre soddisfacenti alle due condizioni $h > 0$, $k \gtrless 0$. Infatti per $h < 0$ la prima equazione risulta impossibile, mentre per $h = 0$ è soddisfatta soltanto da $x = 0$, $y = 0$; e d'altra parte per $k = 0$ la seconda equazione si decompone in $x = 0$ e $y = 0$, cosicchè si ricade su sistemi del tutto privi di interesse.

Per risolvere il sistema (23), si formi anzitutto la combinazione lineare delle due equazioni, che si ottiene sommando membro a membro alla prima la seconda, dopo aver moltiplicato ambo i membri di questa per 2. Otteniamo così l'equazione

$$(24) \quad x^2 + y^2 + 2xy = h + 2k \quad \text{ossia} \quad (x + y)^2 = h + 2k,$$

che si può sostituire, nel sistema (23), alla prima equazione (Introd., n. 46). Se $h + 2k < 0$, quest'equazione è impossibile, e quindi è tale anche il sistema. Escluso questo caso, la (24) si decompone nelle due equazioni

$$x + y = \sqrt{h + 2k}, \quad x + y = -\sqrt{h + 2k};$$

cosicchè le soluzioni del sistema (23) sono date da tutte (e sole) le eventuali soluzioni di ciascuno dei due seguenti sistemi

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{h + 2k}, \\ xy = k; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\sqrt{h + 2k}, \\ xy = k; \end{cases}$$

che sono entrambi del tipo considerato al n. 9. Il sistema (23) può dunque ammettere 4 soluzioni o 2 o nessuna.

16. Consideriamo, invece, il sistema, pur esso di 4° grado.

$$(25) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = h, \\ xy = k, \end{cases}$$

dove, per non ricadere su casi privi d'interesse, supporremo $h \gtrless 0$, $k \gtrless 0$. Non vale in questo caso un artificio analogo a quello del n. prec. Ricorriamo allora al metodo generale di sostituzione.

Dalla seconda equazione si rileva che, in ogni eventuale soluzione, i valori delle due incognite debbono essere entrambi diversi da zero. Perciò tutte le soluzioni della seconda equazione, fra le quali vanno cercate quelle del sistema, sono date da

$$x \text{ arbitraria e diversa da zero,} \quad y = \frac{k}{x}.$$

Sostituendo questa espressione di y nella prima equazione, si trova che i valori di x, cui corrispondono soluzioni del sistema, sono definiti dall'equazione (*risultante* in x del sistema)

$$x^2 - \frac{k^2}{x^2} = h,$$

la quale, in quanto si è già escluso il valore $x = 0$, è qui equivalente a quella, che se ne deduce liberandola dal denominatore, cioè alla

$$x^4 - hx^2 - k^2 = 0.$$

Questa biquadratica elementare, in quanto il termine noto è negativo, ammette in ogni caso due radici, fra loro opposte (n. 2). Sono questi i valori della x; e, in forza della seconda delle (25), risultano fra loro opposti anche i corrispondenti valori della y, cosicchè il sistema (25) ammette sempre due soluzioni, fra loro opposte.

Naturalmente questo metodo generale di sostituzione è applicabile anche al sistema (24) del n. prec.; ma in questo caso la biquadratica elementare, che si ottiene come risultante in x del sistema, può avere 4 radici o 2 o nessuna.

Del resto entrambi i sistemi (24), (25) si possono risolvere, osservando, che dalla seconda equazione, elevandone a quadrato ambo i membri, si deduce $x^2y^2 = k^2$, cosicchè si conoscono la somma e il prodotto di x^2 e $\pm y^2$.

Perciò i valori eventuali di x^2 e $\pm y^2$ si trovano come radici di un'equazione di 2° grado (n. 9), e quelli di x e y se ne deducono con estrazioni di radice quadrata, purchè, naturalmente, i valori trovati per x^2, y^2 siano positivi.

Solo, in quanto si è sostituita alla seconda equazione del sistema quella, che se ne deduce elevandone a quadrato ambo i membri, si possono essere introdotte soluzioni estranee (III, n. 20); e delle coppie di valori trovati per x e y bisogna conservare solo quelle, il cui prodotto risulta uguale a k (e non a $-k$).

Si noti che, se nell'equazione di 2° grado, cui si è così condotti, si mette x^2 al posto dell'incognita, si ritrova la biquadratica elementare, che si ottiene come risultante in x del sistema col metodo generale di sostituzione.

17. Più semplice ancora è la risoluzione del sistema di 4° grado

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h, \\ x^2 - y^2 = k. \end{cases}$$

Dei quadrati delle incognite si conoscono la somma e la differenza, onde si ricava senz'altro, sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni, e dividendo per 2 ambo i membri di ciascuna delle due equazioni così ottenute,

$$x^2 = \frac{1}{2}(h + k), \quad y^2 = \frac{1}{2}(h - k).$$

Il sistema è possibile, purchè nè l'uno nè l'altro dei due secondi membri sia negativo. Si hanno 4 soluzioni, se sono entrambi positivi; 2 soluzioni, se uno è positivo e l'altro nullo; una sola nel caso privo d'interesse, in cui siano entrambi nulli (cioè $x = y = 0$).

18. All'uno o all'altro dei sistemi di 2° o 4° grado, considerati ai nn. 9-11, 15-17 si può ricondurre ogni sistema costituito da due equazioni, che siano entrambe di 1° grado rispetto a due espressioni, prese comunque fra le

$$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2. \tag{26}$$

Sia, ad es., il sistema

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bxy = c, \\ a'(x^2 + y^2) + b'xy = c', \end{cases}$$

dove a, b, c, a', b', c' sono dati. Assumendo come incognite ausiliarie

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy,$$

si è condotti al sistema

$$\begin{cases} au + bv = c, \\ a'u + b'v = c'. \end{cases}$$

Se questo è possibile, cioè se è diverso da zero il determinante $ab' - a'b$ dei coefficienti (Introd., n. 52), ed è $u = u_1$, $v = v_1$ la sua soluzione, il sistema dato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u_1, \\ xy = v_1, \end{cases}$$

che è del tipo considerato al n. 15.

Similmente, applicando i metodi dei nn. 7-11, si riconduce all'uno o all'altro dei sistemi di 2° o 4° grado dei nn. 9-11, 15-18 ogni sistema, che sia di 2° grado rispetto a due delle espressioni (26). Basta prendere, caso per caso, come incognite ausiliarie codeste due espressioni.

19. Affermiamo qui da ultimo, pur senza poterlo dimostrare ([1]), che *i sistemi di 4° grado, in due incognite, risolubili elementarmente* (cioè con sole operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate) si possono tutti ridurre, con opportune trasformazioni, alla forma seguente (che comprende come casi particolari tutti i sistemi dei nn. 15-17)

$$(27) \qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + h = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0. \end{cases}$$

Essi sono caratterizzati dal fatto, che vi mancano tutti i termini di 1° grado.

Per risolvere un sistema di questo tipo, cominciamo col far vedere che si può sempre ridursi al caso, in cui uno almeno dei due termini noti h ed h' sia nullo, talchè una delle due equazioni risulti *omogenea* (cioè ottenuta uguagliando a zero un trinomio di 2° grado, omogeneo in x ed y).

([1]) Cfr., per es., V. Notari, *Le equazioni di quarto grado ed i sistemi di due equazioni di secondo grado in due incognite*, in F. Enriques, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Parte II; Bologna, Zanichelli. 1926.

Infatti, se h ed h' sono entrambi diversi da zero, il sistema (27) è equivalente a quello, che da esso si ottiene, sostituendo ad una qualsiasi delle sue equazioni la loro combinazione lineare, che ha per moltiplicatori h' e $-h$ (Introd., n. 46), cioè la

$$(ah' - a'h)x^2 + (bh' - b'h)xy + (ch' - c'h)y^2 = 0,$$

la quale risulta appunto omogenea. Fa eccezione soltanto il caso, in cui questa equazione svanisca, cioè risultino nulli simultaneamente i suoi tre coefficienti. Ma in tal caso si ha

$$a'h = ah', \quad b'h = bh', \quad c'h = ch',$$

ossia

$$a' = \frac{h'}{h} a, \quad b' = \frac{h'}{h} b, \quad c' = \frac{h'}{h} c;$$

perciò la seconda delle equazioni (27) si può scrivere

$$\frac{h'}{h}(ax^2 + bxy + cy^2 + h) = 0,$$

e coincide, a meno del moltiplicatore $\frac{h'}{h}$, con la prima, cosicchè il sistema si riduce ad un'unica equazione.

Possiamo, dunque, considerare senz'altro un sistema della forma

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases}$$

ed è lecito aggiungere l'ipotesi che i coefficienti a e c della prima equazione siano entrambi diversi da zero, perchè se, ad es., fosse $c = 0$ codesta equazione, si potrebbe scrivere

$$x(ax + by) = 0,$$

cosicchè si decomporrebbe nelle due equazioni

$$x = 0, \quad ax + by = 0;$$

e il sistema (28) ammetterebbe tutte (e sole) le soluzioni di ciascuno dei due sistemi

$$\begin{cases} x = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + h' = 0; \end{cases}$$

che sono entrambi di 2° grado (n. 7).

Supposto perciò $a \gtrless 0$, $c \gtrless 0$, distinguiamo due casi, secondo che è $h' \gtrless 0$ o $h' = 0$.

I. $h' \gtrless 0$ (*sistema non omogeneo*).

Per risolvere il sistema (28) basta determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione omogenea

$$\text{(29)} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

e poi fra esse cercare quelle, che eventualmente soddisfano anche l'equazione non omogenea.

Ora è in primo luogo manifesto che la (29) è soddisfatta da $x=0$, $y=0$ (*soluzione nulla*), ma questa soluzione non soddisfa la seconda equazione, perchè $h' \gtrless 0$. D'altra parte la (29) non ammette nessun'altra soluzione, per cui la x sia nulla, giacchè, ponendo in essa $x=0$, si ottiene $cy^2=0$, e quindi, necessariamente, $y=0$. Restano dunque da cercare quelle soluzioni della (29), per cui x è diversa da zero. A tal fine poniamo

$$y = ux,$$

dove u è un'incognita ausiliare. Sostituendo nella (29) e raccogliendo x^2, otteniamo

$$x^2(a+bu+cu^2)=0,$$

e, poichè qui supponiamo $x \gtrless 0$, dobbiamo avere

$$a+bu+cu^2=0. \tag{30}$$

Vediamo così che tutte le soluzioni da noi volute della (29) si ottengono dando ad x un valore arbitrario e ad y il valore u_1x, dove u_1 sia una radice dell'equazione di 2° grado (30). Sono dunque possibili tre casi: se $b^2-4ac>0$, la (29) ammette, in corrispondenza delle due radici reali distinte della (30), due infinità di soluzioni, ciascuna del tipo

$$x \text{ arbitraria}, \qquad y=u_1x;$$

se $b^2-4ac=0$, la (29), in corrispondenza della radice doppia della (30), ha un'unica infinità di soluzioni di questo stesso tipo; infine se $b^2-4ac<0$, la (30) è priva di radici reali e la (29) non ammette nessun'altra soluzione oltre quella nulla.

In quest'ultimo caso il sistema dato (28) è privo di soluzioni. Negli altri due, invece, bisogna cercare, in corrispondenza di ciascuna radice u_1 della (30), se esista qualche valore di x, che insieme con $y=u_1x$, renda soddisfatta anche la seconda delle equazioni (28), cioè sia tale che si abbia

$$x^2(a'+b'u_1+c'u_1^2)+h'=0.$$

Questa è un'equazione di 2° grado (pura) in x, che, ove $a'+b'u_1+c'u_1^2$ risulti di segno contrario ad h', dà per x due valori (fra loro opposti); cosicchè concludiamo che il sistema non omogeneo (28), quando non sia privo di soluzioni, ne ammette 4 oppure 2 (in ogni caso, a due a due, opposte fra loro).

II. $h'=0$ (*sistema omogeneo*).

Abbiamo il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0. \end{array}\right. \tag{31}$$

Per risolverlo valgono le stesse considerazioni di pocanzi, ma il risultato è nettamente diverso.

Anzitutto la soluzione nulla $x=0$, $y=0$ soddisfa entrambe le equazioni. Quanto poi alle soluzioni, per cui è $x \gtrless 0$, si trova, ponendo $y=ux$ in tutte e due le equazioni,

$$x^2(a+bu+cu^2)=0, \quad x^2(a'+b'u+c'u^2)=0,$$

talchè deve essere simultaneamente

$$(32) \qquad a+bu+cu^2=0, \quad a'+b'u+c'u^2=0.$$

Perciò il sistema ammette soluzioni, diverse da quella nulla, sempre e soltanto, quando queste due equazioni di 2° grado abbiano una radice reale comune; e se u_1 è questa radice, il sistema ammette addirittura le infinite soluzioni

$$x \text{ arbitraria}, \quad y=u_1x,$$

fra cui, per $x=0$, risulta compresa anche quella nulla.

Va notato, che se le (32) hanno comuni tutte e due le radici, si ha un caso privo d'interesse, perchè le due equazioni (31) si riducono ad una sola. Infatti, denotate con u_1, u_2 codeste due radici, si hanno le due identità (III, n. 11)

$$a+bu+cu^2=c(u-u_1)(u-u_2), \quad a'+b'u+c'u^2=c'(u-u_1)(u-u_2):$$

e quindi anche la

$$a'+b'u+c'u^2=\frac{c'}{c}(a+bu+cu^2);$$

onde, per il principio d'identità dei polinomi (Introd., n. 15), risulta che a', b', c' sono proporzionali ad a, b, c; e le due equazioni (31) diversificano fra loro soltanto per il moltiplicatore numerico $\frac{c'}{c}$.

20. Esempi:

$$1) \quad \begin{cases} x^2+xy+2y^2=44, \\ 2x^2-xy+y^2=16. \end{cases}$$

Calcolando di queste due equazioni la combinazione lineare di moltiplicatori -4 e 11, si ottiene l'equazione omogenea

$$18x^2-15xy+3y^2=0 \quad \text{ossia} \quad 6x^2-5xy+y^2=0;$$

e di qui, ponendo $y=ux$, si ricava, per $x \gtrless 0$,

$$u^2-5u+6=0.$$

Quest' equazione di 2° grado ha le due radici $u_1 = 3$ e $u_2 = 2$. Sostituendo nella seconda delle equazioni date $y = 3x$ e $y = 2x$, si trova, rispettivamente,

$$x^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^2 = 4$$

e quindi $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = \pm 2$. Il sistema ammette dunque le quattro soluzioni:

$$x = \sqrt{2}, \quad y = 3\sqrt{2}; \quad x = -\sqrt{2}, \quad y = -3\sqrt{2};$$
$$x = 2, \quad y = 4; \quad x = -2, \quad y = -4.$$

2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70, \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50. \end{cases}$

L' equazione omogenea, che dalle date si deduce, come combinazione lineare (di moltiplicatori -5 e 7), è in questo caso

$$32x^2 - 8xy - 12y^2 = 0 \quad \text{ossia} \quad 8x^2 - 2xy - 3y^2 = 0.$$

Col procedimento già applicato nell' esempio precedente si trova che questa equazione omogenea è soddisfatta da $y = \frac{4}{3}x$ e da $y = -2x$. Ma ponendo $y = -2x$ nella prima delle equazioni date si perviene ad un' equazione di 2° grado impossibile; mentre ponendovi $y = \frac{4}{3}x$, si trova

$$x^2 = 9,$$

e quindi $x = \pm 3$; cosicchè il sistema ammette le due soluzioni

$$x = 3, \quad y = 4; \quad x = -3, \quad y = -4.$$

3) $\begin{cases} 2x^2 - xy - 10y^2 = 0, \\ 6x^2 - 17xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$

La prima di queste due equazioni omogenee è soddisfatta, per qualsiasi x, tanto da $y = \frac{2}{5}x$, quanto da $y = -\frac{1}{2}x$; e la prima di queste due infinità di soluzioni soddisfa anche l' altra equazione. Perciò il sistema ammette le infinite soluzioni:

$$x \text{ arbitraria}, \quad y = \frac{2}{5}x;$$

cioè risulta soddisfatto da tutte le coppie di numeri proporzionali ad 1 e $\frac{2}{5}$, o, ciò che è lo stesso, a 5 e 2.

21. Si riconosce facilmente che, con lo stesso procedimento indicato al n. 19 per i sistemi della forma (28), sono risolubili anche i sistemi della forma [1]

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + l'x + m'y + h' = 0. \end{cases}$$

---

[1] Solo in apparenza questi sistemi sono più generali dei sistemi (28), ai quali si possono sempre ridurre con opportune trasformazioni. Cfr. l'Art. di V. Notari, citato a p. 178.

Capitolo VI

Radici d' indice qualsiasi e calcolo dei radicali

Radici d' indice qualsiasi dei numeri assoluti

1. Per la risoluzione delle equazioni di 2° grado, ci è bastato introdurre, accanto alle operazioni razionali (addizione algebrica, moltiplicazione e divisione), le estrazioni di radice quadrata. Ma si è già notato (V, n. 1) che, anche nel campo elementare, si incontrano problemi, alla cui risoluzione codeste operazioni non sono più sufficienti: per avere un esempio estremamente semplice di tali problemi si pensi la ricerca dello spigolo del cubo che ha un dato volume. Si è così condotti ad estendere il concetto di radice quadrata o *di indice* 2 al caso dell' indice 3 e, più in generale, di indice (intero positivo) qualsiasi.

Questa estensione, già praticamente nota fin dalle Scuole medie inferiori, è del tutto ovvia. Preso un numero reale a e fissato un intero positivo n, si consideri l' equazione

$$x^n = a. \tag{1}$$

Se esiste un numero x soddisfacente a questa equazione, cioè tale che la sua potenza n^{ma} sia uguale ad a, questo numero si dice *radice* n^{ma} o *di indice* n del numero a; e si dice *estrazione di radice* n^{ma} l' operazione, che, quando sia possibile, conduce a determinare un tale numero x.

In particolare la radice di indice 3 si dice *cubica*, in quanto l' estrazione di radice di indice 3 è l' inversa dell' elevamento al cubo.

Dobbiamo dunque studiare l' equazione (1) per ogni possibile valore dell' intero positivo n; e, come già si è fatto per $n = 2$ (I, nn. 16–18), la considereremo qui dapprima nel campo dei numeri assoluti.

Vale anche per n qualsiasi lo stesso risultato, che per $n=2$ dimostrammo al n. 17 del Cap. I, cioè, qualunque sia il numero assoluto a, esiste un numero assoluto, ed uno solo, la cui n^{ma} potenza sia uguale ad a, o, in altre parole, *ogni numero assoluto ammette, per qualsiasi valore dell'indice n, una radice n^{ma}, ed una sola.* Questa radice n^{ma} si denoterà col simbolo $\sqrt[n]{a}$, continuando, come nei Cap. prec., a tralasciare l'indice, quando esso sia uguale a 2, cioè si tratti di radici quadrate.

Ricordiamo che della esistenza della radice quadrata $\sqrt{a}$ di un qualsiasi numero assoluto a potemmo assicurarci subito per via geometrica in quanto $\sqrt{a}$ è precisamente la lunghezza del segmento medio proporzionale (effettivamente costruibile con la riga e il compasso) tra il segmento unità e quello di lunghezza a (I, n. 16). Ma per ogni altro indice $n > 2$, l'esistenza della radice non si può più stabilire geometricamente.

Tutto al più, si può convincersi in modo intuitivo della esistenza della radice cubica, osservando che, se si fa variare con continuità la lunghezza dello spigolo di un cubo da 0 a $+\infty$, anche il volume del cubo deve variare con continuità e, quindi, assumere mano mano tutti i possibili valori da 0 a $+\infty$; per ognuno di questi valori la lunghezza dello spigolo del cubo corrispondente dà appunto la radice cubica.

Si è dunque costretti a procedere per via aritmetica; ma basta ripensare il ragionamento, che allo stesso fine si è fatto nel caso della radice quadrata (I, n. 17) per comprendere come esso si possa estendere al caso di qualsiasi altro indice.

2. Per chi non si accontenti di questa induzione, sviluppiamo qui un tale ragionamento.

Cominciamo con l'osservare che la radice n^{ma} del numero assoluto a risulta razionale (cioè intera o fratta) soltanto quando a sia la potenza n^{ma} di un numero intero (o, come si suol dire, una *potenza perfetta*), oppure una frazione (irreducibile) avente per termini due potenze perfette.

Esclusi questi casi del tutto particolari, la radice n^{ma} di a non può essere che irrazionale, cosicchè, per prendere una via che valga in tutti i casi possibili, conviene cercare di definire codesta radice per mezzo di una sezione. Precisamente, assegnamo ad una classe H tutti i numeri razionali assoluti, la cui potenza n^{ma} è minore di a, ad una classe K tutti quelli, la cui potenza n^{ma} è maggiore di a. Queste due classi definiscono, nel campo dei numeri razionali assoluti, una sezione (I, n. 3). Infatti:

1) *Dalle due classi può restare escluso, al più, un solo numero razionale,* cioè precisamente, quando pure esista, il numero razionale, la cui potenza n^{ma} sia proprio uguale ad a; mentre ogni altro numero razionale, avendo una potenza n^{ma} minore o maggiore di a, appartiene o ad H o a K.

2) *La classe H contiene, con ogni suo numero h, tutti i numeri minori,* perchè essendo $h^n < a$, anche ogni numero minore di h ha una potenza n^{ma} minore di a (Introd., n. 5F; I, n. 15); e, similmente *la K contiene, con ogni suo numero k, ogni numero maggiore.*

3) *La classe H non contiene massimo.* Per semplicità dimostriamolo per $n = 3$. Si tratta di far vedere che se h è un numero della H, cioè se $h^3 < a$, si può sempre trovare una frazione $\frac{1}{p}$ abbastanza piccola (cioè un intero p abbastanza grande), perchè si abbia ancora

$$\left(h + \frac{1}{p}\right)^3 < a, \tag{2}$$

cioè (Introd., n. 13)

$$h^3 + \frac{3h^2}{p} + \frac{3h}{p^2} + \frac{1}{p^3} < a.$$

Per trovare questo intero p, consideriamo la differenza $d = a - h^3$, talchè sia

$$a = h^3 + d, \tag{3}$$

e scegliamo p abbastanza grande, perchè risulti simultaneamente

$$\frac{3h^2}{p} < \frac{1}{3}\,d, \quad \frac{3h}{p^2} < \frac{1}{3}\,d, \quad \frac{1}{p^3} < \frac{1}{3}\,d.$$

Sarà allora

$$h^3 + \frac{3h^2}{p} + \frac{3h}{p^2} + \frac{1}{p^3} < h^3 + \frac{1}{3}\,d + \frac{1}{3}\,d + \frac{1}{3}\,d = h^3 + d;$$

cioè, in forza della (3), sussisterà appunto la (2).

Similmente si dimostra che *la classe K non contiene minimo.*

Stabilito così che le due classi H e K costituiscono una sezione nel campo dei numeri razionali, avremo che questa sezione $(H|K)$ definisce un certo numero (reale assoluto) b; e non è difficile riconoscere che questo b è precisamente la radice, da noi voluta, di a.

Anche qui, per semplicità, ragioniamo nel caso $n = 3$. Dobbiamo far vedere che

$$b^3 = a;$$

cioè, considerata la sezione $(H^3 \mid K^3)$, che definisce b^3 (I, n. 10), bisogna dimostrare che anche a è maggiore di tutti i numeri di H^3 e minore di tutti quelli di K^3 (I, n. 4). Ora, come sappiamo, la classe H^3 è costituita da tutti (e soli) i prodotti $h_1 h_2 h_3$ di tre numeri h_1, h_2, h_3 (uguali o no), presi comunque in H; e, poichè, per la definizione della H, si ha

$$h_1{}^3 < a, \quad h_2{}^3 < a, \quad h_3{}^3 < a,$$

sarà anche (Introd., n. 5*D*; I, n. 15)

$$h_1{}^3\, h_2{}^3\, h_3{}^3 < a^3,$$

e quindi (Introd., n. 5*F*; I, n. 15)

$$h_1 h_2 h_3 < a.$$

Si ha dunque veramente che a è maggiore di ogni numero di H^3; e, poichè similmente si riconosce che a è minore di ogni numero di K^3, si conclude che a è uguale a b^3.

Il ragionamento precedente vale in ogni caso, onde resta stabilito che, per qualsiasi valore dell'indice n, ogni numero reale assoluto ammette una radice n^{ma} assoluta.

E non ve ne può essere che una sola, giacchè, se è $b^n = a$, ogni altro numero assoluto diverso da b ha una potenza n^{ma}, che è necessariamente diversa da a (Introd., n. 5*F*; I, n. 15).

Radici d'indice qualsiasi dei numeri relativi

3. Torniamo nel campo dei numeri relativi, e consideriamo dapprima un numero a positivo. Qualunque sia l'indice n, il numero a ammette certamente una radice n^{ma} positiva, cioè precisamente quella, che ha per valore assoluto la radice n^{ma} assoluta del valore assoluto di a (nn. 1, 2); ed è a questa radice n^{ma} *positiva* od *aritmetica*, che, in questo caso di un numero a positivo, riserveremo sempre il simbolo $\sqrt[n]{a}$, come già si è convenuto nel caso di $n = 2$ (I, n. 19).

Ma se n è pari, ad es. uguale a 4, insieme con la radice quarta positiva $\sqrt[4]{a}$, anche il numero opposto $-\sqrt[4]{a}$ ammette come quarta potenza il numero a, perchè

$$\left(-\sqrt[4]{a}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a.$$

Questo numero $-\sqrt[4]{a}$ si dice radice quarta *negativa* di a. Ed è manifesto che, oltre $\sqrt[4]{a}$ e $-\sqrt[4]{a}$, il numero a non ammette altre radici quarte, perchè ogni altro numero relativo. diverso da codesti due, ha una quarta potenza diversa da a (Introd., n. $5F$; I, n. 15). E tutto ciò si può ripetere per qualsiasi indice pari.

Se invece l'indice n è *dispari*, ad es. uguale a 3, un numero positivo a, oltre la radice positiva $\sqrt[3]{a}$, non ammette altra radice cubica, perchè la terza potenza di $-\sqrt[3]{a}$ è uguale a $-a$ e non ad a, e, d'altro canto, ogni numero diverso da $\sqrt[3]{a}$ e $-\sqrt[3]{a}$ ha una terza potenza, il cui valore assoluto è diverso da a.

4. Passiamo al caso di un numero a *negativo*, e anzitutto supponiamo che l'indice n sia *dispari*. Il numero a ammette certamente una radice n^{ma} negativa, cioè il numero negativo $-\sqrt[n]{|a|}$, che ha per valore assoluto la radice n^{ma} (assoluta) del valore assoluto $|a|$ di a, perchè, essendo n dispari ed a negativo, si ha

$$\left(-\sqrt[n]{|a|}\right)^n = -\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n = -|a| = a.$$

Nè a può ammettere altre radici n^{me}, perchè ogni numero diverso da $-\sqrt[n]{|a|}$ ha una potenza n^{ma} diversa da a. Perciò in questo caso ($a < 0$ ed n dispari) abbiamo

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}.$$

Resta infine da considerare il caso, in cui a sia *negativo* ed *n pari*. In tal caso il numero a non può ammettere, nel campo dei numeri reali relativi, alcuna radice n^{ma}, perchè ogni numero relativo, elevato all'esponente pari n, dà un numero positivo.

Per dare un senso anche alle radici di indice pari dei numeri negativi, bisogna, come già si è accennato nel caso di $n = 2$ (I, n. 19), estendere il campo dei numeri, aggiungendo ai numeri reali i cosiddetti numeri *immaginarî* o *complessi;* e nel campo di numeri, così ampliato, si dimostra che, qualunque sia l'indice n (pari o dispari), ogni numero (reale o anche complesso) ammette n radici n^{me} diverse.

5. Riassumendo abbiamo che, nel campo dei numeri reali relativi: *Per* n pari, *ogni numero positivo ammette due radici* n^{me}, *fra loro opposte, mentre ogni numero negativo non ne ammette alcuna. Per* n dispari, *ogni numero ammette una radice* n^{ma} *ed una sola, la quale è positiva o negativa, secondo che tale è il numero considerato.*

Tenendo conto della convenzione, fatta al n. 3, di denotare con $\sqrt[n]{a}$, se a è positivo ed n pari, la radice n^{ma} *positiva* di a, possiamo anche dire che il simbolo $\sqrt[n]{a}$, quando a è *positivo,* rappresenta sempre un numero *positivo,* mentre, quando a è negativo, rappresenta un numero *negativo* se n è *dispari* e *non ha alcun senso* se n è *pari.*

Calcolo dei radicali

6. Come già per i radicali quadratici (II, nn. 4, 5) anche per quelli di indice qualsiasi discendono dalla loro definizione e dalle proprietà delle potenze (Introd., n. 4; I, n. 15) alcune regole di calcolo, che stabiliremo nei prossimi nn. Ma affinchè le identità, che esprimono tali regole, valgano *senza eccezione* è necessario supporre che i radicandi siano tutti *positivi* e considerarne, in ogni caso, le radici *positive* od *aritmetiche.*

Quando nei calcoli si sia condotti a considerare anche radicali (d'indice dispari) a radicando negativo, è facile riconoscere, caso per caso, se e fino a qual punto codeste regole si mantengano applicabili.

7. Per definizione sussiste la identità

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \tag{4}$$

e dalla definizione stessa discende anche quest'altra, che, al pari della (4), va tenuta sempre presente.

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \tag{5}$$

La (4) sussiste anche per $a < 0$, purchè il radicale abbia senso, cioè n sia dispari. Invece la (5), quando a sia negativo, può risultare *falsa*, pur avendo senso il radicale, che compare a primo membro. Precisamente, ciò accade quando a è negativo ed n è pari, giacchè in tal caso, dovendo $\sqrt[n]{a^n}$ denotare, come sempre, la radice positiva del suo radicando (positivo), si ha, in luogo della (5), la

$$\sqrt[n]{a^n} = -a.$$

8. A base del calcolo dei radicali di indice qualsiasi stanno le due seguenti identità, che estendono quelle stabilite per i radicali quadratici al n. 4 del Cap. II, e che l'alunno dedurrà in modo perfettamente analogo dalle corrispondenti proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}; \tag{6}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \tag{7}$$

e la prima sussiste anche nel caso di un prodotto di quanti si vogliano fattori.

Esse danno luogo ai due seguenti enunciati:

A) La radice n^{ma} di un prodotto è uguale al prodotto delle radici n^{me} dei fattori.

B) La radice n^{ma} di un quoziente è uguale al quoziente delle radici n^{me} del dividendo e del divisore.

Interpretate in senso inverso, le due identità (6) e (7) permettono di *ridurre ad un unico radicale sia il prodotto* *di più radicali dello stesso indice, sia il quoziente di due radicali dello stesso indice.*

9. Dalla identità (6) discendono immediatamente alcune conseguenze notevoli.

A) Nella (6) sostituiamo a^n ad a ed applichiamo la (5); otteniamo la identità

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b},$$

la quale ci dice che se fra i fattori del radicando vi è una potenza di esponente uguale all' indice della radice, si può portarne fuori del segno di radice la base (riducendone ad 1 l'esponente); e viceversa, un fattore esterno si può portare sotto il segno di radice, purchè si elevi all'esponente uguale all' indice di radice.

B) Considerando $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ come prodotto dei suoi fattori e riducendo questi m radicali ad uno solo, troviamo successivamente

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underset{1}{\sqrt[n]{a}}\,\underset{2}{\sqrt[n]{a}}\ldots\underset{m}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^m},$$

cioè

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{8}$$

Dunque *per elevare un radicale ad una certa potenza, basta elevare all' esponente prefissato il radicando.*

Ciò si può anche esprimere dicendo che *se si deve estrarre da un numero la radice di un certo indice e poi elevare il risultato ad un certo esponente, è indifferente l'ordine in cui si eseguiscono le due operazioni.*

10. Alle identità fondamentali (6), (7) va aggiunta questa altra

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \tag{9}$$

cioè: *La radice m^{ma} della radice n^{ma} di un numero* (o di un' espressione, l' uno o l' altra positivi) *è uguale alla radice di indice mn di quel numero* (o di quell' espressione).

Per dimostrare questa identità basta far vedere che, elevando $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ all' esponente mn, si ottiene a. Ora, in forza di una nota proprietà delle potenze (I, n. 4; II, n. 15), per elevare una qualsiasi base all' esponente mn, basta elevarla prima all' esponente m, e poi elevare il risultato all' esponente n; e in tal modo si ottiene successivamente, in virtù della (4),

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

11. Dalla (9) si deducono i seguenti importanti corollari:

A) *Ogni radice di indice non primo si può calcolare, estraendo successivamente più radici di indice primo.*

Così, per es.

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}, \quad \sqrt[30]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}}, \text{ ecc.}$$

B) Se nella (9) sostituiamo a^n in luogo di a e applichiamo la (5), troviamo la nuova identità

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}; \tag{10}$$

la quale esprime il seguente teorema assai notevole: *Un radicale non cambia valore, se si eleva il radicando ad un esponente n qualsiasi e, nel medesimo tempo, si moltiplica l' indice per quello stesso numero n.*

Questo teorema permette di *ridurre più radicali allo stesso indice,* senza alterarne il valore. Così, se si hanno i radicali

$$\sqrt[m]{a}, \quad \sqrt[n]{b},$$

essi sono rispettivamente uguali a

$$\sqrt[mn]{a^n}, \quad \sqrt[mn]{b^m}.$$

Manifestamente come indice comune si può prendere, in luogo del prodotto degli indici dei radicali dati, un qualsiasi altro loro multiplo comune; e, se codesti indici non sono primi fra loro, converrà preferire il loro minimo multiplo comune.

C) L'identità (10), letta da destra a sinistra, ci dice che *se si considera una certa radice di una determinata potenza e l'indice e l'esponente hanno un fattore comune, si può sopprimere questo fattore comune, senza che resti alterato il valore del radicale considerato* (semplificazione del radicale). Così per esempio

$$\sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3]{a^2}.$$

Nuovi tipi di equazioni e di sistemi risolubili per radicali

12. Con la introduzione della estrazione di radice di indice qualsiasi è resa possibile la risoluzione di nuove equazioni di grado superiore al 2°.

Anzitutto, in base alla defizizione stessa di radice, diventano risolubili per ogni grado n (escluso soltanto il caso di n pari ed a negativo) le equazioni della forma

$$x^n - a = 0,$$

che si dicono *equazioni binomie.*

Ed è pure risolubile ogni equazione della forma

$$x^{2n} + px^n + q = 0, \tag{11}$$

la quale si chiama *equazione trinomia elementare* di grado $2n$. Essa generalizza evidentemente l'equazione biquadratica elementare (V, n. 2) e si risolve in modo perfettamente analogo. Se si assume come incognita ausiliare la $u = x^n$, si è condotti all'equazione di 2° grado in u

$$u^2 + pu + q = 0, \tag{12}$$

onde risulta che, se u_1 è una radice reale di quest'ultima equazione, la (11) è soddisfatta da ogni radice dell'equazione binomia

$$x^n = u_1;$$

mentre d'altra parte è chiaro che la (11) non può ammettere altre radici, oltre quelle che si possono ottenere in questo modo. Si riconosce così (n. 5) che, se n è pari, la (11) ha radici reali solo se la (12) ha radici positive, e, in corrispondenza di ciascuna di queste, la (11) ammette due radici opposte. Se invece n è dispari, la (11) ammette una radice reale (ed una sola) in corrispondenza di ogni radice reale della (12), sia essa positiva o negativa. Come esercizio, si caratterizzino, in base ai segni dei coefficienti (e del discriminante) della (12), i varî casi possibili per le radici della (11).

13. Osservazioni analoghe si possono fare per i sistemi. Limitandoci per semplicità al caso di due sole incognite x e y, possiamo risolvere con estrazioni di radice di indici opportuni ogni sistema di due equazioni in x e y, tale che, ove si assumano come incognite ausiliari due convenienti potenze di x e y, cioè si ponga, per certi due interi n ed m, $u = x^n$, $v = y^m$, si riduca, nelle nuove incognite u e v, ad un sistema di 1° o 2° grado, od anche ad uno di quei particolari sistemi di 4° grado, che ai nn. **15-19** del Cap. prec. abbiamo imparato a ridurre ad equazioni di 2° grado. Se $u = u_1$, $v = v_1$ è una soluzione del sistema ausiliare così ottenuto, ogni coppia di valori di x e y, soddisfacenti, rispettivamente, alle due equazioni binomie

$$x^n = u_1, \quad y^m = v_1$$

darà una soluzione del sistema dato; ed in questo modo se ne troveranno tutte le possibili soluzioni, prendendo successivamente in considerazione le diverse soluzioni del sistema ausiliare.

Così, per es., il sistema simmetrico (di 9° grado)

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} x^3 + y^3 = h \\ x^3 y^3 = k \end{cases}$$

ove si ponga $x = x^3$, $v = y^3$, si riduce al sistema

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} u + v = h \\ uv = k, \end{cases}$$

che è del tipo (15), considerato al n. 9 del Cap. prec. Sotto l'ipotesi $\frac{h^2}{4} - k > 0$, il sistema ausiliare (14) ammette le due soluzioni

$$u = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - k}, \quad v = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - k};$$

$$u = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - k}, \quad v = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - k};$$

onde, tenendo conto delle posizioni $u = x^3$, $v = y^3$, si conclude che il sistema dato (13) ammette le due soluzioni (¹)

$$x = \sqrt[3]{\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{2} - k}}, \qquad y = \sqrt[3]{\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - k}};$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - k}}. \qquad y = \sqrt[3]{\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - k}}.$$

(¹) **A puro titolo di curiosità, notiamo che alla formula risolutiva generale delle equazioni di 3° grado in una incognita (V, n. 1) si perviene, facendone dipendere la risoluzione da quella di un sistema, in due incognite ausiliari, del tipo (13).**

Capitolo VII

Potenze ad esponente reale qualsiasi

1. Riprendiamo il concetto di *potenza di un numero*. Fin dai principî del calcolo letterale, dopo aver definito la potenza di un numero a ad un esponente intero positivo n, come prodotto di n fattori uguali ad a, siamo stati condotti ad estendere il concetto di potenza anche al caso, in cui l'esponente sia *nullo* o *intero negativo*; e, precisamente, si è posto per definizione, qualunque sia il numero a e qualunque sia l'intero relativo n (Introd., n. 4; I, n. 15),

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si è poi dimostrato che per il calcolo delle potenze così estese si conservano valide quelle stesse regole, che valevano nel caso degli esponenti interi positivi e che sono espresse dalle identità (dove a e b denotano due numeri quali si vogliano e gli esponenti interi m ed n possono essere, indifferentemente, positivi o negativi o anche nulli):

$$\text{(I)} \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$

$$\text{(II)} \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

$$\text{(IV)} \qquad a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

In questo Capitolo ci proponiamo di estendere ulteriormente il concetto di potenza, per arrivare alle *potenze ad* *esponente reale relativo* qualsiasi; e vedremo che anche in questo caso più generale seguitano a valere le proprietà espresse dalle identità (I)-(V).

Dobbiamo per altro imporre due restrizioni, che bisognerà tenere sempre presenti: 1) *i numeri, che si adotteranno come basi, si dovranno supporre sempre* positivi; 2) *tutte le volte che si parlerà di radici, d'indice qualsiasi, di tali numeri positivi, si dovranno intendere le radici* positive *od* aritmetiche.

Potenze ad esponente razionale

2. Cominciamo col definire le potenze (dei numeri positivi) ad esponente *razionale relativo* qualsiasi. Mostreremo così che il *calcolo dei radicali,* studiato nel Capitolo precedente, si può considerare come un *calcolo di potenze.*

Per riferirci ad un caso determinato proponiamoci di calcolare la radice cubica della sesta potenza a^6 di *un numero positivo a,* cioè

$$\sqrt[3]{a^6}.$$

Siccome a^6 si può scrivere (n. 1, II)

$$a^6 = (a^2)^3,$$

otterremo senz'altro

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,$$

cioè

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}};$$

e nello stesso modo si avrà

$$\sqrt[3]{a^9} = a^{\frac{9}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}}, \quad \sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}}, \ldots$$

Questa riduzione del radicale ad una potenza non è più possibile se, p. es., si vuole estrarre la radice cubica di a^7, perchè 7 non è divisibile per 3 e perciò non si possono raggruppare i 7 fattori a di a^7 in tre prodotti parziali di ugual numero di fattori ciascuno. Se proviamo tuttavia ad applicare formalmente la stessa riduzione usata dianzi nel caso in cui l'esponente di a era divisibile per 3, siamo condotti al segno

$$a^{\frac{7}{3}},$$

che non ha per se stesso nessun significato.

Allora, per rendere formalmente possibile anche in questo caso la suaccennata trasformazione algebrica, converremo di rappresentare col segno

$$a^{\frac{7}{3}}$$

il radicale

$$\sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a}^{\,7};$$

e diremo che $a^{\frac{7}{3}}$ è la « *potenza* della base a all'*esponente* $\frac{7}{3}$ ».

Parlando in generale, il radicale

$$\sqrt[q]{a^p}$$

o, ciò che è lo stesso (VI, n. 9B),

$$\sqrt[q]{a}^{\,p},$$

se p è divisibile per q, è riducibile alla potenza ad esponente intero

$$a^{\frac{p}{q}}.$$

Se poi p non è divisibile per q, noi *per convenzione* rappresenteremo ancora quel radicale col segno

$$a^{\frac{p}{q}}.$$

Sussisterà dunque in ogni caso la identità

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a}^{\,p} = a^{\frac{p}{q}} \quad \text{ossia} \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p,$$

la quale, se p è divisibile per q, esprime una proprietà delle potenze ad esponente intero; e se invece p non è divisibile per q fornisce la definizione della « potenza di a all'esponente $\frac{p}{q}$ ».

Così, in particolare, sarà:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},\ 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8,\ 4^{2,1} = 4^{\frac{21}{10}} = \sqrt[10]{4^{21}},\ 5^{0,3} = \sqrt[10]{5^3},\ \text{ecc.}$$

3. La convenzione del n. prec. si estende anche al caso di esponenti fratti negativi; cioè si pone

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}},$$

con la sola avvertenza di attribuire il segno — al numeratore dell'esponente, in quanto il denominatore, che fornisce l'indice di una estrazione di radice, non può essere che positivo.

Ricaviamo poi dalle successive identità

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$

che sussiste anche per le potenze ad esponenti frazionari la identità

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

La definizione di potenza ad esponente frazionario *non* si può estendere nello stesso modo al caso delle *basi negative*, perchè i numeri negativi non ammettono radici di indice pari (VI, n. 5).

4. Pei calcoli con potenze ad esponente frazionario sussistono le stesse regole fondamentali valide per le potenze ad esponente intero.

È invero facile mostrare come sussistano ancora le identità (I)-(V) del n. 1. La dimostrazione si fa per tutte nel medesimo modo: si sostituiscono nel primo membro alle potenze ad esponente frazionario i corrispondenti radicali, si eseguiscono le operazioni secondo le regole del calcolo dei radicali (VI, nn. 7-11) e infine si scrive il risultato sotto forma di potenza ad esponente frazionario.

Dimostriamo, p. es., la (I), riferendoci, per fissare le idee, ad un caso numerico:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{3}{5}}.$$

Infatti si hanno le successive identità:

$$(ab)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(ab)^3} = \sqrt[5]{a^3 b^3} = \sqrt[5]{a^3}\,\sqrt[5]{b^3} = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{3}{5}}.$$

Lasciando poi all'alunno di dimostrare come esercizio le (II), (III) e (V) del n. 1, dimostriamo qui la (IV), riferendoci ancora ad un caso numerico:

$$a^{-\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{4}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}.$$

Infatti (si ricordi VI, nn. 8, 11*B*)

$$a^{-\frac{2}{3}} a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{a^{-2}}\,\sqrt[4]{a^5} = \sqrt[12]{a^{-8}}\,\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[12]{a^{-8}\,a^{15}} =$$
$$= \sqrt[12]{a^{-8+15}} = a^{\frac{-8+15}{12}} = a^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}.$$

Andamento delle potenze ad esponente razionale al variare della base o dell'esponente

5. Sappiamo che, nel caso delle potenze ad esponente intero *positivo* dei numeri *positivi*, da $b > a$ consegue, qualunque sia l'intero positivo n, $b^n > a^n$, e che, se m ed n sono due numeri interi positivi, da $n > m$ consegue $a^n > a^m$ oppure $a^n < a^m$, secondo che il numero positivo a è maggiore o minore di 1 (Introd., n. 5 *F*, *G*; I, n. 15). Ci proponiamo qui di estendere alle potenze ad esponente razionale questi due criterî, che permettono di *riconoscere come varia una* *potenza* (a base positiva), *quando, tenuto fisso l' esponente, si fa variare la base, oppure, tenuta fissa la base, si fa variare l' esponente.*

6. Premettiamo due osservazioni:

A) ogni potenza di 1, *ad esponente razionale, è uguale ad* 1.

Sono invero uguali ad 1 tutte le potenze di 1 ad esponente intero positivo, come pure tutte le radici (positive) di 1. Sarà quindi uguale ad 1 anche ogni potenza di 1 ad esponente razionale positivo; p. es.

$$1^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{1^3} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

E così pure sarà uguale ad 1 ogni potenza di 1 ad esponente razionale negativo, in quanto non è che la reciproca di una potenza di 1 ad esponente razionale positivo; così

$$1^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{1^{\frac{3}{5}}} = 1.$$

B) Dato un numero positivo a, diverso da 1, *secondo che esso è maggiore o minore di* 1, *anche ogni sua potenza ad esponente razionale positivo è rispettivamente maggiore o minore di* 1, *mentre ogni sua potenza ad esponente razionale negativo è, rispettivamente, minore o maggiore di* 1.

Se l' esponente è un intero positivo n, sappiamo già, come si è ricordato al n. prec., che da $a > 1$ o $a < 1$ consegue, rispettivamente, $a^n > 1$ o $a^n < 1$. Prendiamo dunque anzitutto come esponente una qualsiasi frazione positiva $\frac{p}{q}$ e indichiamo con b il valore (positivo) di $a^{\frac{p}{q}}$. Dalla

$$b = a^{\frac{p}{q}}$$

ricaviamo, elevando ambo i membri all' esponente q,

$$b^q = a^p.$$

Se $a > 1$, avremo anche $a^p > 1$ e quindi b non può essere nè uguale nè minore di 1, perchè in tal caso anche b^q, cioè a^p, sarebbe rispettivamente uguale o minore di 1; cosicchè si conclude

$$b > 1 \quad \text{ossia} \quad a^{\frac{p}{q}} > 1.$$

Analogamente da $a < 1$ si deduce $b < 1$ ossia $a^{\frac{p}{q}} < 1$.

Se poi, come esponente, prendiamo un qualsiasi numero razionale negativo $-\frac{p}{q}$, abbiamo

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

cosicchè, essendo $a^{\frac{p}{q}} > 1$ o < 1 secondo che è $a > 1$ o $a < 1$, risulta corrispondentemente $a^{-\frac{p}{q}} < 1$ o > 1.

7. Ciò premesso, dimostriamo i due teoremi fondamentali, preannunciati al n. 5.

A) Se a e b sono due numeri positivi *quali si vogliano ed r è un qualsiasi numero razionale, da $b > a$ consegue $b^r > a^r$ o $b^r < a^r$ secondo che è $r > 0$ o $r < 0$; cioè, quando in una potenza ad esponente razionale di una base positiva si tiene fisso l'esponente e si fa crescere la base, la potenza cresce o decresce secondo che l'esponente è positivo o negativo.*

Infatti dall'ipotesi $b > a$ si deduce, dividendo ambo i membri pel numero positivo a, $\frac{b}{a} > 1$ e quindi, se $r > 0$ (n. prec., *B*),

$$\left(\frac{b}{a}\right)^r > 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{b^r}{a^r} > 1$$

o infine

$$b^r > a^r.$$

Se invece è $r < 0$, si ha (n. prec., B)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^r < 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{b^r}{a^r} < 1$$

o infine

$$b^r < a^r.$$

B) *Se* r *ed* s *sono due numeri razionali* quali si vogliano *ed* a *è un qualsiasi numero* positivo *diverso da* 1, *da* $s > r$ *consegue* $a^s > a^r$ *oppure* $a^s < a^r$, *secondo che è* $a > 1$ *oppure* $a < 1$; cioè, *quando in una potenza ad esponente razionale di una base positiva* (diversa da 1) *si tiene fissa la base e si fa crescere l'esponente, la potenza cresce o decresce, secondo che la base è maggiore o minore di* 1.

Infatti, per confrontare le due potenze a^r ed a^s, se ne consideri il rapporto

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r},$$

dove, per l'ipotesi $s > r$, si ha $s - r > 0$. Perciò, se è $a > 1$, si avrà (n. prec. B)

$$a^{s-r} > 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{a^s}{a^r} > 1 \quad \text{o infine } a^s > a^r.$$

E similmente, se è $a < 1$, sarà

$$a^{s-r} < 1, \quad \frac{a^s}{a^r} < 1, \quad a^s < a^r.$$

8. In vista di future applicazioni, conviene precisare meglio il teorema B) del n. prec. Esso ci assicura che, quando si tiene fissa la base positiva a e si fa crescere l'esponente razionale r, la potenza a^r cresce o decresce secondo che è $a > 1$ o $0 < a < 1$; di conseguenza, quando l'esponente si fa invece decrescere, la potenza a^r, secondo che è $a > 1$ o $0 < a < 1$, decresce o, rispettivamente, cresce. Orbene, vogliamo far vedere che in ogni caso la potenza nel crescere finisce col diventare grande quanto si vuole,

e nel decrescere finisce col diventare piccola quanto si vuole. Distingueremo i soliti due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$, e ce ne occuperemo separatamente nei prossimi due nn.

9. *Fissata una base* $a > 1$:

A) si può sempre trovare un esponente razionale positivo r *abbastanza grande, perchè* a^r *risulti maggiore di un qualsiasi numero positivo prefissato* H, *per quanto grande*; e ciò si esprime brevemente dicendo che *quando l'esponente tende a* $+\infty$, *anche la potenza tende a* $+\infty$;

B) si può sempre trovare un esponente razionale negativo $-r$, *abbastanza grande in valore assoluto perchè* a^{-r} *risulti minore di un qualsiasi numero positivo prefissato* ε (1), *per quanto piccolo*; e ciò si esprime brevemente, dicendo che, *quando l'esponente tende a* $-\infty$, *la potenza tende a zero.*

A) Basterà mostrare che si può trovare un *intero* positivo n, abbastanza grande, perchè sia

$$a^n > H, \tag{1}$$

giacchè allora, per il n. 7*B*, la stessa disuguaglianza varrà per ogni esponente razionale $r > n$.

Per trovare un intero n soddisfacente alla (1), si consideri l'identità

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1),$$

che è stata dimostrata negli elementi del Calcolo letterale (Introd., n. 16) e che del resto, si verifica subito, eseguendo il prodotto indicato a secondo membro. Il secondo fattore del secondo membro comprende n termini, di cui l'ultimo è 1 e gli altri, per l'ipotesi $a > 1$, sono tutti maggiori di 1 (n. 6*B*), cosicchè, se si sostituisce a ciascuno di essi l'unità, il secondo membro rimpicciolirà e avremo

$$a^n - 1 > (a-1)n \quad \text{ossia} \quad a^n > 1 + (a-1)n.$$

Allora, perchè risulti soddisfatta la (1) basterà prendere l'intero n abbastanza grande, perchè sia

$$1 + (a-1)n > H \quad \text{ossia} \quad n > \frac{H-1}{a-1}.$$

---

(1) Leggasi « *épsilon* »; ε è la lettera *e* (breve) dell'alfabeto greco.

B) Perchè risulti

$$a^{-r} < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{a^r} < \varepsilon$$

basta che sia

$$a^r > \frac{1}{\varepsilon},$$

e si è visto appunto or ora che si può sempre trovare un esponente razionale positivo r, soddisfacente a questa condizione.

10. *Fissata una base positiva $a < 1$:*

A) *si può sempre trovare un esponente razionale positivo r abbastanza grande perchè la potenza a^r, che si mantiene sempre positiva, risulti minore di un qualsiasi numero positivo prefissato ε, per quanto piccolo;* cioè, *quando l'esponente tende a $+\infty$, la potenza tende a zero;*

B) *si può sempre trovare un esponente razionale negativo $-r$ abbastanza grande in valore assoluto, perchè a^{-r} risulti maggiore di un qualsiasi numero positivo prefissato H, per quanto grande;* cioè, *quando l'esponente tende a $-\infty$, la potenza tende a $+\infty$.*

A) Infatti la condizione

$$a^r < \varepsilon$$

si può anche scrivere

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-r} < \varepsilon,$$

e, poichè sotto l'ipotesi $a < 1$ risulta $\frac{1}{a} > 1$, è possibile soddisfare a questa condizione in forza del teorema *B*) del n. prec.

B) Similmente la condizione

$$a^{-r} > H$$

si può scrivere

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{r} > H,$$

e si può quindi soddisfare in forza del teorema *A*) del n. prec.

11. Va infine rilevato il seguente teorema, pur esso notevole:

Qualunque sia la base positiva a (cioè, sia essa maggiore di 1 o compresa fra 0 ed 1), *si può sempre trovare* *un esponente razionale, positivo o negativo, r o $-r$, abbastanza piccolo in valore assoluto, perchè la potenza a^r o a^{-r} abbia da 1 una differenza che sia, in valore assoluto, minore di un qualsiasi numero positivo prefissato ε, per quanto piccolo;* e ciò si esprime, dicendo che *quando l'esponente tende a* 0 (sia decrescendo, cioè per valori positivi, sia crescendo, cioè per valori negativi) *la potenza tende ad* 1.

Supponiamo dapprima $a > 1$ e, considerando il caso di un esponente razionale positivo r, notiamo che, in queste ipotesi, a^r è in ogni caso maggiore di 1 (n. 6*B*), onde bisogna far vedere che si può dare ad r un valore abbastanza piccolo, perchè risulti

$$a^r - 1 < \varepsilon, \tag{2}$$

ossia

$$a^r < 1 + \varepsilon. \tag{2'}$$

A tal fine si prenda (com'è possibile, per il n. 9*B*, in quanto $1+\varepsilon$ è maggiore di 1) un numero razionale s abbastanza grande perchè si abbia

$$(1+\varepsilon)^s > a.$$

Di qui, elevando ambo i membri all'esponente $\frac{1}{s}$ e ponendo $\frac{1}{s} = r$, si ottiene la (2'), ossia la (2).

Se poi, sempre nell'ipotesi $a > 1$, si vuol considerare il caso di un esponente razionale negativo, basta dimostrare che si può scegliere un numero razionale positivo r abbastanza grande, perchè risulti

$$1 - a^{-r} < \varepsilon, \tag{3}$$

ossia

$$1 - \varepsilon < a^{-r}. \tag{3'}$$

Ora, avendosi $1 - \varepsilon < 1$, si può sempre trovare (n. 10*A*) un esponente s, tale che risulti

$$(1-\varepsilon)^s < a^{-1},$$

e di qui, elevando ambo i membri all'esponente $\frac{1}{s}$ e ponendo $\frac{1}{s} = r$, si ottiene la (3'), ossia la (3).

Esaurito così il caso $a > 1$, si riconduce ad esso anche il caso $0 < a < 1$, osservando che si ha

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-r}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r,$$

e che, sotto l'ipotesi ammessa, è $\frac{1}{a} > 1$.

Potenze ad esponente irrazionale

12. Nelle successive estensioni del concetto di potenza di un numero positivo non resta più che un passo, cioè definire le potenze di una base positiva a ad un qualsiasi esponente *irrazionale* relativo b.

Consideriamo qui dapprima il caso in cui sia $a > 1$ e $b > 0$, e indichiamo con $(\boldsymbol{H} | \boldsymbol{K})$ la sezione, nel campo dei numeri razionali *positivi* (I, n. 13), che definisce questo esponente b. Ciò posto, assegnamo ad una classe $\boldsymbol{H}'$, in corrispondenza di ogni numero h di $\boldsymbol{H}$, tutti i numeri razionali positivi, che non sono maggiori di a^h; e, similmente, assegnamo ad una classe $\boldsymbol{K}'$, in corrispondenza di ogni numero k di $\boldsymbol{K}$, tutti i numeri razionali positivi, che non sono minori di a^k. *Le due classi $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{K}'$, così formate, costituiscono una sezione nel campo dei numeri razionali positivi.*

Infatti: 1) *Dalle due classi $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{K}'$ resta escluso, al più, un solo numero razionale.* Proviamo, invero, a supporre che ne restino esclusi due, r ed s (con $r < s$). Pel modo stesso, in cui si sono formate le due classi $\boldsymbol{H}'$ e $\boldsymbol{K}'$, questi due numeri debbono essere entrambi maggiori di ogni potenza a^h, dove h denota un qualsiasi numero di $\boldsymbol{H}$, ed entrambi minori di ogni potenza a^k, dove k denota un qualsiasi numero della $\boldsymbol{K}$; e cioè deve essere

$$a^h < r < s < a^k,$$

e, quindi, comunque si prenda h in $\boldsymbol{H}$ e k in $\boldsymbol{K}$,

$$a^k - a^h > s - r. \tag{4}$$

Ma ciò è assurdo. Infatti, si fissi a piacere un numero della classe $\boldsymbol{K}$ e, indicatolo con k_1, si consideri il numero $\frac{s-r}{a^{k_1}}$. Si può sempre trovare una frazione positiva $\frac{1}{n}$ tanto piccola che $a^{\frac{1}{n}}$ (che, come sappiamo, è sempre maggiore di 1; n. 6*B*) risulti vicino ad 1 quanto vogliamo (n. prec.), per es. sia

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{s-r}{a^{k_1}}. \tag{5}$$

Se allora si considera la successione dei multipli di $\frac{1}{n}$, cioè

$$\frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{3}{n} \ldots\ldots$$

si finisce necessariamente col trovarne due consecutivi $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m+1}{n}$, che comprendano fra loro il numero b, cioè tali che il primo appartenga ad H, il secondo a K. La differenza

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}}$$

si può scrivere

$$a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

onde, tenendo conto della (5), si ha

$$\text{(6)} \qquad a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}} \frac{s-r}{a^{k_1}}.$$

Ma, in quanto $\frac{m}{n}$ appartiene ad H e k_1 a K, è necessariamente $\frac{m}{n} < k_1$, e quindi (n. 7B)

$$a^{\frac{m}{n}} < a^{k_1} \quad \text{ossia} \quad \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{k_1}} < 1.$$

Perciò dalla (6) discende

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < s - r;$$

e, poichè $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n}$ appartengono rispettivamente ad H e K, resta veramente dimostrato che la (4) non può sussistere per *ogni* possibile scelta di h e k.

2) *La classe H', per il modo stesso in cui è stata formata, contiene con* ogni *suo numero, anche* ogni *numero minore,* e così *la K' contiene, con* ogni *suo numero,* ogni *numero maggiore.*

3) *La classe H' non contiene* massimo. Infatti, ogni numero h' di H' è tale che esiste in H qualche numero h, per cui risulta

$$h' \leq a^h.$$

Ma in H, che non contiene massimo, esistono con h anche altri numeri maggiori, e se h_1 è uno di questi, si ha $a^{h_1} > a^h$, e in H' si trovano tutti i numeri razionali compresi fra a^h e a^{h_1}, i quali sono tutti maggiori di h'.

Similmente *la $\boldsymbol{K}$ non contiene minimo.*

Il numero reale positivo definito dalla sezione $(\boldsymbol{H}'\,|\,\boldsymbol{K}')$ si chiama ***potenza della base** a **all' esponente** b* e si denota con a^b.

13. Dianzi si è supposto $a > 1$, $b > 0$.

Se invece è $0 < a < 1$, pur restando $b > 0$, la potenza a^b si definisce in modo analogo. Solo, in quanto le potenze ad esponente razionale di a, al crescere dell'esponente, anzichè crescere, come accade per $a > 1$, decrescono (n. 7*B*), la sezione $(\boldsymbol{H}'\,|\,\boldsymbol{K}')$, destinata a definire a^b, si costruisce, scambiando, rispetto a quanto si è fatto or ora, l'ufficio delle due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, cioè si assegnano ad $\boldsymbol{H}'$, in corrispondenza di ogni numero k di $\boldsymbol{K}$, tutti i numeri non maggiori di a^k e a $\boldsymbol{K}'$ in corrispondenza di ogni numero h di $\boldsymbol{H}$ tutti i numeri razionali positivi non minori di a^h.

Infine se b è un numero irrazionale *negativo*, si pone per definizione, tanto per $a > 1$, quanto per $0 < a < 1$,

$$a^b = \frac{1}{a^{-b}}.$$

Del resto si può anche dimostrare, che questo medesimo valore (reale positivo) di a^b risulta definito dalla sezione $(\boldsymbol{H}'\,|\,\boldsymbol{K}')$ nel campo dei numeri razionali positivi, che si ottiene, applicando, a partire dalla sezione $(\boldsymbol{H}\,|\,\boldsymbol{K})$, che definisce b nel campo dei numeri razionali ***negativi***, un procedimento perfettamente analogo a quello seguito pocanzi nel caso di $b > 0$.

14. Alle potenze ad esponente irrazionale relativo dei numeri positivi si estendono tutte le proprietà fondamentali (I)–(V) del n. 1, come pure i teoremi dei nn. 6-11, e in particolare quelli, che abbiamo ivi stabilito sul modo di variare delle potenze, quando, tenuta fissa la base, si faccia variare l' esponente e che qui, per la loro importanza, riassumiamo in una tabella, indicando oramai con a e b due *numeri reali* quali si vogliano, di cui il primo sia positivo e diverso da 1:

$a > 0, \gtrless 1$		b	a^b
fisso	> 1	tendente a $+\infty$	tende a $+\infty$
		» 0	» 1
		» $-\infty$	» 0
	< 1	» $+\infty$	» 0
		» 0	» 1
		» $-\infty$	» $+\infty$

Non ci indugeremo su queste estensioni, che richiederebbero ragionamenti laboriosi e sottili; e ci limitiamo ad osservare che la possibilità di tali estensioni risulta in qualche modo intuitiva, ove si rifletta che le proprietà suaccennate valgono, in ogni possibile ordine di approssimazione, per le potenze ad esponente razionale, con cui si possono approssimare le potenze ad esponente irrazionale. Si conserveranno, quindi valide, anche quando, coi procedimenti di approssimazione indefinita che risultano dalla definizione per mezzo delle corrispondenti sezioni (I, n. 5), si perviene a codeste potenze ad esponente irrazionale.

Capitolo VIII

Equazioni esponenziali e logaritmi

Equazioni esponenziali

1. Si è visto nel Cap. prec. che, quando si sia fissata una base positiva a, diversa da 1, la potenza a^b, per *ogni* possibile valore b dell'esponente (sia esso razionale o irrazionale, positivo o negativo) ha un valore *positivo* ben determinato. Viceversa, ci chiediamo: prefissato un *qualsiasi* valore positivo c, esisterà sempre un esponente reale b, tale che la potenza a^b risulti proprio uguale a c? In altre parole, vogliamo sapere se esista sempre una soluzione per l'equazione in x

(1) $$a^x = c.$$

È questa un'equazione di tipo nettamente diverso dalle equazioni *algebriche* di 1° o 2° o 3°.... grado, considerate sin qui, giacchè in queste la incognita x compariva solo come base di potenze a esponenti interi ben determinati, mentre nella (1) essa figura come esponente. Perciò la (1) si chiama *equazione esponenziale di base* a.

Ora, se si tien conto delle proprietà stabilite al Cap. prec. per le potenze ad esponente reale qualsiasi di una base positiva, si è senz'altro condotti a ritenere evidente che, qualunque sia la base positiva (e diversa da 1) a e comunque siasi prefissato il numero positivo c, codesta equazione (1) deve effettivamente avere *una* soluzione ed *una sola.* Invero, si ricordi che, se si fa variare l'esponente x da $-\infty$ a $+\infty$, la potenza a^x, se $a > 1$, passa via via da valori positivi prossimi a 0 quanto si vuole a valori positivi grandi quanto si vuole, mentre invece, se $0 < a < 1$, passa, in senso inverso, da valori positivi grandi quanto si vuole a valori positivi prossimi a 0 quanto si vuole. Nell'uno e nell'altro caso, non v'è ragione che la a^x non assuma, per un opportuno valore b dell'esponente x, il valore c prefissato, e questo b fornisce appunto *una* soluzione della (1). D'altra parte, poichè la a^x, secondo che è $a > 1$ o $0 < a < 1$, conserva, al variare di x da $-\infty$ a $+\infty$, un andamento costantemente crescente o decrescente, è pur chiaro che per ogni x diverso da b essa assume un valore diverso da a^b, cioè da c, cosicchè il valore $x = b$ è necessariamente l'*unica* soluzione della (1).

E si può anche aggiungere qualcosa di più. La potenza a^x per $x = 0$ si riduce ad $a^0 = 1$, sicchè, ancora in forza del suo andamento sempre crescente o sempre decrescente, essa nel caso $a > 1$ assume per ogni $x > 0$ un valore > 1 e per ogni $x < 0$ un valore (positivo) < 1, mentre, nel caso $0 < a < 1$, assume invece per ogni $x > 0$ un valore (positivo) < 1 e per ogni $x < 0$ un valore > 1. Perciò, viceversa, se $a > 1$ il valore b, per cui risulta $a^b = c$ è necessariamente positivo o negativo secondo che è $c > 1$ o $c < 1$, mentre, se $0 < a < 1$, codesto valore b è positivo o negativo, secondo che è $c < 1$ o $c > 1$.

Risulta così giustificato intuitivamente il seguente teorema fondamentale sulle equazioni esponenziali: *Dati due numeri positivi quali si vogliano a e c, di cui il primo sia diverso da* 1, *l'equazione esponenziale*

$$a^x = c \tag{1}$$

ammette sempre una soluzione ed una sola. Se è $c \gtrless 1$ e $a > 1$, questa soluzione è positiva o negativa, secondo che è $c > 1$ o $c < 1$, mentre, se è $c \gtrless 1$ ed $a < 1$, essa è positiva o negativa, secondo che è $c < 1$ o $c > 1$. Se infine è $c = 1$, la soluzione della (1) *è in ogni caso $x = 0$.*

Per dimostrare rigorosamente questo teorema bisogna ricorrere ancora una volta alla definizione dei numeri reali per mezzo delle corrispondenti sezioni nel campo dei numeri razionali (I, nn. 3, 10).

Escluso il caso $c=1$, in cui l'equazione esponenziale (1) ammette l'unica soluzione $x=0$, cominciamo col supporre $a>1$ e $c>1$. Per definire la corrispondente soluzione della (1), ripartiamo i numeri razionali positivi in due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$, assegnando alla prima tutti i numeri razionali positivi h, per cui risulta $a^h<c$, alla seconda tutti i numeri razionali positivi k, per cui risulta $a^k>c$. Diciamo che così si determina, nel campo dei numeri razionali positivi, una sezione $(\boldsymbol{H}\mid\boldsymbol{K})$.

Infatti: 1) *Ogni numero razionale viene, in tal modo, attribuito ad* $\boldsymbol{H}$ *o a* $\boldsymbol{K}$, *salvo, al più, quell'eventuale numero razionale* r, *per cui risulti proprio* $a^r=c$, ed in questo caso r è già la soluzione cercata della (1).

2) *La classe* $\boldsymbol{H}$ *contiene, con ogni suo numero* h, *tutti i numeri razionali minori,* perchè, avendosi $a^h<c$, anche ogni numero razionale minore di h, preso come esponente di a, dà una potenza minore di c (VII, n. 7 *B*) e, quindi, appartiene ad $\boldsymbol{H}$. E, similmente, *la classe* $\boldsymbol{K}$ *contiene, con ogni suo numero, tutti i numeri razionali maggiori.*

3) *La classe* $\boldsymbol{H}$ *non ha massimo.* Infatti, preso un qualsiasi numero h di $\boldsymbol{H}$, cioè tale che sia $a^h<c$, e posto $c-a^h=d$, talchè sia $c=a^h+d$, si può sempre trovare (VII, n. 11) un numero razionale positivo r abbastanza piccolo perchè risulti

$$a^r-1<\frac{d}{a^h}.$$

Di qui, moltiplicando ambo i membri per a^h, si deduce

$$a^{h+r}-a^h<d \quad \text{ossia} \quad a^{h+r}<a^h+d,$$

cioè

$$a^{h+r}<c,$$

e alla classe $\boldsymbol{H}$ appartiene, insieme con h, anche il numero $h+\frac{1}{n}>h$.

Similmente si dimostra che *la classe* $\boldsymbol{K}$ *non ha minimo.*

Riconosciuto, così, che le due classi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{K}$ costituiscono una sezione $(\boldsymbol{H}\mid\boldsymbol{K})$ nel campo dei numeri razionali positivi e indicato con b il numero positivo definito da questa sezione, diciamo che b è appunto la soluzione dell'equazione (1).

Per dimostrarlo, dobbiamo considerare la sezione $(\boldsymbol{H}'\mid\boldsymbol{K}')$, che, secondo il n. 12 del Cap. prec., definisce la potenza a^b, e far vedere che anche c è maggiore di tutti i numeri h' di $\boldsymbol{H}'$, minore di tutti i numeri k' di $\boldsymbol{K}'$.

A tal fine si ricordi che, per il modo stesso in cui è stata formata la classe $\boldsymbol{H}'$, ogni suo numero h' è minore o, al più, uguale ad una qualche potenza a^h, dove h è un numero di $\boldsymbol{H}$. Poichè si ha $a^h<c$, risulta appunto $h'<c$. Similmente si dimostra che ogni numero k' di $\boldsymbol{K}'$ è maggiore di c, cosicchè resta veramente dimostrato che

$$a^b=c.$$

Stabilito, così, il teorema per $a > 1$ e $c > 1$, passiamo al caso, in cui, essendo ancora $a > 1$, sia invece $c < 1$.

Consideriamo qui, in luogo della (1), l'equazione esponenziale nella incognita u

(2) $$a^u = \frac{1}{c}.$$

Poichè a secondo membro compare un numero maggiore di 1, questa equazione è soddisfatta, per quanto si è dianzi dimostrato, da un certo valore positivo b di u; e basta scrivere la (2) sotto la forma

$$a^{-u} = c$$

per riconoscere che l'equazione primitiva (1) ammette, in questo caso, la soluzione negativa $-b$.

Rimane infine da considerare il caso, in cui sia $a < 1$ (e $c \gtrless 1$). Qui, in luogo della (1), consideriamo l'equazione esponenziale, nell'incognita u,

(3) $$\left(\frac{1}{a}\right)^u = c,$$

la quale, avendo la base $\frac{1}{a} > 1$, ammette, in forza dei risultati già stabiliti, una soluzione b, che sarà positiva o negativa, secondo che è $c > 1$ o $c < 1$. Riscrivendo la (3) sotto la forma $a^{-u} = c$, riconosciamo che l'equazione (2), ammette, in questo caso, la soluzione $-b$, la quale è positiva o negativa secondo che è $c < 1$ o $c > 1$.

Il teorema è così dimostrato in tutti i casi.

Logaritmi e loro proprietà fondamentali

2. La considerazione delle soluzioni delle varie equazioni esponenziali di data base risulta, come vedremo fra un momento, particolarmente utile nei calcoli numerici. Perciò si è trovato opportuno dare un nome speciale a codeste soluzioni. Precisamente si è convenuto di chiamare *logaritmo in base* a di un qualsiasi numero positivo c l'esponente, cui si deve elevare la base a per ottenere il numero prefissato c [1]. Questo logaritmo si indica con $\log_a c$, cosic-

[1] Secondo EUCLIDE, se il numero a si considera come *ragione* (o rapporto) di due grandezze, i numeri a^2, a^3,.... diconsi *ragione duplicata*,

chè si ha per definizione l'identità

$$(4) \qquad a^{\log_a c} = c.$$

Importa tener presente che questa definizione di logaritmo ha senso, purchè siano soddisfatte le due seguenti condizioni: 1) *la base a deve essere positiva e diversa da* 1, perchè solo per $a > 0$ la potenza a^x ha senso, qualunque sia l'esponente x; e, d'altra parte, se fosse $a = 1$, codesta potenza avrebbe, per qualsiasi valore di x, il valore 1;

2) *il numero c deve essere positivo*, perchè la potenza a^x per qualsiasi valore di x (positivo o negativo), risulta sempre positiva, cosicchè non avrebbe senso parlare di logaritmo di un numero negativo.

Perciò d'or innanzi, anche senza più avvertirlo, supporremo sempre soddisfatte queste due condizioni.

3. In forza della stessa definizione, le proprietà dei logaritmi si deducono immediatamente da quelle delle potenze ad esponente qualsiasi dei numeri positivi. Così, per cominciare, dalle più semplici, osserviamo che dalle identità

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a$$

risulta

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

cioè: *In una qualsiasi base a, il logaritmo di* 1 *è lo zero, e il logaritmo della base è* 1.

Inoltre, tenendo conto del teorema fondamentale sull'equazione esponenziale (n. 1) e dell'andamento sempre crescente o sempre decrescente della potenza a^x secondo che è $a > 1$ o $0 < a < 1$, si ha che: *Se la base a è maggiore di* 1, *ogni numero maggiore di* 1 *ha il logaritmo positivo*,

---

triplicata,.... di a. Così per a^n, n si dirà il *numero della ragione* = λόγου ἀριθμός; e di qui venne il nome di «logaritmo» che risale allo scozzese GIOVANNI NAPIER (Neperus), al quale si deve l'invenzione dei logaritmi. Egli la rese nota nel 1614.

e ogni numero positivo minore di 1 *ha il logaritmo negativo; e se due numeri sono disuguali, anche i loro logaritmi sono disuguali nello stesso senso, e viceversa.*

Se, invece, la base a, pur essendo positiva, è minore di 1, *il logaritmo di un numero (positivo) è positivo o negativo, secondo che il numero considerato è minore o maggiore di* 1; *e di due numeri disuguali ha logaritmo maggiore il minore, e viceversa.*

4. Le proprietà dei logaritmi, che ne hanno suggerito la introduzione e ne rendono vantaggioso l'uso nei calcoli numerici, sono le seguenti:

A) In una base qualsiasi il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due fattori, cioè

$$\log_a (c_1 c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2 .$$

Infatti dalla definizione del logaritmo (n. 2) abbiamo

$$c_1 = a^{\log_a c_1}, \quad c_2 = a^{\log_a c_2};$$

e di qui, moltiplicando membro a membro,

$$c_1 c_2 = a^{\log_a c_1 + \log_a c_2}.$$

Ora questa identità ci dice che per ottenere il numero $c_1 c_2$ bisogna elevare la base a all'esponente

$$\log_a c_1 + \log_a c_2 ,$$

cioè appunto (n. 2)

$$\log_a (c_1 c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2 .$$

Lo stesso teorema vale senz'altro per un prodotto di quanti si vogliano fattori, giacchè si ha, per es.,

$$\log (c_1 c_2 c_3) = \log ([c_1 c_2] c_3) = \log [c_1 c_2] + \log c_3 =$$
$$= \log c_1 + \log c_2 + \log c_3 .$$

B) In una base qualsiasi, il logaritmo del quoziente di *due numeri è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore*, cioè

$$\log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \log_a c_1 - \log_a c_2 \,. \tag{5}$$

Infatti dalla identità

$$\frac{c_1}{c_2}\, c_2 = c_1$$

si deduce, applicando il teorema *A*),

$$\log_a\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + \log_a c_2 = \log_a c_1$$

e quindi la (5).

C) Risulta, in particolare, dal teor. prec. e dal n. 3,

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = -\log_a c,$$

cioè: *Due numeri che siano l'uno il reciproco dell'altro hanno, in una base qualsiasi, logaritmi uguali in valore assoluto e di segno contrario.*

D) In una base qualsiasi il logaritmo di una potenza qualsivoglia di un numero si ottiene moltiplicando per l'esponente il logaritmo della base della potenza, cioè

$$\log_a c^b = b \log_a c \,.$$

Infatti dalla identità (4) di definizione del logaritmo (n. 2)

$$c = a^{\log_a c}$$

si deduce, elevando ambo i membri all'esponente b,

$$c^b = a^{b \log_a c};$$

e questa identità ci dice appunto (n. 2) che

$$\log_a c^b = b \log_a c.$$

E) Dal teor. prec. discende, in particolare,

$$\log_a \sqrt[n]{c} = \log_a c^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a c,$$

cioè: *In una base qualsiasi il logaritmo di un radicale* (a radicando positivo) *si ottiene dividendo per il relativo indice il logaritmo del radicando.*

5. I teoremi precedenti fanno comprendere quale sia l'utilità che pei calcoli numerici si trae da una *Tavola di logaritmi.* Una Tavola di logaritmi in data base a è costituita nella sua forma primitiva (che nella pratica, come vedremo poi, si modifica opportunamente per ragioni di comodità) da due colonne di numeri. Nella prima colonna sono segnati in ordine crescente i numeri positivi, che, entro un certo intervallo, si susseguono ad una data differenza costante, p. es. di millesimo in millesimo. Nella seconda colonna, di fronte a ciascun numero della prima, è segnato, con una data approssimazione, il rispettivo logaritmo in base a.

Se si vuol trovare il prodotto di due numeri c_1, c_2, contenuti nella Tavola, basta ricordare l'identità (n. prec.)

$$\log_a (c_1 c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2 .$$

In base ad essa, si cercheranno sulla Tavola $\log_a c_1$ e $\log_a c_2$ (che si troveranno nella seconda colonna di fronte ai numeri c_1, c_2 della prima), si sommeranno questi due logaritmi, e infine si cercherà sulla Tavola quale sia il numero che ha per logaritmo la somma ottenuta. Codesto numero sarà il prodotto cercato $c_1 c_2$.

Vediamo così che col sussidio della Tavola di logaritmi, la moltiplicazione si riduce ad una addizione; e analogamente, in base ai teoremi *B)* - *E)* del n. prec., ogni divisione si riduce ad una sottrazione, ogni elevamento a potenza alla moltiplicazione per l'esponente, e, in particolare, ogni estrazione di radice alla divisione per l'indice.

In tal modo i calcoli numerici vengono abbreviati e semplificati; e noi potremo dare in proposito numerosi esempi (nn. 15-21), quando avremo trattato in modo più preciso delle proprietà e dell'uso dei logaritmi in base 10, che soli si adoprano nella pratica.

6. Prima per altro è opportuno aggiungere una osservazione *sul modo in cui si passa da un sistema di logaritmi ad un altro.*

Cerchiamo, cioè, quale relazione interceda tra i logaritmi di un medesimo numero c in due diverse basi a e b:

$$\log_a c, \quad \log_b c.$$

Abbiamo per definizione (n. 2)

$$c = b^{\log_b c}.$$

Se allora prendiamo il logaritmo in base a dei due membri di questa identità, avremo, pel n. 4*D*,

$$\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b$$

ossia

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

Si ha dunque che *il logaritmo di un qualsivoglia numero in base b si ottiene dividendo il logaritmo dello stesso numero in base a per il* $\log_a b$, *ossia moltiplicandolo per*

$$\frac{1}{\log_a b}.$$

Quest' ultimo numero dicesi *modulo* pel passaggio dal sistema di logaritmi in base a al sistema in base b; e vediamo da quanto precede che, allorchè si cambia la base del sistema, i logaritmi di tutti i numeri variano proporzionalmente (nel rapporto dato dal *modulo*).

Logaritmi volgari e uso delle corrispondenti Tavole

7. Come già si è accennato (n. 5), nella pratica dei calcoli numerici si usano i logaritmi di base 10 o *logaritmi volgari* o anche del Briggs, dal nome del matematico inglese, che per primo ne intraprese il calcolo e ne pubblicò una tavola (*Arithmetica logarithmica*, Londini 1624).

Ci proponiamo qui di studiarne le proprietà e di illustrare, con regole ed esempî, l'uso delle corrispondenti Tavole.

Per semplicità di scrittura, denoteremo, per qualsiasi numero positivo c, il $\log_{10} c$ con $\operatorname{Log} c$, onde avremo anzitutto (n. 3)

$$\operatorname{Log} 1 = 0, \quad \operatorname{Log} 10 = 1.$$

E, poichè la base 10 dei logaritmi volgari coincide con quella del sistema di numerazione decimale, è altrettanto facile trovare il Logaritmo di qualsiasi unità decimale, tanto maggiore che minore di 1. Le unità decimali maggiori di 1 sono, oltre il 10, di cui già conosciamo il Logaritmo,

$$100 = 10^2 \quad 1000 = 10^3 \quad 10000 = 10^4 \ldots..$$

Si ha quindi, oltre $\operatorname{Log} 10 = 1$,

$$\operatorname{Log} 100 = 2 \quad \operatorname{Log} 1000 = 3 \quad \operatorname{Log} 10000 = 4 \ldots.;$$

cioè *il Logaritmo di ogni unità decimale maggiore di* 1 *è dato dal numero degli zeri dell'unità considerata.*

Similmente le unità decimali minori di 1 sono

$$0{,}1 = 10^{-1} \quad 0{,}01 = 10^{-2} \quad 0{,}001 = 10^{-3} \ldots..,$$

onde risulta

$$\operatorname{Log} 0{,}1 = -1 \quad \operatorname{Log} 0{,}01 = -2 \quad \operatorname{Log} 0{,}001 = -3 \ldots.;$$

cioè *il Logaritmo di ogni unità decimale minore di* 1 *è dato dall'intero negativo, che ha tante unità quanti sono gli zeri dell'unità considerata* (compreso quello che precede la virgola).

Comunque si prefissi un numero positivo, le due osservazioni precedenti permettono di trovare il massimo intero, *positivo* o *negativo*, che non supera il Logaritmo del numero prefissato, e che si chiama la *caratteristica* di questo Logaritmo.

Si rifletta, invero, che, in quanto la base 10 qui adottata è maggiore di 1, al crescere del numero cresce anche il corrispondente Logaritmo (n. 3). Ne consegue che i numeri compresi fra $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$, cioè aventi la *parte intera di* 1 *sola cifra*, hanno Logaritmi compresi fra 0 ed 1, cioè di caratteristica 0; i numeri compresi fra $10 = 10^1$ e $100 = 10^2$, cioè aventi la *parte intera di 2 cifre,* hanno Logaritmi compresi fra 1 e 2, cioè di caratteristica 1; i numeri compresi fra $100 = 10^2$ e $1000 = 10^3$, cioè aventi la *parte intera di 3 cifre,* hanno Logaritmi compresi fra 2 e 3, cioè di caratteristica 2; e così via. Invece, passando ai numeri (positivi) minori di 1, abbiamo che quelli compresi fra $1 = 10^0$ e $0{,}1 = 10^{-1}$, cioè aventi 1 *zero davanti alla prima cifra significativa,* hanno Logaritmi compresi fra 0 e -1, cioè di caratteristica -1; i numeri compresi fra $0{,}1 = 10^{-1}$ e $0{,}01 = 10^{-2}$, cioè aventi 2 *zeri davanti alla cifra significativa,* hanno Logaritmi compresi fra -1 e -2, cioè di caratteristica -2; i numeri compresi fra $0{,}01 = 10^{-2}$ e $0{,}001 = 10^{-3}$, cioè aventi 3 *zeri davanti alla prima cifra significativa,* hanno Logaritmi compresi fra -2 e -3, cioè di caratteristica -3; e così via.

Possiamo dunque enunciare la seguente

Regola delle caratteristiche. — *La caratteristica del Logaritmo di un qualsiasi numero maggiore di* 1 *è l'intero* (positivo o nullo), *che si ottiene diminuendo di* 1 *il numero delle cifre della parte intera del numero considerato. La caratteristica del Logaritmo di un qualsiasi numero* (positivo) *minore di* 1 *è l'intero negativo, che ha tante unità, quanti sono gli zeri, che* (compreso quello a sinistra della virgola) *precedono nel numero considerato la prima cifra significativa.*

Così, ad es., la caratteristica di Log 3742,83 è 3, quella di Log 0,004762 è -3.

8. Prefissiamo un qualsiasi numero positivo c, e, per non ricadere su casi già esauriti, supponiamo che esso non sia nè 1, nè un'unità decimale. Il rispettivo Logaritmo, ove se ne indichi con C la caratteristica, che è sempre un intero (positivo o nullo se $c > 1$, negativo se $c < 1$), si può scrivere

$$\operatorname{Log} c = C + M,$$

dove M (eccesso del Logaritmo sulla rispettiva caratteristica) è un certo numero *sempre positivo* e *minore di* 1, cosicchè, scritto sotto forma decimale, ha nulla la parte intera. Poichè la caratteristica, in base alla regola del n. prec., si può in ogni caso assegnare immediatamente, essa non è mai indicata nelle Tavole; e vi sono, invece, registrate le cifre decimali della parte M, a partire dalla virgola e fino ad un determinato posto, che varia da Tavola a Tavola. Vi sono così *Tavole a* 4, *a* 5, *a* 6, *a* 7 *decimali* (1); e solitamente l'ultima cifra vi si scrive arrotondata, se la prima cifra che si trascura è maggiore di 4, cosicchè ogni Tavola dà i Logaritmi con un errore (per difetto o per eccesso) minore di mezza unità dell'ultimo ordine (2).

In tal modo, è bene notarlo subito, *i calcoli con Logaritmi sono tutti* CALCOLI APPROSSIMATI e il grado dell'approssimazione, che si può raggiungere, dipende in ogni caso dal numero dei decimali della Tavola di Logaritmi, di cui si intende servirsi.

I gruppi delle prime 4 o 5 o 6 o 7 cifre decimali di M, che, come dicemmo, si trovano registrati nelle Tavole, diconsi *mantisse* dei rispettivi Logaritmi.

E qui va fatta un'osservazione fondamentale: *La mantissa del Logaritmo di un qualsiasi numero non varia, quando il numero si moltiplica o si divide per una qualsiasi potenza* (ad esponente intero positivo) *di* 10.

---

(1) Subito dopo l'invenzione dei Logaritmi si calcolarono Tavole con un grande numero di decimali; p. es. l'*Arithmetica logarithmica* del BRIGGS contiene i Logaritmi dei numeri a 14 decimali. Ma più tardi si riconobbe che bastano per la pratica Tavole minori; così nei calcoli astronomici e geodetici di grande precisione si tien conto al più di 7 od 8 decimali, e per moltissime applicazioni (p. es. in Astronomia nautica, in Fisica, in Chimica) bastano Tavole a 5 decimali. Noi nel seguito per le nostre esercitazioni numeriche ci limiteremo ai primi 4 decimali.

(2) In molte Tavole si contraddistingue con un segno speciale (un asterisco, un punto, una lineetta) l'ultima cifra del Logaritmo, quando è arrotondata, cioè quando il Logaritmo è dato per eccesso.

Infatti, indicato con n un qualsiasi intero positivo, si ha, qualunque sia il numero positivo c (n. 4 A),

$$\mathrm{Log}\,(10^n\,c) = \mathrm{Log}\,10^n + \mathrm{Log}\,c = n + \mathrm{Log}\,c\,,$$
$$\mathrm{Log}\,(10^{-n}\,c) = \mathrm{Log}\,10^{-n} + \mathrm{Log}\,c = -n + \mathrm{Log}\,c\,.$$

Si ha, dunque, che, secondo che c si moltiplica o si divide per 10^n, il Logaritmo aumenta o diminuisce di n, talchè varia bensì la caratteristica, ma non la mantissa.

L'osservazione precedente si può anche enunciare, dicendo che *la mantissa del Logaritmo di un qualsiasi numero dipende soltanto dalle cifre, che, in un dato ordine, costituiscono il numero considerato, ma non dal posto, che vi occupa la virgola.*

Di qui discende, che basta conoscere le mantisse dei Logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10, perchè risultino note quelle dei Logaritmi di tutti gli altri numeri. E, poichè naturalmente è impossibile calcolare le mantisse dei Logaritmi di *tutti* i numeri compresi fra 1 e 10, si registrano nelle Tavole quelle dei numeri, che, in codesto intervallo, si susseguono ad una differenza costante, tanto più piccola quanto maggiore è l'approssimazione, che si vuol raggiungere. Per es., nella *Tavola a* 4 *decimali*, che è allegata a questo volumetto e di cui oramai ci serviremo nel seguito, sono registrate le mantisse, con 4 decimali, dei numeri da 1 a 10, di centesimo in centesimo, cioè dei numeri

$$(6) \qquad 1 \quad 1{,}01 \quad 1{,}02 \quad 1{,}03 \ldots\ldots \quad 9{,}99\,;$$

e notiamo subito, che in forza della osservazione fondamentale or ora enunciata, codeste mantisse son pur quelle di tutti i numeri che dai (6) si ottengono moltiplicandoli o dividendoli per una qualsiasi potenza di 10, cioè dei numeri costituiti, al più, da *tre cifre significative consecutive*, seguite o precedute da quanti zeri si vogliano.

Dobbiamo qui spiegare la disposizione di codesta Tavola e illustrarne l'uso. Le norme, che così daremo, valgono sostanzialmente per tutte le altre Tavole ad un numero maggiore di decimali; e, del resto, quelle, che si trovano in commercio, sono sempre accompagnate da speciali avvertenze, che ne spiegano l'uso.

9. Logaritmi dei numeri da 1 a 10 con tre cifre significative consecutive. I Logaritmi dei numeri da 1 a 9,99 di cui la nostra Tavola contiene le mantisse (con 4 decimali), hanno tutti la caratteristica 0, che, come già dicemmo, non è in alcun modo indicata nella Tavola. In questa la prima colonna, contrassegnata in alto con N, contiene le prime due cifre del numero, cioè la cifra degli interi e quella dei decimi; la terza cifra, o cifra dei centesimi, si trova in testa alle singole colonne delle mantisse, che sono appunto in numero di 10 e sono contrassegnate in alto con 0, 1, 2,...., 9.

Così, p. es., la mantissa del Logaritmo di 3,75 si trova all'incrocio della linea **37** e della colonna **5** ed è perciò data da 5740 [1]; avremo quindi

$$\text{Log}\, 3{,}75 = 0{,}5740.$$

10. Logaritmi dei numeri da 1 a 10 con quattro o più cifre significative consecutive. Prendiamo un nunumero compreso tra 1 e 10 e avente *quattro cifre significative consecutive* (di cui le due intermedie possono anche essere, l'una o l'altra o entrambe, nulle). Sia, per es. 6,053. Esso è compreso tra due numeri a tre sole cifre significative e fra loro consecutivi; precisamente, nel nostro caso, si ha

$$6{,}05 < 6{,}053 < 6{,}06,$$

onde risulta (n. 3)

$$\text{Log}\, 6{,}05 < \text{Log}\, 6{,}053 < \text{Log}\, 6{,}06,$$

ossia, calcolando, col sussidio della Tavola il primo e terzo

(1) L'alunno verifichi qui e nel seguito, valendosi della Tavola, i calcoli indicati nel testo.

Logaritmo (n. prec.)

$$0{,}7818 < \mathrm{Log}\ 6{,}053 < 0{,}7825.$$

Il Logaritmo cercato avrà la caratterisca 0 e una mantissa compresa fra 7818 e 7825, cioè uguale a

$$7818 + d,$$

dove d indica un numero *positivo,* certamente *non superiore alla differenza* 7 fra le due mantisse, consecutive nella nostra Tavola, 7818 e 7825, la quale dicesi *differenza tavolare* (delle due mantisse considerate).

Questa differenza tavolare 7 dà l'aumento (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 6,050 a 6,060, cioè cresce di 10 unità (del 3° ordine decimale), e noi dobbiamo determinare l'aumento d (in unità del 4° ordine decimale) che subisce il Logaritmo, quando il numero varia da 6,050 a 6,053, cioè cresce di 3 unità (del 3° ordine decimale). Per trovare codesto numero d, *si ammette che, quando al numero si fanno subire aumenti non superiori a* 10 *unità decimali del* 3° *ordine, i corrispondenti aumenti della mantissa* (valutati in unità decimali del 4° ordine) *siano proporzionali a quelli del numero* (REGOLA DELLE PARTI PROPORZIONALI).

Si tratta naturalmente di una regola di semplice approssimazione, ma si può dimostrare che essa non conduce ad errori sensibili. Poichè non disponiamo dei mezzi necessari per sviluppare una tale dimostrazione, ci accontentiamo della seguente giustificazione intuitiva. Scorrendo la Tavola nell'ordine crescente dei numeri (e quindi anche delle mantisse) si verifica che le differenze tavolari (cioè le differenze fra ciascuna delle mantisse e la consecutiva) finiscono via via col decrescere, ma per tratti, che spesso risultano abbastanza lunghi, *si mantengono uguali,* e solo di quando in quando decrescono (o eccezionalmente, per l'arrotondamento dell'ultima cifra, crescono) di *una sola unità* (del 4° ordine decimale) *per volta.* Così, a partire dalla mantissa 7818, corrispondente al numero 6,05, si trovano successivamente 6 differenze tavolari uguali a 7, poi una eccezionale uguale ad 8, cui seguono altre 17 differenze ancora uguali a 7, sicchè bisogna arrivare al 25° posto per trovare una differenza uguale a 6, ecc. Si può dunque dire che sulla Tavola, tratto per tratto, si ha una *sensibile proporzio-*

nalità fra gli aumenti del numero e i corrispondenti aumenti della mantissa. Ciò vale quando il numero cresce di una unità decimale del 2° ordine per volta; e basta tener conto della regolarità, con cui variano, l'uno rispetto all'altro, il numero e il Logaritmo (potenza di base 10 e rispettivo esponente) per essere ragionevolmente indotti a ritenere che questa stessa sensibile proporzionalità fra aumenti del numero e aumenti della mantissa si mantenga valida, anche quando il numero si fa crescere non più di una intera unità decimale del 2° ordine per volta, ma soltanto di 1 o 2 o 3... o 9 unità decimali del 3°.

Così nel nostro caso porremo la proporzione

$$d : 3 = 7 : 10,$$

onde risulta

$$d = \frac{7 \cdot 3}{10} = 2,1$$

ossia approssimatamente

$$d = 2;$$

e anche in questa differenza si arrotonderebbe la cifra (o l'ultima cifra) che si conserva, se la prima che si trascura fosse maggiore di 4.

L'operazione suindicata dicesi *interpolazione* e si dispone nel modo seguente:

Log 6,053

	Numero	Mantissa
	Per 6,050	7818
$d : 3 = 7 : 10$	Per ...3	2
	Log 6,053 =	0,7820

Se poi è proposto un numero compreso fra 1 e 10, avente più di 4 cifre significative consecutive, il numero si accorcia, prendendone soltanto le prime quattro cifre e arrotondando la quarta se la quinta è maggiore di 4: per es. invece del numero

$$5,7836$$

si prenderà il numero

$$5,784$$

e si cercherà il Logaritmo di questo valore approssimato.

E ciò è lecito, in quanto (cogliamo ancora una volta l'occasione di avvertirlo) i calcoli con Logaritmi sono sempre approssimati. Per il numero dianzi considerato si troverà:

Log 5,784

		Numero	Mantissa
	Per	5,780	7619
$d : 4 = 8 : 10$			
	Per	... 4	3
	Log	5,784 =	0,7622

11. LOGARITMO DI UN NUMERO QUALSIASI. Passiamo, infine, a considerare i numeri non compresi fra 1 e 10; e dapprima prendiamone uno maggiore di 10, per es. 327,47. Poichè la nostra Tavola consente di calcolare soltanto i Logaritmi dei numeri aventi 4 cifre significative consecutive, il numero proposto va accorciato, e, in quanto la 5^a cifra supera 4, la 4^a va arrotondata, cosicchè si è condotti a calcolare il Log 327,5. La caratteristica è 2 (n. 7) e la mantissa è quella stessa di Log 3,275 (n. 8) e si trova nel modo indicato al n. prec. Ecco come si dispone l'operazione:

Log 327,5

		Numero	Mantissa
	Per	327,0	5145
$d : 5 = 14 : 10$			
	Per	... 5	7
	Log	327,5 =	2,5152

Supponiamo, invece, che sia proposto un numero (positivo) minore di 1, per es. 0,285. Poichè le tre cifre sono precedute da 1 solo zero, la caratteristica di Log 0,285 è -1 (n. 7), mentre la mantissa è quella stessa di 2,85 (n. 8), cioè, come si rileva dalla Tavola, 4548. Si ha dunque

$$\text{Log}\, 0{,}285 = -1 + 0{,}4548.$$

Eseguendo la somma algebrica qui indicata si troverebbe

$$\text{Log}\, 0{,}285 = -0{,}5452\ ;$$

ma *nei calcoli logaritmici siffatta somma algebrica non si eseguisce, e il Logaritmo (negativo) di un qualsiasi numero minore di* 1 *si scrive sempre sotto forma di somma algebrica della caratteristica negativa e della mantissa positiva.*

La caratteristica o parte intera si suole scrivere al suo posto prima della virgola, collocandole il segno — al di sopra per ricordare che esso non riguarda la mantissa, la quale va presa positivamente. Così nel nostro caso si scriverà

$$\text{Log}\, 0{,}285 = \bar{1}{,}4548.$$

e si dovrà tener sempre presente che la scrittura al secondo membro sta a designare la somma algebrica (¹)

$$-1 + 0{,}4548.$$

Se poi si vuole il Logaritmo di un numero (positivo) minore di 1, le cui cifre significative siano più di 3, come, ad es., 0,056317, si comincia col ridurre queste cifre a 4 arrotondando al solito la 4ª se la 5ª supera 4; e così nel caso or ora indicato si prende del numero proposto il valore approssimato 0,05632. La caratteristica è, in questo caso, —2 (n. 7), e la mantissa, che è quella stessa di 5,632 (n. 8), si calcola nel modo indicato al n. prec. Si trova così:

Log 0,05632

		Numero	Mantissa
	Per	0,05630	7505
$d : 2 = 8 : 10$			
	Per	 2	2
	Log	0,05632 =	$\bar{2}$,7507

(¹) Poichè qui la parte soprassegnata con — precede la virgola, non vi è luogo ad equivoco con la notazione, formalmente simile ma di tutt'altro significato, che talvolta si usa a indicare il periodo dei numeri decimali periodici, p. es.

$$7{,}\bar{3} = 7{,}3333 \ldots.$$

12. Nelle Tavole di Logaritmi sono segnate solitamente, a margine delle colonne delle mantisse o in fondo alle pagine, certe tabellette (contrassegnate per lo più con « P. P. » = « *Partes Proportionales* ») che forniscono, per ciascuna delle varie differenze tavolari che si presentano nella pagina considerata della Tavola (e che di solito sono pochissime; n. 10), gli aumenti da darsi alla mantissa, corrispondentemente ad un aumento, pel numero, di 1, 2, 3,..., 9 decimi dell'unità decimale corrispondente all'ultima cifra dei numeri registrati nella Tavola: così p. es. per una differenza tavolare di 8 la tabelletta sarà quella indicata qui accanto.

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

13. CALCOLO LOGARITMICO INVERSO. Nei nn. precedenti abbiamo visto come una Tavola di Logaritmi permetta di *calcolare il Logaritmo di un qualsiasi numero* (positivo). Ma pei calcoli numerici è necessario saper risolvere anche il PROBLEMA INVERSO: *Calcolare il numero che ha un dato Logaritmo.*

Vi sono delle cosidette *Tavole di Antilogaritmi*, costruite in modo perfettamente simile a quelle di Logaritmi, che permettono appunto di trovare il numero che ha un dato Logaritmo. Ma il medesimo problema si può anche risolvere, usando una Tavola di Logaritmi, p. es. la nostra Tavola a 4 decimali.

Per indicare il procedimento, riferiamoci ad un esempio concreto e proponiamoci di trovare il numero y che ha il Logaritmo

$$1,941463....$$

Anzitutto, volendo noi valerci della nostra Tavola a 4 decimali, accorceremo il dato Logaritmo a 4 cifre decimali (arrotondando la 4ª se, come nel caso or ora proposto, la successiva è maggiore di 4); così considereremo del dato Logaritmo il valore approssimato

$$1,9415.$$

La caratteristica 1 di questo Logaritmo ci dice che y ha una parte intera di 2 cifre (n. 7). D'altra parte scorrendo sulla nostra Tavola le colonne delle mantisse, rileviamo che la mantissa 9415 del nostro Logaritmo si trova all'incrocio della linea 87 e della colonna 4. Sarà quindi

$$y = 87{,}4.$$

Ma in generale la mantissa del Logaritmo dato, pur comprendendo 4 sole cifre, non si troverà nella nostra Tavola. In tal caso essa risulterà compresa fra due mantisse consecutive. Si otterranno così due valori approssimati pel numero y e si potrà trovarne una cifra ulteriore, applicando, in modo inverso, la *Regola delle parti proporzionali* (n. 10).

Si voglia, p. es., trovare il numero y tale che sia

$$\operatorname{Log} y = 2{,}4128.$$

La caratteristica 2 ci dice che y ha una parte intera di 3 cifre. Scorrendo poi la Tavola si trova che la mantissa 4128 di $\operatorname{Log} y$ è compresa fra le due mantisse

$$4116 \quad \text{e} \quad 4133,$$

che nella Tavola sono consecutive e corrispondono ai due numeri (a parte intera di 3 cifre)

$$258 \quad \text{e} \quad 259.$$

Avremo dunque intanto

$$258 < y < 259.$$

Se poi vogliamo trovare un'altra cifra di y, cioè, in questo caso, la sua prima cifra decimale D, notiamo che la differenza tavolare relativa alle due mantisse 4116 e 4133 è 17, e che per avere la mantissa 4128 di $\operatorname{Log} y$ bisogna accrescere 4116 di 12. In base alla Regola delle parti proporzionali porremo la proporzione

$$12 : D = 17 : 10$$

onde risulta

$$D = \frac{12 \times 10}{17} = 7{,}0....$$

ossia per approssimazione

$$D = 7.$$

Sarà dunque

$$y = 258,7 .$$

L'operazione si dispone nel modo seguente:

$$\text{Log}\, y = 2,4128$$

	Mantissa	Numero
	Per 4116	258,0
$12 : D = 17 : 10$		
	Per ...12	...7
		$y = 258,7$

14. Supponiamo da ultimo che si voglia trovare il numero y, che ha un dato Logaritmo negativo, p. es.

$$\text{Log}\, y = -2,3161 .$$

Per poter trarre profitto dall'uso della Tavola, qui bisogna anzitutto *ridurre il dato Logaritmo alla solita forma dei Logaritmi negativi* (n. 11): bisogna, cioè, ridurre positiva la parte decimale.

Ora a ciò si perviene semplicemente aggiungendo 1 alla parte decimale e sottraendo 1 dalla parte intera:

$$-2,3161 = -2 - 0,3161 = (-2 - 1) + (1 - 0,3161) =$$
$$= -3 + 0,6839 = \bar{3},6839$$

Onde risulta che, praticamente, *un Logaritmo negativo si riduce alla forma utile pei calcoli, diminuendo di* 1 *la parte intera e sostituendo alle prime* 3 *cifre decimali le rispettive differenze da* 9 *e alla quarta la sua differenza da* 10.

Ridotto così il nostro $\text{Log}\, y$ alla forma voluta

$$\text{Log}\, y = \bar{3},6839 ,$$

rileviamo, cercando la mantissa 6839 nella Tavola, che il numero y ha le cifre significative 483; e, poichè la caratteristica è -3, la prima cifra significativa sarà al *terzo* posto dopo la virgola; onde si conclude:

$$y = 0,00483 .$$

E quando la mantissa proposta non si trova nella Tavola, si procede per interpolazione, applicando la *Regola delle parti proporzionali* nel modo indicato al n. prec. Per es.,

$$\operatorname{Log} y = -1{,}3465 = \bar{2}{,}6535$$

	Mantissa	Numero
	Per 6532	0,04500
$3 : D = 11 : 10$		
	Per ...3	3
		$y = 0{,}04503$

Calcoli logaritmici

15. Come già si accennò al n. 5, l'uso dei Logaritmi permette di semplificare notevolmente i calcoli numerici. Illustreremo qui con alcuni esempi siffatte applicazioni dei Logaritmi, aggiungendo qualche avvertenza sul modo di eseguire e disporre i calcoli. Naturalmente si tratta sempre di calcoli approssimati e, come già notammo, il grado dell'approssimazione dipende dal numero dei decimali della Tavola di cui si intende valersi. Noi continueremo a servirci della nostra Tavola a 4 decimali.

16. Prodotto. — Si voglia eseguire il prodotto

$$x = 375 \times 0{,}00827 \times 1{,}685 \times 48{,}36\,.$$

Abbiamo pel n. 4*A*

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} 375 + \operatorname{Log} 0{,}00827 + \operatorname{Log} 1{,}685 + \operatorname{Log} 48{,}36\,;$$

perciò, col sussidio della Tavola si troverà

$$\begin{array}{lrl}
\operatorname{Log} & 375 & = 2{,}5740 \\
\operatorname{Log} & 0{,}00827 & = \bar{3}{,}9175 \\
\operatorname{Log} & 1{,}685 & = 0{,}2266 \\
\operatorname{Log} & 48{,}36 & = 1{,}6844 \\
\hline
\operatorname{Log} & x & = 2{,}4025
\end{array}$$

e quindi (n. 13)

$$x = 252{,}6\,.$$

Nel sommare i Logaritmi dei vari fattori bisogna tener presente che, mentre le mantisse sono tutte positive, le caratteristiche sono in parte positive e in parte negative, cosicchè, dopo aver sommato le mantisse e scritta la parte decimale della somma ottenuta, si riporta la parte intera e questa si aggiunge alla somma *algebrica* delle caratteristiche.

17. Quoziente. — Per calcolare un quoziente si ricorre alla identità (n. $4B$)

$$\operatorname{Log}\frac{c_1}{c_2} = \operatorname{Log} c_1 - \operatorname{Log} c_2 .$$

Si è così condotti a calcolare la differenza di due Logaritmi. Ma siccome il risultato di codesta sottrazione è un Logaritmo, del quale poi si cercherà il numero corrispondente, conviene fare in modo che

$$\operatorname{Log} c_1 - \operatorname{Log} c_2$$

risulti subito sotto la solita forma di Logaritmo, cioè abbia la parte decimale positiva. Ciò si ottiene senz'altro riducendo sin da principio $-\operatorname{Log} c_2$ a codesta forma, secondo la regola pratica data al n. 14. Qui notiamo che $-\operatorname{Log} c_2$ non è altro che $\operatorname{Log}\frac{1}{c_2}$ (n. $8C$), ed è da taluno chiamato il Cologaritmo di c_2 e designato con $\operatorname{Colog} c_2$.

Naturalmente, perchè la suaccennata trasformazione di $-\operatorname{Log} c_2$ sia vantaggiosa nella pratica, bisogna che si sappia eseguire a memoria, nell'atto stesso che si rileva dalla Tavola la mantissa di $\operatorname{Log} c_2$.

Ecco come si dispone il calcolo logaritmico di un quoziente:

$$x = \frac{4{,}76}{0{,}00853}$$

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Log} 4{,}76 & = & 0{,}6776 \\
-\ \operatorname{Log} 0{,}00853 & = & 2{,}0691 \\
\hline
\operatorname{Log} x & = & 2{,}7467 \\
x & = & 558{,}1
\end{array}$$

18. Potenza ad esponente intero positivo. — In base alla identità (n. $4D$)

$$\operatorname{Log} c^n = n \operatorname{Log} c,$$

per calcolare la potenza c^n, si cerca il $\operatorname{Log} c$, e, moltiplicando questo per n, si ottiene il Logaritmo del numero cercato; dopo di che questo numero si calcola nel solito modo, ricorrendo alla Tavola.

Per es.

$$x = (7{,}58)^5$$
$$\operatorname{Log} 7{,}58 = 0{,}8797$$
$$\operatorname{Log} x = 5 \operatorname{Log} 7{,}58 = 4{,}3985$$
$$x = 25030.$$

Qui si è condotti a moltiplicare un Logaritmo per un intero positivo. Se il Logaritmo da moltiplicare è a caratteristica negativa, bisogna tener presente che esso è la somma algebrica di una parte intera negativa (caratteristica) e di una parte decimale positiva (mantissa).

Sia p. es. da calcolare

$$x = (0{,}913)^7.$$

Avremo

$$\operatorname{Log} x = 7 \operatorname{Log} 0{,}913,$$

dove

$$\operatorname{Log} 0{,}913 = \bar{1}{,}9605$$

ossia, precisamente,

$$\operatorname{Log} 0{,}913 = -1 + 0{,}9605.$$

Sarà dunque

$$\operatorname{Log} x = 7 \operatorname{Log} 0{,}913 = -7 + 0{,}9605 \times 7 =$$
$$= -7 + 6{,}7235 = \bar{1}{,}7235,$$

e quindi infine

$$x = 0{,}529.$$

19. Estrazione di radice. — Basta applicare l'identità (n. $4E$)

$$\operatorname{Log} \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \operatorname{Log} c.$$

Così per calcolare

$$x = \sqrt[8]{350}$$

si pone

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{8} \operatorname{Log} 350 = \frac{1}{8} \times 2{,}5441 = 0{,}3180,$$

onde risulta

$$x = 2{,}08.$$

Il calcolo così indicato conduce a dividere un Logaritmo per un numero intero. Se il Logaritmo è a caratteristica negativa, occorre qualche artificio per far sì che il quoziente risulti sotto la forma consueta dei Logaritmi negativi, cioè abbia positiva la parte decimale (n. 11).

Il modo, in cui si eseguisce la operazione, è sufficientemente chiarito dal seguente esempio numerico:

$$x = \sqrt[5]{0{,}0255}$$

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{5} \operatorname{Log} 0{,}0255 = \frac{1}{5} \times \bar{2}{,}4065 = \frac{1}{5}(-2 + 0{,}4065) =$$

$$= \frac{1}{5}(-5 + 3{,}4065) = -1 + \frac{1}{5} \times 3{,}4065 = \bar{1}{,}6813$$

$$x = 0{,}4801.$$

20. Applicando insieme i varii procedimenti indicati nei nn. prec., si può calcolare rapidamente, col sussidio dei Logaritmi, ogni espressione numerica *monomia* (anche fratta e irrazionale) cioè comprendente quante si vogliano moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici (escluse cioè le addizioni). Sia p. es. da calcolare un valore approssimato di

$$x = \frac{5a^2b^3}{c\sqrt[4]{d}},$$

dove sia

$$a = 3{,}85 \qquad b = 0{,}728 \qquad c = 291 \qquad d = 0{,}0463 .$$

Avremo

$$\text{Log}\, x = \text{Log}\, 5 + 2\, \text{Log}\, a + 3\, \text{Log}\, b - \text{Log}\, c - \frac{1}{4}\, \text{Log}\, d ;$$

e, poichè la Tavola dà

$$\begin{aligned} \text{Log}\, 5 &= 0{,}6990 \\ \text{Log}\, a &= 0{,}5855 \\ \text{Log}\, b &= \bar{1}{,}8621 \\ \text{Log}\, c &= 2{,}4639 \\ \text{Log}\, d &= \bar{2}{,}6656 , \end{aligned}$$

l'operazione si eseguirà nel modo seguente (si ricordino le avvertenze dei nn. 16–19):

$$\begin{aligned} \text{Log}\, 5 &= 0{,}6990 \\ 2\, \text{Log}\, a &= 1{,}1710 \\ 3\, \text{Log}\, b &= \bar{1}{,}5863 \\ - \text{Log}\, c &= \bar{3}{,}5361 \\ - \frac{1}{4}\, \text{Log}\, d &= 0{,}3336 \\ \hline \text{Log}\, x &= \bar{1}{,}3260 \\ x &= 0{,}2119 . \end{aligned}$$

21. Per dare un altro esempio di calcolo logaritmico di una espressione numerica monomia, proponiamoci di *trovare un valore approssimato del raggio x di una sfera di dm.^{3} 693 di volume.*

Sarà

$$\frac{4}{3} \pi x^3 = 693$$

ossia

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \times 693}{4\pi}}$$

e quindi

$$\text{Log}\, x = \frac{1}{3} (\text{Log}\, 3 + \text{Log}\, 693 - \text{Log}\, 4 - \text{Log}\, \pi).$$

Prendendo per π il valore approssimato 3,142, ricaviamo dalla Tavola

$$\begin{aligned} \text{Log}\ 3 &= 0{,}4771 \\ \text{Log}\ 693 &= 2{,}8407 \\ \text{Log}\ 4 &= 0{,}6021 \\ \text{Log}\ \pi &= 0{,}4972; \end{aligned}$$

onde l'operazione si eseguirà nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{Log}\ 3 &= 0{,}4771 \\ \text{Log}\ 693 &= 2{,}8407 \\ -\text{Log}\ 4 &= \bar{1}{,}3979 \\ -\text{Log}\ \pi &= \bar{1}{,}5028 \\ \hline 3\ \text{Log}\ x &= 2{,}2185 \\ \text{Log}\ x &= 0{,}7395 \\ x &= 5{,}489; \end{aligned}$$

cioè il raggio della sfera è di dm. 5,489.

Capitolo IX

Progressioni

Progressioni aritmetiche

1. Più numeri, in un dato ordine, si dicono costituire una *progressione aritmetica*, se le differenze, che si ottengono sottraendo ciascuno di questi numeri dal successivo, sono uguali fra loro. Il valore comune di queste differenze si dice *differenza* o anche *ragione* della progressione e i singoli numeri, che costituiscono la progressione, si chiamano *termini*. Per indicare che più numeri costituiscono una progressione aritmetica, si premette ad essi il segno $\div$.

Esempi di progressioni aritmetiche sono

$$\div \quad 8 \quad 11 \quad 14 \quad 17 \quad 20$$

$$\div \quad 5 \quad \frac{9}{2} \quad 4 \quad \frac{7}{2} \quad 3 \quad \frac{5}{2} \quad 2.$$

e la differenza è nel primo caso 3, nel secondo $-\frac{1}{2}$.

Queste due progressioni hanno un numero finito di termini o, come si suol dire, sono finite.

Un esempio di progressione aritmetica *infinita*, cioè avente infiniti termini, è dato dalla serie dei numeri interi positivi

$$\div \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots\ldots;$$

e se si considerano tutti i numeri interi, positivi e negativi, con lo zero intercalato fra gli uni e gli altri,

$$\div \quad \ldots\ldots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots,$$

si ha una progressione aritmetica infinita in entrambi i sensi.

In ogni caso, se i termini di una progressione si rappresentano nel solito modo, su di una retta graduata, con altrettanti punti, questi punti risultano a distanza costante, ciascuno dal successivo.

2. Se a è un qualsiasi termine di una progressione aritmetica, di cui sia d la differenza, il termine successivo è $a+d$, quello precedente $a-d$, cosicchè i termini della progressione, a partire dal termine a, verso destra e verso sinistra, sono dati ordinatamente da

$$\ldots\ldots \quad a-3d \quad a-2d \quad a-d \quad a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad \ldots$$

Vediamo così che, se i termini della progressione si contano a partire da a, come primo, l' n^{mo} termine verso destra è dato da

$$a+(n-1)d,$$

l' n^{mo} termine verso sinistra è dato da

$$a-(n-1)d.$$

È pur evidente che, se è data una progressione aritmetica finita, possiamo sempre prolungarla di quanti termini vogliamo, sia nell' uno che nell' altro senso, e considerarla come facente parte di una progressione aritmetica infinita; basta aggiungere a destra successivamente i termini, che dall' ultimo della progressione data si ottengono, aumentandolo di d, $2d$, $3d$, $4d$, ..., e, similmente, aggiungere a sinistra i termini, che dal primo della progressione data si ottengono, diminuendolo di d, $2d$, $3d$, $4d$, ...

3. Se a, b, c sono tre termini consecutivi di una progressione aritmetica, si deve avere, per definizione (n. 1),

$$b-a=c-b,$$

onde risulta

$$2b=a+c \quad \text{ossia} \quad b=\frac{a+c}{2};$$

cioè: *Ogni termine di una progressione aritmetica è uguale alla media aritmetica fra il precedente e il successivo.*

Ora in varie questioni si è condotti al seguente problema. *Fra due numeri dati a e b inserire un dato numero n di medie aritmetiche*, cioè trovare n numeri, che, intercalati in un ordine opportuno fra a e b, costituiscano con essi una progressione aritmetica (di $n+2$ termini).

Tutto si riduce a trovare la differenza d di questa progressione, di cui il dato numero a deve essere il primo termine e b l'$(n+2)^{mo}$. Perciò si è condotti (num. prec.) alla equazione nella incognita d

$$b = a + (n+1)\,d,$$

da cui risulta

(1) $$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

Così per inserire 3 medie aritmetiche fra 5 e 12 basta prendere la differenza

$$d = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4},$$

e si trova

$$\div\quad 5 \quad \frac{27}{4} \quad \frac{34}{4} \quad \frac{41}{4} \quad 12.$$

Quando fra a e b si inseriscono n medie aritmetiche, l'intervallo fra i due numeri a e b, la cui misura (relativa) è $b-a$, risulta diviso in $n+1$ parti uguali, la cui misura è data appunto dalla (1).

Va anche notato che, se è data una progressione aritmetica, e fra le singole coppie di termini consecutivi si inserisce un medesimo numero n di medie aritmetiche, si ottiene una nuova progressione aritmetica, di cui fanno parte tutti i termini della data. Se d è la differenza di questa, la differenza della nuova progressione è $\frac{d}{n+1}$.

4. In una progressione aritmetica consideriamo un certo numero n di termini consecutivi, di cui il primo sia a. Se d è la differenza, essi sono dati (n. 2) da

$$a \qquad a+d \qquad a+2d \qquad a+3d \ldots$$
$$a+(n-2)d \qquad a+(n-1)d.$$

La somma del primo e dell' n^{mo} termine è data da

(2) $$a + a + (n - 1)d = 2a + (n - 1)d\,;$$

ed è evidente che allo stesso risultato si perviene, sommando il secondo termine e il penultimo, perchè il secondo si ottiene dal primo, aumentandolo di d, mentre il penultimo si ottiene dall' ultimo, diminuendolo di d. E nello stesso modo si riconosce che sono uguali alle due somme così considerate la somma del terzo termine e dell' antipenultimo, e così via. Abbiamo dunque che: *In una progressione aritmetica finita le coppie di termini equidistanti dagli estremi hanno tutte la medesima somma.*

Se il numero dei termini è dispari, cioè 3 o 5 o 7..., uno di essi risulta equidistante dagli estremi, cioè il 2º o il 3º o il 4º...; e la somma (2) del primo e dell'ultimo termine risulta uguale al doppio di codesto termine centrale.

5. Il teorema del num. prec. conduce ad una regola per calcolare la somma di un qualsiasi numero di termini consecutivi di una progressione aritmetica.

Sia n il loro numero, e, per mettere in evidenza il numero d'ordine di ciascun termine, indichiamoli con

$$\div \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n.$$

Per calcolare la loro somma

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

riscriviamola coi termini in ordine inverso

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1\,,$$

e poi sommiamo membro a membro queste due uguaglianze, raccogliendo a secondo membro i primi addendi delle due somme, e poi i due secondi, i due terzi, e così via. Otteniamo in tal modo

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Poichè gli n binomî a secondo membro sono uguali fra loro (num. prec.), si conclude

$$2S = n(a_1 + a_n),$$

e quindi

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Perveniamo così al seguente teorema: *La somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica è uguale ad n volte la media aritmetica del primo e dell'ultimo.*

Così, ad es., per la *somma dei primi n numeri naturali* troviamo

$$(3) \qquad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

per la *somma dei primi n numeri naturali dispari*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(n-1) + 1] = n^2;$$

onde si vede che la somma di quanti si vogliano interi positivi dispari consecutivi, a partire da 1, è sempre un quadrato perfetto.

6. Valendoci della espressione (3), trovata al n. prec. per la somma dei primi n numeri naturali, possiamo stabilire un'altra formula analoga, che ci tornerà utile nel seguito dei nostri studî. Vogliamo precisamente trovare una espressione per la *somma dei quadrati dei primi n numeri naturali* (evidentemente non costituenti una progressione aritmetica), cioè per la somma

$$S = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

A tale scopo partiamo dalla identità (Introd., n. 13)

$$x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1.$$

Se in essa sostituiamo ad x successivamente gli n primi numeri naturali, otteniamo le n uguaglianze numeriche

$$\begin{aligned}
1 \quad &= 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1, \\
2^3 - 1 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1, \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1.
\end{aligned}$$

Sommiamole membro a membro; a primo membro otteniamo evidentemente n^3, mentre a secondo, se sommiamo per colonne, troviamo dalla prima colonna il triplo della somma S cercata, dalla seconda il triplo, cambiato di segno, della somma dei primi n numeri naturali, cioè (n. prec.) di $\frac{n(n+1)}{2}$, e, infine, dalla terza semplicemente n. Abbiamo dunque

$$n^3 = 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

ossia

$$6S = 2n^3 + 3n(n+1) - 2n. \tag{4}$$

Ma

$$2n^3 - 2n = 2n(n^2 - 1) = 2n(n+1)(n-1),$$

cosicchè dalla (4), raccogliendo a fattor comune del secondo membro il prodotto $n(n+1)$, deduciamo

$$6S = n(n+1)[2(n-1)+3] = n(n+1)(2n+1)$$

e quindi

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Non è difficile trovare in modo analogo la somma delle potenze 3ᵉ, 4ᵉ,... dei primi n numeri naturali (vedansi gli Esercizi).

Progressioni geometriche

7. Più numeri in un dato ordine (o *termini*) si dicono costituire una *progressione geometrica*, se i quozienti che si ottengono, dividendo ciascuno di codesti termini per il precedente sono tutti uguali fra loro. Il valore comune di codesti quozienti si dice *ragione o quoziente* della progressione geometrica. Per indicare che più numeri sono in progressione geometrica, si premette ad essi il segno $\div\!\!\div$.

Esempi di progressioni geometriche *finite*, cioè aventi un numero finito di termini, sono

$$\div\!\!\div \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48$$

$$\div\!\!\div \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{1}{27} \quad \frac{1}{81};$$

e la ragione è rispettivamente 2 e $-\frac{1}{3}$.

Sono invece *infinite* le progressioni geometriche, di ragione $\frac{1}{2}$ e -3 rispettivamente,

$$\div\!\!\div \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}\ldots,$$

$$\div\!\!\div \quad \ldots \quad \frac{2}{9} \quad -\frac{2}{3} \quad 2 \quad -6 \quad 18\ldots$$

Ed è una progressione geometrica la successione di tutte le potenze ad esponente intero (positivo e negativo) di un qualsiasi numero a:

$$\div\!\!\div \quad \ldots \quad a^{-3} \quad a^{-2} \quad a^{-1} \quad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \ldots.$$

Si avverta che in una progressione geometrica, perchè conservi un senso la definizione, è necessario che nessun termine sia nullo, talchè anche la ragione, quoziente di un qualsiasi termine per il precedente, deve essere diversa da zero.

Invero ogni termine, che non sia l'ultimo di una progressione finita, deve essere diverso da zero, perchè abbia senso il quoziente della divisione per esso del termine successivo. Se poi fosse nullo l'ultimo termine di una progressione geometrica finita, risulterebbe uguale a zero la ragione (quoziente dell'ultimo termine per il precedente) e quindi anche il penultimo termine, come avente nullo il rapporto all'antipenultimo; e ciò, come si è visto or ora, non può succedere.

8. Se a è un qualsiasi termine di una progressione geometrica di ragione q, il termine successivo è aq, quello precedente $\frac{a}{q}$, cosicchè i termini della progressione a partire da a, verso destra e verso sinistra sono dati ordinatamente

(5) $$\div\!\div \quad \ldots \frac{a}{q^3} \quad \frac{a}{q^2} \quad \frac{a}{q} \quad a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \ldots$$

Perciò, se i termini della progressione si contano a partire da a, come primo, l'n^{mo} verso destra è dato da

$$aq^{n-1},$$

l'n^{mo} verso sinistra da

$$\frac{a}{q^{n-1}}.$$

Dalla forma (5) dei termini di una progressione geometrica si rileva che, se la ragione q è, in valore assoluto, maggiore di 1, essi, purchè si vada abbastanza avanti verso destra, finiscono col diventare, in valore assoluto, grandi quanto si vuole (VII, n. 9*A*), cioè tendono a $+\infty$, mentre invece verso sinistra finiscono col ridursi, in valore assoluto, minori di qualsiasi numero positivo prefissato (VII, n. 10*A*), cioè tendono a 0. E accade l'opposto se è $|q| < 1$.

Quanto al segno, se la ragione q è positiva, tutti i termini (5) della progressione hanno lo stesso segno; se, invece, è $q < 0$, essi sono di segni alternati.

Non hanno interesse i due casi, in cui sia $q = 1$ o $q = -1$; nel primo, i termini della progressione sono tutti uguali, nel secondo hanno valori assoluti uguali e segni alternati.

Notiamo, infine, che ogni progressione geometrica finita, come risulta dalla forma (5) dei suoi termini, si può prolungare in entrambi i sensi e considerarla come facente parte di una progressione infinitita: basta aggiungerle a destra successivamente i termini che dall'ultimo si ottengono, moltiplicandolo per q, q^2, $q^3 \ldots$, e a sinistra quelli, che dall'ultimo si ottengono, dividendolo per q, q^2, q^3, ...

9. Siano a, b, c tre termini consecutivi di una progressione geometrica. Essi sono necessariamente diversi da zero tutti e tre, e in ogni caso a e c hanno lo stesso segno (n. prec.). Inoltre si ha, per definizione,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

e quindi

$$b^2 = ac$$

con $ac > 0$. Perciò

$$b = \pm\sqrt{ac}.$$

Abbiamo dunque che: *In una progressione geometrica ogni termine è uguale, in valore assoluto, alla media geometrica fra il termine precedente e quello successivo.*

Come nel caso delle progressioni aritmetiche, si è talvolta condotti al problema seguente: *Inserire fra due numeri dati a, b un dato numero n di medie geometriche,* cioè trovare n numeri, che, intercalati in un certo ordine fra a e b, costituiscano con questi due numeri una progressione geometrica (di $n+2$ termini).

Per considerare il caso, che ha effettivamente interesse, supponiamo a e b entrambi positivi. Indicata con q la ragione incognita della progressione voluta, notiamo che in questa progressione il numero b deve essere il termine $(n+2)^{mo}$, quando come primo termine si prenda il numero a. Deve dunque essere (n. prec.)

$$b = aq^{n+1}, \tag{6}$$

cosicchè, se si resta nel campo dei numeri positivi, si trova (tanto per n pari, quanto per n dispari)

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}. \tag{7}$$

Nel campo dei numeri relativi, se n è dispari, si può prendere per la ragione q indifferentemente l'uno o l'altro dei due valori opposti

$$q = \pm \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}};$$

mentre, invece, se n è pari, q non può avere che il valore positivo (7).

Se poi si considera anche il caso, dianzi escluso, in cui a e b siano di segno contrario, deve pur sempre sussistere la (6), cosicchè, essendo $\frac{b}{a} < 0$, si riconosce, che per n dispari il problema non ha soluzioni; cioè non è possibile inserire un numero dispari di medie geometriche fra due numeri di segno contrario (in accordo con le osservazioni del n. prec. sui segni dei termini di una progressione geometrica). Se, invece, n è pari, il problema ammette un'unica soluzione, data, anche in questo caso, dalla (7), che qui fornisce per la ragione un valore negativo.

In ogni caso, se è data una progressione geometrica e fra le coppie di termini consecutivi si inserisce un medesimo numero n di medie geometriche, si ottiene una nuova progressione geometrica, in cui compaiono come termini tutti quelli della data. Se q è la ragione di questa, la ragione della nuova progressione è $\sqrt[n+1]{q}$.

10. Proponiamoci si calcolare la somma di un qualsiasi numero n di termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q, diversa da 1, cioè, indicato con a il primo dei termini considerati, la somma

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \\ = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}). \tag{8}$$

Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per q, otteniamo

$$qS = a(q + q^2 + q^3 + \dots + q^n),$$

cosicchè, sottraendo membro a membro da questa uguaglianza la precedente, troviamo

$$(q-1)\ S = a(q^n - 1)$$

e quindi, essendo $q \gtrless 1$,

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{9}$$

Notiamo che questo stesso risultato si può dedurre immediatamente dalla (8), ricordando l'identità (Introd., n. 16):

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})(q - 1) = q^n - 1 .$$

Scrivendo la (9) sotto la forma

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

siamo condotti alla seguente regola: *La somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica* (di ragione diversa di 1) *si ottiene, dividendo la differenza fra il primo termine e quello, che segue l'* n^{mo}, *per la differenza fra l'unità e la ragione.*

La formula (9) dà luogo a notevoli applicazioni, di cui daremo un cenno negli Esercizî.

Progressioni e logaritmi

11. Dalla considerazione di due progressioni, l'una aritmetica e l'altra geometrica, si può trarre una nuova definizione dei logaritmi, che qui rapidamente accenneremo. L'accordo con quella del n. 2 del Cap. VIII si riconoscerà immediatamente.

Preso ad arbitrio un numero a positivo e diverso da 1, consideriamo le due progressioni infinite

$$(10) \qquad \dot{\div}\dot{\div} \quad \dots .\ a^{-3} \quad a^{-2} \quad a^{-1} \quad 1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \ \dots . ,$$

$$(11) \qquad \div \quad \dots .\ -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ \dots . ,$$

di cui la prima è la progressione geometrica delle potenze ad esponente intero (positivo o negativo) di a, mentre la seconda è la progressione aritmetica dei rispettivi esponenti, cioè dei numeri interi (positivi e negativi); e ad ogni termine della (10) facciamo corrispondere il termine della (11), che gli sta sotto: cioè facciamo corrispondere al termine 1 della (10) il termine 0 della (11), e ad ogni altro termine della (10) quel termine della (11), che, rispetto al termine 0, occupa il medesimo posto, che il termine considerato della (10) occupa rispetto al termine 1.

Dopo ciò, immaginiamo di inserire fra ciascuna coppia di termini consecutivi della progressione geometrica (10) un qualsiasi numero n di medie geometriche e, similmente, di inserire fra ciascuna coppia di termini consecutivi della progressione aritmetica (11) il medesimo numero n di medie aritmetiche. Con questa intercalazione otteniamo due nuove progressioni, la prima geometrica, la seconda aritmetica, di cui fanno parte rispettivamente tutti i termini della (10) e della (11).

Orbene, di ogni numero c, così ottenuto come termine della nuova progressione geometrica, si chiama *logaritmo* in *base* a quel termine della nuova progressione aritmetica, che, rispetto al termine 0, occupa il medesimo posto, che c occupa nella progressione geometrica, rispetto al termine 1.

Si può a tutta prima pensare che il logaritmo così definito per un numero c dipenda dal numero n di medie geometriche, che si son dovute inserire fra i termini consecutivi della (10) per trovare fra i termini della nuova progressione geometrica il numero c. Invece è facile dimostrare che, anche se al medesimo c si perviene inserendo fra i termini consecutivi della (10) un diverso numero n' di medie geometriche, il termine di ugual posto della progressione aritmetica, che dalla (11) si deduce, inserendovi fra termine e termine n' medie aritmetiche, è sempre quello stesso di prima. Ma noi qui tralascieremo questa dimostrazione (vedansi gli Esercizi); e perverremo indirettamente al medesimo risultato, mostrando che la nuova definizione di logaritmo si accorda con quella del n. 2 del Cap. VIII, la quale, come si è visto, definisce il logaritmo in modo unico.

A tal fine, osserviamo che la ragione della progressione geometrica, che dalla (10) si ottiene, inserendovi fra termine e termine n medie geometriche, è data (n. 9) da

$$\sqrt[n+1]{a}, \tag{12}$$

cosicchè un numero c, il quale compaia fra i termini di questa nuova progressione geometrica, avente la ragione (12) e contenente il termine 1, sarà dato da

$$c = \left(\sqrt[n+1]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n+1}} \tag{13}$$

dove m denota un certo intero, positivo o negativo. D'altra parte, la differenza della corrispondente progressione aritmetica, che dalla (11) si deduce inserendovi fra le coppie di termini consecutivi n medie aritmetiche, è (n. 3)

$$\frac{1}{n+1},$$

e il numero che, secondo la nuova definizione, si è chiamato logaritmo di c, cioè il termine, che in questa nuova progressione aritmetica occupa, rispetto al termine 0, lo stesso posto che nella progressione geometrica è occupato dal numero (13) rispetto al termine 1, è dato da

$$\frac{m}{n+1},$$

cioè precisamente dall'esponente, che bisogna dare alla base a per avere il numero c.

Vi è dunque perfetto accordo fra le due definizioni.

12. Sarebbe facile dimostrare, anche partendo dalla nuova definizione, la proprietà fondamentale dei logaritmi, da cui discendono tutte le altre, cioè il teorema sul logaritmo del prodotto di quanti si vogliano fattori positivi (VIII, n. 4). Ma non ci indugeremo a dare questa dimostrazione, e chiuderemo con un'altra osservazione.

La definizione per mezzo delle progressioni dà un senso soltanto ai logaritmi di quei numeri, che si possono inserire come medie geometriche fra i termini della progressione (10) delle potenze della base a, cioè, più precisamente, ai logaritmi delle potenze di a ad *esponente razionale*. Ma questa limitazione non costituisce una difficoltà per i fini pratici, cui sono destinati i logaritmi. Poichè, come si è ben chiarito nel Cap. VIII, i calcoli logaritmici sono tutti approssimati, ad ogni numero, che non sia una potenza di a ad esponente razionale, si sostituirà un valore approssimato, che sia di tal natura.

ESERCIZI

Introduzione

1. Eseguire le seguenti operazioni:

1. $5a[3a - (2a + 3)]$;
2. $4a - 5 + (3a - 4) + [2a - 3 - (2a - 7a + 5)]$;
3. $3a - \{b - [a + (b - 3a)]\}$;
4. $5a - 7(b - c) - [6a - (3b + 2c) + 4c - (2a - b - 2c) - a]$.

2. Eseguire le seguenti moltiplicazioni di monomi:

1. $3a^2b$ per $-\frac{1}{2}ab^2c$ per b^3c^2;
2. $-2ab^2c$ per $5a^2bc^3$ per $-\frac{1}{15}a^3b^2c^2$.

3. Dividere:

1. $28a^4b^2c^3d$ per $4a^2bc^3$;
2. $-75a^8bc^6d^4$ per $5a^3c^5d$;
3. $-36a^mb^nc^{p-1}d$ per $-9a^2b^3c$;
4. $21a^{m+2}b^{n-1}c^n$ per $-a^mb^{n-2}c^{n-3}$.

4. Trovare il M. C. D. e il m. c. m. dei seguenti monomi:

1. $\frac{1}{3}a^2b^4c^2, \quad -3a^3b^2c^3, \quad 2ab^3c^4$;
2. $-6a^4b^2c, \quad 3a^3b^5c^3, \quad 5a^2b^4c^5$.

5. Eseguire le operazioni seguenti;

1. $\frac{abc}{pqr}\left(\frac{3}{4}\frac{pc}{ac} + \frac{3}{7}bq - \frac{5qr}{6bc}\right)$; 2. $\frac{2}{7c} - \frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{7c} - a - b\right)$;

3. $1 - \frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a} + \frac{a-b}{a+b}\right)$;

4. $a - 1 + \frac{a^2-1}{a+1}$; 5. $a - b + \frac{b^2}{a+b}$;

6. $\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1$; 7. $\frac{(a-b)^2}{4ab} + 1$;

8. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}-(a-b)$; 9. $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}+\dfrac{2ab}{(a-b)^2}$;

10. $a+\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a^2}{a+1}$; 11. $\left(1+a+\dfrac{3+a^2}{1-a}\right)(1-a^2)$;

12. $\dfrac{2b-a}{a-b}+\dfrac{3a(a-b)}{a^2-b^2}+\dfrac{b-2a}{a+b}$;

13. $\dfrac{a^2-(m+n)a+mn}{a^2-(m+p)a+mp}\cdot\dfrac{p^2-a^2}{n^2-a^2}$;

14. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}-1\right)$; 15. $\dfrac{15a^3}{a^3-b^3}:\dfrac{3a^2}{a^2+ab+b^2}$;

16. $\dfrac{[(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]}{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)}$.

6. Verificare le identità:

1. $(a^2-2a-1)^2+(a^2+2a-1)^2=2(a^2+1)^2$;
2. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$;
3. $[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2\,[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$.

7. Eseguire le seguenti operazioni:

1. $(2x^3-3x^2+x-1)+(-3x^3-5x+2)$;
2. $\left(\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{2}{5}x^3+2x-\dfrac{1}{6}\right)-\left(\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{1}{4}x^2-x+\dfrac{2}{3}\right)$;
3. $(6x^3-2x^2+x-3)\left(\dfrac{1}{2}x^2-x+1\right)$;
4. $(0{,}5x^4-2x^3+0{,}3x^2+1{,}4x+0{,}1)(2x^2-0{,}3x+10)$;
5. $(2x^5-7x^4+x^3+9x^2-7x-6):(2x^3-3x^2+x+2)$;
6. $(2x^6-7x^4+8x^2-3):(x^4-2x^2+1)$;
7. $(4x^6-4x^4+8x^3+x^2-4x+4):(2x^3-x+2)$;
8. $(2x^5-7x^4+9x^3-8x^2+1):(x^2-2x+1)$;
9. $(6x^6-3x^4+13x^3+x+2):(3x^3+2x-1)$;
10. $(2x^4-x^3+3x^2-4x+5):(3x^2-2x-2)$.

8. Eseguire le seguenti divisioni:

1. $(2x^3-9x^2+11x-6):(x-3)$;
2. $(3x^4+15x^3-x^2-x+20):(x+5)$;
3. $(4x^4+8x^3+x^2+7x-20):(2x+5)$;
4. $(4x^3+14x^2-5x+3):(x+4)$;
5. $(5x^4-31x^3+8x^2-15x+9):(x-6)$.

9. In ciascuno dei seguenti casi determinare il valore del parametro k in modo che la divisione risulti esatta:

1. $(2x^2 - 3x + k) : (x + 1)$;
2. $(x^3 - 2x^2 + kx - 6) : (x + 3)$;
3. $(2x^3 + kx^2 - 4x + 8) : (x + 2)$;
4. $(kx^3 + 9x^2 + 6x + 8) : (3x + 2)$.

10. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

1. $7x + 3 > 3x - 7$; 2. $5 - 2x > \frac{1}{2}x + 4$;

3. $\frac{x}{2} + 1 > \frac{7x}{3} - 8$; 4. $(x + 1)(x + 3) > (x - 1)(x - 2)$;

5. $(x-1)(x-2)(x-3) > x^2(x-6)$; 6. $ax + 6 > 3 - 2x$;

7. $\frac{x + 3}{2 - x} > 0$; 8. $\frac{7 - 4x}{2 - 3x} > 2$;

9. $\frac{9x - 21}{2x + 4} > -3$; 10. $\frac{x + a}{a + b} > \frac{a - x}{a - b} + 2 \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \lesseqgtr b)$.

11. Trovare i valori interi (positivi e negativi) soddisfacenti alle due disuguaglianze:

$$7x + 3 > 9x + 8, \quad 6 - 2x > 10 - 5x.$$

12. Risolvere i seguenti sistemi di disuguaglianze:

1. $3x + 2 > 0, \quad 5 - 4x > 0$; 2. $3 - 2x > 0, \quad 11 - 3x > 0$;

3. $4x + 5 > 0, \quad 2x + 1 > 0$; 4. $4x - 3 > 0, \quad 3x + 2 > 0$;

5. $\frac{4x + 7}{3 - 5x} > 0, \quad 2x + 1 > 0$; 6. $\frac{5x + 4}{3 - 4x} > 0, \quad \frac{3x + 2}{5x + 6} < 0$;

7. $\frac{7x + 6}{5 - 4x} > 0, \quad \frac{4 - 3x}{5x + 3} > 0$; 8. $\frac{37 - 24x}{6 - 7x} > 4, \quad \frac{17x - 3}{7 - 6x} > -2$.

13. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni di 1° grado (o riducibili a sistemi di questo tipo):

1. $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 11. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x - 3y = 1, \\ 2x + 4y = 28. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 6x - 7y = 0, \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - \frac{y}{2} = 11, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \frac{x}{3} + 3y = 7, \\ \frac{4x - 2}{5} = 3y - 4. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x + \frac{y - 2}{5} = 21, \\ 4y + \frac{x - 4}{6} = 29. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{14}{y} = 10\frac{1}{2}, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \frac{x + y}{5} + \frac{y - x}{2} = 9, \\ \frac{x}{2} + \frac{x + y}{9} = 5. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + x = 15, \\ \frac{x - y}{5} + y = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{7x}{6}+\dfrac{5y}{3}=34, \\ \dfrac{7x}{8}+\dfrac{3y}{4}=\dfrac{5y}{8}+12. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=5, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=10. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{8}+\dfrac{y-2}{5}=2, \\ 2x+\dfrac{2y-5}{3}=21. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5}=10-\dfrac{y}{3}, \\ \dfrac{4y-3x}{6}=\dfrac{3x}{4}+1. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-y)+10, \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 0{,}08x-0{,}21y=0{,}33, \\ 0{,}12x+0{,}75y=3{,}54. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 0{,}3x+0{,}25y=x-6, \\ 3x-0{,}5y=28-0{,}25y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-4y=7, \\ \dfrac{x}{3y}+\dfrac{11}{10}=\dfrac{4x-5y}{5y}. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \dfrac{2x+y-6}{x-5}+14=0, \\ \dfrac{3y-10(x-1)}{6}+\dfrac{x-y}{4}+1=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{4x-y-2}=-1, \\ \dfrac{2y-x-3}{3x+3y-2}=3. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x-y=1, \\ \dfrac{x+1}{y-1}-\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{6}{y}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=28. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x+4y+2}+\dfrac{1}{2x-3y-2}=1, \\ \dfrac{8}{3x+4y+2}-\dfrac{2}{2x-3y-2}=1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+y=a+b, \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x+ay=b, \\ y-ax=c. \end{cases}$

25. $\begin{cases} (a+c)x-by=bc, \\ x+y=a+b. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x+y=c, \\ ax-by=c(a-b). \end{cases}$

27. $\begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1, \\ a(x-y)+b(x+y)=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} ax+by=c, \\ a^2x+b^2y=c^2. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab, \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} (a+h)x+(b-h)y=c, \\ (b+k)x+(a-k)y=c. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2, \\ bx-ay=0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1. \end{cases}$ 34. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=0, \\ \dfrac{x+y-b}{a}+\dfrac{x-y-a}{b}=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a, \\ \dfrac{x-y}{2ab} = \dfrac{x+y}{a^2+b^2}. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} \dfrac{x}{a^2-1} - \dfrac{y}{b^2-1} = b^2 - a^2, \\ \dfrac{x}{b^2+1} + \dfrac{y}{a^2+1} + 2 = a^2 + b^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} (a+2)x + ay = 1, \\ 3x + (2-a)y = 1. \end{cases}$ Discussione.

38. $\begin{cases} (a-1)^2x + (a^2-1)y = (a+1)^2, \\ (2a-1)x + (a+1)y = a^2 - 1. \end{cases}$ Discussione.

39. $\begin{cases} (a+x)(a+y) + (b+x)(b+y) = 2(a+y)(b+x), \\ (a+b)(x-y) = ab. \end{cases}$

40. $\begin{cases} (4a^2+a+1)x + (2a^2+4a+1)y = 2a^2, \\ (2a+1)x + (a+2)y = a. \end{cases}$ Discussione.

14. Discutere i sistemi seguenti:

1. $\begin{cases} 12x - 9y = 2, \\ 3y - 4x = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 12x - 16y + 3 = 0, \\ 4y - 3x = 0{,}75. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+2y}{17} = y - x. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (a+b)x = (a-b)y, \\ b(x+y) = 1 + a(y-x). \end{cases}$

15. Determinare a in modo che il sistema seguente risulti impossibile:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 1, \\ (3-a)x - 2y = 2. \end{cases}$$

16. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2y + (3-a)y = b, \end{cases}$$

e prima si determini a in modo che esso risulti impossibile, poi si determinino a e b in modo che il sistema risulti indeterminato.

17. Un numero (intero assoluto) di due cifre, diminuito di 45, dà il numero formato dalle stesse due cifre, prese in ordine inverso; e, d'altra parte, è uguale agli $\dfrac{8}{3}$ di questo secondo numero. Trovare quel numero.

18. Dividendo un numero (intero assoluto) per un altro, si ottiene come quoziente 18, come resto 9. Se il primo numero si moltiplica per 3 e il secondo si aumenta di 51, si ottiene come quoziente 9 e come resto 18. Trovare i due numeri.

19. In un triangolo un angolo è di $57^\circ 30'$, mentre la differenza degli altri due è di $11^\circ 50'$. Trovare le ampiezze di questi due angoli.

20. Un tale paga L. 370 in monete d'argento da L. 5 e da L. 10. Se in tutto le monete sono 49, quante sono quelle da 5 e quante quelle da 10?

21. Trovare due numeri, di cui tanto la somma quanto il quoziente siano uguali ad un dato numero a. Discussione.

22. Se in un triangolo si aumentano un lato di 5 cm. e la corrispondente altezza di 8 cm., l'area cresce di 165 cm²; se invece si aumenta lo stesso lato di 2 cm., e si diminuisce la corrispondente altezza di 6 cm., l'area diminuisce di 63 cm². Trovare l'area del triangolo.

23. Alcuni amici, dovendo pagare il conto di un pranzo collettivo in una trattoria, osservano che se fossero 2 di più pagherebbero ciascuno, per lo stesso importo complessivo, 2 lire di meno, mentre pagherebbero ciascuno 3 lire di più se fossero 2 di meno. Quanti sono quegli amici e quanto paga ciascuno?

24. Se A desse a B 75 lire, essi avrebbero la stessa somma di denaro. Se invece B desse 25 lire ad A, questi avrebbe il triplo di B. Quante lire ha ciascuno?

25. Un agricoltore vende 10 q. di frumento e 6 q. di grano turco e percepisce L. 1410. Vende poi, agli stessi prezzi, 8 q. di frumento e 15 q. di grano turco e percepisce L. 1689. A qual prezzo per quintale ha venduto il frumento e a quale il grano turco?

26. In una cantina vi sono due qualità di vino. Se si mescolasse la prima qualità colla seconda nel rapporto di 2 a 3, il vino così tagliato verrebbe a costare L. 1,68 al litro; se invece si mescolasse la prima qualità alla seconda nel rapporto di 3 a 2, il vino tagliato verrebbe a costare L. 1,62. Quali sono i costi per hl. delle due qualità di vino?

27. Un numero (intero assoluto) di due cifre è uguale al quadruplo della somma delle sue cifre; e d'altra parte, se ad esso si aggiunge 18, si ottiene il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso. Trovare questo numero.

28. Un numero (intero assoluto) di due cifre, diminuito di 45, dà il numero formato con le stesse due cifre, prese in ordine inverso, ed è, d'altra parte, uguale agli $\frac{8}{3}$ di questo secondo numero. Trovare quel numero.

29. Due operai, lavorando insieme, possono compiere un certo lavoro in 30 giorni; ma dopo 18 giorni uno di essi abbandona il lavoro, e l'altro lo completa, impiegando 20 giorni di più. In quanti giorni avrebbe condotto a termine quello stesso lavoro ciascuno dei due operai, lavorando da solo?

30. Un agricoltore vuol preparare per l'inverno 100 q. di foraggio mescolando fieno maggengo e paglia. Il maggengo costa L. 17,5 al quintale, la paglia L. 5,5. Se quell'agricoltore vuole che il foraggio di mistura gli venga a costare L. 10 al quintale, quanti quintali di maggengo e quanti di paglia deve mescolare?

31. Tre botti hanno complessivamente la capacità di l. 2250. Le prime due sono piene e la terza è vuota; e per riempire quest'ultima, bisogna versarvi il contenuto della prima e $\frac{1}{4}$ di quello della seconda oppure il contenuto della seconda e $\frac{2}{5}$ di quello della prima. Quali sono le capacità in hl. delle tre botti?

32. Se in una frazione si aumenta il numeratore di 1 e si diminuisce il denominatore di 1, la nuova frazione risulta uguale ad 1. Se invece il numeratore si aumenta del denominatore e il denominatore si diminuisce del numeratore, la nuova frazione risulta uguale a 4. Quali sono i termini della frazione primitiva?

33. A e B hanno ciascuno un certo numero di gettoni. A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e subito dopo B dà ad A tanti gettoni quanti ad A ne sono rimasti. Poi ricominciano daccapo: cioè A dà a B tanti gettoni quanti questi ne ha, e B dà ad A tanti gettoni, quanti ad A ne sono rimasti. Dopo ciò A e B si trovano ad avere ciascuno 16 gettoni. Quanti ne avevano ciascuno dapprincipio? [Si osservi che il problema si può anche trattare come in una sola incognita, perchè dallo stesso enunciato risulta che A e B hanno complessivamente 32 gettoni].

34. Un paese A è collegato ad un paese B da una strada, che per 13 km. è in salita e per altri 8 in discesa, e la pendenza dei due tratti è la stessa. Un ciclista per andare da A a B impiega $1^h 42^m$. Più tardi ritorna da B ad A, mantenendo, sia in salita che in discesa, le stesse velocità che nell'andata, e impiega a percorrere la strada un quarto d'ora di meno. Quali sono state, in km./h., le sue due velocità in salita e in discesa?

35. Due autocorriere A e B partono da due paesi distanti fra loro km. 112 e si vanno incontro. Se A parte $1^h\, 10^m$ prima di B, le due autocorriere si incontrano 2^h dopo la partenza di B; se B parte $1^h\, 10^m$ prima di A, si incontrano $2^h\, 10^m$ dopo la partenza di A. Quali sono, in chilometri all'ora, le velocità delle due autocorriere?

36. Due treni, lunghi rispettivamente m. 125 e m. 155, corrono in senso inverso su due binari paralleli e impiegano a sfilare completamente l'uno davanti all'altro (dall'istante, in cui si trovano affiancati i fanali delle due locomotive a quello, in cui si trovano affiancati i due fanali di coda) 10^s. Se corressero nello stesso senso, impiegherebbero a sfilare completamente l'uno rispetto all'altro $1^m 10^s$. Quali sono, in km./h., le velocità dei due treni?

37. Risolvere i sistemi:

1. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y+z=3, \\ x+y-z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y+3z=-1, \\ x+4y+9z=-11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=15, \\ y+z=25, \\ x+z=20. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y=10, \\ 5x-7z=1, \\ 4x+9z=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{6y-4x}{3z-7}=1, \\ \dfrac{5z-x}{2y-3z}=1, \\ \dfrac{y-2z}{3y-2x}=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-1, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{z}=1, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x+y+z=a, \\ x-y+z=b, \\ x+y-z=c. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ x+a=y+b=z+c. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3, \\ x+by+b^2z=b^3, \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=h, \\ a^2x+b^2y+c^2z=h^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} a(-yz+zx+xy)=xyz, \\ b(yz-zx+xy)=xyz, \\ c(yz+zx-xy)=xyz. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0, \\ bcx+cay+abz=1. \end{cases}$

38. Riconoscere che dei seguenti sistemi il primo è impossibile, il secondo è indeterminato:

$$\begin{cases} x-4y+6z=0, \\ 2x+3y-4z=1, \\ 3x-y+2z=2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x+10y-2z=5, \\ 3x-5y+7z=10. \end{cases}$$

39. Dividere il numero 147 in tre parti tali che si ottenga il medesimo risultato sia aggiungendo alla prima $\frac{1}{3}$ della somma delle altre due, sia aggiungendo alla seconda $\frac{1}{4}$ della somma delle altre due, sia aggiungendo alla terza $\frac{1}{5}$ della somma delle altre due.

40. Un negoziante nella primavera dell'anno scorso ha acquistato 250 hl. di vino di tre qualità diverse, pagandole rispettivamente L. 1,75,

L. 2, L. 2,50 al litro, spendendo, complessivamente, L. 53250. Quest'anno compera ancora le medesime quantità di codeste stesse qualità di vino, pagandole per altro L. 1,50, L. 1,80, L. 2,20 al litro e spendendo in tutto L. 46900. Quanti ettolitri di vino ha acquistato, entrambe le volte, di ciascuna delle tre qualità?

41. Un numero di tre cifre è 61 volte la somma delle sue cifre, e diminuisce di 495, se le sue cifre si scrivono in ordine inverso. Inoltre la somma delle cifre estreme è tripla della cifra di mezzo. Qual'è questo numero?

42. *A* e *B*, lavorando insieme per 9 giorni, guadagnano L. 405; *A* e *C*, lavorando insieme per 12 giorni, guadagnano L. 564; *B* e *C*, lavorando insieme per 7 giorni, guadagnano L. 294. Quanto guadagna al giorno ciascuno di essi?

43. Un ciclista va in 6 ore ed $\frac{1}{4}$ da un paese *A* ad un paese *B*, che dista 112 km. La strada da *A* a *B* è in parte piana, e, per il resto, parte in salita, parte in discesa; e la pendenza della salita è uguale a quella della discesa. Il ciclista in piano va a 18 km./h., in salita a 12 km./h., e in discesa a 24 km./h.; e se con queste stesse velocità andasse da *B* ad *A* impiegherebbe 6 ore e 55 minuti. Quanti chilometri di strada piana, quanti di salita, quanti di discesa vi sono fra *A* e *B*? (Borel-Stäckel).

[Il problema si può risolvere come in due sole incognite].

44. Trovare un numero (intero assoluto) di tre cifre, che aumenta di 360 quando si scambiano le prime due cifre, e di 99 quando si scambiano la prima e la terza, mentre diminuisce di 27 quando si scambiano le due ultime cifre. [Si osservi che il sistema di equazioni, cui si è così condotti, è indeterminato; ma, in forza della condizione implicita nell'enunciato che i valori delle tre incognite (cifre del numero voluto) risultino numeri interi assoluti compresi tra 1 e 9, il problema ammette soltanto un numero finito di soluzioni (precisamente 5)].

Capitolo I

45. Su di una retta graduata (I, n. 1) in ogni segmento *AB*, per quanto piccolo, cadono infiniti punti, cui corrispondono, come distanze dall' origine, numeri razionali. [Se *A*, *B* corrispondono a due numeri razionali, anche al loro punto medio corrisponde un numero razionale, ecc. In caso contrario si può sempre determinare un segmento *A'B'* interno ad *AB* e tale che ad *A'* e *B'* corrispondano numeri razionali. Basta prendere un sottomultiplo dell' unità che sia minore di *AB* e poi considerare, a partire dall'origine, i successivi multipli di codesto sottomultiplo dell' unità, ecc.].

46. Se $(H \mid K)$, $(H' \mid K')$ sono due sezioni, anche le due classi HH', KK' (I, n. 9) costituiscono una sezione. [Le proprietà 2), 3) si stabiliscono immediatamente (cfr. I, n. 8). Per dimostrare l'assurdità dell'ipotesi che le classi HH', KK' lascino fuori due numeri razionali r, r', con $r > r'$, i quali in ogni caso non possono che essere compresi fra le due classi, si scelgano ad arbitrio due numeri k, k' in K, K' rispettivamente e si prenda una frazione

$$(*)\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\,\frac{r - r'}{k + k'}.$$

Considerate due coppie di multipli di $\frac{1}{n}$ tali che sia (I, n. 8)

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'}{n} \leq a' < \frac{m'+1}{n}$$

e quindi

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n} < a' < \frac{m'+1}{n'},$$

si ha anzitutto

$$\frac{m}{n} < k, \quad \frac{m'}{n} < k'.$$

Inoltre la differenza dei due numeri $\frac{(m-1)(m'-1)}{n^2}$, $\frac{(m+1)(m'+1)}{n^2}$, appartenenti rispettivamente ad HH' e KK', è data da

$$\frac{2(m + m')}{n^2} = \frac{2}{n}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n}\right) < \frac{r - r'}{k + k'}(k + k') = r - r';$$

e ciò contraddice all'ipotesi che r, r' siano entrambi compresi fra le due classi HH', KK'].

47. Se $(H \mid K)$, $(H' \mid K')$ sono due sezioni e il numero reale a corrispondente alla prima è maggiore del numero a' corrispondente alla seconda, le due classi $H - K'$, $K - H'$ (I, n. 11) costituiscono una sezione. [Anche qui le proprietà 2), 3) si stabiliscono agevolmente. Quanto alla 1), proviamo al solito a supporre che dalle due classi restino esclusi due numeri razionali r, r', con $r > r'$, i quali non possono in ogni caso che essere entrambi maggiori di tutti i numeri di $H - K'$, minori di tutti i numeri di $K - H'$; e, considerati due numeri razionali c, c', compresi fra a ed a', con $c > c'$, prendiamo una frazione $\frac{1}{n}$, soddisfacente alle due disuguaglianze

$$(*)\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{4}(r - r'), \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{4}(c - c'),$$

sicchè si abbia anche

$$c - \frac{2}{n} > c' + \frac{2}{n}.$$

Se fra i successivi multipli di $\frac{1}{n}$ si prendono due coppie tali che risulti (I, n. 8)

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'-1}{n} < a' < \frac{m'+1}{n},$$

si ha anzitutto, essendo $a > a'$,

$$\frac{m+1}{n} > \frac{m'-1}{n},$$

mentre d'altra parte, essendo $\frac{m+1}{n} > c, \quad c' > \frac{m'-1}{n}$,

$$\frac{m-1}{n} > c - \frac{2}{n} > c' + \frac{2}{n} > \frac{m'+1}{n}.$$

Perciò i due numeri

$$\frac{m-1}{n} - \frac{m'+1}{n} = \frac{m-m'-2}{n}, \quad \frac{m+1}{n} - \frac{m'-1}{n} = \frac{m-m'+2}{n}$$

appartengono rispettivamente alle due classi $H - K'$, $K - H'$, e poichè la loro differenza, uguale a $\frac{4}{n}$, è, in forza della prima delle (*), minore di $r - r'$, non è possibile che r, r' siano entrambi compresi fra le due classi].

48. Dati due numeri reali assoluti quali si vogliano

$$a = (H \mid K), \quad a' = (H' \mid K'),$$

e indicato, nell'ipotesi $a > a'$, con d il numero reale definito dalla sezione $(H - K' \mid K - H')$, si ha

$$a' + d = a.$$

[Bisogna far vedere che a è maggiore di tutti i numeri della classe $H' + (H - K')$, minore di tutti quelli della $K' + (K - H')$. Per dimostrare la prima parte basta osservare che ogni numero di $H - K'$ è la differenza $h - k'$ di un numero h di H e di un numero k' di K', minore di h, cosicchè ogni numero di $H' + (H - K')$ è dato, ove si indichi con h' un numero di H', da $h' + h - k'$, e, in quanto è sempre $h' < k'$, risulta

$$h' + h - k' < h \quad \text{e quindi} \quad h' + h - k' < a.$$

Analogamente per la seconda parte].

49. Se $(H|K)$ è una sezione, anche le due classi $\frac{1}{K}$, $\frac{1}{H}$ dei reciproci dei numeri di K, H rispettivamente costituiscono una sezione. [Anche in questo caso ci limitiamo a dar la traccia della dimostrazione che le due classi possono lasciar fuori, al più, un solo numero razionale. Supposto che ne restino esclusi due, r ed r' con $r > r'$, si prenda ad arbitrio in H un numero h e indicato con a il numero definito dalla sezione $(H|K)$, si scelga una frazione $\frac{1}{n}$ abbastanza piccola perchè sia simultaneamente

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(a-h), \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{2} h^2(r-r').$$

Considerata una coppia di multipli di $\frac{1}{n}$ tale [I, n. 8]

$$\frac{m-1}{n} < a < \frac{m+1}{n},$$

si ha, sottraendo membro a membro le due disuguaglianze

$$\frac{m+1}{n} > a, \quad \frac{2}{n} < a-h,$$

la disuguaglianza

$$\frac{m-1}{n} < h.$$

D'altra parte la differenza dei due numeri $\frac{n}{m+1}$, $\frac{n}{m-1}$, appartenenti rispettivamente ad $\frac{1}{K}$, $\frac{1}{H}$, è data da

$$\frac{2n}{(m+1)(m-1)} = \frac{2}{n} \frac{1}{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{\frac{m-1}{n}} < h^2(r-r') \frac{1}{h^2} = r - r'$$

e ciò contraddice all'ipotesi].

50. Dato un numero reale assoluto $a = (H|K)$ e posto $b = \left(\frac{1}{K}\middle|\frac{1}{H}\right)$, si ha $ab = 1$, cioè la sezione $\left(\frac{1}{K}\middle|\frac{1}{H}\right)$ definisce il reciproco di $a = (H|K)$. [Basta far vedere che la sezione $\left(\frac{H}{K}\middle|\frac{K}{H}\right)$ definisce il numero 1 e ciò è evidente, perchè, essendo ogni numero di H minore di ogni numero di K, ogni numero di $\frac{H}{K}$ è minore di 1, ecc.].

51. Date due sezioni $(H|K)$, $(H'|K')$, anche le due classi $\frac{H}{K'}$, $\frac{K}{H'}$ (I, n. 11) costituiscono una sezione. [Eserc. 50, 46].

52. Dati due numeri reali assoluti $a = (H|K)$, $a' = (H'|K')$, e posto $b = \left(\frac{H}{K'}, \frac{K}{H'}\right)$, si ha $a'b = a$, cioè la sezione $\left(\frac{H}{K'} \middle| \frac{K}{H'}\right)$ definisce il quoziente di a per a'. [Eserc. 51, 46].

Grado di approssimazione. — Di un numero reale a dicesi *valore approssimato a meno di* $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ ogni numero a', tale che sia

$$|a - a'| < \frac{1}{10^n};$$

e precisamente si dice approssimato *per difetto* o *per eccesso*, secondo che è $a' < a$ o $a' > a$. Il numero $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ si dice *grado dell'approssimazione* e talvolta anche *errore*, in quanto fornisce un limite dell'errore, in più o in meno, che si commetterebbe, sostituendo al numero a il numero a'.

Quando un numero reale a si scrive in forma decimale (I, n. 7) e ci si ferma alla n^{ma} cifra decimale dopo la virgola, si ottiene di a un valore approssimato per difetto, a meno di 10^{-n}, in cui tutte le cifre decimali sono *esatte*; cioè il grado di approssimazione è dato dall'unità decimale corrispondente all'ultima cifra considerata. Ma di un qualsiasi numero reale esistono valori decimali (limitati) approssimati per difetto, il cui grado di approssimazione è maggiore dell'unità decimale dell'ultima cifra decimale. Per es. tanto 3,1415 quanto 3,141499 sono valori approssimati per difetto di π, a meno di 10^{-4}; ma il primo ha 4 cifre decimali esatte, mentre il secondo ne ha solo 3.

53. Per avere della somma di due numeri (assoluti) un valore approssimato (per difetto) con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in ciascuno dei due addendi $n+1$ cifre decimali esatte.

54. Per avere del prodotto di due numeri (assoluti) un valore approssimato (per difetto) con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in ciascuno dei due fattori un numero di cifre esatte uguale ad $n+1$, aumentato del numero delle cifre della parte intera dell'altro fattore, se questo non è minore di 1, oppure diminuito del numero degli zeri che quest'altro fattore ha tra la virgola e la prima cifra significativa, se esso è minore di 1.

55. Se dato un numero reale (assoluto) a, maggiore di 1 e avente r cifre decimali prima della virgola, si vuole di $\frac{1}{a}$ un valore approssimato con un grado di approssimazione di 10^{-n}, basta prendere in a le prime $n - 2r + 2$ cifre decimali; se invece è $a < 1$, ed ha la prima cifra significativa all's^{mo} posto dopo la virgola, basta prendere in a $n+2s$ cifre decimali [1].

Errore relativo. — Dicesi *errore relativo* di un valore approssimato di un dato numero il rapporto del grado di approssimazione al valore approssimato; e precisamente si dice errore relativo *per eccesso*, se il valore approssimato è per difetto.

Il reciproco dell'errore relativo si chiama talvolta *grado di precisione*. Di due valori approssimati di uno stesso numero dicesi più preciso quello, che ha grado di precisione maggiore.

Radice quadrata approssimata. — Di un intero (assoluto) N conveniamo di indicare con codesto nome il valore intero approssimato per difetto a meno di 1 di $\sqrt{N}$, cioè il massimo intero r, il cui quadrato non supera N. Per semplicità lo indicheremo, nei prossimi Esercizi, con « r. a. di N ».

56. La radice quadrata approssimata di un intero (assoluto) avente $2n-1$ o $2n$ cifre ha n cifre, cosicchè per trovare della r. a. di un dato numero intero N, il numero delle cifre, basta decomporre le cifre di N, a partire da destra, in gruppi di 2 cifre ciascuno, salvo l'ultimo a sinistra che potrà risultare di 2 cifre o anche di 1 sola. Il numero delle cifre della radice approssimata di N è il numero di codesti gruppi. [Infatti il minimo intero di n cifre è 10^{n-1}, cosicchè se un numero x ha n cifre si ha $10^{n-1} \leq x < 10^n$ e quindi $10^{2n-2} < x^2 < 10^{2n}$, ecc.].

57. Se r è la radice approssimata di un intero (assoluto) N, la radice approssimata dell'intero N', che da N si ottiene, aggiungendogli a destra due nuove cifre c, c', si ottiene aggiungendo a destra di r una sola cifra h. Indicato con R il resto del massimo quadrato contenuto in N, cioè posto $R = N - r^2$, codesta cifra h deve soddisfare la disuguaglianza

$$(*) \qquad h \leqq \frac{10R + c}{2r},$$

cioè non deve superare il quoziente intero, che si ottiene, dividendo per il doppio di r il numero, che da R si trae, aggiungendogli a destra la cifra c (vale a dire la prima delle due cifre, che vanno aggiunte ad N per avere N'). Precisamente h è il massimo numero, da 0 a 9, che soddisfa la limitazione

$$(**) \qquad (2 \cdot 10r + h)\, h \leq 100R + 10c + c',$$

cioè la massima cifra, per cui accade, che, scrivendola a destra del doppio della radice approssimata di N e moltiplicando il risultato per

[1] Per più ampi e precisi sviluppi su questo importante argomento, vedasi, per es., E. Maccaferri, *Calcolo numerico approssimato*, Milano, Hoepli, 1919.

la cifra stessa, si ottenga un intero, che non superi quello, che si ottiene, scrivendo a destra del resto R le due cifre c, c'. [Per dimostrare la prima parte si osservi che, essendo $N' = 100\,N + 10c + c'$ e $10c + c' < 100$, si ha $100N \leq N' < 100\,N + 100$ cioè $100N \leq N' < 100\,(N + 1)$.

Ma, per ipotesi, $r^2 < N < (r + 1)^2$ e quindi $N + 1 \leq (r + 1)^2$ o infine

$$100r^2 \leq N' < 100(r + 1)^2 = (10r + 10)^2,$$

cosicchè la r. a. di N' dovendo essere compresa fra $10r$ e $10r + 10$, si otterrà, aggiungendo un'opportuna cifra h a destra di r. — Per dimostrare le (*), (**), si noti che h è il massimo numero fra 0 e 9, per cui sia $(10r + h)^2 \leq N'$, ossia $100r^2 + 2 \cdot 10r \cdot h + h^2 \leq 100\,N + 10c + c'$, o ancora appunto la

$$(**) \qquad 2 \cdot 10rh + h^2 \leq 100R + 10c + c'.$$

D'altra parte di qui si deduce, sopprimendo nel primo membro h^2 e sostituendo nel secondo a c' il numero maggiore 10,

$$2 \cdot 10 \cdot rh \leq 100R + 10\,(c + 1)$$

ossia $2rh \leq 10R + c + 1$, e quindi appunto la (*)].

Nota. — Si osservi che il calcolo necessario per verificare la (**) conduce a determinare facilmente il resto R del massimo quadrato contenuto in R'. Esso si ottiene, sottraendo dal numero, che si trova a secondo membro della (**), quello che si trova al primo. Infatti:

$$100R + 10c + c' - (2 \cdot 10 \cdot r + h)h = 100(N - r^2) + 10c + c' -$$
$$- (2 \cdot 10 \cdot r + h)\; h = N' - (10r + h)^2 = R'.$$

Si noti, inoltre, che, indicata con r' la r. a. di N', cioè posto $10r + h = r'$, si ha $(2 \cdot 10 \cdot r + h) + h = 2(10r + h) = 2r'$.

58. Trovare la radice quadrata approssimata di un qualsiasi intero assoluto. [Si ragioni su di un caso concreto, prendendo ad es. il numero $N = 328712$. Si scomponga questo numero in gruppi di due cifre a partire da destra: 32'87'12. La r. a. del numero 32, formato dalle cifre del primo gruppo è, come si rileva immediatamente, 5, e il resto è 7, dunque 5 è la prima cifra della r. a. di 3287. Passiamo a cercare la r. a. di 3287. La prima cifra è 5 (Eserc. prec.) e la seconda non deve superare la parte intera di

$$\frac{10 \cdot 7 + 8}{2 \cdot 5} = \frac{78}{10},$$

cioè 7. Proviamo se il 7 renda soddisfatta la condizione (**) dell'Eserc. prec. Il primo membro di questa limitazione è qui $(2 \cdot 10 \cdot 5 + 7)7 = 749$, il secondo $100 \cdot 7 + 10 \cdot 8 + 7 = 787$, cosicchè la (**) è soddisfatta. Se così non fosse accaduto, si sarebbe dovuto provare, anzichè il 7, successivamente il 6, il 5, ecc. fino a trovar soddisfatta la (**). Qui intanto si è riconosciuto che la r. a. di 3287 è 57, onde il resto è $787 - 749 = 38$.

Si può allora passare a cercare la r. a. di 328712. Le prime due cifre sono 57 e la terza non deve superare la parte intera di

$$\frac{10 \cdot 38 + 1}{2 \cdot 57} = \frac{387}{114},$$

cioè 3. Proviamo se questa cifra renda soddisfatta la (**). Il primo membro è $(2 \cdot 10 \cdot 57 + 3)3 = 1143 \cdot 3 = 3429$, mentre il secondo è 3812. La (**) è soddisfatta, cosicchè la r. a. cercata è 573 e il resto è $3812 - 3429 = 383$. L'operazione, come si è imparato per pratica nelle Scuole medie inferiori, si dispone nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|r|r|}
32'87'12 & 573 & \\
\cline{2-3}
25 & 107 & 1143 \\
\cline{1-1}
78'7 & 7 & 3 \\
74\,9 & \overline{749} & \overline{3429} \\
\cline{1-1}
3\,81'2 & & \\
3\,42\,9 & & \\
\cline{1-1}
38\,3 & &
\end{array}$$

e più semplicemente, registrando nella colonna a sinistra soltanto i successivi resti:

$$\begin{array}{r|r|r|}
32'87'12 & 573 & \\
\cline{2-3}
78'7 & 107 & 1143 \\
3\,81'2 & 7 & 3 \\
38\,3 & \overline{749} & \overline{3429}
\end{array}\,.$$

59. Se, dato un intero assoluto N, si son trovati, in un modo qualsiasi, due altri interi r ed R, tali che sia $N = r^2 + R$, condizione necessaria e sufficiente affinchè r sia la radice quadrata approssimata di N, si è che R non superi il doppio di r.

60. Chiamata *radice quadrata approssimata per difetto*, *a meno di* 10^{-n}, di un qualsiasi numero reale assoluto a un numero r, per cui sia

$$r^2 \leq a < \left(r + \frac{1}{10^n}\right)^2,$$

si dimostri che una tale radice si ottiene, calcolando (Eserc. 58) la radice quadrata approssimata a meno di 1 del numero $100^n \cdot a$ e dividendo il risultato per 10^n. [Infatti, moltiplicando i tre membri della limitazione precedente per 100^n, ecc.].

61. Si trovi la radice quadrata approssimata per difetto, a meno di 10^{-2} del numero 27. Tenendo conto dell'Eserc. prec. e dell'Eserc. 56, si trova:

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
27{,}00'0\,0 & 5{,}19 & & \\
\cline{2-4}
20'0 & 102 & 101 & 1029 \\
99\,0'0 & 2 & 1 & 9 \\
0{,}06\,3\,9 & \overline{204} & \overline{101} & \overline{9261}
\end{array}\,.$$

62. Si trovi la radice quadrata approssimata per difetto, a meno di 10^{-3} del numero 3,14159. Tenendo conto degli Eserc. 60, 58 si trova:

3,1 4'15'90	1,772				
2 1'4	29	28	27	347	3542
2 51'5	9	8	7	7	2
8 69'0	261	224	189	2429	7084
0,001 60 6					

63. Se la parte intera di un numero a contiene $2r$ o $2r-1$ cifre, si ottiene $\sqrt{a}$ con l'approssimazione di 10^{-n}, conservando nel numero dato $n-r+1$ cifre decimali esatte e calcolando la radice con $n+1$ cifre decimali.

64. L'errore relativo della radice quadrata di un numero approssimato è minore dell'errore relativo (per eccesso) di codesto numero (cfr. la def. dopo l'Eserc. 55).

65. Un agrimensore ha trovato come lati di un triangolo rettangolo dam. 3, dam. 4,50, dam. 5,40. Quale è, in media, il grado di precisione di siffatte misure?

66. Diversi autori hanno in vari tempi proposto pel numero π i seguenti valori approssimati: $3+\frac{17}{120}$ (Tolomeo); $\sqrt{10}$ (Brahmagupta); $\sqrt{9,8694}$ (Ganeça); $\frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$ (Nicolò da Cusa); $\frac{1}{3}\sqrt{120-18\sqrt{3}}$ (Kochanski); $\frac{13}{50}\sqrt{146}$ (Specht); $\frac{501+80\sqrt{10}}{240}$ (Gergonne).

Si ordinino codesti valori secondo il loro grado di precisione.

67. Gli agrimensori romani assumevano come area del triangolo equilatero di lato a il numero $\frac{1}{2}a^2$. Che errore commettevano? Che errore si commette assumendo, secondo Erone, come area di siffatto triangolo il numero

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)a^2\,?$$

68. La lunghezza della semicirconferenza è data approssimativamente dalla somma dei lati del quadrato e del triangolo equilatero iscritti nel cerchio. Di che ordine è l'approssimazione?

69. Dato un cerchio, se ne divida il diametro AB in cinque parti uguali, si prolunghi AB di un segmento BC uguale ad una di queste quinte parti, e sulla tangente in A si prenda il segmento AD uguale a tre di codeste parti. Il perimetro del triangolo ACD è approssimativamente uguale alla lunghezza della circonferenza. Qual'è il valore approssimato di π che si ricava dalla precedente costruzione?

e un triangolo equilatero che
rive un quadrato nel cerchio
nel cerchio che ha per dia-
ra indicato e del raggio del
: si ricava di qui?
n un cerchio di ugual super-
rtire dal centro del quadrato.
le alla metà della diagonale,
erna al quadrato in tre parti
nel centro del quadrato e
divisione or ora accennati.
li qui?
ra ALBRECHT DÜRER (1525)
o come diametro gli $\frac{8}{10}$ della

valore approssimato $3+\frac{1}{8}$,

II, intorno al 1000) lasciò
a il lato di 30 piedi ha l'al-
ezza inferiore di $\frac{1}{7}$ all'altezza.
l modo GERBERTO? I valori
esatti?

$\sqrt{3a}\ \sqrt{13a}$;
$\sqrt{3a}\ \sqrt{6a}$.

$+\sqrt{338}$;
$+\sqrt{507}$;
$\sqrt{1792}$.

ore comune nelle seguenti

$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$;
$-2\sqrt{5}-3\sqrt{125}$.

77. Trasportare sotto il segno di radi
guenti espressioni:

$$2\sqrt{3},\quad 3\sqrt{5},\quad 8\sqrt{6},\quad 2$$

$$(a+b)\sqrt{a-b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}},$$

78. Trasformare le seguenti espressio
razionale:

$$\sqrt{\frac{1}{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}},\quad \frac{a+b}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a-}{\sqrt{a-}}$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a^2+ab}{\sqrt{a+b}},$$

79. Eseguire le seguenti operazioni e

1. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$; 2. 7

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{2\sqrt{8}}{8}$; 4. (

5. $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$; 6.

7. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; 8. (

9. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$

10. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-$

11. $(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab)(\sqrt{(1-$

12. $\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-}{}}\right.$

13. $\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$; 14.

15. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a+b}$

16. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$; 17.

18. $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{}}$

. fattore esterno nelle se-

$12\sqrt{\frac{5}{24}}$,

, $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

ι frazioni a denominatore

$\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{ab}$,

$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a - b}}$,

$\frac{-b^2}{+ b}$.

ɔlificare :

$+ 3\sqrt{8} - \sqrt{32}$;

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Big)^2 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\right)^2$;

$\overline{- 6ab + 3b^2}$;

$\sqrt{pq})(p - \sqrt{pq})$;

$\overline{- b})$;

$(1 - b^2) - ab)$.

$\frac{- y^2}{}\Big)^2$;

$\frac{a^2 + b^2}{2}\Big)^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2$;

$a + \sqrt{b})$;

$\frac{\overline{- a} + \frac{1}{\sqrt{1 + a}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}}$;

$\frac{b\sqrt{ab}}{a - b}$.

70. NICOLÒ DA CUSA (1464) per costruire un triangolo equilatero che ha perimetro uguale ad un dato cerchio, iscrive un quadrato nel cerchio e considera il triangolo equilatero iscritto nel cerchio che ha per diametro la somma del lato del quadrato or ora indicato e del raggio del cerchio dato. Che valore approssimato di π si ricava di qui?

71. Per trasformare un dato quadrato in un cerchio di ugual superficie, i matematici indiani prendevano a partire dal centro del quadrato, sulla parallela a un lato, un segmento uguale alla metà della diagonale, dividevano la parte di questo segmento esterna al quadrato in tre parti uguali e consideravano il cerchio di centro nel centro del quadrato e passante per il primo dei due punti di divisione or ora accennati. Quale valore approssimato di π si ricava di qui?

72. Secondo il celebre pittore e geometra ALBRECHT DÜRER (1525) il problema precedente si risolve prendendo come diametro gli $\frac{8}{10}$ della diagonale del quadrato. Si ha così per π il valore approssimato $3+\frac{1}{8}$, che compare già in Vitruvio.

73. GERBERTO (più tardi Papa Silvestro II, intorno al 1000) lasciò scritto che un triangolo equilatero che abbia il lato di 30 piedi ha l'altezza di 26 piedi: più tardi egli prese l'altezza inferiore di $\frac{1}{7}$ all'altezza. Quali valori approssimati di $\sqrt{3}$ usava in tal modo GERBERTO? I valori usati di quanto $^0/_0$ si scostavano dai valori esatti?

CAPITOLO II

74. Calcolare (II, n. 4):

$$\sqrt{2}\,\sqrt{8};\quad \sqrt{27}\,\sqrt{3};\quad \sqrt{5}\,\sqrt{125};\quad \sqrt{3a}\,\sqrt{13a};$$
$$\sqrt{6}\,\sqrt{8};\quad \sqrt{3}\,\sqrt{15};\quad \sqrt{48}\,\sqrt{128};\quad \sqrt{3a}\,\sqrt{6a}.$$

75. Trasformare e semplificare:

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{288}+\sqrt{338};$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{234}+\sqrt{75}+\sqrt{192}+\sqrt{507};$$
$$\sqrt{28}-\sqrt{68}+\sqrt{2268}-\sqrt{1792}.$$

76. Raccogliere fuori parentesi un fattore comune nelle seguenti espressioni:

$$2-\sqrt{2};\quad 3-\sqrt{6};\quad \sqrt{2}+\sqrt{6};\quad 2\sqrt{3}+3\sqrt{2};$$
$$5\sqrt{3}-3\sqrt{5};\quad 3+\sqrt{3}+\sqrt{15};\quad 5-2\sqrt{5}-3\sqrt{125}.$$

77. Trasportare sotto il segno di radice il fattore esterno nelle seguenti espressioni:

$$2\sqrt{3},\quad 3\sqrt{5},\quad 8\sqrt{6},\quad 2\sqrt{\frac{1}{2}},\quad 12\sqrt{\frac{5}{24}},$$

$$(a+b)\sqrt{a-b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}},\quad a\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

78. Trasformare le seguenti espressioni in frazioni a denominatore razionale:

$$\sqrt{\frac{1}{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{ab},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}},\quad \frac{a+b}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a-1}{\sqrt{a-1}},\quad \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a-b}},$$

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{a^2+ab}{\sqrt{a+b}},\quad \frac{ab-b^2}{\sqrt{a+b}}.$$

79. Eseguire le seguenti operazioni e semplificare:

1. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$;

2. $7\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{32}$;

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{2\sqrt{8}}{8}$;

4. $\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)^2$;

5. $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$;

6. $\sqrt{3a^2-6ab+3b^2}$;

7. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$;

8. $(p+\sqrt{pq})(p-\sqrt{pq})$;

9. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$;

10. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

11. $(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab)(\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}-ab)$.

12. $\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{2}}\right)^2$;

13. $\left(\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$;

14. $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2}$;

15. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})$;

16. $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$;

17. $\frac{\sqrt{1-a}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}$;

18. $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{ab}}{a-b}$.

80. Trovare il valore della espressione

$$\frac{x^3 - 4x}{x^4 - 4x^2 + 16}$$

per $x = 1 + \sqrt{5}$.

81. Verificare le seguenti uguaglianze numeriche:

$$1.\quad \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 1} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2});$$

$$2.\quad \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 3} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{7}; \qquad 3.\quad \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3\right] = 3.$$

82. Verificare le seguenti identità:

$$1.\quad \sqrt{(a+b)^4 - 2(a+b)^2(a-b)^2 + (a-b)^4} = 4ab;$$

$$2.\quad [a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}]^2 + [\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - ab]^2 = 1;$$

$$3.\quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab}; \qquad 4.\quad \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b};$$

$$5.\quad \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2};$$

$$6.\quad \frac{2(1 - ab)}{(1+a)\sqrt{1+b^2} + (1+b)\sqrt{1+a^2}} = \frac{(1+a)\sqrt{1+b^2} - (1+b)\sqrt{1+a^2}}{a - b}.$$

83. Dimostrare che

$$1.\quad \sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad (a > b);$$

$$2.\quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

84. Dimostrare che da

$$a : b : c = x : y : z$$

segue

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a : x.$$

85. Dato un triangolo ABC, se ne indichino con a, b, c le lunghezze dei lati rispettivamente opposti ad A, B, C, con p il semiperimetro e con h_a, h_b, h_c le altezze. Si dimostri che è

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

86. L'area S del triangolo ABC è data (es. prec.) dalla seguente *formula di Erone:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

87. Se in un triangolo, di cui sia a la lunghezza di un lato e p il semiperimetro, l'area è data da

$$S = p(p-a),$$

il triangolo è rettangolo ed ha il lato a come ipotenusa [Eserc. prec.].

88. Le bisettrici del triangolo ABC (Eserc. 85) sono date da

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$s_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

89. Se nel triangolo ABC (Eserc. 85) l'angolo in A è di 60°, si ha $a = \sqrt{b^2+c^2-bc}$. In base a questa formula e a quella di Erone (Eserc. 86), si calcoli l'area di un triangolo avente un angolo di 60°, compreso fra due lati di cm. 20 e cm. 30 rispettivamente.

90. Verificare le seguenti uguaglianze numeriche:

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2. $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

3. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$; 4. $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$;

4. $\sqrt{12+8\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}+1)$; 5. $\sqrt{9+\sqrt{45}} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{30}+\sqrt{6})$.

91. Trasformare in un unico radicale quadratico:

1. $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$; 2. $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}$;

3. $\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7}} + \sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$; 4. $\sqrt{2+\frac{1}{2}\sqrt{7}} - \sqrt{2-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$;

5. $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} + \sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$;

6. $\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} + \sqrt{a-\sqrt{2a-1}}$;

7. $\sqrt{x+\sqrt{ax-\dfrac{a^2}{4}}} \pm \sqrt{x-\sqrt{ax-\dfrac{a^2}{4}}}$;

8. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \pm \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

$+ ab - 2a\sqrt{b}$;

c^4 ;

$3a^2b^2 + a^3b$.

3. $x^2 - 4x = 21$;

; 6. $x^2 + 11x = 42$;

$x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$;

$4(x - 3) = 30$;

$x + 3)(x \quad 4) + 9 = 0$;

$= 5$;

16. $(x + 2)^2 = x + 22$;

$(x - 1)^2 = (x - 8)^2$;

$\frac{x^2 - 7}{4} = \frac{4x - 1}{2}$;

$\frac{x^2 - 3x}{5} = 5 - \frac{2x - 3}{3}$;

; 25. $2x + 3 = \frac{1}{3x + 4}$;

$\frac{1}{-3} + \frac{1}{30} = 0$;

$\frac{x - 3}{x - 5} = 7\frac{2}{3}$;

$- \frac{5}{x + 2} + \frac{2}{x} = 0$;

$- \frac{x - 6}{2x - 8} = \frac{2}{3}$;

$\sqrt{5}) = 14$;

$+ 6) + 12 = 0$;

38. $abx^2 - b^2x = a^2x - ab$;

$2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$;

41. $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$; 4

43. $ax^2 - (3a \quad 1)$

44. $x + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{b}$; 45.

46. $\frac{1}{x + a} - \frac{1}{a + b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{x}$; 4

48. $\frac{1}{x + a + b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

50. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x \quad b}$

93. Trovare la condizione necessa equazioni di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a$$

abbiano una radice comune. [Una tal binazione lineare delle due date equ a' e $-a$ ecc. Si trova $(ac' - a'c)^2 + ($

94. Scrivere un'equazione di 2° g date da:

1. $x_1 = 3,\ x_2 = 5$; 2. $x_1 = 4,\ x_2 =$

4. $x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{7}{6}$; 5. $x_1 = x_2 = -$

7. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{3}$; 8. $x_1 =$

9. $x_1 + \sqrt{5},\ x_2 = -2 + \sqrt{7}$; 10. $x_1 =$

12. $x_1 = a,\ x_2 = 2b$; 13. $x_1 = a + b,$

15. $x_1 = \frac{a}{b},\ x_2 = \frac{b}{a}$; 16. x_1

17. $x_1 = a^2 + b^2,\ x_2 = 2ab$; 18. $x_1 = a$

95. Trovare due numeri, di cui l dati da:

1. $s = 7,\ p = 12$; 2. $s = 1,\ p =$

4. $s = 0{,}1,\ p = -0{,}6$; 5. $s = \frac{10}{3},$

7. $s = 2a,\ p = a^2 - 1$; 8. $s = \frac{a + b}{a},\ p$

$^2 + a^2 + b^2 = 2(a+b)x + 2ab;$

$a - 1 = 0;$

$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{x-a};$

$\frac{1}{+2x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a} = 0;$

$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2;$

$\frac{+c}{-c} = 3.$

sufficiente affinchè le due

$- b'x + c' = 0$

lice deve soddisfare alla com-
ni, che ha per moltiplicatori
$- a'b)(cb' - c'b) = 0].$
), le cui radici x_1, x_2 siano

$0;$ 3. $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3};$

6. $x_1 = \frac{5}{8}$, $x_2 = -\frac{7}{12};$

$+ \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3};$

$_2 = 2a;$ 11. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{a};$

$a - b;$ 14. $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = \frac{1}{b};$

$\frac{+b}{-b}$, $x_2 = \frac{a-b}{a+b};$

$\overline{a^2 + b^2}$, $x_2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$

nma s e il prodotto p siano

; 3. $s = -2$, $p = \frac{21}{25};$

$\frac{16}{9};$ 6. $s = 5a$, $p = 6a^2;$

$;$ 9. $s = \frac{b-a}{b}$, $p = -\frac{a}{b};$

9. $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}}$; 10. $\sqrt{a + ab - 2a\sqrt{b}}$;

11. $\sqrt{\frac{3a}{b} + \sqrt{\frac{12a^2c^2}{bd^2} - \frac{4a^4c^4}{d^4}}}$;

12. $\sqrt{b^2 - ab + \frac{a^2}{4} + \sqrt{4ab^3 - 8a^2b^2 + a^3b}}$.

Capitolo III

92. Risolvere le equazioni di 2° grado:

1. $x^2 + 6x = 40$; 2. $x^2 - 6x = 135$; 3. $x^2 - 4x = 21$;

4. $x^2 - 28x = 60$; 5. $x^2 - 11x = -28$; 6. $x^2 + 11x = 42$;

7. $x^2 - \frac{x}{2} = 14$; 8. $x^2 + \frac{2x}{5} = 27$; 9. $x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$;

10. $x^2 - \frac{1}{20}x = \frac{1}{10}$; 11. $x(x - 5) + 4(x - 3) = 30$;

12. $3(5 - 2x) = 10 + 2x(6x - 1)$; 13. $(2x + 3)(x \quad 4) + 9 = 0$;

14 $3x - (x - 3)(2x - 5) = 5$;

15. $(5x + 6)(3x - 1) - (2x \quad 3)(x - 4) = 82$; 16. $(x + 2)^2 = x + 22$;

17. $(3x - 5)^2 = 12x + 1$; 18. $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x - 8)^2$;

19. $2 - \frac{x^2 - 9}{7} = \frac{3x - 7}{5}$; 20. $2x - \frac{x^2 - 7}{4} = \frac{4x - 1}{2}$;

21. $\frac{x - 1}{2} - \frac{3x - x^2}{3} = x + \frac{1}{3}$; 22. $\frac{x + 1}{2} - \frac{x^2 - 3x}{5} = 5 - \frac{2x - 3}{3}$;

23. $\frac{3x - 2}{x - 2} = 3x - 14$; 24. $\frac{4x - 3}{x - 4} = x + 12$; 25. $2x + 3 = \frac{1}{3x + 4}$;

26. $\frac{1}{5x} - \frac{1}{7x + 3} = \frac{1}{10}$; 27. $\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x - 3} + \frac{1}{30} = 0$;

28. $\frac{6}{x} - \frac{5x + 3}{3x - 4} = 14$; 29. $2x - \frac{x - 3}{2x - 5} = 7\frac{2}{3}$;

30. $\frac{1}{5x + 2} + \frac{5}{3(x + 2)} = \frac{1}{x}$; 31. $\frac{7}{x + 18} - \frac{5}{x + 2} + \frac{2}{x} = 0$;

32. $\frac{x - 2}{2x + 2} + \frac{2x - 3}{3x - 1} = \frac{1}{2}$; 33. $\frac{x - 2}{x - 1} - \frac{x - 6}{2x - 8} = \frac{2}{3}$;

34. $(2x - 3 + \sqrt{5})^2 + 5(2x - 3 + \sqrt{5}) = 14$;

35. $(3x - 4\sqrt{5} + 6)^2 - 7(3x - 4\sqrt{5} + 6) + 12 = 0$;

36. $x^2 - bx = ax - ab$; 37. $x^2 - b^2 = 2ax - a^2$; 38. $abx^2 - b^2x = a^2x - ab$;

39. $(a^2 + b^2)x = ab(x^2 + 1)$; 40. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$;

41. $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$; 42. $x^2 + a^2 + b^2 = 2(a + b)x + 2ab$;

43. $ax^2 - (3a - 1)x + 2a - 1 = 0$;

44. $x + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{b}$; 45. $\frac{a}{x} + \frac{a - x}{x} = \frac{a}{x - a}$;

46. $\frac{1}{x + a} - \frac{1}{a + b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{x}$; 47. $\frac{1}{a + 2x} + \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a} = 0$;

48. $\frac{1}{x + a + b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; 49. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} = 2$;

50. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} + \frac{x + c}{x - c} = 3$.

93. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

abbiano una radice comune. [Una tale radice deve soddisfare alla combinazione lineare delle due date equazioni, che ha per moltiplicatori a' e $-a$ ecc. Si trova $(ac' - a'c)^2 + (ab' - a'b)(cb' - c'b) = 0$].

94. Scrivere un'equazione di 2° grado, le cui radici x_1, x_2 siano date da:

1. $x_1 = 3,\ x_2 = 5$; 2. $x_1 = 4,\ x_2 = -10$; 3. $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{2}{3}$;

4. $x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = \frac{7}{6}$; 5. $x_1 = x_2 = -\frac{3}{5}$; 6. $x_1 = \frac{5}{8},\ x_2 = -\frac{7}{12}$;

7. $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{3}$; 8. $x_1 = 2 + \sqrt{3},\ x_2 = 2 - \sqrt{3}$;

9. $x_1 + \sqrt{5},\ x_2 = -2 + \sqrt{7}$; 10. $x_1 = 1,\ x_2 = 2a$; 11. $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{a}$;

12. $x_1 = a,\ x_2 = 2b$; 13. $x_1 = a + b,\ x_2 = a - b$; 14. $x_1 = \frac{1}{a},\ x_2 = \frac{1}{b}$;

15. $x_1 = \frac{a}{b},\ x_2 = \frac{b}{a}$; 16. $x_1 = \frac{a + b}{a - b},\ x_2 = \frac{a - b}{a + b}$;

17. $x_1 = a^2 + b^2,\ x_2 = 2ab$; 18. $x_1 = a + \sqrt{a^2 + b^2},\ x_2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}$.

95. Trovare due numeri, di cui la somma s e il prodotto p siano dati da:

1. $s = 7,\ p = 12$; 2. $s = 1,\ p = -\frac{3}{4}$; 3. $s = -2,\ p = \frac{21}{25}$;

4. $s = 0{,}1,\ p = -0{,}6$; 5. $s = \frac{10}{3},\ p = \frac{16}{9}$; 6. $s = 5a,\ p = 6a^2$;

7. $s = 2a,\ p = a^2 - 1$; 8. $s = \frac{a + b}{a},\ p = \frac{b}{a}$; 9. $s = \frac{b - a}{b},\ p = -\frac{a}{b}$;

$$10.\ s=\frac{2b}{a^2-b^2},\ p=-\frac{1}{a^2-b^2};\quad 11.\ s=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2},\ p=1;$$

$$12.\ s=\frac{2a}{a-b},\ p=\frac{a}{a-b}.$$

96. Senza risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$, trovare:

1. la somma dei valori reciproci delle due radici;
2. la somma dei quadrati delle due radici;
3. la somma dei valori reciproci dei quadrati delle due radici;
4. la somma dei cubi delle due radici;
5. la somma dei cubi dei valori reciproci delle due radici.

97. Senza risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$, scrivere l'equazione di 2° grado, che ha per radici:

1. gli opposti dei valori delle radici dell'equazione data;
2. i reciproci dei valori delle radici dell'equazione data;
3. la somma e il prodotto delle radici dell'equazione data;
4. i quadrati delle radici dell'equazione data;
5. i valori reciproci dei quadrati delle radici dell'equazione data;
6. i cubi delle radici dell'equazione data;
7. i valori reciproci dei cubi delle radici dell'equazione data;
8. le radici dell'equazione data, aumentate, ciascuna, di un dato numero h;
9. le radici dell'equazione data, moltiplicate ciascuna per un dato numero h.

98. Quale relazione deve intercedere fra p e q, affinchè la differenza delle due radici della equazione $x^2+px+q=0$ sia uguale ad 1?

99. Nell'equazione $x^2+px+36=0$ determinare p in modo che fra le due radici x_1, x_2 interceda la relazione

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{5}{12}.$$

100. Nell'equazione $x^2-8x+q=0$ determinare q in modo che fra le due radici x_1, x_2 interceda la relazione $x_1{}^2+x_2{}^2=40$.

101. Nell'equazione

$$(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+c=0$$

determinare c in modo che le due radici risultino uguali.

102. Decomporre in fattori di 1° grado i seguenti trinomî di 2° grado:

$$1.\ x^2+x+6;\quad 2.\ 8x^2+10x-3;\quad 3.\ 2x^2+\frac{5}{3}x-2;$$

$$4.\ 6x^2-5x-56;\quad 5.\ x^2-3x+2;\quad 6.\ x^2-2\sqrt{2}\ x-1;$$

$$7.\ x^2-2ax+a^2-b^2;\quad 8.\ a(x^2+1)-(a^2+1)\,x;$$

9. $x^2-2ax+(a+b-c)(a-b+c)$; 10. $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2$;
11. $abx^2-(a+b)x+1$; 12. $bcx^2-(ac+b^2)x+ab$.

103. Semplificare le seguenti frazioni algebriche:

1. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; 2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$; 3. $\dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$;

4. $\dfrac{2x^2-2x-12}{x^3+x-12}$; 5. $\dfrac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$; 6. $\dfrac{6x^2-13x+6}{15x^2-7x-2}$.

104. Discutere le seguenti disuguaglianze:

1. $x^2+2x-8>0$; 2. $x^2+2x-1>0$; 3. $8+2x-15x^2>0$;
4. $1-8x-4x^2>0$; 5. $x^2-6x+5>0$; 6. $6x-x^2-9>0$;
7. $x^2-3x+7>0$; 8. $12x^2+7x-10>0$; 9. $16-24x+9x^2>0$.

105. In ciascuno dei casi seguenti si determini per quali valori del parametro k il trinomio di 2° grado risulti positivo per qualsiasi valore della x:

1. $(k-7)x^2+2(k-3)x+2k$; 2. $(k+1)x^2+2(3k-4)x+8k$;
3. $kx^2+2(2k+a)+5k$; 4. $(2k-1)x^2+2(3k-1)x+5k$;
5. $(3k-1)x^2+2(4k-1)x+5k$; 6. $kx^2+(2k+1)x+5k+1$.

106. Discutere le seguenti equazioni dipendenti da un parametro k:

1. $2x^2+6rx-(k-4)r^2=0$; 2. $4x^2+2ay+(k-1)a^2=0$;
3. $kx^2+(k-1)x+2k=0$; 4. $kx^2-kax+a^2=0$;
5. $x^2+2r(2k-1)x+4k^2r^2=0$; 6. $x^2-kax+ka^2=0$;
7. $5x^2-2r(k+4)x+k^2r^2=0$; 8. $x^2-a(2k-1)x+a^2(1-k)=0$;
9. $3kx^2+3(3k+1)x+6k+7=0$;
10. $(5-4k)x^2-2\sqrt{3}x+3-4k=0$.

107. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $\sqrt{3x+4}=\sqrt{4x-3}$; 2. $2\sqrt{2x+13}=5\sqrt{3x-14}$;
3. $\sqrt{1+\sqrt{2+x}}=3$; 4. $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)=x-6$;
5. $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-7)=(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-6)$.
6. $\sqrt{x}+2=6$; 7. $\sqrt{x+2}=6$;
8. $5(\sqrt{x}-4)-4(\sqrt{x}-5)=9$; 9. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{2}+\dfrac{8-\sqrt{x}}{3}=2$;

10. $\dfrac{9\sqrt{x}-2}{6}=\dfrac{15\sqrt{x}+1}{18}-\dfrac{15\sqrt{x}-3}{12}$;

11. $x-6\sqrt{x}+5=0$; 12. $x+10=7\sqrt{x}$;

13. $x+\sqrt{x}=30$; 14. $x-3\sqrt{x}=28$;

15. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7)=3$; 16. $(5-\sqrt{x})^2=2(7+\sqrt{x})$;

17. $x+3\sqrt{23-x}=19$; 18. $\frac{x}{2}-4=\sqrt{\frac{x}{4}+1}$;

19. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$; 20. $\sqrt{x-7}-\sqrt{x}=1$;

21. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5}=9$; 22. $\sqrt{5x-4}-\sqrt{x+11}=\sqrt{x}$;

23. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{2x+9}$;

24. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x}=\sqrt{3x^2+2x+1}$;

25. $2x-1+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x^2-x+2}$;

26. $\sqrt{1+\sqrt{x+2}}=3$: 27. $\sqrt{x+7+\sqrt{x+3}}=4$;

28. $\sqrt{2x+3+2\sqrt{x(x+3)}}=3$; 29. $\sqrt{3x+1-\sqrt{6x+1}}=2\sqrt{x-2}$;

30. $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;

31. $\sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{4-\sqrt{x}}=\sqrt{7+2\sqrt{x}}$;

32. $a\sqrt{b-x}=b\sqrt{a-x}$; 33. $\sqrt{b(b+x)}-\sqrt{a(a+x)}=a+b$;

34. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$; 35. $\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a$;

36. $\frac{5+6\sqrt{x}}{7-\sqrt{x}}=3+\frac{2}{5}$; 37. $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

38. $\frac{\sqrt{2x}+3}{\sqrt{2x}-2}=3$; 39. $\frac{1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=2x$;

40. $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=4$;

41. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=\frac{10}{\sqrt{x+4}}$; 42. $\frac{b\sqrt{ax}-1}{\sqrt{ax}+1}=\frac{\sqrt{ax}-1}{b}+b$;

43. $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5x-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$; 44. $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{1+ax}{1-ax}$;

45. $x\sqrt{\frac{a}{x}-1}=\sqrt{x^2-b^2}$; 46. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$;

47. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=x-1$;

48. $\frac{1}{x+\sqrt{2a^2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2a^2-x^2}}=x$.

108. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}$;

2. $\frac{10x^2+11x-6}{18x^2-15x-7}>0$;

3. $\frac{x^2+x-2}{2+x-x^2}>0$;

4. $\frac{6x^2+x-2}{x^2+x-6}>0$;

5. $\frac{25-20x-12x^2}{12-31x+20x^2}>0$;

6. $\frac{4x^2-x-3}{2x^2-9x+10}>0$;

7. $\frac{9x+4}{3+7x-6x^2}>2$;

8. $\frac{35}{x-3}>3\left[\frac{1}{x-1}-2\right]$;

9. $\sqrt{x-1}<\frac{1}{2}$;

10. $\sqrt{x+3}<2$;

11. $\sqrt{4x-3}>\sqrt{3x-4}$;

12. $\sqrt{4x-3}>\sqrt{3x-1}$;

13. $\sqrt{4x-3}>\sqrt{4x-5}$;

14. $\sqrt{8-6x+x^2}>\sqrt{24-2x-x^2}$;

15. $2x+1>\sqrt{4x^2-4x-15}$;

16. $\sqrt{9x^2-12x-5}>3x+1$;

17. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}<3$;

18. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{6(x-1)}+\sqrt{3(x-2)}>0$;

19. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}>c$, con a, b, c positivi (discussione);

20. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}>c$, con a, b, c positivi (discussione);

21. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}>c$, con a, b, c positivi (discussione);

22. $\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}>c$, con a, b, c positivi (discussione);

23. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}>c$, con a, b, c positivi (discussione);

24. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}>\sqrt{x-c}$, con a, b, c positivi (discussione);

25. $\sqrt{4x^2+5kx+k^2}<2x+3k$ (discussione).

Capitolo IV

109. Trovare un numero tale, che la somma delle radici quadrate positive dei due numeri che da esso si ottengono, aumentandolo e diminuendolo di 1, sia uguale ad un prefissato numero a.

110. Si decomponga 2160 in due fattori che stiano fra loro nel rapporto 5 : 3.

111. Si decomponga 156 in due fattori la cui somma sia 25.

112. Quale numero differisce, in meno, di 210 dal suo quadrato?

113. Se un numero si aumenta e si diminuisce di 64, il prodotto dei numeri così ottenuti è uguale a 1680. Qual'è codesto numero?

114. Quale numero, aggiunto al suo reciproco, dà $3+\frac{11}{14}$?

115. Determinare un numero, che, moltiplicato per $\frac{10}{3}$, dà 9 volte la somma del suo quadrato e di 25.

116. Nell' equazione $2x^2 - (k-1)x + k + 1 = 0$ si determini k in modo che le due radici differiscano di 1.

117. In quale sistema di numerazione il numero 254 si scrive 512?

118. Intorno ad un giardino quadrato si è tracciato un sentiero largo m. 2; e la superficie di mezzo, destinata alle piantagioni, supera quella occupata dalla strada di m.^{2} 1732. Qual' è il lato del giardino?

119. In un cerchio di cm. 13 di raggio si vuol condurre per un punto A, che dista dal centro cm. 5, una corda lunga cm. 25. Quanto sono lunghi i due seguenti in cui la corda è divisa da A?

120. In un cerchio di cm. 20 di raggio si è condotta una corda lunga cm. 24. Quanto dista dal centro il punto d' intersezione delle tangenti al cerchio negli estremi della corda?

121. Dati due cerchi concentrici di raggi di cm. 17 e cm. 25, si conduca una retta su cui la corda determinata dalla circonferenza minore sia uguale ai $\frac{2}{5}$ di quella della maggiore. Qual' è la lunghezza della corda e quale la sua distanza dal centro?

122. Da un punto esterno ad un cerchio di cm. 21 di raggio e distante dal centro di cm. 29 si conduca una secante la cui parte interna sia di cm. 9.

123. Se il denominatore di una frazione di numeratore 5 si aumenta di 4, la frazione diminuisce di $\frac{5}{24}$. Qual' è la frazione?

124. Per quale numero si deve dividere 84, perchè il quoziente superi di 5 il divisore?

125. I due termini di una frazione hanno per prodotto 117 e diventano uguali se il numeratore si accresce di 2, mentre il denominatore si diminuisce di 2. Trovare questa frazione.

126. Un uccello, che volando orizzontalmente fa 15 m. al secondo, passa a 30 m. di altezza, verticalmente, sulla testa di un cacciatore. A quale punto deve mirare il cacciatore, se si suppone che i pallini percorrano in media 180 m. al secondo?

127. Due treni vanno da Chiusi a Roma. Il primo di essi, che impiega 18^m meno dell' altro a percorrere codesta distanza di km. 165, fa 5 km. di più all' ora. Quali sono le durate dei due tragitti?

128. Un mugnaio sale col mulo carico di farina ad un paesetto di montagna in $5^h 24^m$, mantenendo nella seconda metà del cammino una velocità che è ad ogni ora inferiore di $^1/_2$ km. a quella mantenuta nella prima metà. Il giorno dopo ridiscende al suo punto di partenza in 3 ore, mantenendo una velocità che supera di 1 km. per ogni ora la velocità, con cui aveva camminato nella prima parte della salita. Qual'è il cammino percorso?

129. Su di un fiume un vaporetto parte, contro corrente, da A verso B e tre ore dopo ne parte un altro da B verso A. Questo incontra il primo dopo 30^m di viaggio e giunge alla meta 45^m dopo che il primo è giunto in B. Quanto è durato il viaggio di ciascun vaporetto?

130. Una tavoletta assira contiene, in caratteri cuneiformi, un elenco dei cubi dei numeri naturali e come 32mo cubo dà il numero 968, dove, ben inteso, codeste tre cifre sono rappresentate da gruppi di 9, 6, 8 cunei. Qual'è la base del sistema di numerazione qui usato?

131. Due escursionisti hanno compiuto ciascuno una escursione a piedi, restando entrambi in viaggio il medesimo tempo. Ma il primo si è preso per via un giorno di riposo ed ha fatto 120 km. e il secondo, che si è riposato tre giorni, ne ha fatto solo 112. Se camminando ciascuno colla stessa velocità effettivamente mantenuta, il primo si fosse preso tre giorni di riposo e il secondo uno solo, questo ultimo avrebbe fatto 44 km. più del primo. Quanti giorni stettero essi in viaggio?

132. L'area di un triangolo è di cm.^{2} 13,5 e la base supera l'altezza di cm. 1,5. Quali sono le dimensioni del triangolo?

133. In un rettangolo l'altezza supera di cm. 7 la larghezza e la diagonale è di cm. 17. Determinare le dimensioni.

134. Trovare i tre lati di un triangolo rettangolo, sapendo che le loro misure in dm. sono tre numeri interi consecutivi.

135. Di un rettangolo si conoscono il perimetro $2p$ e la diagonale d; determinare le dimensioni. Caso particolare: $2p =$ dm. 8,2 e $d =$ dm. 2,9.

136. Dato un rettangolo di m. $5 \times$ m. 12, se ne aumentino le due dimensioni di una stessa lunghezza in modo che aumenti la diagonale di m. 4; oppure aumenti l'area di cm.^{2} 110. Determinare nell'uno e nell'altro caso di quanto si debbano aumentare le dimensioni.

137. Una strada parte da un punto A e dopo 2 km. volta ad angolo retto. A quale distanza da A su codesta strada, deve trovarsi un punto B, perchè il cammino da A a B sia uguale ad h volte la distanza in linea retta da A a B?

138. Dati più segmenti, le cui misure siano designate con $a, b, c, d, e, f....$ costruire i segmenti [la cui misura sia]:

$$1.\ \frac{cde}{ab}; \qquad 2.\ \frac{b\sqrt{cd}}{a}; \qquad 3.\ \frac{c\sqrt{defg}}{ab};$$

$$4.\ \frac{a^3+b^3}{c^2+d^2}\left(=\frac{a^2}{\frac{c^2}{a}+\frac{d^2}{a}}+\frac{b^2}{\frac{c^2}{b}+\frac{d^2}{b}}\right); \qquad 5.\ \sqrt{\frac{abc}{d}}; \qquad 6.\ \sqrt{5\frac{abcd}{ef}};$$

7. $\sqrt{5a^2+2b^2}$; 8. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 9. $\sqrt{a^2b+c^3}$

10. $\sqrt{5\frac{abc}{d}+e^2}$; 11. $\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{d}$; 12. $\sqrt{ab-b^2}$ $(ab > c^2)$;

13. $\sqrt{\frac{a^3+b^2c}{d}}+\sqrt{\frac{e^3-f^3}{g}}$ $(e>f)$; 14. $\sqrt{g\sqrt{a^2+b^2}+h\sqrt{e^2+f^2}}$.

15. $\sqrt[4]{a^4+b^4}\left(=\sqrt{a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}\right)$; 16. $\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{e+3f^2}}$;

139. Dati più segmenti le cui misure siano a, b, c, d.... e dato il segmento unità di misura $(u=1)$, costruire i segmenti:

1. $abc\left(=\frac{abc}{u^2}\right)$; 2. $ab+\frac{3}{7}-c^2$; 3. $\sqrt{a^2-b}\ (=\sqrt{a^2-bu})$;

4. $\sqrt{a+b^2+c^2}$; 5. $\sqrt{5a^2+b}$; 6. $\frac{a+\sqrt{b^2+4cd}}{2e}$;

7. $\frac{3d+\sqrt{a^2-bc}}{5e}$ $(a^2>bc)$;

8. $\sqrt{3d+\sqrt{a-b^2-c}}$ $(a>b^2+c)$; 9. $\sqrt{2a+\sqrt{3b+\sqrt{c+d^2}}}$;

10. $\sqrt{\sqrt{a^3-\frac{b^2}{cd}}\sqrt{a^3+5b}}$ $\left(a^3>\frac{b^2}{dc}\right)$.

In tutti questi casi le formule debbono essere rese omogenee di 1° grado con un artifizio conveniente (IV, n. 12).

140. Costruire un triangolo isoscele, iscritto in una circonferenza di dato raggio r, conoscendo:

1. la lunghezza a del lato. [Se AB è la base del triangolo cercato, D il punto medio di questa, C il vertice del triangolo, O il centro della circonferenza, si applichi il teorema di Pitagora ai triangoli ADC, ADO, ecc.];

2. la somma s della base e dell'altezza.

141. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo le lunghezze m, n dei segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal piede della corrispondente altezza.

142. Determinare il lato del triangolo equilatero di data area l^2, iscritto in un triangolo equilatero di dato lato a.

143. In un triangolo, conoscendo le lunghezze a, b di due lati e quella della mediana m_c relativa al terzo, calcolare quest'ultimo lato.

144. Essendo a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo scaleno (con $a>b>c$), si determini x in modo che $a-x$, $b-x$, $c-x$ siano i lati di un triangolo rettangolo.

145. Dati un triangolo di base a e di altezza h e un quadrato di lato l, aventi le basi su di una stessa retta, condurre una parallela a questa, che tagli dal triangolo e dal quadrato un triangolo ed un rettangolo, la cui somma sia equivalente al triangolo primitivo.

146. Nel piano di un cerchio di raggio r, da un punto P, avente dal centro la distanza d, si conduca una secante tale che la corda AB giacente su di essa abbia la lunghezza $2c$. Determinare i due segmenti PA, PB.

147. Iscrivere in un cerchio di raggio r un triangolo rettangolo, conoscendo la differenza kr fra uno dei cateti e la sua proiezione sulla ipotenusa.

148. Dividere un segmento a in due parti tali che la somma dei loro quadrati e l'area del loro rettangolo abbia il rapporto $k-2$.

149. Due rettangoli a lati ordinatamente paralleli ed equidistanti sono l'uno interno all'altro. Sapendo che l'area del rettangolo interno è la metà di quella dell'esterno e che questo ha i lati a e b, trovare la distanza fra i lati dei due rettangoli.

150. Trovare le basi di un trapezio di altezza h, sapendo che la somma delle basi è kh e l'area è uguale a quella del rettangolo delle basi.

151. L'area di un trapezio di altezza h è uguale a quello del rettangolo delle basi, mentre la differenza di queste è kh. Trovare le due basi.

152. Calcolare i lati di un triangolo isoscele, conoscendone il perimetro $2p$ e sapendo che la differenza fra i quadrati di un'altezza e del corrispondente lato è kp^2.

153. Dato un cerchio di diametro $AB = 2r$, trovare sul prolungamento di AB un punto C tale che, condotta da C la tangente CT, si abbia $CT^2 + CA^2 = kr^2$.

154. Dato un cerchio di raggio r, determinare un cerchio concentrico ed interno ad esso, tale che la corona circolare risulti media geometrica fra i due cerchi.

155. Dato un quadrato $ABCD$ di lato l, trovare sul prolungamento di AB un punto E tale che i segmenti ED, EC abbiano un dato rapporto $k > 1$.

156. In un triangolo equilatero ABC di lato $2l$ condurre ad AB una parallela, che seghi gli altri due lati in due punti M, N tali che, detto H il punto medio di AB, il triangolo MON abbia un dato rapporto k al triangolo ABC.

157. In un cerchio di raggio r si trovi a quale distanza dal centro si debba condurre una corda AB, perchè la differenza delle aree dei due triangoli di base AB, che hanno per vertici gli estremi del diametro perpendicolare risulti uguale a kr^2.

158. Dati un cerchio di raggio r e un punto C, la cui distanza dal centro sia kr con $k > 1$, si trovi la lunghezza di una corda AB tale che il triangolo ABC risulti equilatero.

159. Trovare l'altezza di un trapezio rettangolo, di cui la base minore e il lato obliquo siano uguali ad a e il perimetro sia ka.

160. Dato un quadrato $ABCD$ di lato l, se ne conduca una corda MN parallela alla diagonale BD in modo che il rapporto del triangolo AMN al quadrato risulti uguale a k. [Prendere come incognita AM].

161. In un cerchio di raggio r iscrivere un triangolo isoscele tale che la differenza fra l'altezza e la base sia kr.

162. Dato un semicerchio di diametro $AB = 2r$, si trovi sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che, condotta da C la tangente CD ed abbassata da D la perpendicolare DE sul diametro, si abbia $CD = BE + ED$.

163. Dato un quadrante di circonferenza AOB di raggio r, determinare un suo punto tale che, ove si denotino con M ed N le intersezioni della corrispondente tangente con la tangente in A e colla retta OB, il trapezio $AMNO$ abbia l'area kr^2. [Prendere come incognita principale AM].

164. Una piramide retta a base quadrata ha il lato di base l e l'altezza h. Trovare a quale distanza dal vertice si deve condurre un piano parallelo alla base perchè il parallelepipedo iscritto, che ha per base superiore la sezione così ottenuta, abbia la superficie laterale kl^2.

165. Sul lato $AB = l$ di un quadrato $ABCD$ trovare un punto E tale che sia uguale a k il rapporto fra il volume del solido, che si ottiene facendo rotare il trapezio $EBCD$ intorno a BC e quello del solido, che si ottiene facendo rotare lo stesso trapezio intorno a CD.

166. In un cilindro circolare retto l'area totale è $2\pi a^2$ e la somma del diametro della base con l'altezza è s. Trovare il raggio.

167. L'area totale di un cilindro circolare retto è $2\pi a^2$ e la differenza fra l'altezza e il raggio di base è d. Trovare questo raggio.

168. Sul piano della base di un cono di raggio di base r e di altezza $h = 2r$ è collocata una sfera di raggio r. Segare i due solidi con un piano parallelo alla base del cono in modo che la somma delle aree delle superficie totali dei due solidi così distaccati risulti uguale a πkr^2.

169. Dividere un segmento $AB = 2a$ in due parti tali che la somma dei volumi delle due sfere aventi per diametri queste due parti sia uguale a $\frac{4}{3}\pi ka^3$.

170. Segare una sfera di raggio r con un piano tale che l'area della calotta maggiore sia media proporzionale fra l'area della sfera e quella della calotta minore.

171. Un cono equilatero è iscritto in una sfera di raggio r. Segare i due solidi con un piano parallelo alla base del cono, in modo che la somma delle aree delle due sezioni abbia il rapporto k all'area della base del cono.

172. Una sfera di dato raggio r si seghi con un piano tale, che la superficie laterale del cono, avente per vertice il centro della sfera e per base il cerchio sezione, abbia area uguale alla superficie della sfera, che ha per diametro la distanza del piano segante dal centro della sfera data. Si calcoli il raggio del cerchio sezione.

173. Conoscendo di un tronco di cono il volume l^3 e il raggio r di una delle basi, calcolare l'altra.

174. Trovare il volume del solido che si ottiene facendo rotare intorno alla base un triangolo isoscele iscritto in un cerchio di raggio r, sapendo che la somma dei quadrati dei suoi lati è $4kr^2$.

175. Calcolare il volume del solido generato da un rombo che ruota intorno alla parallela alla diagonale maggiore condotta da un estremo di quella minore, sapendo che il rapporto delle diagonali è k e che l'area del rombo non cambia, se si aggiunge $2m$ alla diagonale maggiore e si toglie $2n$ dalla diagonale minore.

176. Trovare l'area totale del cono, che si ottiene facendo rotare intorno al cateto minore un triangolo rettangolo, di cui sia r il raggio del cerchio iscritto e kr l'ipotenusa.

Capitolo V

177. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2. $x^4 - 21x^2 = 100$;
3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
4. $x^4 + 9 = 10x^2$;
5. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 73$;
6. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$;
7. $10x^2 - 21 = x^4$;
8. $6x^4 - 35 = 11x^2$;
9. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
10. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
11. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
12. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
13. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
14. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$;
15. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$;
16. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$;
17. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$;
18. $x^4 - ax^2 + b^2 = 0$;
19. $x^4 - 4(a + b)x^2 + 16(a - b)^2 = 0$;
20. $x^4 - 4(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0$.
21. $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)^2 + a^2b^2 = 0$;
22. $x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$;
23. $c^4x^4 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0$.

178. Se in un'equazione di 4° grado

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

i coefficienti rendono soddisfatta la condizione $(4a_2 - a_1^2)a_1 = 8a_3$, l'equazione si può scrivere sotto la forma

$$(x^2 + hx)^2 + p(x^2 + hx) + q = 0,$$

cosicchè la sua risoluzione si può far dipendere da quella di equazioni di 2° grado.

179. Risolvere le equazioni (Eserc. prec.):

1. $x^4 + 16x^3 + 62x^2 - 16x - 63 = 0$;   2. $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 4x - 30 = 0$.

180. Quale valore si deve attribuire a k perchè nell'equazione

$$2x^2 - (k^2 + 1)x + k^2 + 3 = 0$$

le due radici differiscano di 1?

181. In quale sistema di numerazione il numero 1902 si scrive 30102?

182. In un triangolo le misure dei lati sono tre numeri interi consecutivi e l'area è 84. Trovare i tre lati.

183. Calcolare i cateti di un triangolo rettangolo, conoscendo l'ipotenusa a e sapendo che la differenza dei quadrati dei cateti è doppia dell'area.

184. In un triangolo ABC, conoscendo i lati $AB = c$, $AC = b$ e il prodotto l^2 delle lunghezze dei due segmenti BH, HC determinati sul terzo lato BC dalla corrispondente altezza, calcolare questo lato.

185. In una circonferenza di dato raggio r, una corda è tale che la differenza fra le aree dei due triangoli, aventi per base comune la corda e per vertici gli estremi del diametro ad essa perpendicolare, risulta uguale a k volte il quadrato del raggio r. Si determini la distanza di codesta corda dal centro.

186. Dato un cerchio di raggio r, determinare un cerchio concentrico ed interno ad esso, in modo che risulti medio proporzionale fra il cerchio dato e la corona (cfr. Eserc. 154).

187. Trovare il raggio di base di un cono circolare retto, sapendo che il suo volume è $\frac{4}{3}\pi r^3$ e la sua area totale $4\pi k r^2$.

188. In un tronco di cono circoscritto ad una sfera di raggio r è uguale a k il rapporto fra la superficie totale e la superficie laterale. Trovare i raggi delle basi.

189. Risolvere le equazioni seguenti:

1. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$;   2. $3x^3 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$;
3. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;   4. $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$;
5. $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$;   6. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$;
7. $4x^3 + 21x^2 + 21x + 4 = 0$;   8. $x^3 + 9{,}1x^2 - 9{,}1x - 1 = 0$;
9. $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$;   10. $15x^3 - 19x^2 - 19x + 15 = 0$;
11. $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$;   12. $3x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = 0$.

190. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$; 2. $4x^4 + 17x^3 - 17x - 4 = 0$;
3. $2x^4 - 5x^2 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$; 4. $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$;
5. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$; 6. $3x^4 + 4x^3 - 4x - 3 = 0$;
7. $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$; 8. $15x^4 - 34x^3 + 34x - 15 = 0$;
9. $4x^4 - 9x^3 - 26x^2 - 9x + 4 = 0$; 10. $x^4 + 10{,}1x^3 - 10{,}1x - 1 = 0$;
11. $6x^4 - 25x^3 + 38x^2 - 25x + 6 = 0$; 12. $6x^4 - 10x^3 + 10x - 6 = 0$.
13. $(1 + x)^4 = 2(1 + x^4)$;
14. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$;
15. $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$;
16. $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$.

191. Trovare tre numeri interi consecutivi tali che il cubo del maggiore sia il triplo della somma dei cubi degli altri due.

Radici razionali delle equazioni a coefficienti razionali. — **192.** La risoluzione di un'equazione a coefficienti razionali si può ridurre a quella di un'equazione a coefficienti interi, di cui il primo sia uguale ad 1. [Anzitutto, moltiplicando ambo i membri per un multiplo comune (e converrà prendere il minimo) dei denominatori dei coefficienti, l'equazione si riduce a coefficienti interi. Se essa assume con ciò la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$, dove a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_n denotano numeri interi (positivi o negativi) e si prende come nuova incognita la $u = a_0x$, si trova, sostituendo nell'equazione data $\frac{u}{a_0}$ al posto di x e moltiplicando ambo i membri per a_0^{n-1}, l'equazione

$$u^n + a_0a_1u^{n-1} + a_0^2a_1u^{n-2} + \ldots + a_0^na_n = 0,$$

che appunto, ecc.].

193. Ogni eventuale radice razionale di un'equazione a coefficienti interi, di cui il primo sia uguale ad 1, è necessariamente intera (positiva o negativa) ed è uguale ad uno dei divisori del termine noto (compresi i divisori ± 1). [Un'equazione $x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n = 0$, dove b_1, $b_2, \ldots$, b_n sono numeri interi, sia soddisfatta dalla frazione $\frac{p}{q}$, dove p e q denotano due interi primi fra loro, di cui q si suppone positivo, mentre p può essere positivo o negativo. Sostituendo questa frazione nell'equazione al posto di x e moltiplicando ambo i membri per q^n, si ottiene l'uguaglianza numerica

$$p^n + b_1qp^{n-1} + b_2q^2p^{n-2} + \ldots + b_nq^n = 0,$$

dove tutti i termini del primo membro a partire dal secondo sono divisibili per q; deve esser tale anche p^n ecc., onde è necessariamente $q=1$, e la precedente uguaglianza numerica si riduce a

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \dots + b_n = 0,$$

dove tutti i termini del primo membro, eccettuato l'ultimo, hanno in evidenza il divisore p. Quindi anche l'ultimo termine b_n ecc.].

194. Cercare le eventuali radici razionali delle seguenti equazioni:

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;
2. $6x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$;
3. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$;
4. $5x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 45x - 18 = 0$;
5. $6x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 3x - 4 = 0$;
6. $2x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 3x^4 + 4$.

NOTA. Quando nell'equazione proposta, ove occorra, si sia ridotto ad 1 il primo coefficiente (Eserc. 192) e si siano trovati tutti i divisori del termine noto (compresi in ogni caso ± 1), bisogna verificare per ognuno di essi se renda soddisfatta l'equazione. Se c è il divisore che si considera, la verifica si può fare, sostituendo direttamente c ad x nel polinomio a primo membro. Ma di regola conviene invece applicare a questo polinomio, rispetto al divisore $x - c$, la Regola del Ruffini, la quale fornisce anche il quoziente del polinomio per $x - c$; se accade che c annulli il polinomio, cioè sia radice, la verifica per gli altri divisori del termine noto si può eseguire su codesto quoziente, anzichè sul polinomio primitivo, il che semplifica il calcolo.

195. Risolvere i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 19 \\ xy = 90 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - xy + 2y = 4 \\ 2x + xy + 2y = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = a^2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90 \\ x + y = 12 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 250 \\ x - y = 4 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 \\ x + y = 2h \end{cases}$
10. $\begin{cases} x(x+2) + y(y+2) = 183 \\ x + y = 17 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x(x+4) + y(y-4) = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 6 \end{cases}$
14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ x - y = a \end{cases}$
15. $\begin{cases} (x+2)^2 - y^2 = 56 \\ x + y = 2 \end{cases}$
16. $\begin{cases} (x-1)^2 - (y+3)^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1} - \dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{7}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{y+3} - \dfrac{y+3}{x} = -\dfrac{24}{35} \\ x - y = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = a \\ x - y = b \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2y + \dfrac{1}{4} = xy^2 \\ y - x = xy \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 - (x+y) = 48 \\ x + y + xy = 31 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2y^2 + xy = a \\ x + y = b \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 35 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 189 \\ x + y = 9 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 27x^3 - 8y^3 = 104xy \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} a^3x^3 + b^3y^3 = a^2b^2x^2y^2 \\ ax + by = c \end{cases}$

27. $\begin{cases} (x-4)^3 + (7-y)^3 = 72 \\ x - y = 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 272 \\ x + y = 6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^5 - y^5 = 2882 \\ x - y = 2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - y = 72 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12 \end{cases}$

32. $\dfrac{1}{2}(x+y) = \sqrt{ax} + \sqrt{by} = a + b$

33. $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+1} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x:y = 3:2 \\ \sqrt{x-2} = \sqrt{y-3} + 1 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{y-1} = 0 \\ x + y = 12. \end{cases}$

196. Dividere il numero 34 in due parti tali che la somma dei loro quadrati valga 750.

197. Un numero di due cifre, aumentato di 9, dà il numero formato con le due stesse cifre in ordine inverso; e se il numero si divide per il prodotto delle due cifre dà per resto 5. Trovare questo numero.

198. Due condutture d'acqua, versando insieme, riempiono un serbatoio in 2 ore e 24 minuti. Trovare in quanto tempo ciascuna di esse riempirebbe da sola il serbatoio, sapendo che la prima impiegherebbe 2 ore più della seconda.

199. Il perimetro di un rettangolo è di m. 82 e la diagonale di m. 29. Quali sono le due dimensioni?

200. Se in un rettangolo, avente la diagonale di m. 85, si aumenta di m. 2 ciascuna delle due dimensioni, l'area si accresce di m.^{2} 230. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

201. L'area di un rettangolo è di m.^{2} 168 e il perimetro di m. 62. Quali sono le dimensioni?

202. Si trasformi un rettangolo di cm. $5 \times$ cm. 7 in un altro che abbia il perimetro triplo.

203. Se i lati di un rettangolo avente la diagonale di m. 89 fossero ciascuno più corti di 3 m., la diagonale sarebbe più corta di m. 4. Quali sono le sue dimensioni?

204. Se in un rettangolo avente la diagonale di m. 65, il lato minore fosse più corto di m. 17 e il maggiore più lungo di m. 7, la diagonale resterebbe ancora lunga m. 65. Quali sono le due dimensioni?

205. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo:
1. il perimetro $2p$ e l'area l^2;
2. l'ipotenusa a e la somma s dei due cateti;
3. l'ipotenusa a e il rapporto k dei due cateti;
4. le differenze m, n fra l'ipotenusa e i cateti;
5. la somma s dei cateti e l'altezza h relativa all'ipotenusa.

206. In un triangolo, conoscendo la lunghezza di due lati e quella della bisettrice dell'angolo compreso, calcolare la lunghezza del terzo lato.

207. Calcolare la base e il lato di un triangolo isoscele, conoscendo il perimetro $2p$ e l'altezza h relativa alla base.

208. In un trapezio isoscele il lato obliquo è uguale alla semisomma delle basi. Determinare le lunghezze dei lati, sapendo che la somma del lato obliquo e della base minore è a e la somma dei quadrati dei quattro lati è $2b^2$. Fissato a, come deve scegliersi b, affinchè il problema sia possibile?

209. Ad una circonferenza di dato raggio r da un punto A che abbia dal centro la distanza $d > r$, si conduca una segante tale che la somma dei quadrati dei due segmenti compresi fra A e le sue intersezioni con la circonferenza risulti equivalente al doppio del quadrato di dato lato l.

210. Un rettangolo di perimetro $2p$, rotando intorno alla base o all'altezza, genera due cilindri rotondi, i cui volumi hanno somma uguale al volume della sfera di dato raggio r. Determinare la base e l'altezza del rettangolo.

211. Conosciuto il rapporto k fra il volume di un tronco di cono circoscritto ad una sfera di raggio r e il volume della sfera, trovare i raggi delle due basi del tronco e il rapporto fra le superficie totali dei due solidi.

212. Trovare le basi di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r, sapendo che è uguale a k il rapporto del trapezio al quadrato iscritto nel cerchio.

213. Trovare le basi di un trapezio rettangolo, conoscendo l'altezza h, l'area s^2 e la somma $2kh^2$ dei quadrati costruiti sui quattro lati.

214. Trovare le basi di un trapezio isoscele circoscritto ad un cerchio di raggio r e avente l'area kr^2.

215. Trovare i lati di un trapezio isoscele a diagonali perpendicolari, conoscendone il perimetro $l\sqrt{2}$ e la somma $4k^2l^2$ dei quadrati dei quattro lati.

216. Determinare l'apotema e il raggio di un cono circolare retto, conoscendo la loro somma s e il rapporto k tra la superficie laterale (oppure totale) del cono e quella della sfera iscritta.

217. Un cilindro e un cono hanno la stessa altezza e lo stesso volume; e il rapporto fra le due aree totali è k. Calcolare i raggi dei due solidi.

218. In un tronco di cono circolare retto l'altezza è media proporzionale fra i diametri delle basi; l'apotema è a e la superficie totale del tronco πka^2. Trovare i raggi delle due basi.

219. Calcolare i raggi di due sfere concentriche, conoscendo il volume $\frac{4}{3}\pi a^3$ del solido compreso e la differenza a dei due raggi.

220. La distanza dei centri di due sfere tangenti esternamente è d e la somma dei loro volumi è $\frac{4}{3}\pi a^3$. Trovare i due raggi.

221. Dato un qualsiasi sistema di due equazioni di 2^0 grado in due incognite, se ne determini la *risultante* in x o in y. [Il sistema sarà della forma

$$(*)\qquad \begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+hx+ky+l=0, \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+h'x+k'y+l'=0, \end{cases}$$

dove $a, b, \ldots, l'$ denotano altrettanti numeri dati (o altrettante espressioni letterali). Se si vuole la risultante in x, si cominci con l'ordinare le due equazioni secondo le potenze decrescenti della y, scrivendole

$$(**)\qquad Ay^2+By+C=0, \quad A'y^2+B'y+C'=0,$$

dove si è posto

$$(***)\qquad \begin{cases} A=c, & B=bx+k, & C=ax^2+hx+l, \\ A'=c', & B'=b'x+k', & C'=a'x^2+h'x+l'. \end{cases}$$

In base al solito metodo di sostituzione, la risultante in x si potrebbe ottenere, risolvendo una delle (**) rispetto alla y e sostituendo l'espressione così ottenuta per y nell'altra. Ma in tal modo si perverrebbe ad un'equazione irrazionale, onde conviene procedere nel modo seguente. Le radici della risultante in x sono date da tutti, e soli, quei valori della x, che, associati ciascuno ad un conveniente valore della y, danno altrettante soluzioni del sistema (**). Perciò codesta risultante non è altro che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni di 2° grado in y (**) abbiano almeno una radice comune, sicchè, tenendo conto dell'Eserc. 93, si ottiene l'equazione in x

$$(AC' - A'C)^2 - (AB' - A'B)(CB' - C'B) = 0,$$

che, in forza delle (***), è di 4° grado].

222. Risolvere i sistemi seguenti:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52, \\ xy = 24; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1{,}16, \\ 5xy = 2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2h^2, \\ xy = h^2; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2 + xy = 78, \\ y^2 - xy = 7; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = a, \\ xy = b; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{4}{3}, \\ 2x(y+1) + y(x+2) = 12; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 16, \\ y^2 - ay = 0; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) = 5(x^2 - y^2), \\ x(y-1) + x(y+1) = 0; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2 = 0, \\ xy + y^2 = 6; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a(x-y), \\ xy = b(x-y); \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ xy + y^2 = b; \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57, \\ x^2 - xy + y^2 = 43; \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2a, \\ x^2 - xy + y^2 = 2b; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 49, \\ 2x^2 = 3xy = 2y^2 = 45; \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 79, \\ x^2 + 3xy + y^2 = 59; \end{cases}$

17. $a : x = x : y = y : b;$ 18. $x^2 + y^2 = xy = x + y;$

19. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 70, \\ 6x^2 + xy - y^2 = 50; \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x(x+y) + y(x-y) = 158, \\ 7x(x+y) - 72y(x-y) = 0; \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y = 4, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y + 9 = 0, \\ x^2 - y^2 = 9; \end{cases}$

23. $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 32, \quad x^4y^2 + x^2y^4 = 128.$

223. La somma delle aree di due quadrati è di m.² 8621, mentre il prodotto delle due diagonali, misurate in metri, è dato da 8540. Trovare i lati dei due quadrati.

224. Calcolare le dimensioni di un rettangolo, sapendo che la diagonale è di m. 17 e l'area di m.² 120.

225. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo:

1. l'ipotenusa a e l'area l^2;

2. la differenza d^2 dei quadrati dei cateti e l'area l^2;

3. il perimetro $2p$ e la lunghezza b della bisettrice dell'angolo retto.

226. Costruire un triangolo isoscele di data area l^2, iscritto nella circonferenza di dato raggio r.

227. Da un punto, avente dal centro di una circonferenza di dato raggio r una data distanza $d > r$, condurre una segante, che dalla circonferenza sia divisa in sezione aurea (sia nel caso, in cui la sezione aurea è la parte esterna della circonferenza, sia in quello, in cui la sezione aurea è la corda).

228. La somma delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo è s, ed una di esse è media proporzionale fra le altre due. Conoscendo la diagonale ks del parallelepipedo, trovare il raggio della sfera, che ha ugual volume.

229. Un cilindro circolare retto, iscritto in una sfera di raggio r, ha l'area laterale $4\pi a^2$. Trovare il raggio di base e l'altezza.

230. Trovare i cateti di un triangolo rettangolo, conoscendone l'ipotenusa a e sapendo cho il solido generato dal triangolo nella sua rotazione intorno all'ipotenusa sta nel rapporto k alla sfera, che ha per raggio l'altezza del triangolo rispetto all'ipotenusa.

231. In un cono circolare retto l'area totale è πa^2 e il rapporto fra l'apotema e il raggio di base è k. Trovare l'altezza e il volume.

232. Circoscrivere ad un emisfero di raggio r un cono di superficie totale $\pi k r^2$. [Si prendano come incognite le lunghezze dei due segmenti, in cui l'apotema del cono è diviso dal punto di contatto coll'emisfero].

233. Trovare i raggi delle basi di un tronco di cono, conoscendo l'altezza h, l'area laterale πa^2 e il volume $\frac{1}{6}\pi k h^3$.

234. Un tronco di cono è circoscritto ad una sfera di raggio r e si conosce il rapporto k fra il volume del tronco e quello della sfera. Calcolare i raggi delle basi del tronco e il rapporto fra l'area della superficie totale del tronco e quella della sfera.

235. Il rapporto tra la superficie totale e la superficie laterale di un tronco di cono, circoscritto ad una sfera di raggio r, è k. Calcolare i raggi delle basi.

Capitolo VI

236. Calcolare o semplificare le espressioni seguenti:

1. $3a\sqrt[3]{2b^3} - 2b\sqrt[3]{2a^3}$; 2. $\sqrt[3]{5a^2b \cdot 25ab^5}$; 3. $\sqrt[m]{a^{m+n}\ b^{2m+p}}$;

4. $\sqrt[3]{12a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{18ab^2c}$; 5. $\sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[9]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5^2}$; 6. $\sqrt[m]{a^{2m}} \cdot \sqrt[n]{a^{3n}} : \sqrt[r]{a^{5r}}$;

7. $\sqrt[3]{2^6}+\sqrt[3]{3^3}-\sqrt{5^4}$; 8. $\sqrt[2n]{a^n}-\sqrt[n]{a^{2n}}$; 9. $3\sqrt[6]{x^3}-2\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[10]{x^5}$;

10. $\left(\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{4}\right)\sqrt[3]{2}$; 11. $\left(x+\sqrt[3]{x^2y}\right)\left(\sqrt[3]{xy^2}-y\right)$;

12. $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)^3$; 13. $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)$;

14. $\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.

237. Raccogliere le espressioni seguenti sotto un unico segno di radicale:

1. $\dfrac{a\sqrt{bc}\,\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[5]{2a}\,\sqrt[6]{c^5}}$; 2. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[4]{2bc^2}}{c\sqrt{abc}\,\sqrt[5]{a}}$;

3. $\dfrac{\sqrt{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt[4]{cz}}{\sqrt[6]{a^2xz}\,\sqrt[5]{bcy}}$; 4. $\dfrac{\sqrt[4]{ax}\,\sqrt[3]{by}\,\sqrt{cz}}{\sqrt[8]{a^2bxy}\,\sqrt[6]{c^3z^2}}$.

238. Rendere razionale il denominatore nelle espressioni seguenti:

1. $\dfrac{\sqrt[4]{8a}}{\sqrt{2\sqrt{2a}}}$; 2. $\dfrac{1}{2\sqrt{2a}\,\sqrt[3]{2b}}$; 3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}$; 4. $\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}-1}$;

5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 6. $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{2}}$; 7. $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 8. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$.

239. Verificare le seguenti identità:

1. $$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)=3a\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)+ +3b\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{c}{b}}\right)+3c\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}-\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\right);$$

2. $$\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)+\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}\right)+ +\left(\sqrt[3]{c^2}\mp\sqrt[3]{a^2}\right)\left(\sqrt[3]{c}\pm\sqrt[3]{a}\right)=\pm\sqrt[3]{abc}\left\{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{c}}-\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)+ +\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{c}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)\right\};$$

3. $$\sqrt[4]{(a-b)^5(a^3+a^2b-ab^2-b^3)}-\sqrt{(a^2+ab)(a^2-ab)}+ +2b\sqrt{a^2-b^2}=b\sqrt{a^2-b^2}.$$

240. L'errore relativo della radice cubica di un numero approssimato è minore di $^1/_3$ dell' errore relativo per eccesso di codesto numero.

241. Il numero $\sqrt[3]{31}$ si può assumere come valore approssimato di π. Qual' è il grado della approssimazione?

242. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; 2. $8x^6 - 215x^3 + 27 = 0$;
3. $x^6 + 2x^3 + 2 = 0$; 4. $x^6 - 2x^3 + 5 = 0$;
5. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$; 6. $x^6 - 19x^2 - 216 = 0$;
7. $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$; 8. $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$;
9. $16x^6 + 6x^3 - 1 = 0$; 10. $7x^3 - \dfrac{1890}{x^3} - 119 = 0$;
11. $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$; 12. $(x+2)^8 - 4(x+2)^4 + 13 = 0$;
13. $x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$; 14. $x^{10} - 244x^5 + 243 = 0$.

243. Discutere i casi possibili per le radici della equazione trinomia (elementare) $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

244. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $a\sqrt[3]{b+x} = b\sqrt[3]{a-x}$; 2. $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$;
3. $\sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{7a-8x}$; 4. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-6} + \sqrt[3]{x-29} = 0$;
5. $\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{a+x} = \sqrt[3]{2a}$; 6. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} = a$;
7. $(2\sqrt[3]{x} - 1)^3 = 27$; 8. $\sqrt{\sqrt[3]{x} + 1} = 3$;
9. $2x\sqrt[3]{x} - 20 = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}}$; 10. $9\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[3]{x} = 10$;
11. $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} + \sqrt[6]{x^2 - 5x + 1} = 2$; 12. $\sqrt[4]{(1+x)^2} - \sqrt[4]{(1-x)^2} = \sqrt[4]{1-x^2}$;
13. $\sqrt{x-1} - 3\sqrt[4]{x-1} + 2 = 0$; 14. $3\sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{1+x} = 8$;
15. $\sqrt[4]{97 - x^4} - x = 1$; 16. $\sqrt[4]{15+x} + \sqrt[4]{82-x} = 5$.

[Per risolvere le 15, 16, si rendano razionali e poi si tenga conto dell' Eserc. 178. Per rendere razionale la 16 si cominci col porre $u = \sqrt[4]{15+x}$].

245. Risolvere i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} (2x+3y)^3 + (2x-3y)^3 = 244, \\ (2x+3y)^3 - 5(2x-3y)^3 = 14; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y = 444, \\ \sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{y+14} = 12; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - x = 32, \\ \sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{y+1} = 5; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x + y = 17, \\ \sqrt[4]{90-x} - \sqrt[4]{9-x} = 2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 50, \\ \sqrt[5]{143+x} - \sqrt[5]{y-18} = 1; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = a^2, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = b^2. \end{cases}$

[Nel sistema 6 si ponga $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, si dividano membro a membro le due equazioni, ecc.].

246. Qualunque sia l'intero n, le soluzioni della disequazione di indice pari $\sqrt[2n]{A} > B$ sono date dall'insieme di quelle del sistema $A \geq 0$, $B < 0$, e di quelle del sistema $B \geq 0$, $A > B^{2n}$ (cfr. III, n. 27).

247. Qualunque sia l'intero n, le soluzioni della disequazione di indice pari $\sqrt[2n]{A} < B$ sono tutte e sole quelle del sistema $A \geq 0$, $B > 0$, $A < B^{2n}$ (cfr. III, n. 27).

Capitolo VII

248. Calcolare:

1. $5^0 + 4^{-3} - 3^{-2}$; 2. $3^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$;

3. $10^{-1} + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^3$; 4. $3a^2 - 10a^{-3} + 5a^{-4}$;

5. $(a-b)(a^{-4} + a^{-3}b^{-1} + a^{-2}b^{-2} + a^{-1}b^{-3} + b^{-4})$.

249. Calcolare:

1. $13^7 \cdot 13^{-4}$; $7^{-8} \cdot 7^3$; $12 \cdot 12^{-5}$;

2. $2a^{-2} \cdot 5a^{-3}$; $4b^6 \cdot 6b^{-5}$; $0{,}3c^5 \cdot 4c^{-2}$; $a^{x-3} \cdot 0{,}1a^{2-x}$;

3. $4^{-3} : 4^{-5}$; $8^{-6} : 8^{-9}$; $6^4 : 6^{-2}$; $5^{-3} : 5^{-2}$; $12a^{x+1} : 4a^{x-1}$; $35a^{x+3} : 7a^{3-x}$; $2a^{2x+2} : a^{x-1}$; $(3ab)^{-3} : (12bc)^{-3}$; $(10ax)^{-1} : (25x)^{-1}$;

4. $(3^{-2})^3$; $(3^2)^3$; $(3^2)^{-3}$; $(3^{-2})^{-3}$; $(\sqrt{25})^{-2}$; $\sqrt{25^{-2}}$; $\sqrt[3]{-25^{-3}}$.

250. Calcolare:

1. $49^{\frac{1}{2}}$; $1{,}44^{\frac{1}{2}}$; $64^{-\frac{1}{6}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $27^{-\frac{1}{3}}$; $25^{\frac{3}{2}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $512^{-\frac{2}{3}}$; $1{,}728^{-\frac{1}{3}}$;

2. $\left(\frac{169}{196}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{125}{1728}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{1331}{512}\right)^{-\frac{1}{8}}$.

251. Scrivere sotto forma di potenze le espressioni seguenti:

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$, $\sqrt[5]{5} : \sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}}$;

2. $\sqrt[7]{a^3}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$, $\sqrt{a^3}\,\sqrt[3]{b}$, $\dfrac{\sqrt{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

252. Calcolare e semplificare:

1. $81^{\frac{1}{2}}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$; $125^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{\frac{1}{6}}$; $0{,}0016^{\frac{1}{4}}\cdot 0{,}0016^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}$; $\sqrt{a}\cdot a^{\frac{1}{3}}$;
$\sqrt{a}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}$;

2. $3^{\frac{1}{2}}\cdot 6^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}$; $\left(\dfrac{6ab}{25cd}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{5ac}{3bd}\right)^{\frac{1}{2}}$;

3. $2^{\frac{1}{3}}:2^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{4}{5}}:a^{\frac{3}{4}}$; $a^{-\frac{1}{2}}:\sqrt{a^3}$; $a^{\frac{1}{2}}:\sqrt{a^3}$; $\sqrt{a^{-3}}:\sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{1}{4}}$;

4. $\sqrt[3]{125^2}$; $(64^2)^{\frac{1}{8}}$; $(144^3)^{-\frac{1}{2}}$; $\left(49^{\frac{5}{6}}\right)^3$; $\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}$; $\sqrt[3]{81^{\frac{3}{4}}}$; $(\sqrt{a^3})^4$;
$\left(\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^2\right)^6$ $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

253. Dimostrare che per

$$x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

si ha, qualunque sia il numero n,

$$x^y=y^x.$$

Capitolo VIII

254. Decomporre i seguenti logaritmi in espressioni, in cui compaiano i logaritmi più semplici possibili:

1. $\log_a(3bc)$; 2. $\log_a\left(\dfrac{4b}{5c}\right)$; 3. $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right)$;

4. $\log_a\left(\dfrac{ab}{c}\right)$; 5. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)^2$; 6. $\log_a\sqrt{bc}$;

7. $\log_a\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{cd}}$; 8. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{b}\right)$; 9. $\log_a\dfrac{b^2-c^2}{2c}$;

10. $\log_a\sqrt{b^2+c^2}$; 11. $\log_a\sqrt{b^2-c^2}$; 12. $\log_a\left(\dfrac{b^2\sqrt{c^3}}{d^3\sqrt[4]{e^3}}\right)$.

255. Ridurre ciascuna delle espressioni seguenti ad un unico logaritmo:

1. $\log_a b + 2\log_a c$; 2. $2\log_a b - 5\log_a c$; 3. $-\log_a b - \log_a c$;

4. $\log_a (b^2 - c^2) - \log_a (b + c)$; 5. $3\log_a b + 2\log_a c - \frac{1}{3}\log_a d$;

6. $\log_a (b^2 - bc + c^2) + \log_a (b^2 - c^2) - \log_a (b - c)$;

7. $\log_a b - \log_a c + \log_a (b + c) - 3\log_a \sqrt{bc} - \log_a \sqrt{\frac{b}{c}}$;

8. $2\log_a (b^2 - c^2) - \log_a \left(b^3\sqrt{c}\right) + \log b - 3\log\sqrt{c} - 2\log (b + c)$.

256. Sapendo che $\mathrm{Log}\, 2 = 0.3010$, calcolare: $\mathrm{Log}\, 200$, $\mathrm{Log}\, 2\,000\,000$, $\mathrm{Log}\, 0{,}002$, $\mathrm{Log}\, 0{,}5$, $\mathrm{Log}\, 5$, $\mathrm{Log}\, 0{,}64$, $\mathrm{Log}\, 1{,}28$, $\mathrm{Log}\, 6{,}25$.

257. Di quanti numeri interi occorre conoscere il Logaritmo per poter calcolare i Logaritmi di tutti i numeri interi da 1 a 50 inclusivo?

258. Dimostrare che $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. [Si parta dall'uguaglianza di definizione di $\log_a b$ e dei due membri si prendano i logaritmi in base b].

259. Se è $\mathrm{Log}\, a = b$, quali sono i valori di $\log_{100} a$, $\log_{1000} a$, ecc.?

260. Quante cifre ha ciascuno dei seguenti numeri: 9^9, $(9^9)^9$, 9^{99}, 9^{9^9}?

261. Risolvere, senza l'uso delle Tavole, le equazioni:

1. $\mathrm{Log}\,(20x + 12) + \mathrm{Log}\,(32x - 8) = \mathrm{Log}\, 15$;

2. $\mathrm{Log}\,(3x - 5) - \mathrm{Log}\,(6x + 1) = \mathrm{Log}\, 3$;

3. $4\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} + 3\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{3} = 5\,\mathrm{Log}\, x - \mathrm{Log}\, 27$;

4. $\mathrm{Log}\,\sqrt{7x - 2} - \mathrm{Log}\,\sqrt{3 - x} = 1 + \mathrm{Log}\, 3{,}2$;

5. $\mathrm{Log}\,(2x - 5) + \mathrm{Log}\,(3x + 1) = 1$;

6. $\mathrm{Log}\, x = \frac{1}{4}[3\,\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}\, b] - \frac{1}{6}\mathrm{Log}\,(3a + b)$;

7. $\log_c x = \dfrac{1}{\log_a c} + \dfrac{1}{\log_b c}$.

262. Trovare un numero x tale che il doppio del suo Logaritmo superi di 2 il logaritmo di $x - 9$.

263. Per quali valori di a l'equazione

$$x^2 - \sqrt{2}x + \mathrm{Log}\, a = 0$$

ammette due radici distinte?

264. Risolvere le seguenti equazioni (esponenziali):

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ [Risoluzione immediata]; 2. $5^x = 64$; 3. $7^x = 80^{x-1}$;

4. $2^x = 3^{x+5}$; 5. $6^{-2x} = 7^{3-x}$; 6. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$; 7. $4^{x+1} \cdot 7^{3x-2} = 8$;

8. $3^{2x-1} \cdot 4^{2x-1} = 1$; 9. $12^x \cdot 7^{4x-1} = 5^{3-x}$; 10. $\sqrt{6^{x+1}}\,\sqrt{3^{x-1}} = \sqrt{7}$;

11. $8^x + 8^{x+2} = 13^x$; 12. $2^{2x+1} + 4^{x+1} = 1$; 13. $7^x + 3 \cdot 7^x = 33$;

14. $8^x + 5 \cdot 8^{x-1} = 27$; 15. $3^x + 8 \cdot 3^{x-3} = 7 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{x+1}$;

16. $9^x + 5 \cdot 3^{2x} = 7 \cdot 3^{2x-1}$; 17. $13^{\frac{x+1}{x-1}} = 31^{\frac{x-1}{x+1}}$; 18. $4 \cdot 5^{x+2} = 5 \cdot 4^{\frac{2x+1}{x}}$;

19. $\dfrac{3 \cdot \sqrt[x]{10}}{50 + \sqrt[2x]{10}} = 5$; 20. $\dfrac{\sqrt[x]{12}}{60 + \sqrt[2x]{12}} = 2.$

265. Risolvere le equazioni:

1. $x^x = x$; 2. $x^x - x^{-x} = 3(x^{-x} - 1)$.

266. Quale valore ha x se è

$$e^x + e^{-x} = 5{,}2$$

dove $e = 2{,}7183$?

267. In un sistema di logaritmi, il logaritmo di 13,52 supera di 3 quello di 3,67. Qual'è la base? Quali sono i due logaritmi?

268. Risolvere le equazioni:

1. $\dfrac{\operatorname{Log}(5-x)}{\operatorname{Log}(35-x^3)} = \dfrac{1}{3}$; 2. $x^{\operatorname{Log} x} = 10$;

3. $x^{8+\operatorname{Log} x} = 10^9$; 4. $x^{\operatorname{Log} x} - 96 x^{\operatorname{Log}\sqrt{x}} = 400$.

269. Risolvere i sistemi:

1. $\begin{cases} y^x = 10^4, \\ y^{\frac{1}{x}} = 10; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy = 0{,}2, \\ x^{\operatorname{Log} y} = 0{,}5; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2^{x+y} = 4, \\ 2^{x+3} + 2^{y+3} = 40; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = 10^{2x-1}, \\ y^{2x} = 9y^x + 10; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29, \\ y^x = 9; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 12 y^{\frac{1}{x}} - y^{\frac{2}{x}} = 20, \\ y^x = 10^4; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = h, \\ \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y = k; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y = k. \end{cases}$

270. Ridurre in misure decimali 4572000 Yards (1 Yard = m. 0,9144), 3457 Miglia inglesi (1 Miglio inglese = m. 1609), 273300000 Tese (1 Tesa = m. 1,949), 27300 Miglia marine (1 Miglio marino = m. 1851,85), 49500 Miglia geografiche (1 Miglio geografico = m. 7420,44).

271. Qual'è lo spigolo di un cubo d'argento, che pesa 1 kg.? Peso specifico dell'argento 10,51.

272. Quanto costa una palla d'oro di 5 cm. di diametro se l'oro costa L. 11,25 al grammo? Peso specifico dell'oro 19,26.

273. La superficie del Regno d'Italia è, ora, di circa km. 310300, di di cui 260470 di terraferma e 49830 di isole. Se si rappresenta la terraferma con un quadrato di cm. 5 di lato, come si deve prendere il lato di un altro quadrato, perchè rappresenti la superficie insulare?

274. Rappresentata la superficie attuale del Regno d'Italia (comprese le colonie, la cui superficie è all'incirca di km.^{2} 2512500) con un cerchio di 5 cm. di diametro, dividere questo cerchio in tre settori che rappresentino rispettivamente la superficie della terraferma, la superficie insulare (cfr. Eserc. prec.), e le terre coloniali. Quali sono i rispettivi angoli al centro?

275. Presa come unità la distanza della Terra dal Sole, calcolare, le distanze degli altri pianeti dal Sole, sapendo che, in forza della terza legge di Keplero, i cubi di codeste distanze sono proporzionali ai quadrati delle rispettive durate delle rivoluzioni e che queste durate sono date, in giorni siderali, dai numeri seguenti: Mercurio 87,969; Venere 224,701; Terra 365,256; Marte 686,980; Giove 4332,588; Saturno 10759,201; Urano 30586,29; Nettuno 60188,71.

276. Preso come unità il diametro (medio) della Terra, il diametro del Sole è dato da 108,6 e quelli degli altri pianeti hanno i valori seguenti: Mercurio 0,373; Venere 0,999; Marte 0,528; Giove 11,06; Saturno 9,299; Urano 4,234; Nettuno 3,798. In quali rapporti stanno i volumi dei vari pianeti a quello del Sole?

Calcolo di una Tavola di Logaritmi a tre decimali (1). — **277.** Si calcolino, secondo la nota regola, con successive estrazioni di radici quadrate, e con tre cifre decimali,

$$\sqrt{10},\quad \sqrt[4]{10},\quad \sqrt[8]{10},\ldots$$

cioè

$$10^{\frac{1}{2}},\quad 10^{\frac{1}{4}},\quad 10^{\frac{1}{8}},\ldots$$

(1) R. Suppantschitsch: *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.* Wien, 1912.

Riducendo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ a forma decimale, con quattro cifre dopo la virgola, otteniamo la Tavoletta

Num.	Log.	Num.	Log.
10,000	1,0000	1,037	0,0156
3,162	0,5000	1,018	0,0078
1,778	0,2500	1,009	0,0039
1,334	0,1250	1,005	0,0020
1,155	0,0625	1,002	0,0010
1,075	0,0313	1,001	0,0005

Osserviamo che nella colonna dei numeri ciascun termine è il quadrato del successivo.

278. Preso un qualsiasi numero compreso fra 1 e 10 (e a tre decimali) p. es. 1,694, si considerino i due termini consecutivi che nella colonna dei numeri della Tavoletta prec. comprendono il numero dato. Nel nostro caso avremo

$$1{,}778 > 1{,}694 > 1{,}334.$$

Dimostrare che, dividendo il numero dato per il minore dei due numeri che sulla Tavola lo comprendono, si ottiene un quoziente minore di codesto divisore. [Si ricordi l'osservazione dell'eserc. prec.].

279. Ogni numero compreso tra 1 e 10 (e avente al più 3 cifre decimali) si può esprimere come prodotto di fattori appartenenti alla colonna dei numeri della Tavoletta dell'eserc. 278. Per es., fissato il numero 2,7 abbiamo successivamente

$$\begin{array}{lll}
3{,}162 > \phantom{1{,}}2{,}7 > 1{,}778 & \qquad & 2{,}7 : 1{,}778 = 1{,}519 \\
1{,}778 > 1{,}519 > 1{,}334 & & 1{,}519 : 1{,}334 = 1{,}139 \\
1{,}155 > 1{,}139 > 1{,}075 & & 1{,}139 : 1{,}075 = 1{,}060 \\
1{,}075 > 1{,}060 > 1{,}037 & & 1{,}060 : 1{,}037 = 1{,}022 \\
1{,}037 > 1{,}022 > 1{,}018 & & 1{,}022 : 1{,}018 = 1{,}004 \\
1{,}005 > 1{,}004 > 1{,}002 & & 1{,}004 : 1{,}002 = 1{,}002
\end{array}$$

e quindi

$$2{,}7 = 1{,}778 \cdot 1{,}334 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}018 \cdot 1{,}002 \cdot 1{,}002.$$

I fattori in cui così si decompone il numero dato sono decrescenti.

280. Come si calcola, in base agli eserc. 278, 279, il Logaritmo di ogni numero compreso tra 1 e 10, e avente, al più, tre cifre decimali? Si accorci il risultato a tre cifre decimali.

Capitolo IX

281. In un triangolo rettangolo i tre angoli sono in progressione aritmetica. Trovare questi angoli.

282. In un triangolo rettangolo di cm². 24 di area i tre lati sono in progressione aritmetica. Quali sono le lunghezze dei tre lati?

283. In un triangolo i lati sono in progressione aritmetica. Se ogni lato si aumenta di 50 o di 60 cm., il raggio del cerchio iscritto cresce, rispettivamente, di 17 cm. o di 20 cm. Calcolare le lunghezze dei tre lati. (Dal Suppantschitsch). [I tre lati si denotino con $2x-d$, $2x$, $2x+d$, e si esprima il raggio del cerchio iscritto, tenendo conto della formula di Erone: Eserc. 86].

284. Fra 42 e 102 si è inserito un numero pari di medie aritmetiche. La somma della prima metà dei termini della progressione così ottenuta sta alla somma dei termini rimanenti nel rapporto 3 : 5. Quante medie aritmetiche si sono inserite? [Si denoti questo numero incognito con $2x$].

285. Fra -7 e 49 si inserisce un tal numero di medie aritmetiche, che la somma di tutti i termini della progressione così ottenuta risulti uguale alla somma degli ultimi tre termini. Scrivere la progressione.

286. In una progressione aritmetica il 2° e il 7° termine hanno per somma 35, per prodotto 250. Trovare il primo termine e la differenza.

287. In una progressione aritmetica il 4° termine è 5 e il primo e l'ultimo termine hanno per somma 10, per prodotto -200. Scrivere la progressione.

288. In una progressione aritmetica di 8 termini la somma del 3° e del 6° è 87, il prodotto dei due centrali è 1862. Trovare il primo termine e la differenza. [Ricordare il n. 4 del Cap. IX].

289. In una progressione aritmetica di 4 termini la somma dei due medi è $2s$ e il prodotto dei 4 termini è h. Scrivere la progressione. Caso numerico: $s=6$, $h=945$. [Se si prende come incognita x la metà della differenza della progressione, i due termini medi sono $s-x$, $s+x$, ecc.].

290. Scrivere una progressione aritmetica, in cui la somma dei primi 6 termini è 75 e il prodotto del 6° termine per la somma dei primi 5 è 1100.

291. Scrivere una progressione aritmetica di differenza $\frac{3}{2}$, in cui la somma di tutti i termini è 10 e il prodotto del primo termine per il numero dei termini è -32.

292. In una progressione aritmetica il 2° e il 14° termine hanno per prodotto 544, il 7° e il 9° hanno per prodotto 1419. Trovare il 1° termine e la differenza.

293. In una progressione aritmetica di 10 termini il prodotto dei due termini centrali è 2805, quello del primo e dell'ultimo termine è 2485. Trovare il primo termine e la differenza.

294. Quattro numeri in progressione aritmetica hanno per prodotto h, mentre la somma dei quadrati dei due termini medi è $2k$. Trovare i 4 numeri. Caso numerico: $h = 384$, $k = 26$. [Si prendano come incognite la media aritmetica dei due termini di mezzo e la metà della differenza].

295. Quattro numeri in progressione aritmetica sono tali, che la somma dei quadrati degli estremi è $2h$, mentre la somma dei quadrati dei due medî è $2k$. Trovare i 4 numeri. Caso numerico: $h = 13$, $k = 5$. [Si adottino le stesse incognite dall'Eserc. prec.].

296. Si calcoli, col sussidio dei Logaritmi, il 5° termine della progressione geometrica di 23 termini che ha per primo termine 18 e per ultimo 77.

297. Un carrettiere deve portare della ghiaia su di una strada, versandone un carro ad ogni 5 metri. Sapendo che egli va a prendere la ghiaia dal greto di un torrente a 500 metri dal punto dove deve versare il primo mucchio, quale cammino complessivo avrà percorso, quando avrà portato la ghiaia su di un tratto di strada di 400 m. a partire dal primo mucchio?

298. Un giardiniere deve inaffiare 60 rosai, piantati lungo un sentiero rettilineo, alla distanza di 1 m. l'uno dall'altro. Egli prende l'acqua ad una fontana situata lungo lo stesso sentiero, a 15 m. di distanza dal primo rosaio, e ad ogni viaggio inaffia 3 rosai. Qual'è in metri il cammino totale, che egli deve compiere per inaffiare tutti i suoi rosai?

299. Calcolare la somma dei cubi, o delle quarte potenze ecc., dei primi n numeri naturali. [Per il caso dei cubi si proceda come al n. 6 del Cap. IX, partendo dall'identità

$$x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1.$$

Similmente per il caso delle potenze quarte o quinte, ecc.].

300. Qual'è la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una progressione geometrica infinita contenga come suo termine il prodotto di due suoi termini quali si vogliono?

301. Se a, b, c sono in progressione geometrica, sussiste l'identità:

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

302. Se a, b, c, d sono in progressione geometrica, sussistono le identità:

$$1.\ (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2;$$

$$2.\ (a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2.$$

303. Se a_1, a_2, a_3, a_4, ... è una progressione geometrica, tale è anche

$$\frac{1}{a_2^2-a_1^2}\quad\frac{1}{a_3^2-a_2^2}\quad\frac{1}{a_4^2-a_3^2}\cdots$$

304. Dato di una progressione geometrica il termine $(m+n)^{mo}$ e quello $(m-n)^{mo}$, trovare l'm^{mo} e l'n^{mo}.

305. Calcolare le somme seguenti:

$$1.\ 1+q+q^2+\ldots+q^n;$$

$$2.\ q+q^2+q^3+\ldots+q^n;$$

$$3.\ q^2+q^4+q^6+\ldots+q^{2n};$$

$$4.\ 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{2n}};$$

$$5.\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots+\frac{1}{q^n}:$$

$$6.\ \frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^6}+\ldots+\frac{1}{q^{2n}}.$$

306. In una qualsiasi progressione geometrica di n termini il prodotto di tutti i termini è uguale alla radice quadrata della potenza n^{ma} del prodotto del primo termine per l'ultimo.

307. Fra il prodotto P di n termini consecutivi di una progressione geometrica, la loro somma S e la somma S' dei loro reciproci passa la relazione:

$$S'^nP^2=S^n.$$

308. In una progressione geometrica di $2n$ termini la somma dei termini di posto dispari è h, quella dei termini di posto pari è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $n=4$, $h=-\frac{1261}{9}$, $k=\frac{2522}{27}$.

309. In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è h, quella del terzo e del quarto è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $h=8$, $k=\frac{200}{9}$.

310. In una progressione geometrica di $2n$ termini la somma dei primi n è h, quella dei rimanenti è k. Trovare il primo termine e la ragione. Caso numerico: $n=3$, $h=-9$, $k=72$.

311. La somma di tre numeri in progressione geometrica è h, mentre il prodotto del primo e del terzo è k. Trovare i tre numeri. Caso numerico: $h=\frac{95}{6}$, $k=25$. [Si prendano come incognite il termine medio e la ragione].

312. Un pendolo oscilla: nella prima mezza oscillazione descrive un angolo di 20° e ad ogni mezza oscillazione successiva l'ampiezza diminuisce del $5\,{}^0/_0$. Quanti gradi, quanti primi, quanti secondi descrive complessivamente il pendolo in 15 oscillazioni intere?

313. Una palla di gomma rimbalza, ogni volta che batte sul terreno, ad un'altezza uguale ai $\frac{2}{3}$ di quella da cui è caduta. Se la prima volta è caduta dall'altezza di 5 m., quale cammino complessivo ha percorso quando batte sul terreno per la decima volta?

314. Secondo un'antica favoletta indiana, Sissa-Nassir, inventore del giuoco degli scacchi, chiese ad un principe come prezzo della sua invenzione tanti chicchi di grano, quanti se ne ottengono contando 1 chicco pel primo quadrato della scacchiera, 2 pel secondo, 4 pel terzo e così via, cioè raddoppiando per ogni nuovo quadrato il numero dei chicchi ottenuto pel quadrato precedente. Computare in cifra tonda, col sussidio della tavola dei logaritmi, il numero dei chicchi che così si raggiunge e valutare, sempre per approssimazione, l'equivalente numero di ettolitri di grano, ammettendo che, in media, 1 $cm.^3$ contenga 16 chicchi.

315. Un'altra favoletta indiana. Nureddin, poverissimo cultore di calcoli matematici e cabalistici, al Mahrajah di Bassora, che, desiderando tenerlo presso di sè, gli chiedeva quale stipendio pretendesse, rispose che si sarebbe accontentato per il primo giorno di una moneta di piccolissimo valore, pari all'incirca ad 1 centesimo di Lira, purchè in ciascuno dei giorni successivi lo stipendio venisse raddoppiato, fino al compiersi del primo mese, e poi col mese nuovo si ricominciasse daccapo. Quale somma avrebbe dovuto corrispondere a Nureddin il Mahrajah alla fine del primo mese, supposto di 31 giorni? Si valuti il risultato in cifra tonda, ricorrendo ai Logaritmi.

316. Quando fra due numeri dati a e b si inseriscono due diversi numeri n ed n' di medie geometriche, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la m^{ma} delle prime medie coincida con la m'^{ma} delle seconde, è data da $mn'-m'n=m'-m$. Si giustifichi, in base a questo teorema, l'affermazione del n. 11 del Cap. IX (p. 252).

317. Se $|q|<1$ e si prefissa un numero positivo h, per quanto piccolo, si può sempre prendere un intero positivo n abbastanza grande, perchè la somma

$$1+q+q^2+\dots+q^{n-1} \qquad (*)$$

dei primi n termini della progressione geometrica 1, q, q^2, q^3,... differisca in valore assoluto da $\frac{1}{1-q}$ per meno di ε.

In altre parole, la somma (*), quando si faccia crescere infinitamente il numero n dei suoi addendi, si approssima indefinitamente al valore $\frac{1}{1-q}$ o, come si suol dire, *tende* a questo valore.

Ciò si esprime dicendo che *la somma degli infiniti termini della progressione geometrica, di ragione q, minore in valore assoluto di* 1,

$$1 \quad q \quad q^2 \quad q^3 \ldots$$

è uguale a $\frac{1}{1-q}$; e si scrive

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Similmente, qualunque sia a, e sotto la condizione $|q| < 1$,

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

318. Scrivere sotto forma di somma degli infiniti termini (positivi) di una progressione geometrica di ragione minore di 1 un qualsiasi decimale periodico, per es.:

$$0{,}\overline{36};\quad 0{,}\overline{17};\quad 3{,}\overline{45};\quad 17{,}\overline{27};\quad 0{,}7\overline{81};\quad 54{,}9\overline{18};$$

e, in base all'Eserc. prec., si dia la giustificazione delle regole per la determinazione delle frazioni ordinarie generatrici dei numeri decimali periodici. (Nota a piè delle pp. 60, 61).

319. In un angolo di 60°, preso su di un lato il punto che ha dal vertice una data distanza a, si abbassi da esso la perpendicolare sull'altro lato, poi dal piede di questa si abbassi la perpendicolare sul primo lato, e così si immagini di continuare indefinitamente. Qual'è la somma delle lunghezze delle infinite perpendicolari, che così si ottengono?

320. In un quadrato di dato lato a si iscriva il quadrato, che ha per vertici i punti medî dei lati del primo; nel secondo quadrato se ne iscriva nello stesso modo un terzo, e poi nel terzo un quarto, e così via. Calcolare la somma dei perimetri e quella delle aree degli infiniti quadrati così ottenuti.

321. Nel cerchio iscritto nel triangolo equilatero di dato lato a si iscriva un nuovo triangolo equilatero e si immagini ripetuta la costruzione. Calcolare la somma delle aree degli infiniti cerchi così ottenuti.

322. Nel cerchio iscritto nel quadrato di dato lato a si iscriva un nuovo quadrato e si immagini ripetuta indefinitamente la costruzione. Calcolare la somma dalle aree degli infiniti cerchi, così ottenuti.

323. In un semicerchio di dato raggio r si iscriva il cerchio massimo (cioè tangente al diametro base del semicerchio nel suo centro) e si ripeta la stessa costruzione in un semicerchio del nuovo cerchio, immaginando di continuare così indefinitamente. Calcolare la somma delle lunghezze delle infinite semicirconferenze e quella delle aree degli infiniti semicerchi, così ottenuti.

324. L'« Achille » di Zenone d'Elea. — Si deve a Zenone di Elea il seguente paradosso: Il piè-veloce Achille non potrà mai raggiungere una tartaruga, quando le conceda un qualsiasi vantaggio. Infatti suppongasi che il vantaggio sia di 100 unità lineari, per es. di 100 m., e che la velocità di Achille sia 10 volte quella della tartaruga. Quando Achille avrà percorso questi 100 m., la tartaruga ne avrà percorsi 10; quando Achille avrà percorso 10 m., la tartaruga avrà progredito di un altro metro, e così di seguito, talchè Achille, arrivando sempre al punto prima raggiunto dalla tartaruga, quando questa ne è già partita, potrà bensì avvicinarsi ad essa, ma non la raggiungerà mai.

Sembra che questo paradosso di Zenone facesse parte di una polemica antipitagorica, valendo come riduzione all'assurdo della concezione atomistica (o monadica) dello spazio (e del tempo) adottata dai Pitagorici. Poichè questi matematici assumevano un punto esteso (o monade) come parte elementare irriducibile delle linee, delle superficie, dei solidi, ogni somma di infiniti segmenti avrebbe dovuto risultare, in ogni caso, infinita, mentre, come si è visto (Eserc. 316), una somma di infiniti segmenti (i quali, con legge opportuna, vadano indefinitamente rimpicciolendo) può benissimo avere un valore finito.

Che Achille raggiunga effettivamente la tartaruga, come è confermato dalla comune esperienza, e dopo quanto cammino ciò accada, si trova, risolvendo un'equazione di 1° grado. Invero, se si indica con v la velocità di Achille e, quindi, con $\frac{1}{10}v$ quella della tartaruga, le equazioni dei moti uniformi di Achille e della tartaruga sono date, rispettivamente, da

$$s = vt, \qquad s = 100 + \frac{1}{10}vt,$$

onde l'istante t, in cui Achille raggiunge la tartaruga, è definito dall'equazione di 1° grado $vt = 100 + \frac{1}{10}vt$, e quindi è dato da $t = \frac{1000}{9v}$.

Il cammino percorso da Achille è conseguentemente uguale a $\frac{1000}{9}$ m.

Se, invece, si vuol ragionare secondo l'impostazione, che del problema dà Zenone, basta osservare che la somma degli infiniti tratti di strada, che Achille successivamente percorre, per raggiungere la tartaruga, è data da

$$100+\frac{100}{10}+\frac{100}{10^2}+\frac{100}{10^3}+\ldots,$$

ossia

$$100\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right),$$

o infine, in quanto fra parentesi compare la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{10}<1$ (Eserc. 316),

$$100\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1000}{9}.$$

La somma degli infiniti tratti percorsi corrispondentemente dalla tartaruga è

$$\frac{100}{10}+\frac{100}{10^2}+\frac{100}{10^3}+\ldots$$

e vale appunto $\frac{1000}{9}-100$].

325. Un altro problema curioso. Da due paesi, collegati da una strada rettilinea di 10 km. di lunghezza, partono simultaneamente, l'uno verso l'altro, due carri, trainati ciascuno da un cavallo, e procedono con la stessa velocità di 5 km./h. All'istante della partenza una mosca, che si era posata sulla fronte del primo cavallo, parte volando in linea retta, con la velocità di 15 km./h, e va a posarsi sulla fronte del secondo cavallo; poi riparte subito e torna, con la medesima velocità di prima, a posarsi sulla fronte del primo cavallo; e così di seguito, fino a quando i due cavalli si incontrano e la mosca resta schiacciata fra le loro fronti. Quanti km. ha percorso quella mosca?

Per rispondere non occorre nessun calcolo: i due cavalli s'incontrano a metà strada, cioè dopo un'ora di cammino, e la mosca, che ha sempre volato a 15 km/h., ha percorso precisamente 15 km.

Se, invece, si segue letteralmente l'impostazione suggerita dall'enunciato del problema, si ritrova il medesimo risultato come somma degli infiniti termini di una progressione geometrica (di ragione minore di 1). Calcoliamo, infatti, le lunghezze dei successivi voli della mosca. Nel primo volo la mosca, in quanto ha una velocità tripla di quella del cavallo, cui va incontro, dovrà percorrere i 3/4 della distanza iniziale di 10 km. Ma nell'istante, in cui la mosca si posa sulla fronte del secondo cavallo, la distanza del primo, che ha percorso anch'esso 1/4 della distanza iniziale, è ridotta a 1/2 di 10 km., e di questa nuova distanza la mosca, nel secondo volo, non deve percorrere che i 3/4; e così di seguito. La somma delle lunghezze degli infiniti voli è data da

$$\frac{3}{4}10+\frac{3}{4}\frac{1}{2}10+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 10+\ldots=\frac{15}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right),$$

ossia, in quanto fra parentesi compare la somma degli infiniti termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}<1$ (Eserc. 316),

$$\frac{15}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=15.$$

Tavola dei Logaritmi a quattro decimali *(seguito)*

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tavola dei Logaritmi a quattro decimali.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Tavola dei Logaritmi a quattro decimali *(seguito)*

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

INDICE

INTRODUZIONE

Richiami e complementi.

Cap. I. — Estrazione di radice quadrata e numeri reali.

Cap. II. — Calcolo dei radicali quadratici.

Cap. III. — Equazioni di secondo grado.

Cap. IV. — **Problemi di secondo grado.**

Cap. V. — **Tipi elementari di equazioni di grado superiore al secondo e di sistemi di grado superiore al primo.**

Cap. VI. — **Radici d'indice qualsiasi e calcolo dei radicali.**

Cap. VII. — **Potenze ad esponente reale qualsiasi.**

Cap. VIII. — **Equazioni esponenziali e logaritmi.**

Cap. IX. — **Progressioni.**

ESERCIZI