Enriques, Federigo

Intorno alle serie continue composte di involuzioni razionali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (VI) **XVII** (1933), pp. 109-111.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 22 gennaio 1933 (anno XI)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Intorno alle serie continue composte di involuzioni razionali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.* Nota [1] del Socio F. ENRIQUES.

Faccio seguito alla mia Nota del 4 dicembre p. p., portando un nuovo contributo alla teoria delle serie di gruppi di punti sopra una superficie.

1. Se, sopra una superficie algebrica f, una involuzione razionale (almeno ∞^2) di gruppi di punti (invadente tutta la superficie), è contenuta in una serie continua non razionale, composta di involuzioni razionali, si può riconoscere che *la serie delle involuzioni disequivalenti è identica alla serie dei sistemi di curve disequivalenti che appartiene ad f*; e perciò la sua *dimensione* è data dalla *irregolarità* della superficie: $p_g - p_a$.

La dimostrazione si fa associando ad ogni involuzione ∞^2 I_n, la curva jacobiana, ove si rilevi che dal sistema lineare completo che questa determina, staccando il sistema canonico, si ottiene il triplo di una rete, – legata invariantivamente alla I_n – per cui la I_n è serie caratteristica. Cosicchè, se in una serie continua di I_n, due di tali involuzioni hanno jacobiane equivalenti, anche le due I_n sono equivalenti (cioè contenute in una stessa serie razionale completa), mentre due I_n disequivalenti corrispondono ad jacobiane disequivalenti.

(1) Presentata nella seduta del 22 gennaio 1933.

Queste osservazioni d'intuizione immediata, esigono tuttavia di essere completate o precisate, rilevando come la curva jacobiana venga definita per riguardo ad una involuzione razionale ∞^2, I_n.

Se la I_n è serie caratteristica di una rete di curve C senza curve fondamentali, la jacobiana è semplicemente il luogo dei punti doppi per i gruppi della I_n. Ma, se invece l'anzidetta rete con cui si definisca I_n, possiede p. es. una curva fondamentale L, questa deve assumersi come parte della jacobiana C_j, affinchè si possa dire che veramente $|3C|$ si ottiene staccando il sistema canonico $|K|$ da $|C_j|$. E l'essenziale è questo: che la curva L viene definita rispetto alla involuzione I_n (indipendentemente dalla rete delle C) come curva per ciascun punto della quale i punti coniugati sono indeterminati, suscettibili di variare sulla curva stessa.

2. Il teorema che abbiamo stabilito porta, in particolare, questa conseguenza: che sopra una superficie regolare una serie continua di gruppi di punti, composta di involuzioni (∞^2 almenó) I_n, è sempre contenuta in una serie razionale completa di gruppi di n punti.

E quindi: *se per una superficie regolare f, esiste un numero intero positivo n, tale che un gruppo generico di n punti appartenga ad una involuzione razionale* (∞^2 almeno), *la superficie è razionale.*

Giacchè nell'ipotesi fatta tutti i gruppi di n punti formano una varietà razionale, sicchè la f stessa resulta razionale (Albanese e Severi).

L'esistenza di un analogo carattere n per una superficie irregolare, porta di conseguenza che essa appartenga alla famiglia delle rigate irrazionali.

Diamo un rapido cenno della dimostrazione.

Nell'ipotesi fatta, la serie totale dei gruppi di $m = n, 2n, 3n \cdots$ punti della f resulta costituita di ∞^d involuzioni razionali disequivalenti (d = irregolarità di f), e può quindi ottenersi intersecando la curve di un sistema lineare $|C|$ con quelle di un sistema continuo di curve $\{L\}$ composto di ∞^d sistemi lineari: sia la dimensione di $|C|$, sia quella di $\{L\}$, e perciò dei sistemi componenti $|L|$, può supporsi grande quanto si vuole, in funzione di n.

Ciò posto, se le curve generiche C di $|C|$ sono irreducibili, poichè $\{L\}$ sega su una C la totalità dei gruppi di m punti, si deduce che la C stessa è di genere d. Dunque la superficie f contiene un sistema lineare di curve del genere d, con dimensione alta quanto si vuole, e quindi un sistema lineare di genere d e dimensione $r > 3d + 6$: di conseguenza la superficie resulta riferibile ad una rigata di genere d (1).

Resta da approfondire il caso in cui $|C|$ sia riducibile e quindi composto colle curve di un fascio. Ma, se le componenti di tale fascio sono

(1) Cfr. Enriques, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* « Accad. delle Scienze di Torino », 1894.

di genere > 1, la curva composta con un numero sufficientemente alto di queste resulta di genere alto quanto si vuole, mentre un ragionamento analogo a quello fatto nell'ipotesi di $|C|$ irriducibile, vale a provare che essa deve avere il genere $\leq d$. Così, il solo caso che occorra approfondire è quello in cui le curve C siano composte colle curve ellittiche di un fascio (razionale o irrazionale), giacchè l'ipotesi che le dette componenti sieno di genere zero porta senz'altro alle rigate.

Siccome poi si può scambiare il sistema $|C|$ con un sistema $|L|$, si è condotti ad esaminare soltanto due casi:

1° che la superficie contenga un fascio ellittico di curve ellittiche ed un fascio razionale di curve parimente ellittiche;

2° che essa contenga due fasci ellittici di curve ellittiche.

Il primo caso conduce a superficie ellittiche di genere geometrico $p_g = 0$ e numerico $p_a = -1$. Ed il suo esame è subito esaurito. Infatti se una superficie di irregolarità 1 deve contenere una involuzione razionale di gruppi di n punti, cui appartenga un gruppo generico, questa involuzione dovrà avere la dimensione $2n - 1$, e quindi – fissando $n - 1$ punti – si deduce che lo $n - mo$ descrive una curva razionale: la superficie deve ridursi dunque ad una rigata ellittica.

Il secondo caso darebbe luogo ad una superficie iperellittica con $p_g = +1$ e $p_a = -1$. E si dimostra similmente impossibile. Infatti, nelle nostre ipotesi, codesta superficie dovrebbe contenere una serie ∞^2 di involuzioni razionali di coppie di punti I_2. Ma un noto teorema di De Franchis sopra i piani doppi irregolari, dice che una superficie iperellittica di rango 1 ($p_g = +1$, $p_a = -1$) non può contenere nemmeno una I_2 siffatta.