Enriques, Federigo

Sulle superficie ellittiche di genere zero

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (VI) **XIX** (1934), pp. 195-199.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 febbraio 1934 (anno XII)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle superficie ellittiche di genere zero.* Nota[1] del Socio F. ENRIQUES.

1. In un corso di lezioni tenute al Seminario Matematico dell'Università di Roma, ho esposto i principî della classificazione delle superficie algebriche e in ispecie di quelle di genere geometrico $p_g = 0$ e numerico $p_a = -1$, già studiate nella mia Memoria del Circolo Matematicodi Palermo del 1905.

Queste lezioni, che appariranno ordinate per cura del dott. Luigi Campedelli nei « Rendiconti » del Seminario anzidetto, mi hanno offerto l'occasione di rivedere l'intera teoria, e di svilupparla precisandone e completandone alcuni risultati. In particolare mi sono anche fermato sulle superficie con due fasci di curve ellittiche, cioè dotate di curva canonica virtuale d'ordine zero. Tali superficie s'incontrano nella teoria delle superficie iperellittiche, e sotto questo aspetto, tanto Bagnera e De Franchis come Enriques e Severi, hanno avuto occasione di completarne la classificazione assegnando i valori possibili del determinante, nelle loro memorie dedicate appunto alle superficie iperellittiche del 1907-1908. Tuttavia la classificazione di cui si tratta e la costruzione dei tipi corrispondenti, può darsi per via algebrico-geometrica, senza ricorrere a rappresentazioni parametriche trascendenti, come appunto viene indicato in questa Nota.

Ricordo (dalla mia Memoria sopra citata del Circolo di Palermo) che le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a < 0$, non riferibili a rigate, hanno il $p_a = -1$ e sono superfici ellittiche, dotate di

(1) Presentata nella seduta del 4 febbraio 1934.

un gruppo ellittico ∞' di trasformazioni in se stesse. Esse posseggono, in generale, un fascio ellittico di curve di genere $\pi \geqq 1$, ed un fascio lineare di curve ellittiche C, e si rappresentano sopra il cilindro cubico multiplo:

$$f(xy) = 0,$$

in maniera che ad ogni punto di questo risponde un numero finito n di punti, intersezioni di una C e di una K: a codesto numero n, per il significato che esso assume in riguardo alla rappresentazione parametrica della superficie mediante funzioni ellittiche di un parametro e algebriche d'un altro, conviene il nome di *determinante* della superfice stessa.

Aggiungasi che i gruppi di n punti G_n, intersezioni delle C e delle K formano una involuzione, I_n, generata da un gruppo finito Γ_n di trasformazioni in sè della superfice, gruppo contenuto nel gruppo ∞' delle trasformazioni di essa e perciò costituite di trasformazioni permutabili, cioè *ciclico* o *abeliano* (non ciclico): i primi esempi relativi a questo secondo caso sono stati incontrati da Bagnera e De Franchis nei loro studi sulle superficie iperellittiche; più tardi il Chisini ha indicato in maniera generale la costruzione algebrica delle superficie ellittiche del tipo abeliano, completando in questo punto la determinazione ch'io avevo dato per il caso ciclico (1).

2. Ciò premesso, consideriamo le superficie ellittiche con due fasci di curve ellittiche C e K e distinguiamo i casi in cui le curve ellittiche K sieno di *modulo generale* ovvero *armoniche* e *equianarmoniche*.

Le K *sieno di modulo generale.* Allora il gruppo Γ_n subordina su K un gruppo abeliano dello stesso ordine sopra ogni K, il quale deve contenere: una trasformazione di prima specie ciclica d'ordine $m = \frac{n}{2}$, generante un'involuzione ellittica γ^1_m e (almeno) una involuzione (o trasformazione di 2ª specie) generatrice di una g^1_2.

Ma, in base ad un'osservazione di Chisini, si può dire di più: che codesto gruppo deve essere di *base due*, cioè generato soltanto da due trasformazioni indipendenti, poichè a tale condizione deve soddisfare il gruppo Γ_n per riguardo alle curve ellittiche C su cui esso subordina un gruppo di trasformazioni di prima specie (2).

Pertanto i soli gruppi abeliani soddisfacenti a tali condizioni sopra la K, sono: il gruppo Γ_2 generato da una g'_2 (che ci porta alla F di determinante due), e il gruppo diedrico Γ_4 generato da due g'_2 permutabili.

Dunque *vi sono soltanto due tipi di superficie ellittiche di moduli generali con curva canonica virtuale d'ordine zero:* superficie di *determinante due* e di *determinante quattro.*

(1) O. Chisini, *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto.* « Rendic. Lincei », sett.–ott. 1921.

(2) Cfr. Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, vol. III.

Le prime (del tipo ciclico) si lasciano rappresentare mediante le equazioni:

$$(1a) \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-d)(z-e)\psi(xy)} \quad , \quad f(xy) = 0,$$

dove f designa un cilindro cubico, e $\psi = 0$ un altro cilindro d'ordine pari $2m$ (p. es. quadrico) che tocchi f in $3m$ generatrici.

Le superficie del secondo tipo (abeliano = diedrico), di determinante $n = 4$, potranno rappresentarsi colle equazioni

$$(1b) \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b)\psi_1(xy)} + \sqrt{(z-d)(z-e)\psi_2(xy)} \quad , \quad f(xy) = 0,$$

designando ψ_1 e ψ_2 due cilindri d'ordine pari, p. es. quadrici, toccanti f ciascuno secondo $3m$ o 3 generatrici (che costituiscano gruppi non equivalenti).

3. *Tipo armonico.* Se le curve K sono armoniche, il gruppo abeliano della F, subordina sopra di esse un gruppo di base due. E, all'infuori del caso già trovato nell'ipotesi del modulo generale, codesto gruppo deve contenere una trasformazione singolare del 4° ordine.

Poichè inoltre il gruppo deve essere di base due, si hanno soltanto due casi possibili:

1) gruppo ciclico del 4° ordine generato da una trasformazione singolare del 4° ordine (il cui quadrato è un'involuzione);

2) e gruppo d'ordine 8, generato da due trasformazioni singolari del 4° ordine, aventi lo stesso quadrato, cioè tali che i punti uniti quadrupli dell'una sieno uniti doppi per l'altra: questo gruppo si ottiene anche moltiplicando il gruppo generato da una trasformazione singolare del 4° ordine per la g'_2 in cui sono coniugate le due coppie di punti uniti, risp. quadrupli e doppi, ovvero per la trasformazione di prima specie involutaria γ'_2 determinata dalle stesse coppie.

In corrispondenza ai due casi indicati si hanno *due nuove famiglie di superficie ellittiche tipo armonico con $p_g = 0$ e curva canonica virtuale d'ordine zero: una di determinante $n = 4$ e l'altra di determinante $n = 8$.*

Le superficie della prima famiglia sono del tipo ciclico e si lasciano rappresentare colle equazioni:

$$(2a) \qquad u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)(z-d)^2\psi(xy)} \quad , \quad f(xy) = 0,$$

designando ψ un cilindro del 4° ordine che tocchi f con contatto quadripunto, secondo tre generatrici.

Le superficie F della seconda famiglia, del tipo abeliano, si possono rappresentare, secondo Chisini, colle equazioni

$$(2b) \qquad u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)^3\psi_1(xy)} + \sqrt[4]{(z-b)(z-c)\psi_2(xy)} \quad , \quad f(xy),$$

designando ψ_1 e ψ_2 due cilindri, p. es. del 4° ordine, che tocchino f, il primo lungo 3 generatrici di contatto quadripunto e il secondo lungo 6 generatrici di contatto semplice.

La formula di Chisini rispecchia la circostanza che il gruppo abeliano Γ_8 della F è generato da una trasformazione ciclica del 4° ordine e da un'altro del 2° ordine.

4. *Tipo equianarmonico.* Se le K sono curve equianarmoniche, all'infuori del caso pertinente all'ipotesi del modulo generale, può accadere che il gruppo abeliano della superficie F subordini su K un gruppo contenente una trasformazione singolare ciclica del 3° ovvero del 6° ordine. Pertanto sono anzitutto possibili due casi ciclici, ove il determinante n vale

$$n = 3 \qquad \text{o} \qquad n = 6.$$

In ciascuno di questi casi la F viene rappresentata sopra il cilindro multiplo $f(xy) = 0$, con tre curve di diramazione: $z = a$, $z = b$, $z = d$.

Più precisamente, nel primo caso le tre curve corrisponderanno ai punti tripli delle γ'_3 appartenenti alle K e la superficie F potrà rappresentarsi colle equazioni

$$(3a) \qquad u = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-d)\psi(xy)} \quad , \quad f(xy) = 0$$

dove f designa un cilindro cubico e ψ un altro cilindro dello stesso ordine che osculi f secondo tre generatrici.

Invece nel secondo caso, una fra le curve di diramazione, per esempio $z = a$, corrisponderà ai punti sestupli delle g^1_6 appartenenti alle curve K, la seconda $z = b$ alle coppie di punti tripli di queste g^1_6, e la terza $z = d$, corrisponderà alle terne di punti doppi delle medesime g^1_6 cicliche. La superficie potrà quindi rappresentarsi colle equazioni

$$(3b) \qquad u = \sqrt[6]{(z-a)(z-b)^2(z-d)^3\psi(xy)} \quad , \quad f(xy) = 0,$$

dove ψ designa un cilindro, p. es. del 6° ordine, che tocchi f secondo tre generatrici contate ciascuna 6 volte.

Resta da esaminare il caso in cui il gruppo Γ_n e quindi anche il gruppo subordinato sopra le K, sia abeliano, non ciclico. Ora si vede anzitutto che un gruppo ciclico Γ_6 sopra una curva ellittica non può essere contenuto in un gruppo abeliano più ampio.

Invece il gruppo Γ_3 si lascia ampliare in un Γ_9 abeliano, quale viene formato dalle proiettività cicliche del terz'ordine che trasformano in sè la cubica:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

avendo come rette unite i lati del triangolo hessiano

$$xyz = 0.$$

Dunque, *nel caso equianarmonico ci saranno, oltre le due famiglie di superficie ellittiche con curva canonica virtuale d'ordine zero di determinante 3 e 6 (tipo ciclico), anche una famiglia di superfice di determinante 9.* Come equazioni di una superfice F di questa famiglia potremo dare, secondo Chisini:

$$(3c) \quad u = \sqrt[3]{(z-a)(z-d)\psi_1} + \sqrt[3]{(z-b)(z-d)\psi_2} \quad , \quad f(xy) = 0,$$

dove ψ_1 e ψ_2 designano due cilindri, p. es. cubici, osculanti f ciascuno secondo due terne di generatrici, non equivalenti.

Riassumendo:

Le superficie ellittiche di generi $p_g = 0$, e $p_a = -1$, con curva canonica virtuale d'ordine zero, si distribuiscono in 7 famiglie rappresentabili colle equazioni (1) a e b, (2) a e b, (3) a, b, c.