Enriques, Federigo

Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero

Rend. Sem. Mat. Univ. Roma (1934). (lezioni raccolte da L. Campedelli)

FEDERIGO ENRIQUES

Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero

Lezioni raccolte dal dott. LUIGI CAMPEDELLI

Estratto dai *Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma*

ROMA
TIPOGRAFIA DEL SENATO
DEL DOTT. G. BARDI
1934-XII

PREFAZIONE

In un corso di conferenze tenuto al Seminario della R. Università di Roma, facendo seguito al corso del 1931–32, ho trattato dei problemi inerenti alla classificazione delle superficie di genere zero, *sistemando e in più punti anche completando e spingendo avanti questa teoria, che risale a lavori di trent'anni or sono. L'esposizione che qui ne vien fatta, permetterà al lettore di riconoscere gli apporti nuovi, in confronto dell'antica costruzione.*

Il dott. Luigi Campedelli *che già raccolse e ordinò il mio corso del 1931–32, pubblicato nelle litografie della Casa «Cedam» di Padova, ha curato ugualmente la redazione del nuovo corso, contribuendo anche con ricerche sue proprie a stabilire rigorosamente qualche lemma di cui occorre l'uso, come apparirà dalle citazioni del testo.*

La teoria delle superficie di genere zero, che viene a lumeggiare sotto nuovi aspetti le questioni fondamentali, si presenta ora al pubblico degli studiosi, facendo seguito alle citate litografie della «Cedam», e quindi come seconda parte di un trattato generale delle superficie; e sarà a sua volta base e preparazione per lo studio ulteriore dei problemi classificatorii, cui si accenna soltanto nell'ultimo paragrafo di questa monografia.

Esprimiamo la speranza che il nostro lavoro di rielaborazione e di messa a punto di uno dei più bei capitoli della geometria algebrica, valga ad attrarre un maggior numero di giovani ricercatori in questo campo di studi, e a dar loro una giusta prospettiva dei valori, educando il senso dei problemi concreti che si collegano alle domande veramente *essenziali della scienza. Per tale scopo ci siamo spesso indugiati sopra argomenti collaterali che s'incontrano nello sviluppo della nostra trattazione, segnalando al lettore questioni ancora aperte che attendono una risposta, e spiegando talora metodi o considerazioni che possono trovare un uso più largo fuori del campo limitato che forma l'argomento proprio di queste Lezioni.*

Luglio, 1934–XII.

FEDERIGO ENRIQUES

FEDERIGO ENRIQUES

Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero.

(Lezioni raccolte dal dott. LUIGI CAMPEDELLI)

CAPITOLO I.

Invarianti numerici e piani multipli.

§ 1. - L'INVARIANTE I DI ZEUTHEN-SEGRE.

1. È noto sotto il nome di *invariante di Zeuthen-Segre* un invariante relativo di una superficie F [dipendente dalle curve eccezionali (¹)], che è stato scoperto da ZEUTHEN (²) e che SEGRE (³) ha riconosciuto come carattere intrinseco della superficie, definito a partire da un qualsiasi fascio di curve, e indipendente da questo. Esso si ottiene nel modo che segue.

Sopra la F si consideri un fascio lineare di curve irriducibili, di genere $\pi > 0$, avente n punti base effettivi (semplici o multipli) che supporremo distinti, e si designi con δ il numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio (fuori dei punti base).

(¹) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte dal dott. L. CAMPEDELLI (Padova, 1932-X, Casa editrice «Cedam»), § 25. Questa opera sarà in seguito richiamata semplicemente con *Lezioni*.

(²) H. G. ZEUTHEN, *Etudes géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-a-un* («Mathem. Annalen», IV, 1871).

(³) C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* («Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino», vol. 31, 1895). Cfr. anche: G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* («Annali di Mat.», serie III, tomo VI, 1901).

L'espressione

$$I = \delta - n - 4\pi$$

non dipende dalla scelta arbitraria del fascio, e costituisce perciò un invariante (relativo) della superficie.

Esponiamo brevemente la dimostrazione di SEGRE.

Siano $|C|$ e $|C_1|$ due fasci lineari dati sulla nostra superficie. Indichiamo con π e π_1 il genere di C e C_1 rispettivamente; con n ed n_1 i numeri dei punti base dei due fasci, e sia s il numero delle intersezioni di una C generica con una C_1 pure generica.

Consideriamo la curva T luogo dei punti di contatto di una C con una C_1, e si ricerchi in quanti punti la T è segata da una C e da una C_1, fuori dei punti base dei due fasci (per i quali la T passa semplicemente). I punti comuni alla T e a una C sono i punti doppi della serie g_s^1 segata sulla C dal fascio $|C_1|$; quindi il loro numero è:

$$m = 2s + 2\pi - 2 \cdot$$

Analogamente si ha che la T è segata da una C_1 in

$$m_1 = 2s + 2\pi_1 - 2$$

punti. Al variare della C e della C_1 nei relativi fasci, questi due gruppi di punti descrivono sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine m ed m_1, rispettivamente, la prima delle quali – detto P il genere di T – avrà

$$2m + 2P - 2$$

punti doppi, e la seconda ne avrà invece

$$2m_1 + 2P - 2 \cdot$$

Ora si osservi che un punto doppio della serie segata da $|C|$ su T, nasce necessariamente da uno dei casi seguenti:

a) punto doppio di una C di $|C|$. I punti doppi di una C appartengono sempre alla T: infatti la C_1 che passa per un punto doppio O di una C, ha in O un incontro bipunto con la C, e nel gruppo segato su una tale C da T, il punto O conta per due. Invero la detta C è di genere $\pi - 1$, quindi la g_s^1 segata su tale C da $|C_1|$ ha soltanto $2s + 2\pi - 4$ punti doppi (fuori di O che invariantivamente non è doppio per la g_s^1), cioè due di meno del caso generale: vuol dire che appunto questi sono stati assorbiti da O. Ciò è conforme al risultato generale espresso dal fatto che le tangenti che si possono condurre da un punto ad una curva, diminuiscono di due quando questa, variando con continuità, acquista un punto doppio;

b) contatto tripunto di una C con una C_1;

c) punto base del fascio $|C_1|$.

Ne segue che se indichiamo con δ il numero delle curve di $|C|$ dotate di un punto doppio e con τ il numero delle coppie di curve C, C_1 che hanno un contatto tripunto, si ha la relazione:

[1] $$2m + 2P - 2 = \delta + \tau + n_1 .$$

Analogamente è:

[2] $$2m_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n,$$

essendo δ_1 il numero delle curve di $|C_1|$ che possiedono un punto doppio.

Dalle [1] e [2] si ha rispettivamente:

$$2P - 2 - \tau = \delta + n_1 - 2m,$$

$$2P - 2 - \tau = \delta_1 + n - 2m_1;$$

eguagliando, e sostituendo per m ed m_1 i valori sopra trovati, si ottiene:

$$\delta - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1 ,$$

eguaglianza che dimostra appunto il carattere invariantivo della espressione

$$I = \delta - n - 4\pi$$

per i fasci tracciati sulla nostra superficie F.

2. *Nota*. – Per poter calcolare effettivamente il carattere I a partire da un qualunque fascio lineare dato su F, occorre stabilire alcune opportune convenzioni relative al valore da attribuire a δ quando nel fascio considerato si abbiano delle curve dotate di punti multipli d'ordine maggiore di due, oppure quando il fascio stesso abbia dei punti base infinitamente vicini, od infine quando esistano

nel fascio delle curve che possiedano componenti multiple. Qui però non ci dilungheremo sopra una tale questione di cui non abbiamo bisogno per il seguito (¹). Soltanto, a titolo d'informazione, diremo che se tra le curve del fascio se ne trova una costituita da una curva C_0 (di genere ρ) contata due volte (oltre ad una eventuale curva residua che abbia i intersezioni con C_0) la $2C_0$ conta nel computo delle C dotate di punto doppio, come $2\rho - 2 + 2i$ unità. E si dimostra che tale numero è sempre positivo o nullo non potendo essere simultaneamente $\rho = 0$ e $i = 0$. Ne segue che *in ogni caso è* $\delta \geq 0$.

3. Abbiamo introdotto l'invariante relativo I e ne abbiamo determinato il valore mediante i caratteri δ, n e π di un fascio razionale di curve. Ora ci domandiamo: è possibile calcolare I a partire da un *fascio irrazionale?*

La risposta è affermativa (²). Precisamente: considerato un fascio irrazionale (Γ), se Δ è il numero delle sue curve dotate di un punto doppio, ρ il genere della sua curva generica e ω il genere di (Γ) quando si considerino le sue curve come elementi, si ha:

$$I = \Delta + 4(\rho - 1)(\omega - 1) - 4\,.$$

Per dimostrarlo consideriamo insieme al fascio (Γ), un fascio lineare $|C|$, di cui indichiamo ancora con δ, n e π, rispettivamente, il numero delle curve dotate di un punto doppio, il numero dei punti base e il genere.

La dimostrazione procede parallelamente a quella sopra svolta per il caso di due fasci lineari, salvo le poche necessarie modificazioni. La ripetiamo in breve.

Sia T la curva luogo dei punti di contatto delle C con le Γ. I punti comuni alla T e alla Γ generica, sono i punti doppi della serie g^1_s segata su Γ dal fascio $|C|$: il loro numero è

$$m = 2s + 2\rho - 2\,.$$

Determiniamo i punti comuni a T e a C. Essi sono i punti doppi della serie segata su C da (Γ): però ora tale serie non è più lineare

(¹) Vedi la citata memoria di CASTELNUOVO e ENRIQUES.

(²) Cfr. CASTELNUOVO–ENRIQUES, loc. sopra cit.

essendo invece una involuzione γ_s^1. Il numero m_1 dei suoi punti doppi si calcola con la nota formula di ZEUTHEN (1):

$$m_1 = 2\pi - 2 - s\,(2\omega - 2)\,.$$

Gli m punti comuni a T e a Γ, al variare di Γ in (Γ) descrivono una involuzione γ_m^1 i cui punti doppi (detto P il genere di T) sono in numero di:

$$2P - 2 - m\,(2\omega - 2)$$

e questo numero è uguale alla somma

$$\Delta + \tau$$

del numero delle curve di (Γ) dotate di un punto doppio, e di quello delle coppie di curve C e Γ che hanno un contatto tripunto. [Si osservi che il fascio (Γ) non ha punti base sopra la F, supposta priva di singolarità (2)]. Dunque:

$$[1^*] \qquad 2P - 2 + m\,(2\omega - 2) = \Delta + \tau\,.$$

Invece il gruppo degli m_1 punti comuni a C e a T, al variare di C in $|C|$, genera su T una serie lineare $g^1_{m_1}$ i cui punti doppi sono in numero di

$$[2^*] \qquad 2P - 2 + 2m_1 = \delta + \tau + n\,.$$

Dalle [1*] e [2*] segue la relazione richiesta:

$$\Delta + 4\,(\rho - 1)\,(\omega - 1) - 4 = \delta + n - 4\pi = I\,.$$

4. *Nota*. – La dimostrazione dell'uguaglianza:

$$I = \Delta + 4\,(\rho - 1)\,(\omega - 1) - 4$$

può farsi anche in altro modo, che però non possiamo sviluppare completamente, avendo omesso le premesse necessarie.

(1) Cfr., p. es., F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, libro V, cap. I, § 9 (vol. III, pag. 73) (Bologna, Zanichelli). Quest'opera s'indicherà nel seguito semplicemente con ENRIQUES-CHISINI.

(2) Cfr. *Lezioni*, § 8 e § 2.

Entro il fascio irrazionale (Γ) prendiamo una serie lineare g_h^1 di gruppi di h curve di (Γ). La curva C composta con le h curve Γ che fanno parte di uno stesso gruppo della g_h^1, varia in un fascio lineare $|C|$ quando il corrispondente gruppo di curve Γ descrive la g_h^1. Il genere di C è (poichè due Γ non hanno intersezioni):

$$\pi = h(\rho - 1) + 1 \cdot$$

Detto δ il numero delle curve C dotate di un punto doppio, si ha per la formula già dimostrata (che subito si estende ai fasci riducibili):

$$I = \delta - 4h(\rho - 1) - 4$$

(il fascio $|C|$ essendo privo di punti base).

Ora quando è che una C di $|C|$ ha un punto doppio ? Evidentemente nei casi seguenti:

a) quando ha un punto doppio una componente Γ di C, e ciò accade Δ volte;

b) quando due componenti Γ di una stessa C coincidono. Abbiamo già detto che una componente doppia di una curva del fascio (senza intersezioni con le parti residue) conta come $2\rho - 2$ curve dotate di un punto doppio. Inoltre si osservi che le curve di $|C|$ dotate di una componente doppia sono tante quanti i punti doppi di una g_h^1 sopra una curva di genere ω, cioè $2\omega - 2 + 2h$.

Ne segue:

$$I = \Delta + (2\rho - 2)(2\omega - 2 + 2h) - 4h(\rho - 1) - 4 =$$

$$= \Delta + 4(\rho - 1)(\omega - 1) - 4.$$

5. L'espressione I di ZEUTHEN–SEGRE è un *invariante relativo* della superficie F, dipendendo dal numero dei punti base del fascio $|C|$ in rapporto a cui viene calcolato. Precisiamo ora come varia I quando la F [che possiamo supporre priva di singolarità (¹)] si trasforma birazionalmente in una superficie F^*, per modo che un punto (semplice) O di F si cambi in una curva (eccezionale) ω^* di F^*.

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 2.

Si consideri un fascio lineare $|C|$ di F, e sia $|C^*|$ il fascio lineare che gli corrisponde su F^*. Si ha, con notazioni evidenti:

$$I = \delta - n - 4\,,$$
$$I^* = \delta^* - n^* - 4\,.$$

Se O è un punto base di $|C|$, il fascio $|C^*|$ possiede $n^* = n - 1$ punti base (1), mentre è $\delta^* = \delta$ e $\pi^* = \pi$: quindi

$$I^* = I + 1\,.$$

Supponiamo invece che O non sia un punto base per $|C|$: allora è $n^* = n$ e $\pi^* = \pi$. Ma $\delta^* = \delta + 1$: infatti alla curva di $|C|$ passante per O, corrisponde su F^* una curva spezzata in due parti (una delle quali è la ω^*) che hanno un punto in comune.

Si ha quindi ancora:

$$I^* = I + 1\,.$$

Cioè: *l'invariante di* ZEUTHEN–SEGRE *aumenta o diminuisce di un'unità tutte le volte che la superficie acquista o perde, mediante trasformazioni birazionali, una curva eccezionale.*

§ 2. – ESPRESSIONE DI I PER MEZZO DEI GENERI ED ALTRE RELAZIONI NUMERATIVE.

1\. Al termine del paragrafo precedente si è visto come varia l'invariante I quando la superficie subisce una trasformazione birazionale: ebbene noi abbiamo già incontrato un altro invariante relativo che ha invece il comportamento contrario, cioè che diminuisce od aumenta di un'unità quando la superficie acquista o perde una curva eccezionale. Esso è il *genere lineare relativo* $\overline{p}^{(1)}$ (2), ossia il genere del sistema $|C_j - 3C|$ [sistema canonico impuro (3)], che è legato al *genere lineare* propriamente detto, dalla relazione:

$$\overline{p}^{(1)} = p^{(1)} - \sigma\,,$$

essendo σ il numero delle curve eccezionali della superficie (4).

(1) Cfr. *Lezioni*, § 12.
(2) Cfr. *Lezioni*, § 25.
(3) Cfr. *Lezioni*, § 33.
(4) Cfr. *Lezioni*, § 25.

Ne segue che *la somma*

$$I + \overline{p}^{(1)}$$

è un invariante assoluto.

Ma non è un nuovo invariante assoluto della superficie, riducendosi in sostanza al genere numerico. Invero NOETHER (¹) ha dimostrato che:

$$I + \overline{p}^{(1)} = 12\, p_a + 9$$

dove p_a rappresenta appunto il *genere numerico* della superficie.

Sviluppiamo la dimostrazione nel modo esposto da T. BONNESEN (²).

Sopra la superficie F, priva di singolarità, consideriamo un sistema lineare, semplice e triplamente infinito, $|C|$ di curve C; sistema che per semplicità supporremo privo di punti base. Si designino con n e π il grado e il genere di $|C|$, rispettivamente. Entro il sistema $|C|$ prendiamo un fascio $|C|_1$ di curve C: vogliamo calcolare l'invariante I per mezzo di tale fascio. Poichè il genere ed il numero dei punti base del fascio $|C|_1$ sono dati da π e da n, rimane da calcolare il numero δ delle curve del fascio dotate di un punto doppio.

Per questo prendiamo, entro $|C|$, due reti che abbiano in comune il fascio $|C|_1$: le loro jacobiane s'intersecano in un certo gruppo di punti che è costituito:

a) dai punti doppi per una curva di $|C|_1$ (comune alle due reti), che sono in numero di δ;

b) dai punti Q – il cui numero indicheremo con τ – che sono doppi per una curva della prima rete e per una della seconda rete, diverse fra loro.

Questi τ punti sono *punti doppi per un fascio di curve del sistema* ∞^3 $|C|$, e quindi comuni alle jacobiane di tutte le reti estratte da $|C|$ (ogni siffatta rete avendo una curva in comune col predetto fascio).

(¹) Cfr. M. NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...* («Mathem. Annalen», VIII, 1874, pag. 526).

(²) Cfr. T. BONNESEN, *Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique* («Bull. de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark», 1906, n. 4).

Dunque, per quanto precede, le jacobiane di due reti appartenenti a $|C|$ hanno $\delta + \tau$ intersezioni, cioè il sistema $|C_j|$, jacobiano di $|C|$, è di grado $\delta + \tau$. Ma se

$$|K| = |C_j - 3C|$$

è il sistema canonico (impuro) di F, risulta:

$$|C_j| = |3C + K|,$$

e quindi per il grado $\delta + \tau$ di $|C_j|$ si ha:

[1] $$\delta + \tau = 3n + 12(\pi - 1) + \bar{p}^{(1)} - 1 \,.$$

Il calcolo di δ si riconduce così a quello di τ. Per questo conviene mostrare un'altra proprietà dei τ punti Q dianzi introdotti come comuni alle jacobiane di tutte le reti estratte da $|C|$. Sopra la superficie F esistono ∞^1 *coppie neutre* rispetto al sistema triplamente infinito $|C|$, cioè ∞^1 coppie di punti che offrono una sola condizione alle C di $|C|$, per modo che per ciascuna di esse passano ∞^2 curve di $|C|$. La curva luogo di tali coppie neutre s'indicherà con C_d, mentre designeremo con γ_2^1 l'involuzione da esse costituita. Se la F si trasforma nella superficie F^* dello spazio ordinario, su cui $|C|$ è dato dalle sezioni piane (¹), alla C_d corrisponde la curva doppia D di F^*, che risulta in corrispondenza [1, 2] con la C_d. In ogni punto della curva doppia D (che è *nodale*) si hanno due piani tangenti distinti, a ciascuno dei quali corrisponde un punto di C_d. Ma vi sono i *punti cuspidali* (²) della curva D a cui corrispondono su C_d altrettante coppie neutre costituite da due punti coincidenti, cioè i punti doppi dell'involuzione γ_2^1 delle coppie neutre. Diciamo che questi punti doppi della γ_2^1 su C_d sono i τ punti Q comuni alle jacobiane di tutte le reti estratte da $|C|$. Infatti se Q è un punto doppio della γ_2^1 su C_d, esistono ∞^2 curve C tangenti in Q alla C_d, e quindi si ha un fascio di curve C che hanno in Q un punto doppio. Viceversa: se si ha un fascio di curve C aventi in Q un punto doppio, questo fascio insieme ad un'altra curva di $|C|$ (passante semplicemente per Q) individua ∞^2 curve C che si toccano in Q, perciò cadono in Q due punti infinitamente vicini costituenti una coppia neutra per $|C|$, e a Q risponde un punto cuspidale di D.

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 10.
(²) Cfr. *Lezioni*, § 2.

Ora se indichiamo con ρ il genere di D e con π_d il genere di C_d dalla formula di ZEUTHEN si ha:

$$[2] \qquad 2(\pi_d - 1) = 4(\rho - 1) + \tau\,.$$

Determiniamo il genere di C_d. Poichè sopra la F^* (che è d'ordine n) il sistema canonico $|K|$ è segato dalle aggiunte d'ordine $n-4$ (fuori di D), si ha:

$$|K| = |(n-4)\,C - 2D|\,,$$

da cui:

$$|2D| = |C_d| = |(n-4)\,C - K|\,,$$

quindi l'aggiunto a $|C_d|$ sarà:

$$|C'_d| = |C_d + K| = |(n-4)\,C|\,.$$

Intersechiamo allora la C_d con una C'_d: si ottiene su C_d un gruppo della serie canonica, cioè un gruppo di $2\overline{\pi}_d - 2$ punti, indicando con $\overline{\pi}_d$ il genere virtuale di C_d, come curva del sistema $|C_d|$. (Vedremo tra breve che per il genere effettivo π_d di C_d si ha $\pi_d < \overline{\pi}_d$, essendo la curva delle coppie neutre una curva particolare di

$$|C_d| = |(n-4)\,C - K|)\,.$$

In quanto a C e C_d esse s'intersecano in

$$(n-1)(n-2) - 2\pi$$

punti, cioè nel numero doppio di quello delle intersezioni della D con una sezione piana di F^*, che, essendo una curva di genere π, ha appunto

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi$$

punti doppi. Si ha così l'uguaglianza:

$$2\overline{\pi}_d - 2 = (n-4)\,[(n-1)(n-2) - 2\pi],$$

da cui:

$$\overline{\pi}_d - 1 = (n-4)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right].$$

Ma la curva D ha un certo numero t di punti tripli, ciascuno dei quali dà luogo sulla F ad una terna neutra per $|C|$, che è costituita da tre punti doppi della C_d (tale terna essendo limite, su C_d, di tre coppie neutre). Ne segue che il genere effettivo π_d della C_d, è:

$$\pi_d = \overline{\pi}_d - 3t,$$

ossia:

[3] $$\pi_d = (n-4)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right] - 3t + 1 \cdot$$

Nelle [2] e [3] compariscono quattro quantità incognite: τ, ρ, π_d, t. Occorre quindi avere altre due relazioni fra queste stesse quantità per poter procedere al loro calcolo effettivo.

La prima di tali relazioni è data dall'espressione analitica del genere numerico p_a della superficie F (formula di postulazione) (1):

[4] $$p_a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right] +$$
$$+ 2t + \rho - 1 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(9-2n) + \pi(n-4) + 2t + \rho - 1 \cdot$$

Per avere l'altra, contiamo le intersezioni di C_d (o2 D) con una curva jacobiana C_j. Tali intersezioni sono costituite intanto dai τ punti doppi della γ_2^1 (punti cuspidali di D), e, oltre questi, da altri α punti di C_d ciascuno dei quali è doppio per una curva della rete che possiede la jacobiana considerata C_j. Allora per la somma $\tau + \alpha$, essendo

$$|C_d| = |(n-4)C - K| \qquad |C_j| = |3C + K|,$$

si ha:

$$\tau + \alpha = 3(n-4)n - 3(2\pi - 2 - n) + (n-4)(2\pi - 2 - n) -$$
$$- \overline{p}^{(1)} + 1 = 2n^2 - 7n + 15 + 2(n-7)\pi - \overline{p}^{(1)} \cdot$$

Il numero α si determina in base all'osservazione che segue. Sulla superficie F^* dello spazio ordinario, la rete di curve C che ha per

(1) Cfr. *Lezioni*, § 45.

jacobiana la C_j, è segata dai piani di una stella di centro O, e la C_j è l'intersezione (fuori di D) della F^* con la superficie φ' prima polare di O. Ricerchiamo allora sulla F^* i $\tau + \alpha$ punti d'incontro della C_j e della curva doppia D: τ di questi cadono, come già sappiamo, nei punti cuspidali di D, mentre i rimanenti α sono tali che i piani tangenti in essi ad una delle due falde della F^* passano per O. Invero, sia P un punto comune alla C_j e alla D: in P il piano μ tangente alla φ' tocca una delle due falde della F^* (contenendo le tangenti in P alla D e alla C_j), e viceversa. Ma il piano μ è il piano polare di O rispetto ai due piani ξ e η tangenti in P alle due falde della F^* (1): quindi μ può coincidere con uno dei piani ξ e η solo quando uno di questi passa per O, oppure quando ξ e η sono sovrapposti.

Si può giungere direttamente a questa conclusione ricordando il significato della jacobiana C_j, che è il luogo dei punti doppi per le sezioni C della F^* con i piani per O, intendendo di riguardare come doppio un punto di C solo quando la presenza di tale punto determini una diminuzione del genere della C rispetto a quello della sezione piana generica (*punto doppio in senso invariantivo*). Allora un punto, non cuspidale, P, della curva nodale D non appartiene alla C_j, a meno che il piano tangente in P ad una delle due falde della F^*, non passi per O. Invece un punto cuspidale Q di D è sempre sulla C_j: infatti è noto (2) che la F^* possiede un punto doppio Q' infinitamente vicino a Q, fuori di D (e in direzione diversa dalla tangente alla D in Q), cosicchè le sezioni della F^* con i piani per QQ' hanno il genere inferiore di un'unità a quello della sezione piana generica.

Così il gruppo degli α punti P comuni alla C_j e alla D, fuori dei punti cuspidali, risulta senz'altro individuato: esso appartiene alla seconda polare φ'' di O rispetto a F^*, poichè il piano tangente alla φ' in un punto P passa per O. Allora α è dato dal numero delle interse-

(1) La prima polare di un punto O rispetto ad una superficie F, è il luogo delle curve prime polari di O rispetto alle sezioni della F con i piani per O. E nel caso delle curve piane si ha che la polare prima di un punto O rispetto ad una curva C dotata di un punto doppio P, passa semplicemente per P ed ha ivi come tangente la retta polare di O rispetto alle due tangenti in P alla C. Cfr. ENRIQUES–CHISINI, libro III, cap. I, § 4 (vol. II, pag. 26).

(2) Cfr. ENRIQUES–CHISINI, libro IV, cap. IV, § 36 (vol. II, pag. 598).

zioni della D con la φ'', fuori dei t punti tripli di D (per cui la φ'' passa semplicemente):

$$\alpha + 3t = (n - 2)\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \pi\right].$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ha per τ:

[5] $$\tau = \frac{34 - 22n + 9n^2 - n^3}{2} + (3n - 16)\pi + 3t - \overline{p}^{(1)}.$$

Abbiamo dunque trovato le quattro equazioni [2], [3], [4] e [5]: eliminando da queste e dalla [1] le incognite ρ, t, τ e π_d, si ottiene:

[6] $$\delta = n + 4\pi - \overline{p}^{(1)} + 12\, p_a + 9.$$

Ossia:

$$\delta - n - 4\pi = I = 12\, p_a + 9 - \overline{p}^{(1)},$$

che è appunto la relazione di NOETHER che volevamo dimostrare.

2. In vista dell'interesse che possono avere per le applicazioni, giova scrivere esplicitamente i valori che fornisce per le incognite ρ, t, τ, π_d, il sistema delle equazioni lineari [2], [3], [4] e [5].

Ricordiamo che si è posto:

ρ = genere della curva doppia D di una superficie F^* dello spazio ordinario, di genere numerico p_a, di genere lineare relativo $\overline{p}^{(1)}$ e di ordine n, le cui sezioni piane hanno il genere π;

t = numero dei punti tripli di D;

τ = numero dei punti cuspidali di D;

π_d = genere della curva C_d che risponde alla D sopra un modello della F^* privo di singolarità, luogo delle coppie neutre rispetto al sistema trasformato di quello delle sezioni piane di F^*.

Si ha:

$$\rho = \frac{1}{2}(n^2 - 7n + 48) + (n - 12)\pi + 9p_a - 2\overline{p}^{(1)}$$

$$t = \frac{1}{6}(n^3 - 9n^2 + 26n - 78) - (n - 8)\pi - 4p_a + \overline{p}^{(1)}$$

$$\tau = 2n + 8\pi - 12\, p_a + 2\,\overline{p}^{(1)} - 22$$

$$\pi_d = n^2 - 6n + 2(n - 10)\pi + 12\, p_a - 3\overline{p}^{(1)} + 36.$$

Dalla terza di queste uguaglianze e dalla [6] segue:

$$2\,\delta - \tau = 36\,p_a - 4\,\bar{p}^{(1)} + 40,$$

quindi *la differenza* $2\,\delta - \tau$ *è un invariante relativo della superficie* (1).

§ 3. – Il numero delle curve cuspidate di una rete.

1. Accanto alle formule precedenti se ne può scrivere un'altra, particolarmente notevole, che dà il numero χ delle curve cuspidate di una rete: è la relazione scoperta da Zeuthen (2):

$$[1] \qquad \chi = 24\,(p_a + \pi)$$

designando, al solito, con p_a il genere numerico della superficie e con π il genere della rete.

(1) Cfr. Bonnesen, loc. cit.

(2) H. G. Zeuthen, *Etudes géometriques*....già citati. Cfr. anche la memoria, pure citata, di Noether nei «Mathem. Annalen», VIII. Supponendo nota l'invarianza del genere numerico (con le restrizioni relative alle singolarità che limitano le dimostrazioni di Zeuthen e di Noether) il ragionamento di Zeuthen prova che il numero $\chi - 24\pi$, calcolato a partire da una rete (di sezioni piane), risulta indipendente da questa, e perciò costituisce un carattere intrinseco della superficie. La dimostrazione diretta di questo fatto è data, con procedimento elementare e del tutto generale, nella nota di F. Severi su *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica* («Atti Accad. Torino», vol. XXXVII, 1902). Ne risulta una nuova dimostrazione dell'invarianza del genere numerico, diversa da quella che Enriques ha stabilito nell'*Introduzione* del 1896, rilevando il significato funzionale della irregolarità $p_g - p_a$ (cfr. *Lezioni*, nota bibliografica al cap. IV). Ma questa nuova dimostrazione non offre il significato funzionale del p_a in ordine alla dimensione dei sistemi lineari di curve sopra la superficie; anzi l'interpretazione funzionale della [1] conduce ad assegnare un significato geometrico del genere numerico in un ordine d'idee affatto diverso, cioè a trovare una certa serie invariante di gruppi di $24\,(p_a + 1)$ punti, sopra la superficie. Cfr. F. Enriques, *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.* («Rend. R. Accad. Lincei», serie VI, vol. XVI, 1932).

Il risultato si appoggia alla possibilità di operare per somma e sottrazione sopra le *serie di gruppi equivalenti* che appartengono ad una superficie, quali sono state definite dal Severi in due memorie del 1932. Esso non viene infirmato dalla correzione che il Severi stesso ha dovuto portare alla teoria modificando la sua prima definizione. Soltanto non si può più asserire che le serie di cui si parla, siano

Per dimostrare la [1] (1) si consideri, da prima, una rete $|C|_2$ contenuta in un sistema lineare $|C|$ (semplice irriducibile e privo di punti base) che sia triplamente infinito. Per il sistema $|C|$ riprenderemo le notazioni già dianzi usate.

Sopra la F il luogo delle cuspidi delle curve di $|C|$ costituisce una curva C_h, ed evidentemente il numero χ delle cuspidi di una rete generica $|C|_2$ contenuta in $|C|$, è dato dal numero dei punti comuni alla C_h e alla jacobiana C_j della $|C|_2$, fuori delle intersezioni che codeste due curve hanno nei τ punti cuspidali Q della curva delle coppie neutre C_d relativa al sistema $|C|$. È subito visto che i τ punti Q, i quali sono semplici per la C_j, risultano invece doppi per la C_h: infatti, ogni punto Q è un punto base doppio per un fascio di curve C, e quindi esistono in tal fascio due curve che hanno in Q una cuspide, le tangenti cuspidali essendo le rette doppie dell'involuzione delle tangenti in Q alle singole curve del fascio (e siffatte due curve non apparterranno alla rete generica $|C|_2$).

Vediamo allora come, in base alle precedenti osservazioni, si possa effettivamente calcolare il numero χ.

Cominciamo col determinare il sistema lineare $|C_h|$ a cui appartiene la C_h. Diciamo che si ha:

$$[2] \qquad |C_h| = |4K + 8C| \cdot$$

Portiamoci sulla superficie F*, dello spazio ordinario, su cui il sistema $|C|$ è costituito dalle sezioni piane. Su F^* il sistema jacobiano $|C_j|$ contiene il sistema (∞^3) segato dalle superficie prime polari dei punti dello spazio: costruiamo il sistema $|C_{jj}|$ jacobiano di $|C_j|$. Per questo si prenda un piano a e si consideri la rete $|C_j|_2$ segata su F^* dalle polari dei punti di a: è intanto evidente che alla

razionali. Cfr. F. SEVERI, *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà.* («Memorie della R. Accademia d'Italia», adunanza del 13 gennaio 1933-XI; vol. IV).

Per l'interpretazione in questo stesso ordine d'idee, di altre formule numerative cfr. L. CAMPEDELLI, *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie.* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XVII, 1933$_1$).

(1) Cfr. BONNESEN, loc. cit. Vedi anche M. PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica.* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. XX, 1905).

jacobiana C_{jj} di tale rete appartiene la C intersezione di F^* con a (poichè la polare di un punto P di C, tocca in P la F^*). Inoltre della C_{jj} fa parte anche la curva parabolica H di F^*: infatti il piano p tangente alla F^* in un punto P di H, incontra il piano a lungo una retta le polari dei cui punti passano per P e sono ivi tutte tangenti alla tangente cuspidale della sezione di F^* con il piano p, perciò esiste una C_j di $|C_j|_2$ avente in P un punto doppio. Ora la H e la predetta C esauriscono la curva C_{jj} jacobiana di $|C_j|_2$, perchè, inversamente, un punto P di C_{jj} (che non sia su C) è doppio per una C_j, la quale, insieme ad un'altra generica curva di $|C_j|_2$ passante per P, individua un fascio di C_j che si toccano in P. Ma allora la sezione della F^* con il piano tangente in P, possiede ivi una cuspide (1).

(1) Allo stesso risultato si giunge analiticamente nel modo seguente. Riferendoci a coordinate proiettive, sia $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = O$ l'equazione della F^*: allora una rete $|C_j|_2$ è segata su F^* dalle superficie (polari dei punti del piano $x_4 = 0$)

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial f}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

e un punto doppio P di una C_j di $|C_j|_2$, si ha in corrispondenza ad una di codeste superficie che sia dotata di un punto doppio P oppure sia tangente in P alla F^*. Tanto nell'un caso che nell'altro si ha in P, per valori non tutti nulli dei parametri ρ, λ, μ, ν:

$$\rho \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e inversamente. Ne segue che il punto P appartiene all'intersezione di F^* con la superficie Ω (jacobiana di $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $f = 0$) d'equazione:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

Si ha dunque:

$$|C_{ij}| = |H + C|;$$

ma è

$$|C_{ij}| = |K + 3C_j| = |4K + 9C|$$

e perciò:

$$|H| = |4K + 8C| \text{ (1)}.$$

Ora la curva parabolica H ha per corrispondente sulla F la curva C_h luogo delle cuspidi delle curve di $|C|$, e quindi si ha senz'altro la [2].

Dopo ciò il numero dei punti comuni alla C_h e alla C_j, diminuito delle 2τ intersezioni assorbite dai τ punti (della C_d) omologhi dei punti cuspidali della curva doppia D di F^*, ossia – come abbiamo visto – il numero χ delle curve di una rete $|C|_2$ dotate di una cuspide, risulta uguale a

$$\chi = (C_h\, C_j) - 2\tau = (4K + 8C)\ (K + 3C) - 2\tau = 24\,(p_a + \pi)\,.$$

Cioè, come avevamo asserito: *Sopra una superficie di genere numerico p_a, una rete di curve di genere π, possiede $24\,(p_a + \pi)$ curve dotate di una cuspide.*

che, tenendo presente il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee, si può scrivere:

$$x_4 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi la Ω è costituita dal piano $x_4 = 0$ (che incontra la F^* lungo una C) e dalla hessiana di F^*, la quale sega appunto su F^* (fuori della curva doppia D) la curva parabolica H.

(1) Questa relazione si scrive subito osservando che la H è segata su F^* (fuori della curva doppia D) dalla hessiana di F^*, la quale è dell'ordine $4\,(n-2)$ e passa triplamente per la D, toccando lungo D le due falde della F^*. Si ha perciò $|4\,(n-2)\,C| = |H + 8D|$, ma – come abbiamo già visto – è:

$$|2D| = |(n-4)\,C - K| \text{ e quindi } |H| = |4K + 8C|.$$

una retta del piano α, rappresentando una curva di genere π, deve avere appunto $2\pi + 2n - 2$ punti di diramazione, conformemente alla nota *formula di* ZEUTHEN [1]. In quanto al genere della C_j^* esso è uguale a quello della C_j, e quindi è dato da $\overline{p}^{(1)} + 9\pi - 9$, avendosi $|C_j| = |K + 3C|$ dove $|K|$ designa il sistema canonico (impuro) della F.

Ciò premesso, si osservi che:

a) ognuna delle k curve C dotate di due punti doppi, dà luogo ad una tangente doppia della curva di diramazione C_j^*, e viceversa. Quindi *k rappresenta anche il numero delle tangenti doppie della C_j^**;

b) i d fasci di curve C tra loro bitangenti, sono segati su F dai piani dei fasci il cui asse passa per O e tocca la F in due punti (situati su C_j). Le traccie di tali assi sul piano α sono punti nodali per la C_j^*, e viceversa, cosicchè *il numero d rappresenta pure il numero dei nodi della C_j^**;

c) ciascuno degli i fasci di curve C con un contatto tripunto, è segato su F dai piani di un fascio il cui asse è una *tangente d'inflessione* (tangente con contatto tripunto) della F, passante per O. La traccia di tale tangente sul piano α dà una cuspide della C_j^*, e viceversa, per modo che *la C_j^* possiede $\underline{i}$ punti cuspidali.*

Così dunque i caratteri della rete $|C|$ espressi dai numeri k, d e i si riconducono a noti caratteri plückeriani della curva di diramazione C_j^*, e quindi per calcolarli basta ricorrere alle *formule di* PLÜCKER [2]. Ma per questo è necessario conoscere, oltre al genere ed all'ordine di C_j^*, il numero dei suoi flessi: ora tale numero è noto essendo uguale a quello delle curve cuspidate della rete $|C|$, che nel paragrafo precedente si è trovato essere:

$$\chi = 24\,(p_a + \pi)\,. \tag{1}$$

Allora le predette formule di PLÜCKER dànno:

$$\left\{\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}[(12p_a - \overline{p}^{(1)} + 4\pi + n + 9)^2 - 84p_a + \overline{p}^{(1)} - 78\pi - 3n - 7] \\ d &= 2\,[6p_a - 2\overline{p}^{(1)} + (n + \pi)^2 - 17\pi - 5n + 24] \\ i &= 3\,(\overline{p}^{(1)} - 4p_a + 6\pi + n - 11)\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. I, § 9 (vol. III, pag. 73).
(2) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro III, cap. II, § 17 (vol. II, pag. 122).

Quindi, riepilogando, si ha:

Sopra una superficie di genere numerico p_a *e di genere lineare (relativo)* $\bar{p}^{(1)}$, *una rete* $|C|$ *di genere* π *e grado* n, *possiede* χ *curve cuspidate;* $\underline{k}$ *curve con due punti doppi;* $\underline{d}$ *fasci costituiti da curve bitangenti fra loro;* $\underline{i}$ *fasci di curve con un contatto tripunto: i numeri* χ, $\underline{k}$, $\underline{d}$ *e* $\underline{i}$ *essendo dati dalle* [1] *e* [2].

E questo risultato può anche enunciarsi nella forma seguente:

Un piano n — *plo, di genere numerico* p_a *e di genere lineare (relativo)* $\bar{p}^{(1)}$, *le cui rette rappresentino curve di genere* π, *possiede una curva di diramazione di ordine* $2\pi + 2n - 2$ *e di genere* $\bar{p}^{(1)} + 9\pi - 9$, *dotata di* $\underline{d}$ *nodi,* $\underline{i}$ *cuspidi,* $\underline{k}$ *tangenti doppie e* χ *flessi, dove i numeri* $\underline{d}$, $\underline{i}$, $\underline{k}$ *e* χ *sono dati dalle* [1] e [2] (1).

2. La considerazione dei piani multipli ha evidente importanza per la teoria generale delle superficie algebriche.

Ogni superficie F su cui venga data una rete di curve K d'un certo grado n e d'un certo genere π, si può rappresentare sopra un piano multiplo, d'ordine n, con una curva di diramazione d'ordine

$$m = 2n + 2\pi - 2,$$

i cui caratteri plückeriani si esprimono, come si è visto, in funzione dei caratteri della superficie e di quelli della rete delle curve K.

Viceversa: data nel piano una curva C (di un ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$), dotata in generale di un certo numero di nodi e di cuspidi, si pone naturalmente la domanda se essa possa considerarsi come curva di diramazione di un piano multiplo (n — *plo*); se ciò è possibile si otterrà una superficie, contenente una rete di curve K di grado n e genere π, i cui caratteri invarianti p_a e $\bar{p}^{(1)}$ saranno legati ai caratteri plückeriani di C dalle formule già date.

(1) Le formule [2] s'incontrano nelle note citate di H. G. ZEUTHEN, *Etudes géométriques* . . . ; M. NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* . . . («Mathem. Ann. », VIII); F. SEVERI, *Il genere aritmetico ed il genere lineare* . . . ; M. PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti* . . . . Cfr. anche L. GODEAUX, *Sur les systèmes linéaires quadruplement infinies* (« Bull. Acc. de Cracovie », 1912).

Si vede subito che – tolto il caso particolare dei piani *ciclici* (1) – una curva piana C, data ad arbitrio, non può essere curva di diramazione di un piano n — *plo* ($n > 2$); e in ciò si ha una differenza essenziale rispetto al problema analogo nella teoria delle curve, per le quali invece si può sempre costruire una retta multipla di cui siano dati ad arbitrio i punti di diramazione e anche le sostituzioni ad essi relative [*teorema di esistenza di* RIEMANN (2)].

Così, dunque, per le superficie, e per $n > 2$, la *questione di esistenza* si pone in modo affatto nuovo: *determinare le condizioni a cui deve soddisfare una curva piana* C (*d'ordine pari* $2n + 2\pi - 2$) *dotata di un certo numero di nodi e di cuspidi, affinchè sia curva di diramazione di un piano* n — *plo*.

Per rispondere, si assuma ad arbitrio una C, d'un certo ordine pari $m = 2n + 2\pi - 2$ ($\pi \geq O$), e si cerchi di costruire una superficie F rappresentata sopra un piano n — *plo* che abbia come curva di diramazione la C: a tal uopo si costruirà una curva algebrica, L, che sia rappresentata sopra una retta n — *pla*, a, i cui punti di diramazione son dati come intersezioni di a con C, e – facendo variare a in un fascio di rette, entro il piano di C – si considererà la superficie descritta da L. Se la L venisse razionalmente determinata in funzione della retta a e dei punti di diramazione segnati sopra di essa dalla C, il luogo di L costituirebbe evidentemente la cercata superficie F; questa superficie – luogo resultando riferita ad un piano n — *plo* che ha come curva di diramazione la C. Anzi la stessa conclusione sussisterebbe se i punti di diramazione segnati sopra a

(1) Il piano multiplo rappresentativo di una funzione algebrica ad n rami, $z = f(xy)$, si dice *ciclico* quando gli n rami della funzione, $z_1, z_2, \cdots, z_n$, si permutano circolarmente per qualsiasi cammino chiuso descritto dal punto (x, y) nella varietà riemanniana a 4 dimensioni del piano, che rappresenta l'insieme dei punti reali e complessi di questo. Nel caso ciclico anzidetto, a meno di una trasformazione birazionale, si può assumere $z = \sqrt[n]{f(xy)}$ (teoria delle equazioni abeliane). Allora la curva $f(xy) = 0$ contata $n - 1$ volte (e completata, eventualmente, con la retta all'infinito), costituisce la curva di diramazione del piano *n–plo*. Nel testo parlando della curva di diramazione di un piano *n–plo*, sottintendiamo sempre che sia irriducibile, e con ciò i piani multipli ciclici per $n > 2$ vengono ad essere senz'altro esclusi.

(2) Cfr. ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 33 (vol. III, pag. 355).

dalla C, determinassero una sola classe di curve L, birazionalmente identiche fra loro, rappresentate sulla retta n — *pla* a: invero entro una tale classe si riesce a costruire una curva razionalmente determinata. Ma, in realtà, la L non verrà determinata razionalmente in funzione di a, ed anzi il gruppo dei punti di diramazione (intersezioni della C) che si è assunto su a, determinerà un numero finito di curve algebriche, ossia di rette n — *ple*, birazionalmente distinte: le quali si scambieranno l'una nell'altra quando la retta a, variando nel suo fascio, ritorni alla posizione iniziale. Codesti scambi avranno luogo al passaggio di a per una di quelle posizioni per cui due degli m punti d'incontro della a con la C vengono a coincidere, cioè in corrispondenza alle tangenti condotte alla C dal centro del fascio in cui ruota la a e alle rette che vanno ai nodi e alle cuspidi di C. Il problema si riconduce così ad esaminare come varino e si scambino fra loro le rette n — *ple* birazionalmente distinte individuate in corrispondenza alla retta a variabile in un fascio, e a ricercare le condizioni per l'esistenza di una di tali rette n — *ple* determinabile razionalmente in funzione di a.

La questione è stata risolta da ENRIQUES [1], che dà così (sotto forma *topologica*) le condizioni di esistenza dei piani n — *pli*, cioè le condizioni a cui deve soddisfare una curva piana dotata di nodi e di cuspidi, per essere curva di diramazione di un piano n — *plo*.

Ma la forma di questo risultato non lascia vedere come si possano in effetto costruire le curve di diramazione dei piani n — *pli*, così da rispondere in modo agevole alle domande di esistenza che si pongano relativamente a superficie possedenti dati caratteri. Tuttavia, anche senza svolgere la trattazione a cui sopra si è alluso, si può notare che le condizioni perchè una C sia curva di diramazione

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione.* (« Annali di Mat. », serie IV, vol. I, 1924). Ulteriori e interessanti sviluppi topologico-gruppali si trovano in O. ZARISKI, *On the Problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve* (« Amer. Journ. of Math. », vol. LI, 1929). Esempi di piani multipli (e precisamente di quelli che nascono per proiezione generica di una superficie d'ordine n, senza singolarità) sono dati da B. SEGRE, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali.* («Memorie R. Accad. d'Italia», vol. I, 1930).

di un piano $n-plo$, hanno carattere aritmetico e quindi non sono suscettibili di mutare con continuità insieme con C. Di qui segue l'importante corollario:

Dato nel piano un sistema continuo $\{C\}$ *di curve* C, *d'ordine pari, dotate di un certo numero di nodi e di cuspidi, se una* C *è curva di diramazione di un piano* $n-plo$, *lo stesso accade per le altre curve del sistema* $\{C\}$.

3. I risultati che abbiamo riferito sopra i piani multipli, trovano un'interessante applicazione nel computo dei *moduli* delle superficie algebriche.

È noto che le curve di genere p ($p>1$) formano una serie continua che contiene, in generale, ∞^{3p-3} classi distinte di curve birazionalmente identiche (¹). E le condizioni di trasformabilità birazionale di curve dello stesso genere, si traducono nell'uguaglianza di certe costanti caratteristiche, o *moduli*, che definiscono appunto una classe di curve birazionalmente identiche.

In modo analogo, passando dal caso delle curve a quello delle superficie, potremo avere una o più famiglie irriducibili di superficie possedenti certi caratteri [in ciascuna delle quali la determinazione di una *classe* (²) dipenda da parametri variabili in modo continuo], cosicchè l'identità birazionale di due superficie esigerà:

1) l'eguaglianza del genere geometrico p_g, del genere numerico p_a, del genere lineare $p^{(1)}$, ed eventualmente di altri caratteri numerici che occorrano per separare una famiglia irriducibile di superficie;

2) l'uguaglianza di certi parametri suscettibili di variare in modo continuo, o *moduli*, che distinguono la *classe* entro la famiglia irriducibile a cui essa appartiene.

In rapporto ad 1) si osservi che fra i caratteri che può occorrere di aggiungere a p_g, p_a, $p^{(1)}$, per separare una famiglia irriducibile di superficie, possono figurare anzitutto i plurigeneri; ma non è detto che essi bastino in ogni caso allo scopo. Ad esempio, per $p_a = p_g = O$, $\overline{p}^{(1)} = 1$, esistono superficie di bigenere $P_2 = 1$ con curva bicanonica d'ordine zero, le quali vengono caratterizzate dalla condizione $P_3 = O$,

(¹) Cfr., p. es., ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. III, §§ 33 e 34.

(²) Cfr. *Lezioni*, § 4.

e invece si hanno superficie con curva bicanonica d'ordine maggiore di zero per le quali è $P_2 = P_3 = 1$. Nel primo caso i caratteri $p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, sono sufficienti a definire un sistema continuo di superficie, poichè si dimostra che le superficie con tali caratteri si possono trasformare in superficie del sesto ordine passanti doppiamente per gli spigoli di un tetraedro (1).

Anche per le superficie regolari di genere $p_a = p_g = 1$ e $p^{(1)} = 1$, può aversi una curva canonica d'ordine zero o d'ordine maggiore di zero; e per caratterizzare il primo caso conviene guardare al valore del bigenere che deve essere $P_2 = 1$ (2). Ma la condizione $p_a = p_g = P_2 = 1$ – che porta di conseguenza $p^{(1)} = 1$ e $P_3 = P_4 = \cdots = 1$ – non basta ad individuare una famiglia irriducibile di superficie, poichè abbiamo visto (3) che le superficie con tutti i generi uguali all'unità (curva canonica d'ordine zero) dànno luogo ad una serie discreta di famiglie, ognuna delle quali dipende dal valore di un intero π ($\geqq 2$) che è il genere del sistema lineare di dimensione minima appartenente ad esse.

Un altro esempio in cui per distinguere una famiglia irriducibile di superficie, occorre aggiungere un carattere nuovo a p_a, p_g e $p^{(1)}$, è dato dalle superficie con $p^{(1)} = 1$, le quali possiedono, in generale, un fascio di curve ellittiche. Infatti – come già abbiamo avuto occasione di accennare (4) – tali superficie dipendono, oltre che da p_g e da p_a, dal cosiddetto *determinante*, che è l'ordine del più piccolo gruppo di punti che si può determinare razionalmente sopra una curva ellittica del fascio.

Tutti questi esempi si riferiscono al caso in cui $p^{(1)} = 1$: la questione se le superficie che rispondono a valori generali dei caratteri p_g, p_a e $p^{(1)} > 1$, formino una o più famiglie distinguibili per qualche ulteriore carattere numerico, non è stata ancora risolta. La possibilità che esistano più famiglie appare però dallo studio dei piani multipli, quando si consideri che mentre c'è una sola serie continua di curve piane possedenti un certo numero di nodi, le curve dotate di nodi e cuspidi si distribuiscono, in generale, in più serie.

(1) Cfr. *Lezioni*, « Nota bibliografica » al termine del cap. V.

(2) Cfr. *Lezioni*, § 51.

(3) Cfr. *Lezioni*, § 52.

(4) Cfr. *Lezioni*, § 55.

Vogliamo qui determinare il numero dei moduli di una superficie F, cioè – come abbiamo detto – il numero dei parametri, suscettibili di variare in modo continuo, che distinguono la *classe* (o totalità delle superficie birazionalmente identiche alla F) entro la famiglia irriducibile a cui essa appartiene. In tale ricerca ci lasceremo guidare dall'analogia con il problema stesso relativo al caso delle curve ([1]). Richiamiamo perciò il procedimento che vi si riferisce.

Data una curva C di genere $p\ (> 1)$, e preso $n > p$, esistono sopra la C delle serie lineari g^1_n : riferendo proiettivamente i gruppi di una di queste g^1_n ai punti di una retta a, si ottiene fra la C e la retta a una corrispondenza $[1\ ,\ n]$, cioè la C viene rappresentata sulla retta n — *pla* a, e si ha un gruppo di $2n + 2p - 2$ *punti di diramazione* costituiti dai punti di a omologhi dei gruppi della g^1_n dotati di un punto doppio.

Viceversa, per il già ricordato *teorema di esistenza* di RIEMANN, esiste sempre un numero finito di curve, di genere p, birazionalmente distinte, rappresentabili sopra una retta n — *pla* con un gruppo di $2n + 2p - 2$ punti di diramazione presi ad arbitrio.

Ciò consente di calcolare subito il numero dei moduli pertinenti alle curve C di genere p.

Invero: la scelta di un gruppo di $2n + 2p - 2$ punti sopra una retta a, può farsi in $\infty^{2n+2p-2}$ modi diversi, ma le curve di genere p corrispondenti a questi gruppi, assunti come gruppi di diramazione, non saranno tutte birazionalmente distinte; ci sarà invece un certo numero ∞^s dei predetti gruppi a cui risponderà una stessa curva C (determinata a meno di una trasformazione birazionale). Quindi il richiesto numero dei moduli delle curve C di genere p, risulta:

$$2n + 2p - 2 - s\ .$$

Rimane da calcolare il numero s, cioè da contare quante volte accada che una stessa curva C di genere p (o una curva ad essa birazionalmente identica) venga rappresentata sopra la retta n — *pla* a con diversi gruppi di $2n + 2p - 2$ punti di diramazione. Per rappre-

([1]) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli di una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili.* («Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino», vol. XLVII, 1912).

sentare la C sopra la a, si sono riferiti proiettivamente i punti di a ai gruppi di una g_n^1 (non speciale) presa su C: ora questo riferimento proiettivo può farsi in ∞^3 modi diversi, che dànno luogo ad ∞^3 rappresentazioni della C sulla a con gruppi di diramazione proiettivi fra loro. Ciò a partire da una g_n^1 : ma se la C non ammette infinite trasformazioni in sè ($p > 1$) le diverse g_n^1 appartenenti a C conducono a rette n — *ple* con gruppi di diramazione proiettivamente distinti; ora quante sono le g_n^1 appartenenti alla curva C? Una g_n^1 (non speciale) è contenuta in una g_n^{n-p}, la quale però contiene altre $\infty^{2(n-p-1)}$ involuzioni g_n^1 (1), tutte equivalenti fra loro. D'altra parte le g_n^{n-p} sopra la C sono ∞^p, e quindi, in complesso, la C (e ogni sua trasformata birazionale) può rappresentarsi sopra una retta n — *pla* in ∞^{2n-p+1} modi diversi, si ha cioè $s = 2n - p + 1$.

Ne segue che il numero dei moduli delle curve C di genere $p\,(>1)$ è:

$$3p - 3\,\cdot$$

Con ragionamento analogo si contano i moduli di una superficie.

Si prenda una superficie F, che supporremo regolare ($p_a = p_g = p$) e non razionale, per modo che ci si potrà riferire ad un suo modello proiettivo senza curve eccezionali (2), sopra il quale risulterà definito il genere lineare assoluto $p^{(1)}$ $(= \overline{p}^{(1)})$ (3). Sulla F si consideri una rete di curve di genere π e grado n, e mediante tale rete si rappresenti la nostra superficie sopra un piano n — *plo* α. Sia C la curva di diramazione. La C è d'ordine $2n + 2\pi - 2$, di genere $p^{(1)} + 9\pi - 9$, e possiede d nodi e i cuspidi, con

$$[3] \qquad \begin{aligned} d &= 2\,[6p - 2p^{(1)} + (n + \pi)^2 - 17\pi - 5n + 24] \\ i &= 3\,(p^{(1)} - 4p + 6\pi + n - 11)\,\cdot \end{aligned}$$

La C appartiene ad una serie continua (irriducibile) $\{C\}$, ogni curva della quale – per quanto si è visto sopra (4) – è la curva di

(1) Cioè tante g_n^1 quante sono le rette di un iperspazio a $n - p$ dimensioni. Per quest'ultimo numero cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, cap. II, § 12 (2ª ed., Messina, 1923).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 47.

(3) Cfr. *Lezioni*, § 25.

(4) Cfr. questo §, n. 2 (Corollario).

diramazione di un piano n — *plo* che risponde ad una superficie della famiglia irriducibile $\{F\}$, di cui fa parte la F.

Ma la stessa F può rappresentarsi sopra il piano n — *plo* α, in un certo numero ∞^s di modi diversi, e allora – se $\{C\}$ ha la dimensione r – l'ordine d'infinità delle *classi* $[F]$ di superficie birazionalmente identiche contenute nella famiglia irriducibile $\{F\}$, cioè il numero dei moduli della F, sarà dato, in generale, da:

$$r - s\,.$$

Cominciamo col calcolare la dimensione r della serie continua completa $\{C\}$ di curve C, di genere $p^{(1)} + 9\pi - 9$, dotate di d nodi ed i cuspidi, i numeri d ed i essendo dati dalle [3].

La serie continua $\{C\}$ determina sopra una C la sua serie lineare caratteristica (completa), di dimensione $r - 1$, i cui gruppi vengono segati su C dalle curve infinitamente vicine (¹). Ma se C^* è una generica curva di $\{C\}$ infinitamente vicina a C, è noto (²) che, agli effetti delle sue intersezioni con C, alla C^* si può sostituire una curva dello stesso ordine m ($m = 2n + 2\pi - 2$), che passi semplicemente per i nodi e per le cuspidi della C, e tocchi in queste ultime le relative tangenti cuspidali; e viceversa. Dunque la serie caratteristica di C è segata sopra di essa dalle curve aggiunte a C d'ordine m, che toccano nelle i cuspidi le tangenti cuspidali. Per le [3], l'ordine di tale serie è:

$$12p - p^{(1)} + 3n + 6\pi + 7\,,$$

e la sua dimensione:

$$r - 1 = 12p - 2p^{(1)} + 3n - 3\pi + 16 + \omega\,,$$

designando con ω ($\geqq O$) *l'indice di specialità* della serie stessa.

Si conclude che la dimensione r di $\{C\}$ è data da:

$$r = 12p - 2p^{(1)} + 3n - 3\pi + 17 + \omega\,.$$

Ricerchiamo ora in quanti modi diversi la F si può rappresentare sopra un piano n — *plo* α, con curve di diramazione appartenenti ad una stessa serie continua.

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 21.

(²) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro II, cap. I, § 5 (vol. I, pag. 182, nota).

Se si prende sulla F una rete $|L|_2$ di curve di grado n, si ottiene una rappresentazione della F sopra un piano n — *plo* α, riferendo proiettivamente le curve di $|L|_2$ alle rette del piano. Ora un tale riferimento proiettivo può farsi in ∞^8 modi diversi, e quindi, intanto, si hanno così ∞^8 rappresentazioni della F sopra il piano n — *plo* α, con curve di diramazione proiettive. Ciò accade in rapporto ad una rete $|L|_2$. Ma la $|L|_2$ (di grado n e genere π) appartiene ad un sistema lineare – che possiamo supporre *regolare* – di dimensione

$$p + n - \pi + 1 \cdot$$

Un siffatto sistema contiene $\infty^{3(p+n-\pi-1)}$ reti di curve (piani di un $S_{p+n-\pi+1}$), le quali (ammesso che la F non possieda infinite trasformazioni in sè) conducono a piani n — *pli* con curve di diramazione proiettivamente distinte; quindi, in definitiva, la superficie F può rappresentarsi sopra un piano n — *plo*, con curve di diramazione appartenenti ad una stessa serie continua, in $\infty^{3p+3n-3\pi+5}$ modi diversi, cioè

$$s = 3p + 3n - 3\pi + 5 \cdot$$

In conseguenza *il numero dei moduli da cui dipende la superficie regolare F è*

$$9p - 2p^{(1)} + 12 + \omega \cdot \qquad [4]$$

Il computo precedente si basa sul presupposto che la rete $|L|_2$ (di grado n e genere π) sia contenuta in una serie $\infty^{3(p+n-\pi-1)}$ di reti analoghe, e non in una serie più ampia. La serie anzidetta è costituita dall'insieme di tutte le reti contenute nel sistema lineare completo $|L|$, ed evidentemente non può essere ampliata finchè si considerino reti di curve, senza punti base, che debbano essere contenute nel sistema completo $|L|$. Ma si affaccia il dubbio che una $|L|_2$ possa presentarsi come limite di una rete di curve M, dello stesso grado e genere, dotate però di punti base sopra la superficie. Per esempio, nel piano una rete di coniche con tre punti base, variando con continuità può avere come limite la rete delle rette aumentata di una retta fissa.

Ora il presupposto che figura nel nostro computo di moduli, si lascia giustificare almeno nel caso in cui la superficie non sia razionale, e quindi abbia il genere od il bigenere diverso da zero (¹).

Pongasi invero che una rete di curve M, di genere effettivo π e di grado effettivo n, dotata di punti base di molteplicità $i_1, i_2, \cdots$, sia suscettibile di variare con continuità sopra la superficie tendendo come limite alla rete $|L|_2$, da aumentare di una eventuale componente fissa θ. Se la superficie possiede una curva canonica K (ipotesi $p_g > O$), questa incontra le curve M in

$$2\pi - 2 - n - \sum i < 2\pi - 2 - n$$

punti variabili (²). Ma la K dovrà incontrare nello stesso numero di punti la curva limite $L + \theta$, e quindi avrà un numero negativo di intersezioni con la curva θ. Supponiamo per semplicità di discorso, che la θ sia una curva irriducibile, di un certo genere virtuale ρ e di un certo grado virtuale ν. Allora la θ farà parte della curva K:

$$|K| = \theta + |K_1|,$$

e poichè il numero delle intersezioni di K con θ risulta $2\rho - 2 - \nu < O$, è necessariamente $\rho = O$, e quindi $\nu > -2$, poichè se fosse $\rho > O$, avendosi $\nu > 2\rho - 2$, la superficie sarebbe riferibile ad una rigata (³). D'altra parte per il gruppo $(K\theta)$ dei punti comuni alla K e alla θ, si ha:

$$(K\theta) = (\theta\theta) + (K_1\theta),$$

con $(\theta\theta) = \nu$ e $(K_1\theta) \geqq 0$, onde:

$$2\rho - 2 - \nu \geqq \nu,$$

da cui, essendo $\rho = O$, $\nu \leqq -1$. Ne segue $\nu = -1$, cosicchè la θ è una curva eccezionale avendo i caratteri $\nu = -1$ e $\rho = O$ (⁴). Ma questa conclusione è in antitesi con l'ipotesi fatta di riferirci ad un modello proiettivo della nostra superficie privo di curve eccezionali.

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 65.
(²) Cfr. *Lezioni*, § 28.
(³) Cfr. *Lezioni*, § 47.
(⁴) Cfr. *Lezioni*, § 47, nota (*) a pag. 260.

Allo stesso assurdo si perviene se la θ non è irriducibile. Invero se in luogo di un'unica curva irriducibile θ, si hanno due componenti θ e θ' tra loro distinte, il ragionamento precedente si può ripetere invariato, poichè l'unico fatto nuovo che può presentarsi in questo caso è che la K_1 contenga come parte la θ', il che non interessa la precedente trattazione. Anche se θ e θ' coincidono – più in generale, se θ fa parte s volte del sistema $|K|$ – si deduce che la θ è eccezionale. Infatti si ha ancora $2\rho - 2 - \nu < O$, da cui si ricava $\rho = O$ e $\nu > -2$. E da:

$$|K| = s\theta + |K_1|,$$

si deduce:

$$2\rho - 2 - \nu \geqq s\nu ,$$

ossia:

$$\nu \leqq - \frac{2}{s+1}$$

quindi, essendo ν intero, $\nu \leqq -1$. Perciò necessariamente: $\nu = -1$.

In quanto precede si è supposta l'esistenza di almeno una curva canonica K, la quale può anche essere d'ordine zero. Se la K manca, cioè se $p_g = O$, ma il bigenere è diverso da zero, si può ripetere il ragionamento fatto sopra, riferendoci alle curve bicanoniche: si giungerà così allo stesso risultato, per modo che potremo concludere che l'espressione [4] che dà il numero dei moduli di una superficie F, resta dimostrata esatta per tutte le superficie regolari che hanno il genere od il bigenere diverso da zero, cioè *per tutte le superficie regolari, eccettuate quelle razionali.*

OSSERVAZIONE. — Giova ricordare che il computo di moduli da noi fatto, suppone che la superficie di cui si tratta non possegga una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stessa: altrimenti le ∞^1 reti trasformate di una rete $|L|_2$ non condurrebbero più a curve di diramazione proiettivamente distinte, cosicchè il numero dei moduli verrebbe aumentato di t (con analogia a quello che accade per le curve nei casi del genere zero ed uno).

Ma esistono superficie regolari possedenti una serie continua di trasformazioni birazionali in se stesse? Si può vedere che la cosa si verifica soltanto per le superficie razionali, e quindi, nelle nostre ipotesi, tale circostanza si deve escludere.

Premettiamo un'osservazione: se una superficie F contiene una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè, si può sempre supporre che a tale serie appartenga l'identità. Infatti se così non fosse, si prenda una trasformazione π appartenente alla serie data, e si consideri la serie continua ∞^1 costituita dalle trasformazioni prodotto di quelle della serie data per π^{-1}: si viene allora a costruire una nuova serie continua ∞^1 di trasformazioni della F in sè, della quale evidentemente fa parte l'identità.

Dopo ciò, si consideri sulla F un sistema lineare $|L|$, irriducibile, ∞^2 almeno e privo di punti base. Rispetto alle trasformazioni della predetta serie ∞^1, il sistema $|L|$ può presentare i seguenti casi:

1) il sistema $|L|$ è trasformato in sè;

2) il sistema $|L|$ è trasformato in una serie continua di sistemi lineari dotati di punti base, cosicchè le curve di questi sistemi (a prescindere dai punti base) risultano equivalenti ed hanno un ordine maggiore di quello delle L, le quali pertanto sono contenute parzialmente entro la serie predetta;

3) il sistema $|L|$ è trasformato in una serie continua di sistemi lineari di curve dello stesso ordine, disequivalenti e privi di punti base.

Si scartano subito i casi 2) e 3). Infatti nel caso 2) — dato che della serie continua di trasformazioni della F in sè, fa parte l'identità — una rete $|L|_2$ di curve L, priva di punti base, risulterebbe limite di una rete con gli stessi caratteri, ma avente invece dei punti base: e questa circostanza, come abbiamo già sopra dimostrato, è in antitesi con le nostre ipotesi che escludono le superficie razionali (esistenza di qualche plurigenere maggiore di zero). Nel caso 3) la serie caratteristica del sistema $|L|$ non sarebbe completa: ma ciò distingue le superficie irregolari (1), mentre la nostra F è regolare.

Rimane il caso 1), il quale porta alle superficie razionali. Invero se consideriamo la superficie F^* immagine del sistema $|L|$ (o di un suo multiplo), la F^* ammette ∞^1 trasformazioni proiettive in

(1) Cfr. *Lezioni*, § 49.

sè, e quindi, per un noto teorema [ENRIQUES–FANO [1]], è razionale. Prescindendo dalla regolarità, quel teorema dice che una superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè, è razionale o riferibile ad una rigata, perciò: *una superficie che ammetta una serie continua di trasformazioni birazionali in sè, la quale lasci invariato un sistema lineare irriducibile almeno doppiamente infinito, è razionale o riferibile a rigata.*

4. Abbiamo supposto che la superficie F sia regolare, ma è facile vedere come va modificata la [4] quando questa ipotesi non sia soddisfatta. Occorre però far uso di una proprietà che stabiliremo nel capitolo seguente, e cioè che sopra una superficie irregolare, di genere geometrico p_g e genere numerico p_a, ogni sistema lineare $|L|$ fa parte di un sistema continuo di curve dello stesso ordine formato da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti.

Allora se la nostra superficie F è irregolare (con qualche plurigenere maggiore di zero), sopra di essa la rete $|L|_2$, di cui ci si serve per rappresentare la F sopra un piano n — *plo*, può essere scelta in $\infty^{2p_a + p_g + 3n - 3\pi - 3}$ modi diversi, poichè il sistema regolare $|L|$ che contiene la $|L|_2$ fa parte di un sistema continuo $\infty^{p_g - p_a}$ di sistemi analoghi. Per conseguenza il numero dei moduli diviene:

[4′] $$10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \omega \cdot$$

Anche qui il computo dei moduli si basa sopra il presupposto che una rete di curve L priva di punti base, non possa essere limite di una rete di curve dello stesso grado e genere dotata invece di punti base. Per le superficie di genere geometrico $p_g > O$, oppure aventi un qualche plurigenere non nullo, questo presupposto si giustifica come nel caso regolare. Poichè le superficie per cui è $p_g = O$ e sono pure nulli tutti i plurigeneri, risulteranno essere le rigate, *il precedente computo dei moduli vale per le superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate.*

Tuttavia il numero dei moduli deve essere aumentato di t se la

[1] Cfr. F. ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.* (« Atti Ist. Veneto », serie VII, tomo IV, 1892–93. Cfr. anche il vol. V, 1893–94); G. FANO, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in se stesse* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, tomo IV, 1895$_1$).

superficie possiede una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stessa.

Le superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali in se stesse, sono state studiate da PICARD, PAINLEVÉ, CASTELNUOVO ed ENRIQUES, e da questi studi risulta:

1) se una superficie ammette una serie continua di trasformazioni in sè che non appartenga ad un gruppo dipendente da un numero finito di parametri, la superficie è trasformabile in una rigata [CASTELNUOVO-ENRIQUES (1)];

2) le superficie non riferibili a rigate, che posseggono un gruppo continuo di trasformazioni dipendenti da un numero finito di parametri, dànno luogo a due tipi: *superficie iperellittiche* con un gruppo permutabile doppiamente infinito di trasformazioni in se stesse, e *superficie ellittiche* con un gruppo algebrico semplicemente infinito di trasformazioni in se stesse [PICARD e PAINLEVÉ (2)];

3) le *superficie iperellittiche* sono definite dai caratteri:

$$p_a = -1\,,\ p_g = P_4 = 1\ \ (p^{(1)} = 1)\,,$$

e le *superficie ellittiche* da:

$$p_a = -1\,, p_g = O\ \ \ (p^{(1)} = 1)\ (3)\,.$$

(1) Cfr. G. CASTELNUOVO e F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* (« Annali di Mat. », serie 3ª, tomo VI, 1900).

(2) Cfr. PICARD E., *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce* (« Journ. de Math. », serie IV, tomo I, 1885); *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (« Journ. de Math. », serie IV, tomo V, 1889); e PICARD E.-SIMART G., *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* tomo II, cap. XIV (Paris, 1906); PAINLEVÉ P., *Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », tomo CXXI, 1895); *Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles* (Stockholm, 1895).

Una superficie con un gruppo almeno triplamente infinito di trasformazioni birazionali in se stessa, è razionale o riferibile a rigata. Cfr. CASTELNUOVO G. et ENRIQUES F., *Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles mêmes* (« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences », tomo CXXI, 1895).

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (« Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo XX, 1905); *Sulle superficie di genere geometrico zero* (« Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo XX, 1905).

Per queste superficie possedenti un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni birazionali in se stesse, con $t = 1, 2$, il numero dei moduli potrebbe essere calcolato con la formula [4'] aggiungendo t: ma poichè nella [4'] non è determinato il valore di ω ($\omega \geqq O$) non si giungerebbe ad un risultato utile, mentre prendendo $\omega = O$ si otterrebbe un numero negativo. Però per le superficie anzidette si riesce a calcolare direttamente il numero dei moduli seguendo altra via.

Anche per le rigate – per le quali non si può utilizzare il precedente computo dei moduli – si giunge senza difficoltà al calcolo diretto del numero dei predetti moduli: le rigate di genere p, per $p > 1$ dipendono infatti da $3p - 3$ moduli, come le curve dello stesso genere; per $p = 1$ si ha *un* modulo, e per $p = O$ (superficie razionali) non se ne ha nessuno.

5. Torniamo al caso regolare e applichiamo la formula [4] al computo dei moduli delle superficie di genere uno, con curva canonica d'ordine zero, le quali sono caratterizzate dall'avere il genere e tutti i plurigeneri uguali all'unità [1].

Dalla [4] il numero dei moduli di siffatte superficie risulta uguale a

$$19 + \omega\,, \quad \text{con} \quad \omega \geqq 0\,.$$

Resta da determinare il valore di ω: ora per i primi tipi di superficie con i generi uguali ad uno, delle quali è facile costruire un modello proiettivo (piano doppio con sestica di diramazione; superficie del quarto ordine nello spazio ordinario; superficie intersezione di una varietà cubica e di una quadrica nello spazio a quattro dimensioni; ...), i moduli si possono contare direttamente, e si trova che il loro numero è 19, cioè che $\omega = 0$ [2]. Ebbene ci si può persuadere che questo risultato sussiste in generale, cioè: *le superficie regolari con tutti i generi uguali all'unità, dipendono da 19 moduli.*

Le superficie in discorso si realizzano mediante superficie $F_{2\pi-2}$, d'ordine $2\pi - 2$, normali in un iperspazio S_π a π dimensioni, aventi per sezioni iperpiane delle *curve canoniche di genere* π dell'$S_{\pi-1}$ a cui

[1] Cfr. *Lezioni*, § 52.

[2] Cfr. *Lezioni*, § 52.

appartengono [1]. Supposto che per un certo valore di π si abbia $\omega = 0$, proveremo che lo stesso accade per $\pi + 1$, cioè che anche le $F_{2\pi}$ di $S_{\pi+1}$ dipendono da 19 moduli e non più. Si supponga infatti che per le $F_{2\pi}$ sia $\omega > 0$, cosicchè esse abbiano almeno 20 moduli. Consideriamo allora le $F_{2\pi}$ dotate di un punto doppio: poichè l'imporre un tale punto porta una condizione, le $F_{2\pi}$ siffatte dipenderanno almeno da 19 moduli. Ma codeste $F_{2\pi}$, per proiezione dal loro punto doppio in un S_{π}, dànno luogo a $F_{2\pi-2}$ che contengono una conica. E anche queste $F_{2\pi-2}$ dovranno dipendere da 19 moduli (almeno), come le $F_{2\pi}$ da cui provengono. Ora dimostreremo che ciò è assurdo. Invero abbiamo supposto che le superficie con tutti i generi uguali ad uno, appartenenti ad un S_{π}, dipendano da 19 moduli e non da più; se le $F_{2\pi-2}$ ottenute per proiezione nel modo dianzi detto, dipendessero effettivamente da 19 moduli, esse sarebbero superficie generali della loro classe, mentre invece per il loro modello proiettivo $F_{2\pi-2}$ *il possesso di una conica è una particolarità che implica una condizione.*

Per provare l'asserto supponiamo dapprima che la $F_{2\pi-2}$ proiezione di una $F_{2\pi}$ con un punto doppio, sia semplice. Se la $F_{2\pi-2}$ (di S_{π}) contiene una conica γ, esiste un sistema $\infty^{\pi-3}$ di iperpiani le cui sezioni con la $F_{2\pi-2}$ sono spezzate nella γ e in una curva residua C. Poichè il sistema completo $|C|$ ha la dimensione $\pi - 3$, anche il suo genere è uguale a $\pi - 3$ [2]: ma allora, dato che la sezione iperpiana $\gamma + C$ è di genere π, si ha che la conica γ e la C hanno quattro punti in comune, cioè la $\gamma + C$ possiede quattro punti doppi (che cadono in punti semplici per la $F_{2\pi-2}$), cosicchè l'iperpiano segante la $\gamma + C$ risulta quadritangente alla $F_{2\pi-2}$.

Consideriamo ora il sistema di tutte le curve di S_{π} che sono sezioni iperpiane di qualche $F_{2\pi-2}$: esso ha la dimensione $\pi + r$, se con r indichiamo l'infinità delle $F_{2\pi-2}$, e nel supposto che non esistano infinite $F_{2\pi-2}$ aventi in comune una stessa sezione iperpiana (altrimenti questa dimensione sarebbe $r - s$, essendovi ∞^{s} $F_{2\pi-2}$ con una sezione comune). Poichè il fatto che una curva del sistema contenga come parte una conica, richiede quattro condizioni (qua-

(1) Cfr. *Lezioni*, § 52.

(2) Cfr. *Lezioni*, § 52.

dritangenza dell'iperpiano relativo con la $F_{2\pi-2}$) si avranno $\infty^{\pi+r-4}$ curve riducibili con una componente del secondo ordine. Ma abbiamo visto che se sopra una $F_{2\pi-2}$ esiste una conica, per questa passano $\infty^{\pi-3}$ iperpiani: ne risulta che le $F_{2\pi-2}$ contenenti una conica sono ∞^{r-1} invece di ∞^{r}. Ciò prova che per le $F_{2\pi-2}$ la proprietà di contenere una conica implica una condizione [1].

La nostra dimostrazione si basa sull'ipotesi che la $F_{2\pi-2}$ di S_π, proiezione della $F_{2\pi}$ (di $S_{\pi+1}$) da un suo punto doppio, sia semplice. Ma allo stesso risultato si giunge anche se la $F_{2\pi-2}$ proiezione si riduce ad una $F_{\pi-1}$ contata due volte; nel qual caso la $F_{2\pi-2}$ si lascia trasformare in un piano doppio, essendo la $F_{\pi-1}$ razionale a sezioni razionali. Ci limiteremo, per brevità, ad un esempio: sia $\pi = 5$ e la $F_{2\pi}$, del decimo ordine, proiettata da un suo punto doppio nello spazio a quattro dimensioni dia luogo ad una *superficie di Veronese* doppia, con curva di diramazione del dodicesimo ordine; la quale si riporta al piano doppio con C_6 di diramazione.

Al punto doppio della superficie obbiettiva F_{10}, corrisponde sul piano una conica che risulta seitangente alla C_6 di diramazione, essendo immagine di una curva non unita nell'involuzione relativa al piano doppio [2]. Ma allora la curva di diramazione non può essere una C_6 generica (dipendente da 19 invarianti), perchè una tale C_6 non possiede alcuna conica che abbia con essa sei punti di contatto.

Tuttavia le considerazioni precedenti non dànno una trattazione rigorosa. Invero abbiamo dianzi contato il numero delle condizioni a cui deve soddisfare una curva canonica di S_π, affinchè si spezzi contenendo come parte una conica: questo numero è uguale a quattro. Ma siamo sicuri che le quattro condizioni di spezzamento risultino indipendenti per un qualunque sistema di curve contenuto nella totalità delle curve predette? invero la totalità di codeste curve comprende $\infty^{3\pi-3}$ curve proiettivamente distinte, mentre il sistema delle sezioni delle $F_{2\pi-2}$ ha la dimensione $\pi + 19$.

(1) Cfr. i noti criteri per il computo delle costanti in ENRIQUES-CHISINI, libro I, cap. III (vol. I).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 58.

In vista della critica svolta, si può cercare un'altra dimostrazione del computo dei moduli per le superficie di generi uno, riconducendoci al computo delle condizioni per l'esistenza di una curva razionale sopra la superficie F_4, del quarto ordine nello spazio ordinario, sebbene anche qui si ripresenti – sotto altra forma – la stessa difficoltà.

Per una superficie del quarto ordine il possedere una curva razionale Γ (*di genere effettivo e virtuale nullo*) *implica una condizione.* Cioè: *le* F_4 *che contengono una curva razionale dipendono da 18 moduli.*

Per provarlo si considerino le superficie d'ordine n sufficientemente alto, che passano per la Γ. Esse segano sulla F_4 un sistema $|C|$, di cui dobbiamo determinare la dimensione che sappiamo essere uguale al genere. Per questo si cominci col contare il numero $(C\Gamma)$ delle intersezioni di una C con la Γ: una superficie F_n d'ordine n sega la Γ (d'ordine ν) in νn punti, quindi:

$$\nu n = (C\Gamma) - 2,$$

dato che la Γ è di grado -2 (1).

Ne segue:

$$(C\Gamma) = \nu n + 2,$$

cioè le F_n passanti per Γ toccano la F_4 in $\nu n + 2$ punti (2).

Allora, siccome il sistema $|C + \Gamma|$ delle sezioni della F_4 con le superficie d'ordine n ha il genere (e la dimensione) $2n^2 + 1$, si ha subito che le C sono di genere $2n^2 - \nu n$, e questo numero dà anche la dimensione del sistema $|C|$. Pertanto sulla F_4 esistono $\infty^{2n^2 - \nu n}$ curve intersezioni complete con le F_n, che contengono come parte la Γ. Si giunge così al computo dei parametri da cui dipende una F_4 contenente Γ, e ciò in modo del tutto analogo a quello sopra seguito per contare le $F_{2\pi-2}$, di S_π, contenenti una conica. Invero: la serie delle curve d'ordine $4n$ che sono intersezioni complete di una F_n con una F_4, ha la dimensione $2n^2 + 35$, poichè le F_4 sono ∞^{34}. Tra tali

(1) Cfr. *Lezioni*, § 52.

(2) A questo risultato si può giungere subito richiamando note formule, le quali darebbero senz'altro anche il genere di C. Cfr., per esempio, ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. V, § 48 (vol. III, pag. 532).

curve quelle spezzate con una componente razionale Γ d'ordine ν, costituiscono una totalità di dimensione

$$2n^2 - \nu n + 33,$$

dato che per le curve in discorso il contenere la Γ richiede $\nu n + 2$ condizioni (costituite dalle condizioni perchè la relativa F_n tocchi $\nu n + 2$ volte la F_4). Quindi queste curve spezzate si distribuiscono sopra ∞^{33} superficie F_4, poichè, come abbiamo visto, se una F_4 contiene una curva razionale questa fa parte di $\infty^{2n^2 - \nu n}$ sezioni della F_4 con superficie d'ordine n. Si conclude che per una F_4, il contenere la Γ richiede una condizione. In altri termini, siccome le proiettività dello spazio ordinario sono ∞^{15}, si ha che le predette ∞^{33} F_4 dipendono soltanto da 18 invarianti proiettivi, che sono altrettanti moduli per la loro classe [1].

In vista del risultato cui si vuol giungere, giova rilevare che dal teorema precedente segue il corollario:

Le superficie del quarto ordine possedenti quattro curve razionali, non secantisi fra loro, dipendono da 15 moduli.

Infatti le condizioni di possesso di tali curve razionali si debbono presumere indipendenti, perchè allargando la *base* della F_4 con l'aggiungere alle sezioni piane una curva razionale, non si riesce a costruire per somma e sottrazione delle curve date, una seconda curva razionale che non seghi la prima.

Con la riserva critica di giustificare rigorosamente le asserzioni che precedono, passiamo a mostrare come il corollario sopra enunciato permetta di dedurre che le nostre $F_{2\pi-2}$ di S_π, dipendono da 19 moduli.

Si prenda una $F_{2\pi-2}$ di S_π $(\pi > 3)$, dotata di quattro punti doppi ordinari o_1, o_2, o_3, o_4, e, detto $|C|$ il sistema delle sue sezioni iperpiane, consideriamo il sistema

$$[5] \qquad |C - \nu_1 o_1 - \nu_2 o_2 - \nu_3 o_3 - \nu_4 o_4|,$$

che è costituito dalle C passanti per i punti o_i con $2\nu_i$ rami, dove le ν_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ designano dei numeri positivi che fisseremo in modo opportuno.

[1] Cfr. *Lezioni*, § 52.

Ricordando che a un punto doppio ordinario risponde una curva di genere zero e di grado -2 (1), si ha che il sistema [5] è di genere (e quindi di dimensione):

$$\pi - (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2),$$

e di grado

$$2\pi - 2(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2) - 2.$$

Allora poichè ogni intero positivo si può decomporre nella somma di quattro quadrati (teorema di BACHET–LEGENDRE), prendiamo i numeri ν_i in modo che

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2 = \pi - 3.$$

Il sistema [5] diviene così di dimensione 3 e di grado 4: quindi esso ha per immagine una superficie F_4, appartenente allo spazio ordinario e d'ordine quattro, la quale possiede quattro curve razionali degli ordini $2\nu_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, non intersecantesi fra loro.

Pertanto ogni $F_{2\pi-2}$ di S_π $(\pi > 3)$, dotata di quattro punti doppi ordinari, è birazionalmente identica ad una F_4 di S_3, possedente quattro curve razionali. Ma le $F_{2\pi-2}$ con quattro punti doppi ordinari, dipendono da $19 + \omega$ moduli (essendo $\omega \geqq 0$), mentre, per quanto abbiamo visto, le F_4 loro trasformate non possono dipendere da più di 15 moduli, onde necessariamente

$$\omega = 0$$

come appunto si trattava di dimostrare (2).

Nota critica. — Per il rigore di questa dimostrazione occorre precisare meglio i punti già sopra accennati, dimostrando che il possesso di una curva razionale per una superficie del quarto ordine implica *una* condizione, e il possesso di più curve razionali non secantisi importa sempre condizioni indipendenti. Non ci arresteremo

(1) Cfr. *Lezioni*, § 20.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero* («Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», t. LXVIII, p. II, 1908-909).

ad esaminare se, o in che modo e fino a qual punto, le dimostrazioni che qui occorrono siano purificate da ogni dubbio, rimandando per ciò alla letteratura relativa (1).

6. Dopo avere trattato dei moduli delle superficie coi generi uno, ritorniamo al caso generale: $p_g > 1$. Che cosa si può dire intorno alla quantità ω ($\geqq 0$) che comparisce nell'espressione [4] del numero dei moduli?

Poichè il numero dei moduli di una superficie esprime certo un carattere invariante, anche ω *è un invariante della superficie F*. Non è però noto se si tratti di un nuovo invariante, oppure se esso sia esprimibile per p_g, p_a e $p^{(1)}$.

Così pure, in generale, nulla è noto circa l'effettivo valore di ω: solo si può dire che *per le superficie regolari F di genere* $p_g = p_a = p \geqq 4$, *con curve canoniche irriducibili* ($p^{(1)} \geqq 6$) (2), *si ha*:

$$\omega \geqq p. \tag{6}$$

Allora dalla [4] si ottiene come *limite inferiore del numero dei moduli della F (con* $p \geqq 4$ *e* $p^{(1)} \geqq 6$*)*:

$$10p - 2p^{(1)} + 12.$$

A quest'ultimo numero era pervenuto M. NOETHER contando i moduli di una superficie con un procedimento fondato sulle formule di postulazione (3); quindi il risultato del NOETHER va corretto nel senso che esso dà soltanto un limite inferiore per il caso $p \geqq 4$ e $p^{(1)} \geqq 6$.

(1) Cfr. M. NOETHER, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (« Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin », 1883); K. ROHN: *Die Raumcurven auf den Flächen vierter Ordnung* (« Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig », 1897). Vedi anche G. FANO, *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme* (« Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLIV, 1909); S. LEFSCHETZ, *On certain numerical Invariants of algebraic Varieties* (« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 22, 1921) e *Concerning Nöther's theorem on curves traced on non-singular surfaces* (« Bulletin of the American Mathematical Society », vol. 29, 1923).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 61.

(3) Cfr. M. NOETHER, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (« Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin », 1888).

Per stabilire la [6] conviene ricercare quale è il significato di ω quando dal piano multiplo si passa alla superficie obiettiva F.

Alle rette del piano multiplo α corrispondono su F le curve di una rete $|L|_2$, che supporremo contenuta in un sistema lineare $|L|$ almeno triplamente infinito. Per semplicità di esposizione si assuma la F appartenente allo spazio ordinario, ed in guisa che sopra di essa la $|L|_2$ sia segata dai piani passanti per un punto O, per modo che il nostro piano multiplo α si potrà riguardare come ottenuto per proiezione della F da O. Allora la curva di diramazione C di α, rappresenta la jacobiana L_j della rete $|L|_2$, che è una curva del sistema $|3L+K|$, avendo indicato con $|K|$ il sistema canonico. La L_j è segata su F (fuori della curva doppia) dalla superficie polare prima di O; e le superficie polari analoghe passanti per i punti cuspidali della curva doppia di F, segano sulla L_j una serie che viene proiettata in quella segata sulla C (d'ordine m) dalle curve polari d'ordine m-1. Ne segue che alla serie segata su C dalle sue curve aggiunte d'ordine m che toccano nelle cuspidi di C le relative tangenti cuspidali, corrisponde sulla L_j la serie segata dalle curve di $|4L+K|$ che passano per i punti cuspidali di F. Pertanto anche quest'ultima serie sulla L_j ha l'indice di specialità uguale ad ω. Cioè, indipendentemente dal modello proiettivo assunto per la F (¹):

Data, sopra la superficie, una rete di curve $|L|_2$, contenuta in un sistema lineare $|L|$ almeno triplamente infinito, si prenda la curva jacobiana L_j della rete $|L|_2$, e si consideri la serie lineare segata sopra la L_j dalle curve del sistema $|4L+K|$ ($|K|$ essendo il sistema canonico della superficie) che passano per il gruppo G dei punti comuni alle jacobiane di tutte le reti estratte da un medesimo sistema lineare ∞^3 contenente la $|L|_2$: *la predetta serie lineare ha l'indice di specialità uguale ad* ω (²).

(¹) Cfr. § 2, n. 1.

(²) A questo significato della ω può darsi anche un'altra interpretazione. Supponiamo dapprima che il sistema $|L|$ contenga il sistema canonico $|K|$: allora la serie segata da $|4L+K|$ sulla L_j è non speciale, e perciò, se invece la serie segata su L_j dalle curve di $|4L+K|$ che passano per il gruppo G ha l'indice di specialità ω, i τ punti di G presentano alle curve di $|4L+K|$ che passano per essi solo $\tau-\omega$ condizioni indipendenti, cioè ω *è la sovrabbondanza del sistema delle curve di* $|4L+K|$ *passanti per i punti del gruppo* G. Se $|4L+K|$ sega sulla L_j una serie speciale, con indice di specialità θ, la *sovrabbondanza* del predetto sistema è $\omega-\theta$.

Servendoci di questo significato di ω, è agevole giungere alla [6].

Supposto che il sistema canonico $|K|$ sia irriducibile e almeno ∞^3, prendiamo al posto del sistema $|L|$ considerato dianzi, il sistema $|K|$ stesso. Allora la jacobiana K_j di una rete $|K|_2$ di curve K, appartiene al sistema $|4K|$, mentre il sistema $|4L + K|$ viene a coincidere con $|5K|$ cioè con l'aggiunto di $|K_j|$, e quindi $|5K|$ sega su K_j la serie canonica completa (per la regolarità della superficie F) (¹). Sia ω l'indice di specialità della serie segata su K_j dalle curve di $|5K|$ che passano per il gruppo G dei punti comuni alle jacobiane delle reti estratte da un sistema lineare ∞^3 contenente la rete considerata $|K|_2$: poichè, come si è detto, $|5K|$ segna sulla K_j la serie canonica completa, il numero $\overline{\omega}$ supera di un'unità la dimensione della serie individuata sulla K_j dal gruppo G (²). Ma nel sistema canonico $|K|$ esistono ∞^{p-4} sistemi lineari triplamente infiniti $|K|_3$ contenenti la rete $|K|_2$ (³): siccome ognuno di tali sistemi determina sulla K_j un gruppo analogo a G, la dimensione della serie completa descritta da G sarà:

$$\omega - 1 = p - 4 + \omega'$$

dove ω' ($\geqq 0$) designa l'eventuale deficienza della serie costituita dai gruppi G relativi ai predetti ∞^{p-4} sistemi $|K|_3$ contenenti la rete $|K|_2$.

Si ha pertanto:

$$\overline{\omega} = p - 3 + \omega' .$$

Ma bisogna fermare l'attenzione sopra una circostanza facile a sfuggire: la ω qui introdotta non è uguale all'invariante ω che comparisce nella [4], poichè, infatti, si è pervenuti alla [4] partendo dalla considerazione di un sistema regolare $|L|$ sopra la F, mentre il sistema canonico $|K|$, a cui è relativo $\overline{\omega}$, non è regolare, essendo un sistema speciale (⁴).

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 46, pag. 239.

(²) Teorema di RIEMANN-ROCH per le curve. Cfr., per esempio, ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. II, § 17 (vol. III, pag. 137).

(³) Tanti, cioè, quanti sono gli S_3 di un S_{p-1} passanti per un S_2. Cfr. BERTINI, loc. cit.

(⁴) Cfr. *Lezioni*, § 48.

Allora come va modificata la [4] quando ci si riferisca ai diversi modi di rappresentare la F sopra un piano $(p^{(1)} - 1) - plo$, mediante le reti contenute nel sistema canonico $|K|$? Basta osservare che, essendo il sistema $|K|$ di dimensione $p - 1$, le reti in esso contenute sono soltanto $\infty^{3(p-3)}$, cioè che – con le notazioni dianzi usate – si ha:

$$s = 3p - 1,$$

e quindi il numero dei moduli della F, calcolato per questa via, risulta:

[7] $$9p - 2p^{(1)} + 15 + \bar{\omega}.$$

La [7] confrontata con la [4] dà:

$$\omega = \omega + 3$$

e quindi:

$$\omega = p + \omega',$$

da cui appunto, avendosi $\omega' \geqq 0$:

$$\omega \geqq p .$$

7. Il computo dei moduli di una superficie F, può farsi anche in altro modo prendendo come modello proiettivo della *classe* $[F]$, invece di un piano multiplo, una superficie dello spazio ordinario (¹).

Tra le superficie birazionalmente identiche alla data (che non appartiene alla famiglia delle rigate), prendiamone una, F, priva di curve eccezionali, e sopra di essa consideriamo un sistema regolare irriducibile $|L|$ (di genere π e grado n), almeno triplamente infinito, senza punti base. Mediante un sistema ∞^3 contenuto in $|L|$, la F si trasforma in una superficie F^* dello spazio ordinario (sulla quale $|L|$ è segato dai piani), dotata di una curva doppia D e di punti tripli (che sono tripli anche per D) (²): la F^* appartiene ad un sistema

(¹) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui moduli delle superficie algebriche* (« Rend. R. Accad. dei Lincei », serie V, vol. XVII, 1908).

(²) Cfr. *Lezioni*, §§ 10 e 3.

continuo $\{F^*\}$ di superficie possedenti una curva doppia dello stesso ordine e con lo stesso numero di punti tripli. Si tratta di valutare la dimensione r di questo sistema continuo di superficie, e di detrarre da r l'ordine d'infinità s delle superficie trasformate di F che appartengono alla famiglia stessa: ciò che rimane è il richiesto numero dei moduli:

$$r - s\,.$$

La dimensione r del sistema continuo completo $\{F^*\}$, si può valutare in base all'osservazione che segue.

Tutte le superficie di $\{F^*\}$ infinitamente vicine ad F^*, segano su questa un sistema lineare completo ∞^{r-1} (*sistema caratteristico* della F^*), che si ottiene intersecando la F^* (d'ordine n) con le sue superficie aggiunte dello stesso ordine n, che toccano la F^* nei punti cuspidali della sua curva doppia D.

Invero ogni superficie di $\{F^*\}$ infinitamente vicina alla F^*, si può considerare agli effetti della sua intersezione con la F^*, come una superficie dello stesso ordine n che passi semplicemente per la curva doppia D e per i punti doppi infinitamente vicini ai punti cuspidali di D (¹). Viceversa ad ogni superficie d'ordine n che passi per quella curva e per quei punti doppi, si può sostituire una superficie, ancora d'ordine n, infinitamente vicina alla F^*, con una curva doppia infinitamente vicina alla D e un punto doppio in prossimità di ciascuno dei punti cuspidali di D, e quindi appartenente a $\{F^*\}$.

Pertanto il predetto sistema caratteristico di F^*, non è altro che il sistema delle curve di $|4L + K|$ ($|K|$ essendo il sistema canonico di F^*) che passano per i punti cuspidali di D. Il sistema $|4L + K|$, che è regolare (²), ha la dimensione:

$$p_a + 6n + 4\pi - 4\,.$$

(¹) Ciò in perfetta analogia a quello che abbiamo visto accadere per le curve di una serie continua di curve piane $\{C\}$, infinitamente vicine ad una C (n. 3). Abbiamo anche già avuto occasione di ricordare l'esistenza dei punti doppi infinitamente vicini ai punti cuspidali della curva doppia D di una superficie F^* (§ 2, n. 1).

(²) Cfr. *Lezioni*, § 46, Nota (pag. 250).

I punti cuspidali della curva doppia D di F^*, sono in numero di [1]:

$$2n + 8\pi - 12 p_a + 2 p^{(1)} - 22 .$$

Allora se ω ($\geqq 0$) *è la sovrabbondanza del sistema* $|4L + K|$ *rispetto al gruppo dei predetti punti cuspidali*, la dimensione del sistema caratteristico di F^*, risulta:

$$r - 1 = 13 p_a - 2 p^{(1)} + 4n - 4\pi + 18 + \omega ,$$

da cui:

$$r = 13 p_a - 2 p^{(1)} + 4n - 4\pi + 19 + \omega .$$

Passiamo ora a contare quante trasformate di F appartengono alla famiglia continua $\{F^*\}$.

Entro il sistema regolare $|L|$ (di dimensione $d = p_a + n - \pi + 1$) dato su F, esistono ∞^{4d-12} sistemi lineari triplamente infiniti, a ciascuno dei quali corrispondono ∞^{15} superficie trasformate di F proiettivamente identiche. Si avrà dunque $s = 4d + 3$ se il sistema $|L|$ non appartiene ad una serie continua più ampia di curve dello stesso ordine, ciò che accade se la F è regolare ($p_g = p_a$). Ma se $p_g > p_a$, $|L|$ è contenuto in un sistema continuo non lineare $\infty^{d+p_g-p_a}$ formato di $\infty^{p_g-p_a}$ sistemi lineari di dimensione d [2], e quindi si avrà in generale:

$$s = 4d + 3 + p_g - p_a ,$$

cioè:

$$s = p_g + 3 p_a + 4n - 4\pi + 7 .$$

Si conclude che *il numero dei moduli* della *classe* a cui appartiene F, è:

$$r - s = 10 p_a - p_g - 2 p^{(1)} + 12 + \omega \qquad (\omega \geqq 0).$$

Cioè si ritrova la [4'], con lo stesso significato di ω [3].

(1) Cfr. § 2, n. 2.

(2) Cfr. §§ 5 e 6.

(3) Cfr. questo paragrafo, n. 6.

CAPITOLO II.

La proprietà caratteristica delle superficie irregolari.

§ 5. – Il sistema continuo sopra una superficie irregolare di genere $p_g = 0$.

1. Sia data una superficie (*irregolare*) F di *genere geometrico* nullo, $p_g = 0$, e di *genere numerico* negativo, $p_a = -p$ con $p > 0$. Sopra la F si prenda una curva irriducibile C, di genere π e grado n (con $-p + n - \pi + 1 > 1$), che appartenga ad un sistema regolare $|C|$ di dimensione $r > 1$ (¹). Sussiste allora la seguente proprietà caratteristica:

Il sistema lineare $|C|$ fa parte di una serie continua ∞^p di sistemi lineari disequivalenti, che hanno, in generale, la stessa dimensione di $|C|$.

2. Per ipotesi, essendo $|C|$ regolare, la sua dimensione è:

$$r = -p + n - \pi + 1 .$$

Supponiamo anche che si abbia $n > \pi - 1$, nel qual caso – come è facile vedere (²) – anche il sistema irriducibile $|2C|$ risulta regolare di dimensione

$$R = -p + 3n - 2\pi + 2 .$$

Consideriamo allora le curve di $|2C|$ dotate di n punti doppi (l'imposizione dei quali porta, al massimo, ad n condizioni, non lineari): esse si distribuiranno in uno o più sistemi continui (in numero finito) ciascuno avente almeno la dimensione

$$R - n = 2r + p .$$

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 48.

(²) Per la dimensione R di $|2C|$ si ha $R \geq -p + 3n - 2\pi + 2$. Consideriamo la serie segata da $|2C|$ sopra una C: essa è non speciale per $n > \pi - 1$, e se δ è la sua deficienza, è una $g_{2n}^{2n-\pi-\delta}$. Quindi lo staccamento di una C da $|2C|$ richiede $2n - \pi - \delta + 1$ condizioni lineari. Segue $R - (2n - \pi - \delta + 1) = r$, da cui $R \leq -p + 3n - 2\pi + 2$. E perciò, necessariamente, $R = -p + 3n - 2\pi + 2$.

Sia $(2C)$ quello dei predetti sistemi che contiene le ∞^r curve spezzate in due C di $|C|$: per il noto *principio di degenerazione* (1) tutte le curve di $(2C)$ saranno spezzate, altrimenti una curva di $(2C)$ variando con continuità potrebbe spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppi. Le componenti delle curve di $(2C)$ appartengono evidentemente ad uno stesso sistema continuo di cui fanno parte le C, e quindi al sistema continuo $\{C\}$ che contiene $|C|$.

Si tratta di provare che il sistema continuo $\{C\}$ ha la dimensione $r+p$.

Per ciò indichiamo con $r+x$ $(x \geqq 0)$ l'incognita dimensione di $\{C\}$, e dimostriamo intanto che è $x \geqq p$.

Ciascuna curva di $(2C)$ è composta con due curve di $\{C\}$ la cui somma appartiene a $|2C|$, e viceversa: ora se C^* è una curva di $\{C\}$, esistono in $\{C\}$ ∞^r curve che sommate alla C^* dànno una curva di $|2C|$; esse sono le curve del sistema

$$|2C - C^*|$$

il quale ha, in generale, la dimensione r. Pertanto, facendo variare C^* nel sistema ∞^{r+x} $\{C\}$, si trova che $(2C)$ è di dimensione $2r+x$, e quindi

$$2r + x \geqq 2r + p\,,$$

cioè $x \geqq p$.

D'altra parte, considerando la serie caratteristica di $|C|$ che è ∞^{r-1} ed ha una deficienza non superiore a p (2), ed osservando che codesta serie caratteristica è contenuta in quella (∞^{r+x-1}) di $\{C\}$, si ha

$$r + x - 1 \leqq r - 1 + p\,,$$

da cui $x \leqq p$.

Segue necessariamente:

$$x = p\,.$$

È così provato che la dimensione di $\{C\}$ è $r+p$, e poichè ogni C appartiene ad un sistema lineare ∞^r, si deduce – come avevamo asserito – che: *le curve di* $\{C\}$ *si distribuiscono in* ∞^p *sistemi lineari* ∞^r.

(1) Cfr. Enriques–Chisini, libro V, cap. III, § 36 (vol. III, pag. 405).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 49.

3. Il teorema si estende al caso di un sistema lineare $|K|$ qualunque, di dimensione virtuale $r \geqq 0$, anche se non regolare.

Infatti, accanto a $|K|$ si consideri ancora un sistema irriducibile e regolare $|C|$, per cui valga la proprietà sopra dimostrata di appartenere ad una serie ∞^{p} di sistemi lineari disequivalenti. Allora la serie continua di sistemi lineari disequivalenti che costituisce il sistema continuo $\{K\}$, si otterrà sommando e sottraendo a K due curve disequivalenti, C e C^*, di $\{C\}$:

$$\{K\} = \{K + C - C^*\};$$

ed è facile riconoscere che l'operazione di sommare C e sottrarre C^* risulta sempre possibile perchè $|K|$ ha, per ipotesi, la dimensione virtuale $r \geqq 0$.

§ 6. – Il sistema continuo sopra una superficie irregolare di genere $p_g > 0$.

1. Il teorema precedente che dà una proprietà fondamentale dei sistemi continui di curve sopra le superficie *irregolari* di genere geometrico nullo, si può estendere ad una superficie irregolare qualunque?

La risposta è affermativa:

Sopra una superficie irregolare di genere geometrico p_g e genere numerico p_a, ogni sistema lineare fa parte di una serie continua $\infty^{p_g - p_a}$ di sistemi lineari disequivalenti.

Riprendiamo, come dianzi, un sistema lineare irriducibile e regolare $|C|$, di genere π e grado n, con $n > \pi - 1$, e di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1 > 1$$

(il sistema $|C|$ risulta non speciale dall'ipotesi $n > \pi - 1$).

Il sistema lineare $|2C|$, doppio di $|C|$, è irriducibile e regolare, di dimensione

$$R = p_a + 3n - 2\pi + 2 = n - p_a + 2r.$$

Consideriamo le curve di $|2C|$ dotate di n punti doppi, e dei vari sistemi continui in cui esse si distribuiscono, sia $(2C)$ quello che contiene le curve spezzate in due C di $|C|$: le curve di $(2C)$ – per il ***principio di degenerazione*** – risulteranno tutte riducibili, le loro componenti appartenendo al sistema continuo $\{C\}$ individuato da $|C|$, ed essendo associate come residue l'una dell'altra rispetto a $|2C|$.

Fin qui abbiamo ripetuto la stessa costruzione fatta per il caso $p_g = 0$ [1]: ora dobbiamo valutare la dimensione del sistema continuo $(2C)$, la quale – siccome $(2C)$ proviene dall'imposizione di n punti doppi alle curve di $|2C|$ – sarà certo non minore di $R - n$, ma in generale dovrà ritenersi uguale a $R - n + d$, supponendo che l'imporre n punti doppi alle $2C$ importi soltanto $n - d$ condizioni indipendenti. Per il nostro scopo occorre precisamente dimostrare che è $d = p_g$.

A tal fine si consideri una curva $C + C^*$ spezzata in due curve del sistema lineare $|C|$, e si determini il numero delle curve di $(2C)$ che sono infinitamente vicine ad essa. Per ciò si prenda il fascio determinato da $C + C^*$ e da una curva di $|2C|$ passante per gli n punti comuni a C e a C^*; questo fascio possiede n punti base con tangenti fisse, e quindi contiene accanto alla $C + C^*$, un'altra curva infinitamente vicina ad essa, con n punti doppi. Ma le curve di $|2C|$ passanti per gli n punti comuni a C e C^*, segano sopra C la sua serie caratteristica resa completa, cioè [2] una serie di dimensione

$$r - 1 + p_g - p_a = p_g + n - \pi;$$

e per ogni gruppo di questa serie passano precisamente ∞^{r+1} curve di $|2C|$, fra cui ∞^r spezzate nella C e in un'altra curva equivalente. Segue di qui che le curve di $(2C)$ infinitamente vicine a $C + C^*$, sono $\infty^{r + p_g + n - \pi}$, altrettanti essendo i fasci di curve contenuti in $|2C|$ con n punti base nelle intersezioni della C con la C^*. Si conclude che la dimensione del sistema $(2C)$ vale:

$$r + p_g + n - \pi + 1 = R - n + p_g = 2r + p_g - p_a .$$

Posto ciò, indichiamo con $r + x$ $(x \geqq 0)$ la dimensione del sistema continuo $\{C\}$: come si è già osservato, ciascuna curva di $(2C)$ è com-

(1) Cfr. paragrafo precedente.
(2) Cfr. *Lezioni*, § 49.

posta con due curve di $\{C\}$ la cui somma appartiene a $|2C|$, e viceversa; allora, siccome il sistema lineare residuo di una C di $\{C\}$ rispetto a $|2C|$ ha (in generale) la dimensione r, ogni C di $\{C\}$ dà luogo ad ∞^r curve di $(2C)$, e quindi quest'ultimo sistema ha la dimensione $2r + x$. Si ha pertanto:

$$2r + x = 2r + p_g - p_a\,,$$

da cui:

$$x = p_g - p_a\,.$$

Se ne deduce il teorema enunciato, il quale poi si estende dal particolare sistema regolare $|C|$, sopra considerato, ad un sistema lineare qualunque (di dimensione virtuale $r \geqq 0$), nello stesso modo seguito nel paragrafo precedente per il caso $p_g = 0$. Cioè – salvo una riserva critica di cui diremo tra breve – si ha che sulla nostra superficie irregolare, *ogni curva di genere* π, *di grado* n *e d'indice di specialità* i, *che individui un sistema lineare di dimensione virtuale* (¹)

$$r = p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0\,,$$

appartiene ad un sistema continuo $\infty^{r+p_g-p_a}$, *composto di una serie* $\infty^{p_g-p_a}$ *di sistemi lineari disequivalenti.*

2. *Osservazione.* — Abbiamo visto (²) che la serie continua $\infty^{p_g-p_a}$ dei sistemi lineari disequivalenti a cui appartiene un sistema lineare $|C|$ sopra la superficie, si deduce a partire da un altro sistema continuo completo $\{K\}$, sommando e sottraendo al sistema lineare $|C|$ curve disequivalenti di $\{K\}$:

$$\{C\} = \{C + K - K^*\}.$$

Ora se si considerano i sistemi lineari $|C|$ contenuti in $\{C\}$ come punti di una varietà V a $d = p_g - p_a$ dimensioni, l'addizione di

$$K - K^*$$

si può riguardare come una operazione sui punti di V, cioè come una trasformazione birazionale della varietà in se stessa, per modo

(¹) Cfr. *Lezioni*, § 48.

(²) Cfr. paragrafo precedente, n. 3.

che la V ammetterà un gruppo di trasformazioni birazionali in sè, permutabili fra loro.

In grazia di questa osservazione, e in base ad un teorema del PICARD, si ha che la V è una *varietà abeliana*, che ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni $2p$ volte periodiche di p argomenti (1).

3. Abbiamo accennato che il ragionamento svolto nel n. 1 è soggetto ad un dubbio critico. Per valutare la dimensione del sistema continuo $(2C)$, e quindi anche di $\{C\}$, abbiamo contato le curve infinitamente vicine ad una data che gli appartengono. È lecito affidarsi a questo computo?

Supponiamo che si tratti di valutare la dimensione della varietà definita, nello spazio ordinario, come intersezione di tre o più superficie $F_1, F_2, F_3, \ldots$, passanti per un certo punto O. Nel caso generale $F_1, F_2, F_3, \ldots$, non hanno in O alcuna tangente comune: la dimensione della varietà costituita dal punto O è nulla, e in numero di zero sono i punti infinitamente vicini ad O sopra di essa. Ma se $F_1, F_2, F_3, \ldots$, posseggono in O una tangente comune, la dimensione della loro intersezione restando nulla, si ha pure un punto infinitamente vicino ad O.

Se poi c'è una curva C, per O, comune a $F_1, F_2, F_3, \ldots$, l'intersezione di queste ha la dimensione uno, e in generale per ogni punto di C vi è un solo punto infinitamente vicino che appartiene all'intersezione medesima.

Ma, senza che cresca la dimensione di C, può crescere il numero dei punti infinitamente vicini ad un suo punto che sono comuni ad $F_1, F_2, F_3, \ldots$, quando queste superficie si tocchino lungo la C.

È ormai chiaro da questi semplici esempi, che quando una varietà algebrica sia definita mediante un certo numero di condizioni [come accade per la $(2C)$ definita entro un sistema lineare da n condizioni che si suppongono non indipendenti fra loro], il computo della sua dimensione non si può ricondurre a quello degli elementi che sono infinitamente vicini ad un elemento della varietà, se non si ammetta

(1) Per le nozioni elementari sulle varietà abeliane cfr., per esempio, ENRIQUES-CHISINI, vol. IV.

un *postulato di non contatto* delle condizioni predette. Il significato di questa ipotesi rispetto alla nostra questione si riduce al seguente:

Postulato. – Se lo spezzamento di una curva entro il sistema lineare $|2C|$ importa $n-d$ condizioni lineari indipendenti, dove n designa il numero dei punti doppi della curva spezzata (comuni alle due componenti), allora le curve spezzate che appartengono ad un sistema lineare ∞^{n-d} entro $|2C|$ contano ciascuna per $\binom{n}{n-d}$ curve (e non per più) fra quelle dotate di $n-d$ punti doppi.

S'intende che basta accertare questo postulato per un qualunque sistema $|C|$ appartenente alla superficie. Si può anche notare che il ragionamento fatto a partire da un sistema $|C|$ che viene raddoppiato, si lascia ripetere in forma analoga partendo da due sistemi $|C|$ e $|K|$ di cui si faccia la somma: si tratta allora di cercare la dimensione del sistema delle curve di $|C+K|$ che sono spezzate in curve dei sistemi continui $\{C\}$ e $\{K\}$, e s'incontra anche qui un computo di curve infinitamente vicine e un postulato perfettamente analogo al precedente.

Il postulato che sopra è stato messo in rilievo, costituisce una ipotesi comunemente accolta nei ragionamenti della geometria numerativa: tuttavia una trattazione rigorosa esige che l'ipotesi venga logicamente giustificata. Restando qui in un ordine d'idee puramente algebrico geometrico, vogliamo accennare in qual guisa lo scopo potrebbe essere raggiunto, senza pretendere di dare a questa giustificazione uno sviluppo completo.

Il punto di partenza delle nostre considerazioni è l'ipotesi che si possa parlare di *curve infinitamente vicine* ad una data sopra una superficie, come di *enti* che abbiano un'*esistenza effettiva*; sui quali si ammetterà poi di operare come su curve o sistemi propri. Potrà sembrare a molti studiosi abituati alle esigenze di rigore dell'analisi infinitesimale, che proprio questa ipotesi sia eminentemente non rigorosa. Ma coloro che conoscono gli sviluppi della teoria delle singolarità delle funzioni algebriche dati da ENRIQUES [1], sanno che la definizione dei punti multipli infinitamente vicini delle curve e delle superficie si riconduce a precise condizioni differenziali, per

[1] Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro IV (vol. II).

modo che quei punti ricevono una definizione analitica che conferisce loro una esistenza logica perfetta. In modo analogo si possono definire entro il sistema continuo delle curve con dati caratteri che appartengono allo spazio a tre dimensioni o a uno spazio superiore, le curve infinitamente vicine ad una data; e si può quindi dare un senso preciso anche al fatto che una superficie contenga una curva infinitamente vicina ad una data C e soddisfaciente eventualmente ad altre condizioni assegnate (1). Invero se si rappresenta il sistema continuo delle curve C dello spazio ambiente con una varietà V, alla nostra superficie F corrisponde su V una varietà v i cui punti sono omologhi alle C giacenti sopra F: l'esistenza di una curva infinitamente vicina ad una C sopra F, corrisponde così al contatto di una curva di V con la v.

Dopo queste premesse, ritorniamo a considerare una superficie irregolare F, sopra la quale si potrà costruire una curva $\bar{C}$ infinitamente vicina ad una data C e ad essa disequivalente, che passi per un gruppo di punti della serie caratteristica di C, resa completa, che non appartenga ad una curva equivalente a C. Ammettiamo che il dubbio critico sollevato innanzi sia valido, ed anzi facciamo l'ipotesi più semplice che la superficie non contenga alcuna curva (dello stesso ordine) infinitamente vicina a C, nell'intorno del secondo ordine di C.

Presa sulla F un'altra curva K, si può costruire una curva $\bar{K}$ disequivalente a K, che sia a questa infinitamente vicina: costruzione analoga a quella della $\bar{C}$ infinitamente vicina a C.

(1) Il procedimento con cui noi definiamo una curva $\bar{C}$ infinitamente vicina ad una curva C sopra una superficie F, dipende veramente dall'applicare il principio di degenerazione alle curve di $|L| = |2C|$ (di genere $\nu = 2\pi + n - 1$) con n punti doppi; e si potrebbe dubitare che ciò non sia legittimo e quindi che una curva di $|L| = |2C|$ infinitamente vicina ad una $C + C^*$ con n punti doppi, non definisca proprio due curve $\bar{C}$ e $\bar{C}^*$ infinitamente vicine a C e a C^*. Per sciogliere questo dubbio converrà trasformare la superficie F in un'altra di un conveniente iperspazio, sopra cui gli iperpiani seghino le curve aggiunte a $|2C|$. Allora dovremo considerare delle curve canoniche (o meglio proiezioni di queste $L_{2\nu-2}^{\nu-1}$) spezzate in due curve C con n punti comuni. Lo spezzamento di una L canonica in due curve appartenenti al sistema continuo definito da C, importa nello spazio ambiente proprio n condizioni e non meno: quindi ogni curva infinitamente vicina a $C + C^*$ che possegga n punti doppi, apparterrà ad una serie continua di curve L con n punti doppi, che risulteranno pure spezzate.

Ora la $\bar{C}$ infinitamente vicina a C nell'intorno del primo ordine, si ottiene sommando $K - \bar{K}$ alla C, e aggiungendo le condizioni lineari di passaggio per alcuni fra i punti comuni a C e $\bar{C}$:

$$C \equiv C + K - K .$$

Ma tornando a sommare $K - K$ si otterrebbe una curva disequivalente:

$$C \equiv C + 2\,(K - K) ,$$

la quale sarebbe successiva a C e apparterrebbe all'intorno del secondo ordine di C, contro l'ipotesi.

È chiaro come il ragionamento si estenda e permetta in ogni caso di dimostrare che per ogni curva infinitamente vicina a C nell'intorno del primo ordine, c'è una successione di curve infinitamente vicine a C negli intorni d'ordine 2, 3, ecc., sicchè, necessariamente, per ognuna di quelle si ha una serie continua di curve a cui appartiene C, ciò che conduce al nostro teorema. Si suppone sempre la « possibilità di operare per somma e sottrazione sulle curve infinitamente vicine, come sulle curve proprie ».

Per terminare riassumiamo in poche parole il ragionamento sopra abbozzato.

Il dubbio critico sulla dimostrazione dell'esistenza di un sistema continuo $\infty^{p_g - p_a}$ sopra una superficie irregolare coi generi p_a e p_g, contraddice alla proprietà che si riconosce spettare in ogni caso al sistema continuo $\{C\}$ di costituire una varietà abeliana. Infatti quel dubbio critico implica che $\{C\}$ formi non già una varietà abeliana V (dotata di un gruppo permutabile e transitivo di trasformazioni in sè), ma una varietà abeliana contata due (o più) volte, cioè una V presa insieme con una varietà analoga infinitamente vicina. Ma una V contata due volte non è più una varietà abeliana ! Per esempio se si considera una quartica ellittica contata due volte, cioè una coppia di quartiche infinitamente vicine, C e $\bar{C}$, che costituiscano l'intersezione di una quadrica con una superficie del quarto ordine tangente, la $C + \bar{C}$ non è più una varietà abeliana, perchè non ammette le trasformazioni infinitesime che fanno corrispondere a un punto di C, un punto infinitamente vicino sopra $\bar{C}$.

4. La proprietà caratteristica delle superficie irregolari è stata scoperta da F. ENRIQUES, che nel dicembre del 1904 la comunicò alla Regia Accademia delle Scienze di Bologna (1). L'A. si è valso della rappresentazione di una superficie sul piano n — plo, dove le curve di un sistema lineare hanno per immagini curve pluritangenti alla linea di diramazione, e ha introdotto qui, per la prima volta, il *principio di degenerazione* che avemmo già occasione di incontrare in altre questioni (2) e che sopra abbiamo richiamato (3).

Poco dopo F. SEVERI riesponeva la dimostrazione in una forma lievemente modificata ragionando direttamente sopra la superficie, all'incirca come qui si è fatto (4).

Frattanto l'esistenza della serie continua di curve disequivalenti che caratterizza le superficie irregolari, in forza di una osservazione precedentemente fatta da G. HUMBERT (5), metteva in evidenza che queste superficie posseggono necessariamente degli integrali di differenziali totali di prima specie (integrali di PICARD), e veniva assunta come punto di partenza delle ricerche di SEVERI (6), CASTELNUOVO (7) e POINCARÉ (8), tendenti a dimostrare che si hanno precisamente $p_g - p_a$ integrali linearmente indipendenti. [Il teorema inverso, cioè che l'esistenza di integrali di prima specie porta l'irre-

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (« Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1904-1905).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 34, nota (*) a pag. 120.

(3) Cfr. § 5, n. 2.

(4) Cfr. F. SEVERI, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (« Rend. Circolo Mat. Palermo », tomo XX, 1905).

(5) Cfr. G. HUMBERT, *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (« Comptes Rendus de l'Academie des Sciences », t. 117, 1893₂).

(6) Cfr. F. SEVERI, *Sulla differenza fra i numeri degli integrali di Picard, della 1ª e della 2ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica* (« Atti Accad. Torino », vol. 40, gennaio 1905); *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (« Annali di Mat. », serie III, t. 12, 1906).

(7) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (« Rendic. Acc. Lincei », serie V, vol. 14, maggio–giugno 1905₁).

(8) Cfr. H. POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques* (« Annales de l'École Norm. Sup. », t. 27, 1910).

golarità della superficie, era già stato stabilito dal SEVERI nel settembre del 1904 (1); mentre l'ENRIQUES (2) aveva dato prima il teorema che le superficie con p integrali dotati di 2p periodi, contengono un sistema continuo di curve disequivalenti (3)]. A questo proposito conviene ricordare che in tale occasione, nella nota del 1905, il CASTELNUOVO ha messo in luce la proprietà del sistema continuo completo $\{C\}$, formato di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti, di costituire una *varietà abeliana* o di PICARD, avente per elementi codesti sistemi lineari (4).

Aggiungasi che la memoria citata di POINCARÉ (del 1910) reca anche la dimostrazione trascendente della proprietà caratteristica delle superficie irregolari (esistenza dei sistemi continui $\infty^{p_g - p_a}$ di sistemi lineari di curve disequivalenti).

Solo più tardi (1921) il SEVERI ha espresso pubblicamente il *dubbio critico* che, come si è spiegato innanzi, può sollevarsi nella dimostrazione geometrica del teorema; e, riprendendo in altra forma i ragionamenti di POINCARÉ, ha offerto un nuovo sviluppo di tali questioni (5).

(1) Cfr. F. SEVERI, *Sulle superficie che posseggono integrali di Picard della seconda specie* (« Rendic. Accad. Lincei », serie V, vol. 13, 1904_2: « Math. Ann. », Bd. 61, 1905).

(2) Cfr. F. ENRIQUES, *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce* (« Ann. de Toulouse », 2° s., t. III, 1901).

(3) Parallelamente a queste ricerche, procedono gli studi di E. PICARD che fino dal 1884 ha iniziato la *teoria trascendente* delle superficie algebriche con l'introduzione degli integrali di differenziali totali, dimostrando da prima che il numero degli integrali di seconda specie è uguale al numero dei periodi, e stabilendo successivamente diverse relazioni fra i numeri degli integrali di prima e di seconda specie e l'irregolarità della superficie. Questi risultati fondamentali trovansi esposti nel trattato di E. PICARD e G. SIMART sulla *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier-Villars, 1897, 1906.

(4) Cfr. questo paragrafo, n. 2.

(5) Cfr. F. SEVERI, *Sulla teoria degli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica* (« Rend. R. Acc. dei Lincei », serie V, vol. XXX, 1921_1).

§ 7. – SULLA VARIETÀ DEI GRUPPI DI p PUNTI DI UNA CURVA DI GENERE p.

1. Per gli ulteriori sviluppi che abbiamo in vista è opportuno premettere un breve studio della *varietà di* JACOBI *dei gruppi di p punti di una curva di genere* p. A questa varietà J_p spettano le seguenti proprietà:

a) *la J_p ha il genere geometrico uguale ad uno*;

b) *la J_p possiede ∞^p trasformazioni involutorie in sè;*

c) *ogni superficie F esistente sulla J_p, che sia immagine di ∞^2 p — ple disequivalenti, è di genere geometrico maggiore di zero.*

2. Cominciamo col provare che *sulla J_q delle q — ple di punti di una curva C di genere p ($q \leq p$), la varietà K_{q-1} delle q — ple tolte dai singoli gruppi di una g^{q-1}_{2p-2} contenuta nella serie canonica di C, è una varietà canonica.*

Si faccia, da prima, $q = 2$ ($p \geqq 2$). Sulla superficie J_2 delle coppie (non ordinate) dei punti della curva C, si hanno ∞^1 curve M, irriducibili e birazionalmente identiche alla C, ognuna delle quali rappresenta le coppie con un punto fisso; per modo che le M costituiscono un sistema d'indice due.

Determiniamo le intersezioni delle M con la curva K i cui punti rispondono alle coppie tolte dai gruppi di una g^1_{2p-2} contenuta nella serie canonica di C. Per questo si prenda la M relativa alle coppie che hanno un punto fisso A (punto generico di C) e sia

$$A\,,A_1\,,\,\cdots\,,A_{2p-3}$$

il gruppo della g^1_{2p-2} che passa per A. I punti omologhi delle coppie

$$(A\,,A)\,,(A\,,A_1)\;,\;(A\,,A_2)\,,\,\cdots\,,(A\,,A_{2p-3})$$

appartengono alla M, e ne costituiscono un gruppo canonico (per l'identità birazionale della M con la C); e d'altra parte i punti

$$(A,A_1)\,,(A,A_2),\;\cdots\;,(A,A_{2p-3})$$

appartengono anche alla K. Ora è facile vedere che quest'ultimo gruppo di punti, comuni alla K e alla M, è un gruppo residuo della serie caratteristica di M rispetto alla sua serie canonica; cioè il punto omologo della coppia (A, A) costituisce un gruppo della serie caratteristica di M. Invero, insieme alla M consideriamo la M' rappresentativa delle coppie che hanno in comune un altro punto di B di C: la M e la M' s'intersecano nel punto omologo della coppia $(A\ , B)$. Se facciamo tendere il punto B ad A, cioè se portiamo la M' infinitamente vicino alla M, il punto $(A\ , B)$ tende al punto $(A\ , A)$, e quindi quest'ultimo costituisce un gruppo della serie caratteristica di M (1).

Pertanto, poichè la K sega sopra ciascuna M un gruppo della serie residua della serie caratteristica di M rispetto alla sua serie canonica, dal *terzo criterio d'equivalenza* (2) segue senz'altro che la K è una curva canonica della J_2, come volevamo dimostrare.

Da $q = 2$ si passa a q qualunque procedendo per induzione, con ragionamento analogo a quello sopra svolto. Supposto vero il teorema per la varietà dei gruppi di $q - 1$ punti di C, si tratta di dimostrarlo per la J_q delle q — *ple*.

La J_q contiene ∞^1 varietà M_{q-1}, irriducibili e birazionalmente identiche, ognuna delle quali rappresenta le q — *ple* con un punto fisso; ed il sistema delle M_{q-1} è d'indice q. Sia K_{q-1} la varietà delle q — *ple* tolte dai singoli gruppi di una g^{q-1}_{2p-2} contenuta nella serie canonica di C: per il nostro scopo occorre determinare l'intersezione della K_{q-1} con le M_{q-1}. Si prenda la M_{q-1} relativa al punto fisso A, e sia

$$g^{q-2}_{2p-3}$$

la serie residua di A rispetto alla g^{q-1}_{2p-2} canonica dianzi considerata. Aggiungendo ai gruppi di $q - 1$ punti estratti dai gruppi della g^{q-2}_{2p-3} il punto fisso A, si ottiene una varietà K_{q-2} che è situata tanto sulla M_{q-1} relativa ad A, quanto sulla K_{q-1} associata alla g^{q-1}_{2p-2}.

Ora se, sulla M_{q-1}, alla K_{q-2} aggiungiamo la varietà M_{q-2} delle $(q - 1)$ — *ple* aventi il punto fisso A (cioè la varietà dei gruppi di q punti, dei quali fa parte due volte il punto A), si ottiene una

(1) Cfr. *Lezioni*, § 21, pag. 70.

(2) Cfr. *Lezioni*, § 41, pag. 181.

varietà canonica della M_{q-1}: è ciò per il teorema ammesso, poichè essa non è altro che la varietà dei gruppi di $q-1$ punti (a prescindere dal punto A) estratti dai singoli gruppi della serie

$$g_{2p-3}^{q-2} + A$$

(col punto fisso A) contenuta nella serie canonica di C.

Dunque la K_{q-1} sega sulla M_{q-1} una varietà residua di una varietà canonica rispetto alla M_{q-2}: allora per il *terzo criterio di equivalenza* già sopra ricordato (e che facilmente si estende dal caso delle curve a quello delle varietà a qualsiasi dimensione) basterà provare che la M_{q-2} costituisce la varietà del sistema caratteristico sulla M_{q-1}. Ma ciò è subito visto: invero la M_{q-1} relativa al punto fisso A e la M'_{q-1} relativa al punto fisso B, hanno in comune la varietà M^*_{q-2} delle q — *ple* con i due punti fissi A e B; ora quando B tende ad A, la M'_{q-1} diviene infinitamente vicina alla M_{q-1} e la M^*_{q-2} tende appunto alla M_{q-2}.

Se $p=q$ si ha che *sulla varietà J_p dei gruppi di p punti di una curva di genere p, la varietà K_{p-1} delle p — ple speciali è una varietà canonica.*

Ma *la K_{p-1} è eccezionale*: infatti si trasforma in una varietà di dimensione $p-2$ sulla varietà, birazionalmente identica alla J_p, i cui punti sono immagini dei gruppi di p punti disequivalenti della curva C di genere p.

Ne segue che *la J_p ha il genere geometrico uguale all'unità.*

Nota. — Le proprietà geometriche della varietà di JACOBI, contenute implicitamente nella teoria *riemanniana* delle *funzioni abeliane* e in quella degli *integrali algebrici* di PICARD e di NOETHER, sono state sviluppate, in ispecie per il caso $p=2$, da G. HUMBERT (1), e poi da M. DE FRANCHIS (2) e F. SEVERI (1903) (3). Nel 1911 il

(1) Cfr. G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (« Journal de Mathém. », 4e série, tome IX, 1893) e *Sur une surface du sixième ordre, liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », tome CXX, 1895).

(2) Cfr. M. DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XVII, 1903).

(3) Cfr. F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (« Atti R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 38, 1903).

SEVERI (¹), nell'intento di giustificare per via geometrica il teorema di CASTELNUOVO di cui si discorre nella nota al termine del paragrafo seguente (²), ha ripreso questo studio dimostrando geometricamente che il genere della varietà di JACOBI è uguale ad uno, nel modo che qui si è sostanzialmente seguìto. La dimostrazione di questo fatto si può anche cercare per un'altra via in certo senso più elementare. Si consideri, per esempio, il caso della curva C di genere due. Sopra la superficie delle coppie di punti della C, si costruisca una rete di curve a partire da una g^2_4 generica presa su C: ogni g^1_4 rappresenta una curva L i cui punti rispondono alle coppie di punti contenute nelle quaterne della g^1_4. Si tratta quindi di determinare le curve aggiunte alle L e di provare che esse si ottengono sommando alle L stesse la curva eccezionale rappresentativa della g^1_2 canonica di C. In modo analogo per $p > 2$. Questo sviluppo si trova (sotto una forma più generale che forse nuoce alquanto alla facilità della comprensione) in una interessante Nota di B. SEGRE (³).

3. Passiamo a dimostrare che *la J_p possiede ∞^p trasformazioni involutorie in sè.*

Sulla curva C (di genere p), di cui la J_p rappresenta i gruppi di p punti, si hanno ∞^p serie lineari g^p_{2p}: ognuna di queste definisce una trasformazione involutoria della J_p in sè. Invero consideriamo un punto P della J_p, e sia G_p il gruppo dei p punti di C omologhi di P. Il gruppo G_p ha come residuo rispetto ad una g^p_{2p} un gruppo G'_p, al quale risponde un punto P' di J_p. Fissata la g^p_{2p} su C, ad ogni punto P di J_p viene così ad associarsi un punto P', nasce cioè una trasformazione birazionale della J_p in sè, la quale è evidentemente involutoria, poichè il gruppo G_p omologo di P, è a sua volta residuo, rispetto alla g^p_{2p}, di G'_p omologo di P'.

Le ∞^p involuzioni della J_p in sè, agiscono in modo semplicemente transitivo, cioè si ha sempre una ed una sola involuzione che porta un punto assegnato P in un altro punto P' pure assegnato.

(¹) Cfr. F. SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. XX, 1911₁).

(²) Cfr. § 8, n. 7.

(³) Cfr. B. SEGRE, *Determinazione di certi gruppi covarianti di due o più serie lineari* (« Rend. Circolo Matem. di Palermo », tomo LVI, 1932).

Infatti tale involuzione nasce in corrispondenza alla g^{p}_{2p} individuata dal gruppo $G_p + G'_p$ somma dei due gruppi che rispondono su C ai punti P e P' di J_p.

Nota. — Le involuzioni di cui si parla nel teorema precedente, rispondono alle trasformazioni di seconda specie della *varietà abeliana* $u' = k - u$ (le u rappresentando gl'*integrali abeliani* di prima specie annessi alla curva). Per moltiplicazione da esse si deducono le trasformazioni di prima specie $u' = k + u$ che formano un gruppo transitivo ∞^p (1). Aggiungiamo che la teoria di codeste trasformazioni in base alla definizione geometrica sopra indicata, è stata sviluppata da G. CASTELNUOVO nel 1892 (2).

4. Dalla circostanza che la varietà J_p ha il genere geometrico $p_g = 1$ e possiede ∞^p trasformazioni involutorie in sè, segue che *ogni superficie F esistente sulla J_p, priva di varietà eccezionali* (3), *è di genere geometrico maggiore di zero.*

Per provarlo occorre osservare che *la F fa parte di un sistema continuo, almeno ∞^{p-2}, di superficie situate sulla J_p.* Invero applicando alla F le ∞^p involuzioni che cambiano la J_p in sè, dalla F nascono altre ∞^p superficie, a meno che non esistano infinite trasformazioni che cambiano la F in una medesima F'. Ma se anche ciò accade, le involuzioni che mutano la F nella F' possono essere al massimo ∞^2. Infatti si prenda un punto P di F e il punto P' di F' che corrisponde a P in una di quelle involuzioni. In ogni altra involuzione che cambi la F nella F', al punto P risponderà un altro punto $\overline{P}'$ di F', diverso da P' (4): cioè al variare dell'involuzione che cambia la F nella F', il punto P' varia in F', e poichè, al massimo, P' può assumere su F' ∞^2 posizioni diverse, avremo che le involuzioni che cambiano la F in una stessa F' potranno tutt'al più essere ∞^2.

(1) Per queste teorie cfr., per esempio, ENRIQUES-CHISINI, vol. IV.

(2) Cfr. G. CASTELNUOVO, *Le corrispondenze univoche tra gruppi di* p *punti sopra una curva di genere* p (« Rendic. R. Istituto Lombardo di scienze e lettere », volume XXV, 1892).

(3) S'intenda la varietà immagine dei gruppi di p punti *disequivalenti* della curva di genere p.

(4) Poichè le trasformazioni involutorie della J_p formano una serie *semplicemente* transitiva.

Allora la proprietà della F di essere di genere geometrico non nullo, è una conseguenza della seguente proposizione generale:

Sopra una varietà V_p, di dimensione $p > 2$, la quale abbia il genere geometrico $p_g > 0$, una superficie F che appartenga ad un sistema continuo almeno ∞^{p-2}, è di genere geometrico maggiore di zero.

Supponiamo $p = 3$. Sopra la V_3 le superficie canoniche, esistenti per ipotesi (anche se, eventualmente, ridotte ad un'unica superficie d'ordine zero), intersecano la F lungo una curva che appartiene al sistema residuo del sistema caratteristico di F rispetto al suo sistema canonico [1]: e ciò basta per provare l'esistenza di questo ultimo, onde per la F è $p_g > 0$.

Se $p = 4$, le ∞^2 (almeno) superficie F si possono distribuire in (almeno) ∞^1 sistemi continui semplicemente infiniti. Il luogo delle F di uno di questi sistemi è una varietà V_3 a tre dimensioni; e di siffatte V_3 se ne hanno (almeno) ∞^1. Ora le V_3 sono di genere geometrico maggiore di zero, perchè hanno in comune una superficie con le varietà (a tre dimensioni) canoniche di V_4. Ma allora siamo ricondotti al caso precedente, poichè ciascuna delle F fa parte di un sistema continuo semplicemente infinito (almeno), situato sopra una V_3 di genere geometrico non nullo.

Con procedimento analogo, passando da p a $p + 1$, si prova la cosa per una varietà di qualunque dimensione.

§ 8. – Esistenza di un fascio irrazionale di curve sopra le superficie irregolari di genere geometrico nullo.

1. Concludiamo questo secondo capitolo col dimostrare un notevole teorema che consentirà, in seguito, di procedere ad uno studio esauriente delle superficie irregolari di genere geometrico nullo, e di dare la loro completa classificazione.

Si tratta del seguente teorema:

Sopra una superficie (irregolare) di genere geometrico nullo, e di genere numerico negativo $p_a = -p$ (con $p > 0$), esiste un fascio irrazionale (K), il cui genere è dato dall'irregolarità p della superficie.

(1) Cfr. *Lezioni*, § 54.

2. Consideriamo una superficie F e – senza fare per ora nessuna ipotesi circa il valore dei suoi caratteri – si prenda sopra di essa un sistema continuo semplicemente infinito di curve, $\{C\}$, d'*indice* i, tale cioè che per un punto generico della F passino i curve C.

Conviene per maggiore chiarezza, identificare le curve di $\{C\}$ con i punti di una curva Γ: allora alle i curve di $\{C\}$ passanti per un punto P di F, corrisponde un gruppo di i punti di Γ; e quando P descrive la F codesto gruppo genera su Γ una serie algebrica doppiamente infinita, d'ordine i, γ_i^2.

Possono verificarsi i seguenti tre casi:

a) la γ_i^2 su Γ è tutta costituita di gruppi equivalenti;

b) ogni gruppo della γ_i^2 è equivalente soltanto ad ∞^1 altri gruppi della γ_i^2 stessa;

c) ogni gruppo della γ_i^2 è equivalente ad un numero finito (eventualmente nullo) di altri gruppi.

Vediamo cosa corrisponde nel sistema $\{C\}$ a questi tre casi. Per ciò si indichi con

$$C_i = \sum C$$

la curva somma delle i curve di $\{C\}$ che escono da uno stesso punto della F, ed osserviamo esplicitamente che *se i gruppi costituiti dagli addendi di due curve*

$$C_i = \sum C \qquad C_i^* = \sum C^*,$$

appartengono ad una stessa serie lineare entro l'ente semplicemente infinito $\{C\}$ delle C, le due curve C_i e C_i^* sono equivalenti sulla superficie F.

Invero i due gruppi degli addendi di C_i e C_i^* appartenendo ad una medesima serie lineare, le due curve somme C_i e C_i^* faranno parte di una medesima serie razionale, la quale è contenuta in un sistema lineare (¹).

Se ne deduce che:

nel caso *a*) le ∞^2 curve C_i sono tutte equivalenti;

(¹) Cfr. *Lezioni*, pag. 429, in nota.

nel caso b) le C_i si distribuiscono in ∞^1 sistemi semplicemente infiniti di curve equivalenti;

nel caso c) le C_i sono tutte disequivalenti fra loro, oppure ciascuna di esse è equivalente ad un numero finito di altre curve C_i.

Analizziamo i tre casi.

3. Caso a) in cui *le* ∞^2 *curve* C_i, *somma delle* i *curve* C *che escono da uno stesso punto della superficie, sono tutte equivalenti fra loro.*

Proveremo che anche *le curve* C *sono equivalenti fra loro*, cioè *il sistema continuo* $\{C\}$ *è contenuto in un sistema lineare.*

Supponiamo che la F appartenga allo spazio ordinario, e sia M una sua sezione piana. Se le C sono di ordine n, il sistema $\{C\}$ sega sulla M una serie lineare semplicemente infinita $s_{n,i}$, d'ordine n e d'indice i, tale cioè che ogni punto (generico) P di M appartiene ad i gruppi della $s_{n,i}$. E dall'ipotesi posta segue che al variare del punto P su M, il gruppo somma degli i gruppi della $s_{n,i}$ che contengono il punto P, si muove in una serie lineare d'ordine in. Ma da questa circostanza si deduce che anche la $s_{n,i}$ è contenuta in una serie lineare d'ordine n, cioè tutti i gruppi della $s_{n,i}$ sono equivalenti (¹). Si ha dunque che nel caso a) le curve C segano gruppi equivalenti sopra ogni sezione piana di F: ma allora le C sono tutte equivalenti [*primo criterio di equivalenza* (²)].

Si conclude che se $\{C\}$ non è contenuto in un sistema lineare, il caso a) non si può verificare.

4. Passiamo al caso b) in cui si suppone che *presa una curva* C_i, *ne esistano* ∞^1 *ad essa equivalenti.*

In questa ipotesi è facile costruire sulla F *un fascio irrazionale di curve*, (K). Infatti prendiamo un punto generico di F, e sia C_i la somma delle i curve di $\{C\}$ uscenti da questo punto, P: facciamo variare P in guisa che la relativa C_i vari in un sistema lineare. Il punto P assume così ∞^1 posizioni, cioè descrive una curva K.

(¹) Cfr., per esempio, ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. IV, § 42 (vol. III, pag. 483).

(²) Cfr. *Lezioni*, § 41. Si noti, per la corretta applicazione del *criterio* che qui si richiama, che trasformando birazionalmente la F si può sempre fare in modo che il sistema delle sezioni piane sia privo di ∞^2 curve spezzate.

E ciò accade a partire da ogni punto (generico) della superficie, per modo che codeste curve K costituiscono un fascio (K). Evidentemente il fascio (K) è privo di punti base (semplici per la superficie), perchè altrimenti tutte le ∞^2 curve C_i sarebbero equivalenti.

In ciò che precede non è escluso che le curve K possano essere spezzate, ma in tal caso le loro componenti costituiranno un fascio: e per semplicità torneremo a indicarle con K.

Resta da dimostrare che il fascio (K) è irrazionale. Per ciò notiamo che considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso precedente, portano ad asserire che *le C segano gruppi equivalenti sopra le curve del fascio* (K). Invero, le C segano sopra una K (irriducibile) una serie algebrica d'indice i, e le somme degli i gruppi di questa serie che contengono uno stesso punto di K, sono equivalenti fra loro.

Quindi, per il *secondo criterio di equivalenza* (1), le C saranno equivalenti a meno di curve del fascio (K). Ossia, in simboli, indicando con C e C_0 due curve di $\{C\}$:

$$C + \Sigma K = C_0 + \Sigma' K \tag{1}$$

(le C sono tutte dello stesso ordine e così pure le K, quindi il numero delle K da aggiungere a C e a C_0 è lo stesso) (2).

In conseguenza *il fascio (K) non può essere lineare*, perchè in tal caso (dato che le somme di uno stesso numero di curve K sarebbero sempre equivalenti) le curve C risulterebbero tutte equivalenti fra loro.

5. Relativamente al caso c) in cui abbiamo supposto che *le curve C_i equivalenti fra loro siano in numero finito*, proveremo che esso può verificarsi solo se *la superficie è di genere geometrico* $p_g > 0$.

(1) Cfr. *Lezioni*, § 41.

(2) Applicando nella forma [1] il *secondo criterio di equivalenza*, si viene implicitamente ad ammettere che il fascio (K) sia privo di curve spezzate. Ora invece questo in generale non accadrà: in (K) ci sarà un numero finito di curve riducibili, le cui componenti potranno in parte comparire nella [1]. Ma la loro presenza non altera le conclusioni che qui ed in seguito si deducono dalla [1],: se il fascio delle K fosse lineare si otterrebbe, in ogni caso, *un numero finito* anzichè un'infinità continua di sistemi $|C|$ disequivalenti. Così per semplicità ometteremo di tener conto delle eventuali curve spezzate del fascio (K).

Per questo torniamo a considerare la curva Γ con i cui punti abbiamo identificato le curve di $\{C\}$, e, su Γ, la serie γ_i^2 i cui gruppi G_i rispondono ai gruppi di i curve C uscenti da uno stesso punto di F. Sulla Γ prendiamo una serie lineare, non speciale, $g^i_{i+\pi}$ (designando con π il genere di Γ), e sia G_π un gruppo di π punti, che sommato ad un G_i della γ_i^2 dia un gruppo della $g^i_{i+\pi}$. Per ogni G_i si ha un solo G_π, che corrisponde ad un numero finito di G_i equivalenti. Pertanto, al variare del gruppo G_i nella γ_i^2, si ottengono ∞^2 gruppi (disequivalenti) G_π, ai quali corrisponde una certa superficie S sopra la varietà di JACOBI rappresentativa dei gruppi (disequivalenti) di π punti della curva Γ.

È subito visto che tra la S così costruita e la nostra superficie F intercede una corrispondenza $[1, n]$. Invero, mentre ad un punto della F corrisponde un solo punto di S, un punto P di S individua un gruppo G_π che è residuo di un certo numero di gruppi G_i della γ_i^2, rispetto alla $g^i_{i+\pi}$: ora un gruppo della γ_i^2 ha per corrispondente su F un numero finito di punti (i punti comuni alle i curve C uscenti da uno stesso punto di F), quindi, in ultima analisi, ad un punto P di S corrisponde un numero finito n di punti di F.

Ne segue che, essendo la S di genere geometrico maggiore di zero (1), anche *la F ha il genere geometrico non nullo* (2).

6. Applichiamo i risultati conseguiti con la precedente discussione, al caso di una *superficie irregolare F, per cui $p_g = 0$ e $p_a = -p$* (con $p > 0$).

(1) Cfr. § 7, n. 4.

(2) Sussiste il teorema: *Se fra due superficie F ed F' (in generale, due varietà V_s e V'_s) intercede una corrispondenza* $[1, n]$, *il sistema trasformato del sistema canonico di F (di V_s), sommato alla curva (alla varietà V_{s-1}) delle coincidenze su F' (su V'_s), appartiene al sistema canonico di F' (di V'_s).* Questa proprietà costituisce un'immediata estensione del *teorema di* PAINLEVÉ–CASTELNUOVO (cfr., per esempio, ENRIQUES–CHISINI, vol. III, libro V, cap. I, § 9), relativo al caso di una corrispondenza $[1, n]$ fra due curve, e si dimostra in modo del tutto analogo. Cfr. F. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* («Memorie della R. Accad. di Torino», serie 2ª, tomo XLIV, 1893), cap. VI; F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* («Rendiconti del R. Ist. Lombardo», serie 2ª, vol. XXXVI, 1903).

Sulla F esiste un sistema continuo ∞^p di curve disequivalenti [1]. Da questo sistema si estragga, in un modo qualunque, un sistema semplicemente infinito $\{C\}$ di curve disequivalenti.

Vediamo quale dei tre casi sopra considerati, si potrà presentare per il sistema $\{C\}$. Non il caso *a*) perchè da esso segue l'equivalenza di tutte le C, contrariamente alla nostra ipotesi; non il caso *c*) perchè esso può verificarsi solo sopra una superficie di genere geometrico non nullo, mentre per la F è $p_g = 0$. Rimane quindi il caso *b*), cioè *sulla F esiste un fascio irrazionale di curve* (K).

È importante notare che *il fascio (K) è l'unico fascio irrazionale esistente su F.*

Se si avesse un secondo fascio irrazionale (L), la superficie F sarebbe di genere geometrico maggiore di zero, poichè sulla F si costruirebbero subito delle curve canoniche. La cosa è immediata se le curve L sono unisecanti delle K: infatti, in tal caso, per avere una curva canonica della F basta sommare alle curve di (L) che passano per i punti di un gruppo canonico di una K, le curve di (K) che passano per un gruppo canonico di una L [2]. Supponiamo invece che le curve K seghino le L in n punti: allora se riguardiamo gli ∞^2 gruppi segati dalle K sulle L, come *punti* di una nuova superficie F^*, questa risulta di genere geometrico maggiore di zero, possedendo due fasci irrazionali cosiffatti che le curve dell'uno incontrano in un solo punto quelle dell'altro. Ma tra la F^* e la F si ha una corrispondenza $[1, n]$, e quindi anche la F è di genere $p_g > 0$ [3].

Dall'unicità del fascio (K) segue che esso è indipendente dal sistema semplicemente infinito $\{C\}$ di cui ci siamo valsi per determinarlo. Allora poichè, come abbiamo visto, le curve di $\{C\}$ segano sulle K gruppi equivalenti, lo stesso accadrà per il sistema continuo più ampio, ∞^p, di cui fa parte $\{C\}$, ed anzi addirittura per ogni altro sistema continuo di curve della superficie F. Per modo che, in base al *secondo criterio di equivalenza* [4], la curva C variabile in un

(1) Cfr. § 5.

(2) Si prova facilmente, d'accordo con i *criteri d'equivalenza*, che le curve così costruite – godendo della proprietà caratteristica delle curve canoniche rispetto ai due fasci – sono canoniche.

(3) Cfr. nota (2) al termine del precedente n. 5.

(4) Cfr. *Lezioni*, § 41.

sistema continuo ∞^p di curve disequivalenti, si esprimerà con la relazione:

$$C \equiv C_0 - \Sigma' K + \Sigma K, \tag{2}$$

dove C_0 è una curva fissa del sistema, e le due somme ΣK e $\Sigma' K$ sono composte con uno stesso numero di curve di (K). Anzi il numero n degli addendi di ΣK si può supporre uguale al genere ρ del fascio (K), perchè se è $n < \rho$ basta aggiungere a ΣK e a $\Sigma' K$ uno stesso gruppo di $\rho - n$ curve K; se è $n > \rho$ al gruppo ΣK se ne può sostituire uno equivalente che abbia $n - \rho$ curve in comune con $\Sigma' K$.

Tenendo fissa $\Sigma' K$, e facendo variare ΣK in guisa che la curva ΣK si mantenga sempre disequivalente da se stessa, si ottengono dalla [2] tutte e sole le ∞^p curve del nostro sistema continuo. Ne segue che la scelta di ΣK dovrà potersi fare in ∞^p modi diversi. Ma i gruppi ΣK tra loro disequivalenti sono ∞^ρ, e quindi $\rho = p$.

Cioè *il fascio irrazionale* (K) *è di genere* $p = -p_a$.

7. *Nota.* — Il teorema che « le superficie (irregolari) di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a = -p < 0$ posseggono un fascio irrazionale di genere p », è stato dato da ENRIQUES nella Nota, del 1904, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (¹), appunto come conseguenza della proprietà delle superficie con $p_g = 0$ $p_a < 0$, di possedere un sistema continuo di curve disequivalenti.

L'ENRIQUES dichiara di adoperare qui un'osservazione comunicatagli nel 1900 dal CASTELNUOVO, in forza della quale *dall'esistenza di un sistema continuo di curve disequivalenti, sopra una superficie di genere* $p_g = 0$, *si deduce l'esistenza di un fascio irrazionale.* Questa proprietà era giustificata per via trascendente, come segue.

Sia $\{C\}$ un sistema ∞^1 di curve disequivalenti, appartenente alla superficie F di genere $p_g = 0$. Allora – come fu rilevato per la prima volta da G. HUMBERT (²) – si costruiscono sopra F degli inte-

(¹) « Rend. R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », nuova serie, vol. IX, 1904–1905.

(²) Cfr. G. HUMBERT, *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », tome CXVII, 1893₂); *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques* (« Journal de mathém. », 4ᵉ série, tome X, 1894).

grali di differenziali totali, o integrali di PICARD di prima specie, i quali si ottengono sommando i valori che gli integrali abeliani di prima specie pertinenti alla serie degli elementi C, assumono in corrispondenza alle $i > 1$ curve C uscenti da uno stesso punto P di F. Questi integrali di PICARD, $I_1, I_2, \cdots$, saranno necessariamente funzioni l'uno dell'altro, altrimenti – come è stato indicato da M. NOETHER (1) – si dedurrebbe l'esistenza di un integrale doppio di prima specie e quindi $p_g > 0$.

Ciò posto, il CASTELNUOVO osserva che le linee $I =$ cost. saranno composte con le curve algebriche di un fascio irrazionale che vengono definite dal muovere P sopra la superficie in guisa che le i curve C uscenti da esso formino gruppi equivalenti.

Questo ragionamento di carattere trascendente è stato trasformato più tardi nel ragionamento geometrico esposto nelle pagine precedenti (2).

CAPITOLO III.

Le superficie irregolari di genere geometrico nullo.

§ 9. – LE SUPERFICIE SU CUI L'AGGIUNZIONE SI ESTINGUE.

1. I risultati raggiunti nel capitolo precedente consentono di classificare completamente le superficie irregolari di genere geometrico nullo ($p_g = 0$).

Cominciamo con lo stabilire una proprietà caratteristica delle superficie su cui l'aggiunzione si estingue. Sopra una superficie che abbia il genere o qualche plurigenere maggiore di zero, i successivi sistemi aggiunti di un qualunque sistema lineare costituiscono una serie che si prolunga indefinitamente. Pertanto una superficie F su cui l'aggiunzione abbia termine, avrà il genere geometrico e tutti i plurigeneri nulli. Se la F è regolare, cioè se anche il suo genere nume-

(1) Cfr. M. NOETHER, *Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke* («Math. Annalen», Bd. 29, 1887). Cfr. anche E. PICARD e G. SIMART, op. cit., vol. I, cap. V, § 15.

(2) Cfr. F. SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo* («Rend. R. Accad. Lincei», serie V, vol. XX, 1911_1).

rico è uguale a zero, sappiamo che è una superficie *razionale* [teorema del CASTELNUOVO (1)]: ed effettivamente sulle superficie razionali l'aggiunzione si estingue. Ma, più in generale, lo stesso accade per ogni superficie rigata: ebbene proveremo che questo fatto caratterizza appunto le superficie riferibili a rigate. Si ha cioè il teorema:

Le superficie F sulle quali l'aggiunzione si estingue, sono riferibili a rigate.

Precisando: l'ipotesi è che « a partire da un sistema lineare $|C|$, irriducibile e almeno ∞^1, si ottenga sopra F una serie costituita da un numero finito di successivi sistemi aggiunti

$$|C'|, |C''|, \cdots, |C^{(i)}|,$$

di guisa che l'ultimo sistema $|C^{(i)}|$ non possegga curve aggiunte (d'ordine maggiore di zero) ».

Possiamo supporre che la F sia irregolare, d'irregolarità

$$p_g - p_a = p,$$

con $p_a \leqq -1$.

Allora sulla F esiste *un* fascio irrazionale (K) di genere p, costituito da curve irriducibili K di genere π (2). Se $\pi = 0$ la F è rigata poichè:

Una superficie che possegga un fascio irrazionale di curve razionali, è riferibile ad una rigata (3).

Viceversa, se la F è rigata si ha sopra di essa un fascio irrazionale di curva K di genere $\pi = 0$, che (essendo $p_g = 0$) è unico.

Ora vogliamo dimostrare che dall'ipotesi che sulla F l'aggiunzione abbia termine, segue $\pi = 0$.

Conviene trattare separatamente i due casi in cui sia $p_a < -1$ o $p_a = -1$.

(1) Cfr. *Lezioni*, § 65.

(2) Cfr. § 8, n. 1.

(3) Per la dimostrazione rimandiamo alle Memorie di F. ENRIQUES, *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. VII, 1898_2); *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali* (ibid.); *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (« Math. Annalen », Bd. LII, 1899).

2. *Caso* $p_a < -1$. Procederemo per assurdo, cioè supporremo $\pi > 0$.

Osserviamo che le curve del sistema lineare $|C|$, irriducibile e almeno semplicemente infinito, incontrano le curve del fascio (K) in un certo numero m di punti, con

$$m \geqq 2.$$

Infatti se le C fossero unisecanti delle K $(m = 1)$ queste (corrispondendo i loro punti agli elementi–curve di un fascio lineare) risulterebbero razionali $(\pi = 0)$ contro il supposto; mentre se si avesse $m = 0$ il sistema $|C|$ sarebbe costituito da curve K, le quali invece non possono appartenere ad un sistema di dimensione maggiore di zero [il fascio (K) essendo di grado nullo sulla F priva di singolarità] (1).

Le C', aggiunte a $|C|$, avranno allora

$$2\pi - 2 + m \geqq m$$

intersezioni con le K. E così analogamente per i successivi sistemi aggiunti a $|C|$, le cui curve segano su K gruppi di un numero di punti sempre non minore di m $(\geqq 2)$.

Consideriamo l' ultimo sistema aggiunto $|C^{(i)}|$, ottenuto a partire da $|C|$, e supponiamo dapprima che $|C^{(i)}|$ sia irriducibile. Il fascio (K) sega sopra una $C^{(i)}$ una involuzione γ_s^1 $(s \geqq m \geqq 2)$ di genere p: quindi la $C^{(i)}$ ha il genere ρ almeno uguale a

$$s\,(p - 1) + 1 \ (2).$$

Da cui, essendo $p > 1$, si deduce

$$\rho > p.$$

(1) Se ogni K di (K) appartenesse ad un sistema lineare almeno ∞^1, si avrebbero almeno ∞^2 curve K, e quindi il loro grado sarebbe maggiore di zero.

(2) Se identifichiamo i gruppi della γ_s^1 con i punti di una curva Γ di genere p, tra la Γ e la $C^{(i)}$ nasce una corrispondenza $[1, s]$. Quindi per la nota formula di Zeuthen, il genere di $C^{(i)}$ è $\rho \geq s\,(p - 1) + 1$, valendo il segno «uguale» quando la γ_s^1 non ha coincidenze.

Ora questo porta ad un assurdo, contraddicendo all'ipotesi che $|C^{(i)}|$ sia l'ultimo sistema aggiunto a $|C|$. Infatti sopra una superficie per cui $p_a = -p$, una curva di genere ρ possiede (almeno) $\rho - p$ curve aggiunte linearmente indipendenti, e quindi se $\rho - p > 0$ si deve avere un successivo sistema $|C^{(i+1)}|$, aggiunto a $|C^{(i)}|$.

Ad analogo assurdo si perviene se $|C^{(i)}|$ è riducibile: invero se tra le componenti di $C^{(i)}$ ne è una, M, la quale sia almeno bisecante le K, per la M valgono le stesse considerazioni di dianzi, esiste cioè il sistema $|M'|$ aggiunto ad $|M|$. Ma, posto

$$|C^{(i)}| = |M + H|,$$

si ha:

$$|C^{(i+1)}| = |M' + H|.$$

Cosicchè dall'esistenza di $|M'|$, segue l'esistenza di $|C^{(i+1)}|$ contro l'ipotesi.

Rimane da considerare l'eventualità che tra le componenti di $C^{(i)}$ non ne siano di bisecanti le K: allora (siccome $C^{(i)}$ e K hanno in comune m o più punti, con $m \geqq 2$) esistono almeno due componenti di $C^{(i)}$, H ed H^*, unisecanti le K. La H e la H^* sono ambedue di genere p, cosicchè la loro somma $H + H^*$ costituisce una curva di genere maggiore di p. Questa possiede un sistema aggiunto, e si cade nella solita contraddizione con le ipotesi fatte.

Pertanto l'assurdo a cui siamo giunti in ogni caso, prova che è necessariamente $\pi = 0$: cioè sulla nostra F esiste un fascio irrazionale (di genere p) di curve razionali, e ciò appunto, come abbiamo detto, caratterizza le superficie riferibili a rigate irrazionali (di genere p).

3. *Caso* $p_a = -1$. Il ragionamento svolto nel caso precedente conduce nell'ipotesi $p_a = -1$ ad ammettere che (almeno se non è $\pi = 0$, e quindi la F non è riferibile ad una rigata ellittica) la F deve contenere delle curve ellittiche, secanti in due o più punti le K.

A curve ellittiche si arriva infatti partendo da un qualunque sistema lineare $|C|$ e procedendo per aggiunzioni successive fino all'ultimo sistema aggiunto $|C^{(i)}|$, che non può avere il genere >1: le curve $C^{(i)}$ sono ellittiche e, se riducibili, contengono curve componenti irriducibili ellittiche, in forza della proprietà della F di contenere un fascio di genere uno.

Aggiungasi che variando $|C|$ in un sistema continuo non lineare, anche le $C^{(i)}$ (o le loro componenti irriducibili) varieranno pure in un sistema continuo di curve disequivalenti.

Dunque si può supporre che la F contenga una serie continua di curve ellittiche disequivalenti $C^{(i)}$, che non potrà essere un fascio [poichè il solo fascio irrazionale esistente sulla F è il fascio (K)], e quindi dovrà avere il grado $\nu > 0$.

Distinguiamo i due casi seguenti:

a) $\nu \geqq 2$;

b) $\nu = 1$.

Caso a): $\nu \geqq 2$. Per il *teorema di* RIEMANN–ROCH (1), ognuna delle curve ellittiche $C^{(i)}$ appartiene ad un *sistema lineare* (irriducibile) $|C^{(i)}|$, almeno di dimensione $\nu - 1 \geqq 1$. Allora si prenda entro $|C^{(i)}|$ un fascio, e si fissi uno dei suoi punti base. Questo punto, contato due volte, determina una g_2^1 sopra ogni curva del fascio. Ne segue che la F è rappresentabile sopra un *piano doppio* (2). Poichè tale piano doppio è irregolare ed ha il genere geometrico ed i plurigeneri tutti nulli, rappresenta una *superficie rigata* (3), e, precisamente, una *rigata ellittica* essendo $p_a = -1$ (4).

Caso b): $\nu = 1$. In questo caso non si può più dire che una curva ellittica $C^{(i)}$ appartenga ad un sistema lineare di dimensione $\geqq 1$. Però due $C^{(i)}$ (disequivalenti) hanno per somma una curva di genere due e di grado quattro, la quale appartiene ad un sistema lineare *irriducibile* almeno doppiamente infinito. Sopra ogni curva di questo sistema è determinata razionalmente una g_2^1 (la g_2^1 canonica), e quindi, come nel caso precedente, la F si rappresenta sopra un

(1) Cfr. *Lezioni*, § 48.

(2) Considerando i gruppi delle g_2^1 sopra le C del fascio, come punti di una superficie doppia F', sulla F' si ha un fascio lineare di curve razionali. Quindi la F' è una superficie razionale (*teorema di* NOETHER, cfr. *Lezioni*, § 64), cioè un piano.

(3) Cfr. *Lezioni*, § 63.

(4) Cfr. *Lezioni*, § 45, pag. 220.

piano doppio. Pertanto la F risulta ancora immagine di una *rigata ellittica.*

Osservazione. — La dimostrazione del teorema è stata fatta nell'ipotesi che sopra la F esista un sistema lineare irriducibile $|C|$, almeno semplicemente infinito, il quale sia privo dei suoi aggiunti successivi da un certo ordine in poi. Poichè da tale ipotesi abbiamo dedotto che la F è rigata, e dato che sopra le rigate l'aggiunzione si estingue, si conclude che *l'esistenza di un sistema* $|C|$ *per cui l'aggiunzione si estingue, porta che sopra la F l'aggiunzione ha termine per ogni altro sistema lineare.*

4. Il teorema che « le superficie su cui l'aggiunzione si estingue appartengono alla famiglia delle rigate », costituisce il risultato fondamentale contenuto nella Memoria di GUIDO CASTELNUOVO e FEDERIGO ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, pubblicata negli « Annali di Matematica » del 1901 (1).

La dimostrazione originale non fa uso della proprietà che le superficie irregolari di genere $p_g = 0$ contengono un fascio irrazionale [proprietà scoperta, come si è detto, soltanto nel 1904 (2)]. In luogo di essa interviene una diseguaglianza fra i caratteri dell'ultimo sistema aggiunto almeno semplicemente infinito, che (per $p \geqq 0$) deve essere di genere $\pi \leqq p + 1$ $(p = -p_a)$.

Questa disuguaglianza si ricava dal confronto del teorema di RIEMANN–ROCH (3)

$$r \geqq -p + n - \pi + 1 ,$$

con la relazione di NOETHER che esprime l'invariante di ZEUTHEN–SEGRE (4)

$$\delta - n - 4\pi = -12p - \overline{p}^{(1)} + 9 .$$

(1) Serie 3ª, tomo VI.
(2) Cfr. § 8, n. 7.
(3) Cfr. *Lezioni*, § 48.
(4) Cfr. § 2, n. 1.

Si trova così:

$$5\pi + r \geqq 11\,p + \overline{p}^{(1)} - 8 + \delta \geqq 11\,p + \overline{p}^{(1)} - 8\,.$$

Quindi una discussione appropriata in cui occorre distinguere l'ipotesi $\overline{p}^{(1)} \leqq 1$ da quella $\overline{p}^{(1)} > 1$, conduce a trovare sopra la superficie:

1) o un sistema lineare di genere π e di dimensione

$$r \geqq 3\pi - 5\,,$$

onde la superficie risulta razionale o riferibile ad una rigata di genere $\pi > 0$ (1);

2) ovvero un sistema lineare di curve spezzate in curve razionali, da cui si trae ugualmente che la superficie è riferibile ad una rigata.

Questo cenno dà appena un'idea della via seguìta: occorre aggiungere un'analisi più minuta in rapporto a diverse circostanze complicatrici e un esame speciale dei casi in cui sia $p < 3$.

5. Dal teorema dimostrato si deduce un importante corollario il quale precisa una proprietà che già altrove avevamo avuto occasione di enunciare (1).

Se sopra una superficie F esiste un sistema lineare $|C|$ *(anche di dimensione nulla), di genere* π *e grado* n, *con*

$$n > 2\pi - 2,$$

privo di componenti fisse eccezionali, la F è riferibile ad una rigata.

Per la dimostrazione distinguiamo vari casi.

a) Il sistema $|C|$ *sia irriducibile, di grado* $n > 0$ $(\pi \geqq 0)$.

(1) Questa è una conseguenza del ragionamento adoperato da ENRIQUES per trovare la massima dimensione di un sistema lineare di dato genere, che può appartenere ad una superficie. Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* (« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. XXIX, 1894).

(2) Cfr. *Lezioni*, § 47.

Il sistema $|hC|$, multiplo di $|C|$ secondo il numero h, ha il genere π_h e il grado n_h dati da:

$$\pi_h = h\pi + \frac{h(h-1)}{2} n - h + 1 \,,$$

$$n_h = h^2 n.$$

Quindi per il teorema di RIEMANN–ROCH [1], la dimenzione R di $|hC|$ risulta:

$$R \geqq p_a + \frac{h(h+1)}{2} n - h(\pi - 1),$$

da cui, essendo $n > 2\pi - 2$:

$$R > p_a + \frac{h^2}{2} n.$$

Pertanto prendendo h sufficientemente grande, si può fare in modo che il sistema $|hC|$ sia irriducibile e assai ampio. D'altra parte si ha

$$n_h - 2\pi_h + 2 = h(n - 2\pi + 2) > 0:$$

allora il sistema $|hC|$ è privo dei suoi aggiunti successivi da un certo ordine in poi [2].

Per quanto abbiamo visto sopra, segue che la superficie F è riferibile ad una rigata.

b) Il sistema $|C|$ sia irriducibile, di grado $n = 0$.

Per le nostre ipotesi dovrà essere anche $\pi = 0$: quindi se la dimensione di $|C|$ è $r > 0$, è certo che la F è razionale [3].

Sia invece $r = 0$, cioè *sopra la F esista una curva razionale irriducibile isolata C, di grado $n = 0$.* Anche in tal caso *sulla F l'aggiunzione si estingue e quindi la F è rigata.*

(1) Cfr. *Lezioni*, § 48.
(2) Cfr. *Lezioni*, § 65.
(3) Cfr. *Lezioni*, § 64.

Infatti preso sulla F un qualunque sistema $|M|$, se le M incontrano la C (che è irriducibile) in s punti, le curve di $|M'|$ hanno $s-2$ intersezioni con la C stessa. Cioè il numero delle intersezioni di C con le curve dei sistemi aggiunti ad $|M|$, diminuisce di due ogni volta che si passa da un aggiunto al successivo. Per modo che se l'aggiunzione a partire da $|M|$ non si estingue, tale numero finirà col divenire minore di zero per un certo sistema $|M^{(i)}|$, di cui farà parte la C un certo numero h di volte:

$$|M^{(i)}| = |hC + L|.$$

(dove è lecito supporre che la L non contenga più C).

Ma la conclusione è assurda, essendo

$$(C, C) = 0.$$

Infatti il numero $(C, M^{(i)})$ delle intersezioni della C con $M^{(i)}$ non può essere negativo, poichè il numero dei punti comuni a C ed L è positivo o nullo, e si ha:

$$(C, M^{(i)}) = h(C, C) + (C, L).$$

Quindi, come avevamo asserito, il sistema $|M|$ è privo dei suoi aggiunti da un certo ordine in poi.

Si noti che non occorre considerare il caso $n = -1$ e $\pi = 0$, perchè le curve aventi tali caratteri sono *eccezionali* (1), ciò che è escluso dalle nostre ipotesi.

c) Il sistema $|C|$ sia riducibile.

Si ponga

$$C = \sum \theta.$$

L'espressione

$$n - (2\pi - 2),$$

(1) Cfr. *Lezioni*, § 47.

che cambiata di segno rappresenta il numero delle intersezioni della C con le curve canoniche (virtualmente definite), ha carattere addittivo: ossia, se indichiamo con ρ il genere di θ e con ν il suo grado, si ha

$$n - 2\pi + 2 = \sum (\nu - 2\rho + 2) .$$

Ma il primo membro di questa uguaglianza è positivo, quindi lo stesso deve accadere di uno almeno degli addendi della somma che comparisce nel secondo membro. Cioè tra le componenti di C ne è almeno una per cui si ha

$$\nu > 2\rho - 2 :$$

siamo così ricondotti ai casi precedenti.

Nota. — Il teorema che « le superficie contenenti un sistema lineare di curve di genere π e grado $n > 2\pi - 2$, sono riferibili a rigate » trovasi nella già citata (1) Memoria di CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*; almeno pel caso dei sistemi irriducibili di dimensione maggiore di zero. Anche in vista della maggiore semplicità degli sviluppi che seguono, vi è interesse a rilevare che il teorema sussiste per curve o sistemi qualsiansi, escluse le componenti fisse eccezionali, e perciò giova in ispecie l'osservazione che « l'esistenza di una sola curva razionale di grado zero, porta di conseguenza che l'aggiunzione si estingue »: osservazione che appartiene al redattore di queste *Lezioni*, L. CAMPEDELLI (2).

§ 10. – LE SUPERFICIE DI GENERE GEOMETRICO $p_g = 0$ E DI GENERE NUMERICO $p_a < -1$.

1. Una superficie irregolare F, di genere geometrico nullo ($p_g = 0$) e d'irregolarità

$$p_g - p_a = p\ (> 0) ,$$

(1) Questo paragrafo, n. 4.

(2) Cfr. L. CAMPEDELLI, *Intorno alle superficie algebriche su cui esistono curve di genere π e grado $n \geq 2\pi - 2$* (« Rendic. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XVIII, 1933_2).

ha il genere numerico

$$p_a = -p \leqq -1 .$$

Inizieremo la classificazione delle superficie irregolari di genere geometrico zero, cominciando dal caso in cui sia $p_a < -1$. Si ha il teorema:

Le superficie di genere geometrico $p_g = 0$ e di genere numerico $p_a < -1$, sono riferibili a rigate.

La dimostrazione si fa per assurdo: supponiamo cioè che esista una superficie F con i predetti caratteri, la quale non sia rigata. Allora si può senz'altro ritenere che la F sia priva di curve eccezionali (1), e per essa resta definito il *genere lineare* $p^{(1)}$ come genere virtuale del suo sistema canonico anche se questo non esiste effettivamente (2).

Ciò osservato, indichiamo ancora con (K) il fascio irrazionale di genere p che sappiamo esistere su F (3), e sia π il genere delle K e Δ il numero delle curve di (K) dotate di un punto doppio. Calcolando l'*invariante* I di ZEUTHEN-SEGRE relativo alla F per mezzo del fascio (K) (4), e tenendo presente l'espressione di NOETHER che lega l'invariante I ai rimanenti caratteri della superficie (5), si ha:

[1] $$\Delta + 4(p-1)(\pi-1) = 13 - 12p - p^{(1)} .$$

Da cui (essendo $p > 1$, $\Delta \geqq 0$ e $\pi \geqq 1$) segue:

$$p^{(1)} < 0 .$$

Questo risultato porta ad un assurdo.

Invero, sia $|C|$ un sistema lineare *irriducibile* di genere π e grado n; dovrà essere $n < 2\pi - 2$ se la F, come si suppone,

(1) Cfr. *Lezioni*, § 47.
(2) Cfr. *Lezioni*, § 25.
(3) Cfr. § 8, n. 1.
(4) Cfr. § 1, n. 3.
(5) Cfr. § 2, n. 1.

non è riferibile a una rigata [1]. Ora, poichè $p^{(1)} < 0$, la differenza

$$2\pi - 2 - n$$

decresce quando in luogo di π e di n si pongano, rispettivamente, il genere ed il grado dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$ [2]. Cosicchè:

1) o la serie dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$ si estingue;

2) oppure si giunge ad un sistema $|C^{(i)}|$ per cui quella differenza è negativa.

Ma ambedue queste possibilità sono in antitesi con le ipotesi fatte, poichè portano di conseguenza l'estinguersi dell'aggiunzione sopra la F, e quindi che la F stessa sia riferibile ad una rigata.

In conclusione, dunque, l'ipotesi da cui siamo partiti che la F non sia immagine di una rigata conduce ad un assurdo; e perciò resta dimostrato che tutte le superficie per cui

$$p_g = 0 \ , \ p_a < -1 \ ,$$

sono sempre trasformabili in rigate.

§ 11. – Le superficie con $p_g = 0$, $p_a = -1$, possedenti un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1$.

1. Le superficie con i caratteri

$$p_g = 0 \quad , \quad p_a = -1$$

posseggono un fascio *ellittico* (K) di curve (irriducibili) di genere π [3].

Se $\pi = 0$ le F sono rigate ellittiche, per il già ricordato teorema dell'Enriques sulle superficie che posseggono un fascio irrazionale di curve razionali [4].

(1) Cfr. § 9, n. 5.
(2) Cfr. *Lezioni*, § 65, pag. 459.
(3) Cfr. § 8, n. 1.
(4) Cfr. § 9, n. 1.

Se invece $\pi > 0$ la F non è riferibile ad una rigata [1], e quindi per essa si può definire il *genere lineare* (*assoluto*) $p^{(1)}$, il quale (supposta la F priva di curve eccezionali) per la [1] del paragrafo precedente risulta

$$p^{(1)} \leq 1 .$$

È subito visto che in questa relazione vale il segno d'uguaglianza: infatti, se fosse $p^{(1)} < 1$, ragionando come nel § 10, si troverebbe che sulla F si estingue l'aggiunzione e quindi la F risulterebbe rigata, contro l'ipotesi $\pi > 0$.

Dunque, *da* $p_g = 0$, $p_a = -1$ *e* $\pi > 0$, *segue* $p^{(1)} = 1$.

Prendiamo a studiare le superficie F con siffatti caratteri cominciando dal caso in cui sia $\pi > 1$.

Troveremo che *le* F *posseggono, oltre al fascio ellittico* (K) *di curve di genere* $\pi > 1$, *un fascio lineare di curve ellittiche, senza punti base e birazionalmente identiche fra loro.* Ciò consentirà [2] di dare delle F una rappresentazione sopra il *cilindro ellittico multiplo*, di guisa che esse risulteranno completamente classificate e se ne potranno calcolare gli ulteriori caratteri (plurigeneri).

2. *Lemma sulle curve riducibili di un fascio.* — Per lo scopo a cui vogliamo giungere occorre stabilire un *lemma* fondamentale, relativo alle curve riducibili di un fascio privo di punti base e di curve dotate di punti doppi, riferendoci ad una superficie senza curve eccezionali.

Essendo $p^{(1)} = 1$, la stessa formula [1] del § 10 dianzi richiamata, dà $\Delta = 0$, cioè *sopra la superficie* F *priva di curve eccezionali (e di singolarità), il fascio ellittico* (K) *non possiede curve dotate di punti doppi.*

Ora enunciamo il *lemma: le curve* K, *supposte di genere* $\pi > 1$, *e formanti un fascio di grado zero senza punti doppi* $(\Delta = 0)$, *sono tutte irriducibili.*

Per giungere a questa conclusione conviene analizzare in generale il contributo che porta nel calcolo dell'*invariante* di ZEUTHEN–

(1) Cfr. loc. cit. nella nota precedente.

(2) Cfr. il n. 8 di questo paragrafo.

SEGRE, una curva riducibile di un fascio (lineare o irrazionale) (K). Riferendoci sempre alla nostra F priva di curve eccezionali, e ponendo che il genere delle K valga $\pi \geqq 1$, proveremo che *ogni curva spezzata* $\overline{K}$ *del fascio* (K), *conta per un numero* $\overline{\Delta} \geqq 0$ *di unità nel computo di* Δ ; *e si ha* $\overline{\Delta} = 0$ *nel solo caso in cui la* $\overline{K}$ (*di genere* $\pi = 1$) *si riduca ad una componente ellittica multipla* (*senza punti doppi*). Da ciò *nell'ipotesi* $\Delta = 0$, si dedurrà appunto che *il fascio* (K) *è tutto costituito da curve irriducibili se le* K *sono di genere* $\pi > 1$. *Invece quando le* K *siano ellittiche, il loro fascio può contenere delle curve ridotte ad una sola componente ellittica multipla* (*senza punti doppi*).

Si cominci con l'osservare che se la K generica (irriducibile), variando con continuità nel fascio (K), si porta nella posizione particolare $\overline{K}$ in cui si spezza, per il *principio di degenerazione* dell'ENRIQUES [1], *le componenti di* $\overline{K}$ *saranno connesse fra loro.* Ciò prova subito che è $\overline{\Delta} > 0$ nel caso in cui la $\overline{K}$ sia costituita da sole componenti semplici.

Vediamo invece che cosa accada quando la $\overline{K}$ possegga delle parti multiple.

Si faccia, da prima, l'ipotesi che la $\overline{K}$ sia formata da una sola componente multipla θ, senza punti doppi:

$$\overline{K} = t\theta.$$

Allora [supposto il *fascio* (K) *privo di punti baze*, come certo accade se è irrazionale], si ha [2]:

$$\overline{\Delta} = (t - 1)(2\rho - 2),$$

[1] Cfr. ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 36 (vol. III, pag. 405).

[2] Già altrove (§ 1, n. 2) abbiamo avuto occasione di dire che se in un fascio si ha una curva spezzata in una componente doppia di genere ρ e in una parte residua (semplice) avente i intersezioni con la prima, codesta curva conta, secondo la formola di CASTELNUOVO–ENRIQUES, per

$$\overline{\delta} = 2\rho - 2 + 2i$$

unità nel numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio. Ma si è data questa notizia a semplice scopo informativo, senza alcuna dimostrazione perchè per il momento non avevamo bisogno di tale risultato. Conviene qui invece dove ρ designa il genere di θ; ed è $\rho > 0$, poichè altrimenti, essendo la $\overline{K}$ di genere $\pi > 0$, la θ dovrebbe avere il grado $\nu > 0$, e quindi il fascio (K) non risulterebbe di grado nullo. Pertanto è $\overline{\Delta} \geqq 0$; e

stabilire esattamente la cosa, anzi più in generale dimostrare che se in un fascio di curve C, esiste una curva

$$\overline{C} = t\theta + C'$$

spezzata in una curva t—*pla* θ, di genere ρ, e in una componente (semplice) residua C' (la θ e la C' essendo prive di punti doppi), la $\overline{C}$ equivale a

$$(t - 1)\ (2\rho - 2) + ti$$

curve C dotate di un punto doppio, designando i il numero delle intersezioni della C' con la θ.

Supporremo che il fascio delle C sia lineare: nel caso in cui ciò non accada la dimostrazione che segue richiederà semplici modificazioni immediate (cfr. § 1, n. 3). Inoltre per semplicità di discorso, ci limiteremo all'ipotesi che il fascio $|C|$ non abbia punti base (ciò che certo accade se il nostro fascio è irrazionale): la presenza di punti siffatti richiederebbe qualche ulteriore esame specie nel caso in cui se ne abbiano d'infinitamente vicini, come in generale si verificherà.

Calcoliamo l'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE per la nostra superficie, mediante il fascio $|C|$: a questo scopo riprendiamo il ragionamento e le notazioni del § 1, n. 1. Insieme al fascio $|C|$ si consideri un secondo fascio $|C_1|$, e la curva luogo dei punti di contatto di una C con una C_1. Poichè tra le C si ha la $\overline{C} = t\theta + C'$, evidentemente di codesta curva dei contatti fa parte la θ contata $t - 1$ volte; oltre a ciò avremo una componente residua che si designerà con T. Nei punti Q comuni alla θ e alla C', la $\overline{C}$ ha la molteplicità $t + 1$, pertanto ogni punto Q risulterà t—*plo* per la $(t - 1)\,\theta + T$, e quindi per Q passerà la T. Osservato ciò, si aggiunga che la C generica ha

$$m = 2s + 2\pi - 2$$

intersezioni con la T, altrettanti essendo i punti di contatto della C con una C_1, cioè i punti doppi della g^1_s segata dal fascio $|C_1|$ sulla curva C di genere π.

Consideriamo analogamente la g^1_s segata sopra una C_1 (di genere π_1) dal fascio $|C|$: questa ha

$$2s + 2\pi_1 - 2$$

punti doppi, un certo numero σ dei quali appartengono alla θ, e contano ciascuno per $t - 1$, mentre i rimanenti m_1 sono sulla T. Si ha così:

$$m_1 + (t - 1)\,\sigma = 2s + 2\pi_1 - 2.$$

Sempre seguendo il citato n. 1 del § 1, occorre determinare il gruppo jaco-

– come volevamo dimostrare – si ha $\overline{\Delta} = 0$ quando sia $\rho = 1$, nel qual caso, essendo $\nu = 0$, anche le K risultano ellittiche (e senza punti base).

biano della serie d'ordine m segata sulla T (di genere P) dal fascio $|C|$. I punti doppi di codesta serie, in numero di $2m + 2P - 2$, sono costituiti da:

a) i δ_0 punti doppi isolati di una C;

b) i τ punti di contatto tripunto di una C con una C_1;

c) gli n_1 punti base del fascio $|C_1|$;

d) gli i punti comuni alla θ e alla C', per i quali già abbiamo visto passare la T, e che debbono essere contati ciascuno come t punti doppi, essendo $(t+1)$ — *pli* per la $\overline{C}$ e quindi anche per la serie g^1_m segata da $|C|$ sulla T;

e) i $2\sigma + 2\rho - 2$ punti doppi della serie segata su θ dal fascio $|C_1|$, ognuno dei quali conta per $t - 1$ punti doppi della g^1_m.

Ne segue l'eguaglianza:

$$2m + 2P - 2 = \delta_0 + \tau + n_1 + ti + (t - 1)(2\sigma + 2\rho - 2).$$

Invece dalla considerazione del gruppo jacobiano della serie lineare segata sulla T dal fascio $|C_1|$ si deduce:

$$2m_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau,$$

essendo δ_1 il numero delle curve C_1 dotate di un punto doppio. Da queste due ultime relazioni, eliminando $2P - 2 - \tau$ e sostituendo in luogo di m ed m_1 i valori dianzi trovati, si ottiene:

$$\delta_0 - 4\pi + (t - 1)(2\rho - 2) + ti = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1.$$

Ma l'espressione che comparisce nel secondo membro di questa uguaglianza è l'*invariante* I di ZEUTHEN-SEGRE, il quale, se indichiamo con δ il numero delle curve di $|C|$ dotate di un punto doppio, è dato anche da:

$$I = \delta - 4\pi.$$

Quindi confrontando col valore prima trovato, si ha:

$$\delta = \delta_6 + (t - 1)(2\rho - 2) + ti,$$

il che prova appunto che nel computo di δ la curva $\overline{C} = t\theta + C'$ conta per

$$\bar{\delta} = (t - 1)(2\rho - 2) + ti$$

unità.

In modo analogo si prova che se è

$$\overline{C} = t_1\theta_1 + t_2\theta_2$$

con $t_1 \geq t_2 \geq 2$ (e θ_1, θ_2 senza punti doppi), la $\overline{C}$ equivale ad una curva

Da questa ipotesi particolare passiamo a quella in cui la $\overline{K}$ sia comunque spezzata in $n\ (\geqq 2)$ componenti $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, con le molteplicità rispettive $t_1, t_2, \cdots, t_n$:

$$\overline{K} = t_1 \theta_1 + t_2 \theta_2 + \cdots + t_n \theta_n .$$

dotata di

$$\bar{\delta} = (t_1 - 1)(2\rho_1 - 2) + (t_2 - 1)(2\rho_2 - 2) + i(t_1 + t_2 - 1)$$

punti doppi, essendo ρ_1 e ρ_2 i generi di θ_1 e θ_2 rispettivamente, e designando i il numero delle intersezioni di θ_1 e θ_2.

Si è supposto che le componenti della $\overline{C}$ fossero prive di punti doppi, ma è facile vedere come si modifica il valore di δ nell'ipotesi opposta. Sia, per esempio, O un punto doppio della θ_1: per O passa (semplicemente) la T, ed esso fa parte $2t_1 - 1$ volte del gruppo jacobiano della g^1_m segata su T da $|C|$. Pertanto al valore di $\bar{\delta}$ sopra trovato, si deve aggiungere $2t_1 - 1$, intendendo di designare con ρ_1 il *genere effettivo* della θ_1. Invece se ρ_1 rappresenta il *genere virtuale* di θ_1, l'esistenza del punto doppio O fa aumentare il valore di $\bar{\delta}$ solamente di un'unità.

In generale si abbia in $|C|$ una curva spezzata in n componenti (senza punti doppi) $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, da contare rispettivamente $t_1, t_2, \cdots, t_n$ volte $(t_i \geq 1)$:

$$\overline{C} = t_1 \theta_1 + t_2 \theta_2 + \cdots + t_n \theta_n ,$$

e si designi con

$$i_{hk} = (\theta_h, \theta_k)$$

il numero dei punti comuni alla θ_h e alla θ_k. Allora *per il computo dell'invariante di* ZEUTHEN–SEGRE *la curva spezzata* $\overline{C}$ *equivale in generale a*

$$\bar{\delta} = \Sigma (t_i - 1)(2\rho_i - 2) + \Sigma i_{hk} (t_h + t_k - 1)$$

curve dotate di un punto doppio (e questo numero va modificato come sopra detto se le θ_i posseggono dei punti doppi).

Nella formula precedente i punti di connessione delle θ_i (comuni a due di queste componenti) sono supposti distinti. Ma il nostro computo può sempre ridursi a questo caso assumendo che un punto comune a s componenti θ_i sia da ritenere caso particolare di quello in cui tali θ_i s'incontrino a due a due: il convergere dei punti d'incontro in un unico punto facendo crescere il $\bar{\delta}$ per la curva spezzata. Infatti – con le notazioni precedenti – si ha che la curva dei contatti T passa $s - 1$ volte per un punto P comune alle componenti $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s$, il quale ha per la $\overline{C}$ la molteplicità $t_1 + t_2 + \cdots + t_s$. Quindi nel computo di $\bar{\delta}$ il punto P conta per

$$(s - 1)(t_1 + t_2 + \cdots + t_s - 1)$$

unità.

Per le formule qui stabilite cfr. L. CAMPEDELLI, *Sul computo dell'invariante di Zeuthen–Segre per una superficie algebrica* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XIX, 1934₁).

La $\overline{K}$ conta nel computo di Δ per un numero di unità che è almeno uguale a:

$$[1] \qquad \overline{\Delta} = \sum (t_1 - 1)\ (2\rho_i - 2) + \sum i_{hk} (t_h + t_k - 1)\,,$$

essendo ρ_i il genere di θ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, e $i_{hk} = (\theta_h, \theta_k)$ il numero dei punti comuni alle due componenti θ_h e θ_k (1).

Ora nella [1] appaiono degli addendi suscettibili di diventar negativi, che provengono dalle componenti razionali di $\overline{K}$ aventi un solo punto di connessione con una delle altre θ_i. Occorre pertanto mostrare che questi eventuali addendi negativi sono compensati da termini positivi di valore assoluto maggiore, cosicchè risulterà in ogni caso $\overline{\Delta} > 0$.

Per facilitare l'esposizione conviene chiamare *ramo elementare* un gruppo $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$, di r componenti della $\overline{K}$, tali che, nell'ordine scritto, abbiano ciascuna un punto in comune con la precedente e la seguente: faranno eccezione θ_1 e θ_r, le quali sono soggette soltanto alla condizione d'incontrare la componente che rispettivamente segue o precede, mentre d'altra parte possono rimanere senza ulteriori punti d'appoggio con le restanti componenti di $\overline{K}$ (ramo elementare *aperto* in uno o in ambedue i sensi), ovvero essere appoggiate all'insieme di queste in più di un punto.

La completa analisi del valore di $\overline{\Delta}$ richiede che si prenda da prima a considerare le configurazioni della $\overline{K}$ dotate del minimo numero di punti di connessione (n componenti con $n - 1$ punti di connessione), ipotesi che costituisce il caso più sfavorevole per il nostro scopo. In queste configurazioni non capita mai che una componente si appoggi ad un'altra in più di un punto, cosicchè dovremo distinguere i casi che seguono:

a) la $\overline{K}$ sia costituita da un ramo elementare aperto in ambedue i sensi;

b) la $\overline{K}$ contenga $h \geq 3$ rami elementari aperti in un solo senso, che facciano capo ad una stessa componente θ dotata di h punti di connessione (2);

(1) Cfr. la nota precedente.

(2) È chiaro che per $h = 2$ i due rami si fondono in un solo ramo elementare aperto nei due sensi, e si ricade in *a*).

c) la $\overline{K}$ contenga più gruppi di rami elementari aperti in un senso, che facciano capo a diverse componenti θ: due di queste θ saranno connesse fra loro (direttamente o attraverso rami elementari *chiusi*), e perciò ciascuna di esse avrà almeno $h + 1$ punti di connessione, se h sono i rami elementari aperti che le si appoggiano.

Dopo questi casi converrà ancora esaminare quello in cui:

d) la $\overline{K}$ sia composta di n componenti con almeno n punti di connessione.

Ricordiamo che, nella discussione che segue, si suppone sempre che il fascio (K) sia di grado zero, cioè privo di punti base; inoltre supporremo, per semplicità di discorso, che le componenti θ_i della $\overline{K}$ siano tutte prive di punti doppi: ipotesi lecita, poichè l'esistenza di punti siffatti porta un aumento nel valore di $\overline{\Delta}$.

Si avverta inoltre che, in ogni caso, *le componenti* θ_i *sono di grado negativo* (non nullo) $-\nu_i$ $(\nu_i \geqq 0)$. Invero se, per esempio, la θ_i è connessa semplicemente con le componenti $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ $(i \neq 1, 2, \cdots, r)$, intersecando la $\overline{K}$ con θ_i si ottiene:

$$(\overline{K}, \theta_i) = -\nu_i t_i + t_1 + t_2 + \cdots + t_r.$$

Ma è:

$$(\overline{K}, \theta_i) = 0,$$

dato che il fascio (K) ha il grado zero (e non contiene la θ_i come parte fissa): cosicchè si trova appunto $\nu_i > 0$.

Premesse queste osservazioni, passiamo allo studio dei vari casi sopra indicati.

Caso a). – Intersecando la $\overline{K}$ successivamente con $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$, componenti del ramo aperto, si ha:

$$[2] \qquad \left\{ \begin{aligned} t_2 &= \nu_1 t_1 \\ t_3 + t_1 &= \nu_2 t_2 \\ t_4 + t_2 &= \nu_3 t_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_n + t_{n-2} &= \nu_{n-1} t_{n-1} \\ t_{n-1} &= \nu_n t_n \end{aligned} \right.$$

Dalla prima delle [2] si ricava che t_1 divide t_2, e quindi dalla seconda che t_1 divide anche t_3, e così via fino alla penultima che dà t_1 divisore di t_n. Ma, reciprocamente, partendo dall'ultima si trova che t_n divide t_1, e perciò

[3] $$t_1 = t_n \leq t_h \qquad (h = 2, 3, \cdots, n-1).$$

Ne segue che *le n componenti θ_i di $\overline{K}$ non possono essere tutte razionali*. Invero, essendo la superficie priva di curve eccezionali, se le θ_i fossero tutte di genere zero, per i loro gradi $-\nu_i$ si avrebbe $\nu_i \geqq 2$, e quindi le prime $n-1$ relazioni [2] darebbero

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

mentre è $t_1 = t_n$.

Allora applicando la formula [1], e tenendo presenti le [3], è subito visto che per la $\overline{K}$ costituita da un ramo elementare aperto nei due sensi, l'espressione

$$\overline{\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n} (t_i - 1)(2\rho_i - 2) + 2 \sum_{h=1}^{h=n-1} t_h - n + 1$$

risulta positiva.

Caso b). – Consideriamo un ramo elementare $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r)$ aperto in un solo senso, tale cioè che la θ_r, oltre ad incontrare la θ_{r-1}, abbia *un* punto di connessione P con un' ulteriore componente θ di $\overline{K}$ (la θ possedendo $h \geqq 3$ punti di connessione, e quindi $1 \leq r \leq n-h$). Per le componenti il nostro ramo elementare si possono ancora scrivere le relazioni analoghe alle [2] che si ottengono intersecando la $\overline{K}$ successivamente con $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$:

$$t_2 = \nu_1 t_1$$

$$t_3 + t_1 = \nu_2 t_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t + t_{r-1} = \nu_r t_r,$$

dove t designa l'ordine di molteplicità della θ d'appoggio. Se ne deduce che t_1 è un divisore di $t_2, \cdots, t_r, t$, ed inoltre che

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_r < t$$

quando le $\theta_i\,(i = 1, 2, \cdots, r)$ siano tutte razionali $(\nu_i \geqq 2)$. Più precisamente in questa ipotesi si avrà:

$$[4] \qquad t_i \geqq i t_1\,, \qquad t \geqq (r+1) t_1\,.$$

Determiniamo la somma d dei termini che nell'espressione [1] di $\overline{\Delta}$ rispondono al ramo elementare considerato, tenendo conto anche del punto di connessione $P = (\theta_r\,, \theta)$ (ma non della componente θ).

Se le $\theta_i\,(i = 1, 2, \cdots, r)$ *sono tutte razionali* $(\nu_i \geqq 2)$, si ha:

$$d = -t_1 + t + r\,,$$

e quindi, essendo $t \geqq 2t_1$:

$$d > \frac{t}{2}\,.$$

Invece *se fra le* θ_i *se ne ha almeno una di genere* $\rho_i > 0$, risulta subito

$$d > t\,.$$

Calcolato così il contributo che porta un ramo elementare al $\overline{\Delta}$ relativo alla $\overline{K}$, passiamo ad esaminare l'intera $\overline{K}$ costituita da una componente θ (di molteplicità t e genere ρ) con $h \geqq 3$ punti di connessione, ai quali fanno capo altrettanti rami elementari aperti. Si ha dalla [1]:

$$\overline{\Delta} = (t-1)(2\rho - 2) + d_1 + d_2 + \cdots + d_h\,.$$

designando con $d_1\,, d_2\,, \cdots, d_h$ i contributi portati nel calcolo di $\overline{\Delta}$ dagli h rami elementari connessi con θ.

Se è $\rho > 0$ segue senz'altro $\overline{\Delta} > 0$; e lo stesso accade se, pur essendo $\rho = 0$, è $h = 4$, oppure se, nel caso $h = 3$, uno almeno dei rami elementari connessi con θ possegga una componente di genere maggiore di zero (ciò che porta un $d_i > t$).

Rimane pertanto da studiare il caso in cui la θ sia razionale, e abbia tre punti di connessione con tre rami elementari

$$[5] \qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1\,, \theta_2\,, \cdots, \theta_q\,; \\[1ex] \theta'_1\,, \theta'_2\,, \cdots, \theta'_r\,; \\[1ex] \theta''_1\,, \theta''_2 \cdots, \theta''_s\,; \end{array}\right.$$

tutti costituiti da componenti razionali. Per la $\overline{K}$ così formata è:

$$\overline{\Delta} = t - t_1 - t_1' - t_1'' + q + r + s + 2.$$

Allora se ogni ramo elementare ha almeno due componenti, cioè se

[6] $$q \geqq r \geqq s \geqq 2,$$

avendosi, per le [4],

$$t \geqq 3t_1 \quad , \quad t \geqq 3t_1' \quad , \quad t \geqq 3t_1'' \, ,$$

e quindi

$$t \geqq t_1 + t_1' + t_1'' \, ,$$

risulta ancora

$$\overline{\Delta} > 0.$$

Per analizzare il caso in cui qualche ramo elementare si riduca ad una sola componente, per modo che non sussistano più le [6], si osservi che segando la $\overline{K}$ con la θ (di grado $-\nu$), si ottiene:

[7] $$\nu t = t_q + t_r' + t_s'' \, .$$

Poichè – come si è visto – t_1 è un divisore di t e di t_q, e, analogamente, t_1' divide t e t_r' , e così pure t e t_s'' sono multipli di t_1'' , si ponga:

$$t_q = \varepsilon t_1 \quad , \quad t_r' = \varepsilon' t_1' \quad , \quad t_s'' = \varepsilon'' t_1'' \, ;$$

$$t = \mu t_1 = \mu' t_1' = \mu'' t_1'' \, ,$$

con $\varepsilon , \varepsilon' , \varepsilon'' , \mu , \mu' , \mu''$, numeri interi, e, per le [4],

$$\mu > \varepsilon \geqq q \, ; \qquad \mu' > \varepsilon' \geqq r \, ; \qquad \mu'' > \varepsilon'' \geqq s \, .$$

Allora dalla [7] si deduce:

[8] $$\nu = \frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\varepsilon'}{\mu'} + \frac{\varepsilon''}{\mu''} \, .$$

Ciascuna delle frazioni che compariscono nel secondo membro di questa uguaglianza è minore dell'unità, cioè $\nu < 3$; ma d'altra parte deve essere $\nu \geqq 2$ poichè la superficie è priva di curve eccezionali: quindi, necessariamente, $\nu = 2$.

Ora se i tre rami [5] si riducono ciascuno ad una sola componente ($q = r = s = 1$), cosicchè $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$ e $\mu = \nu_1 \geqq 2$, $\mu' = \nu'_1 \geqq 2$, $\mu'' = \nu''_1 \geqq 2$, la [8] non può dare $\nu = 2$: pertanto codesto caso non è compatibile con l'ipotesi che le quattro componenti di $\overline{K}$ siano razionali.

Analogamente dalla [8] non si può avere $\nu = 2$ se due dei rami elementari [5] sono costituiti da una sola componente ($q \geqq 2$, $r = s = 1$; $\varepsilon' = \varepsilon'' = 1$).

Infine si consideri il caso di un solo ramo elementare ridotto ad una componente ($q \geqq r \geqq 2$, $s = 1$). La [7] diviene:

$$2t = t_q + t'_r + t''_1,$$

ma è (cfr. le [4]):

$$t \geqq t_q + t_1 \quad , \quad t \geqq t'_r + t'_1,$$

e quindi

$$t'' \geqq t_1 + t'_1.$$

Ne segue:

$$\overline{\Delta} \geqq t - 2t'' + q + r + 3,$$

e perciò $\overline{\Delta} > 0$, avendosi - dalle [4] - $t \geqq 2t''_1$.

Si conclude che, *nelle ipotesi b), la $\overline{K}$ conta nel computo di* Δ *per* $\overline{\Delta} > 0$ *unità.*

Caso c). - Ci si può limitare a considerare l'ipotesi che *tutte le componenti della $\overline{K}$ siano razionali,* nella quale la [1] contiene il massimo numero di addendi negativi. Allora la [1] stessa dà:

$$\overline{\Delta} = \sum_{i=1}^{i=n} (h_i - 2)\, t_i + n + 1,$$

designando h_i il numero dei punti di connessione della componente θ_i. Per mettere in evidenza gli addendi negativi della somma precedente, converrà scriverla sotto la forma:

$$\overline{\Delta} = -\sum t_i + \sum (h_i - 2)\, t_i + n + 1,$$

dove la prima sommatoria va estesa a tutte le componenti θ_i che hanno un solo punto di connessione, e la seconda a quelle che ne posseggono almeno tre ($h_i \geqq 3$).

Ogni curva θ_i con un solo punto di connessione è componente iniziale di un *ramo elementare aperto* (eventualmente costituito dalla sola θ_i): siano allora

$$\theta_1 , \theta_2 , \cdots , \theta_r$$

le componenti con *una* connessione che appartengono agli r rami elementari facenti capo ad una stessa componente θ di $\overline{K}$. Se la θ ha h (> 2) punti di connessione, è $r \leqq h - 1$ poichè altrimenti si ricadrebbe nella configurazione b).

Con le solite notazioni, si ha:

$$t \geqq 2t_i \qquad (i = 1 , 2 , \cdots , r)$$

da cui segue (essendo $h \geqq 3$):

$$(h - 2)\, t \geqq \frac{(h - 1)\, t}{2} \geqq t_1 + t_2 + \cdots + t_r .$$

Pertanto nell'espressione di $\overline{\Delta}$ la somma

$$(h - 2)\, t - t_1 - t_2 - \cdots - t_r$$

dei termini relativi alle componenti $\theta_1 , \theta_2 , \cdots , \theta_r$ e θ, risulta positiva o nulla: quindi decomponendo $\overline{\Delta}$ in somme parziali analoghe, si ha senz'altro $\overline{\Delta} > 0$.

Caso d). - La $\overline{K}$ abbia n componenti *razionali* con almeno n punti di connessione: se immaginando di sopprimere alcuni di questi, la $\overline{K}$ assume la configurazione c), è evidente che si ha ancora $\overline{\Delta} > 0$, poichè la presenza di nuovi punti di connessione porta ad aggiungere dei termini positivi al valore trovato per $\overline{\Delta}$ nel caso c). Quando invece sopprimendo alcuni punti di connessione, si cade nei casi che in a) o in b) sono stati dimostrati impossibili per componenti razionali, un semplice calcolo diretto e facili osservazioni analoghe a quelle ivi svolte, provano di nuovo che

$$\overline{\Delta} > 0 .$$

A fortiori risulterà $\overline{\Delta} > 0$ se fra le n componenti della $\overline{K}$ se ne abbiano di genere maggiore di zero.

Così le proposizioni enunciate risultano stabilite in modo completo [1].

3. Stabilito il lemma relativo alle curve riducibili di un fascio, di cui a suo luogo faremo uso, volgiamoci allo studio delle superficie F, con i caratteri $p_g = 0$ e $p_a = -1$, possedenti un fascio ellittico di curve K di genere $\pi > 1$, allo scopo di giungere a dimostrare il teorema enunciato al termine del n. 1.

Conviene premettere una definizione. Sopra una superficie *irregolare* si consideri il *sistema continuo* a cui appartiene il sistema canonico (esistente o virtuale) [2]: una curva *non canonica* di tale sistema, si dirà *curva paracanonica*.

Analogamente dal considerare il sistema continuo cui appartiene il sistema bicanonico, si deduce la definizione delle *curve parabicanoniche*. E così continuando, vengono introdotte le *curve para–i–canoniche* o *paracanoniche d'ordine i*.

Le curve para–i–canoniche risultano definite indipendentemente dall'esistenza effettiva del corrispondente sistema i–canonico. Infatti consideriamo sulla superficie un sistema lineare qualunque $|C|$, e prendiamo il suo aggiunto d'ordine i: $|C^{(i)}|$. Il sistema $|C^{(i)}|$ è contenuto in un sistema continuo $\{C^{(i)}\}$: si supponga che esista in $\{C^{(i)}\}$ una curva $C^{(i)}$ la quale contenga come parte una C del sistema $\{C\}$ individuato da $|C|$. La differenza $C^{(i)} - C$ dà una curva che è i–canonica nel caso in cui la $C^{(i)}$ e la C facciano parte rispettivamente di $|C^{(i)}|$ e di $|C|$; e che è invece para–i–canonica nel caso più generale.

Le curve para–i–canoniche hanno gli stessi caratteri (virtuali) delle i–canoniche (caratteri che sappiamo essere definiti anche se le i–canoniche non esistono), perchè tanto queste che quelle appartengono al sistema continuo $\{C^{(i)} - C\}$.

Se è $p_g = 0$ il sistema $\{C^{(i)}\}$ si ottiene da $|C^{(i)}|$, sommando e

(1) Cfr. L. CAMPEDELLI, *Ancora sul computo dell'invariante di Zeuthen–Segre per una superficie algebrica* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XIX, 1934$_1$).

(2) Cfr. § 6.

sottraendo curve K del fascio irrazionale (1); perciò *le curve para-i-canoniche segano gruppi i-canonici sulle curve del fascio irrazionale* (K) *appartenente alla superficie.*

4. *La superficie* F $(p_g = 0\,,\ p_a = -1)$, *sulla quale il fascio ellittico* (K) *è costituito da curve di genere* $\pi > 1$, *possiede almeno una curva parabicanonica.*

Per rendercene conto si consideri il sistema $|K''|$ biaggiunto di una curva del fascio (K): $|K''|$ ha (almeno) la dimensione (2)

$$3\pi - 4,$$

e il sistema continuo $\{K''\}$ a cui esso appartiene è (almeno) di dimensione

$$3\pi - 3,$$

essendo costituito da ∞^1 sistemi analoghi a $|K''|$ (3), che segano egualmente gruppi bicanonici sopra le curve K (4). Da ciò segue che in $\{K''\}$ esiste un numero non nullo (e, in generale, finito) di curve disequivalenti che contengono come parte una K. Infatti per $3\pi - 4$ punti generici di K passano ∞^1 curve di $\{K''\}$ disequivalenti fra loro (una per ciascuno degli ∞^1 sistemi lineari di dimensione $3\pi - 4$ contenuti in $\{K''\}$), le quali segano su K uno stesso *gruppo bicanonico* di $4\pi - 4$ punti: per un ulteriore punto generico di K passa un certo numero, non nullo (e, in generale, finito) di codeste ∞^1 curve K'', le quali, incontrando la K in $4\pi - 3$ punti, si spezzano nella K stessa e in una residua curva che, per la nostra definizione, è una curva parabicanonica, o, in particolare, bicanonica.

Osservazione. — Il ragionamento svolto innanzi traduce in una maniera esente da dubbi, un più rapido ragionamento che ha almeno valore indicativo: sopra la nostra superficie $(p_g = 0\,,\ p_a = -1)$

(1) Cfr. § 8, n. 6.

(2) Teorema di RIEMANN-ROCH (cfr. *Lezioni,* § 48 e § 46, pag. 245). Si tenga presente anche la *Nota* al termine del § 46 delle *Lezioni* (pag. 250).

(3) Cfr. § 5.

(4) Cfr. questo paragrafo, n. 3.

un sistema lineare che, secondo il teorema di RIEMANN–ROCH [1], abbia la dimensione r, appartiene ad un sistema continuo ∞^{r+1}; se $r = -1$ il sistema continuo ha la dimensione zero (almeno), e quindi contiene una curva o un numero finito di curve. La conclusione a cui si arriva rimane giustificata per il caso che precede, in base all'esistenza sulla F di un fascio di curve K sopra le quali le curve del nostro sistema continuo segano gruppi equivalenti. Se e come il ragionamento precedente possa giustificarsi sotto ipotesi più generali, non è luogo qui di discutere.

Ciò che si è detto sopra per l'esistenza delle curve parabicanoniche si estende alle curve parapluricanoniche d'ordine qualunque: in modo analogo *si prova che sulla F esiste almeno una curva paracanonica d'ordine qualsiasi* (> 1).

Si noti poi che *le diverse curve parapluricanoniche della F sono tutte ellittiche e di grado nullo*, poichè, come già abbiamo notato, le curve parapluricanoniche hanno gli stessi caratteri delle pluricanoniche del medesimo ordine.

Per le conclusioni a cui vogliamo giungere occorre dimostrare il seguente

Teorema: *Sulla superficie F esistono almeno due distinte curve parapluricanoniche dello stesso ordine.*

Sia s un divisore primo del numero π, genere delle curve del fascio ellittico (K). Sulla superficie F prendiamo una curva parabicanonica $H = H_2$, che si sa esistere e costruire [2]: la H interseca ogni curva K secondo un gruppo bicanonico, e quindi la sH determina sulla K stessa un gruppo della serie $2s$–canonica.

Si *supponga* che tra le serie lineari s–esima parte della serie $2s$–canonica di K, se ne abbia una – distinta dalla bicanonica – che sia *determinata razionalmente* in funzione di K: sia g^* tale serie (d'ordine $4\pi - 4$ e di dimensione $3\pi - 4$). Riservandoci di discutere in

(1) Cfr. *Lezioni*, § 48.

(2) Abbiamo scelto una H_2 per semplicità d'esposizione, ma nelle considerazioni che seguono si può sostituire alla H_2 una para–i–canonica H_i con i qualunque.

seguito codesta ipotesi, indichiamo con C la curva descritta da un gruppo fissato nella g^*, quando la K descrive il fascio (K).

Poichè tanto la sC quanto la sH segano sulle K gruppi $2s$–canonici, per il *secondo principio di equivalenza* si ha

$$[9] \qquad sC + \sum_m K \equiv sH + \sum_n K,$$

intendendo che i due simboli

$$\sum_m K \qquad\qquad \sum_n K$$

rappresentino le somme di due gruppi, rispettivamente, di m e di n curve di (K) (1).

La [9] può scriversi anche sotto un'altra forma. Si supponga, per fissare le idee, $n \geq m$. Il gruppo $\sum_n K$ individua nel fascio (K) una g_n^{n-1} di gruppi di n curve K: allora si consideri un gruppo della g_n^{n-1} contenente $m - 1$ curve di $\sum_m K$, e si sostituisca nella [9] in luogo di $\sum_n K$, ciò che è sempre lecito (2). La [9] dà così, con riduzioni evidenti (posto $n - m + 1 = r$):

$$[10] \qquad sC \equiv sH + K_1 + K_2 + \cdots + K_r - K_{r+1}.$$

Se $r = 1$ risulta:

$$sC \equiv sH + K_1 - K_2,$$

e questa prova che *la sC è una curva para–$2s$–canonica, diversa dalla* sH poichè la C e la H sono certo distinte segando sulle K gruppi non equivalenti.

Supponiamo invece $r > 1$. Nel fascio (K) si consideri la g_r^{r-1} individuata dal gruppo $(K_1, K_2, \cdots, K_r)$: nella [10] in luogo della

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_r$$

(1) Cfr. *Lezioni*, § 41. Per la corretta applicazione del *secondo principio di equivalenza* qui richiamato, si ricordi che nel fascio (K) non esistono curve spezzate (n. 2).

(2) Cfr. § 8, n. 2.

potremo scrivere la somma delle curve costituenti un gruppo della g_r^{r-1} che contenga K_{r+1}, prendendo per esempio $K_{r+1} = K_r$, cosicchè risulterà:

$$sC \equiv sH + K_1 + K_2 + \cdots + K_{r-1}.$$

Ed, a sua volta, alla somma $K_1 + K_2 + \cdots + K_{r-1}$ si potrà sostituire $(r - 1)K$, se con K indichiamo un elemento $(r - 1)$ — *plo* della g_{r-1}^{r-2} individuata entro (K) dal gruppo delle curve K_1, $K_2, \cdots, K_{r-1}$ (¹). Quindi, infine, cambiando per semplicità $r - 1$ in r, si ottiene:

[11] $$sC \equiv sH + rK.$$

Ma il numero r che comparisce nella [11], è divisibile per s $(r = st)$. Invero, indicando con ν il grado di C, si ha dalla [11]:

$$s^2\nu = 8sr(\pi - 1),$$

ossia:

$$s\nu = 8r(\pi - 1).$$

Poichè il primo membro di questa relazione è divisibile per s, lo stesso deve accadere del secondo: allora, se è $s \neq 2$, il numero $8(\pi - 1)$ è primo con s, e pertanto r è divisibile per s. Supponiamo invece che sia $s = 2$ e si designi con ρ il grado di C. Dalla [11] per $s = 2$, si deduce:

$$2\rho - 2 = 5r(\pi - 1),$$

da cui appunto segue che r è pari.

In ogni caso si ha dunque:

$$r = st.$$

Allora la [11] dà:

[12] $$s(C - tK) \equiv sH.$$

(¹) Una g_{r-1}^{r-2} sopra una curva ellittica possiede $(r - 1)^2$ punti $(r - 1)$ — *pli*. Cfr. per esempio, ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. I, § 9 (vol. III, pag. 69).

Dimostriamo ora che il sistema continuo $\{C - tK\}$, che si ottiene facendo variare K nel fascio (K), ha la dimensione maggiore od uguale a zero, cosicchè esiste in effetto (almeno) una curva $C - tK$.

Ragionando formalmente, per ogni K il sistema lineare $|C - tK|$ ha la dimensione virtuale -1, quindi al variare della K nel fascio (K) si ottiene il sistema virtuale $\{C - tK\}$ di dimensione zero, che conterrà dunque almeno una curva effettiva $C - tK$.

Nelle circostanze che a noi occorrono, il ragionamento precedente si può giustificare in modo rigoroso, come segue.

Si consideri il sistema lineare

$$|C - (t - 1) K|$$

e se ne calcoli la dimensione. La curva

$$C - (t - 1) K = (C - tK) + K$$

ha il genere $5\pi - 4$ e il grado $8\pi - 8$, cosicchè individua un sistema lineare che per il *teorema di* RIEMANN–ROCH ha (almeno) la dimensione $3\pi - 4$, e che è contenuto in un sistema continuo $\infty^{3\pi - 3}$:

$$\{C - (t - 1) K\}.$$

Ma le curve di quest'ultimo sistema segano sulla K dei gruppi di $4\pi - 4$ punti, appartenenti ad una serie lineare di dimensione $3\pi - 4$. Pertanto per $3\pi - 3$ punti generici della K passa (almeno) un numero finito (non nullo) di curve di

$$\{C - (t - 1) K\},$$

spezzate nella K stessa e in una curva residua che fa parte del sistema virtuale

$$\{C - tK\},$$

il quale risulta così di dimensione non minore di zero.

Dunque abbiamo costruito una curva

$$H^* = C - tK,$$

la quale sega sopra le K gruppi di $4\pi - 4$ punti che, per costruzione, non sono bicanonici: così la H^* sarà distinta dalla H (che sega sulle

K gruppi bicanonici), ed anzi non potrà nemmeno essere, come questa, una curva parabicanonica.

Invece, per la [12], *le curve sH^* e sH risultano essere due distinte curve para–2s–canoniche.*

In ogni caso, resta verificata l'esistenza sopra F di due distinte curve para–$2s$–canoniche [1], e, per il seguito, conviene osservare esplicitamente che nel ragionamento fatto non entra in modo essenziale l'ipotesi che la superficie F sia di genere geometrico nullo.

5. Però le conclusioni a cui siamo giunti sono subordinate al *presupposto* che sulla K si abbia una *serie g^*, s–esima parte della serie 2s–canonica* e diversa dalla bicanonica, la quale sia *determinabile razionalmente* in funzione di K.

Questa ipotesi ha un ufficio semplificativo per riguardo alla nostra esposizione; in generale essa non è verificata, tuttavia può giustificarsi nel senso di mostrare che le conseguenze dedottene sono in ogni caso accettabili, salvo lievi modificazioni.

A tale scopo riprendiamo la nostra ipotesi e precisiamo che cosa essa importi.

Sopra una K si prenda una serie g^* (diversa dalla bicanonica) s–esima parte della serie $2s$–canonica: al variare della K nel fascio (K), la g^* si muta per continuità in una serie analoga della K variabile; quando questa, dopo un giro completo, ritorna nella posizione primitiva, la g^* può tornare anch'essa nella posizione primitiva (come, per esempio, accade per la serie bicanonica), oppure può scambiarsi con un'altra delle serie che si ottengono dividendo per s la serie $2s$–canonica (sempre però diversa dalla bicanonica). Il primo caso è appunto quello in cui la g^* risulta determinata razionalmente in funzione di K. Nel secondo caso invece la g^* appartiene ad un gruppo di un certo numero m (> 1) di serie, che sono la s–esima parte della $2s$–canonica (diverse dalla bicanonica), le quali si scambiano fra loro quando la K, variando con continuità, parte da una certa posizione iniziale e ritorna ad essa dopo un giro completo.

[1] O, più in generale, due curve para–is–canoniche, se alla curva parabicanonica H da cui siamo partiti, si sostituisca una curva para–i–canonica ($i > 2$).

In generale dunque: sulle curve K del fascio ellittico (K), si può sempre determinare razionalmente un gruppo di m ($\geqq 1$) serie lineari s–esima parte della serie $2s$–canonica, diverse dalla bicanonica.

Ora, se $m > 1$, mostreremo che *si può costruire una superficie F^*, con gli stessi caratteri numerici della F, e legata a questa da una corrispondenza* $[m, 1]$, *senza curva di diramazione*, per modo che *sulla F^* esista un fascio ellittico (K^*), di curve ancora di genere $\pi > 1$, privo di curve dotate di punti doppi, e tale che su ciascuna K^* sia determinata razionalmente una serie s–esima parte della serie $2s$–canonica, diversa dalla bicanonica.*

Per quanto si è visto, sulla F^* esisteranno due curve parapluricanoniche distinte, e quindi lo stesso accadrà per la F. Invero, siccome la corrispondenza $[m, 1]$ tra la F^* e la F è priva di curva di diramazione e sulla F esiste il sistema para–i–canonico $\{H_i\}$, una H_i di F si trasforma in una curva H_i^* para–i–canonica della F^* (1): viceversa, il sistema $\{H_i^*\}$ para–i–canonico della F^* ha per trasformato su F il sistema continuo para–mi–canonico, poichè tra le curve di $\{H_i^*\}$ sono quelle che provengono da una H_i di F alle quali nella trasformazione inversa corrisponde una mH_i.

Passiamo a indicare la costruzione della F^*.

Sulla K è determinato razionalmente un gruppo di m serie $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$: prendiamo le curve *immagini* di quelle serie, cioè le curve di $S_{3\pi-4}$ sulle quali le $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ sono segate dagli iperpiani. Allora alla K si viene ad associare *razionalmente*, in un $S_{3\pi-4}$, un gruppo di m curve K^* (identiche alla K) su ciascuna delle quali si ha *in modo razionale* (perchè segata dagli iperpiani) la corrispondente $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$ s–esima parte della serie $2s$–canonica.

Al variare di K in (K), il gruppo delle K^* descrive una superficie F^* che è *irriducibile*: invero quando la K torna alla posizione iniziale, le K^* si scambiano variamente fra loro, cosicchè due K^* non possono descrivere due superficie diverse.

Sulla F^* le curve K^* costituiscono un fascio ellittico.

Che la totalità ∞^1 delle K^* formi un fascio (K^*), risulta senza altro dall'osservare che per un punto *generico* della F^* passa necessariamente una sola K^*. Ora entro (K^*) il gruppo delle K^* prove-

(1) Cfr. nota (2) al termine del n. 5, § 8.

nienti da una medesima K, descrive un'involuzione ellittica γ^1_m quando la K percorre il fascio (K). Ma la γ^1_m è priva di elementi doppi poichè *le* K^* *provenienti da una* K *sono sempre tutte distinte fra loro*: invero lo stesso accade sopra ogni K delle m serie $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$, di cui le K^* sono le immagini, dato che le K sono tutte irriducibili e prive di punti doppi (¹). La conseguenza di ciò è che, per la formula di ZEUTHEN, anche il il fascio (K^*) ha il genere uno.

La presenza del fascio ellittico (K^*) di curve di genere $\pi > 1$, porta che *la* F^* *non è riferibile ad una rigata.*

Nel fascio (K^*) *di* F^* *non esistono curve dotate di un punto doppio.*

Invero le K^*, essendo birazionalmente identiche alle K, hanno tutte il genere *effettivo* π (> 1).

Pertanto *le* K^*, come le K, *sono tutte irriducibili* (²).

Tra la F *e la* F^* *si ha una corrispondenza* $[1, m]$ *senza curva di diramazione.*

Infatti preso un punto P di F resta individuata una K di (K) passante per P, alla quale corrispondono m curve K^* su F^*; e poichè ciascuna K^* è in corrispondenza biunivoca con K, così al punto P di K corrisponde un punto sopra ognuna di quelle K^*. Viceversa, che ad ogni punto P^* di F^* corrisponda un solo punto P di F segue dal fatto che le K^* costituiscono un fascio. Inoltre, poichè le m curve K^* provenienti da una stessa K sono tutte distinte, la F non possiede nessuna curva di diramazione.

La superficie F *e la* F^* *hanno gli stessi caratteri numerici* $p_a = -1$, $p^{(1)} = 1$.

Poichè nella corrispondenza $[1, m]$ tra la F e la F^* manca la curva di diramazione, un curva pluricanonica (o parapluricanonica) della F si cambia in una curva pluricanonica (o parapluricanonica) della F^* (³): e siccome la prima è di grado nullo, lo stesso accade

(¹) Cfr. questo paragrafo, n. 2. Affinchè due delle serie s–esima parte della serie $2s$–canonica, vengano a coincidere sopra una K (la quale si mantiene sempre irriducibile) bisogna che il genere di tale K sia minore di π, cioè che quella K acquisti dei punti doppi (cfr. ENRIQUES–CHISINI, vol. III, libro V, cap. III, § 35).

(²) Cfr. questo paragrafo, n. 2.

(³) Cfr. nota (²) al termine del n. 5, § 8.

della seconda. Ne segue che anche la F^* ha il *genere lineare* uguale all'unità.

Per il calcolo del genere numerico p_a della F^* si ricordi la relazione di NOETHER che (sulla F^* priva di curve eccezionali) lega i caratteri p_a e $p^{(1)}$ all'invariante I di ZEUTHEN–SEGRE (¹):

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9.$$

Ora l'invariante I della nostra F^* calcolato mediante il fascio ellittico (K^*) risulta uguale a -4 (²), e quindi, essendo $p^{(1)} = 1$, si trova $p_a = -1$.

Così abbiamo dimostrato per la F^* tutte le proprietà enunciate al termine del numero precedente: restano pertanto convalidate le conclusioni che se ne sono dedotte. Cioè la F^* possiede due distinte curve parapluricanoniche dello stesso ordine, e quindi – come si è già osservato – lo stesso accade per la F.

6. Dall'esistenza di due distinte curve parapluricanoniche dello stesso ordine, segue, in ogni caso, che *sulla superficie F è possibile costruire un fascio lineare di curve ellittiche (senza punti base)*.

Per dimostrare questa importante proprietà, e con lo scopo di ottenere una maggiore chiarezza e semplicità di esposizione, conviene premettere alcuni *lemmi*.

Lemma I. Sulla superficie F una curva parapluricanonica riducibile, H, è composta di curve ellittiche, semplici o multiple: ogni componente è di grado zero e due componenti distinte non hanno punti comuni.

Ricordiamo anzitutto che la H è di genere (virtuale) uno e di grado zero. Sia allora:

$$H = \sum \theta\,.$$

Ciascuna delle componenti θ ha il genere $\rho \geqq 1$. Ciò è evidente per le θ che hanno intersezioni variabili con le curve K del nostro fascio ellittico, poichè queste segano sopra di esse una involuzione

(¹) Cfr. § 2, n. 1.
(²) Cfr. § 1, n. 3.

ellittica; ma sarebbe vero anche se la θ fosse una K (non una sua parte, perchè le K sono tutte irriducibili – n. 2), e ciò per l'ipotesi $\pi > 1$ (però la circostanza $K = \theta$ resterà esclusa *a posteriori* perchè $\rho = 1$ e non $\rho = \pi > 1$).

Se le θ componenti la H sono tutte distinte, affinchè il genere della loro somma H risulti uguale ad *uno* bisogna che le θ siano ellittiche e senza intersezioni fra loro. Similmente: perchè la H risulti di grado zero anche le θ devono essere di grado nullo.

Ma se della H fa parte una θ contata più volte, si può dubitare che questa abbia il genere $\rho > 1$ e il grado ν negativo.

Per escludere questo dubbio si consideri il numero delle intersezioni della θ con una curva canonica (virtualmente definita):

$$2\rho - 2 - \nu .$$

Questo numero non può essere minore di zero perchè in tal caso la superficie F apparterrebbe alla famiglia delle rigate [1]. D'altra parte la somma

$$\sum (2\rho - 2 - \nu) ,$$

che dà il numero dei punti comuni alla H e ad una curva canonica, è nulla poichè la H è una curva parapluricanonica di grado zero. Ne segue:

$$2\rho - 2 - \nu = 0 .$$

Da cui si deduce appunto che, essendo $\rho > 0$, il grado ν della θ non può risultare negativo, e quindi ancora $\rho = 1$ e $\nu = 0$.

Lemma II. Una curva C che seghi le curve del fascio ellittico (K) *secondo gruppi pluricanonici e che non abbia intersezioni con la curva para–i–canonica H, è una curva ellittica di grado nullo, o è composta di curve ellittiche di grado nullo.*

Supponiamo da prima che la C – come la H – seghi gruppi i–canonici sulle K. In tale ipotesi, per il *secondo criterio di equiva-*

(1) Cfr. § 9, n. 5.

lenza [dato che il fascio (K) non contiene curve riducibili] (1), la C e la H differiscono per curve del fascio (K):

$$[13] \qquad C + \sum_m K \equiv H + \sum_n K\,.$$

La [13], come già si è osservato altrove (2), si può scrivere:

$$C \equiv H + K_1 + \cdots + K_r - K_{r+1}$$

Ma, per ipotesi, la C e la H non hanno punti in comune, e quindi si ha necessariamente $r = 1$:

$$C \equiv H + K_1 - K_2\,.$$

Questa relazione prova che la C è para–i–canonica come la H: ne segue (3) che la C è una curva ellittica di grado zero, o, se è riducibile, si spezza in curve ellittiche di grado nullo.

Si è supposto che la C seghi sulle K gruppi i–canonici come la H: se ciò non accade si possono sempre trovare un multiplo, sC, della C ed uno, tH, della H che seghino sulle K gruppi pluricanonici dello stesso ordine. Così confrontando la sC con la tH, si giunge alla stessa conclusione di prima.

Lemma III. In un iperspazio S_{2m+1} a $2m + 1$ dimensioni, sia data una *rigata ellittica* Φ, e sopra di essa si abbiano *due direttrici H ed H^* che appartengano a due S_m indipendenti* fra loro, per modo che la H e la H^* non abbiano intersezioni. Per fissare le idee si supponga, ad esempio, che la Φ appartenga ad un S_5, e le H e H^* siano quindi sezioni con due piani, α e β, non incidenti. Nelle considerazioni che seguono, del tutto generali, sarà facile passare da $m = 2$ ad m qualunque, ciò che del resto non ha interesse per noi.

Sulla Φ si abbia una *curva* $\overline{M}$ (che per il nostro scopo possiamo supporre *irriducibile*), *che seghi le generatrici in n punti* (con $n \geqq 2$) *e che non incontri le due direttrici H ed H^**. Allora sopra una generatrice della Φ, si considerino i due punti d'appoggio con H ed H^*

(1) Cfr. *Lezioni*, § 41. Vedi anche questo paragrafo, n. 4.

(2) Cfr. la formula [10] di questo paragrafo, n. 4.

(3) Cfr. il precedente *Lemma I*.

– sieno A e B – e gli n punti d'incontro con la curva $\overline{M}$: indichiamo questi ultimi con $X_1, X_2, \cdots X_n$.

I valori degli

$$h = n(n - 1)$$

birapporti

$$(ABX_i X_k)$$

formati dai punti A, B e da due degli n punti $X_1, X_2, \cdots, X_n$, non variano al variare della generatrice AB.

Per provarlo si ponga

$$\varphi(x) = (ABX_i X_k):$$

la $\varphi(x)$ essendo una funzione algebrica del parametro x da cui dipendono le generatrici della rigata.

Ora: gli h valori di codesta funzione algebrica $\varphi(x)$ sono costanti.

Infatti, siccome la $\overline{M}$ non incontra né la H né la H^*, i punti $X_1, X_2, \cdots, X_n$, sono distinti da A e B, e quindi la $\varphi(x)$ non è mai infinita: ciò basta per poter asserire che essa è radice di una equazione algebrica, di grado h, a coefficienti costanti (1).

Ciò premesso consideriamo le ∞^1 *omografie biassiali* ω dell'S_5 in sé, che hanno come luoghi di punti uniti i due piani α e β a cui appartengono le direttrici H e H^*: le ω trasformano in sé la rigata Φ e ciascuna delle sue generatrici. Ogni ω è individuata da una coppia di punti omologhi, X, X', appartenenti ad una retta che si appoggia ad α e β. Quindi le $\omega = (X, X')$ possono porsi in corrispondenza biunivoca con un parametro t, cioè col birapporto che i due punti d'appoggio di una generatrice AB su H e H^*, formano

(1) Una funzione algebrica $y = y(x)$, ad h valori, si può definire come radice di un'equazione:

$$[*] \qquad f(x, y) = y^h + a_1(x) y^{h-1} + \cdots + a_h(x) = 0,$$

dove le $a_i(x)$ sono funzioni razionali nella x. I coefficienti a_i si esprimono mediante le note *funzioni simmetriche* delle radici $y_1, y_2, \cdots, y_h$ della [*], che sono *razionali intere* nelle $y_1, y_2, \cdots, y_h$ stesse. Quindi se le y_i sono sempre finite ugualmente accade dei coefficienti a_i. Ma le $a_i(x)$ sono funzioni *razionali* della x, e una funzione razionale che non diviene mai infinita è una costante.

con un punto X fisso e con un ulteriore punto X' variabile sulla AB stessa.

Le ∞^1 curve M di Φ trasformate della $\overline{M}$ nelle omografie ω, sono, come la $\overline{M}$, tutte irriducibili e non hanno intersezioni con la H e la H^*.

Si ha:

1) *Se in un'omografia ω si corrispondono due punti X e X' di una curva M, la ω trasforma in sé la M.*

Per semplicità di discorso, supponiamo che la M seghi una generatrice AB (i due punti A e B essendo rispettivamente su H e H^*) in due punti soltanto, X e X'. *A priori* la proiettività che ha come punti uniti A e B e porta X in X', cambierebbe X' in un altro punto X'' diverso da X e fuori della M: quindi la M non sarebbe trasformata in sé dall'omografia $\omega = (X, X')$ che porta X in X'. Ma la M non è una qualsiasi curva bisecante le generatrici della rigata, bensì una particolare bisecante i cui punti d'intersezione con le generatrici formano birapporti costanti insieme alle traccie di queste sulle due curve direttrici segate dai piani uniti α e β. In conseguenza di ciò, l'omografia ω che porta X in X', trasforma anche ogni altro punto Y di M in un punto Y' della M stessa; e se, facendo variare con continuità Y, si porta il punto Y a coincidere con X', a questo dovrà ora corrispondere X. In altre parole, i punti X e X' sono coniugati armonici rispetto ad A e B: così M è trasformata in sé dalla ω.

Ad una conclusione analoga si giunge nel caso in cui la M seghi le generatrici di Φ in più di due punti: il sistema di questi sarà trasformato in sé da un gruppo finito di proiettività (cicliche) con i punti uniti A e B, e la ω trasformerà M in se stessa.

2) *Due curve M non hanno punti in comune.*

Invero se due curve siffatte avessero in comune un punto P, sarebbero trasformate della $\overline{M}$ in due omografie ω, che possiamo designare con (X, P) e (Y, P), essendo X ed Y due delle intersezioni di M con la generatrice di Φ che passa per P. Ora queste due omografie differiscono per un fattore (X, Y) che è pure una omografia ω trasformante in se stessa la $\overline{M}$: per conseguenza le due omografie (X, P) e (Y, P) trasformano la $\overline{M}$ in una medesima curva passante per P. Cioè le due curve M aventi in comune il punto P debbono necessariamente coincidere.

Dalle precedenti considerazioni si deduce [1]:

Le ∞^1 *curve* M, *trasformate della* $\overline{M}$, *formano un fascio* (*lineare*) *privo di punti base.*

Infatti per ogni punto P di Φ passa una sola curva M. È poi chiaro *a priori* che il fascio delle M (appartenendo ad una rigata) deve essere lineare: invero le curve M rispondono in modo razionale (non univocamente invertibile) ai valori del parametro t da cui dipendono le omografie ω; così la razionalità del fascio discende dal noto *teorema di* LUROTH sulla razionalità delle involuzioni sopra una retta [2].

7. Abbiamo ormai tutti gli elementi necessari per dimostrare il teorema enunciato nel n. 1:

Sulla superficie F *esiste un fascio lineare di curve ellittiche* [*di grado zero* [3]].

Siano, al solito, H ed H^* le due distinte curve parapluricanoniche dello stesso ordine i che sappiamo esistere sulla F [4]. Cominciamo col far vedere che *sulla* F *si può costruire una curva ellittica* (*irriducibile*) *di grado zero, che non ha intersezioni con la* H *e con la* H^* (e che è diversa da queste e dalle loro componenti).

Per ciò si supponga dapprima che le due curve para–i–canoniche H e H^* siano ambedue prive di componenti multiple. Consideriamo una curva K del fascio (K), e sopra di questa si prendano i due gruppi (i–canonici), G_n e G_n^*, segati rispettivamente da H e da H^*. I gruppi G_n e G_n^* determinano sulla K una g_n^1 (contenuta nella serie i–canonica), la quale possiede

$$m = 2n + 2\pi - 2 = (2i + 1)(2\pi - 2)$$

(1) Cfr. C. SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* («Atti Acc. Torino», vol. XXI, 1886).

(2) Cfr., per esempio, ENRIQUES–CHISINI, libro II, cap. I, § 3 e § 6 (vol. I, pag. 170 e 193); libro V, cap. I, § 7 (vol. III, pag. 48).

(3) L'affermazione che il fascio sia di grado zero, è d'accordo col noto teorema che il possesso di curve ellittiche di grado positivo porta la riferibilità della superficie al piano o ad una rigata ellittica (cfr. § 9, n. 5).

(4) Questo paragrafo, n. 4.

punti doppi. Il gruppo J_m di questi punti doppi, appartiene alla serie $(2i+1)$ — canonica di K. Inoltre J_m non ha nessun punto in comune con G_n e con G_n^* : invero se la H è irriducibile, il gruppo G_n appartiene all'involuzione ellittica γ_n^1 segata sulla H dal fascio (K), e una involuzione ellittica sopra una curva ellittica è priva di punti doppi. Analogamente si dica per ciascuna delle componenti ellittiche (1) di H nel caso in cui questa sia spezzata: G_n è allora la somma dei gruppi comuni alla K e alle varie componenti della H; ognuno di codesti gruppo è privo di punti doppi, e le componenti della H sono per ipotesi tutte distinte.

Le stesse considerazioni valgono naturalmente per il gruppo G_n^* relativo alla H^*.

Ne segue che se si fa variare con continuità la K nel fascio (K), il gruppo J_m descrive sulla F una curva M che sega sulle K gruppi pluricanonici e che non incontra né la H né la H^*: pertanto *la M è una curva ellittica irriducibile di grado zero, o composta di curve siffatte* (2).

Passiamo invece al caso in cui le due curve H e H^* abbiano delle componenti multiple: per esempio, la H possieda una componente doppia:

$$H = H' + 2\theta.$$

Si consideri ancora sopra la K la g_n^1 anzidetta, e dal suo gruppo jacobiano J_m si tolgano i punti che appartengono alla θ: sia J il gruppo residuo. Al variare della K nel fascio (K), il gruppo J genera una curva che possiamo ancora indicare con M, e che non ha intersezioni né con la H' né con la θ.

Allora la curva $M + \theta$ sega sulle curve K dei gruppi pluricanonici, e non ha intersezioni con la $H = H' + 2\theta$ poichè la θ è di grado nullo e non incontra le ulteriori componenti di H (3). Ne segue che la $M + \theta$ è composta di curve ellittiche di grado zero (4): cioè la M (od ogni sua componente irriducibile) è ancora una curva

(1) Cfr. numero precedente, *Lemma I.*

(2) Cfr. n. 6, *Lemma II.*

(3) Cfr. n. 6, *Lemma I.*

(4) Cfr. n. 6, *Lemma II.*

ellittica di grado nullo, senza intersezioni con la H e la H^* (e diversa da queste e dalle loro componenti).

Stabilito questo risultato, torniamo a considerare le ∞^1 serie lineari g_n^1 determinate sopra le curve del fascio ellittico (K), dai gruppi delle intersezioni con le curve parapluricanoniche H ed H^*. Sia Φ una superficie in corrispondenza biunivoca con i gruppi di quelle g_n^1: cioè, in altre parole, riguardiamo gli ∞^2 gruppi delle g_n^1 come punti di una superficie Φ, la quale pertanto *risulterà in corrispondenza* $[1, n]$ *con la* F.

La Φ gode delle proprietà seguenti:

a) Ad ogni curva K di (K) corrisponde sulla Φ una curva razionale (in corrispondenza $[1, n]$ con la K, e in corrispondenza biunivoca con i gruppi della g_n^1 su K): quindi la Φ possiede un fascio ellittico di curve razionali. Pertanto *la* Φ *è riferibile ad una rigata ellittica*, sulla quale il fascio delle generatrici è birazionalmente identico a (K), e ciascuna generatrice è in corrispondenza $[1, n]$ con i punti della K omologa, essendo riferita proiettivamente ai gruppi della g_n^1 su K.

b) Alle due curve parapluricanoniche H ed H^* (che *appartengono* all'involuzione di grado n che si ha sulla F) rispondono sulla *rigata* Φ due curve (n — *ple*) $\overline{H}$ ed $\overline{H}^*$ unisecanti le generatrici (e quindi ellittiche), cioè due *direttrici* semplici, le quali sono prive di punti comuni.

c) Abbiamo visto che sulla F esiste una curva ellittica M, irriducibile di grado zero, senza intersezioni con la H e con la H^*: alla M corrisponde sopra Φ una curva $\overline{M}$, anch'essa ellittica irriducibile e senza punti d'incontro con le due direttrici $\overline{H}$ e $\overline{H}^*$ (1). (La M fa parte della curva di diramazione di Φ).

(1) La proprietà della M di essere ellittica si dedurrebbe *a priori*, secondo una formula di C. SEGRE, dalla proprietà di non incontrare le due direttrici piane della rigata. Così l'uso della formula del SEGRE può sostituire qui il nostro *Lemma II*. Per la formula suddetta concernente in generale le intersezioni di due curve tracciate sopra una rigata, cfr. C. SEGRE, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (« Rend. Accad. Lincei », serie IV, vol. III, 1887); *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* (ibidem); *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, 2e partie (« Math., Annalen », Bd. XXXIV, 1889).

La rigata Φ e la corrispondenza $[1\ ,\ n]$ che la lega alla F, si realizzano in un facile modello proiettivo.

Per fissare le idee portiamoci in uno spazio S_5, a cinque dimensioni, e in questo prendiamo due piani sghembi, α e β. Siano poi $\overline{H}$ ed $\overline{H}^*$ due curve ellittiche – per esempio due cubiche – situate rispettivamente sopra α e β, ed in corrispondenza biunivoca fra loro e col fascio (K). Allora come rigata Φ si può prendere quella che si ottiene congiungendo ciascun punto di $\overline{H}$ col suo corrispondente su $\overline{H}^*$. E la corrispondenza $[1\ ,\ n]$ tra la Φ e la F si ha nel modo seguente. Sopra la F consideriamo una delle curve K, e sia g_n^1 la serie lineare individuata dai gruppi G_n e G_n^* segati su K dalle curve parapluricanoniche H ed H^*: nella corrispondenza biunivoca che si ha fra (K) e il fascio delle generatrici di Φ, alla K corrisponde una generatrice $\overline{K}$ che incontrerà le direttrici $\overline{H}$ ed $\overline{H}^*$ in due punti $\overline{G}$ e $\overline{G}^*$ rispettivamente. Ebbene, fra i gruppi della g_n^1 su K e i punti di $\overline{K}$, si può stabilire una proiettività [univocamente determinata in funzione degli elementi del fascio (1)] in guisa che ai gruppi G_n e G_n^* corrispondano i punti $\overline{G}$ e $\overline{G}^*$: allora al variare di K nel fascio (K), fra la Φ e la F nasce una corrispondenza $[1\ ,\ n]$ che ha i requisiti richiesti (2).

Ora ricordiamo che sulla Φ, partendo dalla curva ellittica $\overline{M}$, si può costruire un fascio (lineare) $|\overline{M}|$ di grado nullo, costituito da curve proiettivamente identiche alla $\overline{M}$ (3). A questo fascio corrisponde sopra la F un *fascio lineare* $|C|$ di curve appartenenti all'involuzione di grado n che si ha sulla F: il fascio $|C|$ è anch'esso privo di punti

(1) Per un noto teorema di NOETHER, si può porre razionalmente una corrispondenza biunivoca fra due curve razionali quando su ciascuna di esse sia dato un punto. Cfr., per esempio, ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. III, § 32 (vol. III, pag. 341).

(2) È lecito supporre che la corrispondenza $[1\ ,\ n]$ fra la rigata Φ e la superficie F (supposta priva di singolarità) sia senza eccezioni, cioè che fra una qualunque generatrice di Φ e i gruppi della g_n^1 sulla curva K corrispondente, interceda una proiettività non degenere. Invero se per una particolare generatrice a questa proiettività divenisse degenere in guisa che ad un punto A di a corrispondessero tutti i gruppi della g_n^1 omologa, basterebbe eseguire una trasformazione della rigata che cambiasse il punto A nella retta eccezionale a.

(3) Cfr. questo paragrafo, n. 6, *Lemma III*.

base e tra le sue curve è quella composta della M e della sua coniugata nell'involuzione (della quale fa ancora parte la curva di coincidenza M un certo numero di volte).

Il fascio $|C|$, se è irriducibile, risulta costituito di curve ellittiche (di grado zero). Se invece $|C|$ – prescindendo da eventuali componenti fisse – è composto con un fascio, anche questo è formato di curve ellittiche di grado nullo (che designeremo ancora con C) ed è lineare poichè la F non possiede altro fascio irrazionale che (K) (1).

Infatti, se sopra la rigata Φ le curve $\overline{M}$ incontrano le generatrici in h punti, le loro omologhe C segano sulle curve di (K) gruppi hi–canonici, essendo la H e la H^* curve para–i–canoniche; d'altra parte la (generica) C non ha intersezioni con la H e la H^* (poichè su Φ la $\overline{M}$ non incontra le direttrici $\overline{H}$ ed $\overline{H}^*$), e ciò basta a confermare l'asserto (2).

Concludendo, resta provato in ogni caso che *sulla F esiste un fascio lineare di curve ellittiche C (senza punti base).*

Possiamo aggiungere che *nel fascio $|C|$ non si hanno curve dotate di un punto doppio.*

Infatti per la F l'*invariante I* di ZEUTHEN–SEGRE ha il valore (3):

$$I = 12p_a - p^{(1)} + 9 = -4$$

e quindi il numero δ delle curve di $|C|$ dotate di un punto doppio, per la nota relazione che lo lega all'invariante I (4), risulta appunto

$$\delta = 0 .$$

Allora *le curve C che siano spezzate risulteranno costituite da una componente ellittica multipla* (5).

Che effettivamente nel fascio $|C|$ si abbiano curve riducibili in tal modo, appare dall'osservare che sulla rigata Φ, in corrispondenza $[1, n]$ con la F, le curve immagini delle C non hanno intersezioni con la curva di diramazione (d'accordo col fatto che le C

(1) Cfr. § 8, n. 6.

(2) Cfr. questo paragrafo, n. 6, *Lemma II.*

(3) Cfr. § 2, n. 1.

(4) Cfr. § 1, n. 1.

(5) Cfr. questo paragrafo, n. 2.

sono ellittiche): cosicchè questa sarà composta con un certo numero di curve omologhe delle C, che appunto rispondono a curve C spezzate in una componente multipla.

Infine, siccome nel fascio $|C|$ non esiste nessuna curva dotata di punti doppi, le curve ellittiche C hanno tutte lo stesso *modulo* (1), cioè sono fra loro birazionalmente identiche (2).

8. Alla rigata ellittica Φ in corrispondenza $[1, n]$ con la F, si può sostituire un cilindro ellittico multiplo, sul quale la rappresentazione della F si ottiene direttamente come segue.

Consideriamo il fascio lineare di curve ellittiche $|C|$, e sia n il numero delle intersezioni di una C con una K: le C si designeranno talora come *curve direttrici* del fascio (K), e al numero n si darà il nome di *determinante* della superficie F: questo nome essendo giustificato in rapporto a rappresentazioni particolari della superficie mediante *funzioni ellittiche*, cui accenneremo più oltre.

È lecito supporre che la F appartenga allo spazio ordinario, e che sopra di essa il fascio $|C|$ sia segato dai piani perpendicolari all'asse delle z (3).

Sul piano $z = 0$ si costruisca una cubica ellittica, d'equazione

$$f(x, y) = 0,$$

la quale sia in corrispondenza biunivoca con i gruppi dell'involuzione ellittica γ_n^1 segata sopra una C dal fascio (K). In tal modo il fascio (K) viene ad essere riferito biunivocamente al fascio delle generatrici k del cilindro cubico f rappresentato da

$$f(x, y) = 0.$$

Si stabilisca allora una proiettività fra il fascio delle sezioni normali c di codesto cilindro e il fascio delle C (per esempio, facendo

(1) Invero l'*invariante assoluto* o *modulo* delle C (vedi, per esempio, ENRIQUES–CHISINI, vol. III, pag. 252), al variare della C in $|C|$ non si annulla mai e perciò è necessariamente costante.

(2) Cfr., per esempio, ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 252).

(3) Cfr. *Lezioni*, § 10.

corrispondere una c ed una C complanari). Così i punti di ciascuna generatrice k vengono posti in corrispondenza biunivoca con i gruppi della g_n^1 segata da $|C|$ sopra la K omologa, ed inoltre tra ogni c e la C sua corrispondente, nasce un riferimento $[1, n]$ nel quale ai punti di c rispondono biunivocamente i gruppi della γ_n^1 segata su C dal fascio delle direttrici K.

Pertanto *la superficie F si rappresenta sopra il cilindro cubico ellittico n — plo f*, le cui generatrici k dànno le curve del fascio ellittico (K), e le sezioni normali c quelle di $|C|$.

È facile vedere che *la curva di diramazione sopra il cilindro multiplo f è costituita da particolari sezioni normali* (rispondenti alle curve C spezzate in una componente multipla).

Invero, poichè sulla curva ellittica C l'involuzione ellittica γ_n^1 è priva di coincidenze, nella corrispondenza $[1, n]$ tra una c e una C non si hanno diramazioni: cosicchè la curva di diramazione non può incontrare le c in punti variabili, ma soltanto nei punti critici apparenti, che cadono nelle intersezioni fisse all'infinito delle c, ciascuna di esse risultando dotata di molteplicità conveniente.

Più precisamente, sia

$$C = s\, C_s \qquad (s \geqq 2)$$

una curva del fascio $|C|$ spezzata nella curva C_s presa con la molteplicità s: allora la C_s fa parte $s - 1$ volte della *curva delle coincidenze* sulla F, mentre sul cilindro f la sezione normale corrispondente alla $s\, C_s$, deve essere contata $s - 1$ volte come componente della *curva di diramazione*. Invero nella serie g_n^1 segata sopra una K dal fascio $|C|$, la $s\, C_s$ dà luogo ad un gruppo costituito da

$$\frac{n}{s}$$

punti s — *pli*.

Se nel fascio $|C|$ si hanno t curve spezzate nel modo predetto, risulta (cambiando s in s_i):

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i}(s_i - 1) = 2n + 2\pi - 2,$$

altrettanti essendo i punti doppi della serie lineare g_n^1 segata dal fascio $|C|$ sulla curva K di genere π.

Sarà poi

$$t \geqq 3.$$

se si esclude il caso in cui la F sia riferibile ad un nuovo cilindro semplice.

La rappresentazione della F sul cilindro f, mette subito in evidenza che *le curve del fascio lineare* $|C|$ *sono birazionalmente identiche fra loro*: proprietà che, come già notammo [1], si deduce *a priori* dall'espressione di NOETHER dell'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE.

L'asserzione precedente si giustifica qui con poche parole. Ciascuna delle C è rappresentata, con corrispondenza $[n, 1]$ e senza punti di diramazione, sopra una sezione normale c del cilindro f. Ma le c sono tutte proiettivamente identiche, e ciascuna di esse, considerata come curva n — *pla* senza punti di diramazione, è a sua volta immagine soltanto di un *numero finito* di curve birazionalmente distinte, tra le quali si trova una C: quando la c varia con continuità mantenendosi proiettivamente identica a se stessa, codesta C non può muoversi altro che in seno ad una famiglia di curve in corrispondenza birazionale fra loro.

In modo analogo si prova l'*identità birazionale delle* K, rappresentate ugualmente sopra una retta multipla k con dati punti di diramazione: anche qui la K variando con continuità deve rimanere sempre birazionalmente identica a se stessa.

§ 12. – LE SUPERFICIE DI GENERE $p_g = 0$ E $p_a = -1$, CON UN FASCIO ELLITTICO DI CURVE ELLITTICHE.

1. Fino a qui si è trattato del caso in cui sulla superficie F, avente i caratteri

$$p_g = 0 \quad , \quad p_a = -1 ,$$

esista un fascio ellittico (K) di curve di genere $\pi > 1$. Supponiamo invece che sia $\pi = 1$, cioè *la superficie F possegga un fascio ellittico (K) di curve ellittiche.*

[1] Vedi al termine del precedente n. 7.

Mostreremo che anche in questo caso *si può costruire sulla F un fascio lineare di curve ellittiche C* (privo di punti base).

2. Come si è già visto (¹), indipendentemente dal valore del genere π, nel fascio (K) non esiste nessuna curva dotata di punti doppi; da ciò per $\pi = 1$ segue senz'altro che le K hanno tutte lo stesso modulo, cioè sono fra loro birazionalmente identiche (²).

Possiamo assumere un modello proiettivo della superficie F per modo che le K siano sopra F curve normali, cioè curve d'un certo ordine m appartenenti ciascuna a uno spazio S_{m-1} di dimensione $m-1$.

Per ottenere questo modello si partirà anzitutto da una superficie (di un certo spazio S_r) senza singolarità, sopra la quale le K risulteranno prive di punti doppi: allora sappiamo (³) che le varietà di ordine abbastanza alto segano su ogni K una certa serie g_m^{m-1} completa; quindi trasformando la superficie per mezzo del sistema segato sopra di essa dal sistema delle varietà anzidette, si otterrà appunto una F sopra cui le K sono curve ellittiche normali d'ordine m.

Ora sulla nostra F, proiettivamente definita, le K, fra loro birazionalmente identiche, saranno proiettive (⁴).

Più precisamente: presa una K di S_{m-1} ed una K^* di S_{m-1}^*, nel caso generale esistono $2m^2$ omografie tra l'S_{m-1} e l'S_{m-1}^* le quali cambiano la K nella K^*. Quando invece le K siano *armoniche* di tali proiettività se ne hanno $4m^2$, e $6m^2$ nel *caso equianarmonico* (⁵).

Conviene ricordare come nascono questi riferimenti proiettivi. Esistono, nel caso generale, due trasformazioni birazionali che portano un punto A di K in un punto A^* di K^*; se ne hanno invece quattro e sei nei casi armonico ed equianarmonico, rispettivamente. Tali trasformazioni divengono proiettive (cioè subordinate ad una proiettività fra S_{m-1} ed S_{m-1}^*) quando il punto A è uno degli m^2 punti in cui si ha un iperpiano tangente alla K con contatto

(¹) Cfr. § 11, n. 2.

(²) Cfr. § 11, al termine del n. 7 e del n. 8.

(³) Cfr. *Lezioni*, § 42.

(⁴) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 254).

(⁵) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, loc. cit. nella nota precedente, pag. 262.

m — punto (un flesso, per $m = 3$), e analogamente per il punto A^* sulla K^*. Codeste $n = 2m^2$ (o $n = 4m^2$, o $n = 6m^2$) omografie, mentre portano un punto d'iperosculazione della K negli m^2 punti d'iperosculazione della K^*, fanno corrispondere ad un punto ordinario P di K un gruppo G di $n = 2m^2$ (o $4m^2$, o $6m^2$) punti *distinti* sopra la K^*.

Ciò premesso, è facile riconoscere che *se due curve ellittiche normali*, K e K^*, dello S_m, *sono proiettive* in $n = 2m^2$ (o $n = 4m^2$, o $n = 6m^2$) modi diversi, *viene determinata razionalmente sopra ciascuna di esse una* g^1_n, *e le due* g^1_n *sono riferite biunivocamente gruppo a gruppo*: e le n proiettività intercedenti fra K e K^* fanno corrispondere ad un punto qualunque di un gruppo G della prima, un punto del gruppo omologo nell'altra.

La proprietà qui enunciata discende dalle seguenti proposizioni:

a) Se nelle corrispondenze proiettive esistenti fra K e K^*, a due punti P e P' di K corrispondono sulla K^* due gruppi G e G' con un punto Q in comune, allora G e G' coincidono. Invero siano $\omega_1 = (P, Q)$ e $\omega_2 = (P', Q)$ ($\omega_1 \neq \omega_2$) le omografie che fanno corrispondere il punto Q ai punti P e P' rispettivamente, e si indichi con $\omega = (P', R)$ l'omografia che trasforma il punto P' in un punto R di G', diverso da Q: l'omografia

$$\omega \omega_2^{-1} \omega_1$$

porta il punto P in R. Ma i trasformati di P nelle omografie esistenti fra la K e la K^*, sono i punti di G: quindi anche R appartiene a G.

Questa proprietà significa che il gruppo di n punti corrispondente a un punto P di K nelle n trasformazioni proiettive di K in K^*, al variare di P descrive su K^* un' involuzione γ^1_n (che *a priori* potrebbe essere razionale o ellittica).

b) L'involuzione dei gruppi di punti omologhi ai punti P di K sopra K^*, è un'involuzione lineare: $\gamma^1_n = g^1_n$. Infatti questa involuzione possiede come punti doppi (o multipli) i punti d'iperosculazione della K^* che rispondono agli analoghi punti di K.

c) Per quanto è detto sopra, anche ai punti di K^* corrisponderanno su K i gruppi di una serie lineare g^1_n. Risulta dalla dimostrazione svolta in *a*) che le due g^1_n appartenenti a K e a K^* si corrispondono gruppo a gruppo, e che le n trasformazioni proiettive delle due curve possono determinarsi facendo corrispondere a un punto scelto nel primo gruppo uno degli n punti del secondo.

Aggiungasi che la g_n^1 definita sopra K dalle trasformazioni proiettive intercedenti fra la K e la K^*, non dipende da quest'ultima curva. Basta notare che le omografie tra la K e una $\overline{K}$ si possono riguardare come prodotti di quelle che intercedono fra la K e la K^*, con quelle che trasformano la K^* nella $\overline{K}$.

Allora al variare della K nel fascio (K), ogni gruppo della g_n^1 sulla K descrive una curva C (*direttrice del fascio* delle K) n — *secante* le K stesse; e le C così ottenute, essendo in corrispondenza biunivoca con i gruppi della g_n^1 sulla K generica, costituiscono un fascio lineare.

Qualora poi le C siano spezzate, risulteranno composte con le curve di un secondo fascio il quale pure sarà lineare, dato che il solo fascio irrazionale esistente sulla F è quello delle K ($p_g = 0$).

Torneremo ad indicare con $|C|$ codesto fascio composto di *curve direttrici* irriducibili, e con n il numero delle intersezioni di una K con una C: il numero n sarà uguale a $2m^2$, o a un suo divisore, quando le K (d'ordine m) siano a modulo generale; mentre n uguaglierà o dividerà $4m^2$ nel caso armonico, e $6m^2$ in quello equianarmonico.

Così *sopra la F proiettivamente definita, viene costruito un fascio lineare di curve irriducibili C* direttrici *del fascio (K), e secanti la K in un certo numero n di punti*: ciò significa che fra due curve generiche K e K^* riesce determinato razionalmente un gruppo di n omografie, in cui si corrispondono i punti sezioni di una stessa *direttrice C*.

Risulterà più avanti che le C sono ellittiche e perciò che il loro fascio è privo di punti base (non essendo la F riferibile a rigata).

3. L'esistenza dei due fasci $|C|$ e (K) consente di rappresentare la superficie F sopra un *cilindro cubico ellittico f, di molteplicità n*, la cui sezione normale, c, sia riferita biunivocamente ai gruppi della involuzione ellittica γ_n^1 segata sulle C dal fascio (K): ciò in modo del tutto analogo a quello seguito nel caso in cui le K si erano supposte di genere $\pi > 1$ [1].

[1] Cfr. § 11, n. 8.

Ricerchiamo come sia composta *la curva di diramazione.*

Sopra la K generica il fascio $|C|$ sega una serie lineare g_n^1, i cui gruppi sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una generatrice k del cilindro f: pertanto i punti di diramazione sulla generatrice k sono dati dagli omologhi dei gruppi della g_n^1 dotati di un punto multiplo. Quando la k varia descrivendo il cilindro, quei punti percorrono la richiesta curva di diramazione. Ora un punto di coincidenza s — pla per la g_n^1 fa parte di un gruppo $G = sG_r$ (con $n = rs$) di questa, tutto costituito da punti s — pli, dato che la g_n^1 è generata da un gruppo Γ di omografie; ed anzi i punti di G_r saranno uniti ciascuno per s di codeste omografie.

Allora anche il gruppo G^* omologo di $G = sG_r$ nella g_n^1 sopra la K^* variabile in (K), risulta costituito da un gruppo G_r^* di punti s — pli: infatti le omografie razionalmente determinate che fanno passare dalla K alla K^*, trasformano il gruppo Γ delle omografie che lasciano ferma la K in un analogo gruppo Γ^* che cambia in sé la K^*, e quindi portano un punto unito per s omografie di Γ, in un punto unito per altrettante omografie di Γ^*.

Ne segue che il gruppo $G = sG_r$ genera una curva C che è composta da una componente s — pla, C_s. A codesta $C = sC_s$ risponde una sezione normale del cilindro f appartenente alla curva di diramazione.

Pertanto *la curva di diramazione del cilindro multiplo f contiene un certo numero di sezioni normali*; ad ognuna di esse corrispondendo nel fascio $|C|$ una curva spezzata in una componente multipla. Se tali sezioni normali non esauriscono la curva di diramazione, le ulteriori componenti, non avendo intersezioni variabili con le generatrici del cilindro f, potranno essere soltanto alcune di queste.

Così, a differenza dal caso in cui il fascio ellittico (K) è costituito da curve di genere $\pi > 1$, sembra *a priori* possibile che la *curva di diramazione* del cilindro multiplo f comprenda, oltre ad un certo numero di sezioni normali, anche *delle generatrici k*, ciò che porterebbe che le curve C siano di genere maggiore di uno. Ma proveremo fra un momento che la presenza di queste generatrici è incompatibile con l'ipotesi $p_a = -1$.

Intanto osserviamo che il fascio delle C risulterà privo di punti base, a meno che non si abbiano delle generatrici k di diramazione a cui corrispondano curve eccezionali della superficie F.

4. Tornando a riferirci al nostro modello proiettivo della F, sul quale le *curve ellittiche del fascio* (K) sono normali di un certo ordine m, esaminiamo se a questo fascio possano appartenere curve *particolari degeneri*, ed in ispecie curve ridotte ad una componente multipla contenuta in uno spazio di dimensione minore di $m-1$: a questo problema siamo condotti dalla domanda se il cilindro multiplo f su cui abbiamo rappresentato la F, contenga o no delle generatrici come componenti della curva di diramazione [1].

Si consideri il gruppo, razionalmente determinato, delle n omografie che intercedono fra due curve generiche K e K^* di (K): omografie che si estendono ai due spazi S_{m-1} ed S^*_{m-1} a cui quelle curve appartengono. Conviene notare esplicitamente che se la K^* variando con continuità in (K), si porta in una curva $\overline{K}$ che appartenga ad uno spazio di dimensione minore di $m-1$, resta tuttavia ancora definito uno spazio $\overline{S}_{m-1}$ come limite di quello a cui appartiene la K^* variabile. Ma in tal caso fra codesto $\overline{S}_{m-1}$ e lo spazio S_{m-1} della K, si avrà un'*omografia degenere o singolare*, $\overline{\omega}$ di una certa *specie* $m-t$ [2].

Se così accade, la ω determina fra $\overline{S}_{m-1}$ e S_{m-1} una corrispondenza caratterizzata dalle seguenti proprietà:

a) in S_{m-1} si ha uno *spazio singolare* S_{m-t-1}, ad ogni punto del quale corrispondono tutti i punti di $\overline{S}_{m-1}$;

b) in $\overline{S}_{m-1}$ esiste uno spazio $\overline{S}_{t-1}$ ad ogni punto del quale corrispondono tutti i punti di un S_{m-t} passante per lo spazio singolare S_{m-t-1} di S_{m-1}; e la corrispondenza che in tal modo nasce fra i punti di $\overline{S}_{t-1}$ e la stella di S_{m-t} avente per sostegno lo spazio S_{m-t-1}, è un'omografia non singolare.

Ricerchiamo più precisamente come sia costituita la curva $\overline{\overline{K}}$ in cui viene trasformata la K per effetto dell'omografia $\overline{\omega}$.

(1) *A priori* si può rispondere a questa domanda, in modo sufficiente per gli sviluppi che seguono, in base al *lemma* del § 11, n. 2. Ma l'analisi che qui svolgiamo, pur da questo punto di vista superflua, porge l'intima ragione di alcuni fatti significativi ed offre la base per lo studio di una più larga famiglia di superficie (*superficie paraellittiche*).

(2) Cfr., per esempio, la già citata *Geometria proiettiva degli iperspazi* di E. BERTINI, cap. III, n. 20.

Se lo spazio singolare S_{m-t-1} di S_{m-1} non incontra la K, la curva omologa $\overline{K}$ appartiene allo spazio $\overline{S}_{t-1}$, singolare di $\overline{S}_{m-1}$, ed è dello stesso ordine m di K: la $\overline{K}$ risulterà poi semplice o multipla, secondochè gli S_{m-t} di S_{m-1} passanti per l'S_{m-t-1} singolare ed incidenti alla K, si appoggiano a questa in un sol punto o in un certo numero s (> 1) di punti (nel quale ultimo caso la $\overline{K}$ risulterà costituita da una curva $\overline{K}_s$ contata s volte, essendo la $\overline{K}_s$ d'ordine r con $sr = m$).

Supponiamo invece che la K si appoggi all'S_{m-t-1} singolare, per esempio, in un punto P. Allora agli ∞^1 S_{m-t} che proiettano dall'S_{m-t-1} i punti della K, corrispondono i punti di una curva, semplice o multipla, dello spazio $\overline{S}_{t-1}$, la quale però è ora dell'ordine $m - 1$. Ne segue, per ragioni di continuità, che quando la K^* tende alla $\overline{K}$, questa si spezza nella suddetta curva d'ordine $m - 1$ e in una retta $\overline{p}$ – da riguardare come trasformata del punto P – la quale si appoggia alla prima nel punto $\overline{P}$ corrispondente a quello infinitamente vicino a P sulla K.

Si avverta che *la retta $\overline{p}$ non ha intersezioni con le curve direttrici C*. Se la $\overline{p}$ incontra nel solo punto $\overline{P}$ lo spazio $\overline{S}_{t-1}$, consideriamo il gruppo G dei punti comuni alla K e allo spazio S_{m-t} (tangente alla K in P) che nella stella di sostegno S_{m-t-1} corrisponde al punto $\overline{P}$: se si prende sulla K un punto A generico, e quindi diverso dai punti di G, è evidente che la curva del fascio $|C|$ passante per A, non incontra la retta $\overline{p}$. Alla stessa conclusione si giunge nel caso in cui la $\overline{p}$ appartenga allo spazio singolare $\overline{S}_{t-1}$ di $\overline{S}_{m-1}$, purchè s'intenda di designare con G il gruppo dei punti comuni alla K e all'S_{m-t+1} passante per S_{m-t-1}, che contiene il fascio degli S_{m-t} corrispondenti ai punti della retta $\overline{p}$.

La C che passa per un punto di G (in particolare, per P) si appoggia alla retta $\overline{p}$, e quindi la contiene per intero: ma poichè le C costituiscono un fascio, ne esiste una sola di cui fa parte la retta $\overline{p}$, pertanto i punti del gruppo G appartengono ad una stessa C, cioè ad uno stesso gruppo della g_n^1 segato sulla K dal fascio $|C|$.

Si è supposto, per semplicità di discorso, che la K si appoggi in un solo punto allo spazio singolare S_{m-t-1}, ma le conclusioni precedenti si estendono subito al caso in cui la K incontri l'S_{m-t-1} in h (> 1) punti $P_1, P_2, \cdots, P_h$. Si troverà allora che la $\overline{K}$ è costituita da una curva s — pla $\overline{K}_s$ dell'$\overline{S}_{t-1}$, d'ordine r, con $rs = m - h$ ($s \geqq 1$), alla quale si debbono aggiungere h rette $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \cdots, \overline{p}_h$, la $\overline{p}_i$ essendo incidente alla K_s nel punto $\overline{P}_i$ omologo di quello infinitamente vicino a P_i sulla K. Le rette $\overline{p}_i$ sono fondamentali per il fascio delle direttrici C, le quali pertanto incontrano la K_s in n/s punti. La retta $\overline{p}_i$ è componente della curva C che passa per P_i, e le intersezioni della K con l'S_{m-t} passante per S_{m-t-1} e tangente alla K in P_i, appartengono al gruppo passante per P_i della g_n^1 segata su K dal fascio $|C|$, del quale pure fanno parte le ulteriori intersezioni della K con l'S_{m-t+1} che contiene il fascio degli S_{m-t} della stella di sostegno S_{m-t-1} corrispondenti ai punti della $\overline{p}_i$, nel caso in cui questa sia contenuta nell'$\overline{S}_{t-1}$ singolare di $\overline{S}_{m-1}$.

Infine si può notare che se una delle omografie che fanno passare dalla curva K alla $\overline{K}$, degenera nel modo innanzi detto, anche le altre divengono singolari (della stessa specie $m - t$) perchè si ricavano da quella moltiplicandola per le n omografie non degeneri della K in sé.

L'esame che precede porta alla seguente conclusione: *a priori le curve ellittiche K del nostro fascio, possono degenerare in una parte multipla*, costituita da una componente razionale od ellittica contata più volte, *e in curve razionali semplici*. Però una curva degenere siffatta conta in generale per $\Delta > 0$ curve dotate di punti doppi entro il fascio (K), e – almeno per superficie prive di curve eccezionali – questo è incompatibile con l'ipotesi che il genere della F valga $p_a = -1$, da cui abbiamo dedotto $\Delta = 0$ [1]. Il solo caso possibile in queste ipotesi, sarebbe quello in cui la K degenerasse in una curva ellittica multipla senza ulteriori componenti: ma vedremo fra poco che in effetto nemmeno tale circostanza può verificarsi.

5. *Nota.* — Aggiungiamo un'ultima osservazione. Nel discorso che precede ci siamo riferiti ad una superficie F (su cui le K divenivano curve ellittiche normali) priva di singolarità. Quando la F possegga delle singolarità, per esempio un punto doppio o multiplo isolato, si deve ritenere come spezzata la $K = \overline{K}$ che venga a passare per tale punto multiplo: più precisamente l'intorno del punto multi-

[1] Cfr. § 11, n. 2.

plo costituirà una curva (razionale) componente per questa K; e ciò sebbene ora quel punto non provenga in generale da un punto singolare di un'omografia degenere fra una K generica e la $\overline{K}$, nel senso detto innanzi.

Illustriamo la cosa sopra un esempio concreto. Sia

$$f(x, y) = 0$$

un cilindro cubico f, e

$$\psi(x, y) = 0,$$

per esempio, un cilindro quadrico parallelo che seghi il primo secondo sei rette $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$. Si costruisca la superficie F, dello spazio $S_4 = (x, y, z, u)$, che ha per equazioni:

$$\begin{cases} u^2 = (z - a)(z - b)(z - d)(z - e) \cdot \psi(x, y) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

la quale viene rappresentata sul cilindro doppio f con una curva di diramazione costituita dalle quattro sezioni

$$z = a, z = b, z = d, z = e,$$

e dalle generatrici $k_1, k_2, \cdots, k_6$.

Alle generatrici k di f rispondono su F delle quartiche piane ellittiche K,

$$u^2 = (z - a)(z - b)(z - d)(z - e)\,\psi$$

(figurando ψ come una costante), le quali sono proiettive fra loro: nel passaggio da una K generica alla K_i, omologa di k_i, l'omografia degenera riducendosi K_i alla retta k_i contata due volte, da completarsi con la retta all'infinito del piano (che si vedrebbe essere eccezionale per la superficie F).

Ora però i punti d'incontro di k_i con le sezioni $z = a$, $z = b$, $z = d$, $z = e$, dànno tanti punti doppi della superficie F, e ciascuno di questi si deve ritenere come una componente infinitesima della nostra K_i spezzata. Così per la superficie F, di genere lineare $p^{(1)} = 1$, resa priva di linee eccezionali, si può calcolare il numero Δ delle K dotate di punti doppi: invero ogni curva K_i si riduce alla

k_i contata due volte, da completarsi con quattro curve razionali (intorni dei relativi punti doppi), e quindi conta nel Δ per

$$-2 + 4 \cdot 2 = 6$$

unità (¹), cosicchè in definitiva $\Delta = 36$, da cui le nostre formule permettono di ricavare $p_a = 3$, e, come si vedrà più precisamente in seguito,

$$p_g = p_a + 1 = 4.$$

In effetto questo valore del genere p_g si potrà verificare con un ragionamento che avremo occasione di svolgere più tardi.

6. Esaminiamo le superficie F dello spazio $S_4 = (x, y, z, u)$, rappresentate per proiezione dal punto all'infinito dell'asse delle u sopra il cilindro cubico n — plo

$$f(x, y) = 0,$$

con curva di diramazione costituita da sezioni normali c ($z =$ cost.) e da generatrici k, rispondenti ciascuna delle prime ad una curva $C = sC_s$ costituita da una componente multipla, e ciascuna delle seconde ad una curva $K = rK_r$ costituita pure da una componente multipla (s ed r essendo divisori di n); e da prima si supponga per semplicità di riferirci ad una F che non possegga curve eccezionali, e quindi sia di genere lineare $\bar{p}^{(1)} = p^{(1)} = 1$. Vogliamo mostrare che *i punti d'intersezione delle c e delle k di diramazione, sono punti doppi o multipli per la superficie F, da ritenere come curve infinitesime facenti parte delle K riducibili*, cosicchè queste K vengono a contare nel fascio ellittico (K) ciascuna per $\Delta > 0$ curve dotate di un punto doppio, e per conseguenza l'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE è:

$$\Sigma\Delta - 4 = 12p_a - p^{(1)} + 9 = 12p_a + 8$$

da cui:

$$\Sigma\Delta = 12p_a + 12 > 0$$

e quindi $p_a \geq 0$. In altre parole si tratta di far vedere che *per le superficie F con i generi $p_g = 0$ e $p_a = -1$, la rappresentazione*

(¹) Cfr. § 11, n. 2.

sul cilindro ellittico multiplo $f(x, y) = 0$, *porta ad una curva di diramazione costituita soltanto da sezioni* c ($z =$ cost).), *e non da generatrici di* f, come si è annunciato al termine del n. 4.

Per semplificare le ipotesi da cui partiamo, pongasi che tanto la cubica di diramazione c come la retta di diramazione k, delle quali vogliamo considerare l'intersezione, siano linee semplici per la superficie F.

La funzione algebrica u del punto (x, y, z) variabile sul cilindro f, è una funzione ad n rami che vengono permutati secondo una sostituzione S_c in corrispondenza alla cubica di diramazione c, e una sostituzione S_k relativa alla retta di diramazione k: per semplicità di discorso, supponiamo che ciascuna di queste sostituzioni sia composta di

$$m = \frac{n}{2}$$

trasposizioni; per esempio, se $n = 4$ ($s = 2$, $r = 2$) sarà:

$$S_c = (1, 2)(3, 4),$$

$$S_k = (1, 2)(3, 4),$$

oppure:

$$S_k = (1, 3)(2, 4),$$

ovvero:

$$S_k = (1, 4)(2, 3).$$

In queste ipotesi si consideri una sezione piana generica parallela all'asse u, vicina alla retta OU_∞ che congiunge il punto $O = (c, k)$ col punto U_∞ improprio dell'asse u. È facile riconoscere la singolarità che viene definita al limite sopra la curva algebrica sezione di F, quando il nostro piano venga a passare per OU_∞. All'uopo basta tenere presente il concetto della singolarità secondo CHISINI: singolarità definita, in accordo alla legge di continuità, come prodotto di trasposizioni o sostituzioni, da elevarsi ciascuna ad un esponente che può superare il periodo (1).

(1) È utile qui richiamare in breve questo fecondo concetto stabilito nella memoria di O. CHISINI su *Le singolarità di un ramo superlineare di curva piana definite mediante un prodotto di sostituzioni* («Atti del R. Istituto Veneto di scienze

Nel nostro caso si tratta di riconoscere la singolarità limite di una curva piana corrispondente alla funzione algebrica u ($u = u_1$, u_2, u_3, u_4), che risulta dal confluire di due punti critici ciascuno dei quali dà luogo a due trasformazioni sui rami. Ed è chiaro che questa singolarità limite non può rispondere al semplice contatto di un ramo lineare con la tangente OU_∞, perchè nel caso più favorevole la sostituzione corrispondente del quarto ordine, consta soltanto di tre trasposizioni: bisogna dunque che, al limite, la curva sezione piana di F per OU_∞ possegga un punto doppio o multiplo,

lettere ed arti », tomo LXXX, parte 2ª, 1921), posteriore alla pubblicazione del secondo volume delle *Lezioni* di ENRIQUES-CHISINI, e che reca un ulteriore ed importante contributo alla teoria delle singolarità svolta in questo libro.

È noto (NOETHER) che un punto singolare qualsiasi di una curva algebrica

$$\varphi(x, y) = 0,$$

si può ritenere come derivante dalla riunione di un certo numero di nodi e di cuspidi: sia per esempio di r nodi e di s cuspidi. Ciò porta che variando di poco i coefficienti di φ, la funzione algebrica $y = y(x)$ abbia in prossimità della data $2r + 3s$ punti critici semplici o elementari, a ciascuno dei quali risponde una trasposizione fra i rami di y: al limite, $2r + 2s$ di queste trasposizioni si saturano due a due dando luogo ad un punto multiplo, o ad una riunione di punti multipli, che equivale ad $r + s$ punti doppi; mentre le rimanenti s dànno luogo alla sostituzione fra i rami che risponde alla decomposizione in cicli di PUISEUX. Nell'insieme la singolarità di φ risulta così definita da un prodotto di sostituzioni ciascuna delle quali viene elevata ad un certo esponente che può superare il periodo; e il CHISINI mostra come questo prodotto di sostituzioni, ben determinato secondo il principio di continuità, valga a mettere in luce tutte le particolarità essenziali del punto singolare, in ispecie i punti multipli successivi dei suoi rami, lo schema grafico dell'ENRIQUES, ecc.

Per noi qui importa soprattutto ritenere quanto segue: si abbiano due punti singolari di una funzione algebrica ad n rami, $y_1, y_2, \cdots, y_n$, dipendente da un parametro, il primo dei quali equivalga ad un insieme di $r + s$ punti doppi, fra cui r nodi ed s cuspidi, il secondo ad r' nodi ed s' cuspidi, cosicchè le sostituzioni di PUISEUX relative al primo punto saranno definite come prodotto di s trasposizioni (non saturate), e quelle del secondo dal prodotto di s' trasposizioni. Se variando il parametro, i due punti singolari si fanno confluire in uno stesso punto, *quando sia* $s + s' \geq n$ *questa singolarità limite equivarrà non ad* $r + s + r' + s'$, *ma ad un numero maggiore di punti doppi*: in altre parole il passaggio al limite accresce il valore della singolarità in ordine all'abbassamento del genere.

e quindi che la stessa superficie F abbia in O un punto doppio o multiplo. Ciò significherà che la curva riducibile K riducentesi al doppio della K_2, comprende anche in sé delle curve infinitesime date dagli intorni dei punti intersezione della K_2 con le C riducibili, come appunto dovevamo dimostrare.

Il ragionamento precedente è stato svolto sopra un esempio particolare, ma è facile convincersi che ha un valore affatto generale.

Quando si abbia una generatrice di diramazione k cui risponda una $K = rK_r$, e una cubica di diramazione c cui risponda una $C = sC_s$, nell'ipotesi che K_s e C_s siano curve semplici per la F, la curva sezione di F con un piano parallelo ad OU_∞ e vicino a questa retta, avrà in generale due punti singolari, definiti: il primo da una sostituzione composta da

$$\frac{n}{r}$$

cicli

$$(1\,,2\,,\cdots,r)\,,\;(r+1\,,\cdots,2r)\,,\cdots,$$

e il secondo da una sostituzione composta da

$$\frac{n}{s}$$

cicli d'ordine s: nel loro insieme le due sostituzioni equivalgono a

$$(s-1)\frac{n}{s}+(r-1)\frac{n}{r}$$

trasposizioni; e siccome questo numero è almeno uguale ad n, al limite – quando la sezione piana di F venga a passare per OU_∞ – le dette trasposizioni non possono rimanere tutte libere, ma almeno una coppia di esse deve saturarsi in un punto doppio, sicchè la sezione piana di F per OU_∞ avrà in O un punto doppio o multiplo, e il medesimo punto O riuscirà doppio o multiplo per la superficie stessa.

Fin qui si è escluso che le curve di F rispondenti alle linee di diramazione c e k, fossero doppie o multiple per F. Ma tenendo sempre presente il concetto di CHISINI delle singolarità, appare chiaro che questo caso non dà luogo a nuove difficoltà.

Infatti la sezione di F con un piano parallelo alla OU_∞ e vicino ad essa, avrà ora in generale due punti multipli corrispondenti a K_r e C_s, e queste singolarità riusciranno definite ciascuna da un prodotto di sostituzioni, di cui alcune trasposizioni vengono saturate a coppie in modo da fornire l'equivalenza della singolarità rispetto al genere; mentre le altre che restano libere costituiscono propriamente le sostituzioni di PUISEUX relative ai rami. Ora ciascuna di queste sostituzioni di PUISEUX comprende almeno

$$\frac{n}{2}$$

trasposizioni, sicchè al limite vengono a confluire almeno n sostituzioni che non possono rimanere tutte libere, ma debbono in parte saturarsi dando origine a qualche nuovo punto doppio, che aggiungendosi alla singolarità limite ne accresce l'equivalenza rispetto al genere. Dunque la sezione di F con un piano per OU_∞ avrà nel punto O, incrocio di c e k, una valenza (rispetto al genere) superiore a quella che spetterebbe semplicemente alla somma delle intersezioni di c e k; è quanto dire che il punto O – il quale figura in generale come incrocio di due curve multiple di F – risulterà ipermultiplo, costituendo col suo intorno una curva fondamentale propria del sistema delle sezioni iperpiane di F, come volevamo dimostrare.

Crediamo opportuno di chiarire le cose dette con l'esame di qualche caso particolare, il primo dei quali sarà spiegato per intero, mentre gli altri saranno lasciati alla cura degli studiosi per esercitazione.

Si consideri la superficie F rappresentata da:

$$\begin{cases} u^3 = (z-a)(z-b)(z-d)\,\psi(x,y) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

dove $\psi(x,y)$ designi un cilindro cubico che tocchi f con contatto tripunto secondo due generatrici, e che inoltre lo tocchi semplicemente lungo una generatrice k, secandolo ulteriormente in un'altra k'.

La F è rappresentata per proiezione da U_∞ sul cilindro cubico ellittico f, e la curva di diramazione risulta costituita dalle tre sezioni c:

$$z = a\ ,\ z = b\ ,\ z = d,$$

e dalle due generatrici k e k': ma mentre la generatrice k' è semplice per F, la k risulta doppia, anzi è una retta cuspidale lungo cui la F ha contatto tripunto col piano che la proietta da U_∞. Ciò posto vogliamo esaminare la singolarità che presenta la F nel punto O, incrocio di c con la retta doppia k. A tal uopo si torni a considerare, come prima, la sezione di F con un piano parallelo ad OU_∞ e vicino a quest'asse: qui si hanno due punti di diramazione rispetto a c e k, al primo dei quali risponde una sostituzione sui rami, che può indicarsi con

$$(1\,,2\,,3),$$

e all'altro la sostituzione

$$(1\,,2\,,3)^2.$$

Al limite, quando il piano secante viene a passare per OU_∞, si ha la singolarità rappresentata dalla sostituzione

$$(1\,,2\,,3)^3,$$

che vuol dire un punto triplo. Dunque il punto O appartenente alla retta doppia k, è triplo per la superficie F: il suo intorno costituisce così una curva razionale infinitesima che viene ad aggiungersi come componente alla K riducibile, che risponde a k (1).

Un secondo esempio da analizzare può essere offerto dalla superficie:

$$\begin{cases} u^4 = (z-a)\,(z-b)\,(z-d)^2\,\psi(x\,,y) \\ f(x\,,y) = 0 \end{cases}$$

dove $\psi(x\,,y)$ designi un cilindro del quarto ordine, avente in comune con f due generatrici di contatto quadripunto, ed una generatrice semplice insieme ad una di contatto tripunto, oppure due generatrici di semplice contatto. Se per esempio si suppone che ψ abbia con f una generatrice di contatto tripunto k, questa risulta una retta tripla cuspidale per F, lungo cui la F ha un contatto quadripunto col piano che la proietta da U_∞. Quanto alle curve di diramazione c, le $z=a$ e $z=b$ sono linee semplici per F, mentre la $z=d$ risulta

(1) Invece il punto comune alle linee semplici k' e c, risulta soltanto doppio per la F.

una linea doppia tacnodale. Ora si può cercare la singolarità che spetta al punto d'incontro di k con $z = a$ (o $z = b$), ovvero di k con $z = d$. Riferiamoci a quest'ultimo caso che è più complesso. Qui s'incontra una singolarità che viene definita dal prodotto di due sostituzioni del tipo

$$(1, 2, 3, 4)^3 \quad \text{e} \quad (1, 2, 3, 4)^2.$$

Questa singolarità, corrispondente alla sostituzione $(1, 2, 3, 4)^5$, è il punto quadruplo di un ramo cuspidale del quarto ordine. Si deduce che il punto $O = (k, c)$ è per F un punto quadruplo uniplanare. Siccome d'altra parte questo punto è dato come incrocio di una linea tacnodale con una retta tripla (cuspidale), è chiaro che esso costituisce un punto multiplo proprio (equivalente a 6, invece che a $3 + 2 = 5$, punti doppi), che abbassa il genere delle sezioni iperpiane di F passanti per esso.

7. In ciò che precede abbiamo preso in esame le superficie F possedenti un fascio ellittico di curve ellittiche (K), e rappresentate sopra un cilindro ellittico $n - plo$, f, con una curva di diramazione costituita da un certo numero di sezioni normali c e da qualche generatrice k, ed abbiamo rilevato che la superficie F realizzata proiettivamente in $S_4(x, y, z, u)$, per modo che venga proiettata da U_∞ sopra f, possiede almeno tre punti multipli propri in corrispondenza ad una k di diramazione, cosicchè la K omologa viene a spezzarsi in quattro parti almeno. Da ciò segue che questa K porti un contributo positivo al numero Δ della K dotate di un punto doppio entro il fascio (K). Se la F dell' S_4 è priva di curve eccezionali, si ha dunque senz'altro, $p_a \geqq 0$. Ma la stessa conclusione vale anche se la curva K omologa della k di diramazione sia per la nostra F una curva eccezionale: in tal caso si sostituirà alla F una superficie F^* senza curve eccezionali, e ad essa birazionalmente identica; allora sulla F^* si troverà in corrispondenza alla k una curva K^* spezzata in almeno tre parti, la quale porterà un contributo positivo nel Δ del fascio, e quindi avremo ancora $p_a \geqq 0$.

In conclusione la nostra analisi prova che se la curva di diramazione del cilindro $n - plo$ f comprende delle generatrici k, il genere numerico della superficie F vale $p_a > -1$.

Dunque *nell'ipotesi* $p_a = -1$ *la nostra* F, *possedente un fascio ellittico di curve* K *di genere* $\pi = 1$, *viene rappresentata sopra un cilindro ellittico* $n - plo$, *con curva di diramazione esclusivamente composta di (almeno tre) sezioni normali* c, sicchè *le curve* C *direttrici delle curve ellittiche formanti il fascio ellittico* (K), *sono anch'esse ellittiche e costituiscono un fascio lineare senza punti base*. Quest'ultima osservazione segue dal fatto che un fascio lineare di curve ellittiche dotate di punti base (semplici o multipli) si può riguardare come un sistema lineare di curve di genere e grado virtuali n e π con $n > 2\pi - 2$, per modo che la superficie che lo contiene risulta appartenere alla famiglia delle rigate [1].

8. *Riassunto dell'analisi precedente*. — Riassumiamo i risultati ottenuti in questo e nel paragrafo precedente in ordine alle superficie irregolari di genere geometrico $p_g = 0$.

Le superficie irregolari di genere geometrico $p_g = 0$ ($p_a < 0$), non riferibili a rigate, hanno il genere numerico $p_a = -1$, e posseggono un *fascio ellittico* di curve K di genere $\pi \geqq 1$, ed un *fascio lineare* di curve *ellittiche* C, *direttrici* n–secanti delle prime; il numero n (*determinante* della superficie) essendo maggiore dell'unità.

Ogni superficie F di questa famiglia si può rappresentare sopra un cilindro ellittico $n - plo$, con curva di diramazione composta da (almeno tre) sezioni normali c, ciascuna di esse rappresentando in generale una curva del fascio $|C|$ ridotta ad una componente multipla. Le C sono fra loro birazionalmente identiche, e lo stesso accade delle K. La suddetta rappresentazione vale anche per il caso delle rigate di genere $p_a = -1$ (*rigate ellittiche*), nel quale le K risultano razionali ($\pi = 0$).

Si avverta poi che codesta rappresentazione caratterizza completamente la nostra famiglia di superficie.

Invero sia F una superficie (che possiamo supporre non appartenente alla famiglia delle rigate) rappresentata sopra un cilindro multiplo

$$f(x, y) = 0,$$

la cui curva di diramazione sia costituita soltanto da curve $z = \text{cost}$.

(1) Cfr. § 9, n. 5.

Per questa F si trova anzitutto $p_a = -1$. Ciò risulta dal calcolo dell'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE per il fascio delle curve K, di genere $\pi \geqq 1$, corrispondenti alle generatrici del cilindro multiplo. Le K sono tutte birazionalmente identiche e irriducibili, venendo rappresentate sopra generatrici multiple del cilindro f con gruppi proiettivi di punti di diramazione (1). Pertanto il numero delle curve K dotate di un punto doppio vale $\Delta = 0$. Quindi l'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE calcolato mediante il fascio (K) di genere $\rho = 1$, è (2):

$$I = \Delta + 4(\pi - 1)(\rho - 1) - 4 = -4 = 12p_a + p^{(1)} + 9.$$

Ora il genere lineare $p^{(1)}$, che è *a priori* maggiore od uguale ad uno, assume qui il valore $p^{(1)} = 1$ poichè la F possiede un fascio di curve ellittiche (3), dunque:

$$12p_a + 12 = 0,$$

da cui:

$$p_a = -1.$$

Si può anche valutare facilmente il genere geometrico p_g della superficie, dimostrando che $p_g = 0$.

A tale scopo basta considerare il sistema lineare $|2C|$ costituito dalle coppie di curve che corrispondono alle $z = \text{cost.}$: il sistema aggiunto a $|2C|$ viene costituito da componenti delle curve riducibili del fascio $|C|$ e quindi non contiene $|2C|$. Il ragionamento sarà sviluppato nel § 15.

Riepiloghiamo intanto le conclusioni della nostra analisi:

Le superficie irregolari di genere geometrico $p_g = 0$, non riferibili

(1) Cfr. § 11, n. 8.

(2) Cfr. § 1, n. 3 e § 2, n. 1.

(3) Invero, mentre da una parte deve essere verificata la diseguaglianza $p^{(1)} \geq 1$ – valida per tutte le superficie che non sono riferibili a rigate (cfr. *Lezioni*, § 51) – non può aversi $p^{(1)} > 1$, perchè se ne dedurrebbe l'esistenza di sistemi pluricanonici di grado non nullo [essendo

$$P_i \geq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1\,],$$

che è incompatibile con quella di un fascio di curve ellittiche (cfr. *Lezioni*, § 55).

a rigate, hanno il genere numerico $p_a = -1$ *e si lasciano rappresentare sopra un cilindro ellittico multiplo*

$$f(x, y) = 0,$$

con curva di diramazione composta di sezioni $z = cost.$ *Viceversa: un cilindro ellittico multiplo con una siffatta curva di diramazione, rappresenta una superficie con* $p_g = 0$ *e* $p_a = -1$, *la quale si riduce ad una rigata ellittica quando la curva di diramazione sia composta di due sole sezioni* $z = cost.$

9. *Nota sulle superficie paraellittiche.* — Nell'analisi delle superficie – non riferibili a rigate – coi generi $p_a = -1$ e $p_g = 0$, si sono presentate, *a priori* possibili, accanto alle superficie possedenti un fascio ellittico di curve di genere $\pi \geqq 1$ e un fascio lineare di curve ellittiche, certe superficie possedenti un fascio ellittico di curve ellittiche e un fascio lineare di curve di genere > 1: se alle superficie della prima famiglia si dà il nome di *ellittiche*, che conviene loro per la proprietà (che riconosceremo più avanti) di possedere un gruppo continuo ellittico di trasformazioni birazionali in se stesse, alle superficie della seconda famiglia si potrà dare il nome di *paraellittiche*, poichè colle prime hanno a comune diverse proprietà fondamentali, sebbene non quella di possedere il gruppo anzidetto.

Noi abbiamo concluso l'analisi dei paragrafi precedenti, dimostrando che le superficie paraellittiche (rappresentabili sul cilindro multiplo f, con curva di diramazione formata da sezioni piane $z =$ cost. e da un certo numero di generatrici) non si trovano fra quelle dotate dei caratteri $p_a = -1$ e $p_g = 0$, perchè il loro genere numerico vale $p_a \geqq 0$. Dal che segue che deve aversi per esse $p_g \geqq 1$. Si può giungere allo stesso risultato verificando direttamente questa ultima diseguaglianza, e riconoscendo poi che è sempre $p_g - p_a = 1$.

Come possa condursi questa seconda dimostrazione, ci limiteremo a indicare sopra due semplici esempi.

Si consideri dapprima la superficie dello S_4:

$$u^2 = (z-a)(z-b)(z-d)(z-e)\,\psi(x, y)$$

$$f(x, y) = 0,$$

rappresentata sul cilindro cubico doppio $f(xy)=0$, con curva di diramazione composta delle sezioni $z=a$, b, d, e, e di due generatrici

$$k' \text{ e } k''$$

(si assume per ψ un cilindro, per esempio quadrico, tangente ad f secondo quattro generatrici e secante secondo le due generatrici di diramazione k' e k'').

Sopra la superficie F le curve C, corrispondenti alle sezioni $z=$ cost. di f, sono curve del genere 2; la curva composta delle due K' e K'' corrispondenti alle due generatrici di diramazione, sega sopra le C (del genere due) coppie canoniche. Ma essa non è, come si potrebbe credere, curva canonica della superficie F. Invero è facile vedere [col ragionamento che impieghiamo nel paragrafo di questa memoria dedicato al calcolo dei generi e plurigeneri delle superficie ellittiche ([1])] che la curva canonica di F si lascia rappresentare con

$$|K'+K''+C_2'+C_2''+C_2'''+C_2^{\mathrm{IV}}-2C|,$$

designando C_2', C_2'', C_2''', C_2^{IV} curve *metà* delle C, cioè componenti doppie delle C che corrispondono alle $z=a$, b, d, e: qui il simbolo $|C_2'+C_2''+C_2'''+C_2^{\mathrm{IV}}-2C|$ indica una curva *virtuale* d'ordine zero formata colle componenti del fascio $|C|$, diversa dalla curva effettiva dello stesso ordine zero.

Dunque la curva composta $K'+K''$ non potrà essere equivalente alla (eventuale) curva canonica di F, sebbene anche questa debba segare le C secondo coppie canoniche.

Ora, sopra una C, del genere due, confrontiamo la g_2^1 canonica e la γ_2^1 ellittica, segata dalle curve K. Le due involuzioni sono permutabili; perciò la g_2^1 è trasformata in se stessa dalla γ_2^1 e vi sono due coppie della g_2^1 ciascuna delle quali è mutata in sé: una è costituita dalla coppia (canonica) dei punti di coincidenza della γ_2^1; l'altra è coppia comune alla g_2^1 e alla γ_2^1. Pertanto si avrà *una* curva K (irriducibile) secante le C in coppie canoniche. Questa

([1]) Cfr. § 15.

K costituirà una curva canonica della F? Per provarlo bisogna esprimere la differenza tra le due curve K e $K' + K''$, che è una curva virtuale d'ordine zero, composta colle componenti delle C. Ci si convince facilmente che codesta differenza è proprio la nostra curva

$$|C_2' + C_2'' + C_2''' + C_2^{\text{IV}} - 2C|,$$

perchè questa è la sola curva *virtuale* d'ordine zero (che non si riduca alla curva d'ordine zero effettiva) la quale si possa formare colle componenti delle curve doppie del fascio $|C|$, trattandole in modo simmetrico. La condizione di simmetria, che qui introduciamo, è giustificata dall'osservazione, che, facendo variare i parametri della superficie paraellittica F, si riesce a permutare fra loro le 4 curve C_2', C_2'', C_2''', C_2^{IV}, componenti delle C doppie, ritornando la superficie in se stessa.

In conclusione la nostra F, avrà *una* curva canonica, costituita dalla K irriducibile, costruita come si è indicato innanzi.

Si può ripetere un ragionamento analogo per la superficie F di equazioni

$$u^3 = (z-a)(z-b)(z-d)\,\psi(x, y)$$

$$f(x, y) = 0$$

rappresentata sul cilindro cubico triplo $f = 0$, con curva di diramazione composta delle tre sezioni piane $z = a$, b, d, e di due generatrici k' e k'' (si suppone che ψ sia un cilindro, per esempio, quadrico, che tocchi f secondo una generatrice contata tre volte e la seghi poi secondo le due generatrici di diramazione, la prima delle quali sarà semplice mentre la seconda sarà una retta di contatto ordinario).

Ora la curva composta delle K' e K'' corrispondenti alle due generatrici di diramazione contate ciascuna due volte, segherà le C, di genere 3, in una quaterna canonica di punti; tuttavia la detta curva $2K' + 2K''$ non sarà curva canonica per F, differendone (come è facile vedere) per la curva *virtuale* d'ordine zero:

$$|2C_3' + 2C_3'' + 2C_3''' - 2C|,$$

dove C_3', C_3'', C_3''' designano le componenti delle curve triple che appartengono al fascio $|C|$, in corrispondenza a $z = a$, b, d. Ma ci sono sopra F, altre due curve (contenenti come parti due K irriducibili) che segano le C secondo gruppi canonici di punti. Infatti consideriamo una C, del genere 3, riferendoci alla quartica piana canonica che ne porge il modello, e che ammette una trasformazione proiettiva ciclica del terz'ordine, generante l'involuzione ellittica γ_3^1, (segata sulla C dalle $\bar{K}$). I due punti tripli della γ_3^1, M ed N, sono i punti di contatto di una bitangente della quartica, e la trasformazione proiettiva possiede – oltre a codesta bitangente – due rette unite, ognuna delle quali sega sulla quartica una terna di punti, che presa insieme ad M o a N costituisce una quaterna canonica.

Dunque sulla superficie F si troveranno *due* curve K irriducibili, che sommate rispettivamente a K' e K'', costituiranno due curve secanti le C secondo quaterne canoniche di punti. Ognuna di queste $K + K'$ e $K + K''$, differirà dalla curva composta $2K' + 2K''$ per una curva *virtuale* d'ordine zero, formata simmetricamente colle componenti delle curve triple che appartengono al fascio C. Ma queste curve virtuali si riducono a due curve distinte

$$\bar{C} = C_3' + C_3'' + C_3''' - C\,,$$

e

$$\bar{\bar{C}} = C - C_3' - C_3'' - C_3''' = 2\bar{C} = 2C_3' + 2C_3'' + 2C_3''' - 2C.$$

Se ne deduce che una delle due curve $K + K'$ e $K + K''$, sopra nominate, differisce dalla $2K' + 2K''$ precisamente per

$$2C_3' + 2C_3'' + 2C_3''' - 2C\,,$$

e quindi costituisce sopra F *una* curva canonica.

Non proseguiremo queste considerazioni, lasciando per esempio che il lettore studioso tratti da sé il caso della superficie analoga alla precedente ove si abbiano *tre* anzichè due generatrici di diramazione del cilindro triplo f. Questa superficie è di genere $p_g = 2$, ma la pura applicazione del metodo indicato dà soltanto $p_g \geqq 1$.

Vogliamo fermarci, un momento, sopra un'altra osservazione. Le *superficie paraellittiche hanno sempre l'irregolarità* $p_g - p_a = 1$, sicchè quando si è trovato il loro genere geometrico p_g si ha subito il genere numerico p_a, e in particolare dall'essere $p_g \geqq 1$, si deduce $p_a \geqq 0$.

L'affermazione fatta si giustifica come segue. Se, per la nostra F, l'irregolarità $p_g - p_a > 1$, la F conterrà un sistema continuo di curve L, secanti le K (ellittiche) secondo gruppi non equivalenti. Entro questo sistema si potrà scegliere una serie ∞^1 di L secanti una K generica in gruppi disequivalenti: in generale a questa serie apparterrà un certo numero m di curve L secanti K in gruppi di una medesima serie lineare; e – sommando queste m curve L – si avranno curve M, costituenti una nuova serie ∞^1, che segheranno K in gruppi tutti disequivalenti. Ora tale serie M è ellittica, e per conseguenza i gruppi di curve M uscenti da un punto P della superficie daran luogo, al variare del punto, ad ∞^1 gruppi equivalenti: il luogo degli ∞^1 punti P così ottenuto sarà una curva di F, variabile in un fascio ellittico.

Dunque la nostra ipotesi porta che F contenga un secondo fascio ellittico di curve θ, oltre il fascio (K). Ma è facile persuadersi che tale conclusione non si accorda coll'ipotesi che vale a definire le superficie paraellittiche: che le curve direttrici delle K, costruite a partire dalle omografie che passano fra le K normali, sieno formate colle C di un fascio *lineare*. Invero coll'uso di un semplice ragionamento (che adopreremo nel § seguente per provare la proprietà fondamentale delle superficie ellittiche) si dimostra che – nell'ipotesi che il fascio (K) ammetta un fascio ellittico di traiettorie s-secanti – due K qualunque, realizzate proiettivamente come si voglia, si corrispondono sempre in un gruppo G_s di s proiettività, razionalmente definito, e quindi le θ debbono sempre costituire componenti delle curve direttrici C, comunque costruite.

§ 13. – Le superficie dotate di un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni in se stesse.

1. Nei due paragrafi precedenti abbiamo caratterizzato le superficie irregolari F di genere geometrico $p_g = 0$ e genere numerico $p_a = -1$, non riferibili a rigate, mediante la rappresentazione sopra un cilindro ellittico n-*plo*, che importa il possesso di un *fascio*

ellittico di curve K di genere $\pi \geqq 1$, e di un *fascio lineare* di *curve ellittiche* C, *direttrici* n — secanti delle prime, il numero n (*determinante* della superficie) essendo maggiore dell'unità (1).

Le nostre superficie F ammettono una rappresentazione analitica mediante funzioni ellittiche di un parametro ed algebriche di un altro, indicata da PAINLEVÉ (2) e sviluppata da ENRIQUES nel caso $p_g = 0$ (3): per questo esse rientrano nella famiglia delle cosiddette *superficie ellittiche*. Senza indugiarsi qui nello studio di questa rappresentazione analitica, dimostreremo la proprietà geometrica fondamentale che la traduce, cioè l'*esistenza di un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni birazionali della superficie F in sé, il quale ha per traiettorie le curve ellittiche del fascio lineare* $|C|$.

2. Per giungere a stabilire questa proprietà, si cominci col prendere sopra una delle curve ellittiche C, scelta in modo generico nel fascio lineare a cui appartiene, due punti P e P' (non situati sopra una stessa K), e si consideri la *trasformazione di prima specie* della C in sé, che porta P in P' (4):

$$\omega = (P, P').$$

Si tratta di provare che fissata la ω, resta determinata razionalmente *una* trasformazione sopra ogni altra C, di guisa che si otterrà una trasformazione dell'intera superficie F in se medesima.

Per dimostrarlo supponiamo, da prima, che le C siano curve a modulo generale, escludendo il caso armonico ed equianarmonico. Allora si prenda nel fascio $|C|$ un'altra qualsiasi curva C_0: poichè C e C_0 sono curve ellittiche identiche (a modulo generale), alla trasformazione $\omega = (P, P')$ della C, corrisponderanno su C_0 due trasformazioni di prima specie ω_0 e ω_0^{-1}, le quali non sono razionalmente distinguibili (in funzione del parametro da cui dipende C_0), ma soltanto determinate nel loro insieme.

(1) Cfr. § 12, n. 8.

(2) Cfr. P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* (Paris, Hermann, 1897).

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XX, 1905).

(4) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 255 e segg.).

Infatti è noto [1] che se sopra due curve ellittiche identiche (di modulo generale) γ e γ_0, si assumono due punti omologhi, I e I_0, restano determinate fra di esse due trasformazioni τ_1 e τ_2, che differiscono per la trasformazione di seconda specie (g_2^1) avente come punto doppio I_0. Ora le trasformazioni di prima specie della nostra curva C si possono ritenere come gli elementi di un ente ellittico semplicemente infinito γ, su cui è dato un punto I che rappresenta l'identità; e similmente le trasformazioni di prima specie della C_0 formeranno un ente ellittico γ_0, identico a γ, su cui è dato un punto I_0 rappresentante l'identità. Pertanto le trasformazioni τ_1 e τ_2 che fanno passare da γ a γ_0 portando I in I_0, associano ad ogni trasformazione di prima specie ω della C, una coppia di trasformazioni della C_0, che si ottengono l'una dall'altra trasformando con una g_2^1, e perciò risultano l'una inversa dell'altra.

A priori – cioè per due curve ellittiche C e C_0 di cui si sappia soltanto che sono birazionalmente identiche – non ci sarebbe modo di separare razionalmente le due trasformazioni ω_0 e ω_0^{-1} che rispondono su C_0 alla ω data su C. Ma per le nostre curve C e C_0, appartenenti al medesimo fascio $|C|$, è data inoltre la corrispondenza fra le due involuzioni ellittiche γ_n^1 segnate dal fascio (K), nella quale sono associati i gruppi sezioni di una medesima K. Ed è facile vedere che delle due trasformazioni ω_0 e ω_0^{-1}, della C_0 in sé, soltanto una, ω_0, trasformerà l'uno nell'altro i gruppi della γ_n^1 omologhi a quelli che si corrispondono per la ω sopra la C, almeno quando la $\omega = (P, P')$ sia generica (fuori delle trasformazioni cicliche che lasciano invariati tutti i gruppi della γ_n^1) [2].

In conseguenza ogni trasformazione di prima specie data sopra una C, si estende univocamente alle altre C del nostro fascio, e riesce quindi subordinata ad una trasformazione dell'intera F in se stessa.

Questa conclusione appare qui limitata dall'ipotesi che le C siano curve ellittiche di modulo generale; ma si estende subito anche ai casi armonico ed equianarmonico. In essi alla trasformazione ω di C risponderà sopra C_0 una quaterna o, rispettivamente, una

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 262).
(2) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. IV, § 39 (vol. III, pag. 446).

sestina di trasformazioni di prima specie; però una sola di queste resterà determinata dalla condizione di trasformare l'uno nell'altro due gruppi della γ_n^1 segnata da (K), che corrispondono a gruppi omologhi della analoga su C.

Il risultato ottenuto si può riassumere dicendo che *le superficie con i caratteri* $p_g = 0$ e $p_a = -1$, *posseggono un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni in sé, avente per traiettorie le curve ellittiche del fascio lineare* $|C|$.

3. Le superficie che ammettono un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni in sé, si diranno, in generale, *superficie ellittiche*. La loro classe non è esaurita da quelle innanzi studiate, coi caratteri

$$p_g = 0 \quad , \quad p_a = -1 .$$

Infatti la dimostrazione svolta nel numero precedente, si basa sul fatto che due curve ellittiche C, fra loro birazionalmente identiche, contengano inoltre due γ_n^1 i cui gruppi si corrispondano in modo biunivoco; questa corrispondenza essendo posta dal fascio ellittico (K) appartenente alla superficie. Invece nel ragionamento non si fa uso della circostanza che le C formino un *fascio lineare*.

Questa osservazione permette di stabilire ugualmente l'*esistenza di un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni sopra ogni superficie che contenga un fascio di genere* $\rho \geqq 0$ *di curve ellittiche* C, *ed un secondo fascio ellittico di curve direttrici* K, *aventi un qualsiasi genere* $\pi \geqq 0$.

Invero le curve C, che voglionsi dimostrare traiettorie del nostro gruppo, saranno certo fra loro birazionalmente identiche, come curve ellittiche rappresentate sopra una stessa curva ellittica multipla senza diramazioni, i cui punti rispondono agli elementi (curve) del fascio (K): dato che le curve ellittiche rappresentate in tal guisa dànno luogo soltanto ad un numero finito di classi birazionalmente distinte, da una delle quali è impossibile passare ad un'altra quando la C varia con continuità nel proprio fascio [1].

[1] Cfr. § 11, n. 8.

Viceversa mostriamo che ogni superficie F che sia *ellittica*, cioè ammetta un *gruppo ellittico semplicemente infinito* Γ, di trasformazioni in se stessa, gode delle seguenti proprietà:

a) possiede un fascio, di genere $\rho \geqq 0$, di curve ellittiche C, *traiettorie* del gruppo Γ, tutte birazionalmente identiche fra loro perchè in corrispondenza biunivoca con le trasformazioni del gruppo Γ stesso;

b) contiene un *fascio ellittico* di *direttrici* K, aventi il genere $\pi \geqq 0$.

La proprietà *a*) è senz'altro evidente, non essendo che una traduzione dell'ipotesi dell'esistenza del gruppo Γ di trasformazioni della F in sé.

Per stabilire la *b*), si prenda sulla F una qualunque curva L, secante le curve ellittiche C, e si consideri la serie ellittica semplicemente infinita $\{L\}$, delle trasformate di L nel gruppo Γ. Osserviamo subito che le curve di $\{L\}$ sono fra loro disequivalenti, perchè nel caso contrario segherebbero sopra una C ellittica una serie lineare trasformata in sé da Γ. Designamo con i l'indice di $\{L\}$, cioè il numero delle sue curve uscenti da uno stesso punto P della superficie. Se è $i = 1$ il sistema $\{L\}$ costituisce senz'altro il fascio ellittico richiesto. Quando invece sia $i > 1$, si considerino le curve

$$L_i = \sum L \, ,$$

somma delle i curve di $\{L\}$ che escono da uno stesso punto di F; e si avverta che le L_i non possono essere tutte equivalenti fra loro, perchè lo stesso accadrebbe delle L [1]. D'altra parte, le L_i rappresentando gruppi di elementi di un ente ellittico, l'equivalenza di due curve L_i importa una sola condizione algebrica, e perciò si hanno ∞^1 curve L_i equivalenti ad una data.

Allora preso un punto P generico della superficie, e considerata la L_i ad esso relativa, si faccia variare il punto P in guisa che la L_i si mantenga equivalente a se stessa: P descrive così una curva la quale fa parte di un fascio [2].

(1) Cfr. § 8, n. 3.
(2) Cfr. § 8, n. 4.

Indicheremo questo fascio con (K) qualora sia irriducibile: se invece esso risultasse composto con un secondo fascio, sarà a quest'ultimo che riserveremo la denominazione di fascio (K).

È subito visto che *il fascio* (K) *è ellittico*: infatti l'involuzione che esso sega sopra una curva ellittica C, essendo trasformata in se stessa dalle ∞^1 trasformazioni di prima specie (subordinate dal gruppo Γ), non può essere lineare, ma sarà invece ellittica.

4. Passiamo a determinare i caratteri della superficie ellittica F: a questo scopo servirà utilmente la conoscenza dei due fasci (C) e (K) che sappiamo esistere sopra di essa.

Se le curve K del fascio ellittico (K) sono di genere $\pi = 0$, la F appartiene alla famiglia delle rigate, e precisamente è una *rigata ellittica*:

$$p_g = 0 \quad , \quad p_a = -1.$$

Ma anche se $\pi > 0$, *la superficie ellittica* F, *possedente un fascio di genere* $\rho \geqq 0$ *di traiettorie ellittiche* C, *e un fascio ellittico* (K) (*di curve di genere* π), *ha il genere geometrico*

$$p_g = \rho,$$

e il genere numerico

$$p_a = -1.$$

Cominciando dal calcolo di quest'ultimo, osserviamo che a tale scopo basta riprendere la formula che dà l'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE per il fascio ellittico delle curve K, come si è visto nel § 12, n. 8: infatti sussistono anche qui le ipotesi fondamentali di quel calcolo, in quanto le K sono curve irriducibili birazionalmente identiche fra loro (essendo trasformate l'una nell'altra dal gruppo Γ), e, segando sopra una curva ellittica C una involuzione ellittica, sono necessariamente prive di componenti multiple, cosicchè per il fascio (K) si ha $\Delta = 0$.

Si arriva alla stessa conclusione, $p_a = -1$, riferendosi invece che al fascio (K) al fascio (C). Anche per questo riesce facile il computo dell'*invariante* di ZEUTHEN–SEGRE, poichè *nel fascio delle traiettorie* C *il numero* Δ *delle curve dotate di un punto doppio risulta*

$$\Delta = 0 .$$

È lecito supporre che la F (non riferibile a rigata) sia priva di curve eccezionali (e di singolarità). Allora una C irriducibile non può acquistare un punto doppio, perchè diverrebbe razionale, mentre le C sono tutte birazionalmente identiche fra loro e al gruppo ellittico Γ delle trasformazioni della F in sé. Così se una particolare $C = \overline{C}$ viene ad acquistare un punto doppio, essa si spezza in due o più parti, connesse fra loro, una almeno delle quali dovrà essere razionale, perchè altrimenti non potrebbe formare insieme alle altre una curva ellittica. Ma una componente razionale della $\overline{C}$, non può nascere altro che in corrispondenza ad una trasformazione singolare del gruppo Γ, e quindi è una curva eccezionale; mentre la F è priva di curve siffatte. Ne segue che la $\overline{C}$, quando effettivamente esista, deve essere costituita da una componente ellittica C_s contata più volte ($\overline{C} = sC_s$): ciò che porta $\Delta = 0$ (¹).

Pertanto dal calcolo dell'*invariante* I di ZEUTHEN-SEGRE della nostra superficie F, effettuato per mezzo del fascio (C), si ha (²):

$$I = -4.$$

D'altra parte la F (priva di curve eccezionali), possedendo un fascio di curve ellittiche, ha il genere lineare $p^{(1)} = 1$ (³), e quindi dalla relazione di NOETHER (⁴):

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9,$$

risulta appunto che per la F è:

$$p_a = -1.$$

L'esistenza sulla F di un fascio (C) di genere ρ, e di un fascio ellittico (K), porta che l'*irregolarità* della superficie è

$$p_g - p_a \geqq \rho + 1,$$

da cui $p_g \geqq \rho$.

(¹) Cfr. § 11, n. 2.
(²) Cfr. § 1, n. 3.
(³) Cfr. § 12, n. 8.
(⁴) Cfr. § 2, n. 1.

Invero se si prendono i gruppi di ∞^{ρ} curve C, e ad essi si somma una K, si ottiene un sistema $\infty^{\rho+1}$ di curve disequivalenti.

Rimane da provare che è precisamente

$$p_g = \rho.$$

Si indichi ancora con n il numero (*determinante*) delle intersezioni di una C con una K, e distinguiamo vari casi.

Per $\rho = 0$ siamo ricondotti alle nostre superficie con $p_g = 0$ e $p_a = -1$, rappresentate sopra cilindri cubici multipli con curva di diramazione costituita da un certo numero di sezioni normali ([1]).

Se $\rho = 1$ e $n = 1$ anche le K sono di genere $\pi = \rho = 1$, cioè la F possiede due fasci di curve ellittiche e quindi le sue curve canoniche (e pluricanoniche) risultano di *ordine* zero, cosicchè il genere p_g e tutti i plurigeneri sono uguali all'unità.

Da questo caso immediato passiamo a quello in cui, pur avendosi ancora $n = 1$, sia $\rho > 1$. Poichè è $p_g > 1$, sulla F esiste un effettivo sistema canonico, il quale anzi è composto con una involuzione nel fascio delle curve ellittiche C ([3]). D'altra parte le curve canoniche segano gruppi canonici sulle K (di genere ρ), quindi ognuna di esse risulta costituita dall'insieme delle C che passano per un gruppo canonico di una K, cioè forma un gruppo canonico *entro* il fascio (C).

Ne segue che il sistema canonico di F ha la dimensione $\rho - 1$, ossia che $p_g = \rho$.

Si supponga infine che sia $n > 1$ e $\rho \geqq 1$. Interpretando i gruppi $G_n = (K, C)$ come punti di una nuova superficie F^*, questa risulta in corrispondenza $(1, n)$ con la F, e possiede due fasci (C^*) e (K^*), il primo di genere ρ ed il secondo ellittico, trasformati di (C) e di (K), rispettivamente. Poichè una C^* ed una K^* s'intersecano in un sol punto, per la F^* siamo nelle condizioni dei casi precedenti $(n = 1)$, cioè si ha $p_g^* = \rho$ e quando sia $\rho > 1$ il sistema canonico di F^* è costituito dalla serie canonica del fascio (C^*). Per risalire da questo al sistema canonico della F, si dovrà sommare la *curva*

([1]) Cfr. § 12, n. 8.

([2]) Cfr. § 12, n. 8 e § 15, n. 1.

([3]) Cfr. *Lezioni*, § 55.

delle coincidenze di F, al sistema $\infty^{\rho-1}$ trasformato del sistema canonico di F^*, e costituito dai gruppi canonici di curve C entro il fascio (C) [1]. Ora nel fascio (K) non esistono curve spezzate, mentre, come si è visto, nel fascio (C) possono aversi delle curve $C = sC_s$ ridotte ad una componente ellittica multipla C_s: ne segue che la curva delle coincidenze sulla F è data da

$$\sum (s - 1)\, C_s\,,$$

intendendo che la somma sia estesa a tutte le curve spezzate del fascio (C).

Ma l'aggiunta di codesta curva delle coincidenze al predetto sistema $\infty^{\rho-1}$ trasformato del sistema canonico di F^*, e costituito con le curve ellittiche del fascio (C), non amplia il sistema completo somma, perchè le curve addizionate sono soltanto parti delle curve di (C).

Si conclude così che in ogni caso è $p_g = \rho$.

5. L'analisi precedente non contiene la prova dell'*effettiva esistenza di superficie ellittiche*, ma è facile rendersi conto del modo come queste si possano realmente ottenere.

Una superficie ellittica, non rigata, di determinante $n = 1$, si ottiene come superficie delle coppie di punti tratti l'uno da una curva ellittica C, e l'altro da una curva K di genere $\pi = \rho = p_g$. Questa stessa superficie, considerata come superficie n — *pla* con curva di diramazione formata da un certo numero di curve del fascio delle traiettorie C, costituirà una superficie ellittica di determinante $n \geqq 2$: la costruzione effettiva si ottiene con semplici estrazioni di uno o due radicali, come verrà chiarito pel caso $p_g = \rho = 0$ nel paragrafo seguente.

Riassumiamo qui i risultati ottenuti enunciando il teorema:

Esistono per ogni valore del genere geometrico p_g, delle superficie (ellittiche) possedenti un gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni birazionali in sé: esse hanno sempre il genere numerico $p_a = -1$, e posseggono due fasci di curve: uno, di genere p_g, formato da curve ellittiche C, traiettorie del gruppo delle trasformazioni; e l'altro,

(1) Cfr. § 8 nota (2) al termine del n. 5.

ellittico, costituito da curve K, di genere $\pi \geqq 0$, *secanti le C in un certo numero* $n \geqq 1$ *di punti.*

I due fasci (C) e (K) caratterizzano le superficie ellittiche.

Si avverta infine che *le superficie ellittiche e quelle riferibili a rigate, sono le sole che posseggono un gruppo algebrico semplicemente infinito di trasformazioni birazionali in se stesse.*

Infatti il fascio delle traiettorie di un tale gruppo, è costituito da curve birazionalmente identiche al gruppo stesso, e che ammettono ciascuna ∞^1 trasformazioni in sé. Ma le curve che godono di questa proprietà sono soltanto le razionali e le ellittiche [1]: le prime portano alle superficie appartenenti alla famiglia delle rigate, e le seconde alle superficie ellittiche.

6. *Nota I.* Dall'ultima proposizione enunciata si deduce che se una superficie F possiede un gruppo algebrico Γ semplicemente infinito di trasformazioni birazionali in se medesima, il gruppo Γ è razionale nel solo caso in cui la F sia riferibile a rigata. E in particolare che una superficie razionale può ammettere soltanto gruppi razionali di trasformazioni birazionali in sé, e non altri gruppi algebrici ∞^1. Cioè: *nel piano un sistema continuo algebrico semplicemente infinito di trasformazioni cremoniane, è sempre razionale.*

Si ritrova così un risultato a cui sono pervenuti direttamente F. ENRIQUES [2] e G. FANO [3]. Essi hanno dimostrato che un gruppo

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 31 (vol. III, pag. 309).

(2) Cfr. F. ENRIQUES, *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », serie V, vol. II, 1893_1); e *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano* (ibidem).

(3) Cfr. G. FANO, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive su se stesse* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », serie V, vol. IV, 1895_1); e *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni proiettive* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo X, 1896).

I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio sono stati determinati da F. ENRIQUES e G. FANO nella loro memoria *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio* (« Annali di Matematica », serie II, tomo XXVI, 1897). Cfr. anche G. FANO, *I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio* (« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 33, 1897–98); e *Sopra alcuni gruppi continui imprimitivi di trasformazioni puntuali dello spazio* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », serie V, vol. VII, 1898_1).

continuo ∞^1 di trasformazioni cremoniane nel piano lascia invariato un sistema lineare di curve, e quindi si rispecchia in un gruppo continuo algebrico semplicemente infinito di omografie iperspaziali, le cui traiettorie (*curve di* KLEIN–LIE) sono curve razionali (1).

7. *Nota II.* A prescindere dalle rigate ellittiche, il gruppo Γ delle trasformazioni in sé di una superficie ellittica F, si amplia soltanto per $p_g = 1$, nel qual caso le K risultano traiettorie di un secondo gruppo ellittico semplicemente infinito di trasformazioni della F. I due gruppi ∞^1 dànno per prodotto un gruppo permutabile doppiamente infinito.

Le superficie che godono di questa proprietà, rientrano come caso particolare nella famiglia delle *superficie iperellittiche*, caratterizzate dal punto di vista trascendente da E. PICARD (2), e mediante i valori dei generi e dei plurigeneri da F. ENRIQUES (3).

§ 14. — COSTRUZIONE EFFETTIVA DELLE SUPERFICIE ELLITTICHE DI GENERE $p_g = 0$, E CLASSIFICAZIONE DI QUELLE CHE CONTENGONO DUE FASCI DI CURVE ELLITTICHE.

1. Ricordiamo, dai paragrafi precedenti, che una superficie ellittica F di genere geometrico nullo, possiede un fascio ellittico (K) di curve di genere $\pi \geqq 1$, e un fascio lineare di curve ellittiche C,

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse* (« Atti R. Istituto Veneto », serie VII, tomo IV, 1892–93); G. FANO, *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo X, 1896), e *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XI, 1897). Per lo studio delle curve di KLEIN–LIE vedi, p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 26 (vol. III).

(2) Cfr. E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (« Journal de Mathématiques », 4e série, tome V, 1889). Vedi anche E. PICARD e G. SIMART, op. cit., tome II, chap. XIV; e G. HUMBERT, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (« Journal de Mathématiques », 4e série, tome IX, 1893).

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XX, 1905).

traiettorie di un gruppo semplicemente infinito, Γ, di trasformazioni della F in se stessa.

Una C ed una K si segano in un gruppo G_n di un certo numero n (*determinante*) di punti, e i gruppi G_n formano una involuzione I_n sulla F: è subito visto che la I_n *è generata da un gruppo finito* Γ_n *di trasformazioni della superficie in sè*, il quale è contenuto nel gruppo semplicemente infinito Γ delle trasformazioni della F in se stessa. Invero tra le trasformazioni di Γ (le quali cambiano in sè ogni C) se ne hanno n che mutano in sè un gruppo G_n, e quindi che conservano ogni altro gruppo della I_n, subordinando l'identità entro il fascio ellittico (K) (1).

Poichè le trasformazioni di Γ_n – come quelle di Γ – sono a due a due permutabili, *il gruppo* Γ_n *è ciclico o abeliano* (non ciclico).

Questa osservazione permette di scrivere le equazioni parametriche delle nostre superficie ellittiche, partendo dal cilindro cubico n — *plo*

$$f(x, y) = 0,$$

su cui esse sono rappresentate (2).

Distinguiamo due casi.

1) *Caso in cui il gruppo* Γ_n *sia ciclico* (come accade, per esempio, quando il determinante n è un numero primo). Sia F una superficie del nostro tipo appartenente ad uno spazio a quattro dimensioni, e designamo con (x, y, z, u) le coordinate di un suo punto. Proiettando la F dal punto improprio dell'asse delle u, nello S_3 di equazione $u = 0$, si ottiene il cilindrico n — *plo*

$$f(x, y) = 0,$$

su cui la curva di diramazione è costituita da un certo numero di sezioni $z =$ cost.:

$$z = a_1 \quad , \quad z = a_2 \quad , \quad \cdots \quad , \quad z = a_t \cdot$$

Poichè gli n punti di F che rispondono ad uno stesso punto (x, y, z) del cilindro f costituiscono un gruppo G_n generato dalle successive

(1) Cfr. § 13, n. 2.

(2) Cfr. § 12, n. 8.

potenze di una trasformazione ciclica di ordine n, le coordinate u dei punti di G_n saranno date dagli n valori di una radice n–sima del tipo:

$$u = \sqrt[n]{(z - a_1)^{r_1} (z - a_2)^{r_2} \cdots (z - a_t)^{r_t} \cdot \varphi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0] \cdot$$

soddisfacente alle seguenti condizioni:

a) Per gli esponenti $r_i \leqq n$ si avrà:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_t \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

altrimenti nascerebbe sulle generatrici del cilindro f un punto di diramazione all'infinito.

b) Se h_i è il massimo comune divisore di n e r_i, nella espressione di u appare il fattore

$$\sqrt[n]{(z - a_i)^{r_i}} = \sqrt[s_i]{\varepsilon_i (z - a_i)^{\rho_i}},$$

dove:

$$n = h_i s_i \quad , \quad r_i = h_i \rho_i ,$$

ed ε_i designa una radice h_i–esima dell'unità. Pertanto sulla generatrice n — *pla* k del cilindro f, il punto

$$z = a_i$$

è un punto di diramazione al quale corrisponde sulla curva K, omologa di k, un gruppo G_n (della g_n^1 segata da $|C|$) costituito da h_i gruppi di s_i punti coincidenti. In altre parole, il punto $z = a_i$ è per la k un punto di diramazione d'ordine s_i, con

$$s_i = \frac{n}{h_i}$$

e si ha quindi:

$$[1] \qquad \sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i} (s_i - 1) = 2n + 2\pi - 2 ,$$

designando π il genere della K (1).

(1) Cfr. § 11, n. 8.

Si aggiunga l'importante osservazione – di cui faremo uso in seguito – che *ciascuno dei numeri* s_i $(i = 1, 2, \cdots t)$ *è un divisore del minimo comune multiplo dei rimanenti.*

Infatti poichè sulla retta multipla k non si hanno diramazioni all'infinito, il prodotto delle sostituzioni $S_i (i = 1, 2, \cdots t)$, cicliche d'ordine s_i, relative ai punti di diramazione $z = a_i$, equivale all'identità, cioè:

$$S_t S_{t-1} \cdots S_2 S_1 = 1 ,$$

da cui, per esempio, si ha:

$$S_1^{-1} = S_t S_{t-1} \cdots S_2 ,$$

ossia:

$$S_1^{s_1 - 1} = S_t S_{t-1} \cdots S_2 .$$

Ma la sostituzione $S_1^{s_1-1}$ è ciclica di periodo s_1, mentre il prodotto

$$S_t S_{t-1} \cdots S_2$$

è ciclico con periodo divisore del minimo comune multiplo di s_2, s_3, $\cdots$, s_t, dato che il gruppo Γ_n è abeliano (1). Ne segue l'asserto.

c) Dato che il cilindro f non possiede generatrici di diramazione, il polinomio $\varphi(x, y)$ (di grado multiplo di n) eguagliato a zero deve rappresentare un cilindro che abbia con f un contatto n—*plo* lungo ogni generatrice comune. Potremo anzi prendere φ di grado n, e in guisa che il cilindro $\varphi = 0$ tocchi f lungo tre generatrici, con contatto n—*plo*. Invero si riconoscerà facilmente che facendo variare la φ con continuità, la F si conserverà birazionalmente identica a se stessa, conservandosi le curve C e K rappresentate rispettivamente sopra le sezioni $z =$ cost. e sopra le generatrici k di f. Quindi a partire da una φ' di grado hn, con $h > 1$, potremo sostituire a φ' un polinomio spezzato in un fattore semplice φ di grado n, e in un fattore n—*plo* ψ di grado $h - 1$:

$$\varphi' = \varphi\psi ;$$

(1) Cfr. p. es., LUIGI BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Pisa, 1900), cap. III, § 30.

così risulterà:

$$u = \psi \sqrt[n]{\varphi(xy)(z-a_1)^{r_1}(z-a_2)^{r_2}\cdots(z-a_t)^{r_t}},$$

da cui, cambiando u in $u\psi$, si ottiene appunto l'espressione predetta.

2) *Il gruppo* Γ_n *sia abeliano* (non ciclico). Osserviamo con O. CHISINI (¹), che il gruppo Γ_n, se non è ciclico, subordina sopra ogni curva ellittica C un gruppo abeliano a *base* due (²), cioè Γ_n viene generato da due trasformazioni cicliche Π e T, delle quali la Π avrà un certo periodo r divisore di n, mentre il periodo s di T (anch'esso divisore di n) risulterà multiplo di n/r; il valore di questo rapporto n/r rappresentando l'esponente della più piccola potenza di T che appartiene al gruppo generato da Π, cioè il *periodo relativo* di T rispetto a Π.

Allora *le equazioni parametriche della superficie F si ottengono, in generale, esprimendo la u mediante la somma di due radicali, d'ordine s ed r.*

Non c'indugeremo su questa costruzione, limitandoci ad esaminare più precisamente il caso in cui le curve K (come le C) siano ellittiche.

Avvertiamo soltanto che se s_i è l'ordine di molteplicità della diramazione $z = a_i$, ancora, *come nel caso ciclico, varrà la* [1] *e ciascuno dei numeri s_i dividerà il minimo comune multiplo dei rimanenti.*

Nota. — La costruzione delle superficie ellittiche nel caso ciclico è stata indicata da FEDERIGO ENRIQUES, sia col metodo algebrico innanzi svolto, sia per mezzo delle funzioni ellittiche (³).

L'effettiva esistenza di superficie ellittiche ($p_g = 0$, $p_a = -1$), corrispondenti ad un gruppo abeliano non ciclico, è stata messa in luce mediante alcuni esempi notevoli incontrati da GIUSEPPE BAGNERA

(¹) Cfr. O. CHISINI, *Le superficie ellittiche il cui determinante è un numero composto* (« Rend. R. Accad. dei Lincei », serie V, vol. XXX, 1921_2).

(²) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro V (vol. III), cap. III, § 28; ed anche cap. IV, § 39.

(³) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (« Rend. Circolo Mat. di Palermo », tomo XX, 1905).

e MICHELE DE FRANCHIS nello studio delle superficie iperellittiche (1). Più tardi OSCAR CHISINI ha assegnato la costruzione di tutte le superficie ellittiche con gruppo abeliano (2).

2. Supponiamo qui che *la superficie F contenga un fascio lineare* $|C|$ *ed un fascio ellittico* (K), *ambedue costituiti di curve ellittiche*: la F, che ha i caratteri

$$p_g = 0 \quad , \quad p_a = -1 \, ,$$

possiede una curva canonica *virtuale* d'ordine zero.

Ci proponiamo di classificare e costruire i vari tipi birazionalmente distinti, delle superficie F soddisfacenti alle condizioni indicate.

La [1] nell'ipotesi $\pi = 1$ diviene:

$$\sum_{i=1}^{i=t}\left(1 - \frac{1}{s_i}\right) = 2 \, ,$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{i=t}\frac{1}{s_i} = t - 2 \, ,$$

quindi, supponendo

$$s_1 \leqq s_2 \leqq s_3 \leqq \cdots \, ,$$

ed avendosi

$$s_i \geqq 2 \qquad\qquad (i = 1 \, , 2 \, , \cdots , t) \, ,$$

si otterranno i casi seguenti:

$$\alpha) \; s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2 \qquad (t = 4) \, ;$$

$$\beta) \; s_1 = 2 \, , s_2 = s_3 = 4 \qquad (t = 3) \, ;$$

$$\gamma) \; s_1 = 2 \, , s_2 = 3 \, , s_3 = 6 \qquad (t = 3) \, ;$$

$$\delta) \; s_1 = s_2 = s_3 = 3 \qquad (t = 3) \, .$$

Questa analisi però dà soltanto il numero delle sezioni $z =$ cost. che fanno parte della curva di diramazione del cilindro n — *plo* f, e le loro molteplicità, ma non fornisce il numero n, che *a priori* si

(1) Cfr. questo paragrafo, n. 5.

(2) Cfr. O. CHISINI, loc. sopra citato.

potrebbe credere un multiplo arbitrario delle s_i. Occorre perciò esaminare più profondamente la costituzione del gruppo abeliano Γ_n relativo alle nostre superficie F con le caratteristiche suddette. Per questo è opportuno trattare separatamente i casi in cui le K (fra loro birazionalmente identiche) siano a *modulo generale*, oppure risultino *armoniche* o *equianarmoniche*.

Caso generale: le K siano a modulo generale. Sopra una K le trasformazioni del gruppo Γ_n generano la g_n^1 che è segata dal fascio $|C|$. Ma una serie lineare sopra una curva ellittica non può essere generata da un gruppo tutto composto di trasformazioni di prima specie: pertanto, la K essendo a modulo generale, il gruppo Γ_n sarà costituito da trasformazioni di prima specie π e da trasformazioni di seconda specie I (e da queste soltanto).

Indichiamo con m il numero delle trasformazioni di seconda specie I: è facile vedere che anche le π sono in numero di m, e quindi

$$n = 2m \cdot$$

Invero moltiplicando una delle m trasformazioni di seconda specie, I, per se stessa e per le rimanenti $m - 1$ trasformazioni della stessa specie, si hanno m trasformazioni π appartenenti a Γ_n. D'altra parte così si ottengono tutte le trasformazioni di prima specie π di Γ_n, poichè una π si può sempre considerare come prodotto di due trasformazioni di seconda specie, una delle quali, I, è assegnabile ad arbitrio (¹); e quando I sia scelta entro il Γ_n dovrà appartenervi anche l'altro fattore.

Ricerchiamo ora il limite superiore dei valori che può assumere m, tenendo conto che il gruppo Γ_n deve essere ciclico o abeliano a base due: troveremo che *m non può superare il valore due.*

Infatti al gruppo Γ_n appartengono delle trasformazioni di prima specie π, che possono riguardarsi ottenute ciascuna come prodotto di due I appartenenti al gruppo stesso: ma le I sono involutorie e permutabili (essendo Γ_n abeliano), quindi anche le π risulteranno involutorie, poichè la condizione necessaria e sufficiente affinchè due trasformazioni cicliche del secondo ordine siano permutabili, è appunto che il loro prodotto sia un'involuzione.

(¹) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 255).

Da ciò segue non solo $m \leq 4$ – dato che esistono quattro trasformazioni involutorie di prima specie [1] – ma, più precisamente, $m = 2$, poichè il gruppo Γ_n è a base due, e partendo da due trasformazioni *involutorie* non si possono generare mediante loro prodotti, più di quattro trasformazioni [2].

Studiamo allora la costituzione del gruppo Γ_n in corrispondenza ai valori $m = 1$ e $m = 2$.

a) $m = 1$: il gruppo Γ_n è costituito da due sole trasformazioni, una delle quali è l'identità e l'altra è di seconda specie (cioè una g_2^1);

b) $m = 2$: il gruppo Γ_n (necessariamente abeliano) è costituito di quattro trasformazioni ($n = 4$), due delle quali sono di seconda specie, I e I'; la terza è (involutoria) di prima specie π, e l'ultima è l'identità.

Poichè la I e la I' sono fra loro permutabili, se indichiamo con P, Q, R ed S, i punti uniti della I, il gruppo (P, Q, R, S) sarà cambiato in sè dalla I': allora, per esempio, le due coppie (P, Q) ed (R, S) apparterranno ad una stessa g_2^1, generatrice della I', ed avremo

$$\pi = I' I = (P, Q; R, S).$$

La g_4^1 generata dal gruppo Γ_4 possiede quattro gruppi costituiti ciascuno da una coppia di punti doppi, che cadono nelle due coppie (P, Q), (R, S) di punti uniti della I, e nelle due coppie (P', Q'), (R', S') di punti uniti della I' (e coniugati nella I).

Si conclude che *possono aversi soltanto due tipi di superficie ellittiche di moduli generali, con curva canonica virtuale d'ordine zero*: superficie di *determinante due e* di *determinante quattro.*

Costruiamo la F in corrispondenza a questi casi, scrivendone le equazioni parametriche.

a) *Determinante* $n = 2$. — La F è rappresentata doppiamente sopra il cilindro cubico

$$f(x, y) = 0,$$

[1] Cfr. ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 28 (vol. III, pag. 263).

[2] Si può aggiungere che abbandonando la condizione che il gruppo abeliano Γ_n debba avere la base due, il solo valore maggiore di due che assume m è $m = 4$, il quale corrisponde ad un Γ_8 a base tre.

con una curva di diramazione costituita dalle quattro sezioni

$$z = a \quad , \quad z = b \quad , \quad z = c \quad , \quad z = d \, ,$$

che rispondono ai punti doppi della g_2^1 segata dal fascio delle C – omologhe delle $z =$ cost. – sopra le curve ellittiche K, corrispondenti alle generatrici k. Avremo così:

$$[\mathrm{I}_a] \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d) \cdot \varphi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0] \, ,$$

essendo

$$\varphi(x, y) = 0$$

un cilindro, per esempio del secondo ordine, tangente lungo tre generatrici al cilindro cubico f.

Viceversa, è chiaro che la $[\mathrm{I}_a]$ rappresenta effettivamente una superficie ellittica F, di determinante due, con curva canonica virtuale d'ordine zero (cioè con K ellittiche). Invero per ogni coppia di valori di x e y la $[\mathrm{I}_a]$ dà una curva K, omologa di una generatrice k del cilindro f, tale che ai punti di k corrispondono sulla K le coppie di una g_2^1, dotata di quattro punti doppi, corrispondenti a

$$z = a \, , \quad z = b \, , \quad z = c \, , \quad z = d \, .$$

Così si ha intanto sulla F un fascio ellittico di curve ellittiche K. Invece se nella $[\mathrm{I}_a]$ riguardiamo la z come costante, si ottiene una seconda curva ellittica C, rappresentata doppiamente senza punti di diramazione sulla sezione $z =$ cost. del cilindro f (1). Al variare di z la C descrive un fascio lineare di curve bisecanti le K.

b) *Determinante* $n = 4$. — Ricordiamo come si costruisca una curva ellittica K, contenente due g_2^1 *permutabili*, a partire dalla retta quadrupla k che rappresenta la g_4^1 generata dal loro prodotto.

Sulla K le g_2^1 dànno luogo a due quaterne di punti doppi, (P, Q, R, S) e (P', Q', R', S'), ciascuna delle quali è costituita da due coppie di punti coniugati nella g_2^1 relativa all'altra quaterna. Pertanto sulla retta quadrupla k avremo quattro punti di dira-

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES-CHISINI, libro V, cap. IV, § 38 (vol. III).

mazione A, B, C, D (di ascisse a, b, c, d), ai quali corrisponderanno altrettante quaterne costituite da due punti doppi: per esempio, le quaterne $(2P, 2Q)$; $(2R, 2S)$; $(2P', 2Q')$; $(2R', 2S')$.

Allora la nostra curva K – definita a meno di trasformazioni birazionali – si costruisce prendendo

$$[2] \qquad u = \sqrt{\varphi \cdot (z-a)(z-b)} + \sqrt{\psi \cdot (z-c)(z-d)},$$

dove φ e ψ designano delle costanti.

Ciò è d'accordo con la teoria generale delle equazioni abeliane che insegna appunto a risolvere con radicali non sovrapposti le equazioni con *gruppo* abeliano non ciclico (¹): ma si giustifica *a posteriori* direttamente osservando che la K così costruita è in effetto una curva ellittica contenente due trasformazioni di seconda specie – cioè due g_2^1 – permutabili. Per vederlo si può intanto osservare subito che ai punti della retta k, corrispondono sulla K i gruppi di una g_4^1 con otto punti doppi, e quindi la K è ellittica, ciò che è d'accordo col fatto che l'equazione [2] rappresenta una quartica piana con due punti doppi sull'asse delle z. Inoltre ai due radicali che compariscono nella [2] rispondono su K due trasformazioni involutorie permutabili:

$$u' = \frac{\varphi \cdot (z-a)(z-b) - \psi \cdot (z-c)(z-d)}{u},$$

$$u'' = \frac{\psi \cdot (z-c)(z-d) - \varphi \cdot (z-a)(z-b)}{u},$$

ciascuna delle quali ha quattro punti doppi, e quindi è una trasformazione di seconda specie, cioè una g_2^1.

Si conclude (²) che nell'ipotesi $m = 2$ $(n = 4)$ la nostra superficie F è rappresentata da

$$[1_b] \qquad u = \sqrt{(z-a)(z-b) \cdot \varphi(x, y)} + \sqrt{(z-c)(z-d) \cdot \psi(x, y)}$$
$$[f(x, y) = 0],$$

(¹) Cfr., p. es., L. BIANCHI, loc. cit., cap. IV, § 76.

(²) Cfr. F. ENRIQUES, memoria cit. *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, § 6; ed anche O. CHISINI, loc. cit. Si veda pure ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. IV, § 39 (vol. III).

dove

$$\varphi(x, y) = 0 \quad , \quad \psi(x, y) = 0$$

sono le equazioni di due cilindri d'ordine $2t$, per esempio quadrici, toccanti f ciascuno secondo $3t$, o 3, generatrici (che costituiscano gruppi non equivalenti).

3. *Caso armonico.* — Passiamo a studiare il caso in cui *le K siano armoniche.*

Conviene ricordare che *sulle curve ellittiche armoniche esistono, oltre le trasformazioni ordinarie di prima e di seconda specie,* π *e* I, *due serie continue* ∞^1 *di trasformazioni singolari cicliche del quarto ordine,* ω *e* τ. Le trasformazioni dei vari tipi sono legate fra loro dalle relazioni seguenti (1):

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{llll} \pi\omega = \omega_1 \quad , & \omega_1 \omega = I \quad , & I\omega = \tau \quad , & \tau\omega = \pi\, ; \\ \pi I = I_1 \quad , & I_1 I = \pi \quad , & \omega I = \tau \quad , & \tau I = \omega\, ; \\ \pi\tau = \tau_1 \quad , & \tau_1 \tau = I \quad , & I\tau = \omega \quad , & \omega\tau = \pi\, ; \\ \pi_1\pi = \pi_2 \quad , & I\pi = I_1 \quad , & \omega\pi = \omega_1 \quad , & \tau\pi = \tau_1\, . \end{array} \right.$$

Ciò premesso torniamo a considerare il gruppo Γ_n, ciclico o abeliano a base due: se Γ_n subordina sulle K soltanto delle trasformazioni ordinarie, si ricade negli stessi casi sopra presentatisi per le K a modulo generale. Supponiamo dunque che *del gruppo* Γ_n *faccia parte almeno una trasformazione singolare.*

Si ha allora che *se il gruppo* Γ_n *contiene* $m \geqq 1$ *trasformazioni* ω *(o* τ*), esso è composto di* $n = 4m$ *trasformazioni.* È una conseguenza immediata delle [3]: infatti si abbiano, per esempio, m trasformazioni del tipo ω. Moltiplicando una ω per se stessa e per le rimanenti $m - 1$ trasformazioni dello stesso tipo, si ottengono m trasformazioni I, le quali moltiplicate per una delle ω dànno luogo ad altrettante τ; e da queste ultime, moltiplicate ancora per ω, si hanno m trasformazioni di prima specie π. È poi subito visto che così si costruiscono tutte le trasformazioni di Γ_n, poichè ogni trasformazione di tale

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III).

gruppo si può sempre riguardare come risultante dal prodotto di due altre nel modo predetto. Resta pertanto provato che $n = 4m$.

Come si è fatto per il caso generale, cerchiamo quali valori di m possono effettivamente realizzarsi, tenendo presente che il gruppo Γ_n è ciclico o abeliano a base due: troveremo ancora $m \leq 2$.

a) $m = 1$, allora $n = 4$ e *il gruppo* Γ_4 *è* costituito da una trasformazione singolare ω e dalle sue successive potenze, è cioè *ciclico del quarto ordine*. I cicli della ω formano su K una involuzione lineare g_4^1 (che è evidentemente quella segata sulle K dal fascio delle C), dotata di due punti quadrupli P, Q e di due punti doppi R, S (¹).

b) $m = 2$, $n = 8$. Il gruppo Γ_8 è costituito da due trasformazioni (involutorie) di prima specie, $\pi = 1$ e π_1; da due di seconda, I, I_1; e da quattro trasformazioni singolari, ω, ω_1, e τ, τ_1; risultando così *a priori* formato di trasformazioni permutabili.

Consideriamo, per esempio, la ω: essa possiede due punti uniti P, Q, ed una coppia involutoria R, S. Allora il quadrato di ω dà luogo ad una trasformazione di seconda specie I, che risponde alla g_2^1 che ha come punti doppi P, Q, R ed S, i quali pertanto costituiranno un gruppo armonico. Il cubo di ω è invece una trasformazione singolare τ, nella quale i punti P e Q sono ancora uniti e la coppia R, S si corrisponde in doppio modo.

Così i cicli della ω formano su K una serie lineare g_4^1, la quale ha due punti quadrupli in P e in Q, e due punti doppi in R ed S.

La trasformazione singolare ω_1, permutabile con la ω, avrà i punti R, S uniti, e la coppia P, Q con carattere involutorio.

Si ha:

$$\omega_1^2 = \omega^2 = I;$$

e

$$\omega\,\omega_1 = I_1,$$

la I_1 derivando dalla g_2^1 di cui due gruppi sono costituiti dalle coppie (P, Q) e (R, S).

Inoltre è:

$$\tau_1 = \omega_1^3 \quad , \quad \pi_1 = \tau\,\omega_1 = \tau_1\,\omega ,$$

(¹) Cfr. ENRIQUES–CHISINI, loc. cit., pag. 260.

e le successive potenze della ω_1 dànno una seconda g_4^1 ciclica che ha in R ed S due punti quadrupli, e in P e Q punti doppi.

La g_8^1, generata da Γ_8, ha un gruppo costituito dai due punti P e Q, ciascuno contato quattro volte; un secondo gruppo formato da R ed S pure presi con la molteplicità quattro; ed infine possiede quattro punti doppi, appartenenti ad uno stesso gruppo, e costituiti dai punti doppi della trasformazione I_1.

c) $m > 2$. I casi che corrisponderebbero a $m > 2$ si debbono escludere perchè non possono portare ad un gruppo abeliano a base due. Invero si osservi che in seno al gruppo Γ_n, le trasformazioni ordinarie di prima e di seconda specie costituiscono un sottogruppo d'ordine $2m$ che è pure abeliano con base uguale a due: ma, come abbiamo osservato per il caso del modulo generale, questa ultima condizione può essere soddisfatta solo se $m \leq 2$.

Pertanto in corrispondenza ai due casi $m = 1$ e $m = 2$ *si hanno due famiglie di superficie ellittiche di tipo armonico, con* $p_g = 0$ *e curva canonica virtuale d'ordine zero: una di determinante* $n = 4$ *e l'altra di determinante* $n = 8$.

Passiamo alla loro effettiva costruzione.

a) *Determinante* $n = 4$. — Come si è visto la g_4^1 segata sopra una K dal fascio $|C|$, ha due punti quadrupli P, Q, e una coppia di punti doppi R, S: siano

$$z = a \quad , \quad z = b \quad , \quad z = c \, ,$$

le tre sezioni del cilindro quadruplo $f(x, y) = 0$, che corrispondono, rispettivamente, alle curve C passanti per P, Q (ridotte ciascuna ad una componente quadrupla unisecante le K) e per la coppia (R, S) (C spezzata in una componente doppia bisecante le K).

Allora la F si lascia rappresentare con le equazioni:

$$[\mathrm{II}_a] \qquad u = \sqrt[4]{(z - a)(z - b)(z - c)^2 \cdot \varphi(x, y)}$$

$$f(x, y) = 0 \, ,$$

designando con

$$\varphi(x, y) = 0$$

un cilindro del quarto ordine che tocchi f con contatto quadripunto, lungo tre generatrici.

Effettivamente la $[II_a]$ per ogni coppia di valori di x e y, rappresenta una curva ellittica sulla quale ai punti della retta quadrupla z corrispondono i gruppi di una g_4^1 ciclica: ed è noto che l'esistenza di una tale g_4^1 caratterizza le curve ellittiche armoniche (1). Proiettivamente la $[II_a]$, fissati x ed y, dà l'equazione di una quartica con due punti doppi infinitamente vicini sull'asse delle z.

Accanto alla superficie F rappresentata dalla $[II_a]$, avremo poi l'altra:

$$u = \sqrt[4]{(z-a)^3 (z-b)^3 (z-c)^2 \cdot \varphi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0]$$

che risponde agli stessi requisiti, dando luogo a sostituzioni inverse relative alle curve di diramazione $z = a$ e $z = b$ sopra il cilindro quadruplo.

b) *Determinante* $n = 8$. — Conformemente ai principi della teoria delle equazioni abeliane (2), avremo:

$$[II_b] \quad u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)^3 \cdot \varphi(x, y)} + \sqrt[2]{(z-b)(z-c) \cdot \psi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0],$$

dove $z = a$ e $z = b$ rappresentano le sezioni del cilindro f che corrispondono alle curve C (spezzate in una componente quadrupla bisecante le K) che segano sulle K i due gruppi della g_8^1 – generata dal gruppo Γ_8 – costituiti ciascuno da due punti quadrupli; invece $z = c$ corrisponde alla curva C (ridotta ad una componente doppia, quadrisecante le K) che segna il gruppo della g_8^1 composto da quattro punti doppi. Infine,

$$\varphi(x, y) = 0 \quad , \quad \psi(x, y) = 0$$

sono le equazioni di due cilindri, per esempio, del sesto ordine, che toccano f, il primo lungo tre generatrici di contatto quadripunto, e il secondo lungo sei generatrici di contatto bipunto.

(1) Cfr. ENRIQUES–CHISINI, loc. cit. nella nota precedente.

(2) Cfr., p. es., BIANCHI, op. cit.

Viceversa, è facile vedere direttamente che la [II_b] porta in effetto ad una superficie F su cui il gruppo abeliano Γ_8 è generato da una trasformazione ciclica del quarto ordine e da un'altra del secondo ordine.

Indicando con u_4 una delle determinazioni del radicale del quarto ordine che comparisce nella espressione di u, e con u_2 una determinazione di quello del secondo, numeriamo gli otto rami della funzione u definita dalla [II_b], nel modo che segue:

1) $u_4 + u_2$,

2) $iu_4 + u_2$,

3) $-u_4 + u_2$,

4) $-iu_4 + u_2$,

5) $u_4 - u_2$,

6) $iu_4 - u_2$,

7) $-u_4 - u_2$,

8) $-iu_4 - u_2$.

Allora in corrispondenza alla diramazione $z = a$ nasce la sostituzione ciclica del quarto ordine:

$$\omega = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8);$$

invece la diramazione $z = b$ dà:

$$\omega_1 = (1, 8, 3, 6)(2, 5, 4, 7),$$

e la $z = c$ porta alla sostituzione involutoria:

$$I = (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8).$$

Ne segue:

$$I = \omega\omega_1 = \omega_1\omega \quad ; \quad \omega^2 = \omega_1^2 .$$

Si aggiunga che la sostituzione ω definita sopra i rami di u nell'intorno del punto di diramazione $z = a$, si estende in una trasformazione birazionale, dello stesso ordine quattro, fra i punti della curva K d'equazione

$$f(u, z) = 0$$

(ottenuta eliminando i radicali dalla $[II_b]$ e riguardando x e y come costanti). Analogamente si dica per la ω_1.

Infatti si può provare che

$$u' = iu_4 + u_2$$

è funzione razionale di

$$u = u_4 + u_2$$

e di z; ciò segue dal considerare le due equazioni soddisfatte per un medesimo valore di z:

$$f(u, z) = 0$$

$$f(u', z) = 0,$$

e la loro risultante

$$R(u, u') = 0:$$

questa insieme alla $f(u', z) = 0$ definisce u' funzione razionale di u, z.

La curva K, omologa della generatrice k, è ellittica poichè sopra di essa ai punti di k corrispondono i gruppi di una g^1_8 con quattro punti quadrupli (due dei quali costituiscono il gruppo $z = a$, e due il gruppo $z = b$), e quattro punti doppi (gruppo $z = c$). Più precisamente la K è una curva ellittica armonica, poichè i cicli di ciascuna delle due trasformazioni ω e ω_1, formano una involuzione che (non essendo ellittica, perchè si hanno dei punti uniti) è lineare, è cioè una g^1_4 ciclica.

La formula $[II_b]$ che abbiamo scritto per rappresentare la superficie F nel caso armonico di determinante $n = 8$, corrisponde ad una scelta particolare delle sostituzioni sui rami della u in rapporto alle curve di diramazione del cilindro multiplo. Cambiando queste sostituzioni si ottengono altre superficie birazionalmente distinte: trascurando quelle che corrispondono a semplici scambi dei nomi delle curve di diramazione, scriviamo la:

$$u = \sqrt[4]{(z-a)(z-b)^3 \cdot \varphi(x, y)} + \sqrt{(z-a)(z-c) \cdot \psi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0],$$

che risponde alle sostituzioni:

$$\omega = (1\,,6\,,3\,,8)(2\,,7\,,4\,,5)\,;$$

$$\omega_1 = (1\,,4\,,3\,,2)(5\,,8\,,7\,,6)\,;$$

$$I = (1\,,5)(2\,,6)(3\,,7)(4\,,8) = \omega\omega_1\,.$$

4. *Caso equianarmonico.* — In questo caso *sulle curve ellittiche equianarmoniche K esistono, oltre le trasformazioni ordinarie di prima e di seconda specie,* π *e* I, *due serie di trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine,* ω *e* τ; *e due altre serie di trasformazioni singolari cicliche del sesto ordine,* σ *e* ρ. Le trasformazioni dei vari tipi sono legate fra loro dalle relazioni (1):

$$[4]\quad \left\{\begin{array}{l} \pi\sigma = \sigma_1\ ,\ \sigma_1\sigma = \tau\ ,\ \tau\sigma = I\ ,\ I\sigma = \omega\ ,\ \omega\sigma = \rho\ ,\ \rho\sigma = \pi\,; \\ \pi\tau = \tau_1\ ,\ \tau_1\tau = \omega\ ,\ \omega\tau = \pi\ ,\ \sigma\tau = I\ ,\ I\tau = \rho\ ,\ \rho\tau = \sigma\,; \\ \pi I = I_1\ ,\ I_1 I = \pi\ ,\ \sigma I = \omega\ ,\ \omega I = \sigma\ ,\ \tau I = \rho\ ,\ \rho I = \tau\,; \\ \pi\omega = \omega_1\ ,\ \omega_1\omega = \tau\ ,\ \tau\omega = \pi\ ,\ \sigma\omega = \rho\ ,\ \rho\omega = I\ ,\ I\omega = \sigma\,; \\ \pi\rho = \rho_1\ ,\ \rho_1\rho = \omega\ ,\ \omega\rho = I\ ,\ I\rho = \tau\ ,\ \tau\rho = \sigma\ ,\ \sigma\rho = \pi\,. \end{array}\right.$$

Prendiamo allora a studiare la struttura del gruppo Γ_n nell'ipotesi che esso subordini sopra una K delle trasformazioni singolari. Insieme a queste si avrà necessariamente un certo numero m di trasformazioni ordinarie, le quali potranno essere tutte di prima specie, oppure metà di prima specie e metà di seconda specie.

Nel primo caso, cioè quando in Γ_n si abbiano solo trasformazioni ordinarie di prima specie, in numero di m, risulta dalle [4] che a Γ_n possono appartenere soltanto delle trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine, cioè del tipo ω e τ, ed è subito visto che esse sono in numero di $2m$, cosicchè $n = 3m$. Invero moltiplicando una ω per le m trasformazioni π si hanno m trasformazioni ω, e i quadrati di queste dànno altrettante τ: viceversa, ogni ω o τ appartenente a Γ_n si può sempre ottenere nel modo predetto.

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III).

Supponiamo invece che a Γ_n appartengano m trasformazioni ordinarie di cui $m/2$ di prima specie, e altrettante di seconda. Allora in modo analogo al precedente, si trova che Γ_n è costituito, oltre che dalle m trasformazioni ordinarie, da m trasformazioni cicliche di terzo ordine, e da m trasformazioni cicliche del sesto ordine.

Cioè: *se il gruppo* Γ_n *non è esclusivamente costituito da trasformazioni ordinarie, si hanno i casi seguenti*:

1) Γ_n *contiene m trasformazioni ordinarie tutte di prima specie, e 2m trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine* $(n = 3m)$;

2) Γ_n *contiene m trasformazioni ordinarie, metà di prima e metà di seconda specie; m trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine, e m trasformazioni singolari cicliche del sesto ordine* $(n = 3m)$.

Ricerchiamo allora quali valori possa avere m, tenendo conto del fatto che il gruppo Γ_n, quando non sia ciclico, deve essere abeliano a base due.

a) $m = 1$, $n = 3$. Siamo necessariamente nel caso 1): cioè il gruppo Γ_3, ciclico del terzo ordine, è costituito dall'identità $\pi = 1$, da una trasformazione singolare del terzo ordine ω, e dal quadrato di questa $\omega^2 = \tau$. Il gruppo Γ_3 genera sulla K una g_3^1 ciclica (che è quella segata dal fascio $|C|$), la quale ha tre punti tripli in corrispondenza ai tre punti uniti, P, Q, R, della ω. È noto che l'esistenza di una g_3^1 ciclica caratterizza appunto le curve ellittiche equianarmoniche (¹).

b) $m = 2$, $n = 6$. È subito visto che tale valore di m non può aversi nel caso 1), cioè se Γ_n è composto solo da trasformazioni ordinarie di prima specie e da trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine. Infatti se ω e ω_1 sono due di queste ultime, le tre trasformazioni del tipo τ:

$$\omega^2 \, , \, \omega_1^2 \, , \, \omega_1 \, \omega \, ,$$

sono distinte ed appartengono al gruppo Γ_n, cosicchè è almeno $m = 3$.

Allora per $m = 2$ siamo nel caso 2), cioè del gruppo Γ_6 fanno parte due trasformazioni ordinarie ($\pi = 1$ e I), due trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine (ω e τ), e due trasformazioni sin-

(¹) Cfr., p. es., ENRIQUES–CHISINI, libro V, cap. III, § 27 (vol. III, pag. 262).

golari cicliche del sesto ordine (σ e ρ). Si tratta pertanto di un gruppo ciclico generato dalle potenze di una di queste ultime trasformazioni:

$$\sigma \quad , \quad \sigma^2 = \tau \quad , \quad \sigma^3 = I \quad , \quad \sigma^4 = \omega \quad , \quad \sigma^5 = \rho \quad , \quad \sigma^6 = \pi = 1 \, .$$

La σ ha un punto unito P e una coppia involutoria R, S: quindi la g_6^1 generata dalla σ e segata su K dal fascio $|C|$, ha un punto sestuplo in P; due punti tripli in R ed S; e tre punti doppi nei punti doppi della $I = g_2^1$, diversi da P.

c) $m = 3$, $n = 9$. Siamo nel caso 1): il gruppo Γ_9 è formato da una trasformazione ordinaria di prima specie, π, ciclica del terzo ordine, e dalle sue potenze:

$$\pi \quad , \quad \pi^2 \quad , \quad \pi^3 = 1 \, ,$$

alle quali si debbono aggiungere tre trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine, del tipo:

$$\omega \quad , \quad \omega_1 = \pi\omega \quad , \quad \omega_2 = \pi^2\omega \, ,$$

e le tre trasformazioni singolari, pure cicliche del terzo ordine, date da:

$$\tau = \omega^2 \quad , \quad \tau_1 = \omega_1^2 \quad , \quad \tau_2 = \omega_2^2 \, .$$

Fino a qui però non si è tenuto conto che Γ_9 deve essere abeliano: ora vedremo che se Γ_9 esiste, questa condizione è necessariamente soddisfatta. Nello stesso tempo resterà indicato il modo per giungere alla effettiva costruzione di Γ_9.

Se le nove trasformazioni sopra scritte costituiscono effettivamente un gruppo d'ordine nove, e non d'ordine maggiore, la trasformazione

$$\omega\omega_1$$

deve coincidere con la

$$\tau_2 = \omega_2^2 \, ,$$

dal che segue

$$\omega = \pi^{-1} \omega\pi \, ,$$

cioè ω e π debbono essere permutabili fra loro: allora lo stesso accade per tutte le altre trasformazioni di Γ_9, il quale è abeliano (a base due).

In particolare saranno a due a due permutabili le tre trasformazioni ω, ω_1, ω_2: ora effettivamente sopra una curva ellittica equianarmonica esistono tre (e tre sole) trasformazioni cicliche singolari a due a due permutabili. Per provarlo ci si riferisca alla cubica

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0,$$

che può assumersi appunto come modello delle curve ellittiche equianarmoniche: sopra tale cubica tre trasformazioni cicliche singolari permutabili, sono date dalle omografie cicliche generatrici delle g_3^1 segate dai fasci di rette con centro nei vertici del triangolo di riferimento.

Il gruppo Γ_9 genera una g_9^1 (segata su K da $|C|$), la quale ha un gruppo costituito dai tre punti uniti di ω, ciascuno contato tre volte; e analogamente per le terne di punti uniti in ω_1 e ω_2.

d) $m \geqq 4$. Nel caso 1) non può aversi $m > 3$, poichè verrebbero a far parte di Γ_n almeno quattro trasformazioni singolari cicliche del terzo ordine, a due a due permutabili, mentre abbiamo visto che di trasformazioni siffatte ne esistono tre sole.

Vediamo allora se possa aversi $m \geqq 4$ nel caso 2): ancora la risposta sarà negativa. Infatti per $m \geqq 4$ al gruppo Γ_n appartengono almeno due trasformazioni ordinarie di seconda specie I e I_1: ora, presa una trasformazione σ di Γ_n, questa deve essere permutabile tanto con I quanto con I_1, quindi I e I_1 avranno come doppio il punto unito della σ, ma allora I e I_1 coincidono, contro il supposto.

Si conclude che in ogni caso l'ordine del gruppo Γ_n non può essere maggiore di nove.

Riepilogando si ha che *nel caso equianarmonico le superficie ellittiche con curva canonica virtuale d'ordine zero, si distribuiranno in due famiglie di tipo ciclico con determinante tre e sei, e in una terza famiglia di tipo abeliano a base due, con determinante nove.*

Le equazioni delle superficie delle varie famiglie si scrivono subito, in modo analogo a quelli seguiti nel caso delle K a modulo generale o armoniche.

a) *Determinante* $n = 3$ (*tipo ciclico*). — Conformemente a quello che si è detto in generale per le superficie ellittiche di tipo ciclico, si ottiene la superficie richiesta scrivendo:

$$[\mathrm{III}_a] \qquad u = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)\cdot\varphi(x,y)}$$

$$[f(x,y)=0],$$

dove

$$\varphi(x,y)=0$$

rappresenta un cilindro cubico che oscula f secondo tre generatrici. Alle sezioni

$$z=a \quad , \quad z=b \quad , \quad z=c ,$$

corrispondono sulla F le tre curve C (ridotte ciascuna ad una sola componente tripla) che determinano sulle K i punti tripli della g_3^1 ciclica segata dal fascio $|C|$.

Insieme alla $[\mathrm{III}_a]$ avremo poi la superficie analoga:

$$u = \sqrt[3]{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2\cdot\varphi(x,y)}$$

$$[f(x,y)=0],$$

che risponde alle sostituzioni inverse rispetto alle curve di diramazione del cilindro triplo.

b) *Determinante* $n = 6$ (*tipo ciclico*). — Abbiamo ancora tre curve di diramazione, una delle quali, $z = a$, corrisponderà al punto sestuplo della g_6^1 segata dal fascio $|C|$ sulla K; la seconda, $z = b$, alle coppie di punti tripli della g_6^1; e infine la $z = c$ alle terne di punti doppi della g_6^1 stessa.

Allora si ottiene la superficie del tipo richiesto ponendo:

$$[\mathrm{III}_b] \qquad u = \sqrt[6]{(z-a)(z-b)^2(z-c)^3\cdot\varphi(x,y)}$$

$$[f(x,y)=0],$$

dove

$$\varphi(x,y)=0$$

designa un cilindro, per esempio del sesto ordine, che tocchi il cilindro f secondo tre generatrici contate ciascuna sei volte.

Cambiando le sostituzioni relative alle curve di diramazione del cilindro sestuplo, avremo un'altra superficie sostanzialmente diversa dalla precedente:

$$u = \sqrt[6]{(z-a)^5 (z-b)^4 (z-c)^3 \cdot \varphi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0].$$

A posteriori si verifica subito, nel solito modo, che la [III_b] rappresenta effettivamente una superficie ellittica con curva canonica virtuale d'ordine zero, di determinante sei e di tipo equianarmonico: basta osservare che, per ogni coppia di valori di $x\, y$, la [III_b] dà una curva ellittica K su cui le rette $z =$ cost. segano una g_6^1 ciclica, con un punto sestuplo, due punti tripli e tre punti doppi. Allora se ω è la trasformazione ciclica del sesto ordine che genera la g_6^1, il quadrato di ω dà luogo ad una g_3^1 ciclica, la cui presenza – come già si è avvertito – caratterizza appunto le curve ellittiche equianarmoniche.

c) Determinante $n = 9$ (tipo abeliano). — Nel fascio $|C|$ esistono tre curve spezzate ciascuna in una componente tripla trisecante le K: siano

$$z = a \quad , \quad z = b \quad , \quad z = c \,,$$

le tre sezioni del cilindro f che corrispondono a codeste C spezzate. Allora la nostra superficie ellittica F si può avere ponendo, per esempio:

$$[\mathrm{III}_c] \qquad u = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)^2 \cdot \varphi(x, y)} + \sqrt[3]{(z-b)(z-c)^2 \cdot \psi(x, y)}$$

$$[f(x, y) = 0] \,,$$

dove

$$\varphi(x, y) = 0 \quad , \quad \psi(x, y) = 0$$

rappresentano due cilindri, per esempio cubici, osculanti f ciascuno secondo due terne di generatrici, non equivalenti.

Come verifica si osservi che la funzione u sopra scritta, in corrispondenza alle sezioni

$$z = a \quad , \quad z = b \quad , \quad z = c \,,$$

dà luogo alle tre sostituzioni permutabili cicliche del terzo ordine:

$$\omega = (1\,,2\,,3)\,(4\,,5\,,6)\,(7\,,8\,,9)\,,$$

$$\omega_1 = (1\,,4\,,7)\,(2\,,5\,,8)\,(3\,,6\,,9)\,,$$

$$\omega_2 = (1\,,9\,,5)\,(2\,,7\,,6)\,(3\,,8\,,4)\,,$$

con

$$\omega_2 = (\omega\omega_1)^{-1}\,.$$

Sulle curve K omologhe delle generatrici k del cilindro f, ai punti di queste corrispondono i gruppi di una g_9^1 con nove punti tripli, onde le K sono ellittiche: e, precisamente, equianarmoniche poichè le sostituzioni ω ; ω_1 , ω_2 si estendono in tre trasformazioni birazionali, cicliche del terzo ordine, fra i punti della curva K, ciascuna delle quali costituisce con i suoi cicli una g_3^1.

Accanto alla [III_c] avremo poi la:

$$u = \sqrt[3]{(z-a)^2\,(z-c)\cdot\varphi\,(x\,,y)} + \sqrt[3]{(z-b)\,(z-c)^2\cdot\psi\,(x\,,y)}$$

$$[f(x\,,y) = 0]\,,$$

che porta evidentemente allo stesso tipo di superficie.

5. Possiamo riassumere i risultati ottenuti nell'enunciato che segue:

Le superficie ellittiche di generi $p_g = 0$ e $p_a = -1$, con curva canonica virtuale d'ordine zero (cioè possedenti due fasci di curve ellittiche, uno lineare e l'altro ellittico), si distribuiscono in sette famiglie rappresentabili con le equazioni [I_a], [I_b], [II_a], [II_b] (e analoghe); [III_a], [III_b], [III_c] (e analoghe).

Nota. — Le superficie ellittiche con curva canonica virtuale d'ordine zero si presentano come particolari superficie iperellittiche nascenti da certe involuzioni che possono appartenere alla superficie di JACOBI rappresentativa delle coppie di punti della curva di genere due, e in questo senso sono state incontrate da BAGNERA e DE FRANCHIS [1], che per primi ne hanno dato la classificazione (mediante rappresentazioni parametriche iperellittiche che rispondono ai nostri sette tipi).

[1] Cfr. G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, volume XVI, 1907$_1$).

Indipendentemente da questa ricerca, ma dopo gli autori citati, ENRIQUES e SEVERI hanno ritrovato in altro modo il risultato, sempre partendo dalla rappresentazione parametrica delle nostre superficie come superficie iperellittiche (1). Essi stabiliscono *a priori* che una superficie ellittica d'ordine n, con curva canonica virtuale d'ordine zero, è iperellittica, estraendo sulla superficie stessa una radice d'ordine i che ha per radicando il polinomio aggiunto d'ordine $i(n-4)$ ($i = 2$, o $i = 3$, o $i = 4$, o $i = 6$, in corrispondenza al valore del primo plurigenere non nullo P_i): la superficie così ottenuta ha i caratteri

$$p_a = -1 \;, \quad p_g = 1 \;,$$

e curva canonica effettiva d'ordine zero ($P_4 = 1$), cosicchè, secondo un teorema di PICARD–ENRIQUES, risulta iperellittica.

ENRIQUES e SEVERI dànno anche la determinazione delle superficie ellittiche con curva canonica virtuale d'ordine zero, mediante i valori zero ed uno dei plurigeneri, se pure non precisamente nella forma più espressiva che esporremo nel paragrafo successivo (2).

La presente trattazione del problema in maniera puramente geometrica, ha formato oggetto di una Nota di ENRIQUES pubblicata nel primo volume dei « Rendiconti » dell'Accademia dei Lincei, del corrente anno 1934 (3).

§ 15. – I PLURIGENERI E LA CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE DI GENERE $p_g = 0$. CARATTERIZZAZIONE DELLE SUPERFICIE RIGATE.

1. Abbiamo detto (4) che la possibilità di rappresentare una *superficie ellittica F*, di *determinante n*, sopra un cilindro ellittico n — *plo*,

$$f(x, y) = 0,$$

(1) Cfr. F. ENRIQUES e F. SEVERI, *Intorno alle superficie iperellittiche irregolari* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. XVII, 1908_1). Vedi anche degli stessi AA., *Intorno alle superficie iperellittiche* (ibidem, vol. XVI, 1907_1), e *Mémoires sur les surfaces hyperelliptiques* (« Acta Math. », tomes 32 et 33, 1909).

(2) Cfr. § 15, n. 3.

(3) F. ENRIQUES, *Sulle superficie ellittiche di genere zero* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XIX, fasc. 4°, 18 febbraio 1934).

(4) Cfr. § 12, n. 8.

con curva di diramazione costituita da un certo numero t di sezioni rette

$$z = a_1 , \qquad z = a_2 , \cdots , \qquad z = a_t ,$$

consente di determinare i caratteri della F stessa. E si è sviluppato in particolare il calcolo dei caratteri numerici, trovando

$$p^{(1)} = 1 , \qquad p_a = -1 .$$

Ora riprendendo ed estendendo la valutazione del genere geometrico (che si è accennato risultare $p_g = 0$), vogliamo determinare tutti i plurigeneri della F: *il plurigenere d'ordine m sarà dato da*

[1] $$P_m = m(t-2) + \sum_{i=1}^{i=t} \left[\frac{-m}{s_i}\right] + 1,$$

dove s_i designa l'ordine di molteplicità della curva di diramazione $z = a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$, e

$$\left[\frac{-m}{s_i}\right]$$

rappresenta l'intero che immediatamente precede come grandezza algebrica, la frazione

$$-\frac{m}{s_i} .$$

Si deve intendere che a P_m competa il valore zero quando il secondo membro della [1] risulti negativo, e così, in particolare, la [1] comprende la

$$p_g = 0.$$

Si prenda sopra il cilindro f una curva $2c$ costituita da due sezioni rette generiche: la $2c$, essendo ellittica, ha per aggiunta una curva di ordine zero, a prescindere da componenti eccezionali (costituite dalle tre generatrici di f che passano per i punti impropri comuni alle sezioni rette c). Quindi sopra il cilindro f il sistema canonico *virtuale* è dato da $|-2c|$.

Dal sistema canonico di f si passa a quello di F ricorrendo alla relazione, già più volte richiamata [1], che lega il sistema canonico di una superficie f (*anche se definito soltanto virtualmente*) a quello di una superficie F, in corrispondenza $[n, 1]$ con la f. Presa una curva canonica di f e la sua trasformata sulla F, se a quest'ultima si aggiunge la *curva delle coincidenze* sulla F, si ottiene una curva canonica della F stessa.

Ora ricordiamo che sul cilindro f la curva di diramazione è costituita da un certo numero t di sezioni piane normali:

$$z = a_1 , z = a_2 , \cdots , z = a_t ,$$

e se indichiamo con s l'ordine di molteplicità della curva di diramazione

$$z = a,$$

ad essa corrisponde sopra la F una curva

$$C = sC_s$$

del fascio $|C|$, spezzata in una componente s — *pla* C_s che sega le K in

$$\frac{n}{s}$$

punti. Pertanto la curva delle coincidenze sulla F sarà data da una somma di t termini del tipo

$$(s - 1) C_s ,$$

che indicheremo brevemente con

$$D = \sum (s - 1) C_s ,$$

salvo a cambiare s in s_i $(i = 1 , 2 , \cdots , t)$ quando si vogliano distinguere gli addendi di questa sommatoria in corrispondenza alle varie curve C_s, componenti delle C riducibili.

[1] Cfr. § 8, nota [2] al termine del n. 5.

Se ne deduce che *il sistema canonico della superficie ellittica* F *è*

$$\left| \sum (s-1) C_s - 2C \right| .$$

Questo sistema non ha esistenza effettiva, cosicchè $p_g = 0$. Infatti indichiamo con x la dimensione del sistema lineare $|D|$ a cui appartiene la curva delle coincidenze D: proveremo che è $x = 0$, e perciò $|D|$ non può contenere entro di sè il sistema $\infty^1 |C|$, e tanto meno $|2C|$. *A priori* il sistema $|D|$ essendo formato di curve di grado zero, componenti delle C spezzate, senza intersezioni fra loro, sarà pure di grado zero e si comporrà delle C stesse e delle componenti delle C riducibili, cioè si avrà:

$$\left| \sum (s-1) C_s \right| = \left| xC + \sum h_s C_s \right| ,$$

con

$$x \geqq 0 , \qquad 0 \leqq h_s < s.$$

Ora da questa relazione si ricaverà appunto

$$x = 0.$$

Dalle due sommatorie che figurano nella relazione, possiamo togliere i termini in cui

$$h_s = s - 1,$$

e resterà quindi:

$$|xC| = \left| \sum k_s C_s \right| ,$$

con

$$0 \leqq k_s < s - 1.$$

Ma una tale relazione non può sussistere per $x > 0$, poichè la curva variabile nel sistema $|xC|$ risulta composta da x parti fra loro sconnesse, mentre la curva

$$\sum k_s C_s$$

è formata di componenti fra loro sconnesse, ciascuna d'ordine inferiore a quello di C, e quindi di un numero di componenti più grande di x. Qui si applica il *principio di degenerazione* [1] in una forma

[1] Cfr. Enriques-Chisini, libro V, cap. III, § 36 (vol. III, pag. 405).

solo apparentemente più estesa: « una curva composta di parti sconnesse, non può ridursi per continuità ad una curva formata da un numero maggiore di parti ugualmente sconnesse fra loro ». Infatti ciò importerebbe lo spezzamento di una almeno delle componenti la curva primitiva, in parti non connesse fra loro.

Abbiamo dunque dimostrato che per la nostra superficie F si ha $p_g = 0$. Con metodo analogo passiamo a valutare i plurigeneri della F.

Il sistema m–canonico della F è dato da:

$$\left| \sum m(s-1)\, C_s - 2mC \right| .$$

Quindi se esistono ∞^x curve m–canoniche ($x = P_m - 1 \geq 0$), esse si comporranno di x curve C e di una curva fissa

$$\sum h_s C_s ,$$

costituita dalle C_s prese un certo numero h_s di volte, con

$$0 \leq h_s < s.$$

Avremo cioè:

$$\left| \sum m(s-1)\, C_s - 2mC \right| = \left| xC + \sum h_s C_s \right| ,$$

da cui (essendo $sC_s = C$):

$$| (mtC - 2mC - xC | = \left| \sum (m + h_s)\, C_s \right| ,$$

ossia:

$$| (mt - 2m - x)\, C | = \left| \sum \frac{m + h_s}{s}\, C \right| .$$

Ora la sommatoria contenuta nel secondo membro non potrà indicare un sistema lineare contenente ancora $|C|$, quando si abbia per ognuno dei suoi termini

$$\frac{m + h_s}{s} < 1,$$

contraddicendosi altrimenti al *principio di degenerazione*, come si è visto nel caso $p_g = 0$.

Ne segue che

$$\frac{m + h_s}{s}$$

dovrà essere un numero intero ρ, con

$$\frac{m}{s} \leqq \rho < \frac{m}{s} + 1.$$

Avremo così:

$$mt - 2m - x = \sum \rho.$$

Allo scopo di distinguere gli addendi di questa sommatoria, in corrispondenza alle varie curve C_s, componenti delle C riducibili, cambiamo

$$s \quad \text{in} \quad s_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, t),$$

$$\rho \quad \text{in} \quad \rho_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, t).$$

Sarà allora:

$$mt - 2m - x = \sum_{i=1}^{i=t} \rho_i,$$

da cui:

$$x = P_m - 1 = m(t - 2) - \sum_{i=1}^{i=t} \rho_i.$$

Il numero $-\rho_i$ è l'intero che immediatamente precede in ordine di grandezza algebrica, la frazione

$$-\frac{m}{s_i}:$$

esso può quindi designarsi, secondo l'uso, con

$$-\rho_i = \left[\frac{-m}{s_i}\right].$$

Si ha in tal modo la relazione già sopra scritta:

[1] $$P_m = m(t - 2) + \sum_{i=1}^{i=t} \left[\frac{-m}{s_i}\right] + 1,$$

che dà il *valore del plurigenere P_m, in quanto si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il secondo membro risulti negativo.*

2. Per $m = 1$ si ritrova:

$$P_1 = p_g = 0 ,$$

mentre la [1] darebbe il valore del genere numerico:

$$p_a = -1 .$$

Per $m = 2$ é:

$$\left[\frac{-2}{s_i}\right] = -1 \qquad (s_i \geqq 2),$$

quindi *il bigenere della F vale*:

$$P_2 = t - 3 ,$$

e si ha

$$P_2 \gtreqless 0$$

secondo che è

$$t \gtreqless 3.$$

Per $t = 2$ la F è riferibile ad una rigata, e naturalmente dalla [1] si ha sempre $P_m = 0$. Invece per $t > 3$ risulta $P_m > 0$ quando m sia un numero pari maggiore di due. Per m dispari la [1] dà ancora $P_m > 0$ almeno se $t > 5$, oppure se $t = 5$ ma $m > 3$. Per $m = 3$ e $t = 5$ è $P_3 > 0$ se una almeno delle s_i è $s_i > 2$: nella stessa ipotesi è $P_m > 0$ quando sia $t = 4$ con m dispari.

Calcoliamo i primi plurigeneri della F in corrispondenza al caso $t = 3$ ($P_2 = 0$).

Se le curve del fascio ellittico (K), sulle quali le C segano una g^1_n, sono di genere π, si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i}(s_i - 1) = 2n + 2\pi - 2 ,$$

da cui, essendo $\pi > 0$, segue:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} \geqq 2 ,$$

ossia:

[2] $$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{1}{s_i} \leq t-2,$$

che per $t = 3$ diviene:

[3] $$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \leq 1,$$

dove possiamo supporre, per fissare le idee:

$$s_3 \geqq s_2 \geqq s_1 \ (\geqq 2).$$

Allora, in corrispondenza alle varie soluzioni della [3], si trova:

a) per $s_1 = 2$ $(s_3 > s_2 \geqq 3)$:

$$P_2 = P_3 = 0,$$

ed inoltre se $s_2 = 3$ e $s_3 \geqq 6$:

$$P_4 = P_5 = 0\,, \quad P_6 = 1;$$

oppure per $s_3 \geqq s_2 \geqq 4$:

$$P_4 = 1;$$

b) per $s_1 = 3$ $(s_2 \geqq 3)$:

$$P_2 = 0\,, \quad P_3 = 1\,, \quad P_6 \geqq 1\,;$$

c) per $s_1 \geqq 4$:

$$P_2 = 0\,, \quad P_3 = 1\,, \quad P_4 = 2\,, \cdots$$

Di qui e dall'osservazione già fatta che per $t > 3$ è $P_2 > 0$, e *a fortiori* $P_4 > 0$, $P_6 > 0, \cdots$, segue:

Per una superficie ellittica non appartenente alla famiglia delle rigate, il quadrigenere P_4 e il sestigenere P_6 non possono essere simultaneamente nulli.

In conseguenza se per una superficie F sia

$$P_4 = P_6 = 0,$$

la superficie dovrà appartenere alla famiglia delle rigate. Ciò risulta subito se la F è irregolare, poichè da $P_4 = 0$ segue $p_g = 0$, e quindi

$p_a \leqq -1$. Ora se $p_a < -1$ la F è riferibile ad una rigata di genere $p = -p_a$ [1]; invece se $p_a = -1$ *a priori* la F potrebbe ridursi ad una rigata ellittica, ovvero ad una superficie ellittica non appartenente alla famiglia delle rigate, ma in quest'ultima ipotesi dovrebbe essere $P_4 > 0$ o $P_6 > 0$. Resta da esaminare il caso in cui la F sia regolare di genere $p_a = p_g = 0$. In tal caso, essendo anche il bigenere $P_2 = 0$, il *teorema di* CASTELNUOVO dice che la F è razionale [2].

Concludiamo enunciando il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia riferibile ad una rigata, è che essa abbia nulli il quadrigenere ed il sestigenere:

$$P_4 = P_6 = 0.$$

La *condizione di riferibilità a rigata* si può anche riassumere scrivendo:

$$P_{12} = 0.$$

Nota. — La caratterizzazione delle rigate mediante l'annullamento del P_4 e del P_6, costituisce il risultato fondamentale contenuto nella Memoria, più volte citata, di F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (1905).

3. Determiniamo i valori dei plurigeneri P_m per le superficie ellittiche $F(p_a = -1, p_g = 0)$ sulle quali le curve del fascio ellittico (K) sono ellittiche (*curva canonica virtuale d'ordine nullo*). In tale ipotesi la [2] diviene:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{1}{s_i} = t - 2,$$

e già ne abbiamo indicate le soluzioni [3]. Si hanno i casi seguenti:

α) $t = 4$; $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2$: la [1] dà $P_m = 1$ quando m sia un numero pari; invece per m dispari risulta $P_m = 0$, cioè:

$$P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1,$$

$$p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0;$$

(1) Cfr. § 10.

(2) Cfr. *Lezioni*, § 65.

(3) Cfr. § 14, n. 2.

β) $t = 3$; $s_1 = 2$, $s_2 = s_3 = 4$: risulta $P_m = 1$ per m multiplo di quattro, mentre per ogni altro valore di m si ha $P_m = 0$;

γ) $t = 3$; $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$: sono nulli tutti i plurigeneri meno quelli d'ordine multiplo di sei, i quali risultano uguali ad uno;

δ) $t = 3$; $s_1 = s_2 = s_3 = 3$: si ha $P_m = 1$ se m è multiplo di tre: per ogni altro valore di m è $P_m = 0$.

Confrontando i risultati ottenuti nei vari casi, si ha che *tutte le superficie ellittiche* ($p_a = -1$, $p_g = 0$) *con curva canonica virtuale d'ordine nullo, hanno*

$$P_{12} = 1.$$

Dimostriamo ora che, viceversa, questa condizione caratterizza le superficie con curva canonica virtuale d'ordine zero; cioè che per tutte le altre superficie ellittiche, contenenti un fascio ellittico di curve k di genere $\pi > 1$, si ha:

$$P_{12} > 1.$$

Dalla [1] risulta subito che per $t > 4$ è certo $P_{12} > 1$: ricerchiamo allora se per $t \leq 4$ si possa avere una superficie F con $P_{12} = 1$, essendo $\pi > 1$.

Se $t = 4$ la [2], escludendo il valore $\pi = 1$, dà:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} < 2,$$

e quindi una almeno delle s_i deve essere maggiore di due: ma allora dalla [1] risulta $P_6 > 1$, e lo stesso accade per ogni P_m con m multiplo di sei.

Passiamo al caso $t = 3$, nel quale la [2], sempre nell'ipotesi $\pi > 1$, porta:

[4] $$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} < 1.$$

Si supponga, per fissare le idee:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3,$$

e si distingua i casi che seguono:

a) $s_1 = 2$: tenendo presente che ciascuna delle s_i deve dividere il minimo comune multiplo delle altre due (¹), si trovano i sistemi di soluzioni della [4]:

$$s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 4\,, \qquad s_3 = 8\,,$$

$$s_1 = 2\,, \qquad s_2 = 5\,, \qquad s_3 = 10\,,$$

$$s_1 = 2\,, \qquad s_2 \geqq 6\,, \qquad s_3 \geqq s_2\,,$$

per ognuno dei quali, come è subito visto, la [1] dà $P_{12} > 1$;

b) $s_1 = 3$: allora è $s_2 \geqq 3$ e $s_3 > 3$, ciò basta perchè dalla [1] risulti $P_{12} > 1$;

c) $s_1 \geqq 4$: la [1] dà senz'altro $P_{12} > 1$.

Si conclude pertanto che il valore $P_{12} = 1$ corrisponde solo all'ipotesi $\pi = 1$. Cioè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie ellittica con $p_a = -1$, $p_g = 0$, abbia curva canonica virtuale d'ordine zero, è che sia

$$P_{12} = 1\,.$$

Più precisamente, tenendo presenti i valori dianzi determinati per i plurigeneri delle superficie F quando sopra di esse le curve K abbiano il genere $\pi = 1$, e ricordando la discussione svolta nel paragrafo precedente (²), si ha:

Per una superficie ellittica con $p_a = -1$, $p_g = 0$, i valori

$$P_2 = 1\,, \qquad P_{12} = 1$$

caratterizzano il caso generale in cui le curve del fascio ellittico (K) sono ellittiche a modulo qualunque (determinante $n = 2$ o $n = 4$). Invece per

$$P_4 = 1\,, \qquad P_{12} = 1$$

le K risultano armoniche (determinante $n = 4$ o $n = 8$). Infine se

$$P_6 = 1\,, \qquad P_{12} = 1$$

(¹) Cfr. § 14, n. 1.

(²) Cfr. § 14, nn. 2, 3, 4.

le K sono equianarmoniche: *e si hanno per*

$$P_3 = 1$$

le due famiglie di superficie con determinante $n = 3$ *o* $n = 9$, *e per*

$$P_3 = 0$$

le superficie di determinante $n = 6$ (¹).

4. I risultati ottenuti contengono la classificazione completa delle superficie di genere $p_g = 0$, irregolari. La classificazione delle superficie regolari, ugualmente di genere $p_g = 0$, conduce d'altra parte ad alcuni teoremi che non hanno potuto trovare posto nelle nostre *Lezioni*, edite dalla Casa « Cedam » di Padova (1932-X), a cui ci siamo sempre riferiti in questa esposizione.

Ricordando che le superficie con

$$p_a = p_g = P_2 = 0$$

sono razionali (²), si è condotti a distinguere le superficie di genere

$$p_a = p_g = 0$$

non razionali, secondo i valori del bigenere

$$P_2 \geqq 1\,,$$

e del genere lineare

$$p^{(1)} \geqq 1\,.$$

Ma in corrispondenza ai valori

$$p^{(1)} = 1\,, \qquad P_2 = 1\,,$$

conviene pure distinguere *due casi*, secondochè:

(¹) Cfr. i lavori di F. ENRIQUES e F. SEVERI citati nel § 14, n. 5. Vedi inoltre F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. XXIII, 1914₁).

(²) Cfr. *Lezioni*, § 65.

1) si ha una *curva bicanonica d'ordine zero;* ovvero

2) una *curva bicanonica effettiva d'ordine maggiore di zero.*

È facile riconoscere che *il caso* 1) *viene caratterizzato dal valore del trigenere:*

$$P_3 = 0,$$

giacchè nel *caso* 2) dovrà essere

$$P_3 = p_a + p^{(1)} \geqq 1.$$

Inoltre si dimostra che in questo *caso* 2) il *sestigenere* è

$$P_6 > 1,$$

essendovi almeno un fascio di curve sesticanoniche, determinato dal triplo di una curva bicanonica e dal doppio di una tricanonica (¹).

Sussiste quindi il teorema:

Le superficie regolari di genere zero e di bigenere uguale all'unità ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$), *con curva bicanonica d'ordine nullo, cioè di trigenere* $P_3 = 0$, *si possono trasformare in superficie del sesto ordine passanti doppiamente per gli spigoli di un tetraedro* ($p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0$; $P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1$) (²).

Pertanto possiamo riassumere nel seguente quadro la CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE DI GENERE GEOMETRICO NULLO ($p_g = 0$).

$p_a = 0$: superficie razionali.

$(p_a = P_2 = 0)$

$P_{12} = 0$: superficie rigate

- $p_a = -1$: rigate ellittiche.
  $(p_a = -1, \quad P_4 = P_6 = 0)$
- $p_a < -1$: rigate di genere $-p_a > 1$.
  $(p_a < -1, \quad P_4 = P_6 = 0)$

(¹) Invero queste due curve non possono coincidere, altrimenti sarebbero composte con una stessa curva canonica, contata rispettivamente tre e due volte, sicchè $p_g > 0$.

(²) Cfr. F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta « dei XL », serie 3ª, tomo XIV, 1906).

$P_{12} = 1$ $(p^{(1)} = 1)$: superficie con curva canonica virtuale di ordine zero (ogni sistema lineare puro di genere π ha il grado $n = 2\pi - 2$)

- $p_a = 0$: superficie con curva bicanonica d'ordine zero, birazionalmente identiche ad una sestica passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

  $(p_a = P_3 = 0$: $\quad P_2 = 1)$

- $p_a = -1$: superficie ellittiche con un fascio lineare di curve ellittiche C, e un fascio ellittico di curve ellittiche K (curva canonica *virtuale* d'ordine zero).
  - $P_2 = 1$: curve K a modulo generale;
  - $P_4 = 1$: curve K armoniche;
  - $P_6 = 1$: curve K equianarmoniche.

$P_{12} > 1$

- $p_a = -1$: superficie ellittiche di genere lineare $p^{(1)} = 1$, possedenti un fascio lineare di curve ellittiche, e un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1$.
- $p_a = 0$: superficie di genere lineare $p^{(1)} \geqq 1$, con almeno un fascio di curve sesticanoniche $(P_6 > 1)$.

La classificazione delle superficie appartenenti all'ultima categoria, dipende essenzialmente dal genere lineare $p^{(1)}$.

Per $p^{(1)} = 1$, anche indipendentemente dall'ipotesi $p_g = 0$, si costruiscono in effetto i tipi di superficie possedenti un fascio lineare di curve ellittiche, mettendo in evidenza i caratteri interi e i moduli da cui dipendono.

Invece per $p^{(1)} > 1$ (anche qui qualunque sia il valore del genere p_g) si è condotti a costruire come modelli tipici delle nostre superficie, delle superficie bicanoniche o pluricanoniche, che dànno luogo necessariamente ad un numero finito di famiglie. Però nello stato attuale delle nostre conoscenze non si sa quali valori possa assumere effettivamente il $p^{(1)}$, per le superficie di genere $p_a = p_g = 0$. A tale riguardo si hanno soltanto degli esempi per $p^{(1)} = 2, 3$, costruiti recentemente da L. GODEAUX (1) e da L. CAMPEDELLI (2).

Aggiungeremo che la classificazione delle superficie di genere $p_g = 0$ costituisce il passo fondamentale per la classificazione delle superficie in generale, che dipende similmente dai valori del genere lineare e dei plurigeneri: il carattere P_{12} giuoca ancora qui in modo essenziale, perchè

$$P_{12} = 1$$

caratterizza la famiglia più generale delle superficie con curva canonica, effettiva o virtuale, d'ordine zero, che – oltre alle superficie precedentemente indicate – comprende:

$$P_{12} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{le } \textit{superficie iperellittiche} \text{ (caratterizzate da} \\ \qquad\qquad p_a = -1, \quad p_g = 1, \quad P_4 = 1); \\ \text{e le superficie regolari di generi uno} \\ \qquad\qquad\qquad (p_a = p_g = P_2 = 1). \end{array} \right.$$

Pertanto le rimanenti superficie ($P_{12} > 1$) posseggono un sistema lineare di curve pluricanoniche, e possono essere, almeno virtualmente, classificate come si è accennato innanzi pel caso del genere zero, distinguendo i valori

$$p^{(1)} = 1, \qquad p^{(1)} > 1.$$

Ma lo studio di tali questioni d'ordine più generale esce dai limiti che abbiamo imposti a questo corso di conferenze (3).

(1) Cfr. L. GODEAUX, *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol XIV, 1931_2).

(2) Cfr. L. CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XV, 1932_1).

(3) Ci limitiamo a rimandare lo studioso alle seguenti memorie: F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (« Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo XX, 1905); *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (« Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1906); *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie V, vol. XXI, 1912_1); *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (« Rend. R. Accad. dei Lincei », serie V, vol. XXIII, 1914_1).

CORREZIONI ED AGGIUNTE

A pag. 181, riga 26, in luogo di

$$P_4 = 1\,, \qquad P_{12} = 1$$

leggi:

$$P_2 = 0\,, \qquad P_4 = 1\,, \qquad P_{12} = 1\,;$$

e nella riga 28, in luogo di

$$P_6 = 1\,, \qquad P_{12} = 1,$$

leggi:

$$P_4 = 0\,, \qquad P_6 = 1\,, \qquad P_{12} = 1.$$

* * *

Alle notizie contenute nel § 4, adde:

1) Sulla costruzione dei piani multipli con curva di diramazione assegnata, un importante *teorema di esistenza*, in cui si parte da certe forme limiti, è stato stabilito recentemente da O. CHISINI (*Un teorema d'esistenza sui piani multipli*, Nota I e II, « Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XIX, 1934_1).

2) Per le superficie irregolari di generi p_a e p_g, si può dimostrare – con le notazioni del § 4, n. 3 – che

$$\omega \geqq 2\,p_g - p_a - 1\,.$$

Cfr. B. SEGRE, *Sui moduli delle superficie algebriche irregolari* (« Rend. R. Accad. Lincei », serie VI, vol. XIX, 1934_1).

Con ciò non si pretende di completare qui la citazione delle Note o Memorie pubblicate, come queste, dopo la composizione del testo.

* * *

La formula [1] del § 11, n. 2 (pag. 88), risale a L. GODEAUX (« Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut », 1920).

2. *Nota.* – La relazione che dà il numero χ delle curve cuspidate di una rete, è stata dimostrata nell'ipotesi che la rete sia contenuta totalmente in un sistema (semplice, irriducibile) triplamente infinito. Ma questa restrizione si può togliere tenendo presente che ogni rete $|C|_2$ è sempre contenuta in un sistema ∞^3 $|C+\theta|$ dotato della curva fondamentale θ. Si ricorrerà quindi alla superficie F^* dello spazio ordinario, che ha per sezioni le curve del sistema $|C+\theta|$, e che possiede un punto multiplo O immagine della curva fondamentale θ. Per trovare il numero delle cuspidi delle sezioni piane per O, bisogna intersecare la curva parabolica, segata su F^* dall'hessiana, con la polare del punto O, e basta dunque tener conto del comportamento della hessiana e di questa polare in O.

§ 4. – Piani multipli e moduli delle superficie algebriche.

1. La conoscenza del numero delle curve cuspidate di una rete $|C|$, permette di determinare altri caratteri relativi alla $|C|$ stessa. Essi sono:

a) il numero k delle C dotate di due punti doppi;

b) il numero d dei fasci costituiti da curve C fra loro bitangenti;

c) il numero i dei fasci di curve C che hanno un contatto tripunto.

Questi numeri si riflettono nei caratteri della *curva di diramazione* del *piano multiplo* su cui la superficie F viene rappresentata quando si riferisca proiettivamente la rete delle curve C a quella delle rette di un piano.

Per precisare la cosa prendiamo la F nello spazio ordinario, e sopra di essa la rete $|C|$ sia segata dai piani della stella avente il centro in un certo punto O (in generale multiplo per la F), e, al solito, siano π ed n, rispettivamente, il genere ed il grado di $|C|$. Allora proiettando la F da O sopra un piano α, tra questo piano e la F nasce una corrispondenza $[1, n]$, cioè la F viene ad essere rappresentata sopra *il piano n — plo* α, la cui *curva di diramazione* C_j^* è costituita evidentemente dalla proiezione da O della jacobiana C_j della rete $|C|$ (la C_j essendo segata su F, fuori della curva doppia, dalla superficie prima polare di O). La C_j^* è dell'ordine $2\pi+2n-2$, poichè