Enriques, Federigo

Unicuique suum

Period. di Matem. (IV) **XV** (1935), pp. 65-66.

PERIODICO DI MATEMATICHE

STORIA - DIDATTICA - FILOSOFIA

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA "MATHESIS"

SERIE IV - VOLUME XV - MCMXXXV

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXXV

è *un numero complesso ordinario* (e quindi C è *l'insieme dei numeri complessi ordinari*).

2. Intanto, se n vale 1, allora, poichè « j_1^2 » deve appartenere a C, dovranno esservi tre numeri reali a, b, c_1, tali che

$$j_1^2 = a + bi + c_1 j_1$$

sicchè « j_1 » è *una radice* dell'equazione

$$x^2 - c_1 x - (a + bi) = 0 \tag{2}$$

e quindi è *un numero complesso ordinario.*

3. Altrimenti, cioè se n è maggiore di 1, sia r un numero naturale non minore di 2. Poichè « j_1^r » deve appartenere a C, dovranno esservi $n+2$ numeri reali a_r, b_r, c_{1r}, c_{2r}, ... c_{nr}, tali che

$$j_1^r = a_r + b_r i + c_{1r} j_1 + c_{2r} j_2 + \dots + c_{nr} j_n \tag{3}$$

sicchè, facendo variare r da 2 ad n, i simboli j_2, ... j_n sono le radici del sistema di $n-1$ equazioni lineari ad altrettante incognite:

$$c_{2r} x_2 + \dots + c_{nr} x_n = j_1^r - c_{1r} j_1 - (a_r + b_r i) \tag{4}$$

e quindi ciascuno di essi è esprimibile *razionalmente* mediante i coefficienti dei primi membri delle (4), che sono numeri *reali*, e mediante i secondi membri delle (4), in cui (oltre a numeri *reali* e ad « i ») intervengono soltanto le potenze di « j_1 », con esponenti da 1 ad n.

Ora, se nella (3) si pone $r = n + 1$ ed in essa si sostituiscono codeste espressioni dei simboli j_2, ... j_n, allora il simbolo j_1 è *una radice* di un'equazione ad un'incognita, di grado $n+1$ ed a coefficienti *complessi ordinari*, e quindi anch'esso è *un numero complesso ordinario*. Infatti: pur considerando codesta equazione di grado $n+1$ entro il corpo di numeri designato con C, essa non può avere alcun'altra radice, oltre alle $n+1$ radici dell'equazione stessa considerata, nel corpo complesso ordinario.

4. Quanto è stato detto per il simbolo « j_1 », vale per *ciascuno* dei simboli

$$j_1, j_2, \dots j_n$$

conforme alla tesi.

ALESSANDRO PADOA

Recensioni e Note bibliografiche

Unicuique suum

Nel « Periodico » del marzo p. p. abbiamo pubblicato una recensione delle *Lezioni di Analisi* di FRANCESCO SEVERI, collocandole fra i nostri migliori trattati scolastici universitari, e mettendone in luce molteplici pregi. Ma non abbiamo avuto la fortuna di appagare l'A., il quale — recensendo a sua volta l'opera propria [1] — ci fa intendere che essa possiede pregi scientifici e didattici di gran lunga più eminenti, incomparabili con quelli delle opere analoghe di altri, pure illustri, matematici.

Così sia! Non abbiamo alcuna voglia di menomare il Collega, svalutando gli elogi dei suoi recensori stranieri, in cui si vedono prefigurati i giudizii della posterità!

Dobbiamo soltanto rispondere ad un punto che ci tocca personalmente.

Nella nostra analisi, rilevando la revisione dei fondamenti della geometria algebrica svolta dall'A., ricordavamo che una analoga revisione, secondo altre vedute, era stata intrapresa da ENRIQUES e CHISINI; e richiamavamo ad esempio, il principio di PLUECHER-CLEBSCH sulla compatibilità delle equazioni [2]. Con questo semplice ricordo non volevamo diminuire i meriti dell'A. e neppure rimproverarlo di non averci citati; invero l'omissione o dimenticanza ci era dispiaciuta tanto meno poichè neppure vedevamo citato CORRADO SEGRE, da cui l'A. riprende direttamente l'interpretazione geometrica del metodo d'eliminazione di KRONECKER e MOLK.

---

[1] In « Bollettino di Matematica », settembre 1934, p. LVI.

[2] *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* L. I, cap. III, § 26; (vol. I, 1ª ed. 1915, 2ª ed. 1929, pp. 146-53).

Ma ora il SEVERI, per affermare un proprio diritto di priorità assoluta — il diritto d'ignorare tutti i precedenti — vuole negare ed annullare i contributi altrui: nell'ENRIQUES-CHISINI — egli dice — le dimostrazioni dei fondamenti della geometria algebrica, e in particolare del principio di PLUECKER-CLEBSCH, sono « soltanto... approssimative », che vuol dire « errate » o quanto meno « non rigorose ».

Che cosa ci manca? e — se mai — che cosa occorrerebbe a completar la lacuna?

Il nostro critico non lo dice, e non lascia indovinare con quale lente sottile abbia scorto il « fuscello nell'occhio del suo fratello ».

Giova perciò riportarci alle pagine 146-53 delle nostre Lezioni. Seguendo l'ordine induttivo che risponde alla mentalità degli autori, vi si trova anzitutto la questione della compatibilità dei sistemi di equazioni lineari, caso elementare da cui il principio di PLUECKER-CLEBSCH trae origine. Quindi si esaminano le difficoltà d'ordine delicato che presenta l'estensione del ragionamento algebrico ai sistemi non lineari. E dopo ciò, evitando le complicazioni indicate, viene formulato in maniera precisa, rigorosamente e semplicemente dimostrato per via geometrica, il criterio di compatibilità di PLUECKER-CLEBSCH pel caso significativo dei sistemi di equazioni del tipo $y_i = \psi_i(x_1 \ldots x_n)$, da cui dipendono le applicazioni al problema delle forme canoniche, svolte nel libro.

Se pur ci si fermasse qui, l'autore di una trattazione più generale non potrebbe ad ogni modo annullare questo precedente, poichè — quand'anche si ponga dal punto di vista del logico che non ritiene acquisita la conoscenza d'una verità finchè non sia rigorosamente dimostrata — recherebbe soltanto un *complemento* o una maggiore *estensione* a ciò che è stato stabilito da altri. Ma, a pagina 152 delle Lezioni, questo complemento è pure indicato: enunciando la forma geometrica più generale del principio di PLUECKER-CLEBSCH, e segnando la via della dimostrazione; basta sostituire allo S_n degli x una varietà algebrica V_n qualsiasi!

Ci limitiamo a questa difesa di un punto preciso del nostro lavoro. Vorremmo ancora parlare di altre cose, toccate dal SEVERI nella sua autorecensione: del concetto della linea intuitiva (che non può adeguarsi alla linea-striscia del disegno), e della mentalità logica astratta in confronto colla mentalità intuitiva e induttiva, e nei rapporti colla didattica. Ma preferiamo tacere, se non si può discuterne fuori dalle preoccupazioni personali, con quella serenità amichevole che sola rende proficue le discussioni scientifiche.

F. E.

EDMUND LANDAU: *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.* P. Noordhoff, Groningen, 1934, pp. 368, R. M. 20.

A distanza di pochissimi anni dalla pubblicazione delle sue « Grundlagen der Analysis », E. LANDAU presenta ora ai matematici questa introduzione al Calcolo differenziale e integrale. Delle « Grundlagen » essa è una naturale continuazione; e ne conserva infatti lo spirito ed il metodo. I ricorsi all'intuizione vi sono completamente banditi: tutto procede con perfetto rigore logico e in modo puramente aritmetico, come piaceva al KRONECKER. La trattazione è estremamente sintetica; le definizioni e gli enunciati dei teoremi sono dati in forma chiara, ma stringata; le dimostrazioni si svolgono con la maggiore rapidità. I vari capitoli sono costruiti quasi tutti secondo uno stesso schema, e ciascuno di essi si apre con una introduzione breve e briosa, in un tono discorsivo tutto interrogativi ed esclamazioni, nella quale il lettore è condotto naturalmente verso quei concetti che poi vengono posti, con la massima precisione, nelle definizioni e svolti nei teoremi.

L'A., pur di non rinunciare a procedere sempre senza lacune e in forma puramente logica, e per non dovere accrescere troppo la mole del libro, ha tralasciato completamente di trattare alcuni argomenti che fanno parte degli ordinari corsi di Analisi Infinitesimale, come gli integrali doppi e multipli, le equazioni differenziali, le applicazioni geometriche. Ma gli argomenti che svolge li dà con una compiutezza veramente ammirevole; cosicchè i vari capitoli riescono assai più ricchi di enunciati di quanto non lo siano generalmente nei trattati di Analisi. Sono, inoltre, riportati teoremi ed esempi che, pur non essendo indispensabili per l'ulteriore esposizione, si possono ottenere mediante i primi elementi del Calcolo, e che sono notevoli o perchè trovano applicazione negli studi moderni dell'Analisi matematica o perchè servono a chiarire alcuni concetti fondamentali e in un certo senso caratteristici della matematica moderna. Così, per esempio, viene dimostrata, col sussidio di una funzione data da VAN DER WAERDEN, la proposizione di WEIERSTRASS sull'esistenza di funzioni continue ovunque mancanti di derivata; e vengono stabiliti il teorema di DARBOUX sulle derivate, l'esistenza di una funzione ovunque derivabile, con derivata sempre discontinua, il teorema di VAN DER CORPUT e LANDAU, ecc. ecc.

Infine, due interi capitoli sono dedicati alla funzione *Gamma* ed alla serie di FOURIER.

La mancanza di ogni rappresentazione geometrica e di esempi tratti dalla geometria e dalla meccanica rendono di certo il libro un po' difficile ed arido per chi cominci lo studio del Calcolo infinitesimale; ma quest'opera riuscirà veramente preziosa per gli studiosi già iniziati nel Calcolo differenziale e integrale, i quali vi troveranno anche le cose ad essi già note esposte in una forma originale, ricca di finezze; e sicuramente sarà poi di grande vantaggio agli allievi del LANDAU, che vi rivedranno, brillantemente e sinteticamente riprodotte, le lezioni del Maestro, sulle quali potranno, con molto profitto, tornare a riflettere.

Questo libro, frutto di 32 anni di insegnamento e di lunghe meditazioni, è un'opera assai notevole per l'utilità che arrecherà agli studiosi e per la decisa impronta di originalità che l'A. ha saputo dare ad ogni capitolo.

L. TONELLI

Notizia

Con la fine del passato anno accademico, per raggiunti limiti di età, il prof. GIULIO VIVANTI lasciava la cattedra universitaria, tenuta per quaranta anni, successivamente a Messina, Pavia e Milano.

In questa circostanza colleghi, discepoli ed estimatori hanno voluto manifestargli tutta la loro devozione, e — seguendo il desiderio espresso dall'illustre Maestro, che nulla voleva per sè — una somma raccolta con pubblica sottoscrizione è stata devoluta in favore dei giovani laureati, con la fondazione di un **premio perpetuo**, che si intitola al nome di Giulio Vivanti.

Questo premio è biennale, consiste nei frutti (L. 1100) della somma raccolta, ed è a favore del miglior laureato, da non più di due anni, in matematica applicata o in matematica e fisica applicate presso la R. Università di Milano; sarà conferito per la prima volta alla fine dell'anno 1935-XIV.

Lo statuto della fondazione, già approvato dal Consiglio di Amministrazione della R. Università di Milano, attende ora la sanzione superiore.

Questioni

Questioni proposte.

278. Se una quartica piana C_4 ha tre punti doppi, H, K, L e se esiste un quadrangolo inscritto avente HKL per triangolo diagonale, i sei flessi della C_4 giacciono in H, K, L. In tal caso ogni altro punto della C_4 è vertice di un quadrangolo del tipo suddetto.

P. CATTANEO

279. Date due ellissi simili e coassiali, trovare una corda della maggiore che sia tangente alla minore ed abbia una lunghezza assegnata.

Analizzare se e come possa essere generalizzato il problema.

O. C.

280. Un arco OA di una linea piana c viene proiettato da un punto P preso sulla normale in O, nel segmento OA' della tangente in O.

Si indichi come deve essere preso P affinchè, al tendere di A ad O, la differenza tra l'arco OA ed il segmento OA' sia infinitesima di ordine massimo rispetto ad uno qualunque dei due. Inoltre si determini quale è la parte principale di questo infinitesimo.

G. ASCOLI

281. Risolvere l'equazione

$$x^4 - 45x^3 + 630x^2 - 3240x + 5184 = 0.$$

Si chiede la ricerca metodica delle radici della equazione, senza far ricorso alle formule risolutive.

O. RESTA