Enriques, Federigo

La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (VI) **XXIII** (1936), pp. 459-462.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 aprile 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine.* Nota[1] del Socio F. ENRIQUES.

1. Sopra una superficie algebrica irregolare, di generi, geometrico e numerico, p_g e p_a $(p_g > p_a)$, un sistema lineare regolare $|C|$ di curve, di genere π, di grado n e di dimensione $r = p_a + n - \pi + 1$, è contenuto in un sistema continuo $\{C\}$ di dimensione $p_g + n - \pi + 1$, costituito di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti; la serie caratteristica del sistema lineare essendo non completa, di deficienza $p_g - p_a$, mentre la seria caratteristica del sistema continuo riesce completa.

Questa proprietà caratteristica delle superficie irregolari, è stata da me dedotta dal computo delle curve infinitamente vicine ad una C, mostrando appunto che vi è una curva siffatta che passa per ciascun gruppo della serie caratteristica di $\{C\}$. La dimostrazione così indicata in una Nota dell'Accademia di Bologna del 1904, fu allora accettata dai geometri e il Severi ne produsse poco appresso una variante fondata sullo stesso concetto; mentre il Castelnuovo e il Severi medesimo sviluppavano le conseguenze del teorema in ordine all'esistenza degli integrali semplici di Picard annessi ad una superficie irregolare ecc. Più tardi (nel 1912) H. Poincarè forniva una nuova dimostrazione del teorema di cui si discorre, per via trascendente.

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

Tuttavia la dimostrazione cui ho accennato presenta una lacuna, che è stata messa in evidenza dalla critica più recente del Severi [1]: l'esistenza di curve infinitamente vicine alla C non porta necessariamente che queste appariscano come curve infinitamente vicine a C entro un sistema continuo; in generale la dimensione di una varietà algebrica V non si può dedurre dalla semplice conoscenza che un punto generico ha, sopra V, un intorno costituito di ∞^r punti infinitamente vicini: giacchè questa dimensione risulterà minore di $r+1$, se la V sia definita come varietà comune di più ipersuperficie che si tocchino fra loro.

Riesaminando la cosa nelle mie « Lezioni sulla classificazione delle superficie algebriche ... » redatte dal prof. Campedelli [2], io facevo osservare tuttavia che la deduzione da me tratta nel 1904 deve conservare il suo valore, se si ammetta che le curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica abbiano, per così dire, una reale esistenza, e che su di esse si possa operare, come sulle curve al finito, per somma e sottrazione. Imperocchè, essendo C_1 una curva infinitamente vicina a C e disequivalente da essa, l'operazione $+C_1-C$, successivamente ripetuta, varrà a definire, nell'intorno di una curva K qualsiasi, una serie di curve infinitamente vicine, successive e ciò porta di conseguenza che appunto la K debba appartenere ad una serie continua non lineare, entro la quale la curva K_1 - definita nell'intorno del 1° ordine di K - sia vicina a K.

Restava però da giustificare la verità intuita: che si può effettivamente operare sopra le curve infinitamente vicine appartenenti ad una superficie, per somma e sottrazione. E questo è appunto lo scopo della presente Nota, la cui esposizione verrà più largamente spiegata nei « Rendiconti » del Seminario della R. Università di Roma.

2. Prendiamo le mosse dal caso dei gruppi e delle serie lineari appartenenti ad una curva.

Se si procede nel modo ordinario sembra a prima vista che p. es. la sottrazione di due gruppi infinitamente vicini G e G_1 dalla serie segnata sopra una curva f dalle curve d'ordine m riesca impossibile. Perchè le curve d'ordine m che toccano f nei punti del G segano, in verità, su f, non la serie ottenuta sottraendo $G+G_1$, ma quella ottenuta sottraendo $2G$, indipendente affatto della scelta che si faccia di un G_1 nell'intorno di G.

Ciò non pertanto si riesce allo scopo indicato riferendosi alla varietà V jacobiana della f, i cui punti rispondono ai gruppi di p punti della curva di genere p: sulla quale varietà i punti infinitamente vicini vengono definiti in modo preciso dalle note condizioni differenziali. Infatti la varietà V possiede, com'è noto, un gruppo ∞^p di trasformazioni birazionali permutabili,

(1) « Rendiconti Lincei », V, 30 (1921).

(2) « Rendiconti del Seminario matematico di Roma », 1934.

sicchè due punti infinitamente vicini A e A_1, dati su V, definiscono una trasformazione infinitesima (AA_1) generatrice del gruppo, nel senso di S. Lie; di conseguenza anche per ogni altro punto B di V, resta definita una traiettoria del gruppo generato dalla trasformazione suddetta (AA_1), e quindi una serie di punti successivi $B_1, B_2, B_3, \cdots$ infinitamente vicini a B negli intorni d'ordine $1, 2, 3 \cdots$. È chiaro che la trasformazione (AA_1) dove A e A_1 rispondano ai gruppi G e G_1 di f, definisce precisamente l'operazione $+ G_1 - G$, che applicata ripetutamente a un altro gruppo di p punti, conduce ad una serie di gruppi successivi, vicini ad esso.

Non vi è difficoltà a passare dai gruppi di p punti alle serie non speciali g_n^{n-p} sopra f: anche per queste verrà similmente definita l'operazione $+ g_1 - g$, dove g_1 sia una serie vicina a g_1, e, a partire da un'altra serie qualunque, una successione di serie infinitamente vicine che ne derivano.

3. A quel modo che si è fatto sopra per i gruppi di punti e per le serie non speciali sopra una curva, è lecito definire le curve infinitamente vicine sopra una superficie, in relazione ad una serie continua di curve $\{C\}$: in questo caso le curve C_1, vicine a una C nell'intorno del 1° ordine, sono definite dai modi di avvicinamento a C entro $\{C\}$.

Nonostante la contraria apparenza non si esce da questo modo di definizione quando si trovano le curve infinitamente vicine ad una C disequivalenti ad essa, sia valendosi (come nella mia dimostrazione originale del 1904) di una rappresenzione sul piano multiplo, sia valendosi di curve spezzate, vicine ad una $C + K$, sopra la superficie. Il confronto di questi due modi di definizione vale ad assicurare che una « curva C_1 infinitamente vicina a C » è un ente ben definito, che non dipende dalla scelta del sistema ausiliario $|K|$.

Ora due curve infinitamente vicine, C e C_1, segneranno sopra la curva K di un sistema ausiliario $|K|$, due serie lineari infinitamente vicine, g e g_1, d'un certo ordine m, che potremo supporre non speciali. E si può dimostrare il lemma fondamentale:

Se le serie g e g_1 segnate dalle curve C e C_1 sopra le K *sono equivalenti, le due curve* C *e* C_1 *sono esse stesse equivalenti, cioè appartengono ad un fascio lineare.*

La dimostrazione, che svilupperò nella Memoria del Seminario matematico di cui sopra ho detto, si dà costruendo anzitutto un sistema lineare di curve, $L, |L| = |C + iK|$, che seghino sulle K variabili d'un fascio i gruppi delle g'_m definite da C e C_1. Si trova in $|L|$ un sistema lineare di curve dotato di una curva fondamentale composta di K del fascio, e – staccando queste – un fascio cui appartengono C e C_1.

4. Come conseguenza del lemma sopra enunciato, due curve infinitamente vicine, C e C_1 disequivalenti, segano sopra le K di un sistema lineare ausiliario, gruppi non equivalenti. Se, come sopra, la serie segata da

$|C|$ sulle K si suppone essere una serie non speciale, contenuta in una serie completa $g = g_m^{m-\pi}$, resta quindi definita sopra ogni K una successione di serie $g_1, g_2, g_3 \cdots$, vicine alla g negli intorni d'ordine $1, 2, 3 \cdots$.

Si tratta di costruire delle curve, $C_2, C_3 \cdots$, vicine alla C, e successive a C_1, che seghino su K gruppi delle serie indicate. Per riuscire a questo scopo conviene sostituire alla C una curva L che si otterrà come luogo dei gruppi G_m di g costretti a passare $m - \pi$ volte per un punto A, base per un fascio di K. Qui la L viene generata da gruppi di π punti variabili colle K (di genere π) del detto fascio; e l'operazione $+ g_1 - g$ porta su ogni K codesto gruppo generatore G variabile in gruppi successivi $G_1, G_2, G_3 \cdots$ che generano curve $L_1, L_2, L_3 \cdots$, infinitamente vicine alla L negli intorni d'ordine $1, 2, 3 \cdots$.

Quando si sono costruite codeste curve infinitamente vicine alla L, negli intorni successivi, si riesce anche a costruire le curve infinitamente vicine a C e successive a C_1, bastando all'uopo considerare le curve vicine a $L + C$.

Infine, avendo provato che, per ogni curva C_1 vicina alla C, vi sono curve successive negli intorni d'ordine $2, 3 \cdots$ (e seguentisi sopra rami lineari) ne deriva che la C appartiene ad un sistema continuo $\{C\}$, c. d. d.

Meccanica. — *Sui postulati della seconda relatività.* Nota di G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.