Enriques, Federigo

Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica

Rend. Sem. Mat. Univ. Roma (IV) **I** (1936), pp. 1-9.

Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica

Memoria di FEDERIGO ENRIQUES (a Roma)

SUNTO: *Si stabilisce la nozione di curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica, si mostra che su di essa si può operare per somma e sottrazione e si rende così pienamente rigorosa una precedente dimostrazione della proprietà caratteristica delle superficie irregolari.*

1. — Nella dimostrazione della proprietà caratteristica delle superficie irregolari, di generi geometrico e numerico p_g e p_a, cioè che esse contengono sistemi continui di curve formati da $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti, occorre valutare il numero delle curve del sistema continuo che sono infinitamente vicine ad una data curva K, e mostrare che esse segano sopra K la serie caratteristica completa. Ma a questa dimostrazione, che ho fornita nella mia Nota della R. Accademia di Bologna del 1904, e che dapprima fu accettata da tutti ed anzi riesposta con lievi modificazioni di forma, si è mossa poi l'obiezione che le curve infinitamente vicine a K (la cui esistenza resulta dalla compatibilità di condizioni sovrabbondanti) non portano necessariamente l'esistenza di serie continue di curve, ad esse successive. Per spiegare il dubbio: se si definisce, per esempio, una curva come intersezione di due o più superficie, non si può dire che sopra la curva così definita si abbia sempre *un* sol punto infinitamente vicino ad un punto dato; se ne avranno invece ∞^1 se la detta curva è linea di contatto delle superficie definitrici: in questo caso, dunque, non vi sono altri punti successivi infinitamente vicini ad un punto che sia preso esso stesso vicino ad un punto proprio della curva e fuori della tangente.

Riesaminando la cosa nelle mie «*Lezioni sulla classificazione delle superficie...*», redatte da L. CAMPEDELLI (*), io facevo osservare tuttavia che la conclusione da me tratta deve conservare il suo valore, se si ammetta che le curve infinitamente vicine ad una data sopra una superficie posseggano una effettiva esistenza e che su di esse si possa operare, come sulle curve al finito, per somma e sottrazione. Imperocchè, essendo C_1 una curva infinitamente vicina a C e disequivalente da essa, l'operazione

(*) *Rendic. del Seminario Matematico della R. Università di Roma*, 1934. vi pure si trovano i riferimenti bibliografici sull'argomento.

$+ C_1 - C$, successivamente ripetuta, varrà a definire, nell'intorno di una curva K qualsiasi, una serie di curve infinitamente vicine $K_1\ K_2\ K_3 \ldots$ appartenenti ad un intorno comunque elevato, e ciò porta di conseguenza che appunto la K debba appartenere ad una serie continua non lineare, entro la quale K_1 sia vicina a K.

Restava però da giustificare la verità intuita: che si può effettivamente operare sopra le curve infinitamente vicine di una superficie per somma e sottrazione. E questo è appunto lo scopo della presente Nota.

2. — Prendiamo le mosse dal caso dei gruppi di punti e delle serie lineari appartenenti ad una curva.

Si osserverà anzitutto che la maniera ordinaria di sommare e sottrarre le serie appartenenti ad una curva cade in difetto quando si tratti di gruppi o di serie infinitamente vicini. Giacchè, se fra le curve d'un certo ordine che passano per i punti di un certo gruppo G si considerano quelle tangenti alla curva fondamentale nei punti del G, si viene a sottrarre dalla serie segata, non già un gruppo infinitamente vicino al G, ma il G stesso.

Da ciò non si deve concludere che dunque i gruppi di punti o le serie lineari infinitamente vicini sopra una curva data non hanno reale esistenza, e che — ad ogni modo — non si può operare su di essi per somma e sottrazione: la legge di continuità impera nel campo algebrico e perciò deve piuttosto ammettersi *a priori* che, mediante considerazioni convenienti, gli enti e le operazioni di cui si tratta dovranno riuscire bene giustificati. E anzitutto osserviamo che i gruppi di punti G_m (costituiti di m punti) infinitamente vicini ad un gruppo dato, sopra una curva, riusciranno bene definiti mediante espressioni e condizioni differenziali, siccome elementi o «punti» della varietà rappresentativa dei gruppi di m punti della curva.

Supponiamo che la curva sia del genere p, e consideriamo, in particolare, la varietà jacobiana V che rappresenta i gruppi di p punti, G, della detta curva. È noto che questa V possiede un gruppo continuo ∞^p di trasformazioni birazionali permutabili, che si definiscono sopra la curva mediante la somma di una differenza $G_1 - G$ fra due gruppi. Ora, se il secondo gruppo G_1 venga infinitamente vicino al primo, l'operazione $+ G_1 - G$, non cesserà di designare una trasformazione della V, in modo preciso una trasformazione infinitesima generatrice del gruppo, nel senso di S. LIE. Per mezzo di questa trasformazione infinitesima il gruppo G darà luogo ad una serie analitica di trasformati, entro la quale riescono ben definiti i gruppi, G_2 G_3 . . . , successivi a G_1, che cadono negli intorni di 2° e poi di 3° ordine di G, e così via.

Dopo ciò riesce chiaro come debbano trattarsi le serie lineari g^r_m complete, infinitamente vicine, appartenenti alla curva: almeno nel caso più semplice delle serie non speciali, la loro somma e sottrazione si riduce infatti alla somma e sottrazione dei gruppi di p punti che si ottengono rispetto ad esse come residui di $m-p$ punti fissi. Qualora si voglia operare su serie speciali, converrà ampliarle coll'aggiunta di punti fissi, in guisa che diventino non speciali.

Ma per noi basta tener fermo che: data sopra una curva K una serie non speciale $g^r_m = g$ ed una serie ad essa infinitamente vicina $g_1 = (g^r_m)$, (definita, come si è detto, sulla varietà rappresentativa), resta determinata una serie continua (analitica) di serie, ed entro a questa le serie successive a g_1, cioè le g_2 g_3 . . . vicine alla data g negli intorni di 2°, di 3° ordine ecc.

In luogo dell'operazione $+G_1-G$, si può egualmente eseguire, sui gruppi di p punti della curva (o sulle sue serie non speciali di dato ordine), l'operazione inversa: $+G-G_1$. La quale definisce a partire da G una serie continua (analitica) di gruppi di p punti, *complementari* di G_1, G_2, G_3 . . . , che possiamo indicare con $\overline{G}_1$ $\overline{G}_2$ $\overline{G}_3$ . . . , dove si ha, in generale

$$\overline{G}_i = 2G - G_i.$$

3. — Sopra una superficie F, di genere geometrico p_g e di genere numerico p_a, si considerino due sistemi lineari regolari di curve $|C|$ e $|K|$, che converrà scegliere in guisa da soddisfare a talune relazioni, come preciseremo più avanti. Indicheremo con n, π, r i caratteri (grado, genere, dimensione) di $|K|$, con ν, $\tilde{\omega}$, ρ i caratteri di $|C|$, con m il numero delle intersezioni di una C con una K.

Entro $|C|$, ovvero anche dentro un sistema continuo non lineare $\{C\}$, che appartenga ad F, sono definite le curve infinitamente vicine ad una C (e precisamente ∞^{R-1} se $\{C\}$ ha la dimensione R): dico le C_1 che appartengono all'intorno del 1° ordine di C; similmente vengono definite le C_2 nell'intorno del 2° ordine, successive alle C_1 (come supporremo nel seguito, sopra rami lineari dell'ente che ha per «punti» le C) e così via.

Ma le curve infinitamente vicine ad una C sopra F si possono definire anche in altro modo.

Proiettiamo la F sopra un piano multiplo, dotato di una certa urva di diramazione D. Le C si proietteranno in curve C' di un rto ordine s, con un certo numero d di punti doppi variabili, occanti D in un certo numero i di punti. Allora *esiste* sul piano na curva C'_1, dello stesso ordine s, con d punti doppi e tangente arimente a D in i punti, la quale è infinitamente vicina a C' e assa per un gruppo scelto ad arbitrio della serie caratteristica . C' in $\{C'\}$, immagine della serie caratteristica completa della su F.

La C'_1 è ben definita sul piano, come infinitamente vicina C' in una serie continua $\{C'\}$. *È lecito dire* che essa definisce na curva dello stesso ordine di C, *infinitamente vicina a questa* C *opra* F ?

Per giustificare tale definizione occorre mostrare che a C'_1 riponde sopra F una curva *riducibile* in due parti : una C_1 infinitamente vicina a C e l'altra, $\overline{C}_1$, vicina alla curva $\overline{C}$ coniugata di C nell'involuzione I i cui gruppi rispondono su F ai punti del piano multiplo.

A tale scopo considereremo, accanto al sistema $|C|$ su F, l sistema K, che verrà rappresentato sul piano multiplo da un istema continuo di curve K', con un certo numero δ di punti loppi variabili, toccanti la D in un certo numero t di punti. I due istemi $\{C'\}$ e $\{K'\}$ formati dalle immagini delle C e delle K, saranno contenuti in un sistema continuo di curve L', immagini lelle curve L del sistema lineare $|L| = |C + K|$, aventi un certo numero $\Delta = d + \delta + h$ di punti doppi variabili, ed $i + t$ contatti con D : h designa il numero dei punti comuni ad una C' e ad una K' (e quindi doppi per la $L' = C' + K'$) che cadono fuori degli m punti immagini delle intersezioni di C e K sopra F.

Ora esistono nel sistema delle L' delle curve infinitamente vicine ad una $C' + K'$, spezzate nella C'_1 e in una K'_1 vicina ad una K'. Invero si considerino le L'_1 infinitamente vicine a $C' + K'$: esse sono ∞^{R-1} se si designa con R la dimensione di $|L|$ su F, $R = n + \nu + 2m - (\pi + \tilde{\omega} + m - 1) + 1$, e lo staccamento da esse di C'_1 importa $n + m - \pi + 1$ condizioni lineari, $n + m - \pi$ essendo la dimensione della serie lineare — supponiamo non speciale — che le L'_1 segano su C'_1 : vi sono pertanto $\infty^{\nu - \tilde{\omega} + p_a}$ $(= \infty^{\rho - 1})$ curve $C'_1 + K'_1$ composte della C'_1 e di una curva infinitamente vicina a K'. Così dunque la curva C_1 infinitamente vicina alla C, sopra F, riescirà definita come parte comune ad una L_1 corrispondente a $C'_1 + K'_1$ e alla $C_1 + \overline{C}_1$ corrispondente a C'_1 e appartenente all'involuzione I.

Di qui segue in particolare che: le curve infinitamente vicine ad una C, sopra F, nell'intorno del 1° ordine, sono ben definite dai gruppi della serie caratteristica che esse segano sopra la C: per un gruppo della serie passa una di codeste curve C_1.

Ciò che si è detto per le curve C_1 di F infinitamente vicine ad una C nell'intorno del 1° ordine, si può estendere alle curve C_2, successive alle C_1 e quindi infinitamente vicine alle C nell'intorno del 2° ordine e così via; e pel nostro scopo basta limitarsi a considerare curve successive alle C su rami lineari (entro l'ente che ha per «punti» le C, C_1, C_2 ecc.). Occorre solo avvertire che, mentre le curve C_1 vicine alle C nell'intorno del 1° ordine esistono certo, in corrispondenza ad ogni gruppo della serie caratteristica di C, invece delle C_2 successive ad una C_1, e tanto più delle C_3 ecc. non si può affermare a priori l'esistenza. Ma si potrà dire che esiste una C_2, successiva ad una data C_1, se nel piano rappresentativo si verifichi l'esistenza di una curva C'_2 successiva a C'_1, che appartenga al sistema delle C', possedendo come queste δ punti doppi variabili e toccando la curva di diramazione D in τ punti: condizioni quest'ultime che, a priori, dato il loro numero, non possono venire soddisfatte, se alcune di esse non risultino dipendere dalle rimanenti, come accade appunto per i contatti delle C_1.

Le C_2 definite come sopra, se esistono, possono anche definirsi come parti di curve L_2 (appartenenti al sistema lineare $|L| = |C + K|$) infinitamente vicine e successive ad una $L_1 = C_1 + K_1$; l'ipotesi d'esistenza implica qui che il detto sistema lineare $|L|$ contenga curve spezzate (con m nodi) vicine ad una curva spezzata $C + K$, nell'intorno del 2° ordine, ciò che non si può affermare a priori.

Notiamo ora che le curve C_1, C_2, C_3 ... infinitamente vicine ad una C sopra la superficie F, ammesso che effettivamente esistano, segheranno sopra una curva K qualsiasi gruppi di punti infinitamente vicini (e successivi) al gruppo sezione di C. Noi ci proponiamo di riconoscere che, sotto opportune condizioni, determinando, sulle curve K di un fascio, i gruppi (successivi) vicini ai gruppi sezioni di C, si possono effettivamente costruire delle curve C_2, C_3 ... infinitamente vicine alla C, nel senso innanzi definito.

4. — Premettiamo un LEMMA FONDAMENTALE: *Due curve infinitamente vicine* C *e* $\mathrm{C_1}$, *appartenenti alla superficie F, che seghino sopra le curve* K *di un sistema lineare gruppi equivalenti, sono equivalenti*, cioè appartengono ad un fascio.

Su ogni K resta definita da C e C_1 una serie lineare g'_m. ʼrendiamo i due gruppi di questa serie che passano per due punti l e B di una K, e un fascio di curve K, di cui A e B sieno fra i ·unti base. I luoghi di codesti gruppi G_m saranno due curve M e N; quindi fra le curve K del detto fascio verrà determinata .na proiettività in cui sono omologhi i gruppi sezioni di C, M e N. n generale il luogo dei gruppi G_m corrispondenti ad un G_m scelto opra una K sarà una curva L; e le L così definite formeranno un ascio lineare (giacchè per ogni punto di F ne passa *una*). Ora le L aranno curve equivalenti a $C + r K$ $(r = 0, 1, 2 \ldots)$, diciamo:

$$L = C + r K,$$

Supponendosi che il sistema (K) di dimensione r non contenga ∞^{r-1} curve spezzate.

Se $r = 0$ le C e C_1 resultano equivalenti appartenendo al ascio delle L. Converrà dunque discutere l'ipotesi $r > 0$, e — per emplicità di discorso — ci limiteremo a supporre $r = 1$, e poi $= 2$.

Sia $r = 1$. Siccome la curva C è luogo di gruppi G_m omoоghi, segati sulle K del fascio, così, per ragioni di continuità, essa ·errà ad apparire come una parte di una L spezzata nella C stessa in una K del fascio:

$$\overline{L} = C + \overline{K}_1$$

$\overline{L}$ segando le altre K del fascio nel G_n base.

Analogamente il luogo descritto dai gruppi G_m sezioni delle $\overline{L}$ con C_1 sarà una curva $\overline{L}_1$, infinitamente vicina ad $\overline{L}$, entro il ascio delle nostre L, e quindi si avrà:

a) o $\overline{L}_1 = C_1 + \overline{K}$, avente colla $C + \overline{K}$ la parte fissa omune $\overline{K}$,

b) ovvero $\overline{L}_1 = C_1 + \overline{K}_1$, dove K_1 designa la curva infiitamente vicina a $\overline{K}$ entro il fascio col detto G_n base (giacchè ıvero la curva $\overline{L}_1$ sega le K fuori di C_1 nei punti del G_n).

Nell'ipotesi *a*) le due curve infinitamente vicine $\overline{L}$ e $\overline{L}_1$, colla ·arte comune $\overline{K}$, determinano il fascio delle L, colla detta parte issa, e quindi si ha un fascio determinato da C e C_1, *c.d.d.*

Nell'ipotesi *b*) si consideri la rete di curve L determinata dai .ue fasci:

fascio definito dalle due curve infinitamente vicine $C + \overline{K}$ $C_1 + \overline{K}_1$ (che è il fascio delle L costruite innanzi),

e fascio costituito dalle curve L che hanno come parte issa la C e come componente variabile una K (passante per il G_n base).

La rete delle L così ottenuta avrà $m + n$ punti base su $\overline{K}$, e perciò avrà come fondamentale la curva $\overline{K}$. Staccandola dalla detta rete si ottiene un fascio a cui appartengono C e una curva infinitamente vicina a C, la quale sega sulle K i gruppi della g'_m vicini ai G_m in sezioni di C e perciò coincide con C_1.

Il ragionamento fatto si estende facilmente all'ipotesi in cui *Sia* $r = 2$. Qui la curva C resulterà, per continuità, come parte di una curva

$$L = C + \overline{K} + \overline{\overline{K}},$$

dove $\overline{K}$ e $\overline{\overline{K}}$ sono due curve particolari del fascio col G_n base.

E si è condotti ad esaminare l'ipotesi in cui la C_1 resulti parte di una curva

$$L = C + \overline{K}_1 + \overline{\overline{K}}_1,$$

dove $\overline{K}_1$ e $\overline{\overline{K}}_1$ sono curve del nostro fascio per G_n, rispettivamente vicine a $\overline{K}$ e a $\overline{\overline{K}}$.

In tale ipotesi costruiremo il sistema lineare ∞^3 di curve L definito:

dal fascio delle due curve

$$C + \overline{K} + \overline{\overline{K}} \quad \text{e} \quad C_1 + \overline{K}_1 + \overline{\overline{K}}_1$$

e dalla rete delle curve aventi come parte fissa la C e come componenti variabili due K per G_n:

$$C + 2K,$$

fascio e rete che hanno a comune la curva

$$C + \overline{K} + \overline{\overline{K}}.$$

Il detto sistema lineare ∞^3 di curve L avrà $2n + 2m$ punti base distribuiti come segue:

$n + m$ punti base su $\overline{K}$ negli n punti del G_n base del nostro fascio di K e nelle m intersezioni di $\overline{K}$ con C,

e altri $n + m$ punti base su $\overline{\overline{K}}$ negli n punti del detto G_n e nelle m intersezioni di $\overline{\overline{K}}$ con C;

perciò codesto sistema lineare ∞^3 avrà come fondamentali le curve $\overline{K}$ e $\overline{\overline{K}}$; staccandole si avrà quindi un fascio di curve a cui apparterranno C e C_1, *c.d.d.*

Analogamente si ragionerà nell'*ipotesi*:

$$r = 3, 4 \ldots$$

5. — Sopra la superfice F potremo scegliere due sistemi li-
ıari di curve (irreducibili) regolari $|C|$ e $|K|$, per modo che
C seghino sopra le K serie non speciali; basta all'uopo supporre
$'|$ abbastanza ampio rispetto a $|K|$, così, per esempio, da con-
nere un multiplo di $|K|$.

Ciò posto sieno C e C_1 due curve infinitamente vicine non
[uivalenti, siccome esistono certo se la superficie è irregolare
$_a < p_g$).

Secondo il teorema dimostrato nel § precedente C e C_1 seghe-
ınno sopra una curva K gruppi di m punti disequivalenti $G = G^{(m)}$
$G_1 = G_1^{(m)}$, i quali definiranno due diverse serie complete non
ıeciali:

$$g \text{ e } g_1;$$

ınseguentemente, mercè l'operazione $+ g_1 - g$, si costruirà una
rie continua (analitica) di serie lineari disequivalenti, entro la
ıale si troveranno le serie (sempre non speciali)

$$g_2 \quad g_3 \ldots .$$

finitamente vicine a g negli intorni di 2°, 3° ordine ecc.

Si scelga sopra una K un gruppo G^n della serie caratteri-
ica, e in questo un punto A. Il punto A contato $m - \pi$ volte
›terminerà un gruppo G^m della serie g, e similmente un gruppo G_1
m punti della serie g_1, e poi un gruppo della g_2, e così via. I
oghi dei gruppi G^m così definiti saranno curve L, L_1, $L_2 \ldots$ dello
esso ordine, passanti un certo numero i di volte pei punti del
' e $m - \pi + i$ volte per A. Infatti è facile riconoscere che se
L tocca una particolare K del fascio col G^n base, in guisa che
G^m generatore corrispondente abbia sulla detta K un punto
ıincidente con un punto del G_n, altrettanto accade per la L_1 e
›r la L_2 ecc.

Colla costruzione precedente abbiamo definito una curva L
ppartenente al sistema lineare $|C + iK|$) e le curve, L_1 L_2 L_3,
finitamente vicine ad essa negli intorni d'ordine 1, 2, 3 . . . ,
to fin che si vuole, delle quali viene così dimostrata la reale
istenza.

Ciò importa che la curva L_1 infinitamente vicina alla L
ı vicina ad L entro una serie continua ∞^1 di curve disequiva-
nti; e poichè L_1 è sostanzialmente una qualsiasi curva infinita-
.ente vicina ad L, disequivalente da essa, resta quindi provato
ıe il sistema lineare $|L|$ appartiene ad un sistema continuo $\{L\}$
ıe ha come serie caratteristica la serie caratteristica completa
ıpra la curva L.

Ma chi guardi la dimostrazione con occhio critico, come si conviene a ragionamenti di questa natura, domanderà non soltanto la prova esplicita che veramente la L_1 da noi costruita appartiene ad uno qualunque dei sistemi disequivalenti di curve vicine ad L, ma anche che L_1 e poi L_2 $L_3 \ldots$, sono effettivamente curve infinitamente vicine alla L nel senso da noi definito nel § 3; poichè invero la costruzione di codeste curve L_1 L_2 $L_3 \ldots$ appare qualcosa di diverso da quella definizione.

Per rispondere al dubbio così sollevato, si prenderà in considerazione il sistema lineare somma $|L+C|$, e dentro di questo si considereranno le curve infinitamente vicine ad una curva spezzata: queste segano la L_1 da noi costruita in tanti punti in quanti segano L, e perciò lo staccamento di L_1 impone ad esse lo stesso numero di condizioni (dimensione di una serie speciale di dato ordine più uno): se ne deduce che fra le curve infinitamente vicine ad $L+C$ del sistema predetto vi sono delle curve spezzate in L_1 (che resta dunque definita come curva infinitamente vicina ad L nel senso del § 3) e in una $\overline{C}_1$ infinitamente vicina a C. Di questa $\overline{C}_1$ si può dire che essa sega sopra le K gruppi $\overline{G}_1$ di una serie *complementare* di quella definita dal gruppo G_1 sezione di C_1 (che era una qualunque delle curve disequivalenti vicine a C): invero, designando con G il gruppo (CK): si avrà:

$$G_1 + \overline{G}_1 = 2\,G\,.$$

Per conseguenza anche $\overline{C}_1$ è, come C_1, una qualunque delle curve disequivalenti vicine a C: giacchè se si pone $\overline{C}_1$ al posto di C_1, si trova C_1 al posto di $\overline{C}_1$.

Ora il ragionamento che precede si estende alle curve infinitamente vicine negli intorni d'ordine superiore. Fra le curve del sistema lineare $|L+C|$, infinitamente vicine alla $L_1 + \overline{C}_1$ (cioè ad $L+C$ nell'intorno del 2° ordine) si troveranno delle curve spezzate, che contengono come parte la L_1, dinnanzi costruita e un'altra parte $\overline{C}_2$ vicina a $\overline{C}_1$ e successiva a C. E, proseguendo, si troveranno curve infinitamente vicine alla C, appartenenti ad un intorno d'ordine comunque elevato, che sono successive alla $\overline{C}_1$, cioè — per quanto si è detto innanzi — ad una qualunque fra le curve disequivalenti, infinitamente vicine alla C. Ciò importa che queste curve infinitamente vicine, che segnano sulla C la serie caratteristica completa, sono curve appartenenti ad effettive serie continue, e quindi che il sistema lineare $|C|$ è contenuto in un sistema continuo $\{C\}$ che ha su C la serie caratteristica completa, e perciò è costituito di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi disequivalenti, *c.d.d.*