Enriques, Federigo

Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie o varietà algebrica

in Scritti matematici offerti a L. Berzolari, Istituto Matematico della Reale Università, Pavia, 1936, pp. 351-352.

SULLE SINGOLARITÀ CHE NASCONO PER PROIEZIONE DI UNA SUPERFICIE O VARIETÀ ALGEBRICA

di FEDERIGO ENRIQUES, a Roma.

1. Gli studi di B. LEVI, O. CHISINI e G. ALBANESE, cui si aggiunge la recente memoria di R. J. WALKER, hanno messo in luce, per vie diverse, ma egualmente sicure, la possibilità di trasformare una superficie algebrica in un' altra, F, priva di singolarità, appartenente ad uno spazio di 5 o più dimensioni. Di qui si suol dedurre, con un semplice computo di costanti, che la superficie può trasformarsi in un' altra, proiezione di F nello spazio ordinario, dotata di *curva doppia nodale con un numero finito di punti tripli*, che sono insieme tripli per la superficie e per la curva. A questo proposito il sig. J. COOLIDGE, in una lettera del Febbraio dell'anno scorso, mi ha espresso il dubbio che — in qualche caso particolare — la proiezione della F risulti dotata, non già di punti tripli, bensì di punti quadrupli o di maggiore molteplicità. Io ho dato allora al sig. COOLIDGE, una risposta, mostrandogli che — senza escludere il suo dubbio nei riguardi delle proiezioni di una superficie dello S_4 — si può tuttavia affermare che *la proiezione generica di una superficie priva di singolarità dello* S_5, *sopra lo spazio ordinario* S_3, *riesce certo priva di punti quadrupli.*

Ritorno ora su questa dimostrazione, che sono riuscito a ridurre ad una semplice osservazione.

Si tratta di stabilire che: *i piani trisecanti una superficie* F *dello* S_5, *non possono riuscire quadrisecanti o* n*-secanti con* $n > 4$.

A tal uopo si consideri la curva C sezione di F con un iperpiano S_4 (la quale non è contenuta in S_3). Occorre riconoscere che i piani che incontrano C in tre punti, non possono incontrarla di conseguenza in $n > 3$ punti.

Infatti, se si neghi la proposizione, proiettando la curva C da un suo punto generico, si avrebbe una curva *gobba* dello S_3, tale che ogni sua corda sarebbe una trisecante: ciò che è notoriamente impossibile [1].

2. L' osservazione precedente si estende al caso delle varietà a più dimensioni e delle loro proiezioni, riuscendo così precisate le singolarità normali che possono attribuirsi ad una ipersuperficie, proiezione di una varietà iperspaziale priva di punti singolari.

---

(1) Cfr. p. es. ENRIQUES - CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni . . .*, Vol. II, p. 289.

Limitiamoci, per semplicità di discorso, al caso delle *varietà di tre dimensioni.* Ammettendo sciolte le singolarità, si assumerà una varietà V, trasformata della data, e *priva di singolarità nello spazio* S_7 a 7 dimensioni. Ora proiettando V, da un piano α dello S_7, in un S_4, si otterrà in generale una ipersuperficie proiezione W, dotata delle seguenti singolarità:

1) una superficie doppia, che proviene dagli S_3 per α incidenti in due punti alla V;

2) una curva tripla, tripla insieme per la varietà W e per la sua superficie doppia; la quale proviene dagli S_3 per α incidenti alla V in tre punti;

3) un numero finito di punti quadrupli, che sono anche quadrupli per la curva tripla di W e sestupli per la sua superficie doppia, i quali provengono dagli S_2 per α incidenti in quattro punti alla V.

Risulta senz' altro dalla proposizione stabilita per le superficie, che *la* W *proiezione generica della* V sopra un S_5, riesce dotata di superficie doppia e di curva tripla, non più che tripla. Ma si vuole *escludere che,* per qualche V particolare, *la* W *abbia a possedere* sempre *dei punti di molteplicità* $n > 4$.

A tale scopo giova ricordare che, se si neghi la proposizione enunciata, ogni spazio S_3 incidente a V in quattro punti sarà di conseguenza incidente ad essa in più che 4 punti. Allora questa stessa proprietà dovrà sussistere per una superficie F sezione di V con un S_6 generico. Quindi, se si proietti F da un suo punto generico, in un sottostante S_5, si avrebbe una superficie dello spazio S_5, per cui ogni piano trisecante riescirebbe quadrisecante: ciò che si è già riconosciuto impossibile.

Roma, 22. XII. 1935 (XIV).