Enriques, Federigo

Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica

Rendiconti Acc. Naz. Lincei (VI) **XXVI** (1937), pp. 193-197.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1937 (Anno XV).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica.* Nota [1] del Socio F. ENRIQUES.

In questa Nota riprendo il tema trattato nella Nota dell'aprile 1936, inserita nel volume XXIII dei « Rendiconti » della nostra Accademia, e nella Memoria pubblicata nel vol. I, ser. IV, fasc. 1, degli « Atti del Seminario matematico di Roma », porgendo una dimostrazione semplicissima di ciò che occorre per stabilire rigorosamente la proprietà caratteristica delle superficie irregolari:

date sopra una superficie irregolare due curve infinitamente vicine disequivalenti, A e A′, costruire nell'intorno del 2° ordine di A una curva A″, successiva ad A′, e poi nell'intorno di 3° ordine una curva A‴ successiva ad A″ e così via.

Il procedimento che qui viene messo in opera si libera da tutti gli espedienti tecnici che mi era occorso adoperare nei lavori sopra indicati e riesce così a soddisfare a quelle condizioni di semplicità che giova richiedere per un teorema fondamentale della teoria delle superficie.

1. – PUNTI INFINITAMENTE VICINI SOPRA UNA CURVA DI GENERE 1.

Se sopra una curva f di genere 1 si fissa un punto A e a questo si fa corrispondere un punto vicino A′, resta determinata una trasformazione infinitesima di prima specie (AA′), che porta un altro punto P di f in un determinato punto P′.

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1937.

Si può costruire P′ operando sopra serie lineari definite su f come segue.

Si assuma un punto B di f: la coppia di punti AB appartiene ad una g_2^1 in cui c'è una coppia $A' B_1$ infinitamente vicina ad AB, che resta definita dal contenere A′; costruito così il punto B_1, si determinerà similmente la coppia della g_2^1 definita da BP che contiene B_1: essa è una coppia $B_1 P'$, in cui il secondo punto è precisamente l'omologo di P nella trasformazione infinitesima (AA′).

Ora questa costruzione si estende in modo da darci il punto A″, omologo di A′ nella trasformazione suddetta e di A nel suo quadrato. A tale scopo si assumerà su f un altro punto C e si considererà la g_3^2 determinata dalla terna ABC, cui appartiene la terna infinitamente vicina (nell'intorno del 1° ordine) $A' B_1 C$: c'è una terna di questa g_3^2 (infinitamente vicina ad ABC nell'intorno del 2° ordine e successiva ad $A' B_1 C$) che resta definita dalla condizione di contenere B_1 e C_1, punto omologo di C nella trasformazione infinitesima (A′ A); questa terna si compone dei punti $B_1 C_1$ e di un punto A″ successivo ad A′ e infinitamente vicino ad A nell'intorno di 2° ordine, che è precisamente l'omologo di A in $(AA')^2$.

Dopo ciò si può ancora costruire il punto A‴ omologo di A in $(AA')^3$ e così via. All'uopo si assumerà su f un'altro punto D, e si considererà la g_4^3 definita dalla quaterna ABCD, cui appartiene la quaterna infinitamente vicina $A' B_1 CD$ e la successiva (nell'intorno di 1° ordine) $A'' B_1 C_1 D$. In questa g_4^3 c'è una determinata quaterna che contiene i punti $B_1 C_1 D_1$, designando D_1 l'omologo di D nella trasformazione (A′ A), e la quaterna così definita (infinitamente vicina ad ABCD nell'intorno del 3° ordine e successiva ad $A'' B_1 C_1 D$) riesce costituita dai punti $B_1 C_1 D_1$ e da un punto A‴, successivo ad A″ (nell'intorno di 3° ordine di A) che è l'omologo di A in $(AA')^3$.

2. – Gruppi di p punti infinitamente vicini sopra una curva di genere p.

Ciò che si è detto per i «punti» di una curva di genere 1, si può ripetere per i «gruppi di p punti» sopra una curva K di genere p. Sieno invero A e B due gruppi di p punti, non speciali e perciò non equivalenti, sopra K, e sia A′ un gruppo di p punti infinitamente vicino ad A: sulla varietà di Jacobi corrispondente a K c'è una trasformazione infinitesima (generatrice del gruppo ∞^p di trasformazioni permutabili) determinata dalla corrispondenza fra A e A′; la trasformazione inversa di questa porta B in un determinato gruppo infinitamente vicino B_1: per costruire B_1 basta considerare la serie lineare g_{2p}^p definita dal gruppo A + B, ed in questa il gruppo infinitamente vicino ad A + B che resta definito dal contenere i p punti di A′; il gruppo dei p punti residui è precisamente B_1. In modo analogo, a partire da un altro gruppo generico di p punti, C, si può costruire il gruppo infinitamente vicino C_1, che gli corrisponde nell'inversa della trasformazione infinitesima (AA').

Ciò posto, per costruire il gruppo A'' omologo di A nella trasformazione (AA'), ovvero corrispondente ad A nel quadrato di (AA'), si procederà come segue.

Si consideri la serie lineare g_{3p}^{2p} determinata dal gruppo di $3p$ punti $G = A + B + C$, ed in questa il gruppo $G' = C + B_1 + A'$ infinitamente vicino ad $A + B + C$, che è definito dal contenere $C + B_1$, e quindi A'. Vi è nella stessa serie lineare g_{3p}^{2p}, un gruppo di $3p$ punti successivi al detto G', ben definito dalla condizione di contenere B_1 e C_1: questo gruppo conterrà appunto, come residuo, il gruppo A'' omologo di A' nella anzidetta corrispondenza infinitesima (AA').

Così procedendo, coll'introdurre accanto a B e C, un altro gruppo D, e il gruppo D_1 che gli corrisponde nella trasformazione infinitesima inversa di (AA'), si potrà definire il gruppo A''' corrispondente ad A'' nella medesima corrispondenza (AA'): infatti il gruppo $A + B + C + D$ determina una serie lineare g_{4p}^{3p}, a cui appartengono i gruppi

$$D + C + B + A \quad , \quad D + C + B_1 + A',$$
$$D + C_1 + B_1 + A'' \quad , \quad D_1 + C_1 + B_1 + A''',$$

che resultano successivi al primo negli intorni del 1°, del 2° e del 3° ordine.

Non importa aggiunger parole per spiegare come si prosegua la costruzione di gruppi successivi A^{IV} ecc.

3. – Gruppi di n punti infinitamente vicini sopra una curva di genere $p < n$.

Ciò che si è detto per i gruppi di p punti appartenenti ad una curva K di genere p, si estende senz'altro al caso dei gruppi di n punti $(n > p)$ o delle serie complete g_n^{n-p} appartenenti alla medesima curva. *A priori* ciò si giustifica mediante l'osservazione che codeste serie possono ritenersi come « punti » di una varietà di Jacobi, identica a quella costituita dai gruppi di p punti della K. Ma si arriva alla stessa conclusione applicando ai gruppi di tali serie lo stesso procedimento adoperato pei gruppi di p punti nel numero precedente.

Se A ed A' designano due gruppi di n punti infinitamente vicini, e non equivalenti, e B e C sono altri due gruppi di n punti ausiliarii, possiamo definire (scegliendolo entro una serie lineare ∞^{n-p}) un gruppo dello stesso ordine n, B_1 infinitamente vicino a B, che insieme ad A' dia un gruppo di $2n$ punti equivalente a $B + A$; e analogamente un gruppo C_1 vicino a C tale che $C_1 + A'$ sia equivalente a $C + A$.

Dopo ciò si costruirà un gruppo A'' successivo ad A' e perciò nell'intorno del 2° ordine di A, considerando, fra i gruppi successivi a

$C + B_1 + A'$, entro la serie lineare definita da codesto gruppo, i gruppi soggetti a contenere C_1 e B_1. Successivamente si potrà costruire un gruppo A''' successivo ad A'' ecc.

Nella costruzione che precede non è affatto escluso che i gruppi ausiliarii $B, C, \cdots$ a cui si ricorre appartengono alla stessa serie completa definita da A.

4. – Curve infinitamente vicine sopra una superficie.

Ora le cose dette in relazione ai gruppi di punti sopra una curva si estendono, senza difficoltà, alle curve appartenenti ad una superficie F.

Sia p_a il genere numerico di F, e $p_g > p_a$ il suo genere geometrico; e sia $|A|$ un sistema lineare regolare di curve, di grado n e di genere π, quindi di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1 ,$$

grande quanto si vuole; ammettiamo anzi, per semplicità di discorso che questo sistema contenga in sè il sistema canonico, in guisa che la sua dimensione possa dedursi da quella di un sistema regolare più ampio $|2A|$ staccando una curva B di questo, su cui il detto sistema segherà una serie più ampia della serie canonica (che sarà completa e non speciale).

Sappiamo che, data la irregolarità di F, esistono curve A' infinitamente vicine ad una A e non equivalenti ad essa. E si tratta di dimostrare che successivamente ad una A', nell'intorno di 2° ordine di A, esistono pure delle curve A'', e poi successivamente a queste delle curve A''' ecc. Cosicchè $A, A', A'' \cdots$ apparterranno ad una serie continua di curve disequivalenti.

A tale scopo assumiamo delle curve ausiliarie $B, C, \cdots$ che possiamo supporre equivalenti alla A. Fra le curve di $|A + B|$ infinitamente vicine ad $A + B$, vi sono delle curve spezzate in A' e in una residua curva B_1: questo è anzi il punto di partenza per costruire le curve A', tenuto conto che la serie caratteristica di A non è completa. Analogamente si costruirà una curva C_1 infinitamente vicina a C, che insieme ad A' costituirà una curva $C_1 + A'$ equivalente a $C + A$. Allora la curva $C + B_1 + A'$ è infinitamente vicina (in un intorno che può riguardarsi del 1° ordine) alla $C + B + A$; e fra le curve successive a $C + B_1 + A'$, appartenenti al sistema lineare $|C + B + A|$ e all'intorno del 2° ordine di $C + B + A$, vi saranno infinite curve contenenti le parti C_1 e B_1 e una residua parte A'':

$$C_1 + B_1 + A'' ,$$

dove A'' è successiva ad A' e quindi ad A nell'intorno del 2° ordine.

Questa deduzione si appoggia sul computo della dimensione del sistema lineare $|C + B + A|$, e di quelli che si ottengono da esso staccando le curve B_1 e C_1; dove si ammette che il sistema somma sia regolare e che le serie segate da $|C + B + A|$ su C_1 e poi da $|B + A + C - C_1|$ su B_1, sieno non speciali: questa ammissione è senz'altro giustificata nelle ipotesi in cui ci siamo messi, dove $|A|$ è più ampio del sistema canonico; invero le serie anzidette sono dello stesso ordine di quelle segate da $|C + B + A|$ su C e da $|B + A|$ su B.

Non vi è alcuna difficoltà a proseguire nella costruzione di una curva A''' successiva ad una A'', e quindi nell'intorno di 3° ordine di A, e così di seguito.

5. – Confronto fra le operazioni sopra le superficie e sopra le curve.

Le operazioni che abbiamo appreso ad eseguire sopra la superficie F si possono confrontare con quelle definite innanzi sopra le curve, assumendo che la F contenga un sistema lineare di curve K, su cui le A seghino gruppi di m punti non speciali. Qui giova riconoscere il *Lemma* « Curve infinitamente vicine sopra la superficie F, le quali seghino sopra le curve K di un fascio lineare gruppi equivalenti, sono equivalenti ».

Infatti se le curve infinitamente vicine A ed A' seghino sulle K di un fascio dei gruppi G e G' equivalenti, verrà definita sopra ogni K del fascio stesso una g'_m, e i gruppi di queste si potranno ritenere come « punti » di una rigata razionale: sopra la quale due curve infinitamente vicine unisecanti le generatrici, sono sempre equivalenti, siccome appare dalla rappresentazione piana.

In forza di questo lemma, due curve A ed A', infinitamente vicine sopra F e non equivalenti, segheranno sulle K gruppi di m punti non equivalenti; ed appare tosto, dalla nostra costruzione, che le curve successivamente costruite $A'', A''' \cdots$, segheranno sulle K gruppi infinitamente successivi disequivalenti, che determinano serie g_m successive, corrispondenti a traiettorie del gruppo continuo di trasformazioni sulle relative superficie di Jacobi.

Il confronto qui istituito è interessante, sebbene non più necessario per stabilire il teorema fondamentale che costituisce l'oggetto di questa Nota.